

*На правах рукописи*

*Berez-*

**УСАТЮК ВАСИЛИЙ СТАНИСЛАВОВИЧ**

**МЕТОДЫ, АЛГОРИТМЫ И АППАРАТНЫЕ СРЕДСТВА  
ПОСТРОЕНИЯ НИЗКОПЛОТНОСТНЫХ КОДОВ ДЛЯ  
АРХИВНОЙ ГОЛОГРАФИЧЕСКОЙ ПАМЯТИ**

Специальность 05.13.05 – Элементы и устройства  
вычислительной техники и систем управления

**ДИССЕРТАЦИЯ**  
на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель:  
доктор технических наук  
С.И. Егоров

КУРСК – 2020

## Содержание

СПИСОК ПРИНЯТЫХ СОКРАЩЕНИЙ .....	4
<b>ВВЕДЕНИЕ.....</b>	<b>6</b>
1   Анализ существующих методов и алгоритмов построния низкоплотностных кодов применительно к архивной голографической памяти ЭВМ .....	12
1.1 Характеристики ошибок в каналах записи-воспроизведения архивной голографической памяти .....	12
1.1.1 Архивная голографическая память .....	12
1.1.2.   Структура помехоустойчивого кодирования архивной голографической памяти .....	24
1.2.1 Коды с низкоплотностной проверочной матрицей (Коды Галлагера)..	27
1.2.2 Алгоритмы мягкого декодирования низкоплотностных кодов .....	30
1.2.3   Методы оценки эффективности исправления ошибок низкоплотностными кодами.....	35
1.3.1 Классификация методов построения низкоплотностных кодов .....	37
1.3.2 Методы оптимизации протографа.....	40
1.3.2.1   Метод эволюции функции плотности вероятностей (Density Evolution) .....	40
1.3.2.2   Методы, использующие аппроксимацию эволюции функции плотности вероятностей, взаимную информацию (Gaussian Approximation, P/EXIT-chart) .....	49
1.3.3   Методы расширения протографа циклическими матрицами перестановок .....	56
1.4 Выводы.....	60
2   Создание процедуры, методов и алгоритмов построения низкоплотностных кодов для архивной голографической памяти .....	63
2.1 Процедура построения квазициклических низкоплотностных кодов....	63
2.2 Метод расширения базовой проверочной матрицы .....	80
2.3 Методы адаптации по длине квазициклических низкоплотностных кодов (cyclic group decomposition, floor lifting, floor scale modular lifting).....	85
2.4 Выводы.....	91
3   Разработка методов и алгоритмов определения кодового расстояния низкоплотностных кодов с использованием геометрических решеток .....	92
3.1 Методы определения кодового расстояния помехоустойчивых блочных кодов .....	92
3.1.1 Метод Брауэра-Циммермана.....	92
3.1.2 Верхняя граница кодового расстояния методом Маккея-Вонтабеля-Смарандаши.....	98
3.1.3 Нижняя оценка кодового расстояния Таннера.....	100
3.2.1   Детерминированный метод определения кодового расстояния с использованием геометрических решеток .....	104

3.2.2 Вероятностный метод определения кодового расстояния с использованием геометрических решеток .....	119
3.3 Выводы.....	123
4 Разработка и исследование быстродействующих аппаратных средств построения низкоплотностных кодов .....	125
4.1 Аппаратно-ориентированная модификация метод поиска кратчайшего вектора в решетке.....	125
4.2 Построение низкоплотностных кодов для архивной голографической памяти с повышенной корректирующей способностью.....	134
4.3 Выводы.....	149
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....</b>	<b>150</b>
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....</b>	<b>152</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Пример протографа построенного МЕТ QC LDPC-кода</b>	
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Акты о внедрении предложенных методов построения LDPC-кодов .....</b>	<b>170</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Расширенные протографы.....</b>	<b>172</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ 4. Список исходных и бинарных файлов с использованными/реализованными и/или предложенными автором методами в процессе построения МЕТ QC LDPC-кодов .....</b>	<b>174</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ 5. Скриншот результатов конкурса по Геометрии Чисел технического университета Дармштадт.....</b>	<b>175</b>

## СПИСОК ПРИНЯТЫХ СОКРАЩЕНИЙ

- Низкоплотностный код, код Галагера (LDPC, Low Density Parity Check Codes).
- Низкоплотностный квазициклический код (QC-LDPC код, Quasi-Cyclic LDPC Codes), LDPC-код состоящий из блочных матриц.
- Граф-Таннера (Tanner-graph).
- Геометрическая решетка (Решетка, Lattice).
- АБГШ-канал (Additive white Gaussian noise).
- Весовой спектр кода (Weigth Spectrum Enumerator).
- Порог итеративного декодирования (Iterative threshold).
- Фактор-Граф, граф факторизации вероятностей (Factor graph).
- Субоптимальный расчет маргинальных вероятностей без учета циклов (loopy Belief Propagation, Belief Propagation, Message Passing, Sum-Product).
- Min-sum декодер – аппаратно-ориентированная аппроксимация субоптимального расчета маргинальных вероятностей без учета циклов, при высоких отношениях Сигнал-Шум Sum-Product эквивалентно Min-Sum.
- “Трэпин-сет” (Trapping set) – подграф, образованный циклом или их пересечением, обуславливающий ошибку при субоптимальном декодировании без учета циклов (loopy Belief Propagation).
- Приближенное значение связности (ACE, Approximate Cycle Extrinsic Message Degree) цикла – локальное число инцидентности узлов, содержащихся в цикле соответствующей длины, без учета топологии внешних подграфов.
- Спектр связности (Extrinsic Message Degree Spectrum, EMD Spectrum) – минимальное значение связности для массива циклов в графе с учетом глобальной структуры циклов.
- ACE Spectrum – локальная аппроксимация спектра связности (EMD Spectrum).
- Алгоритм разреза графа (cutset condition) - алгоритм, осуществляющий разбиение циклов путем назначения определенного значения символному узлу. Позволяет улучшить порог итеративного декодирования графов низкоплотностные коды с неоднородной структурой факторов.

Низкоплотностные коды с неоднородной структурой факторов (Multi-edge Type LDPC, ME-LDPC). Графы, таких кодов содержат набор “надежных выколотых” символьных узлов, востанавливающих стирание за некоторое приемлемое число итераций (A4JA). Это позволяет улучшить порог итеративного декодирования, за счет увеличения числа итераций для сходимости кода.

Эволюция плотностей (Density Evolution) – метод оценки величины сигнал-шум (порога итеративного декодирования) при заданной вероятности ошибки.

Ковариационной Эволюции плотностей (Covariance Evolution)- обобщения метода Эволюции плотностей на случай конечного числа символьных узлов в графе кода.

Гауссова аппроксимация аппроксимацию эволюции функции плотности вероятностей (Gaussian Approximation) - приближенный метод вычисления Эволюции плотностей, основанный на предположение о Нормальном распределении функции плотностей вероятности символьных узлов и вычисление соответствующих стат. моментов.

Оценка порога итеративного декодирования при помощи графиков эволюции априорной и апостериорной взаимной информации (EXIT-charts) случайных величин и факторов для заданного распределения весов символов и проверок – ансамбля LDPC-кодов.

Оценка порога итеративного декодирования при помощи графиков эволюции априорной и апостериорной взаимной информации (Protograph EXIT-charts, PEXIT-charts) случайных величин и факторов для заданной базовой матрицы LDPC-кода.

Алгоритм расширения графа путем последовательного добавления ребер (Progressive edge growing, PEG-алгоритм).

Hill-Climbing («восхождение на вершину», поиск экстремума) – алгоритм итеративного расширения графа.

Guess-and-Test– алгоритм расширения графа путем случайного броска и проверки выполнения графом некоторых условий (обхват, спектра связность).

## **ВВЕДЕНИЕ**

### **Актуальность темы**

В связи с интенсивным ростом объема информации, хранимой в электронном виде, в настоящее время актуальными являются вопросы развития систем голограммического архивного хранения данных. Особенностью голограммических методов чтения/записи является высокий уровень ошибок в считанных данных, что вызывает необходимость применения помехоустойчивого кодирования. Для коррекции ошибок, возникающих при хранении и считывании данных в голограммической памяти, в настоящее время используют коды с низкой плотностью проверок по четности.

Низкоплотностные коды были предложены Р. Галлагером в 60х годах прошлого века и исследовались Таннером, Зябловым, Зигангиевым, Маргулисом, Габидулиным, Колесниковым, Степановым, Чертковым, Рыбиным, Фоссорье, Васичем, Дивсаларов, Деклерком, Монтанари, Сурласом, Вонтобелем, Ричардсоном, Урбанке и другими исследователями. Приложениями этих кодов для голограммической памяти занимались компании AT&T (Alcatel-Lucent /NOKIA), Hitachi Maxell, Sony, Panasonic, Mitsubishi, Nichia, Alps Electric, Bayer Material Science, Sanyo, Lite-on. Корректирующие способности используемых этими компаниями кодов далеки от теоретических пределов. Дальнейшее развитие методов хранения информации в архивной голограммической памяти требует применения новых кодов с повышенной исправляющей способностью, допускающих декодирование с приемлемой аппаратной сложностью.

Таким образом, объективно сложилось **противоречие** между необходимостью в построении низкоплотностных кодов с повышенной исправляющей способностью для использования в голограммической памяти и отсутствием методов, алгоритмов и аппаратных средств, которые могли бы обеспечить эффективное их построение.

В связи с этим, **актуальной научно-технической задачей** является повышение эффективности исправления ошибок, возникающих в каналах

записи/воспроизведения накопителей архивной голограммической памяти, за счет построения низкоплотностных кодов, обладающей лучшей помехоустойчивостью.

**Целью диссертационной работы** является разработка методов, алгоритмов и аппаратных средств построения квазиклинических низкоплотностных кодов для архивной голограммической памяти.

В соответствии с поставленной целью в диссертации решаются на следующие **задачи**:

1. Анализ существующих методов и алгоритмов построения низкоплотностных кодов;
2. Создание процедуры, методов и алгоритмов построения низкоплотностных кодов для архивной голограммической памяти;
3. Разработка методов и алгоритмов определения кодового расстояния с использованием методов геометрии чисел;
4. Разработка быстродействующих аппаратных средств построения низкоплотностных кодов.

Предложенные методы построения низкоплотностных кодов с мягким итеративным декодированием и аппаратные средства для построения кодов найдут применение при проектировании накопителей архивной голограммической памяти.

**Объект исследований** – средства исправления ошибок, возникающих в каналах записи/воспроизведения накопителей голограммической памяти.

**Предмет исследований** - методы, алгоритмы и аппаратные средства построения низкоплотностных кодов.

**Методы исследования.** Для решения поставленных задач применялись методы: помехоустойчивого кодирования, геометрии чисел, абстрактной алгебры, теории графов, теории вероятностей, теории сложности вычислений, имитационного моделирования, параллельного программирования, теории проектирования ЭВМ.

## **Научная новизна и положения, выносимые на защиту:**

1. Процедура построения низкоплотностных кодов, позволяющая получить коды с повышенной эффективностью исправления ошибок. Отличительными особенностями процедуры являются модификация протографа в случае «неудачного» его расширения и использование дистанческих свойств кодов и их спектров связности для просеивания кодов кандидатов.

2. Метод расширения базовой проверочной матрицы (протографа) процедуры построения квазициклических низкоплотностных кодов, позволяющий повысить вероятность успешного построения квазициклического кода. Отличительной особенностью метода является последовательное использование жадного метода запрещенных коэффициентов и метода имитации отжига.

3. Метод адаптации по длине квазициклических двоичных низкоплотностных кодов, отличительной особенностью которого является расширение множества допустимых циклических сдвигов в кольце циклических матриц перестановок, позволяющий улучшить спектры связности кодов и экономящий память.

4. Детерминированный и вероятностный методы оценки кодового расстояния линейных блочных кодов, опирающиеся на быстрые методы поиска кратчайшего вектора в решетке и значительно ускоряющие оценку кодового расстояния.

5. Структурно-функциональная организация устройства поиска кратчайшего вектора в решетке, позволяющего ускорить определение кодового расстояния. Отличительной особенностью устройства является одновременное выполнение всех мультиплексивных операций.

## **Практическая ценность работы состоит в следующем:**

- Созданная процедура и методы построения квазициклических низкоплотностных кодов позволили получить новый код для архивной голограммической памяти, обладающей энергетическим выигрышем около 0.15

дБ по сравнению с двоичным F-LDPC-кодом, предложенным компанией TrellisWare для голограммической архивной памяти.

- Предложенный метод адаптации кода по длине позволил улучшить связность графа Таннера, обеспечив энергетическим выигрыш в 0.1 дБ.
- Разработанное устройство поиска кратчайшего вектора в решетке обеспечивает выигрыш по быстродействию по сравнению с программной реализацией примерно 40 раз для низкоплотных кодов со скоростью  $\frac{1}{2}$ .

Результаты работы могут найти применение при создании новых контроллеров архивной голограммической памяти. Предложенные технические решения также могут быть использованы при разработке новых систем помехоустойчивого кодирования телекоммуникационных систем, например, для беспроводной связи (WI-FI, 5G) и оптических каналов передачи данных.

#### **Реализация и внедрение:**

Основные научные результаты и выводы диссертационной работы внедрены ООО «Техкомпания Хуавей», см. Приложение 2. Полученные автором результаты защищены компанией Huawei Technologies Co. 27-ю патентами: WO2019013662, WO2019013663, WO2018111129, WO2018093286, WO2018088923, WO2018030909, WO2017105270, WO2017105291, US20200220556, US20200153457, US20190349003, US20190273511, US20190268021, EP3649737, EP3652863, EP3539234, EP3533145, EP3529899, IN202037000519, IN202037002671, IN201917019480, IN201937021290, IN201937022330, CN110024295, CN110024294, CN111279618, CN111164897.

**Достоверность** результатов диссертации обеспечивается обоснованным и корректным применением положений и методов математического аппарата алгебры и комбинаторики, теории вероятности, теории графов, теории помехоустойчивого кодирования, теории проектирования ЭВМ, а также подтверждается совпадением теоретических выводов с результатами имитационного моделирования, в том числе, с использование графических ускорителей и программируемых логических интегральных схем.

## **Соответствие диссертации паспорту научной специальности.**

Согласно паспорту специальности 05.13.05 – Элементы и устройства вычислительной техники и систем управления, проблематика, рассмотренная в диссертации, соответствует пунктам 1, 2 и 4 паспорта специальности (1. Разработка научных основ создания и исследования общих свойств и принципов функционирования элементов, схем и устройств вычислительной техники и систем управления. 2. Теоретический анализ и экспериментальное исследование функционирования элементов и устройств вычислительной техники и систем управления в нормальных и специальных условиях с целью улучшения технико-экономических и эксплуатационных характеристик. 4. Разработка научных подходов, методов, алгоритмов и программ, обеспечивающих надежность, контроль и диагностику функционирования элементов и устройств вычислительной техники и систем управления.)

**Апробация работы.** Основные положения диссертационной работы докладывались на 4 и 5 региональных научно-практической конференциях «Платоновские чтения» (г. Иркутск 2012, 2013), всероссийской научной конференции «Наука. Технологии. Инновации» (г. Новосибирск, 2012), всероссийских конференциях «Компьютерная безопасность и криптография» – «SIBECRYPT'12» в Институте динамики систем и теории управления СО РАН (г. Иркутск, 2012), «SIBECRYPT'13» (г. Томск, 2013), «XVI Всероссийском Симпозиум по прикладной и промышленной математики» (г. Челябинск, 2015), 18-й Международной научно-технической конференции «Проблемы передачи в сетях с системах телекоммуникаций» (г. Рязань, 2015), II и III международных конференциях «Инжиниринг & Телекоммуникации –En&T» (г. Москва/Долгопрудный, г. 2015, 2016), XIII международной научно-технической конференции «Новые информационные технологии и системы» (г. Пенза, 2016), XIII международной научно-технической конференции «Распознавание 2017», (г. Курск, 2017), XII Международной научной конференции «Перспективные технологии в средствах передачи информации - ПТСПИ-2017» (г. Владимир-Сузdalь, 2017), 15-й международной конференции IEEE East-

West Design & Test Symposium (г. Нови-Сад, Сербия, 29 Сентября- 2 октября 2017), 16-й международной конференции IEEE East-West Design & Test Symposium (г. Казань, Россия, 2018), конференции «Applied Mathematics Day» в МИАН РАН (г. Москва, 22 сентября 2017), конференции «Машинное обучение и анализ алгоритмов» в ПОМИ РАН (г. Санкт-Петербург, 18-20 декабря 2017 г.), 41-й Международной конференции «Telecommunications and Signal Processing» (г. Афины, Греция, 4-6 июля 2018 г.), 5-я международная конференция по матричным методам в математике и приложениях, “The 5th International Conference on Matrix Methods in Mathematics and Applications (МММА 2019)”, проходившей с 19 по 23 Августа 2019 г. в г. Москве, 43-й Международной конференции «Telecommunications and Signal Processing» (г. Милан, Италия, 7-9 июля 2020 г.).

**Публикации.** По материалам диссертации опубликовано 26 научных работ, в числе которых 5 статей, опубликованных в рецензируемых научных журналах и изданиях, рекомендуемых ВАК, 9 из которых проиндексированы в базе Scopus. Оригинальность технических решений предложенных автором подтверждена 27-ю патентами на изобретения.

**Личный вклад соискателя.** Все выносимые на защиту научные результаты получены соискателем лично. В опубликованных в соавторстве работах по теме диссертации лично соискателем предложено: в [95, 96, 99] параллельный метод поиска кратчайшего вектора в решетке, в [138, 141] параллельный метод ортогонализации базиса решетки, в [97, 99, 111, 122, 144-146] методы оценки кодового расстояния на основе геометрии чисел, в [98, 101, 103, 104, 105, 106, 143] методы построения низкоплотностных кодов, в [99] быстродействующее устройство поиска кратчайшего вектора в решетке, в [100, 102, 124-126, 147] метод адаптации кода по длине.

**Объем и структура работы.** Диссертационная работа состоит из введения, четырех разделов, заключения, списка литературы и приложений. Работа содержит 175 страниц текста (с учетом приложений) и иллюстрируется 62 рисунками и 13 таблицами; список литературы включает 147 наименований.

# 1 Анализ существующих методов и алгоритмов построения низкоплотностных кодов применительно к архивной голографической памяти ЭВМ

## 1.1 Характеристики ошибок в каналах записи-воспроизведения архивной голографической памяти

### 1.1.1 Архивная голографическая память

Под голографической памятью понимают набор технологий, позволяющий осуществлять запись, воспроизведение и переформирование оптических волновых полей оптического электромагнитного излучения, при котором с помощью лазера регистрируются, а затем восстанавливаются изображения трехмерных объектов. Примеры записи и чтения информации представлены на рис. 1.1-1.2

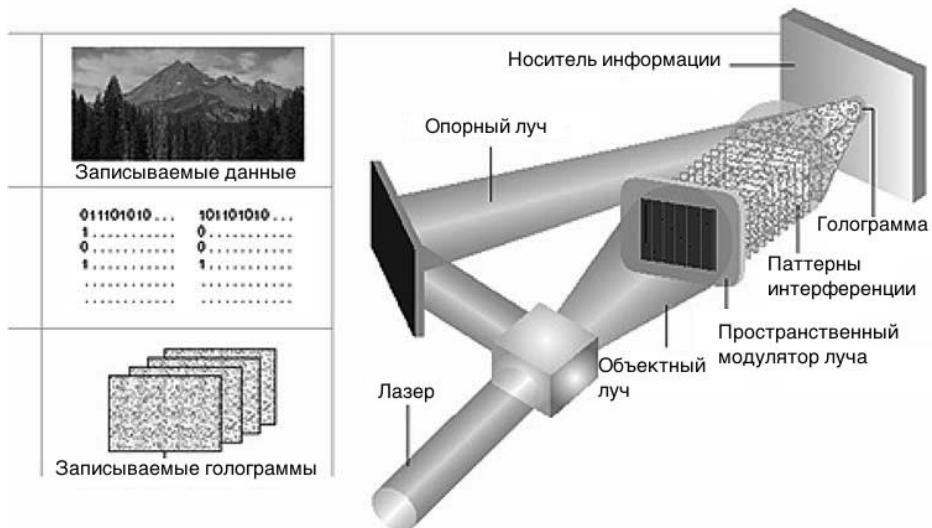


Рисунок 1.1 - Процесс записи информации на голографический носитель

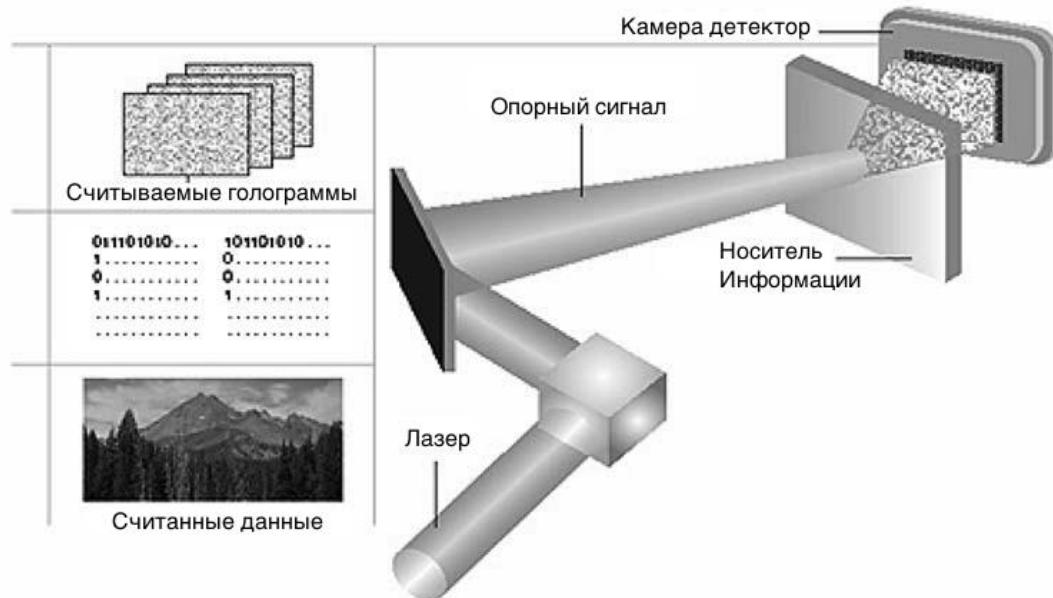


Рисунок 1.2 - Процесс считывания информации с голограммического носителя

К особенностям оптических носителей голографической памяти относятся высокие требования к помехоустойчивости кодов: вероятность ошибки на бит  $10^{-12}$  до  $10^{-15}$ , в сочетание применением кодов с сравнительно высокой избыточностью скорость кода 0.5. К достоинствам оптических носителей голографической памяти относятся:

- Высокая плотность информации на квадратный дюйм;
- Высокая надежность хранения, низкое потребление энергии, низкий уровень шума;
- Произвольный доступ к любому из секторов носителя;
- Низкая стоимость носителей информации.

К недостаткам оптических носителей голографической памяти относятся однократная запись носителя и новизна метода архивной голографического записи. Применение принципиально нового подхода к хранению информации встречает сопротивление со стороны традиционных оптических носителей;

Классификация голографической записи по типу записи на носитель  
По способу записи интерферируемых изображений – голограмм на носитель голографической информации (регистрирующую среду)

подразделяют на два типа плоские (двумерные), если  $Q < 1$  и объёмные (трёхмерные или толстые), если  $Q > 1$ , в зависимости от величины параметра Клейна  $Q$ :

$$Q = 2\pi\lambda L/n_0\Lambda^2, \quad (1)$$

где  $\lambda$  – длина волны,  $L$  – толщина регистрирующего слоя,  $n_0$  – средний показатель преломления слоя,  $\Lambda$  – расстояние между интерференционными плоскостями (паттернами интерференции).

Воспользуемся параметрами архивной голограммической памяти, предложенной в работе [1],  $\lambda \approx 405\text{нм}$ ,  $L = 1.5\text{мм}$ ,  $\Lambda < 1\text{нм}$ ,  $n_0$  примем равным за 1.5 (зависит от типа фотополимера). В результате решения уравнения (1), легко убедиться, что применяется объемная голограмма, осуществляющая мультиплексирование голограмм в трехмерные паттерны интерференции. Отметим, что показатель преломления слоя чувствителен к изменению температуры, по этой причине требуется постоянный контроль температуры среды и носителя, осуществляемый при помощи инфракрасного пирометра и внесение поправок в работу оптической системы. Например, эталонная длина волны  $\lambda = 405\text{нм}$  используется при температуре 25 градусов Цельсия. Однако варьирует от 402 нм до 408 в диапазоне от 10-40 градусов. Температурную компенсацию угла поворота требуют системы зеркал, управляемые гальванометрами [см, стр. 325,1]. Не стационарность температуры среды и отдельных узлов обуславливает естественный неустранимый шум, обусловленный общей несогласованностью параметров системы.

### Модель каналов записи и чтения архивной голограммической памяти

В процессе модуляции данных записываемых на каждую из голограмм пространственный модулятор луча вносит ряд ошибок:

- Ошибки, обусловленные особенностями (искажениями) волнового фронта луча, проходящего через пространственный модулятор луча (ПМЛ). Волновой фронт проходящий через ПМЛ далек от плоского. Эти искажения

моделируются гауссовой волновой функцией. Это обуславливает 10% стандартное отклонение функция Гаусса от центра к краям.

- Ошибки динамического диапазона. Неравномерность динамического диапазона, не позволяющая получить абсолютное отсутствие света. Фазовая маска, располагаемая после ПЛМ, осуществляющая усреднение интенсивность света в частотной области, ограничивает динамический диапазон;
- ошибки в следствие температурной не стационарности среды;
- ошибки обусловленные когерентный шумом источника света;
- прочие виды ошибок (электронный шум фазовой маски, влияние зеркал и масок).

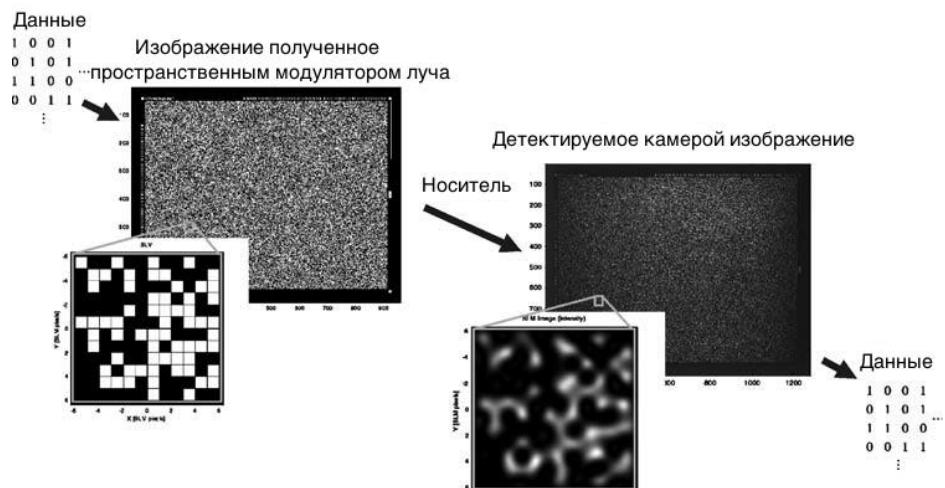


Рисунок 1.3 - Процесс чтения и записи голограммического носителя информации при помощи пространственного модулятора луча и камеры детектора

На вход пространственному модулятору сигнала подается битовый массив, который опираясь на разрешающую способность пространственного модулятора луча разбивается на страницы, отдельные голограммы, Рис. 1.3.

Ключевые узлы системы чтения и записи голограммического носителя информации изображены на Рис. 1.4.

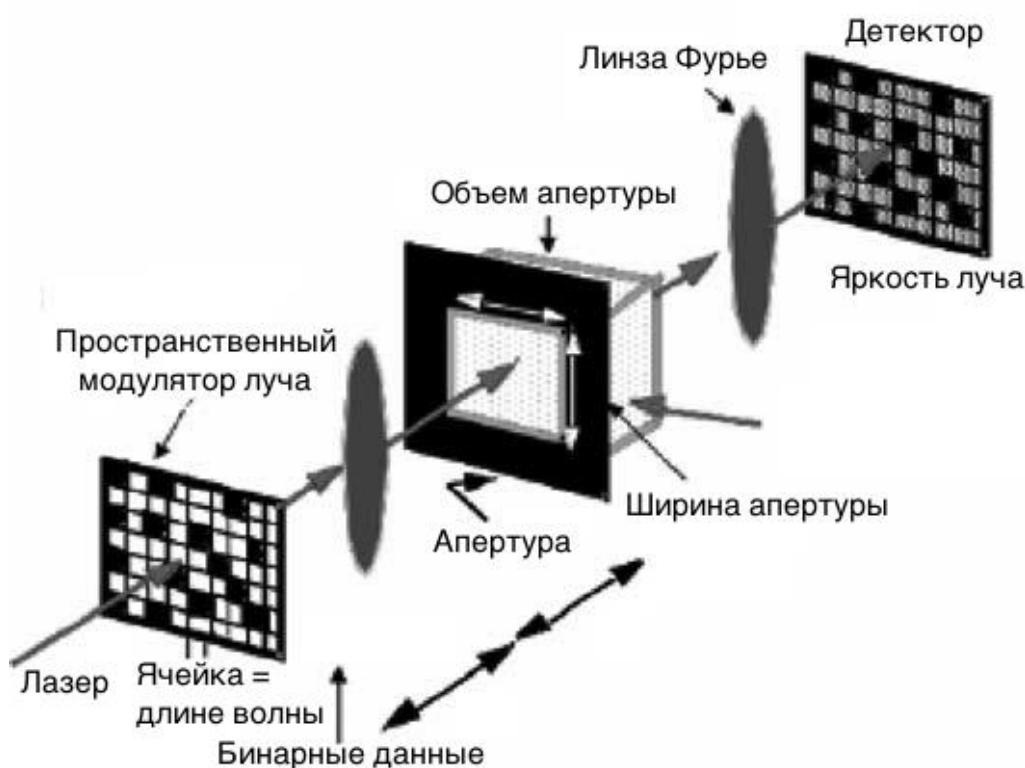


Рисунок 1.4 – Изображение ключевых узлов чтения и записи голограммического носителя информации: пространственного модулятора луча, аппертура голограммического носителя информации и камеры детектора

При это в силу физических ограничений модулятора пиксели, соответствующие сигналу 0 интенсивности, представляют точками малой интенсивности. Величина, характеризующая в сколько раз амплитуда «1» больше «0» называют амплитудным коэффициентом контрастности (Amplitude contrast ratio, ACR). Обычно для пространственных модуляторов она превосходит величину 80:1. Отклонение этого параметра обусловленная шумами описывается стандартным отклонением в 1%. Для нормализации(усреднения) источника света в частотной области применяется фазовая маска, тогда оптическая передаточная функция с ее учетом описывается уравнением:

$$f(x, y) = \sum_{n=-N/2}^{n=N/2} \sum_{m=-M/2}^{m=M/2} f(m, n) e^{i\phi(m, n)} \text{rect}\left(\frac{x-m\Delta}{\alpha\Delta}\right) \text{rect}\left(\frac{y-n\Delta}{\alpha\Delta}\right),$$

где  $\phi(m, n)$  – параметры фазовой маски принимающие значения  $\phi \in (-\pi, \pi)$ ,  $M$  – число столбцов,  $N$  – число строк в аппертуре голограммы,  $\Delta$ - шаг

пикселя в пространственном модуляторе луча,  $\alpha \in (0,1]$  – коэффициент линейного заполнения пространственного модулятора луча,  $\text{rect}$  – прямоугольная функция.

Фазовая маска способна осуществлять манипуляцию с некоторым фиксированным шагом, по умолчанию с  $2\pi/16$ . Рабочая область пикселя меньше размера пикселя,  $\alpha < 1$ . Соответствующая передаточная функция примет вид:

$$f(x, y) = \left[ \sum_{n=-N/2}^{n=N/2} \sum_{m=-M/2}^{m=M/2} f(m, n) e^{i\phi(m,n)} \delta(x - m\Delta, y - n\Delta) \right] * \left[ \text{rect}\left(\frac{x}{\alpha\Delta}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{\alpha\Delta}\right) \right], \quad (\text{X})$$

где  $*$  – двухмерная свертка,  $\delta$  – дельта функция

Функция поля задней фокальной плоскости первой линзы — это свертка Фурье от передаточной функции  $f$ :

$$F(u, v) = K \left\{ \left[ FT[f(m, n) e^{i\phi(m,n)}] * \sum_k \sum_l \delta\left(u - \frac{k}{\Delta}, \frac{v_l}{\Delta}\right) \right] \right\} \text{sinc}(u\alpha\Delta) \text{sinc}(v\alpha\Delta),$$

где К коэффициент пропорциональности,  $\text{sinc}(x) \frac{\sin(\pi x)}{(\pi x)}$ ,  $u$  и  $v$  – пространственные частоты соответствующие  $x, y$ .

Опираясь на функцию поля  $F(u, v)$ , эффект заполнения пространственным модулятором моделируется в частотной области при помощи покомпонентного произведения свертки Фурье на передаточную функцию пространственного модулятора.

Оптические шум моделируются как круговое симметричное комплексное нормальное распределение, заданное уравнением:

$$n_0 = n_i + i n_q,$$

где  $i$  – мнимая единица.

Типовые параметры для моделирования каналов голограмической архивной памяти следующие:

- амплитудный коэффициент контрастности =10;

- Отклонение этого параметра по апертуре со стандартным отклонением 1%; 10% стандартное отклонение функция Гаусса от центра к краям;
- коэффициент линейного заполнения пространственного модулятора луча 95%;
- частотная разрешающая способность равна величине Котельникова-Найквиста;
- детектируемый камерой коэффициент линейного заполнения 40%;
- дисперсия оптического шума 0.012, м.о. 0;
- дисперсия электронного шума 0.001, м.о. 0.43;
- стандартное отклонение черного 1%, м.о. 0.

Амплитудная модель канала детектора(камеры) при чтении носителей архивной голографической памяти

Интенсивность излучения, детектируемого камерой с голографического носителя, можно описать уравнением:

$$I_A = |(g \cdot a) * h_A + n_i + i n_q|^2 + n_e,$$

где  $g$  – двухмерный массив, характеризующий амплитуду света,  $a$  – данные (например, случайный 1 или 0),  $h_A$  – функция распределения пикселей по амплитуде,  $n_0 = n_i + i n_q$  оптический/рассеянный шум заданный аддитивным и круговым нормальным распределением с 0 математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma^2$  и  $n_e$  - аддитивный белый гауссовый шум.

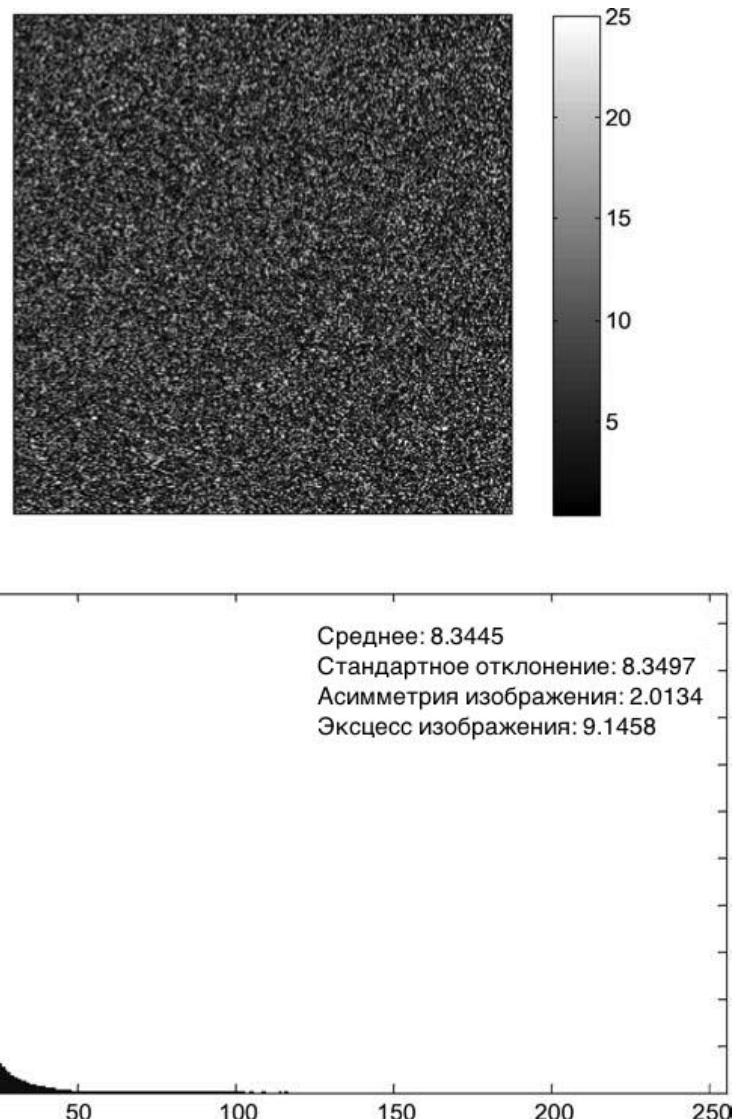


Рисунок 1.5 - Зашумленное изображение, полученное моделью с когерентным шумом с одной степенью свободы

Мощность амплитуды сигнала превосходит мощность шума  $n_0$  в 10 раз. Полученная упрощенная модель канала считывания архивной голограммической памяти является достаточно точно несмотря на то, что не описывает распределение нулей на носителе. Когерентный шум полученный, опираясь на этот метод соответствует хи-квадрат методу с одной степенью свободы, см Рис. 1.5. Экспериментальные результаты, полученные на основе данной упрощенной модели представлены на Рис. 1.6. Наблюдается существенное отличие полученных результатов с упрощенной модели на Рис. 1.5.

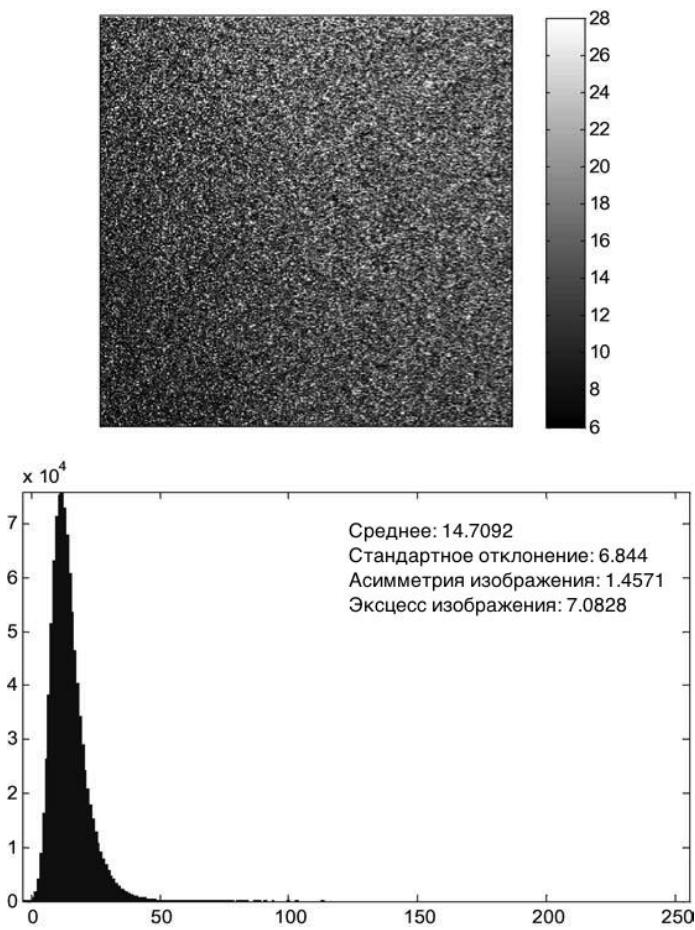


Рис 1.6 Зашумленное изображение, полученное путем экспериментального детектирования с голограммического носителя

С целью уточнения модели для построения системы помехоустойчивого кодирования в работе [1] было предложено использовать 3.6 степени свободы в распределение когерентного шума, а также был усреднен максимальный спектр (случайная интерференционная картина, которая образуется при взаимной интерференции когерентных волн, имеющих случайные сдвиги фаз и/или случайный набор интенсивностей) опираясь на свойства политопического фильтра и разрешающей способности пространственного модулятора луча, Рис. 1.7. В результате полученная модель канала чтения архивной голограммической памяти демонстрирует результаты близкие к экспериментальным замерам,

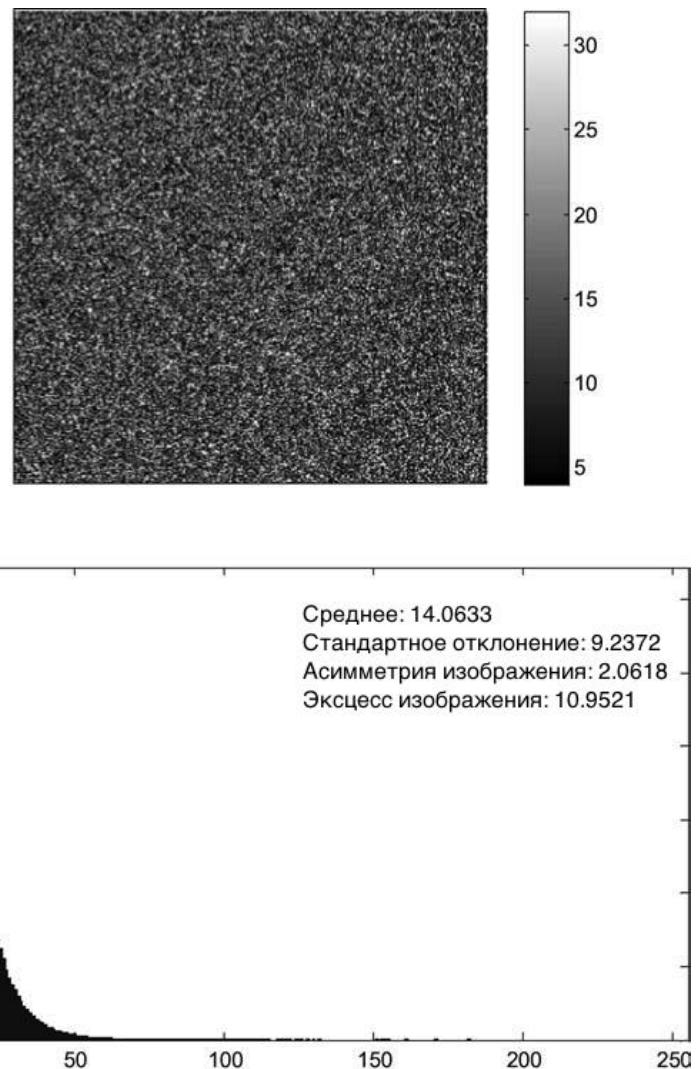


Рисунок 1.7 - Зашумленное изображение, полученное в соответствие с 3.6 степенями свободы в распределение когерентного шума и усреднением максимального спекла

Метрики модели архивной голограммической памяти, описывающие состояние, канала

В случае построение многоуровневой модели помехоустойчивого кодирования, которую мы рассмотрим позже, возможно устраниТЬ явление корреляции шума для каждой из отдельных голограмм. Получив набор параллельных АБГШ-каналов для каждой из голограмм.

Наиболее широко используемой метрикой, характеризующей отношение Сигнал-Шум (SNR) вычисляется по формуле:

$$SNR \equiv \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_0^2}},$$

где  $\mu_1, \mu_0$  среднее,  $\sigma_1$  и  $\sigma_0$  стандартные отклонения детектирования 1 и 0 соответственно.

В условия АБГШ-канала входная вероятность ошибки на бит вычисляется по формуле:

$$InBER = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{Q}{\sqrt{2}} \right),$$

где  $\operatorname{erfc}$  –функция ошибки  $\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$  и  $Q = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_1 + \sigma_0}$ .

Формула для вычисления Сигнал-Шум (SNR) в ДБ имеет вид:

$$SNR_{\text{ДБ}} \equiv 20 \log_{10} \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_1 + \sigma_0}.$$

На АБГШ-канале Сигнал-Шум можно преобразовать в усредненную величину битовой ошибки:

$$InBER_{avg} = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \operatorname{erfc} \left( \frac{Q_i}{\sqrt{2}} \right),$$

$Q_i$  –отношения Сигнал-Шум для каждой из голограмм.

Соответственно усредненное по голограммам отношения Сигнал-Шум вычисляется по формуле:

$$Q_{avg} = \sqrt{2} \operatorname{erfc}^{-1}(2BER_{avg}).$$

Используя последнюю формулу, мы можем получить соотношение Сигнал-Шум для каждой из голограмм (страницы):

$$SNR_{page} = 20 \log_{10} [\sqrt{2} \operatorname{erfc}^{-1}(2BER_{avg})].$$

Логарифм отношения правдоподобия на АБГШ-канале голографической памяти задается уравнением:

$$LLR(I) = \log \frac{\sigma_1}{\sigma_0} - \frac{1}{2} \left( \frac{I - \mu_0}{\sigma_0} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{I - \mu_1}{\sigma_1} \right).$$

Эти значения будут использоваться в качестве апостериорных вероятностей при декодировании помехоустойчивых кодов.

## Плотность записи информации на носитель архивной голограммической памяти

Объем записываемой информации зависит от разрешающей способности пространственного модулятора (числа точек голограммы), разрядности представления каждой из модулируемой точки (домена) и числа мультиплексируемых слоев. В рассматриваемой нами модели оптической голограммической памяти с целью упрощения детектирования будет применяться двоичное представление данных - черно-белая модуляция луча. Например, в случае разрешающей способности 1200x1200 и двоичном представлении информации. Объем информации до применения помехоустойчивого кодирования, хранимый в одной голограмме информации равен около 0.17 кб.

Если рассматривать среду носителя информации изотропной в результате трехмерного мультиплексирования голограмм в носителе с толщиной слоя  $L$  объема  $V$  и длиной волны  $\lambda$  максимальное число ортогональных компонентов Фурье  $n$  равное [см. стр. 41, 1]:

$$n \leq \left( \frac{2n_0 L}{\lambda} + 1 \right)^3 \cong 8n_0^3 \frac{V}{\lambda^3}.$$

Например, в случае применения носителя толщиной 1.5 мм и длины волны 0.4 мкм и показателя преломления 1,5 получим примерно 77 Гбит на квадратный сантиметр.

Теоретический предел плотности записи информации на носитель архивной голограммической памяти

Используя понятие пространственной частоты (Spatial Frequency)  $f_g$  величины, обратной периоду структуры изображения. Рассматривая на пределе среду голографического носителя в качестве сферы (максимальный объем). Можно сформулировать голографический аналог предела Шеннона для плотности информации на единицу площади (Band volume) [2, 3]:

$$B = f_g V_{sph} = f_g \frac{4\pi}{3} \left( \frac{2n_0}{\lambda} \right)^3,$$

$$C = B \log_2(1 + \frac{S}{N}),$$

где С — пропускная способность канала, бит/с; В — полоса пропускания канала, Гц; S — полная мощность сигнала над полосой пропускания, Вт или В<sup>2</sup>; N — полная шумовая мощность над полосой пропускания, Вт или В<sup>2</sup>;  $f_g$  — пространственная частота, 1/м.

Для плиточного (slab, без пересечения в отличие от черепичного способа записи) способа записи информации  $f_g \leq 0.1$ . Например, в случае применения носителя толщиной 1.5 мм и лазера с длинной волны  $\lambda = 405\text{нм}$  предельная плотность информации составляет 133 Тбайта на квадратный сантиметр.

Например, в случае использования картриджа, состоящего из 10 голограмических карт, размером 135 x132.5.x 30 мм и  $\frac{S}{N} = 1$ , объем сохраненной информации равен 4.9 Петабайта.

### 1.1.2. Структура помехоустойчивого кодирования архивной голографической памяти

Для достижения требуемого уровня вероятности ошибки на бит  $10^{-12}$ - $10^{-15}$  в настоящее время в голографической памяти на страничном уровне используются помехоустойчивые низкоплотностные коды, Рис. 1.8

Страницный уровень коррекции ошибок представлен 2-х мерным массивом пикселей (голограммой-слоем в аппертуре) принимающий значение 0 и 1. Детектор снимает значения с носителя и формирует массив логарифмов правдоподобия, используемых при декодировании низкоплотностных кодов.

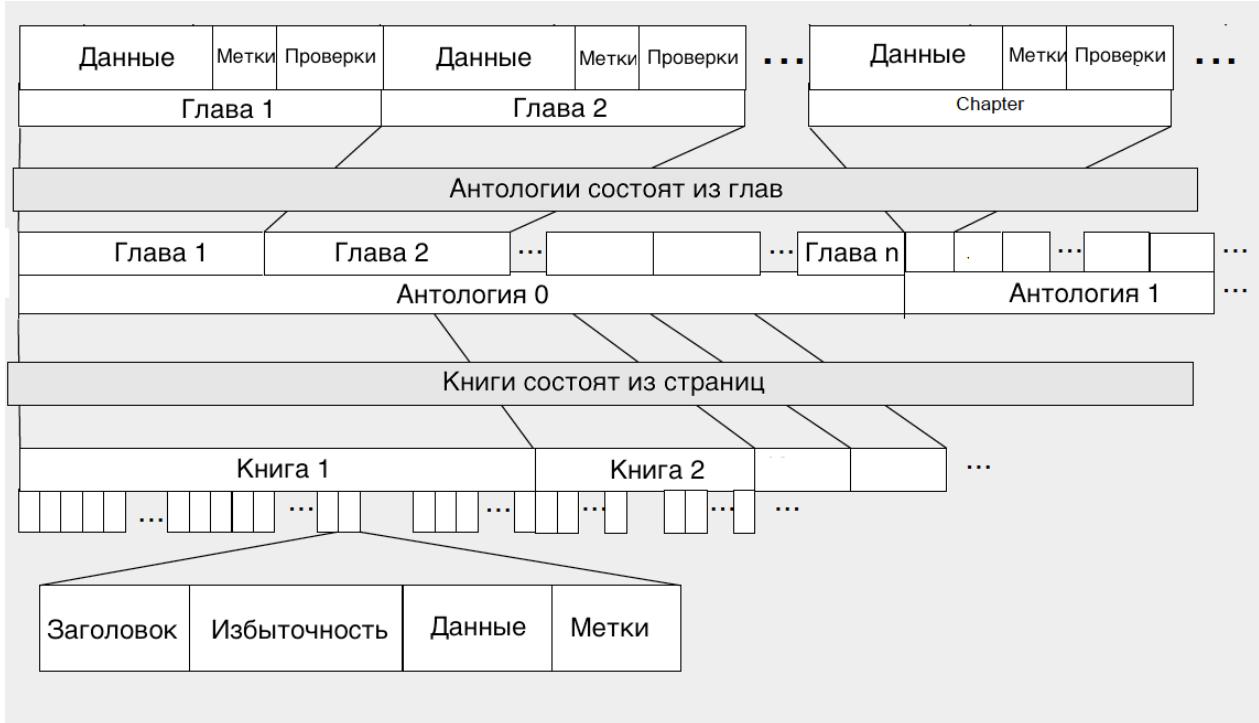


Рисунок 1.8 – Структура хранение данных в архивной голограммической памяти

Страницный уровень работает в условиях больших шумом, поэтому для коррекции используется код длинной 32768 со скоростью 0.5, содержащий 32 битный код контроля на четность. Ключевой задачей страницного уровня минимизация вероятности битовой ошибки до величины  $10^{-12} - 10^{-15}$ , в зависимости от назначения оборудования. На Рис. 1.9, представлены результаты декодирования кода с использованием 40 итераций.

Страницный уровень один из ключевых уровней, определяющих плотность архивной голограммической памяти. Все последующие уровни (главы, книги и онтологии) использующие коды Рида-Соломона и проверку на четность предназначены для обнаружения ошибок и исправления стираний.

Эффективность коррекции ошибок LDPC-кода применяемого в голограммической памяти, показано на рис. 1.10. Рисунок показывает отставание в 1 дБ, применяемого в архивной голограммической памяти, квазициклический LDPC-код от теоретического предела корректирующей способности линейного блочного кода. Дальнейшее увеличение помехоустойчивости на страницном

уровне, требует улучшение методов построения квазициклических LDPC-кодов.

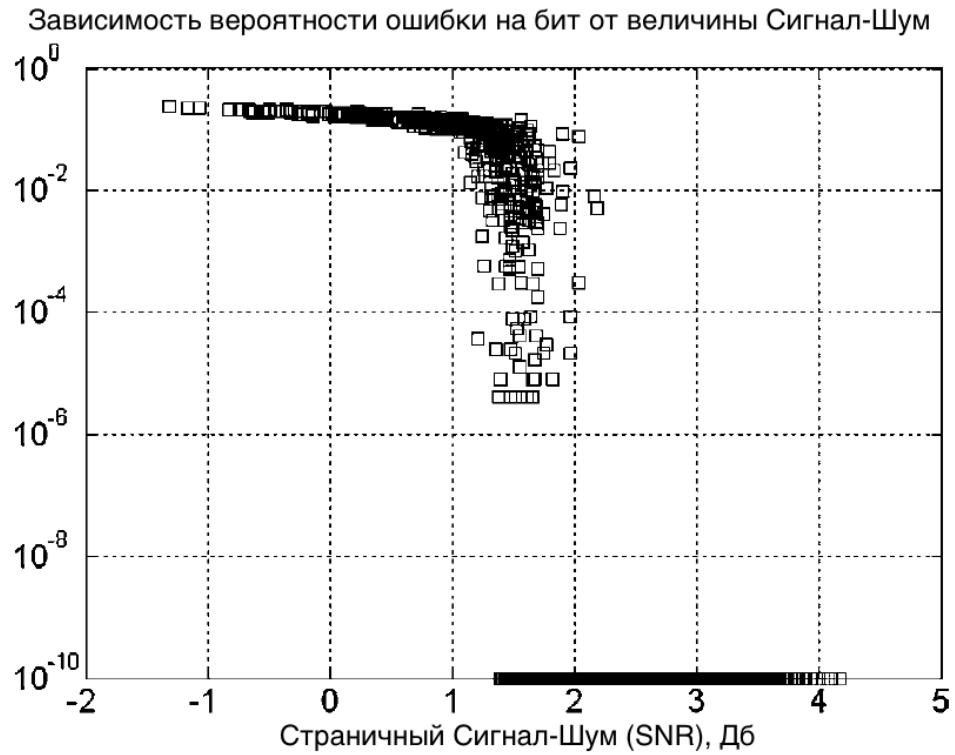


Рисунок 1.9 Результаты моделирования низкоплотностного кода со скоростью 0.5, длины  $N=32000$ , MS декодер с 40 итерациями предложенного в работе [1].

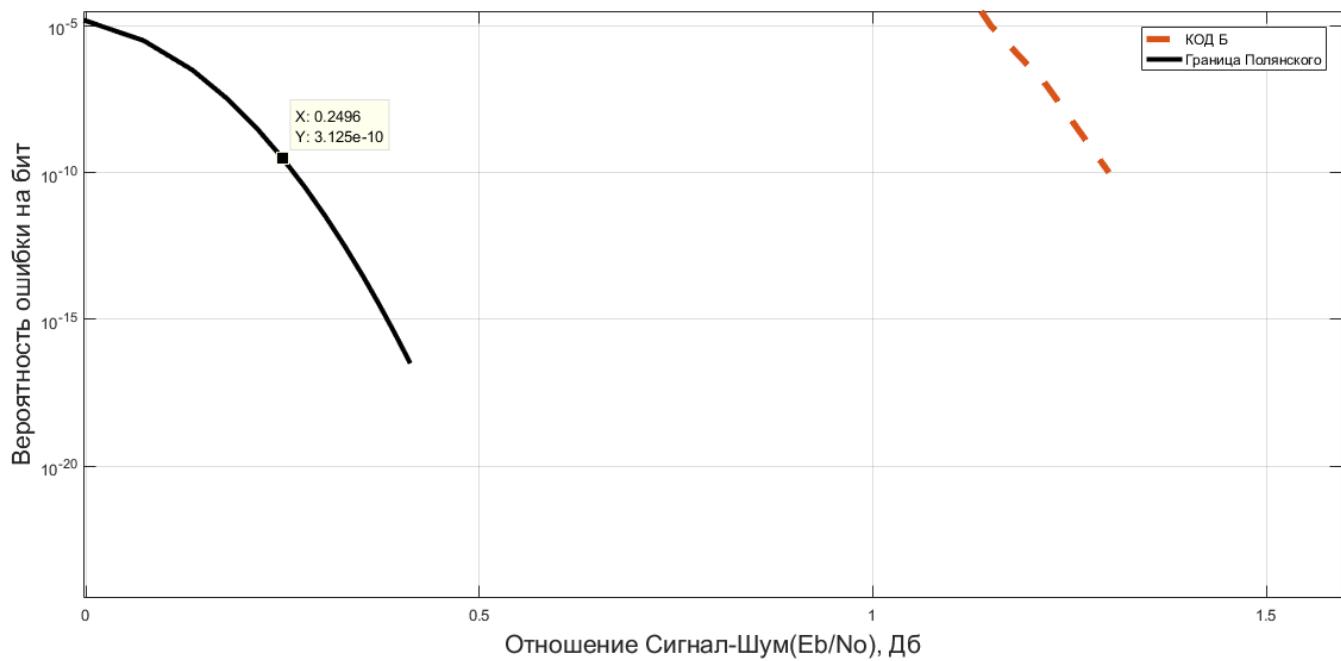


Рисунок 1.10 Эффективность коррекции ошибок квазициклическим LDPC-кодом применяемым в голограммической памяти

### 1.2.1 Коды с низкоплотностной проверочной матрицей (Коды Галлагера)

$(n, k)$  LDPC-код – это блочный линейный код размерностью  $k$  и длиной кодового слова  $n$ , задаваемый проверочной матрицей  $H$  размерностью  $(n-k) \cdot n$ , имеющей небольшую плотность отличных от нуля символов. По определению проверочной матрицы для любого кодового слова  $v$  LDPC-кода справедливо следующее  $v \cdot H^T = 0$ . Каждая строка проверочной матрицы  $H$  задает уравнение

$$\text{проверки на четность: } \sum_{t=0}^{n-1} v_t \cdot h_{i,t} = 0,$$

где  $i$  – номер строки проверочной матрицы (номер проверочного уравнения);  $t$  – номер символа кодового слова;  $h_{i,t}$  – элемент проверочной матрицы.

Ключевым преимуществом низкоплотностных кодов является возможность применения субоптимального мягкого алгоритма декодирования методом распространения доверия (BP, belief-propagation), обладающего значительно большей помехоустойчивостью по сравнению с жесткими алгоритмами декодирования.

Алгоритм BP предусматривает представление LDPC-кода в виде двудольного графа Таннера (пример графа Таннера приведен на рис. 1.11).

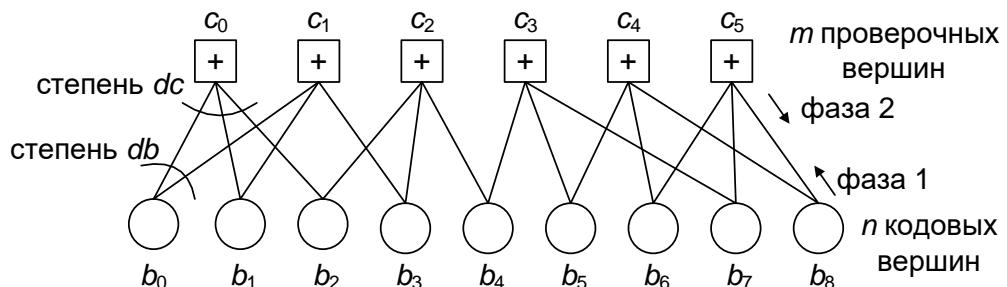


Рисунок 1.11. Двудольный граф двоичного регулярного LDPC кода длины 9.

Граф Таннера  $G$  имеет два множества вершин. Одно состоит из  $m=n-k$  проверочных вершин  $\{c_0, c_1, \dots, c_{m-1}\}$ , соответствующих  $m$  строкам матрицы  $H$ , второе состоит из  $n$  кодовых вершин  $\{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ , соответствующих  $n$

столбцам матрицы  $H$ . Кодовая вершина  $v_t$  соединяется ребром с проверочной вершиной  $c_i$  в том случае, если  $h_{i,t} \neq 0$ .

Квазициклический регулярный  $(J, L)$  LDPC-код ( $J$  – вес строки матрицы,  $L$  – вес столбца) задается проверочной матрицей:

$$H = \begin{bmatrix} I(p_{0,0}) & I(p_{0,1}) & \dots & I(p_{0,L-1}) \\ I(p_{1,0}) & I(p_{1,1}) & \ddots & I(p_{1,L-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I(p_{J-1,0}) & I(p_{J-1,1}) & \dots & I(p_{J-1,L-1}) \end{bmatrix},$$

где  $0 \leq j \leq J-1$ ,  $0 \leq l \leq L-1$  и  $I(p_{j,l})$  – подматрица перестановки размера  $z \cdot z$  (циркулянт – единичная матрица, циклически сдвинутая вправо на  $p_{j,l}$  символов).

Проверочная матрица регулярного кода также может содержать нулевые подматрицы размера  $z \cdot z$ . Если веса строк (столбцов) проверочной матрицы LDPC-кода принимают различные значения, то такой код называют нерегулярным.

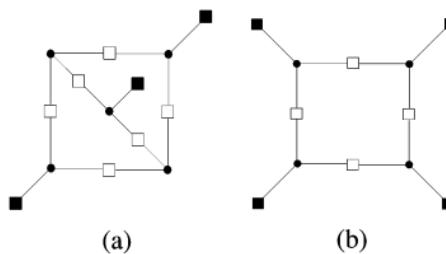
Структура графа Таннера и распределение строчных и столбчательных весов квазициклического LDPC-кода определяется базовой проверочной матрицей (граф Таннера которой называется протографом). Проверочная матрица квазициклического LDPC-кода получается путем расширения базовой матрицы подматрицами циклических перестановок. Использование циркуляント позволяет получать компактное представление квазициклического LDPC-кода и осуществлять параллельное кодирование и декодирование с глубиной параллелизма равной размеру циркулянта. Эти особенности обуславливают широкое применение квазициклических LDPC-кодов на практике.

В соответствии с итеративным алгоритмом декодирования ВР получение верных значений бит кодового слова осуществляется в результате многократного обмена сообщениями вершинами графа Таннера. Каждая итерация алгоритма содержит две фазы. В фазе 1 обновляются сообщения

проверочных вершин на основе анализа сообщений кодовых вершин; в фазе 2 – сообщения кодовых вершин на основе анализа сообщений проверочных вершин.

На эффективность ВР-декодирования отрицательно влияет наличие циклов в графе Таннера, образующих «трэппин-сеты» (Trapping set, TS, [4]) или  $(a,b)$ -подграфы (подграфы в графе Таннера, состоящие из  $a$  символьных узлов,  $b$  из которых инцидентны проверочным узлам с нечетными степенями). Эти подграфы обуславливают ошибку ВР-декодирования [5]. В случае если вектор ошибки изменит значения символьных узлов, инцидентных нечетному числу проверок, то, вследствие неправильного подсчета условных вероятностей на символьных узлах подграфа ошибка не будет скорректирована, даже если она является корректируемой в соответствие с дистанческими свойствами кода.

На рис. 1.12 изображены два  $(a, b)$ -подграфа. Левый подграф образован пересечением трех циклов длины 8, правый одним циклом длины 8.



Trapping sets: (a) (5, 3) and (b) (4, 4)

Рисунок 1.12 – Топологическое представление подграфа обуславливающего отказ мягкого декодирования ● -символьные узлы, □ -проверочные узлы с четной степенью, ■ - проверочные узлы с нечетной степенью инцидентности

Важной характеристикой LDPC-кода является спектр связности (ACE spectrum) графа Таннера, заданного проверочной матрицей кода  $H$ . Спектр связности представляется в виде вектора:

$$ACE(H) = (ACE_{4,0}(VN), ACE_{4,1}(VN), ACE_{4,2}(VN), \dots, ACE_{i,j}(VN), \dots, ACE_{k,m}(VN)),$$

где  $ACE_{i,j}(VN)$  - количество символьных узлов, содержащихся в цикле длины  $i$  со значение связности  $j$ . Значение связности (ACE) вычисляется для символьных узлов содержащихся в подграфе образованом циклом  $v_i \in C$ ,  $ACE(C) = \sum_{v \in C} (d(v)-2)$ , где  $d(v)$ - степень инцидентности символьного узла. Пример вычисления значения связности для циклов длины 8 в пограхах «трэпин-сетов» представлен на Рис. 1.13. «Трэпин-сету» TS(5,3) более вероятно обуславливающему ошибку соответствуют циклы длины 8 с меньшими значениями спектра связности (14) по сравнению с «Трэпин-сетом» TS(5,5).

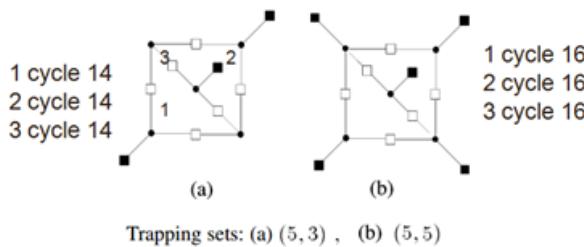


Рисунок 1.13 – Пример вычисления АСЕ для подграфов TS: (5,5), (5,3)

Таким образом, код с лучшим спектром связности при одинаковом спектре кода при использовании декодирования методом распространения доверия достигает большей части своего весового спектра. Этому коду не будут мешать псевдокодовые слова обусловленные TS.

Эта особенность обуславливает при построение низкоплотностных кодов необходимость совместной оптимизации дистанчных свойств кода (кодового расстояния) и свойств графа (спектров связности).

### 1.2.2 Алгоритмы мягкого декодирования низкоплотностных кодов

Требования высокой помехоустойчивости на бит в сочетание с разумной сложностью и сохранением высокой пропускной способности, предъявляемые голограммическим каналом, обуславливают применение «мягкого декодирования». Сформулируем математическую постановку задачи.

Пусть кодовое слово  $x$ , полученное в результате кодирования линейным кодом  $C[n, k]$  над  $q$  – арным алфавитом, передано по АБГШ-каналу. Приемник получает зашумленный сигнал  $y$ . Совместная вероятность символов кода -

случайных величин, образующих кодовое слово, определяется фактором графом, заданным проверочной матрицей  $H$ .

Совместную плотность вероятностей фактор графа без циклов можно разбить(факторизовать) на множители (product rule) в соответствие с заданной структурой фактор графа, Рис. 1.14:

$$f(X_1, X_2, X_3) = f_1(X_1, X_2) f_2(X_1, X_3).$$

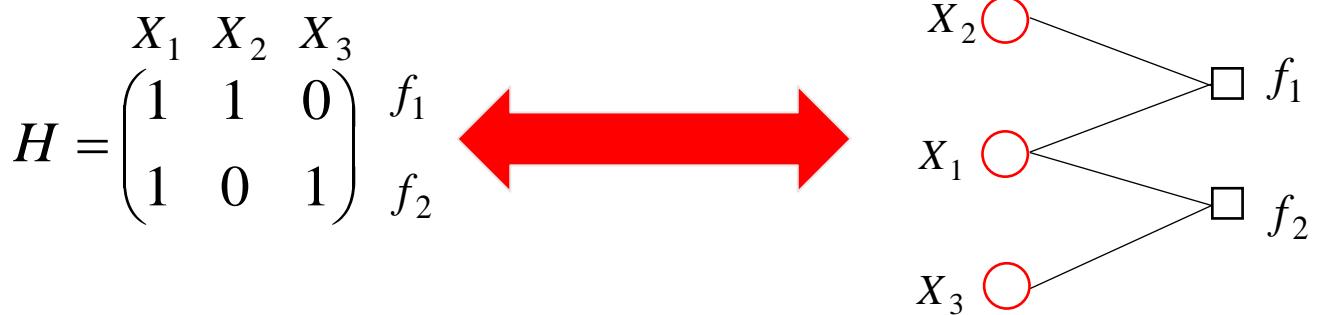


Рисунок 1.14 Проверочная матрица и соответствующей ей фактор граф

Рассмотрим байесовский подход теории вероятностей применительно к вероятностным моделям на графах (probabalistical graphical models).

По теореме Байеса апостериорная вероятность кодового слова  $x$ :

$$P(x|y) = \frac{P(y|x)P(x)}{P(y)} (*)$$

В случае, АБГШ-канала без памяти с дисперсией  $\sigma$ , передачей  $\pm a$  и двоичным алфавитом  $q = 2$ , условные вероятности  $P(y|x) = \prod_{i=1}^N P(y_i|x_i)$  примут вид

$$P(y|x_i = 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left(-\frac{(y_i-a)^2}{2\sigma^2}\right)}$$

$$P(y|x_i = 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left(-\frac{(y_i+a)^2}{2\sigma^2}\right)}.$$

Тогда отношения правдоподобия, апостериорные вероятности, полученные из канала, имеют вид:

$$\frac{P(y_i|x_i=1)}{P(y_i|x_i=0)} = e^{\left(\frac{2ay_i}{\sigma^2}\right)}.$$

Априорное распределение кодовых слов считаем равномерным, т.к. передачу каждого из кодовых слов считаем случайным и равновероятным событием.

Знаменатель  $P(y)$  – нормализующая константа выписывается в виде:

$$P(y) = \sum_x P(y|x)P(x).$$

По апостериорным вероятностям символом полученных из канала и известной совместной вероятностью распределения символом можно сформулировать и эффективно решить две задачи декодирования:

Задача полного декодирования (Block-wise ML decoding) – определить наиболее вероятно переданное кодовое слово  $\hat{x}(y) = \arg \max_{x \in C} P_{x|y}(x|y)$ .

Задача побитового декодирования (Symbol-wise ML decoding) – для каждого переданного  $q$  – арного символа из которого состоит кодовое слово понять насколько вероятно каждое из возможных  $q$ -арных значений алфавита  $\hat{x}_i(y) = \arg \max_{x_i \in X} P_{X_i|y}(x_i|y)$ .

Решение задачи побитового декодирования, осуществляет минимизацию вероятности ошибки на бит (bit error rate, BER), осуществляется путем маргинализации каждого из символов фактор графа:

$$P(x_i|y) = \sum_{X \setminus x_i} P(x|y).$$

Без утраты общности аналогичные рассуждения применимы для комплексного АБГШ-канала. Оптимальное решение задачи побитового декодирования в условиях голограммического канала является целью нашего диссертационного исследования. В общем виде задача является экспоненциально сложной, однако возможность разбить на множители (факторизовать) внутри суммирования вероятностей (generalized distributed law, [6]), позволяет значительно упростить вычисление маргиналов.

Вычислим маргинальную вероятность символа  $X_1$

$$P(X_1) = \sum_{X \setminus X_1} f(X_1, X_2, X_3) = \sum_{X_2} \sum_{X_3} f_1(X_1, X_2, )f_2(X_1, X_3) = \sum_{X_2} f_1(X_1, X_2) \times \sum_{X_3} f_2(X_1, X_3).$$

Такой способ упрощенного вычисления маргиналов при помощи сумм и произведения вероятностей представляет собой алгоритм Sum Product известный также как метод распространения доверия (Belief Propagation).

Нетрудно убедиться, что упрощение маргинализации выполнимо в случае, если символы не участвуют в циклах, т.е. на деревьях такой алгоритм за конечно линейное число операций дает точное значение маргиналов. Однако, фактор графы, заданные проверочной матрицей кода, являющиеся деревьями обладают малой корректирующей способностью. С приближением кода к максимальному возможному кодовому расстоянию (МДР-кодам) расчет число циклов в факторе графе (корреляций между символами) и сложность его маргинализации, Рис. 1.15.

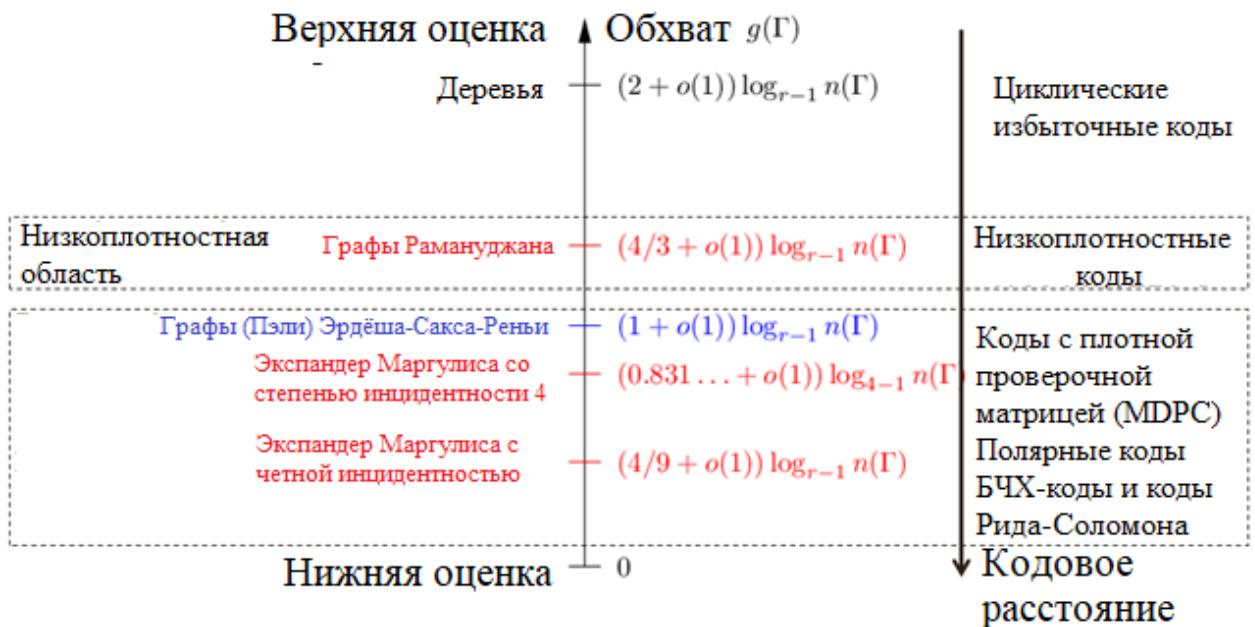


Рис. 1.15 Зависимость обхвата и кодового расстояния от длины кода, [7]

Решение задачи маргинализации для фактора графов с циклами становится экспоненциально сложным. В этом случае применяются следующие подходы разбиения циклов в факторе графе:

- Субоптимальное декодирование без учета циклов (loopy Belief Propagation) – вычисление маргиналов, как если бы циклы в факторе графе отсутствовали. Для эффективного применения этого подхода необходимо строить фактор графы со специальной структурой циклов. Ниже мы

рассмотрим и предложим подходы, позволяющие эффективно применять этот метод.

- Применить алгоритм для дерева сочленений (junction tree algorithm)- представление символов, участвующих в цикле в качестве кластеризованного узла, с оптимальным расчетом маргиналов в нем. На этом подходе основаны обобщённые (GLDPC) и недвоичные низкоплотностные коды (NB-LDPC) осуществляющие оптимальное декодирования в кластерах проверок и внутри символа соответственно.

- Применить алгоритм разреза графа (cutset condition) - алгоритм, осуществляющий разбиение циклов путем назначения определенного значения символьному узлу. На применение этого алгоритма основаны Полярные коды (Polar codes) и низкоплотностные коды с гетерогенной структурой факторов (Multi-edge Type LDPC, ME-LDPC). Применение этого метода позволяет игнорировать циклы инцидентные узлу участвующему в разрезе графа. В случае полярного кода разбиение циклов осуществляется путем последовательной маргинализации символов нормального фактора графа опираясь на априорное знание значений (замороженных) символов ([ссылка](#)). В низкоплотностных кодах с гетерогенной структурой факторов выделяются специальные символы, которые содержатся в большом числе факторов и в отличие от остальных узлов не обладают апостериорной вероятностью, восстанавливаются на основе маргинальных значений всех остальных символов. В случае специальной структуры корреляций символов (в некотором смысле образующих «деревья», компенсирующие друг друга подграфы с циклами), возникает возможность однозначного восстановления этих символов на основании маргиналов остальных узлов.

По своей сути каждый новый класс кодов, достигающий фундаментальных пределов корректирующей способности, есть не иное как описание способа построения его фактора графа и декодирования – приложения приведенных выше методов решения задачи маргинализации символов фактора графа.

В данной диссертационной работе мы будем применять комбинацию перечисленных методов с целью увеличения числа корреляций между символами – улучшения корректирующей способности кода (кодового расстояния) и устранения отрицательного влияния циклов (улучшая спектр связности графа).

### 1.2.3 Методы оценки эффективности исправления ошибок низкоплотностными кодами

Помехоустойчивость кодов в области высоких значений сигнал-шум при декодированных мягким декодером определяется весовым спектром кода в соответствии с формулой (Union bound), [8]:

$$P_s \leq \sum_{i=d_{\min}}^N \omega_i Q(\sqrt{i}),$$

где  $d_{\min}$  -кодовое расстояние,  $\omega_i$  -кратность слов минимального веса,  $i$  -вес кодового слова,  $Q$ -Q-функция.

При высоких отношениях сигнал-шум ошибки на бит вычисляются:

$$P_s \approx \omega_{d_{\min}} Q(\sqrt{d_{\min}}),$$

$\omega_{d_{\min}}$  - кратность слов минимального веса,  $d_{\min}$  -кодовое расстояние,

$$Q(x) = (\pi N_0)^{-1/2} \int_x^\infty e^{-n^2/N_0} dn.$$

Однако в случае субоптимального декодирования методом распространения доверия Belief propagation в весовом спектре кода возникают псевдокодовые слова, обусловленные подграфами “Трэпиг-сетов” (Trapping Set). В зависимости от их размера: линейные по сравнению с длиной кода, псевдокодовые слова определяют характер кривой помехоустойчивости в области “водопада”, Рис. 1.16, сублинейные по сравнению с длинного кода псевдокодовые слова малого веса определяют характер полки кода, см рис. В силу экспоненциальной сложности определения спектра кодовых и псевдокодовых слов. Существуют классы эффективных методов, позволяющих определить поведение водопада и полки. Для определения полки применяется

метод Importance Sampling, см. Приложение 4. Наиболее эффективным вариантом, которого является его реализация на основе релаксированных симплексов с использованием методов линейного программирования [9,10]. Для определения водопада используется метод Ковариационной Эволюции, предложенный в работе [11].

Отметим, что веса псевдокодовых слов зависят от параметров декодера (ширины квантования в битах, входных вероятностей из канала, внутреннего представления коэффициентов правдоподобия при обработке символов и проверок в методе распространения доверия и прочих параметров) и их изменение способно изменить весовой спектр TS и соответственно характер кода в области полки и водопада, [12].

В силу субоптимальности метода распространения доверия линейнорастущие “Трэплинг-сэты” TS обуславливают отклонение «водопада» от порога итеративного декодирования. Влияние их с увеличением длины изображено на Рис. 1.16.

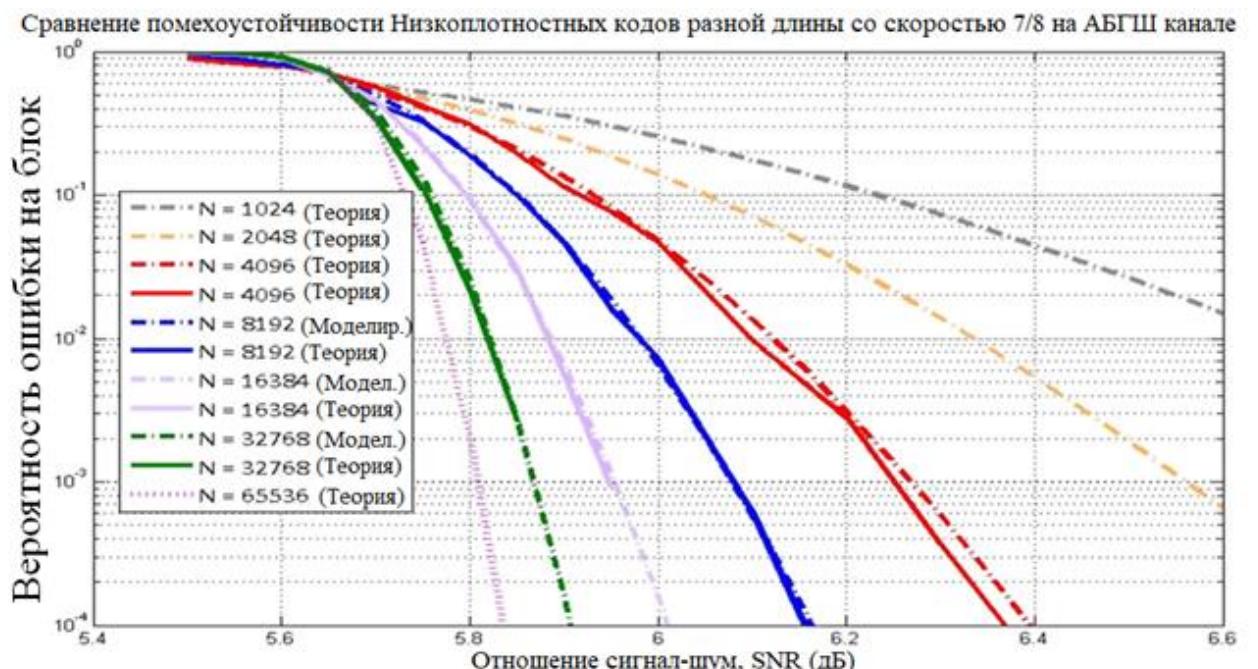


Рисунок 1.16- Оценка вероятности ошибки на блок с изменением длины кода полученная методом Ковариационной Эволюции плотностей (Covariance Evolution)

Вероятность ошибки на блок вычисляется по формуле [11]:

$$P_{FER}(N, \sigma) \approx Q\left(\alpha \sqrt{N} (\sigma^* - \sigma)\right),$$

где  $N$ -длина кода,  $\alpha$  - масштабирующий коэффициент,  $\sigma^*$  - порог итеративного декодирования (среднеквадратичное отклонение),  $\sigma$  - среднеквадратичное отклонение в АБГШ-канале,  $Q$ -  $Q$ -функция.

Уравнения работают для ансамблей кодов, чьи короткие циклы распределены по закону Пуассону, [14]. Сублинейные “Трэплинг-сеты” наряду с кодовым расстоянием определяют помехоустойчивость кодов в области полки,

Рис. 1.17

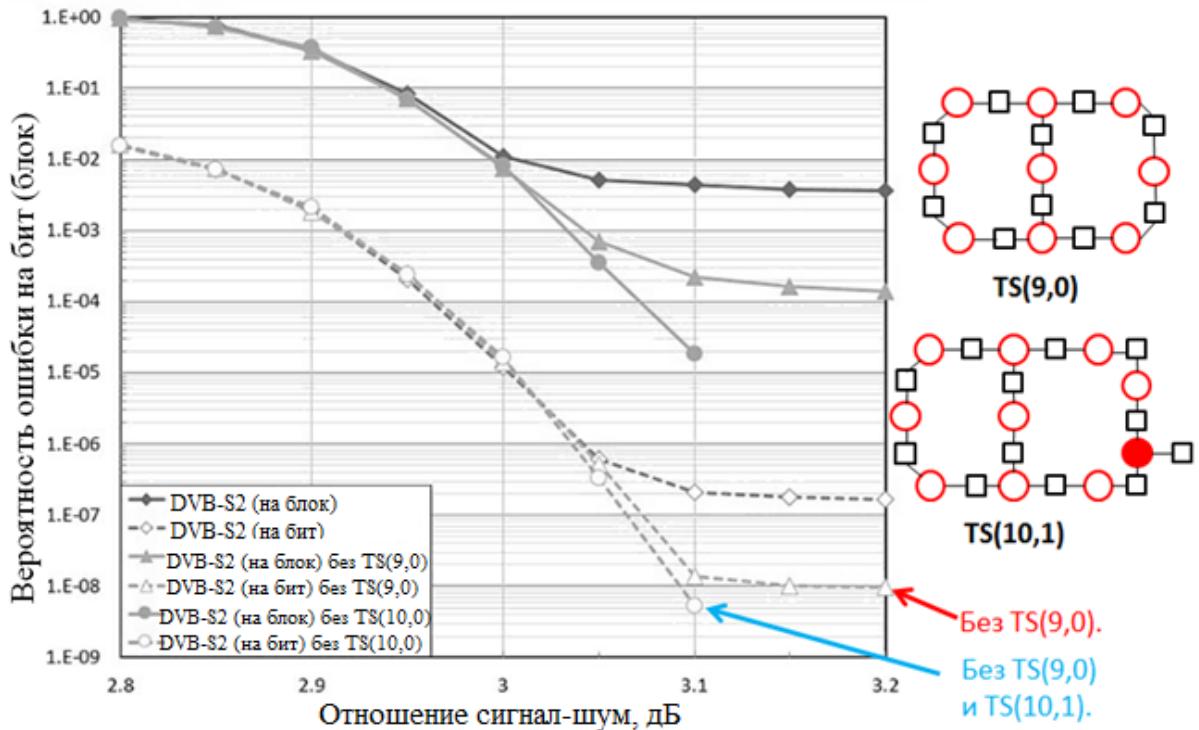


Рисунок 1.17 - Вероятность ошибки на бит (блок) для квазициклических низкоплотностных кодов DVB-S2 информационной длины  $K=43200$  и скоростью  $2/3$  и коды, полученные модификацией циклических сдвигов, не содержащих TS (9, 0), TS (10,1).

### 1.3.1 Классификация методов построения низкоплотностных кодов

Структура графа Таннера и распределение строчных и столбчатых весов квазициклического LDPC-кода определяется базовой проверочной матрицей

(граф Таннера которой называется протографом). Проверочная матрица квазициклического LDPC-кода получается путем расширения базовой матрицы подматрицами циклических перестановок. Использование циркулянтов позволяет получать компактное представление квазициклического LDPC-кода и осуществлять параллельное кодирование и декодирование с глубиной параллелизма равной размеру циркулянта.

Высокая помехоустойчивость и относительная простота реализации декодеров обусловили применение квазициклических LDPC-кодов в архивной голограммической памяти. Квазициклические LDPC-коды применяются на нижнем страничном уровне трехуровневой системы помехоустойчивого кодирования. Страницный уровень работает в условиях больших шумов, поэтому для коррекции используется LDPC-код длиной 32768 со скоростью 0.5, содержащий 32 битный код контроля на четность. Страницный уровень один из ключевых уровней, определяющих плотность записи архивной голограммической памяти. Все последующие уровни, использующие коды Рида-Соломона и проверку на четность предназначены для обнаружения ошибок и исправления стираний.

Дальнейшее улучшение помехоустойчивости квазициклического LDPC-кода на страничном уровне требует улучшение методов построения квазициклических LDPC-кодов.

Процедура построения квазициклических LDPC-кодов предусматривает выполнение 2-х этапов: 1) выбор протографа (базовой матрицы), 2) расширение базовой проверочной матрицы. Расширение (lifting) базовой проверочной матрицы заключается в замене единичных символов базовой матрицы на циркулянты.

На этом этапе определяются значения циклических сдвигов всех циркулянтов. Для реализации этапов построения LDPC-кодов используются комбинаторно-алгебраические методы и методы статистической физики.

К первым относятся методы, основанные на конечных геометриях, блочных дизайнах, числовых сетках, словах малого веса кодов Рида-Соломона, метод Саливана, [14-18].

Достоинством этих методов является возможность выбора кода с хорошими дистанческими свойствами, простота расширения матрицы циркулянтами, а также быстрое получения высокоскоростных регулярных кодов с обхватом 6 и более. Однако применение их затруднительно для построения кодов произвольной размерности (numerology problem) и требует поиска маски для получения нерегулярных кодов.

Наиболее эффективными при поиске протографов являются методы статистической физики, предложенные Ричардсом, Урбанке и Монтанари. В их число входят «Эволюция плотностей» (Density evolution), предусматривающая оптимизацию асимптотических свойств ансамблей кодов при помощи минимизации порога итеративного декодирования и ее аппроксимации: Exit-chart, Protograph-Exit chart, Reciprocal channel approximation, Gaussian Approximation. Достоинство этих методов - возможность получения протографа (маски/весового распределения), позволяющего строить нерегулярные коды. Недостатком этого класса методов является игнорирование комбинаторно-алгебраических свойств Таннер-графа и дистанческих свойств кода, в результате полученные коды содержат кодовые и псевдокодовые слова малого веса.

На практике для расширения базовой матрицы чаще всего применяются следующие методы: улучшенный PEG-алгоритм, Hill-Climbing, Guess-and-Test.

PEG-алгоритм использует распределения весов символьных и проверочных узлов и в соответствие с ними строит граф, максимизируя его обхват. При этом осуществляется локальная оптимизация кратчайших циклов для каждого символьного узла. Недостатком метода является отсутствие оптимизации дистанческих свойств протографа и спектра связности.

Hill-Climbing алгоритм пытается прийти к глобальному оптимуму, итеративно изменяя значения циркулянта Таннер-графа и пересчитывая функции цели. Этот алгоритм позволяет находить графы с максимальным

возможным обхватом и минимальным размером циркулянта. Он обладает существенно большей вычислительной сложностью, чем PEG. Кроме того, максимизируя обхват, он не оптимизирует спектр связности.

Guess-and-Test использует случайные броски значений сдвигов циркулянта и проверяет полученный граф на обхват в соответствии с уравнением:

$$\sum_{k=0}^{m-1} p_{j_{k+1}, l_{k+1}} - p_{j_k, l_k} = 0 \bmod z, \quad (2)$$

где  $2 \leq m \leq g/2$ ,  $p_{j_k, l_k}$  - значения сдвигов циркулянт, входящих в цикл.

Guess-and-Test метод требует большого числа испытаний и не гарантирует хороших дистантных свойств кода и хорошей связности графа.

### 1.3.2 Методы оптимизации протографа

#### 1.3.2.1 Метод эволюции функции плотности вероятностей (Density Evolution)

Результаты итеративного декодирования зависят от структуры протографа. Одним из ключевых методов при построении низкоплотностных кодов является метод «Эволюции плотностей». Этот метод, предложенный Ричардсоном-Урбанке из соображений отсутствия циклов в графе, позволяет оценить значение «порога протографа» (protograph threshold) - соотношения сигнал-шум (например, величину дисперсии шума) при котором битовая ошибка не превосходит заданную величину, [19, 20]. Процедура поиска протографа будет заключаться в минимизации порога с ограничениями на структуру циклов в графе, поскольку на последующем этапе нам потребуется расширить этот протограф таким образом, чтобы циклы возникающие по причине структурности циклических матриц перестановки и конечной длины кода, не помешали достичь предполагаемую порогом корректирующую способность.

Эволюция плотностей. Одним из ключевых параметров, характеризующих ансамбль низкоплотностных кодов, является распределение весов (числа проверок в проверочной матрице) в столбцах (символах) и строках. Это распределение принято описывать при помощи многочленов  $\lambda(x) = \sum \lambda_i x^{i-1}$ ,  $\rho(x) = \sum \rho_i x^{i-1}$ ,  $\sum_i \lambda_i = 1$ ,  $\sum_i \rho_i = 1$  где  $\lambda_i$  и  $\rho_i$  это доля ребер, соединяющих символный узел (столбец) и проверку (строк) соответственно, с степенью вершины  $i$ .

Например, данное распределение

$$\lambda(x) = \frac{4}{24}x^5 + \frac{4}{24}x^3 + \frac{5}{24}x^2 + \frac{11}{24}x, \quad \rho(x) = \frac{1}{12}x^7 + \frac{5}{12}x^6 + \frac{4}{12}x^5 + \frac{2}{12}x^4$$

описывает ансамбль LDPC-кодов у которого:

$11/24$  доли проверок по столбцам имеют вес 2,  $5/24$  вес 3,  $4/24$  вес 4,  $4/24$  вес 6;

$2/12$  доли проверок по строкам имеют вес 5,  $4/12$  вес 6,  $5/12$  вес 7,  $1/12$  вес 8.

Тогда средний вес символного и проверочного узлов вычисляется по формуле:

$$l_{avg} = \frac{1}{\sum_i (\lambda_i / i)}, \quad r_{avg} = \frac{1}{\sum_i (p_i / i)}.$$

В случае отсутствия линейно-зависимых строк скорость кода определяется

$$rate(\lambda, \rho) = 1 - \frac{l_{avg}}{r_{avg}},$$

где  $l_{avg}$  — средний вес символного узла,  $r_{avg}$  — средний вес проверочного узла

В случае устремление длины кода к бесконечности и отсутствия автоморфизмов в графе (циклической и квазициклической структуры) граф представляет собой дерево. В случае квазициклической структуры оценки

обхватов графа были получены Таннером, Вонтобелем и Фоссорье в работах [21-23].

В случае Фактор графа дерева символный узел с вероятностью  $\lambda_i$  имеет  $i$  инцидентных к нему узлов, т.е. один родительский узел и  $i-1$  «дочерний» (потомков). Каждый из дочерних узлов в Таннер-графе с вероятностью  $p_i$  имеет  $i-1$  соседних дочерних к нему узлов. Аналогично проверочный узел, без потери общности с весом  $i \geq 2$ . Проверочный узел с инцидентен символному узлу  $v$  в качестве родительского узла и имеет  $i-1$  символьных узлов  $v_s$ ,  $s \in i, \dots, i-1$  в качестве «дочерних» узлов (потомков).

Пусть  $\gamma_s$  логарифм правдоподобия, представляющий собой апостериорную оценку известную узлу  $v_s$ . Вычисляя маргинальные вероятности методом распространения доверия, узел  $c$  получает сообщения с оценкой  $\gamma_s$  от узлов потомков. Узел  $c$  получая сообщения осуществляет оценку инцидентных ему узлов  $m_{cv} = 2 \tanh^{-1} \left[ \prod_{s=1}^{i-1} \tanh(\gamma_s) \right]$ , и затем отправляет эту оценку  $m_{cv}$  в качестве нового сообщения родительскому узлу  $v$ .

Независимые случайные величины  $\gamma_s$  заданы функцией плотности вероятности  $f$ :

$$P(a < \gamma_s < b) = \int_a^b f(x) dx,$$

Поскольку оценка  $m_{cv}$  является случайной величиной. Функция плотности вероятностей  $f_{cv}$  случайной величины  $m_{cv}$  задана уравнением:

$$f_{cv} = \sum_{i=2}^{i_{\max}} p_i f^{(i-1)\otimes},$$

где  $f^{(i-1)\otimes}$  свертка вероятностей.

Тогда символный узел веса  $i$  получает сообщения с оценками логарифмов правдоподобия от инцидентных к нему проверочных узлов

получает оценку  $\delta_s$ . В силу статистической независимости этих оценок,  $\delta$  представляет собой сумму случайных величин:

$$\delta = \sum_{s=1}^{i-1} \delta_s - \delta_0,$$

где  $\delta_0$  начальная оценка, полученная из канала.

Метод эволюции плотностей предполагает, что оценки заданы той же функцией плотности вероятностей  $f$ . Тогда для оценки  $\delta$  функция плотности вероятностей  $f_{cv}$  задана уравнением

$$f_{cv} = f \times f \times \dots \times f \times f_0 = f^{(i-1)\times} \times f_0,$$

$\times$ -операция свертки плотности вероятностей.

Функция плотности вероятностей определяется случайными величинами, чьи значение связаны с распределением весов  $\lambda$ :

$$f_{cv} = \left( \sum_{i=2}^{i_{\max}} \lambda_i f^{(i-1)\times} \right) \times f_0.$$

Вероятность ошибки вычисляется по формуле:

$$P_e = \int_{-\infty}^0 f_{vc}(x) dx.$$

### Метод Эволюции плотностей:

Пусть  $f_0$  функция плотности вероятностей, заданная логарифмами правдоподобия, при некотором значение сигнала-шум заданное дисперсией ошибки  $\sigma_+$ ;  $I_\lambda$  максимальный вес символьного узла and  $I_p$  максимальный вес проверочного узла,  $\varepsilon$  - требуемая вероятность ошибки на бит,  $i$  - число итераций в алгоритме распространения доверия.

Проинициализируем  $f_{cv} = f_0$

В цикле по  $i$  вычисляем функции плотностей вероятностей:

$$f_{cv} = \sum_{i=2}^{i_{\max}} p_i f^{(i-1)\otimes}$$

$$f_{cv} = \left( \sum_{i=2}^{i_{\max}} \lambda_i f^{(i-1)\times} \right) \times f_0.$$

Если вероятность ошибки на бит  $P_e = \int_{-\infty}^0 f_{vc}(x)dx < \varepsilon$  не превосходит

требуемую, тогда прекращаем работу алгоритма и выдаем  $\sigma_+$ .

Код, заданный распределением  $(\lambda, p)$  называется оптимальным, если его порог итеративного декодирования -  $\sigma_+$  дисперсия ошибки максимальна:

$$(\lambda, p) = \arg \max_{\tilde{\lambda}, \tilde{p}} \sigma_+(\tilde{\lambda}, \tilde{p}).$$

Зависимость величины дисперсии  $\delta$  АБГШ-канала для регулярных кодов с весом столбца  $a$ ,  $\lambda(x) = x^a$  и скоростей 0.5, 0.75, 0.9, 0.95 приведена на Рис. 1.18, [24]. Уменьшение веса символа приводит к улучшению порога итеративного декодирования, однако значительно затрудняет построение кода вследствие недостаточного кодового расстояния, обусловленное свойствами кода или же особенностями структура графа, которые мы рассмотрим в дальнейшем.

### Порог итеративного декодирования на АБГШ-канале

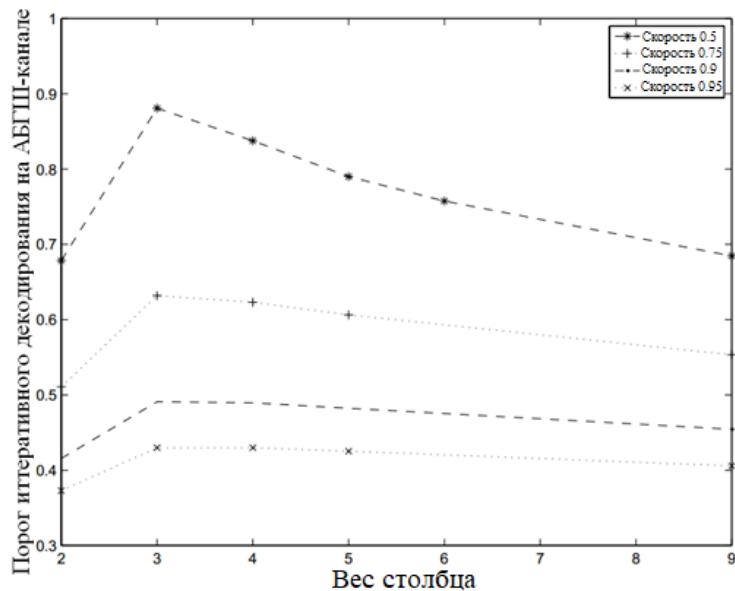


Рис. 1.18 Зависимость порога итеративного декодирования от веса столбца в случае регулярных низкоплотностных кодов различных скоростей, вычисленных для АБГШ-канала

Это является причиной, по которой при построении кодов одним из подходов будет попытка компенсации символом малого веса путем добавления символов большого веса. В Таб. 1.1, показана разница порога итеративного декодирования и предела Шеннона для нерегулярного кода со скоростью  $\frac{1}{2}$  с ростом максимального веса символического узла, [25]. Начиная с веса символического узла  $>10$ , разница в пороге не превышает 0.1 ДБ. Именно этот вес определяет размеры протографа низкоплотностного кода. Число строк в графе квазициклического кода не может быть меньше веса максимального символа  $\max \deg \lambda(x)$ . Наряду со структурой весов, на порог итеративного декодирования влияет динамический диапазон представления чисел с фиксированной точкой в методе распространения доверия. Уменьшение его приводит к уменьшению декодера, однако ухудшает помехоустойчивость кода, Таб. 1.2.

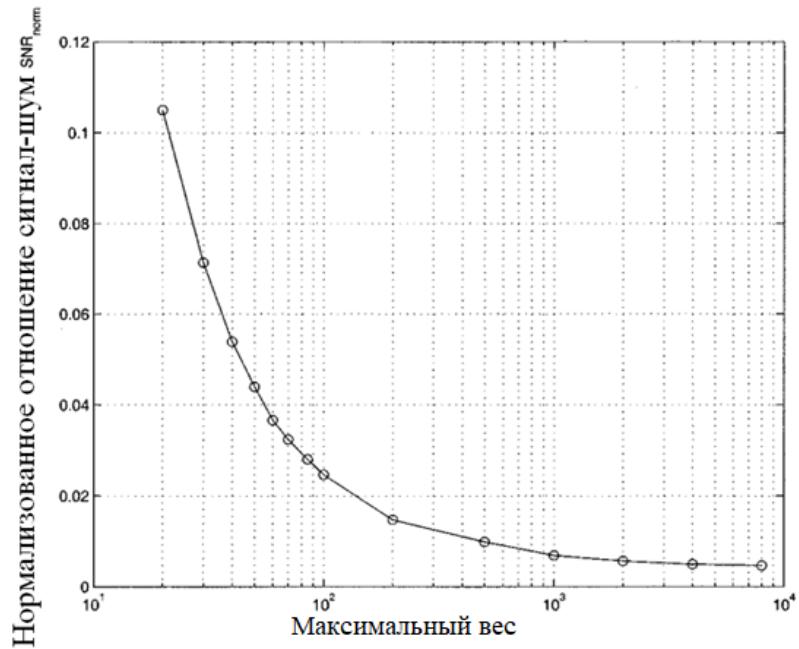


Рис. 1.19 Пороги итеративного кодирования LDPC кода в виде нормализованного отношения сигнала-шума  $SNR_{norm}$  для нерегулярного кода скоростью  $\frac{1}{2}$  с максимальным весом символа 20...8000

В случае фиксированной скорости и ряда других параметров (наличие стертых символов), некоторое число строк с целью улучшения кодового

расстояния и упрощения расширения кода циркулянтами. Размеры протографа задаются формулой:

$$Rate(H) = \frac{VN - CN}{CN - PN},$$

где  $VN$  число столбцов в протографе ( $VN \geq maxdeg\lambda(x)$ ),  $CN$  число строк в протографе,  $PN$ - число «выколотых» символов, параметр потребуется в дальнейшем так, позволяет путем увеличения числа итераций значительно улучшить порог итеративного декодирования.

Однако размер таких протографов велик (число строк в нем не могут быть меньше веса столбца), что для фиксированной длины, рассматриваемых нами кодов приводит к значительному уменьшению циркулянта.

Таблица 1.1 - Влияние распределения весов символьного узла (веса столбца) на порог итеративного декодирования нерегулярных Низкоплотностных кодов, [25]

Максимальный вес столбца, $d_i$	100		200		8000	
	$x$	$\lambda_x$	$x$	$\lambda_x$	$x$	$\lambda_x$
2	0.170031	2	0.153425	2	0.096294	
3	0.160460	3	0.147526	3	0.095393	
6	0.112837	6	0.041539	6	0.033599	
7	0.047489	7	0.147551	7	0.091918	
10	0.011481	18	0.047938	15	0.031642	
11	0.091537	19	0.119555	20	0.086563	
26	0.152978	55	0.036379	50	0.093896	
27	0.036131	56	0.126714	100	0.018375	
100	0.217056	200	0.179373	150	0.086919	
				400	0.089018	
				900	0.057176	
				2000	0.085816	
				3000	0.006163	
				6000	0.003028	
				8000	0.118165	

Средний вес столбца, $\lambda_{AVG}$	10.9375	12.0000	18.5000
Среднеквадратическое отклонение, $\sigma$	0.97592	0.97704	0.9781869
Нормализованный сигнал-шум, $SNR_{norm}$	0.0247	0.0147	0.00450

Таблица 1.2 - Влияние динамического диапазона представления сообщений в методе Эволюции плотностей на порог итеративного декодирования, [25]

Число бит со знаком для хранения логарифмов правдоподобия и сообщений (V2C, C2V)	Величина порога итеративного декодирования в среднеквадратическом отклонение, $\sigma$	Отклонение от плавающей запятой в дБ
9	0.975122	0.01708
10	0.976918	0.00109
11	0.977025	0.00014
12	0.977037	0.00003
13	0.977040	0.00001
14	0.977041	0.00000

Малый размер циркулянта не позволяет расширить такие протографы с приемлемой структурой циклов, а также уменьшает пропускную способность декодера, т.к. максимальный параллелизм достигается в сдвиговом регистре циркулянта. Поскольку непосредственно алгоритм декодирования реализуется при помощи арифметики с фиксированной точкой, уменьшения числа битов влияет на динамический диапазон ухудшая порог итеративного декодирования кода. Результаты построения двоичных кодов, опирающиеся на традиционный подход изображенные на рисунке и будут рассмотрены в дальнейшем

Существует другой подход, позволяющий улучшить порог итеративного декодирования без значительного увеличения веса символьного узла в протографе. Суть этого метода заключается в использование протографов со специальной структурой восстановления символов после стирания, Multi-edge Type LDPC codes. Такие протографы требуется использования специальной

версии эволюции плотностей и замене описание структуры Таннер-Графа с распределения плотностей непосредственно при заданной структуре связей в графе предложены Ричардсоном-Урбанке [26] и в дальнейшем усовершенствованные МакЭллисом-Торпом-Дивсаларом [27-28]. Обобщение метода Эволюции плотностей на случай Multi-edge type LDPC (ME-LDPC DE) кодов было предложено в работе [26]. Однако, в силу сложности вычисления интеграла, на практике применяются аппроксимации этого метода, Гауссова аппроксимация (Gaussian Approximation, GA, [29]), Гауссова аппроксимация на бит (Bit-wise Gaussian approximation, Bit-wise GA [30], аппроксимация через взаимные каналы (Reciprocal-channel approximation, RCA [31]), см. Приложение 4. Однако в случае Multi-edge type LDPC все эти методы демонстрируют крайне неточное и неустойчивое поведение, в случае ME-LDPC кодов с низкой скоростью, содержащих символические узлы малого веса, [32]. На Рис. 1.20 показана функция плотности вероятностей для символов веса 15 и 3. Уже для веса 3 наблюдается существенное отклонение функции плотности вероятности.

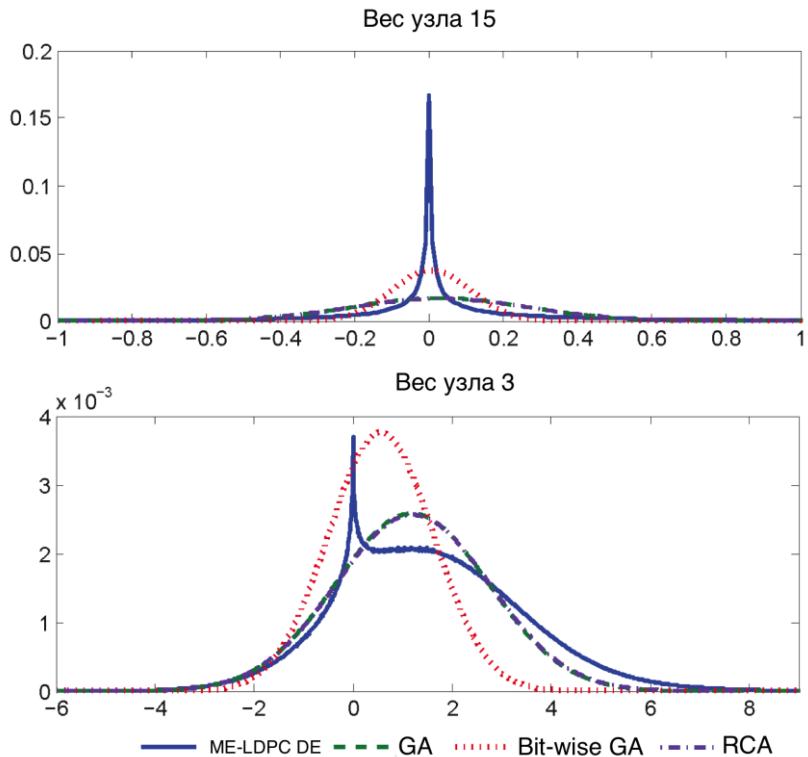


Рисунок 1.20 - Значение функции плотности вероятности переданной от символического узла к проверочному для протографа со скоростью  $\frac{1}{2}$ , для АБГШ-

канала с дисперсией 0.85 на второй итерации декодирования методом распространения доверия вычисленной при помощи методов: Эволюции плотностей (ME-LDPC DE), Гауссовой Аппроксимации (GA, Gaussian Approximation), обобщенной Гауссовой Аппроксимации (Bit-wise GA) и Аппроксимации Взаимного канала (RCA, Reciprocal Channel Approximation)

Последнее обстоятельство делает эти методы малопригодными для использования в случае оптимизации протографа ME-LDPC кодов.

С целью решения этой проблемы будет применяться метод аппроксимации вероятностей через взаимную информацию (Mutual Information) и битовый вариант взаимной информации (Bit-wise Mutual Information, Generalize Mutual Information). Взаимная информация особенно хорошо аппроксимирует результаты декодирования недвоичных кодов с большим алфавитом  $q > 64$ , для которых характерно оптимальное декодирование символьной информации из модуляционного созвездия [33]. Битовая взаимная информация наилучшим образом аппроксимирует двоичные коды декодируемые без турбо петли на созвездие, [34].

Для оптимизации протографов мы будем использовать графики Protograph Exit-Chart (Generalize Exit-Chart) для согласования параметров кода при заданном числе итераций, [35]. За счет работы метода на фиксированном протографе, точность метода составляет 0.01 дБ в случае использования аппроксимации функции взаимной информации при помощи таблицы и менее 0.05 дБ при помощи аппроксимации полиномом [36]. Метод был предложен Тен Бринком [37] и обобщен Ливой [38].

### 1.3.2.2 Методы, использующие аппроксимацию эволюции функции плотности вероятностей, взаимную информацию (Gaussian Approximation, P/EXIT-chart)

Оценка порога итеративного декодирования при помощи графиков эволюции априорной и апостериорной взаимной информации случайных величин и факторов для заданного распределения весов символов и проверок

Низкоплотностного кода (EXIT-charts). Сходным с методом Эволюции плотностей будет опираться на отсутствие циклов в Таннер-графе низкоплотностного кода и отношения правдоподобий (применяемых для регуляризации) нормально распределены с дисперсией  $\sigma_{ch}^2$ .

Вычисление порога итеративного декодирования будет осуществляться путем построения графиков эволюции взаимной информации в процессе получения новой информации в процессе работы алгоритма распространения доверия (belief propagation) двух компонентов Низкоплотностного кода символов и проверок  $I_{E,V}$  и  $I_{E,C}$ . Пример Эволюция взаимной информации этих компонентов, нанесенных на график, Рис. 1.21. Один компонент изображен с его вводом на горизонтальной оси и его выходом на вертикальной оси. Другой компонент строится с его вводом на вертикальной оси и его выходом на горизонтальной оси. Для успешного декодирования эти графики должны лежать максимально близко друг к другу и пересекаться в 1. Порог декодирования — это величина дисперсии АБГШ, при которой эти кривые пересекаются в 1.

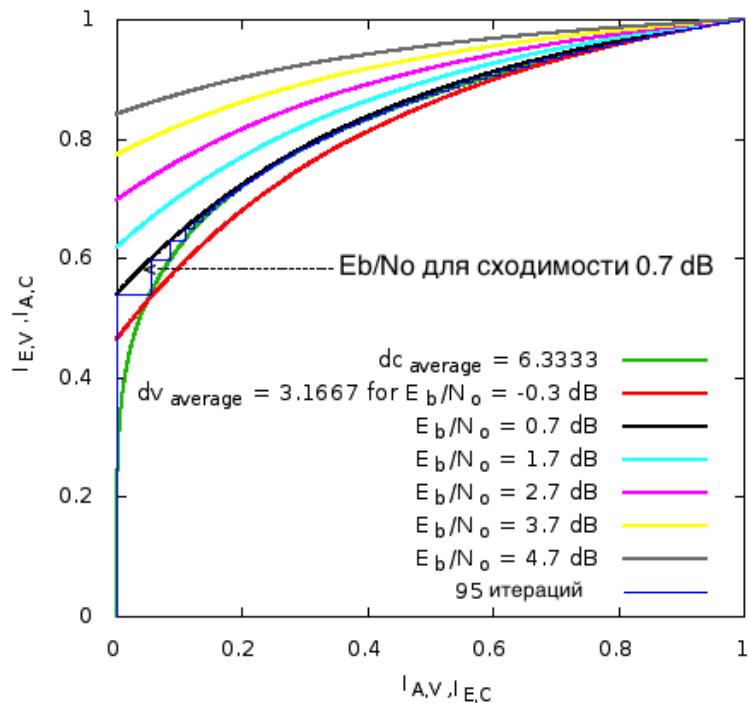


Рисунок 1.21 – График взаимной информации проверочного символа и символического узла с ростом числа итераций алгоритма декодирования

Апостериорная информация (внешняя)  $I_{E,V}$  символьных узлов вычисляется в соответствие с уравнениями:

$$I_{E,V} = J(\sigma) = J\left(\sqrt{(d_v - 1)\sigma_A^2 + \sigma_{ch}^2}\right)$$

$$J(\sigma) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(l-\frac{\sigma^2}{2})^2/2\sigma^2} \log(1 + e^{-l}) dl,$$

где  $J(\sigma)$  – взаимная информация

Априорная информация  $I_{A,V}$  символьных узлов вычисляется в соответствие с уравнениями:

$$I_{A,V} = J(\sigma_A)$$

$$I_{E,V} = J(\sigma) = J\left(\sqrt{(d_v - 1)[J^{-1}(I_{A,V})]^2 + \sigma_{ch}^2}\right)$$

Апостериорная информация (внешняя)  $I_{E,C}$  проверочных символов (факторов) вычисляется в соответствие с уравнениями:

$$I_{E,C} = 1 - J\left(\sqrt{(d_c - 1)[J^{-1}(1 - I_{A,C})]^2}\right)$$

Веса задаются в соответствие с полиномом распределения проверок  $\lambda(z) = \sum_{d=1}^{d_v} \lambda_d z^{d-1}$  and  $\rho(z) = \sum_{d=1}^{d_c} \rho_d z^{d-1}$ , где  $\lambda_d$  доля проверок веса  $d$  в столбце проверочной матрицы, и  $\rho_d$  доля проверок веса  $d$  в строке.

Для нерегулярных кодов

$$I_{E,V} = \sum_{d=1}^{d_v} \lambda_d I_{E,V}(d, I_{A,V})$$

$$I_{E,C} = \sum_{d=1}^{d_c} \rho_d I_{E,C}(d, I_{A,C})$$

Функция взаимной информации  $J(\cdot)$  приближается полиномом либо просмотровой таблицей с некоторой заданной точностью.

Вычислив функции  $I_{E,V}(d, I_{A,V})$  и  $I_{E,C}(d, I_{A,C})$  можем осуществлять итеративный процесс эволюции взаимной информации от 0:

$$I_{A,V}^{(0)} = 0, I_{A,V}^{(n+1)} = I_{E,C}(d, I_{E,V}(d, I_{A,V}^{(n)}))$$

остановив процесс, когда априорная информация  $I_{A,V}^{(n)}$  на некоторой иттерации получим значение близкое к 1. Номер иттерации показывает, какое число иттераций требуется для соответствующего порога итеративного декодирования.

Задача оптимизации протографа заключается в выборе протографа и максимизации дисперсии шума (уменьшения величины Сигнал-Шум  $\frac{E_b}{N_0}$ ) для соответствующего канала, с требуемой ошибкой на бит, в результаты выполнения заданного числа иттераций декодирования. При этом аналогично методу Эволюции плотностей, оценка будет осуществляться, опираясь на функцию распределения заданную фактором графом (структура факторизации графа вычислений Factor-graph, см. Байесов подход Рис. 1.14).

Примеры наилучших среди известных протографов изображены на Рисунках 1.22-1.25.

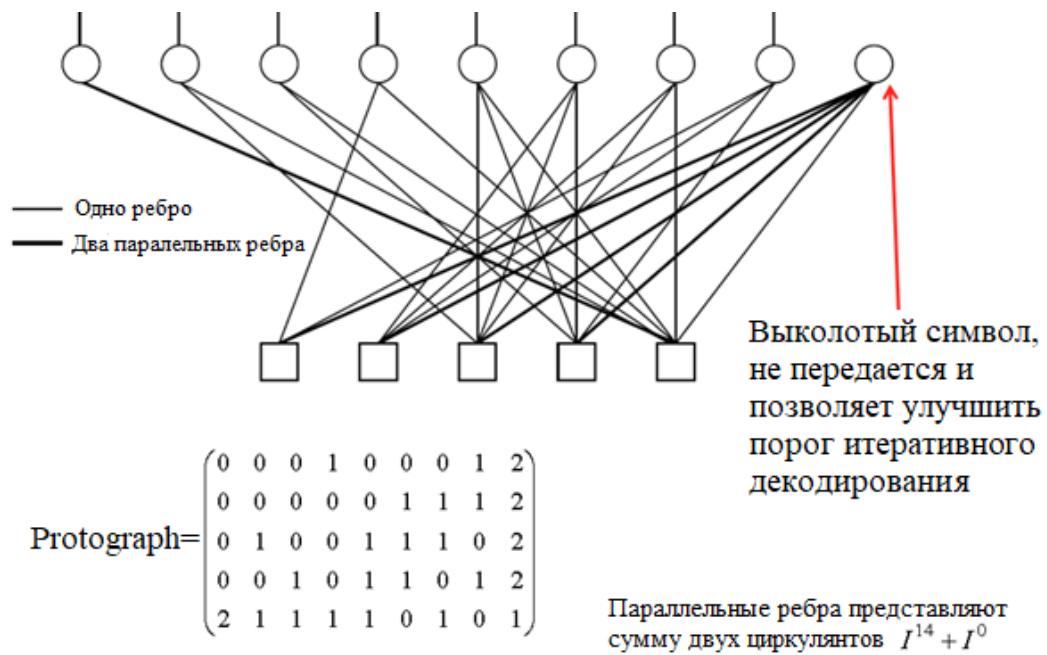


Рисунок 1.22 - Протограф Торпа, [27]

Например, на 40 иттерациях алгоритма распространения доверия протограф

0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	

демонстрирует такой же порог итеративного декодирования 0.71

Протографа, построенных предложенным автором методом, с порогом итеративного декодирования 1.29 дБ изображен на Рис. 1.26. Порог итеративного декодирования наилучшего из протографов такой скорости AR4JA протограф 1.414, Рис. 1.23. Предел пропусной способности кода (Предел Шэннона) со скоростью  $2/3$  равен 1.059 дБ. Построенный нами ансамбль кодов, заданный данным протографом находится в 0.23 дБ от предела Шэннона

$$H_{4/5} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & 11 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

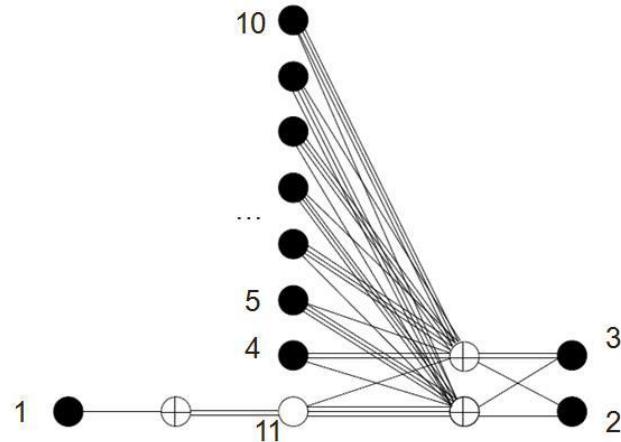


Рисунок 1.23 Протограф ансамбля AR4JA-кодов Дивсалара [39, 40]

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

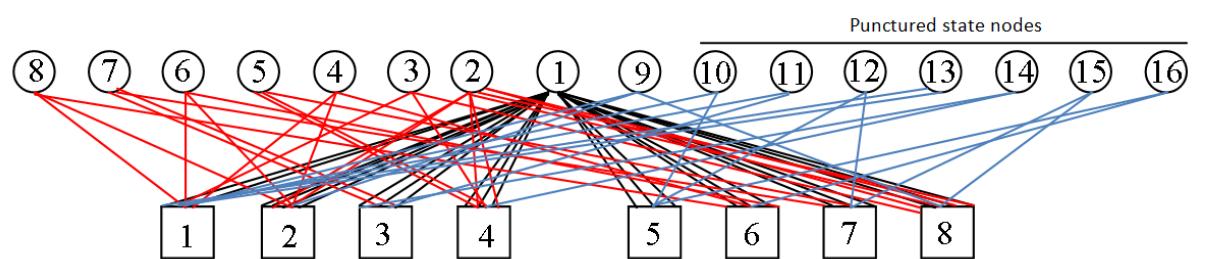


Рисунок 1.24 - Протограф  $E^2RC$ -коды 10-16 символы выколотые, [41]

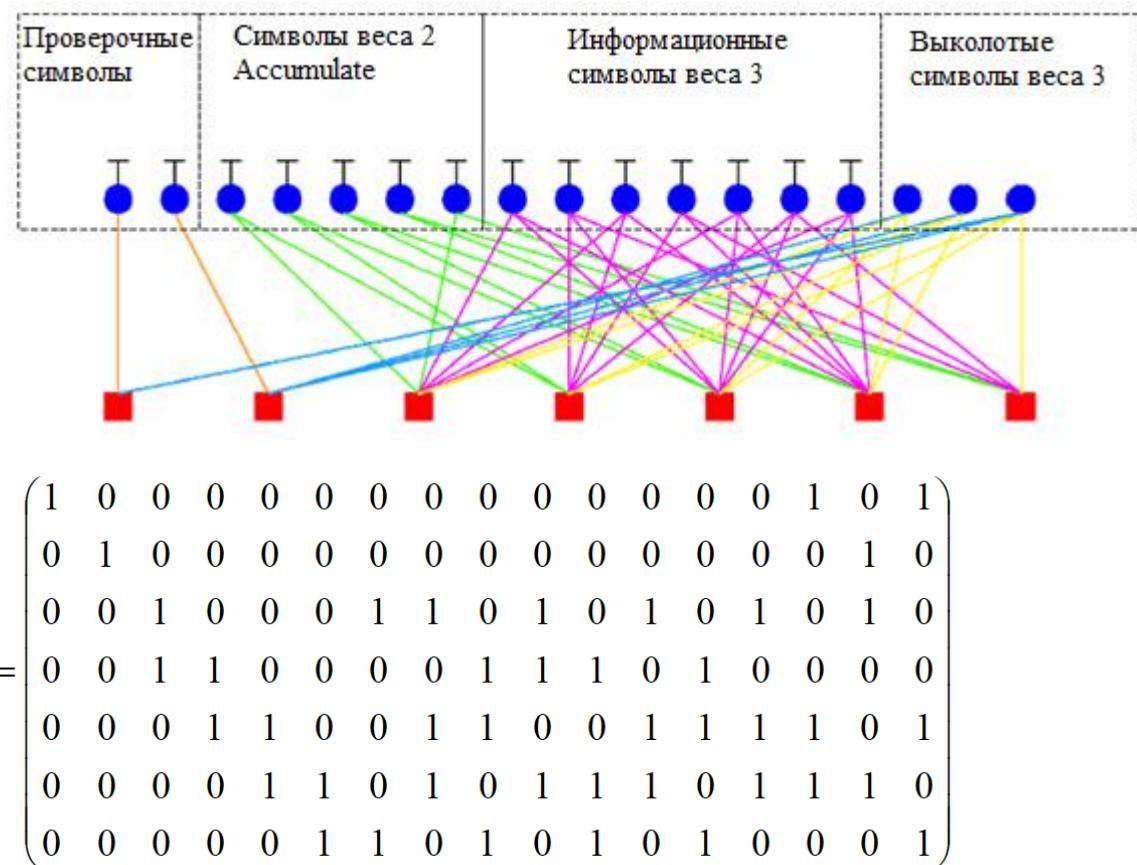


Рисунок 1.25 - Протограф Ричардсона, [26]

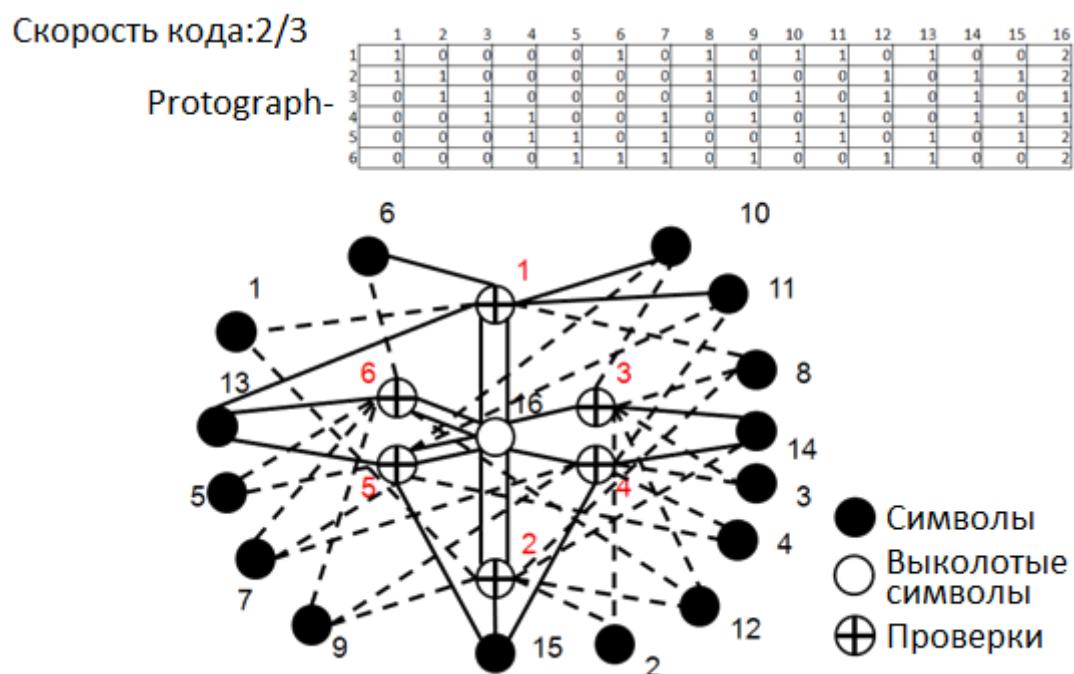


Рисунок 1.26 – Протограф “Осьминог”, [103]

### 1.3.3 Методы расширения протографа циклическими матрицами перестановок

Размерность базовой матрицы и размер циркулянта определяются исходя из имеющихся аппаратных ресурсов (вентилей и мультиплексоров) и требований к кривой помехоустойчивости итогового кода (оптимизация по «водопаду» или «полке»). Чем меньше размер циркулянта, тем легче оптимизировать кривую помехоустойчивости, но сложнее аппаратная реализация кода.

Предлагаемая процедура предусматривает выбор базовой проверочной матрицы путем полного перебора возможных значений ее строк [42]. В качестве критериев выбора базовой матрицы используются: асимптотическая оценка порога итеративного декодирования, верхняя оценка кодового расстояния ансамбля кодов; верхняя оценка на вес псевдокодового слова, если TS образован непосредственно циклом. (Максимальный обхват графа квазициклического LDPC-кода определяется балансовыми циклами (balanced cycles) в протографе [43]); Расширение базовой проверочной матрицы; Расширение (lifting) базовой проверочной матрицы размера заключается в замене единичных символов базовой матрицы на циркулянты размера. На этом этапе определяются значения циклических сдвигов всех циркулянтов.

На практике для расширения базовой матрицы чаще всего применяются следующие методы: PEG-алгоритм, Hill-Climbing и Guess-and-Test. PEG-алгоритм использует распределения весов символьных и проверочных узлов и в соответствие с ними строит граф, максимизируя его обхват. При этом осуществляется локальная оптимизация кратчайших циклов для каждого символьного узла. Недостатком метода является отсутствие оптимизации дистантных свойств протографа и спектра связности.

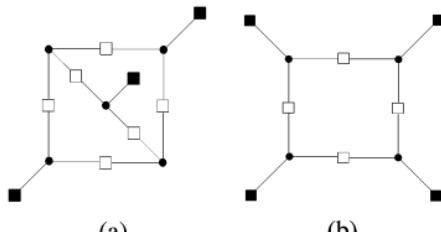
Спектр связности (ACE spectrum) графа Таннера заданного проверочной матрицей кода  $H$  – это вектор

$$ACE(H) = (ACE_{4,0}(VN), ACE_{4,1}(VN), ACE_{4,2}(VN), \dots, ACE_{i,j}(VN), \dots, ACE_{k,m}(VN))$$
, где  $ACE_0(VN)$  -

количество символьных узлов содержащихся в цикле длины  $i$  со значение связности  $j$ . Значение связности (ACE) вычисляется для символьных узлов содержащихся в подграфе образованом циклом  $v_i \in C$ ,  $ACE(C) = \sum_{v \in C} (d(v)-2)$ , где  $d(v)$ - степень инцидентности символьного узла [44].

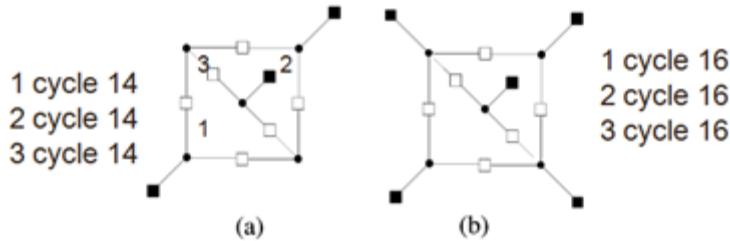
Подграф в графе Таннера (a,b) состоящий из  $a$  символьных узлов инцидентных четному числу проверочных узлов и  $b$  символьных узлов,  $b \leq a$  инцидентных нечетному числу проверочных узлов будем называть (a,b) подграфом (TS, Trapping set, [5]) обуславливающий ошибку декодирования методом распространения доверия (Belief propagation, [4,44]).

На рис. 1.27 изображены два таких подграфа, в случае если вектор ошибки изменит значение в символьных узлах инцидентных нечетному числу проверок, то при мягкому декодированию методом распространения доверия, в следствие неправильного подсчёта маргиналов на символьных узлах подграфа ошибка не будет скорректирована, даже если корректируема в соответствие с дистанктными свойствами кода. Подграфы такого вида представляют собой циклы в Таннере графике кода. Левый подграф образован пересечением трех циклов длины 8, правый одним циклом длины 8.



Trapping sets: (a) (5, 3) and (b) (4, 4)

Рисунок 1.27 – Топологическое представление подграфа обуславливающего отказ мягкого декодирования ●-символьные узел, □ -узел с четным числом проверок, ■ -узел с нечетным числом проверок



Trapping sets: (a) (5,3) , (b) (5,5)

Рисунок 1.28— Пример вычисления значения связности для подграфов TS(5,5), и (5,3), где ●-символьные узел, □ -узел с четным числом проверок, ■ -узел с нечетным числом проверок

Таким образом, код с лучшим спектром связности при одинаковом весовом спектре кода при использовании декодирования методом распространения доверия достигает большей части своего весового спектра.

Hill-Climbing алгоритм («восхождение на вершину», поиск экстремума) аналогично методу отжига пытается прийти к глобальному оптимуму, итеративно изменяя значения циркулянта Таннер-графа и пересчитывая функции цели (температура, число циклов), 45. Этот алгоритм позволяет находить графы с максимальным возможным обхватом и минимальным размером циркулянта. Он обладает существенно большей вычислительной сложностью, чем PEG. Кроме того, максимизируя обхват, он не оптимизирует спектр связности.

Guess-and-Test (бросок и проверка) использует случайные броски значений сдвигов циркулянта и проверяет полученный график на обхват, [22]. Самый простой метод построения графа, однако, требует большого числа испытаний и не гарантирует хороших дистанционных свойств кода и связности графа.

Guess-and-Test использует случайные броски значений сдвигов циркулянта и проверяет полученный график на обхват в соответствии с уравнением:

$$\sum_{k=0}^{m-1} p_{j_{k+1}, l_{k+1}} - p_{j_k, l_k} = 0 \bmod z , \quad (2)$$

где  $2 \leq m \leq g/2$ ,  $p_{j_k, l_k}$  - значения сдвигов циркулянт, входящих в цикл.

Guess-and-Test метод требует большого числа испытаний и не гарантирует хороших дистантных свойств кода и хорошей связности графа.

Алгоритм последовательного добавления ребер (Progressive edge growing)

В работе [46] авторы предложили алгоритм последовательного добавления ребер (Progressive Edge-Growth Tanner Graphs, PEG) заключающийся в построение Таннер графа Низкоплотностного кода на основе распределения весов. Идея алгоритма заключается в последовательном добавлении проверки в матрицу низкоплотностного кода столбец за столбцом, начиная со столбцом малого веса. Каждая из проверок добавляется таким образом, чтобы максимизировать обхват в Таннер-графе низкоплотностного кода.

Улучшенный PEG-алгоритм предложен в работе [47] исправил PEG-алгоритм позволив избегать не детектируемые циклы длины 8 и 10.

В работе [45] исследователями из лаборатории Mitsubishi (Mitsubishi Electric Research Laboratories), был предложен метод лифтинга на основе алгоритма восхождения на вершину (Hill-Climbing). Алгоритм поиска восхождением к вершине находит такую комбинацию параметров, при которой значение обхвата максимально. Поиск начинается из случайной точки. Перечень новых состояний, доступных из текущего, строится путём изменения каждого из параметров по очереди. То есть каждое следующее состояние отличается от предыдущего только в одном параметре. Следующим состоянием из списка доступных выбирается так, что обхват максимальен. Алгоритм останавливается, когда нет таких соседних состояний, которые имеют значение целевой функции большее, чем у текущего узла.

Этот алгоритм применялся для построения низкоплотностных кодов, предназначенных для оптической связи и до появления улучшенного PEG-алгоритма, считался наилучшим из известных алгоритмов с точки зрения способности разрывать циклы в графе.

#### 1.4 Выводы

В связи с интенсивным ростом объема информации, хранимой в электронном виде, в настоящее время актуальными являются вопросы развития систем голограммического архивного хранения данных. Особенностями голограммического метода хранения информации является: высокая плотность информации на квадратный дюйм; высокая надежность хранения, низкое потребление энергии, низкий уровень шума; произвольный доступ к любому из секторов носителя; низкая стоимость носителей информации.

Ключевым преимуществом низкоплотностных кодов является возможность применения субоптимального мягкого алгоритма декодирования методом распространения доверия (BP, belief-propagation), обладающего значительно большей помехоустойчивостью по сравнению с жесткими алгоритмами декодирования.

Использование квазициклического LDPC-кода позволяет получать компактное представление и осуществлять параллельное кодирование и декодирование с глубиной параллелизма равной размеру циркулянта. Эти особенности обуславливают широкое применение квазициклических LDPC-кодов на практике.

Типовые параметры канала голограммической памяти обуславливают работу на низких значениях отношений сигнал-шум SNR 1.2-1.4 дБ, что обуславливает применение трехуровневой системы коррекции ошибок (страницы, книги, антологии). Страницочный уровень работает в условиях больших шумом, поэтому для коррекции используется код длинной 32768 со скоростью 0.5, содержащий 32 битный код контроля на четность. Ключевой

задачей страничного уровня минимизация вероятности битовой ошибки до величины  $10^{-12} - 10^{-15}$ , в зависимости от назначения оборудования.

Эффективность коррекции ошибок LDPC-кодом, применяемого в архивной голограммической памяти, показывает отставание в 1 дБ, от теоретического предела корректирующей способности линейного блочного кода. На эффективность BP-декодирования отрицательно влияет наличие циклов в графе Таннера, образующих «трэплин-сеты».

В случае если вектор ошибки изменит значения символьных узлов, инцидентных нечетному числу проверок, то, вследствие неправильного подсчета условных вероятностей на символьных узлах подграфа ошибки не будет скорректирована, даже если она является корректируемой в соответствие с дистанческими свойствами кода.

Важной характеристикой LDPC-кода является спектр связности (ACE spectrum) графа Таннера. Код с лучшим спектром связности при одинаковом спектре кода при использовании декодирования методом распространения доверия достигает большей части своего весового спектра. Этому коду не будут мешать псевдокодовые слова обусловленные TS. Эта особенность обуславливает при построение низкоплотностных кодов необходимость совместной оптимизации дистанческих свойств кода (кодового расстояния) и свойств графа (спектров связности).

С приближением кода к максимально возможному кодовому расстоянию (МДР-кодам) расчет число циклов в факторе графе (корреляций между символами) и сложность его маргинализации. Решение задачи маргинализации для фактора графов с циклами становится экспоненциально сложным. Нами будет применяется субоптимальное декодирование без учета циклов (loopless Belief Propagation) – вычисление маргиналов, как если бы циклы в факторе графе отсутствовали. Для эффективного применения этого подхода необходимо строить факторы графы со специальной структурой циклов.

Помехоустойчивость кодов в области высоких значений сигнал-шум при декодированных мягким декодером определяется весовым спектром кода в соответствии с формулой (Union bound). Однако в случае субоптимального декодирования методом распространения доверия Belief propagation в весовом спектре кода возникают псевдокодовые слова, обусловленные подграфами “Трэпинг-сетов” (Trapping Set). В зависимости от их размера: линейные по сравнению с длиной кода, псевдокодовые слова определяют характер кривой помехоустойчивости.

Процедура построения квазициклических LDPC-кодов предусматривает выполнение 2-х этапов: 1) выбор протографа (базовой матрицы), 2) расширение базовой проверочной матрицы. Расширение (lifting) базовой проверочной матрицы заключается в замене единичных символов базовой матрицы на циркулянты.

На практике для расширения базовой матрицы чаще всего применяются следующие методы: улучшенный PEG-алгоритм, Hill-Climbing, Guess-and-Test. Однако они направлены на улучшение обхвата Таннер-графа LDPC-кода, простейшей и самой грубой характеристики спектра связности LDPC-кода, без улучшения его дистантных свойств.

Дальнейшее увеличение помехоустойчивости квазициклического LDPC-кода на страничном уровне требует улучшение методов построения квазициклических LDPC-кодов.

## 2 Создание процедуры, методов и алгоритмов построения низкоплотностных кодов для архивной голограмической памяти

### 2.1 Процедура построения квазициклических низкоплотностных кодов

Процедура построения квазициклических LDPC-кодов предусматривает выполнение 2-х этапов:

- 1) выбор протографа (базовой матрицы),
- 2) расширение базовой проверочной матрицы. Расширение (lifting) базовой проверочной матрицы заключается в замене единичных символов базовой матрицы на циркулянты размера  $Z$ . На этом этапе определяются значения циклических сдвигов всех циркулянтов.

Для реализации этапов построения LDPC-кодов используются комбинаторно-алгебраические методы и методы статистической физики.

К первым относятся методы, основанные на конечных геометриях, блочных дизайнах, числовых сетках, словах малого веса кодов Рида-Соломона, метод Салливана (O’Sullivan2006). Достоинством этих методов является возможность выбора кода с хорошими дистанционными свойствами, простота расширения матрицы циркулянтами, а также быстрое получения высокоскоростных регулярных кодов с обхватом 6 и более. Однако применение их затруднительно для построения кодов произвольной размерности (numerology problem) и требует поиска маски для получения нерегулярных кодов.

Наиболее эффективными при поиске протографов являются методы статистической физики, предложенные Ричардсом, Урбанке и Монтанари. В их число входят «Эволюция плотностей» (Density evolution), предусматривающая оптимизацию асимптотических свойств ансамблей кодов при помощи минимизации порога итеративного декодирования и ее аппроксимации: Exit-chart, Protograph-Exit chart, Reciprocal channel approximation, Gaussian Approximation. Достоинство этих методов - возможность получения протографа (маски/весового распределения), позволяющего строить нерегулярные коды.

Недостатком этого класса методов является игнорирование комбинаторно-алгебраических свойств Таннер-графа и дистантных свойств кода, в результате полученные коды содержат кодовые и псевдокодовые слова малого веса.

В диссертации предлагается новая процедура построения низкоплотностных кодов. Отличительными особенностями процедуры являются модификация протографа в случае «неудачного» его расширения и использование дистантных свойств кодов и их спектров связности для просеивания кодов кандидатов.

На вход процедуры подаются: требуемая длина кода  $N$ , минимальный размер циркулянта  $Z_{min}$ , параметры алгоритма декодирования, вероятность ошибки на бит на выходе декодер  $P_{BER}$ , размерность начальной базовой проверочной матрицы (протографа)  $J \times L$ ; битовая маска размера  $J \times L$ , определяющая подлежащие инвертированию значения базовой матрицы; число выколотых символов для улучшения порога итеративного декодирования; число кодов кандидатов  $card$  и число итераций процедуры.

Процедура поиска протографа предусматривает выполнение следующих этапов:

1. Инициализируем базовую матрицу начальной проверочной матрицей (подматрицей) или строим базовую матрицу на основе распределений весов строк и столбцов, полученных при помощи Exit-chart (Density Evolution) метода. Инициализируем множество кодов кандидатов  $\{Code\} = \emptyset$ .

*Начальная фаза оптимизации протографа*

2. Выполняем минимизацию порога итеративного декодирования протографа. Случайным образом в позициях битовой маски инвертируем значения базовой матрицы и оцениваем порог итеративного декодирования  $Treshold$ , обеспечиваемый протографом. В качестве протографа используем вариант базовой матрицы, давший минимальное значение  $Treshold$ .

3. Вычисляем оценки кодового расстояния протографа (кратность кодовых слов минимального веса равна предполагаемому размеру циркулянта,

$Z = \left\lceil \frac{N}{L} \right\rceil$ .). Вычисляем, опираясь на математическое ожидание появления трэпин-сета ( $a, b$ ) малого размера в ансамбле протографов, вероятность того, что в результате расширения базовой матрицы будет выполняться отношение  $\frac{b}{a} > c$ , где  $c$  - некоторая константа. При помощи Union bound вычисляем вероятность ошибочного декодирования  $P_{UB}$ .

$$P_{UB} \leq \sum_{i=d_{\min}}^N \omega_i Q(\sqrt{i}),$$

где  $d_{\min}$  - кодовое расстояние,  $\omega_i$  - кратность слов веса  $i$ ,  $i$  - вес кодового слова,

$Q(x)$  - Q-функция  $Q(x) = (\pi N_0)^{-1/2} \int_x^\infty e^{-n^2/N_0} dn$ . При высоких отношениях сигнал-

шум ошибка на бит вычисляется по формуле:

$$P_{UB} \approx \omega_{d_{\min}} Q(\sqrt{d_{\min}}),$$

где  $\omega_{d_{\min}}$  - кратность слов минимального веса.

Если полученная вероятность ошибки ниже требуемой  $P_{UB} < P_{BER}$ , переходим к шагу 4.

Если полученная вероятность ошибки выше требуемой  $P_{UB} > P_{BER}$  и  $Z > Z_{\min}$ , увеличиваем размер протографа, меняя  $J$  и  $L$ , и переходим к шагу 2. Если  $P_{UB} > P_{BER}$  и  $Z \leq Z_{\min}$  завершаем работу алгоритма, при заданных параметрах кода требуемая вероятность ошибки  $P_{BER}$  не достижима.

#### *Фаза расширения протографа*

4. Расширяем протограф жадным методом запрещённых коэффициентов, получаем требуемое число кодов кандидатов  $|\{Code\}| = card$ .
5. Оцениваем кодовое расстояние кодов кандидатов и оставляем коды с достаточным кодовым расстоянием для достижения требуемого уровня полки  $C \subset \{Code\}: P_{UB}(d_{\min}(C)) < P_{BER}$ .
6. В оставшихся квазициклических кодах  $C$  осуществляем поиск «Трэпинг-сетов» пересечения коротких циклов, которые потенциально содержат малое число невыполненных проверок  $b$ . В результате находим  $k$ -типов

пересечений коротких циклов, каждое кратности  $mult_i, i = 1 \dots k$ . Для низкоскоростных кодов с целью упрощения поиска таких циклов (сублинейных) применяем алгебраическую реализацию метода замкнутых циклов (*lollipop walk*) с сохранением весовых распределений символов, участвующих в цикле. Для высокоскоростных кодов целесообразно применять поиск в релаксированном маргинальном политопе кода (Linear Programming TS search), а так же с использованием инстантонов.

7. Для каждого кода кандидата  $C$  получим величину  $Eb/N0$  на уровне  $P_{BER}$  (моделированием, Importance Sampling, Covariance Evolution) и определяем коэффициенты штрафной функции таким образом, чтобы выполнялось неравенство  $Eb/N0(P_{BER}) - (Treshold + Penalte) \leq e$ , где штрафная функция задается следующим образом:

$$Penalte(C) = \sum_{i=1}^k mult_i \times coeff_i,$$

и  $coeff$ -коэффициент штрафа.

Для циклов, содержащих выколотые символы,  $coeff \approx 0$ , для “Трэпинсетов” малого веса  $coeff$  принимают максимальные значения.

8. При помощи применения метода имитации отжига модифицируем коды кандидаты для улучшения связности графов. Используя коэффициенты штрафной функцию, оцениваем ее значения, отсеиваем коды,  $C' \subset \{C\}: Penalte(C') \leq \epsilon$ ,  $\epsilon$  – некоторая константа.
9. Если число итераций процедуры не превысило требуемую величину и число кодов кандидатов меньше заданной величины: переходим к шагу 2, иначе завершаем работу алгоритма. Возвращаем массив кодов кандидатов  $C'$ .

Для нахождения порога итеративного декодирования  $Treshold$  (этап 2) перебираются возможные значения порога с их последующей оценкой при помощи метода эволюции взаимной информации (PEXIT-chart) [35] с последующим уточнением порога при помощи метода “Эволюции плотностей” (Density Evolution) [26].

Метод PEXIT-chart предусматривает обмен взаимной информации между символьными и проверочными вершинами графа Таннера:  $I_{E,V}$  и  $I_{E,C}$ .

Апостериорная информация (внешняя)  $I_{E,V}$  символьных узлов вычисляется в соответствие с уравнениями:

$$I_{E,V} = J(\sigma) = J\left(\sqrt{(d_v - 1)\sigma_A^2 + \sigma_{ch}^2}\right),$$

$$J(\sigma) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(l-\frac{\sigma^2}{2})^2/2\sigma^2} \log(1 + e^{-l}) dl,$$

где  $J(\sigma)$  – функция взаимной информации,  $\sigma_A^2$  и  $\sigma_{ch}^2$  -априорная дисперсия и дисперсия шума.

Априорная информация  $I_{A,V}$  символьных узлов вычисляется в соответствие с уравнениями:

$$I_{A,V} = J(\sigma_A), I_{E,V} = J(\sigma) = J\left(\sqrt{(d_v - 1)[J^{-1}(I_{A,V})]^2 + \sigma_{ch}^2}\right)$$

Апостериорная информация (внешняя)  $I_{E,C}$  проверочных узлов (факторов) вычисляется в соответствие с уравнениями:

$$I_{E,C} = 1 - J\left(\sqrt{(d_c - 1)[J^{-1}(1 - I_{A,C})]^2}\right).$$

Веса символьных и проверочных узлов графа Таннера задаются в виде полиномов распределения весов  $\lambda(z) = \sum_{d=1}^{d_v} \lambda_d z^{d-1}$  и  $\rho(z) = \sum_{d=1}^{d_c} \rho_d z^{d-1}$ , где  $\lambda_d$  доля проверок веса  $d$  в столбце проверочной матрицы, и  $\rho_d$  доля проверок веса  $d$  в строке.

Для нерегулярных кодов

$$I_{E,V} = \sum_{d=1}^{d_v} \lambda_d I_{E,V}(d, I_{A,V}), I_{E,C} = \sum_{d=1}^{d_c} \rho_d I_{E,C}(d, I_{A,C}).$$

Вычисление функции взаимной информации  $J(\cdot)$  реализуется путем вычисления значений аппроксимирующего полинома либо путем выбора из таблицы предварительно вычисленных значений функции (LUT).

Путем вычисления функций  $I_{E,V}(d, I_{A,V})$  и  $I_{E,C}(d, I_{A,C})$  выполняется итеративный процесс эволюции взаимной информации начиная с нулевого значения  $I_{A,V}^{(0)}$ :

$$I_{A,V}^{(0)} = 0, I_{A,V}^{(n+1)} = I_{E,C}(d, I_{E,V}(d, I_{A,V}^{(n)})).$$

Процесс останавливается, когда априорная информация  $I_{A,V}^{(n)}$  на некоторой итерации принимает значение близкое к 1. Номер итерации показывает нам какое число итераций требуется для соответствующего порога итеративного декодирования.

Метод “Эволюции плотностей” (Density Evolution) используется на 2-м этапе процедуры построения LDPC-кода следующим образом.

Пусть  $f_0$  - функция плотности вероятностей, заданная логарифмами правдоподобия,  $\sigma_+$  - дисперсия ошибки, соответствующая отношению сигнал/шум;  $I_\lambda$  - максимальный вес символьного узла,  $I_p$  - максимальный вес проверочного узла,  $\varepsilon$  - требуемая вероятность ошибки на бит,  $i_{max}$  - число итераций в алгоритме распространения доверия.

Проинициализируем  $f_{c \rightarrow v} = f_0$ . В цикле по  $i$  вычисляем  $f^{(i-1)\otimes}$  свертку функции плотностей вероятностей:

$$f_{c \rightarrow v} = \sum_{i=2}^{i_{max}} p_i f^{(i-1)\otimes}, f_{v \rightarrow c} = (\sum_{i=2}^{i_{max}} \lambda_i f^{(i-1)\otimes}) \times f_0.$$

Если вероятность ошибки на бит:

$$P_e = \int_{-\infty}^0 f_{vc}(x) dx < \varepsilon$$

не превосходит требуемую, тогда прекращаем работу алгоритма и выдаем  $\sigma_+$ .

Этапы 2 и 3 обеспечивают модификацию протографа, если вероятность ошибочного декодирования, обусловленная дистанчными свойствами, выше заданной  $P_{UB}$ .

На этапе 3 для оценки кодового расстояния протографа применяется верхняя оценка кодового расстояния квазициклических кодов Маккея-Вонтобеля-Смарандиши-Сигеля-Батлера по протографу (см. раздел 3.1.2).

На 6-м этапе поиск и взвешивание «Трэпин-сетов» может выполняться при помощи решения задачи линейного программирования, [92-93]:

$$\min \lambda^T x,$$

$$H \otimes x = 0,$$

где  $H$  – проверочная матрица,  $x$  – кодовое слово LDPC-кода,  $\lambda$  – вектор логарифмов правдоподобия символов кодового слова, полученный в результате применения метода Монте-Карло. Пример решающей области представлен на Рис. 2.1.

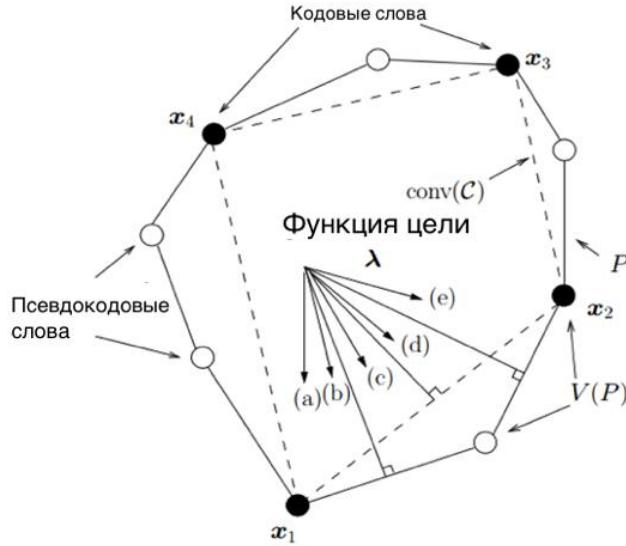


Рисунок 2.1 Пример решающей области для поиска Трэплинг-сета

Одним из способов поиска «Трэплинг-сетов» по проверочной матрице LDPC-код  $H^{m \times n}$  с Таннер-графом  $G = (V \cup C, E)$  осуществляется путем решения целочисленной программы с  $n + 2m$  переменных и  $m+1$  условиями:

$$\min \sum_{v_i \in V} x_i : \sum_{c_j \in C} I_j^{odd} = b,$$

$$2\alpha_j + I_j^{odd} - \sum_{(v_i, c_j) \in E} x_i = 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, m\},$$

$$x_i, I_j^{odd} \in \{0, 1\}, \quad \alpha_k \in \left\{0, \dots, \left\lfloor \frac{\rho_{max}}{2} \right\rfloor \right\}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, m\}, \forall k \in \{1, 2, \dots, m\},$$

где  $b_{max}$  - задает максимальный параметр нечетной степени инцидентности  $TS(a, b)$ :  $b < b_{max}$ ,  $\rho_{max}$  наибольшая степень инцидентности проверки в TS-подграфе (вес строки),  $I_j^{odd}$ - фиктивная переменная равная 1, если символный узел инцидентен нечетному числу проверок и 0 в противном случае, вспомогательная переменная  $\alpha_j$  для проверки условия степени

инцидентности фиктивной переменной. Такая программа является частным случаем декодирования LDPC-кода методом линейного программирования с условиями Выборки по значимости (Importance Sampling) «Трэплин-сетов».

Пример 1. Проиллюстрируем решение этой задачи на примере для кода (4,1) с проверочной матрицей

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

По определению проверочной матрицы выполняется

$$H \otimes x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \otimes x = \begin{pmatrix} x_2 \oplus x_4 \\ x_3 \oplus x_4 \\ x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 \end{pmatrix} = 0.$$

Рассматривая каждую из строк матрицы  $H$ , мы будем строить политоп - набор неравенств, состоящий из нечетного числа символьных вершин Таннер-графа.

Для построения политопа используется следующая формула [92-93]:

$$\sum_{t \in V} x'_t - \sum_{t \in h_i \setminus V} x'_t \leq |V| - 1,$$

где  $x'_t$  - символ кодового слова, входящий в политоп,  $V$  - подмножество из нечетного числа символов, соответствующих единицам строки проверочной матрицы  $h_i$ .

Координата символа (вершины) в проверке, содержащейся в текущем подмножестве проверочной строки, равна +1, не содержащейся в текущем подмножестве проверочной строки равна -1. Для символов, отсутствующих в текущей строке  $h_i$ , значение равно 0.

Для первой строки проверочной матрицы, задающей уравнение  $x_2 \oplus x_4 = 0$ , политоп задается двумя неравенствами. Одно из которых соответствует  $V = \{x'_2\}$ , второе -  $V = \{x'_4\}$ :

$$\begin{pmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_2 \\ x'_4 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} V = \{x'_2\} \quad V = \{x'_4\}.$$

Для второй строки, задающей уравнение  $x_2 \oplus x_4 = 0$ , политоп также задается двумя неравенствами. Одно из которых соответствует  $V = \{x'_3\}$ , второе -  $V = \{x'_4\}$ :

$$\begin{pmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} V = \{x'_3\} \\ V = \{x'_4\}.$$

И третьей строке соответствует политоп, состоящий из 8 неравенств, которые соответствуют значениям  $|V|$ , равным 1 или 3:

$$\begin{pmatrix} +1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & +1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & +1 & +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 3 & -1 \\ 3 & -1 \\ 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} V = \{x'_1\} \\ V = \{x'_2\} \\ V = \{x'_3\} \\ V = \{x'_4\} \\ V = \{x'_1, x'_2, x'_3\} \\ V = \{x'_1, x'_2, x'_4\} \\ V = \{x'_1, x'_3, x'_4\} \\ V = \{x'_2, x'_3, x'_4\}, \end{array}$$

В результате решения системы неравенств линейной модели получим один «Трэплин-сет» TS(3,1), состоящий из трех символов  $x_2, x_3, x_4$ , веса 3.000549, см. Рис 2.2.

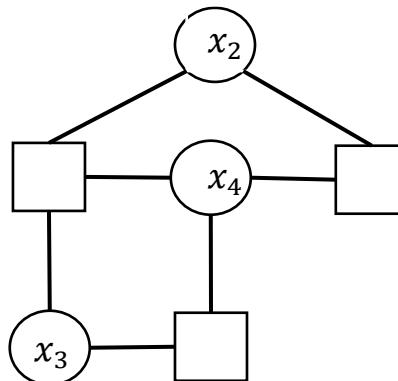


Рисунок 2.2- «Трэплинг-сет» TS(3,1) веса  $\omega_1 = 3.000549$

Пример 2. Ниже в таблице приведены псевдокодовые слова, принадлежащие 17 классам подграфов «Трэплинг-сетов», с весом псевдокодового слова  $\omega \leq 21$  для квазициклического низкоплотностного кода (Приложение 3) с базовой матрицей 4 на 36 и циркулянтом 278 в случае его декодирования шестью итерациями методом распространения доверия.

Таблица 2.01– Таблица «Трэплинг-сетов» для квазициклического низкоплотностного кода 4x36

TS(a, b)	Вес псевдокодового слова, $\omega(p)$	Положение символьных узлов в графе, образующих подграф Трэплинг-сета
(6, 6)	[10.713756]	671 835 1245 1652 1732 4744
(6, 6)	[11.861630]	1096 1228 1715 4727 6537 9033
(6, 6)	[12.367398]	1989 4241 6901 7319 8341 8830
(7, 6)	[12.858173]	1114 1391 1698 2140 2272 2679 3501
(8, 8)	[14.304589]	1228 1505 1812 1976 2386 3337 4836 8357
(6, 6)	[14.496057]	204 2462 3721 5496 6358 7229
(7, 6)	[15.401395]	2118 2488 2724 3013 3059 3614 3643
(8, 8)	[15.503993]	423 749 879 2102 4772 6545 7488 9175
(10, 10)	[16.226536]	296 706 835 1193 1411 2724 5573 7980 8593 9378
(8, 8)	[16.284406]	725 1782 4171 4820 6364 6404 6681 7214
(8, 8)	[16.485658]	255 3870 5839 6323 6578 6896 7045 9140
(6, 6)	[16.749574]	3390 4860 5193 5554 5561 5925
(9, 8)	[17.552285]	557 1112 2122 2352 2698 6058 6525 9192 9269
(8, 8)	[17.898337]	1439 3446 4005 5283 6028 6361 7750 7791
(8, 8)	[18.179891]	2016 2142 2906 3195 4625 4989 8982 9453
(8, 8)	[18.241773]	1871 2148 2455 5189 7507 8694 9459 9592
(11, 10)	[20.129338]	301 1167 1911 1947 3067 4272 4300 6682 7426 8336 9295

На седьмом этапе, после нахождения и взвешивания «Трэплинг-сетов» вероятность перехода в соответствующие псевдокодовые слова вычисляется по формуле:

$$P_{TS} = Z * \sum_i Q\left(\frac{\sqrt{a_i \otimes \omega_i(p)}}{\sigma}\right),$$

где  $Q$  – функция ,  $Z$ -размер циркулянта (кратность псевдокодовых слов для квазициклического кода),  $\omega_i$  – вес  $i$ -го псевдокодового слова, образованного “Трэплин-сетом”  $TS(a_i, b)$ ,  $\sigma$  - дисперсия ошибки,  $p$  – политоп, заданный проверочной матрицей кода.

Используя полученные оценки вероятностей ошибки для циклов, образующих «Трэплин-сеты», для кода кандидата с наибольшей нижней оценкой псевдокодового веса, полученного путем спектрального просеивания кодов кандидатов [64, 67, 102], применим их для оценки *Penalte* кодов кандидатов.

Ниже на Рис. 2.2 представлена оценка полки для кода из примера 2. Кривая 1 соответствует вероятности ошибки на блок  $2.8 \cdot 10^{-13}$ , (вероятности ошибки на бит  $2.8 \cdot 10^{-17}$ ) при равной вероятности ошибки каждого из битов

для длины кода 10000, в случае, если параметры декодера (scale, offset, scale of LLR quantizer mapper, bitwise of message) обуславливают возникновение всех псевдокодовых слов, приведенных в Таблице 2.01 . Кривая 2 соответствует вероятности ошибки на блок  $10^{-15}$  (на бит  $10^{-19}$ ) в случае, если параметры декодера исключают появление 278 псевдокодовых слов «Трэплинг-сета» TS(6,6),  $\omega = 10.713756$ . Кривой номер 3 соответствует вероятность ошибки на блок  $10^{-18}$  (на бит  $10^{-22}$ ) в случае, если параметры декодера исключают появление 278 псевдокодовых слов для каждого из трех классов «Трэплинг-сетов» (6, 6) с весом псевдокодовых слов:  $\omega = [10.71375, 11.861630, 12.367398]$ . Все кривые построены при условии, что соответствующие параметры декодера не повлияют на вероятность появления кодовых слов в рассматриваемых областях вероятностей (не ухудшат кривую помехоустойчивости в областях  $P_{FER} < 10^{-13}, 10^{-15}, 10^{-18}$ , соответственно).

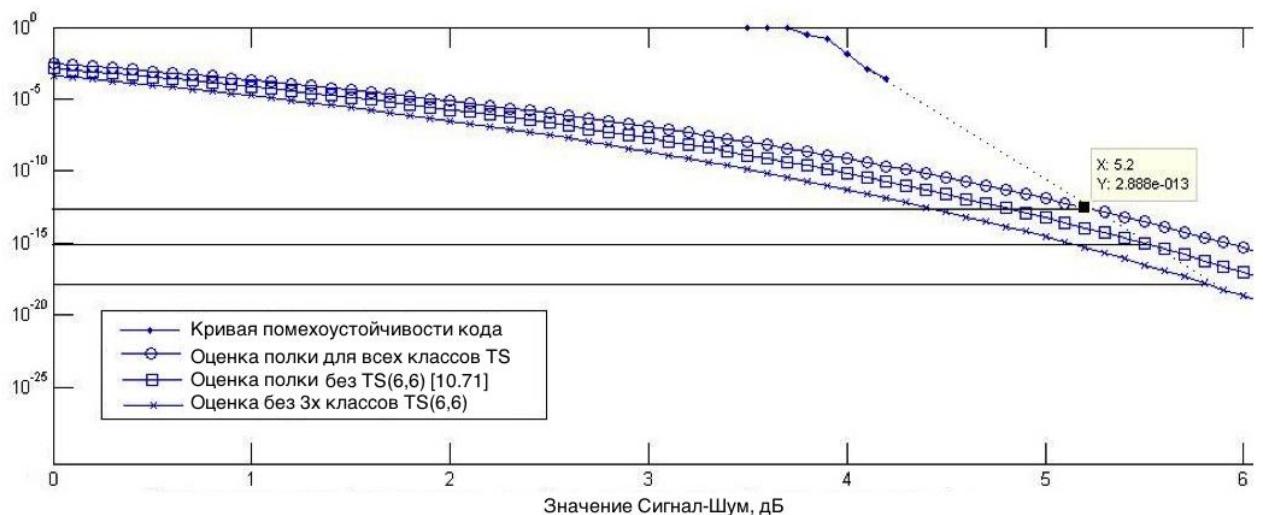


Рисунок 2.2 - Оценка помехоустойчивости кода. Зависимость вероятности ошибки на блок (FER) от значения Сигнал-Шум (ЕВ/Но) для квазициклического кода с проверочной матрицей размера 4x36 с циркулянтом 278

Проиллюстрируем на примере процесс построения проверочной матрицы ME-LDPC кода длиной 10000 и скоростью 0.875 (2 последних символа выколоты), для которого необходимо обеспечить уровень ошибки на бит порядка  $10^{-10}$  и порог меньше 5 дБ при 40 итерациях layered BP.

В качестве начальной проверочной матрицы используем матрицу размера  $42 \times 4$ ,  $H_0$  приведенную на стр. 75.

Оценив порог итеративного декодирования (Этап 2) и кодовое расстояние (Этап 3), получим 10.5 и 1 соответственно. Данного кодового расстояния и порога недостаточно для выполнения поставленных требований.

Добавим еще одну строку проверочной матрицы (Этап 2). Начнем перебирать все возможные положения проверок в этой строке. Получим матрицу протографа  $H_1$  размера  $42 \times 5$  (2 последних символа выколоты) с порогом итеративного декодирования 7.47 и кодовым расстоянием 2 .

Продолжим процесс добавления строк проверочной матрицы и жадного поиска оптимального положения проверок в них. Получим матрицу протографа размера  $42 \times 6$   $H_2$  с кодовым расстоянием 5, порогом итеративного декодирования 3.81.

В итоге получилась матрица протографа размера  $42 \times 7$ ,  $H_3$  с кодовым расстоянием 11, порогом итеративного декодирования 3.095, удовлетворяющая заданным требованиям.

Не всегда модификация матриц приводит к улучшению дистанческих свойств кода. Например, представленная ниже матрица  $H_{3\_b}$  протографа имеет порог итеративного декодирования 3.076 и потенциально может быть расширена с меньшим числом коротких циклов, однако имеет худшую верхнюю оценку кодового расстояния (10).

$$\begin{aligned}
H_0 = & \begin{array}{|c|} \hline \text{[matrix 4x48]} \\ \hline \end{array} \\
H_1 = & \begin{array}{|c|} \hline \text{[matrix 5x48]} \\ \hline \end{array} \\
H_2 = & \begin{array}{|c|} \hline \text{[matrix 5x48]} \\ \hline \end{array} \\
H_3 = & \begin{array}{|c|} \hline \text{[matrix 6x48]} \\ \hline \end{array} \\
H_{3-b} = & \begin{array}{|c|} \hline \text{[matrix 7x48]} \\ \hline \end{array}
\end{aligned}$$

На Рис. 2.3 представлены оценки вероятности ошибки на бит для циркулянта размера 780, соответствующего длине кода  $N = 780 \times 42 = 32760$ , приведенных выше протографов  $H_0, H_1, H_2, H_3$ .

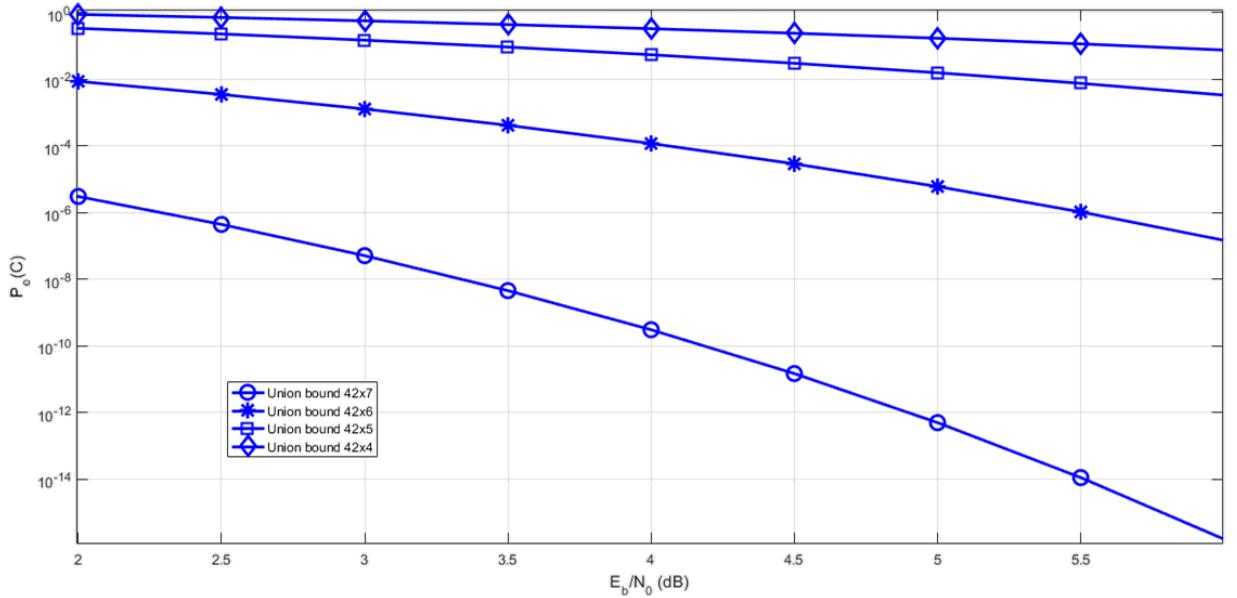


Рисунок 2.3 Оценка вероятности ошибки на бит для протографов  $H_0, H_1, H_2, H_3$ .

Теперь расширим протографа размера 42 на 7, циркулянтом размера 30 и продемонстрируем работу уточненной оценки кодового расстояния Маккея-Вонтобеля-Смарандиши-Сигеля-Батлера в расширенном графе ([59-60], теорема 7). Отметим, что коды не достигают верхней границы кодового расстояния, Рис. 2.4.

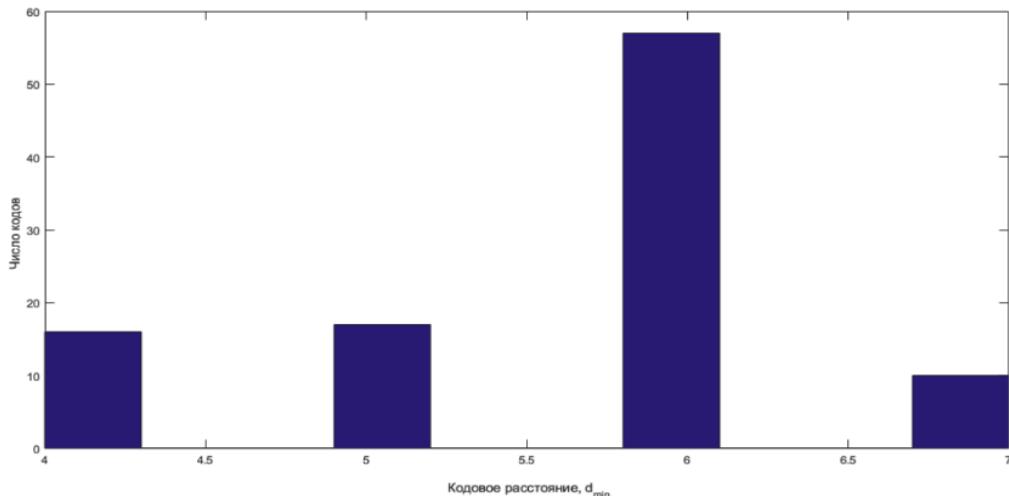


Рисунок 2.4 - Распределение кодового расстояния среди 100 расширенных квазициклических низкоплотностных кодов

В приложение 3, представлены примеры кодов кандидатов с кодовым расстоянием 4, 5, 6, 7. Ниже на рис. 2.5-2.8 представлены спектры их связности (ACE Spectrum), вычисленные по формуле  $ACE(C) = \sum_{v \in C} (d(v)-2)$ , [44], где  $d(v)$ - степень инцидентности символного узла  $v$ , входящего в циклы длины  $i$ ,  $n_i$  - число таких символьных узлов. Ось абсцисс соответствует значению связности в подграфе (ACE), ось ординат числу символьных узлов (столбцов):

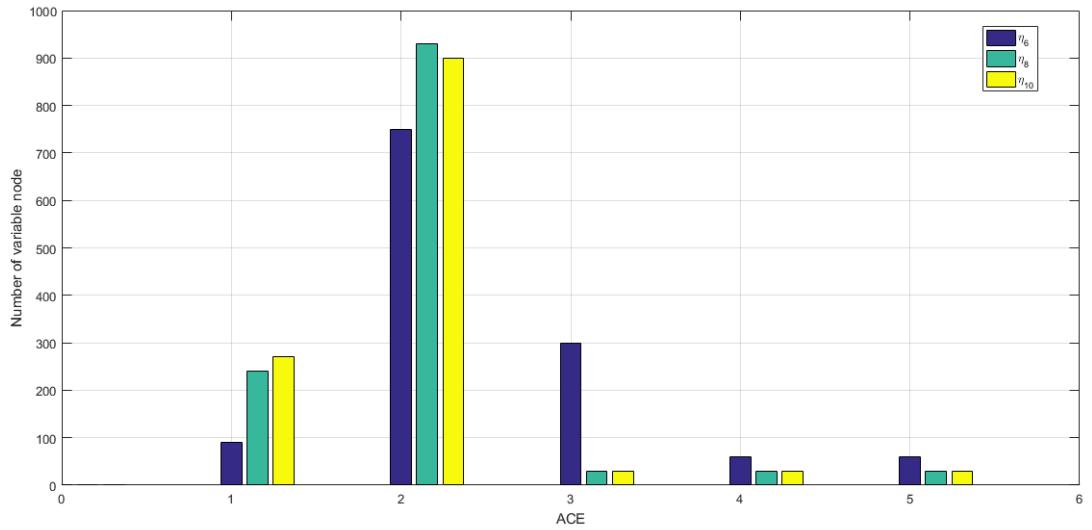


Рисунок 2.5 - Спектр связности расширенного протографа 42 на 7 с кодовым расстоянием 4.

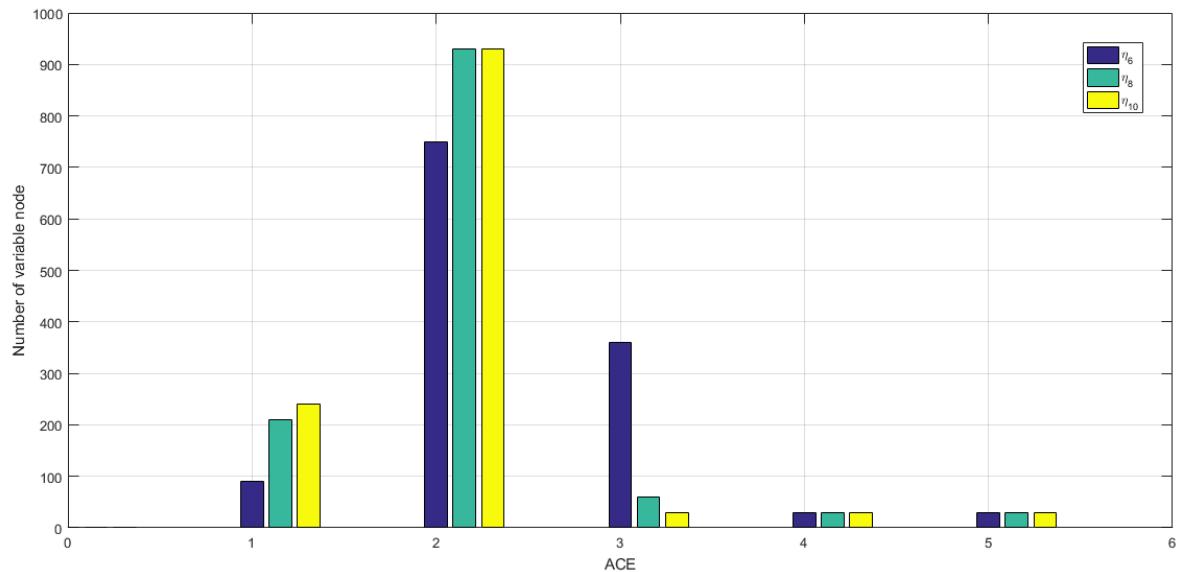


Рисунок 2.6 - Спектр связности расширенного протографа 42 на 7 с кодовым расстоянием 5

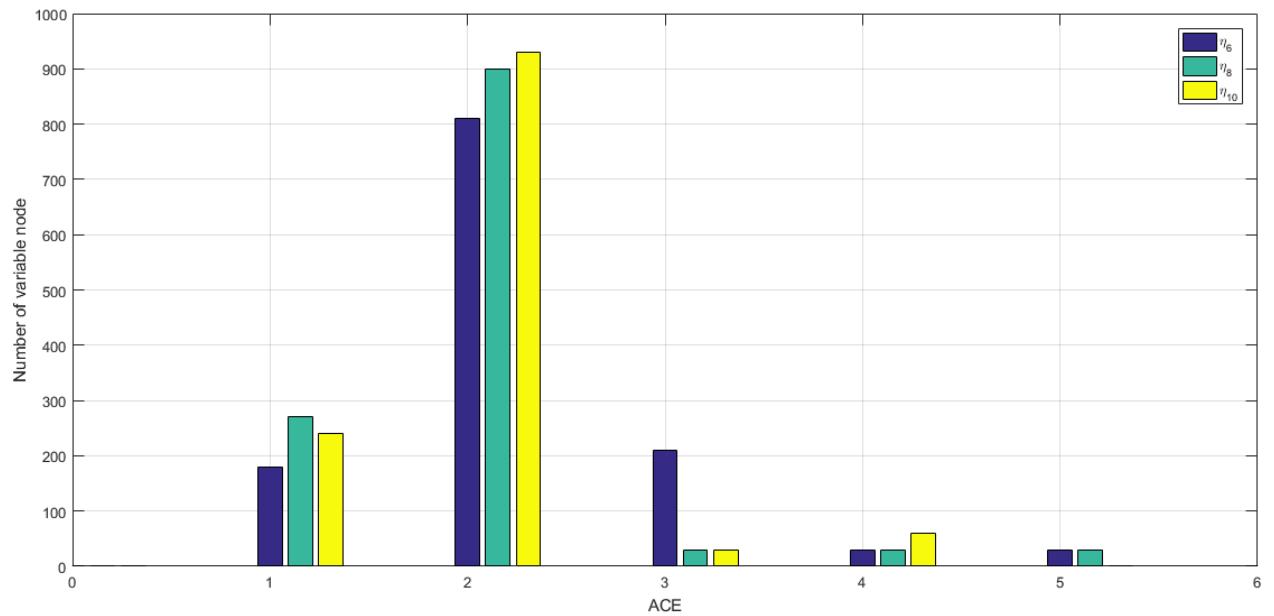


Рисунок 2.7 - Спектр связности расширенного протографа 42 на 7 с кодовым расстоянием 6

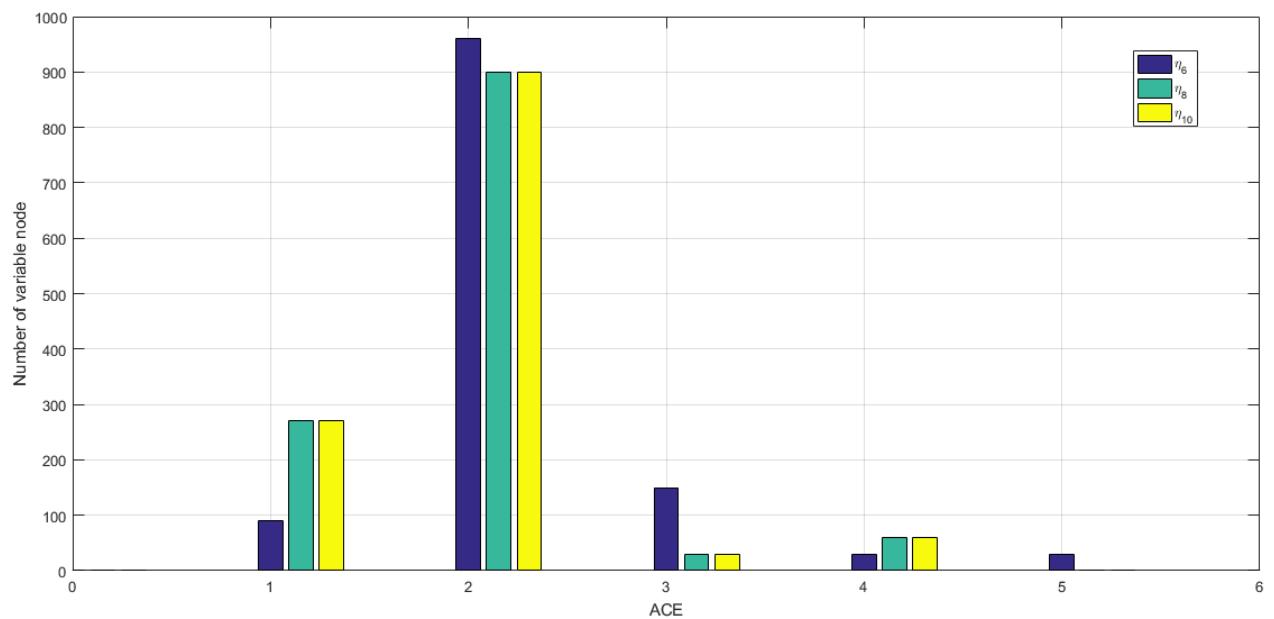


Рисунок 2.8 - Спектр связности расширенного протографа 42 на 7 с кодовым расстоянием 7.

В результате работы предложенной процедуры нами были получены ряд протографов кодов с порогами итеративного декодирования на уровне  $10^{-15}$  (ошибка на бит) превосходящими известные ранее:

1) протограф кодов со скоростью  $4/5$ , с максимальным весом столбца 19, с порогом итеративного декодирования  $E_B/N_0 = 2.3345$ , что лучше, чем порог итеративного декодирования протографа AR4A-кодов,  $E_B/N_0 = 2.396$ , см. Рис. 2.9, [49];

2) протограф кодов со скоростью  $2/3$ , с максимальным весом столбца 10, с порогом итеративного декодирования  $E_B/N_0 = 1.292$ , что превосходит порог итеративного декодирования протографа AR4JA-кодов,  $E_B/N_0 = 1.4$ , см. Рис. 2.11, [39,103];

3) протограф кодов со скоростью  $1/2$ , с максимальным весом столбца 20, с порогом итеративного декодирования  $E_B/N_0 = 0.3994$ , что значительно меньше порога итеративного декодирования протографа AR4A-кода,  $E_B/N_0 = 0.56$ , см. Рис. 2.10, [49].

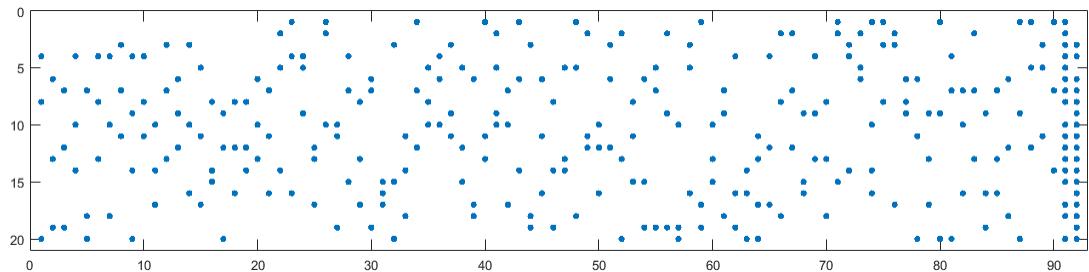


Рисунок 2.9 - Графическое представление базовой матрицы (протографа) кодов со скоростью  $4/5$ , точки обозначают единицы в базовой матрице

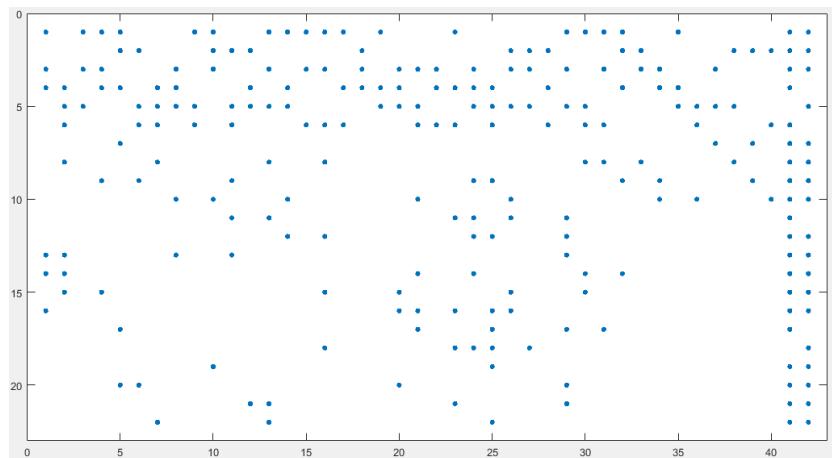


Рисунок 2.10 - Рис. Графическое представление базовой матрицы кодов со скоростью  $1/2$ , точки обозначают единицы в базовой матрице

Скорость кода: 2/3

Protograph-

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	2
2	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	2
3	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
4	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1
5	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	2
6	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	2

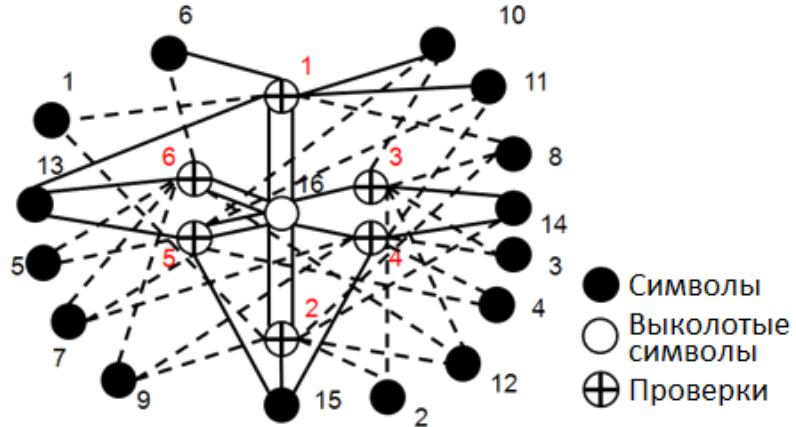


Рисунок 2.11 - Полученный протограф кодов со скоростью кода 2/3, [103]: а) базовая матрица, б) протограф соответствующей базовой матрице

## 2.2 Метод расширения базовой проверочной матрицы

В диссертации предложен новый метод расширения базовой проверочной матрицы, используемый на 4 и 8 этапах процедуры построения низкоплотностных кодов и позволяющий улучшить дистантные свойства кодов и их спектры связности. Отличительной особенностью метода является последовательное использование жадного метода запрещенных коэффициентов и метода имитации отжига.

Часто используемый Guess-and-Test метод требует большого числа испытаний для достижения требуемого обхвата графа. Причина этой особенности метода, заключается в использование случайных бросков значений сдвигов циркулянта, с последующей проверкой полученного графа на обхват в соответствие с уравнением (2), [22].

Для решения этой проблемы нами предложен новый метод расширения базовой проверочной матрицы, особенностью которого являются: расширение матрицы по строкам, представляющим проверочные уравнения; использование в процессе расширения постоянно модифицируемых массивов флагов

запрещенных коэффициентов в сочетании с методов имитации отжига; просеивание полученных кодов кандидатов.

Ниже приводится формализация каждого метода запрещенных коэффициентов в виде алгоритма, [109, 143]. На вход алгоритма подаются: требуемый обхват графа  $g$ , список проверочных уравнений (единиц в базовой проверочной матрице, заданных номерами строки и столбца). В алгоритме используется массив флагов запрещенных циклических сдвигов циркулянтов  $shift$  (циклических сдвигов, формирующих циклы длиной меньше  $g$ ) размерности  $J \cdot L \cdot z$ .

1. Инициализируем массив флагов запрещенных циклических сдвигов циркулянт:  $shift_{j,l,s} = 0, 0 \leq j \leq J-1, 0 \leq l \leq L-1, 0 \leq s \leq z-1$ .
2. В цикле по  $0 \leq j \leq J-1, 0 \leq l \leq L-1$ , для всех ненулевых элементов базовой проверочной матрицы:
  - 2.1. Назначаем случайный сдвиг циркулянта  $p_{j,l} = \text{rand}(0, z-1)$  с нулевым значением флага запрещенных циклических сдвигов.
  - 2.2. Выполняем модификацию массива флагов запрещенных сдвигов для элементов базовой матрицы с неопределенным до сих пор сдвигом циркулянта. Для всех возможных циклов глубиной до  $g$ , в которых участвует элемент базовой матрицы  $h_{j,l}$ , проверяем выполнение условий (2). Если условия выполняются, то соответствующий флаг запрещенного циклического сдвига устанавливаем в единицу.
  - 2.3. Если все флаги запрещенных сдвигов равны 1, запускаем работу алгоритма заново. В случае превышения заданного числа запусков работы алгоритма завершается с фиксацией неудачи построения квазициклического кода.

В результате работы алгоритма получается квазициклический код с длиной  $N_{bin} = L \times z$  и скоростью  $R = 1 - \frac{dv_{avg}}{dc_{avg}}$ , где  $dv_{avg}, dc_{avg}$  средний вес столбца и строки, соответственно.

Метод запрещенных коэффициентов демонстрирует высокую вероятность (примерно на порядок большую, чем PEG) успешного построения LDPC-кода кандидата, присущую методу Hill-Climbing при существенно меньшей вычислительной сложности, сравнимой со сложностью метода Guess-and-Test, Рис. 2.12.

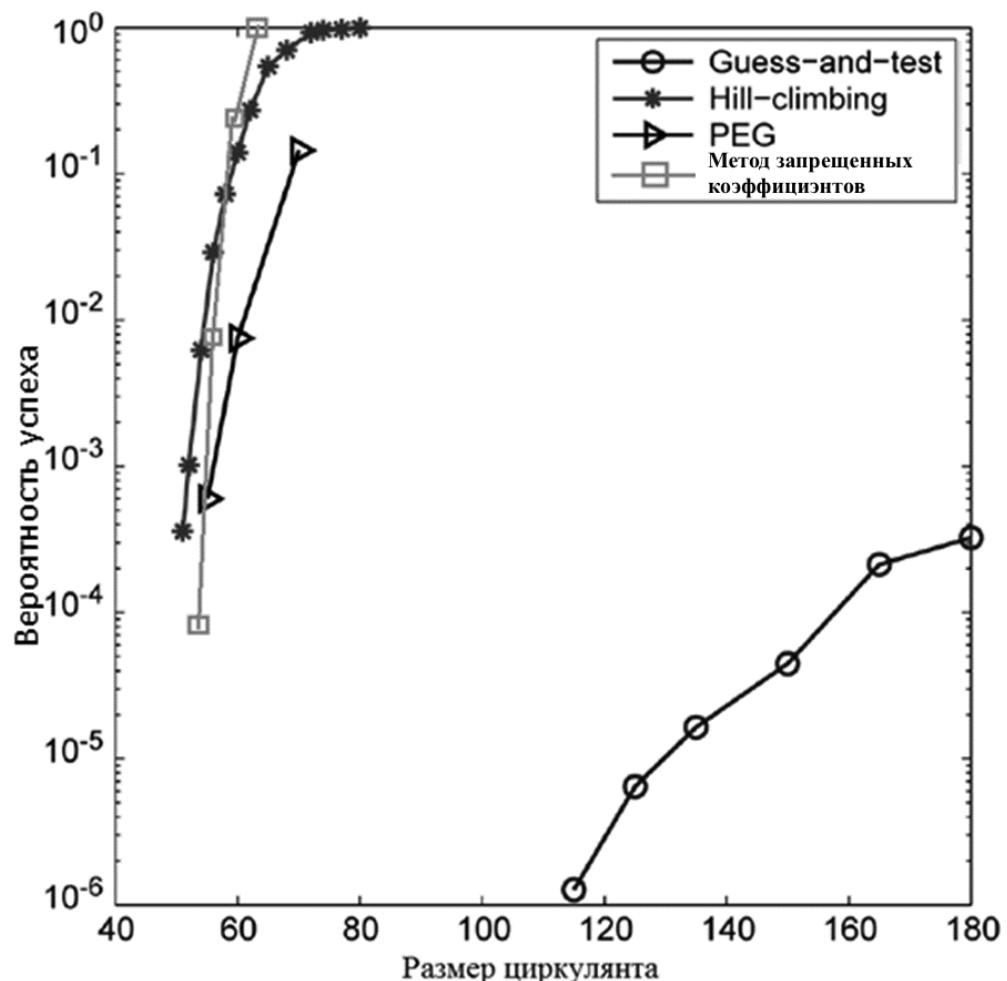


Рисунок 2.12. - Сравнение вероятности успешного построения квазициклического регулярного кода обхватом 8 с весом строки 12 и весом столбца 3 методами расширения базовой матрицы: Guess-and-Test, Hill-Climbing, запрещенных коэффициентов, [109,143] и PEG

Предложенный метод расширения протографа предусматривает использование после жадного метода запрещенных коэффициентов метода имитации отжига (Simulated Annealing), [101,111,122,123]. Алгоритм последнего представлен ниже:

1. Инициируем счетчик шагов алгоритма Nstep=0.
2. Выбираем случайно не нулевой элемент в базовой матрице  $h_{j,l}$ ;
3. Перечисляем все циклы, проходящие через этот циркулянт  $h_{j,l}$ , используемые в формуле расчета штрафной функции *Penalte*;
4. Вычисляем число циклов  $\Theta$  для всевозможных циклических сдвигов  $a_{j,l} \in \{0...L-1\}$  циркулянта  $a_{j,l}$ ;
5. Выбираем случайно одно из значений  $a_{j,l}$  с вероятностью, зависящей от числа циклов и температуры Temp. Вероятность выбора сдвига циркулянта  $a_{jl}$ , задана функцией:

$$P(a_{jl}) = w(a_{jl}) / \sum_{i=0}^{L-1} w(i),$$

где функция плотности вероятности  $w(a_{jl})$  возрастает с уменьшением числа циклов  $\Theta$  и падает с уменьшением температуры:

$$w(a_{jl}) = e^{\frac{-\Theta(a_{jl})}{Temp}};$$

6. Инкрементируем переменную Nstep, вычисляем новое значение температуры:

$$Temp = \eta \frac{\Phi}{Nstep^2},$$

где  $\eta$  - некоторая константа,  $\Phi$  - общее число циклов в расширенной матрице  $H$ .

7. Останавливаем работу алгоритма, если через заданное число шагов число циклов в графе  $\Phi$  не изменилось, иначе перезапускаем алгоритм.

С помощью предложенного метода удалось уменьшить минимальные значения циркулянтов в базовой матрице регулярного кода (см. Табл. 2.2-2.3) (уменьшение минимального значения требуемого циркулянта позволяет улучшить помехоустойчивость кода).

Таблица 2.2 - Минимальное значение размера циркулянта полученное методами лифтинга для регулярного кода с числом строк  $m=3$ , числом столбцов  $L$  с обхватом 10

Число столбцов, $L$	Предложенный Метод (Simulated Annealing), [101]	Hill Climbing, [45]	Улучшенный PEG, [47]	Нижняя оценка, [48]
4	37	39	37	37
5	61	63	61	61
6	91	103	91	91
7	155	160	155	127
8	215	233	227	168
9	304	329	323	217
10	412	439	429	271
11	545	577	571	331
12	709	758	-	-

Таблица 2.3 - Минимальное значение размера циркулянта полученное методами лифтинга для регулярного кода с числом строк  $m=3$ , числом столбцов  $L$  с обхватом 12

Число столбцов	Предложенный метод (Simulated Annealing), [101]	Улучшенный PEG, [47]	Таблица V, [18]
4	73	73	97
5	160	163	239
6	320	369	479
7	614	679	881
8	1060	1291	1493
9	1745	1963	2087
10	2734	-	-
11	4083	-	-
12	5964	-	-

Предложенный метод расширения базовой матрицы обладает на порядок большей вероятностью построения квазициклического кода с требуемым обхватом графа Таннера (см. рис. 2.13).

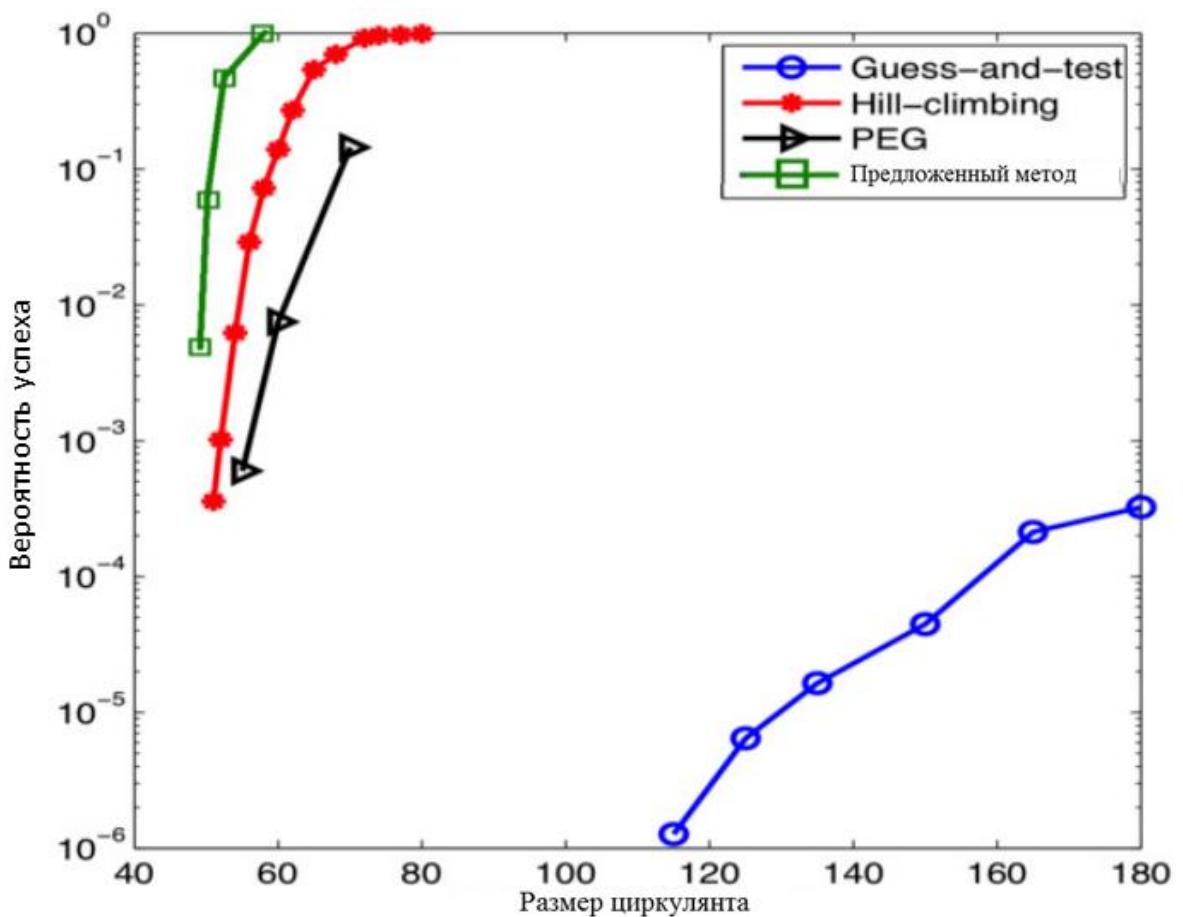


Рисунок 2.13 - Сравнение вероятности успешного построения квазициклического регулярного кода обхватом 8 с весом строки 12 и весом столбца 3 методами расширения базовой матрицы: Guess-and-test, Hill-climbing, PEG и предложенный метод (Simulated Annealing), [101]

2.3 Методы адаптации по длине квазициклических низкоплотностных кодов (cyclic group decomposition, floor lifting, floor scale modular lifting)

В диссертации был предложен метод адаптации кода по длине «Floor scale modular lifting» с целью повышения корректирующей способности кода для компенсации старения носителя. Метод обобщает ранее известный метод (Floor lifting) и позволяет применять коды с лучшим спектром связности, [100, 102, 104, 124, 125, 129, 133, 147].

Для метода адаптации кода по длине «Floor lifting», значения сдвигов циркулянта вычисляются по следующей формуле, [94]:

$$E_{ij}(H_k) = \begin{cases} -1, & E_{ij}(H_0) = -1, \\ \left\lfloor \frac{L_k}{L_0} \times E_{ij}(H_0) \right\rfloor & \end{cases},$$

где  $E_{ij}(H_0)$  - значение сдвига циркулянта в проверочной матрице кода  $E_{ij}(H_0)$  максимальной длины,  $L_0$  - размер циркулянта кода максимальной длины,  $L_k$  - требуемый размер циркулянта,  $k$  – число различных размеров циркулянта поддерживаемых методом.

Для метод адаптации кода по длине «Modular lifting», значения сдвигов циркулянт, вычисляются по следующей формуле, [94]:

$$E_{ij}(H_k) = \begin{cases} -1, & E_{ij}(H_0) = -1, \\ E_{ij}(H_0) \bmod L_k & \end{cases}.$$

Ключевой идеей предложенного нами метода была максимизация числа допустимых сдвигов циркулянта для получения заданного обхвата. Это позволяет эффективно использовать полученную свободу выбора циркулянта, при использовании полного перебора циклов, метода запрещенных коэффициентов, метода имитации отжига и других методов.

В соответствии с предложенным нами методом адаптации кода по длине «Floor Scale modular lifting», значения сдвига циркулянт вычисляются по следующей формуле, [100, 102]:

$$E_{ij}(H_k) = \begin{cases} -1, & E_{ij}(H_0) = -1, \\ \left\lfloor \frac{L_k}{L_0} ((r \times E_{ij}(H_0)) \bmod L_0) \right\rfloor & \end{cases},$$

где  $r$  - коэффициент отображения циклического сдвига.

В работе [102] дано доказательство того, что вероятность коротких циклов в «Modular lifting» методе адаптации кода по длине меньше, чем в «Floor lifting» метод адаптации кода по длине.

**Теорема 1.** Вероятность разрыва циклов длины 4 в проверочной матрице низкоплотностного квазициклического кода с циркулянтом размера  $q$  в методе адаптации по длине «Modular lifting»  $P_{mod}$ :

$$P_{mod} = (1 - p_{mod})^y = 1 - y p_{mod} + O(q^{-2}), q \rightarrow \infty,$$

где  $p_{mod}$  - вероятность образования цикла,  $p_{mod} \triangleq 1/(2q - 1)$  [102, лемма 3],  $y$ - число цепочек сдвигов циркулянтов, не образующих циклов длины 4.

Вероятность разрыва циклов длины 4 в проверочной матрице низкоплотностного квазициклического кода с циркулянтом размера  $q$  для метода «Floor lifting»:

$$P_{fl} = (1 - p_{fl})^y = 1 - yp_{fl} + O(q^{-2}), q \rightarrow \infty,$$

где  $p_{fl}$  - вероятность образования цикла, по лемме 2 [102]  $p_{fl} \triangleq 5/(4(2q - 1))$ ,  $y$  - число цепочек сдвигов циркулянтов, не образующих циклов длины 4.

Вероятность разрыва циклов длины 4 в проверочной матрице низкоплотностного квазициклического кода с циркулянтом размера  $q$  для метода адаптации по длине «Floor Scale Modular lifting»:

$$P_{fsm}(N_r) = \begin{cases} 1 - O(q^{-N_r}) \\ 1, y < N_r, q \rightarrow \infty, \end{cases}$$

где  $y$  - число цепочек сдвигов циркулянтов, не образующих циклов длины 4,  $N_r$  - число масштабирующих значений.

Для доказательства теоремы 1 необходима следующая лемма.

Лемма 1. Биноминальное тождество

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} g(k) = 0$$

выполняется для полинома  $g(k)$  степени меньше  $n$ .

Доказательство:

Любой полином  $g(k)$  степени меньше  $t$  может быть представлен в форме

$$g(k) = \sum_{l=0}^t c_l(k)_l,$$

где  $(k)_l = k(k - 1) \dots (k - l + 1)$  и  $c_l$  - некоторая константа.

Для любого  $l < n$  выполняется

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (k)_l = \sum_{k=l}^n (-1)^k \binom{n}{k} (k)_l = \sum_{k=l}^n (-1)^k \frac{n! k!}{k! (n - k)! (k - l)!}$$

$$= \frac{n!}{(k-l)!} \sum_{k=l}^n (-1)^k \frac{(n-l)!}{(n-k)!(k-l)!} = \frac{n!}{(k-l)!} \sum_{k=l}^n (-1)^k \binom{n-l}{n-k} = 0. \#$$

Доказательство теоремы 1, [102]:

Вероятность  $P_k$  того, что первые  $k$  строк не содержат циклов, равна  $P_k = (1 - kp_{fl})^y$ . Используя принцип включения-исключения можно получить вероятность разрыва циклов в случае использования «Floor Scale Modular lifting»  $P_{fsm}$ ,

$$P_{fsm} = \sum_{k=1}^{N_r} (-1)^{k-1} \binom{N_r}{k} (1 - kp_{fl})^y. \quad (*)$$

Применив Лемму 1 и асимптотическое тождество

$$p_{fl} \triangleq \frac{5}{(4(2q-1))} = O\left(\frac{1}{q}\right), q \rightarrow \infty$$

к выражению (\*) вероятности  $P_{fsm}$  получим

$$P_{fsm}(N_r) = \begin{cases} 1 - O(q^{-N_r}) \\ 1, y < N_r, q \rightarrow \infty. \end{cases}$$

#

Предложенный метод адаптации кода по длине уменьшает число кратчайших циклов в графе Таннера, позволяя улучшить помехоустойчивость, Таб. 2.4.

Таблица 2.4 - Число циклов и их длина для различных методов адаптации длины для кода IEEE 802.16 (WiMAX) со скоростью 0.5.

Предложенный метод			Метод Samsung (Floor lifting), $r = 1$	
$L_k$ , циркулянты	$r$	обхват / число циклов	$L_k$ , циркулянты	обхват / число циклов
<b>24</b>	<b>95</b>	<b>6 / 13</b>	<b>24</b>	<b>6 / 20</b>
28	1	4 / 1	28	4 / 1
32	1	6 / 11	32	6 / 11
<b>36</b>	<b>95</b>	<b>6 / 7</b>	<b>36</b>	<b>6 / 13</b>
40	1	6 / 7	40	6 / 7
<b>44</b>	<b>95</b>	<b>6 / 5</b>	<b>44</b>	<b>6 / 10</b>
48	1	6 / 7	48	6 / 7
52	1	6 / 6	52	6 / 6
56	1	6 / 5	56	6 / 5
60	1	6 / 6	60	6 / 6

64	34	6 / 5	64	6 / 9
68	53	6 / 4	68	6 / 8
72	11	6 / 6	72	6 / 9
76	91	6 / 4	76	6 / 5
80	2	6 / 5	80	6 / 7
84	11	6 / 3	84	6 / 8
88	41	6 / 3	88	6 / 6
92	13	6 / 4	92	6 / 8
96	1	6 / 5	96	6 / 5

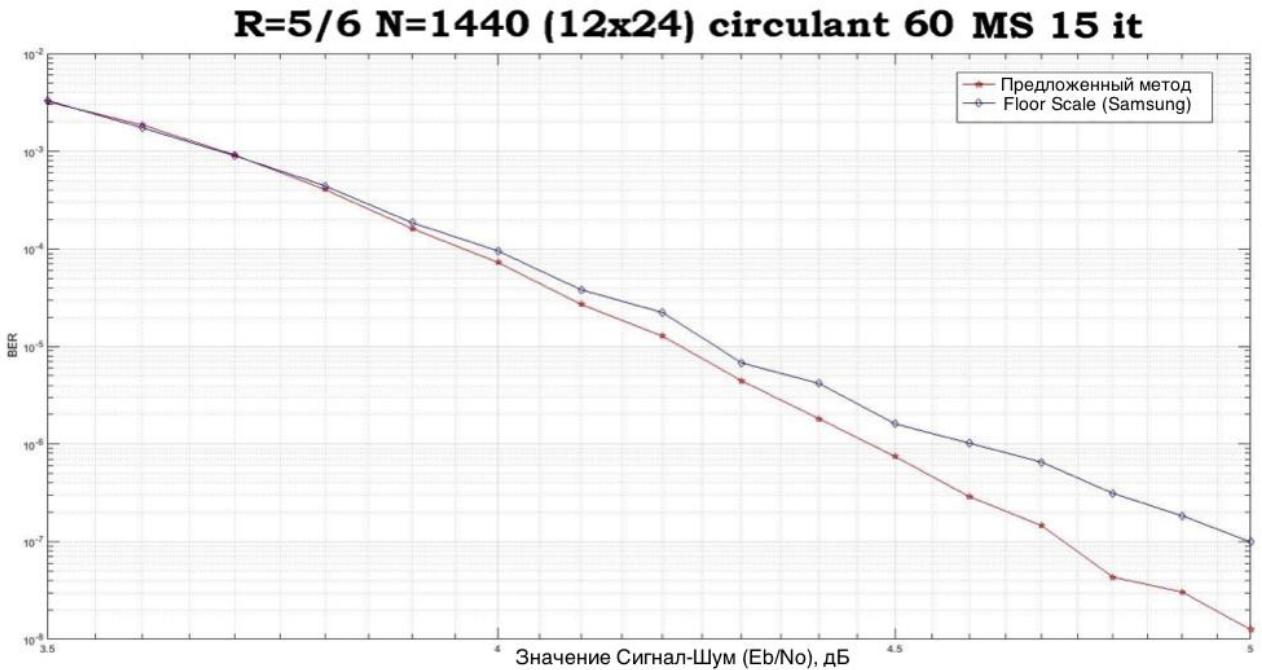


Рисунок 2.14 - Сравнение помехоустойчивости кода (вероятность ошибки на бит) со скоростью 5/6 используя 15 итераций алгоритма min-sum

Применяя предложенный метод адаптации по длине удалось построить код с помехоустойчивость превосходящей коды А, Б на коротких длинах, где особенно наблюдается вклад коротких циклов, Рис. 2.15-2.16 [Код А, 51], [Код Б, 52].

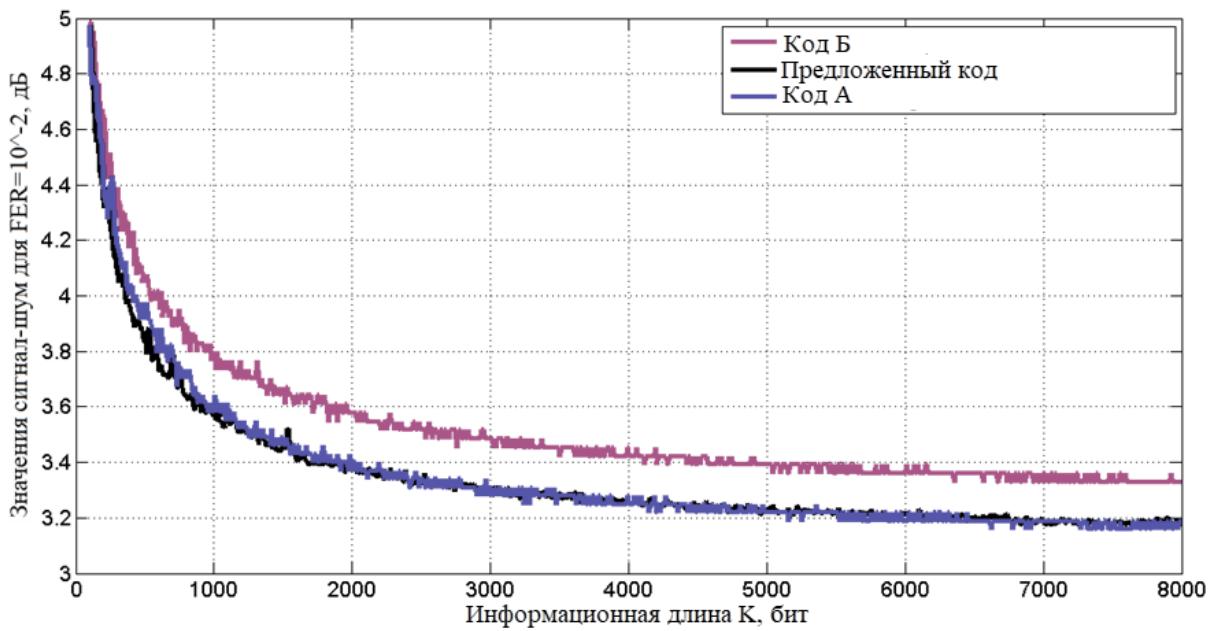


Рисунок 2.15 - Сравнение помехоустойчивости кодов различной информационной длины с уровнем блочного ошибки  $10^{-2}$ , используя 15 итераций алгоритма min-sum, с шагом K=8 бит и со скоростью кода 0.67

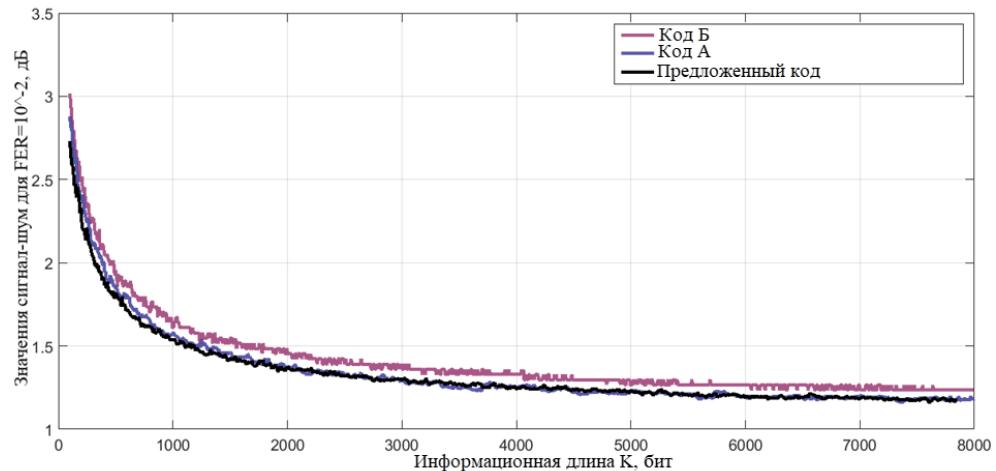


Рисунок 2.16 - Сравнение помехоустойчивости кодов различной информационной длины с уровнем блочного ошибки  $10^{-2}$ , используя 15 итераций алгоритма min-sum, с шагом K=8 бит и со скоростью кода 0.5

## 2.4 Выводы

Предложена процедура построения квазициклических низкоплотностных кодов. Отличительными особенностями процедуры являются модификация протографа в случае «неудачного» его расширения и использование дистанческих свойств кодов и их спектров связности для просеивания кодов кандидатов.

Создан метод расширения базовой матрицы (протографа) процедуры построения квазициклических низкоплотностных кодов. Отличительной особенностью метода является последовательное использование жадного метода запрещенных коэффициентов и метода имитации отжига. Предложенный метод позволил увеличить вероятность успешного расширения базовой матрицы на порядок и уменьшить минимальный размер циркулянта на 10%. Предложенный метод был защищен международными патентами: WO/2018/093286, EP3533145, US20190273511, CN110024294, WO/2017/105270.

Предложен метод адаптации по длине квазициклических двоичных низкоплотностных кодов, отличительной особенностью которого является расширение множества допустимых циклических сдвигов в кольце циклических матриц перестановок. Метод позволил улучшить спектры связности, обеспечив тем самым дополнительный энергетическим выигрыш в 0.1 дБ. На метод адаптации длины были получены международные патенты WO/2018/030909, US20190268021, EP3529899.

### 3 Разработка методов и алгоритмов определения кодового расстояния низкоплотностных кодов с использованием геометрических решеток

#### 3.1 Методы определения кодового расстояния помехоустойчивых блочных кодов

Можно выделить три основных класса методов оценки кодового расстояния:

- Классические переборные алгебраические методы. Одним из наиболее известных представителей этого класса является метод оценки кодового расстояния по информационным совокупностям Брауэра-Циммермана;
- Импульсные методы Берроу-Фоссорье и их модификации;
- Генетические методы.

Переборные алгебраические методы в процессе работы вычисляют оценки верхних и нижних границ кодового расстояния. Они позволяют осуществить верхнюю оценку времени, необходимого для получения оценки кодового расстояния. В случае применения полного перебора гарантируют точность оценки кодового расстояния. Именно эти свойства обуславливают их применение в качестве эталонных методов при построении кодов.

Импульсные методы эффективно работают на высокоскоростных итеративно декодируемых кодах, однако не гарантируют точность верхних и нижних границ кодового расстояния.

Генетические методы применяются к кодам, для которых применение импульсных и алгебраических методов не эффективно.

##### 3.1.1 Метод Брауэра-Циммермана

Чаще всего на практике для оценки кодового расстояния используют метод Брауэра-Циммермана, представленный в работе [53] вместе с таблицей лучших по кодовому расстоянию известных линейных блочных кодов. Дальнейшее развитие метода предложено в работе [54, 55]. Применение этого метода позволило построить множество новых наилучших линейных блочных

кодов [56]. Реализация метода Брауэра-Циммермана была осуществлена в алгебраическом пакете MAGMA. Подробное описание реализации этого метода в пакете алгебраическом пакете MAGMA было приведено в работе [57].

Дадим описание этого метода.

**Определение 3.1** Информационная совокупность. Пусть  $C = [n, k, d]_q$  - линейный блочный код длины  $n$  и размерности  $k$  определенный над полем  $F_q$ . Подмножество  $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$  размера  $|I| = k$  является информационной совокупностью, если соответствующие столбцы порождающей матрицы  $G$  кода  $C$  линейно независимы.

Используя систематическую матрицу для кодирования векторов сообщений  $i \in F_q^k$ , нетрудно убедиться в истинности следующей леммы, лежащей в основе метода Брауэра-Циммермана.

**Лемма 3.1** Пусть имеется систематическая матрица  $G = (I | A)$  и вектор сообщения  $i \in F_q^k$ . Тогда для кодового слова  $c = iG = (i, iA)$  выполняется неравенство  $wgt(c) \geq wgt(i)$ , где  $wgt(c)$  - Хэммингов вес кодового слова  $c$ .

В соответствии с методом Брауэра-Циммермана оценка кодового расстояния линейного блочного кода осуществляется путем перебора информационных сообщений, соответствующих информационной совокупности, с увеличением их веса и одновременным уточнением нижней и верхней границы веса кодового слова.

**Алгоритм 3.1** оценки кодового расстояния по одной информационной совокупности:

Вход: Порождающая матрица  $G = (I | A)$ ;

Выход: Кодовое расстояние  $d_{\min}$ .

1. Инициализация переменных:  $d_{lb} = 1; d_{ub} = n - k + 1; \omega = 1;$
2. Выполнять в цикле пока:  $\omega \leq k$  и  $d_{lb} < d_{ub}$
3. Перебирать кодовые слова,  $d_{ub} = \min(d_{ub}, \min\{wgt(iG) : i \in F_q^k \mid wgt(i) = \omega\})$ ;

- 
4.  $d_{lb} = \omega + 1;$
  5.  $\omega = \omega + 1;$
  6. Конец цикла
  7. Вернуть  $d_{\min} = d_{ub}.$

---

В этом алгоритме слова сообщений  $i \in F_q^k, wgt(i) = \omega$  перечисляются в порядке возрастания веса Хэмминга  $\omega$ . Из Леммы 3.1 следует, что  $wgt(c) \geq wgt(i) > \omega$ , это определяет нижнюю оценку  $d_{lb}$ . В процессе работы алгоритма 3.1 осуществляется уточнение верхней и нижней оценок кодового расстояния. Процесс перебора кодовых слов останавливается, если все кодовые слова, удовлетворяющие условию  $d_{lb} \leq iG \leq d_{ub}$ , были перечислены.

Если кодовое расстояние больше  $k+1$ , то будут перечислены все  $q^k$  слов. В этом случае единственный способ уменьшить перебор — найти способ улучшить верхнюю оценку.

Для этого можно воспользоваться следующим свойством линейного блочного кода: для систематического кодирования можно использовать любую порождающую матрицу, соответствующую какой-то информационной совокупности. Это позволяет ввести другие порождающие матрицы в алгоритм 3.1.

Пусть у нас имеется  $I_1, I_2, \dots, I_m$  множество попарно различных информационных совокупностей кода  $C$ , соответствующих порождающим матрицам  $G_j$ . Запишем алгоритм оценки кодового расстояния по множеству непересекающихся информационных совокупностей.

**Алгоритм 3.2** оценки кодового расстояния по множеству непересекающихся информационных совокупностей:

---

Вход: Порождающие матрицы  $G_j, j=1\dots m$ ;

Выход: Кодовое расстояние  $d_{\min}.$

- 
1. Инициализация переменных:  $d_{lb} = 1; d_{ub} = n - k + 1; \omega = 1;$

2. Выполнять в цикле пока:  $\omega \leq k$  и  $d_{lb} < d_{ub}$
  3. Выполнять в цикле по  $j = 1$  до  $m$
  4. Перебирать кодовые слова
- $$d_{ub} = \min\left(d_{ub}, \min\left\{wgt(iG_j) : i \in F_q^k \mid wgt(i) = \omega\right\}\right);$$
5. Конец цикла
  6.  $d_{lb} = m(\omega + 1);$
  7.  $\omega = \omega + 1;$
  8. Конец цикла
  9. Вернуть  $d_{min} = d_{ub}.$
- 

Закодировав порождающими матрицами  $G_j$  все сообщения  $i$  веса  $wgt(i) \leq \omega$ , соответствующие информационным совокупностям  $I_j$ , легко убедиться, что оставшиеся кодовые слова различаются не более чем в  $\omega + 1$  ненулевых элементах в позициях  $I_j$ . Так как все информационные совокупности различны, получим нижнюю оценку на вес кодовых слов  $d_{lb} = m(\omega + 1)$ .

В сравнение с алгоритмом оценки кодового расстояния по одной информационной совокупности алгоритм 3.2 увеличивает число перебираемых кодовых слов веса  $\omega$  в  $m$  раз. Однако нижняя оценка минимального веса растет также в  $m$  раз быстрее, что позволяет значительно снизить максимальное значение веса векторов сообщений.

В лучшем случае для кода  $C = [n, k]_q$  у нас будет  $\lfloor n/k \rfloor$  информационных совокупностей. Однако для произвольного кода с порождающей матрицей  $G_1 = (I | A_1)$ , соответствующей первой информационной совокупности, ранг матрицы  $A_1$  может быть меньше  $k$ , из чего следует, что информационной совокупности, не пересекающейся с  $I_1$  не существует. В этой ситуации, мы можем получить частичную информационную совокупность  $I'_2$  размера  $r_2 = |I'_2| = \text{rank } A_1$ . Для того чтобы получить информационную совокупность  $I'_2 \subseteq I_2$ ,

$k - r_2$  элементов  $I_1$  должны быть включены в  $I_2$ . Оставшиеся кодовые слова содержат не более  $\omega + 1$  ненулевых символов в позициях  $I_1$  и  $I_2$ .

Так как информационные совокупности пересекаются, и некоторые из позиций вычисляются дважды, нижняя оценка равна  $2(\omega+1) - |I_1 \cap I_2|$ .

Эта оценка может быть обобщена на произвольное число информационных совокупностей  $(I_1, I_2, \dots, I_m)$ . Чтобы вычислить ее, введем относительной ранг  $r_j$  информационной совокупности  $I_j$ :

$$r_j = k - \left| I_j \cap \bigcup_{l=1}^{j-1} I_l \right|.$$

Т.е.  $r_j$  равны числу позиций в информационной совокупности  $I_j$ , которые не содержаться ни в одной  $I_l$  такой что  $l < j$ . В случае  $m = 2$ , рассмотренном ранее, порождающая матрица  $G_j$  соответствует  $(\omega+1) - (k - r_j)$  словам веса  $\omega$ . Рассмотренное улучшение алгоритма [58] позволяет использовать дополнительные порождающие матрицы, ускоряя рост нижней оценки:

Алгоритм 3.3 оценки кодового расстояния по множеству пересекающихся информационных совокупностей:

Вход: Порождающие матрицы  $G_j, j = 1 \dots m$ ;

Выход: Кодовое расстояние  $d_{\min}$ .

1. Инициализация переменных:  $d_{lb} = 1$ ;  $d_{ub} = n - k + 1$ ;  $\omega = 1$ ;

2. Выполнять в цикле пока:  $\omega \leq k$  и  $d_{lb} < d_{ub}$

3. Выполнять в цикле по  $j = 1$  до  $m$

4. Перебирать кодовые слова

$$d_{ub} = \min \left( d_{ub}, \min \left\{ wgt(iG_j) : i \in F_q^k \mid wgt(i) = \omega \right\} \right);$$

5. Конец цикла

$$6. \quad d_{lb} = \sum_{j=1}^m \max \left( 0, (\omega+1) - (k - r_j) \right);$$

7.  $\omega = \omega + 1$ ;

8. Конец цикла

9. Вернуть  $d_{\min} = d_{ub}$ .

В Магме применяется следующий метод вычисления информационных совокупностей. Первая порождающая матрица имеет вид  $G_1 = (I \mid A_1)$ . Методом Гаусса из матрицы  $G_1$  получается подматрица  $A_1$  вида

$$A_1 = \begin{pmatrix} I_{r_2} & B_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

Вторая порождающая матрица примет вид

$$G_2 = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & I_{r_2} & B_{12} \\ B_{21} & I_{k-r_2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где  $r_2$  ранг  $A_1$ . Следующая порождающая матрица  $G_3$  вычисляется методом Гаусса из подматрицы  $B_{12}$  в  $G_2$  аналогично (3). Процесс прекращается, если ранг следующей подматрицы стал равен 0, или информационные совокупности покрывают все позиции, т.е.  $\bigcup_j I_j = \{1, 2, \dots, n\}$ . Для последовательности информационных совокупностей, полученных этим методом, последовательность рангов  $r_j$  является не возрастающей и даже иногда принимает значение  $r_j = 1$ .

Порождающие матрицы с небольшими значениями ранга вносят небольшой вклад в рост нижней оценки, поэтому они могут быть пропущены при вычислении. Определив заданную последовательностью  $(r_1, r_2, \dots, r_m)$  относительного ранга, можно вычислить последовательность нижних оценок  $d_{lb}$  и вес  $\omega_0$ , при котором нижняя оценка пересечет верхнюю. Все порождающие матрицы с  $r_j < k - \omega_0$  могут быть пропущены.

Кроме этого, используя последовательности нижних оценок, можно вычислить число кодовых слов, подлежащих перебору и определить количество времени, требуемое для оценки.

Время вычисления минимально, когда пересечения между информационными совокупностями минимальны. Наилучшим является случай, когда имеется  $m = \lceil n/k \rceil$  информационных совокупностей относительного ранга

$r_1 = r_2 = \dots = r_{m-1} = k$  и  $r_m = n - (m-1)k$ . Если на первом шагу не удается получить хорошую последовательность рангов и достаточное число совокупностей, можно применить случайную перестановку символов кода.

Ключевым недостатком метода Брауэра-Циммермана является экспоненциальный рост вычислительной сложности относительно  $k$ . Например, для LDPC кода с информационной длиной  $K = 1000$  метод требует проверки около  $2^{200}$  кодовых слов. Это не позволяет его использовать при построении кодов для архивной голографической памяти.

### 3.1.2 Верхняя граница кодового расстояния методом Маккея-Вонтабеля-Смарандиши

Еще один алгебраический метод оценки кодового расстояния квазициклических низкоплотностных кодов был предложен Маккеем [59], Вонтабелем и Смарандиши [60]. В работе [59] для низкоплотностных кодов (расширенных циклической матрицей перестановок с весом циркулянта 1, без пересечения между циркулянтами, с весом столбца  $j$ ). Маккеем была получена верхняя оценка кодового расстояния  $d_{\min} \leq (j+1)!$ . Там же было установлено, что величина определителя протографа до расширения (лифтинга) характеризует верхнюю оценку кодового расстояния.

Вонтабель и Смарандиши в работе [60] обобщили предложенную Маккеем идею верхней оценки кодового расстояния квазициклического кода и получили ее уточнение, опираясь на конкретные значения сдвигов в расширенной матрице.

Дадим краткое описание этого метода.

Перманентом матрицы  $B$  размером  $m \times m$  называется величина, вычисляемая по формуле [60]:

$$\text{perm}(B) = \sum_{\sigma} \prod_{j \in [m]} b_{j, \sigma(j)}$$

где  $\sigma$  берется по всем  $m!$  возможным перестановкам множества  $[m]$ .

Пусть  $[\mathbf{W}]$  это множество значений сдвига циклической матрицы перестановки, принимающей значения из отрезка  $[0 \dots W - 1]$ . Обозначим сдвиги циркулянтов в расширенной матрице при помощи возведения в степень,  $x$  будет соответствовать сдвигу 0,  $x^2$  - соответствовать сдвигу 1 и так далее,  $x^W$  - соответствует сдвигу циклической матрицы перестановки  $W - 1$ .

Теорема 7 из работы [60]. Пусть низкоплотностный квазициклический код, заданный проверочным матрицей  $H(x)$  имеет протограф  $\text{wt}(C(H(x)))$ , тогда верхняя оценка кодового расстояния вычисляется по формуле:

$$d_{\min}(C(H)) \leq \min_{\substack{S \subseteq [W] \\ |S|=C+1}}^+ \sum_{i \in S} \text{wt}(\text{perm}(H_{S \setminus i}(x))).$$

где оператор  $\min^+$ () находит минимальное среди возможных положительных значений аргументов.

Теорема 8 из работы [60]. Верхняя оценка кодового расстояния квазициклического низкоплотностного кода на основе расширенной матрицы,  $A = \text{wt}(H(x))$ :

$$d_{\min}(C(H)) \leq \min_{\substack{S \subseteq W \\ |S|=C+1}}^+ \sum_{i \in S} \text{perm}(A_{S \setminus i}).$$

Рассмотрим пример. Пусть у нас имеется протограф, задающий квазициклический низкоплотностный регулярный код с весом строки 2 и весом столбца 4:

$$\text{wt}(C(H(x))) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда в соответствие с теоремой 7 верхняя оценка кодового расстояния этого кода равна 6:

$$d_{\min} \leq \min^+ \{(1 + 1) + (1 + 1) + (1 + 1)\} = 6.$$

Пусть у нас есть два регулярных кода  $C(H_1)$ ,  $C(H_2)$  с весом строки 2 и весом столбца 4 с проверочными матрицами, записанными в полиномиальной форме:

$$H_1(x) = \begin{pmatrix} x & x^2 & x^4 & x^8 \\ x^5 & x^6 & x^3 & x^7 \end{pmatrix}, H_2(x) = \begin{pmatrix} x & x^2 & x^4 & x^8 \\ x^6 & x^5 & x^3 & x^9 \end{pmatrix}.$$

Тогда в соответствие с теоремой 8 верхняя оценка кодового расстояния кода с проверочной матрицей  $H_1$  равна 4:

$$d_{\min}(C(H_1)) \leq \min^+ \left\{ \begin{array}{l} \text{wt}(x^4 + x^9) + \text{wt}(x^5 + x^{10}) + \text{wt}(x^7 + x^7) \\ \text{wt}(x^9 + x^{14}) + \text{wt}(x^8 + x^{13}) + \text{wt}(x^7 + x^7) \\ \text{wt}(x^{11} + x^{11}) + \text{wt}(x^8 + x^{13}) + \text{wt}(x^4 + x^9) \\ \text{wt}(x^{11} + x^{11}) + \text{wt}(x^9 + x^{14}) + \text{wt}(x^5 + x^{10}) \end{array} \right\}$$

$$= \min^+\{4,4,4,4\} = 4.$$

Кодовое расстояние кода, заданного проверочной матрицей  $H_2$  равно 6, что соответствует верхней оценке протографа этого кода

$$d_{\min}(C(H_2)) \leq \min^+ \left\{ \begin{array}{l} \text{wt}(x^5 + x^9) + \text{wt}(x^4 + x^{10}) + \text{wt}(x^6 + x^8) \\ \text{wt}(x^{11} + x^{13}) + \text{wt}(x^{10} + x^{14}) + \text{wt}(x^6 + x^8) \\ \text{wt}(x^{13} + x^{11}) + \text{wt}(x^{10} + x^{14}) + \text{wt}(x^4 + x^{10}) \\ \text{wt}(x^{13} + x^{11}) + \text{wt}(x^{11} + x^{13}) + \text{wt}(x^5 + x^9) \end{array} \right\}$$

$$= \min^+\{6,6,6,6\} = 6.$$

Баталёр и Сегель ускорили вычисление перманента [61] и обобщили верхнюю оценку на класс Multi-edge (Multigraph) низкоплотностных кодов [62].

Верхняя оценка кодового расстояния методом Вонтабеля-Смарандаши является вычислительно сложной задачей, сложность ее растет с размером протографа. Например, для протографа размера 30 на 60 нужно вычислить 1.1826e+17 перманентов размера 30x30. Нами был реализован параллельный алгоритм вычисления этой оценки.

Верхняя оценка Вонтабеля-Смарандаши не является точной (плотной) и требует дальнейшего уточнения.

Верхняя оценка Вонтабеля-Смарандаши будет использоваться в предлагаемых методах определения кодового расстояния с использованием геометрических решеток в качестве начальной длины искомого вектора в решетке, что в некоторых случаях позволяет уменьшить пространство перебора.

### 3.1.3 Нижняя оценка кодового расстояния Таннера

Первые оценки кодового расстояния в зависимости от обхвата графа были получены в работе Таннера [63].

В работе доказана нижняя оценка:

$$d_{\min} \geq 1 + \frac{d_{VN}[(d_{VN}-1)^{\lfloor(g-2)/4\rfloor} - 1]}{d_{VN} - 2},$$

где  $g$  - обхват графа,  $d_{VN}$  - вес символа (столбца) в проверочной матрице.

Например, для Таннер-графа с обхватом 6 нижняя оценка кодового расстояния  $d_{\min} \geq d_{VN} + 1$ , где  $d_{VN}$  –вес символа в проверочной матрице.

Одним из чрезвычайно эффективных средств отсева кодов-кандидатов (см. шаг 5 процедуры построения квазициклических низкоплотностных кодов 2.1) является улучшенная нижняя оценка кодового расстояния Таннера, опирающаяся на быстрый спектральный анализ графа [64]. Использование нижней оценки кодового расстояния позволяет остановить поиск кратчайшего вектора в решетке.

Пусть у нас имеется проверочная матрица кода с  $r$  проверками и  $n$  символами. Матрица смежности такого кода представляет собой матрицу размера  $(r+n) \times (r+n)$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & H \\ H^T & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим собственные числа матрицы  $\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_{r+n}$ . Они представляют собой спектральную оценку Таннер-графа кода.

Тогда нижняя оценка кодового расстояния матрицы вычисляется по формулам

$$d \geq \frac{n(2m - \mu_2)}{(mj - \mu_2)}, \quad d \geq \frac{2n(2m + j - 2 - \mu_2)}{j(mj - \mu_2)},$$

где  $m$ -вес символа (вес столбца) и  $j$ -вес проверки (вес строки).

Спектральная оценка также может выступать эвристикой в процессе построения кодов. Код, отношение второго собственного значения матрицы смежности которого к первому меньше ( $\min \frac{\mu_2}{\mu_1}$ ), является лучшим. Второе собственное значение характеризует алгебраическую связность графа, первое собственное значение характеризует сепарабельность графа на два

подмножества. Отношение  $\min \frac{\mu_2}{\mu_1}$  характеризует графы экспандеры [65, 66].

Обобщение нижней оценки кодового расстояния Таннера на случай нерегулярных кодов предложено в работе [67].

### 3.2 Определение кодового расстояния блочных кодов с использованием решеток

В предложенном нами в разделе 2 методе построения низкоплотностных кодов определение кодового расстояния осуществляется при помощи поиска кратчайшего вектора в решетке. Приведем необходимые сведения из геометрии чисел.

#### 3.2.1 Решетки и их свойства

**Определение 3.2.** Решетка - дискретная абелева подгруппа, заданная в пространстве  $R^n$ .

Пусть базис  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  задан линейно-независимыми векторами в  $R^m$ . Тогда под решеткой будем понимать множество целочисленных линейных комбинаций этих векторов:

$$L(b_1, \dots, b_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i b_i : (x_1, \dots, x_n) \in Z^n \right\},$$

где  $m$  и  $n$ , размерность и ранг решетки соответственно,  $m \geq n$ .

**Определение 3.3.** Задача поиска короткого вектора ( $\Delta$ -short vector problem,  $SVP_\Delta(m)$ ): Пусть дана  $m$ -мерная решетка  $L(B)$ , ранга  $n$  и вещественное  $\Delta > 1$ . Найти нетривиальный вектор в  $\Delta$ -раз больший кратчайшего вектора в решетке  $\bar{b} \in L : \|\bar{b}\| \leq \Delta \cdot \lambda_1(L)$ .

При  $\Delta = 1$ , решается задача поиска кратчайшего вектора в решетке, при  $\Delta > 1$  - короткого вектора.

**Определение 3.4.** Задача поиска короткого базиса решетки ( $\Delta$ -short basis problem,  $SBP_\Delta(m)$ ): Пусть дан базис полной решетки  $B$  и вещественное  $\Delta > 1$ . Найти базис  $B' = \{b'_1, b'_2, \dots, b'_m\} : L(B) = L(B'), \prod_{i=1}^m \|b'_i\| \leq \Delta \cdot \prod_{i=1}^m \|b_i^\perp\|$ .

Подробнее методы геометрии чисел: алгоритм поиска короткого базиса решетки (блочный метод Коркина-Золотарева) и алгоритм поиска кратчайшего вектора рассмотрены в работах [27].

**Определение 3.5.** Базис  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$  решётки  $L \subset R^m$  приведён по длине, если в результате ортогонализации решётки методом Грамма-Шмидта выполняется следующее неравенство:

$$|\mu_{i,j}| \leq \frac{1}{2}, 1 \leq j < i \leq m,$$

где  $\mu_{i,j}$  - коэффициенты Грамма-Шмидта.

**Определение 3.6.** Упорядоченный по длине базис  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$  решётки  $L \subset R^m$  приведён блочным методом Коркина- Золотарева с размером блока  $\beta \in [2, m]$  и точностью  $\delta \in \left(\frac{1}{2}; 1\right]$ , если:

- базис  $B$  приведён по длине;
- $\delta^2 \cdot \|b_i^\perp\|^2 \leq \lambda_1^2(L_i), i = 1, \dots, m$ , где  $\lambda_1(L_i)$  -длина кратчайшего вектора в решётке  $L_i$ , образованной ортогональным дополнением векторного пространства с базисом  $b_i, \dots, b_{\min(i+\beta-1, m)}$ .

**Определение 3.7.** Базис решетки приведен по Ленстра-Ленстра-Ловасу (LLL-алгоритмом), если он приведен блочным методом Коркина-Золотарева с размером блока  $\beta = 2$  и точностью ортогонализации  $\delta \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$ .

Пусть базис решетки имеет вид:

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in R^{m \times n}, \text{ где } a_i \text{ - вектора столбцы.}$$

**Определение 3.8.** Матрица  $A$  размера  $n \times n$  ортогональна, тогда и только тогда, когда  $AA^T = I$ .

**Определение 3.9.** QR-разложением называют представление матрицы  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  размера  $m \times n$  в виде произведения  $Q$  -унитарной и  $R$  -верхней треугольной матрицы размерами  $m \times n$  и  $n \times n$ , соответственно:

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n) = Q^T \times R = (q_1, q_2, \dots, q_n) \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \cdots & r_{1,n} \\ 0 & r_{2,2} & \cdots & r_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & r_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Если  $A$  состоит из вещественных чисел, то  $Q$  - является ортогональной матрицей.

Ортогональные матрицы обладают рядом следующих свойств необходимых нам в дальнейшем:

**Свойство 3.10.** Произведение двух ортогональных матриц, есть ортогональная матрица.

**Свойство 3.11.**  $A^{-1} = A^T$ ,  $A^T A = I$ .

**Свойство 3.12.** Ортогональное преобразование сохраняет скалярное произведение векторов, т.е.  $\forall x, y \in R^n : y^T x \stackrel{\text{def}}{=} (x, y) = (Ax, Ay)$ , в частности, сохраняется норма вектора:  $\|Ay\| = A\|y\|$ .

3.2.1 Детерминированный метод определения кодового расстояния с использованием геометрических решеток

Для определения кодового расстояния необходимо найти в коде слова малого веса.

Предлагаемый метод для решения этой задачи предусматривает вложение кода в решетку, масштабирование  $n-k$  подпространств базиса решетки  $B_c$  некоторой константой  $N$  такой, чтобы расстояние Хэмминга между кодовыми словами отобразилось в евклидово расстояния между векторами кодовых слов решетки. Легко убедится, что полученная решетка – вырожденная, ранга  $\text{rank}(B_c) = k$ .

Осуществив поиск короткого базиса решетки методом Коркина-Золотарева, получим некоторый набор векторов малого веса с нормой  $r_{\max}$ . Вектор решетки с наименьшей нормой соответствует предполагаемому кратчайшему вектору. Однако пока мы не осуществим перебор всех линейных комбинаций методом Каннана-Финке-Поста и не убедимся, что полученная

норма вектора является наименьшей возможной в решетке, данное кодовое слово будем считать словом малого веса.

Количество отличных от нуля компонент кратчайшего вектора дает искомое кодовое расстояние. Оценим масштабирующий коэффициент  $N$  необходимый для корректной работы метода:

**Теорема 3.4.** Базис решетки  $L(B_c)$  несистематического кода,  $\delta$  - приведённый по Ленстра-Ленстра-Ловасу, в качестве приведенных коротких базисных векторов решетки будет давать слова малого веса несистематического кода, если константа:

$$N \geq \left( \frac{4}{4\delta-1} \right)^{n/2} \times 2\sqrt{(m+1)(n+1)} \times r_{\max} \times M^m,$$

где  $M = \max \{ \|A_0\|, \|A_1\|, \dots, \|A_{n-1}\|, \|d\| \}$ ,  $A_i$  – коэффициенты эквивалентного линейного диофантина уравнения  $A \times x = d$ .

Доказательство теоремы приведено в работе [82]. Оценим  $N$  в случае приведения базиса блочным методом Коркина-Золотарева с размером блока  $\beta$ .

**Теорема 3.5.** Базис решетки  $L(B_c)$  несистематического кода, приведённый блочным методом Коркина-Золотарева с размером блока  $\beta$ , в качестве приведенных коротких базисных векторов решетки будет давать слова малого веса несистематического кода, если константа:

$$N \geq \gamma_{\beta}^{\frac{n-1}{\beta-1}} \times 2\sqrt{(m+1)(n+1)} \times r_{\max} \times M^m,$$

где  $\gamma_{\beta}$ -константа Эрмита.

#### Доказательство:

Первая часть доказательства берется из доказательства Теоремы 3.4, [82]. Длина векторов, образующих избыточности в исходном коде, ограничена сверху величиной  $\|V_i\| \leq 2\sqrt{(n+1)(m+1)} \times r_{\max} \times M^m, 0 \leq i \leq n-k$ .

Для доказательства оставшейся части нам необходимо оценить сверху длину векторов избыточности решетки после приведения ее базиса блочным методом Коркина-Золотарева с размером блока  $\beta$ ,  $\bar{b}_i \in L' : 0 \leq i \leq n-k$ . В работе [83]

Шнор доказал, что длина приведенных векторов ограничена сверху величиной

$\|b_i\|^2 \leq \gamma_{\beta}^{\frac{n-1}{\beta-1}} \frac{i+3}{4} \lambda_i^2$ ,  $\lambda_i$  -  $i$ - соответствующий минимум решетки. Подстановкой получим искомую оценку.

В случае систематической порождающей матрицы кода, легко убедиться, что константа  $N = 1$ .

Предлагаемый метод поиска кодовых слов минимального веса требует построения решетки на основе порождающей матрицы систематического кода  $G \in R^{k \times n}$ ,  $B_c \in R^{(n+k) \times (k+n)}$ :

$$B_c = \begin{pmatrix} G^T & qI_n \\ I_k & 0 \end{pmatrix},$$

В случае несистематического кода:

$$B_c = \begin{pmatrix} N \cdot G' & N \cdot qI_n \\ I_k & 0 \end{pmatrix},$$

где  $G'$  - порождающая матрица несистематического кода,  $q$  - размерность алфавита,  $I_k$  - единичная матрица размера  $k \times k$ .

После построения решетки в ней ищется вектор  $\|v\|_{\infty} = 1$ ,  $v \in L$ ,  $\text{rank}(L) = n$  с минимальным числом отличных от нуля координатных компонент. Переход от метрики Евклида к метрике Чебышева дает нам эквивалентную формулировку задачи поиска слов минимального веса в случае решетки, а именно поиск среди точек решетки, образованных различными  $2^n$  шарами с центрами  $\left(\pm \frac{d}{2}, \dots, \pm \frac{d}{2}\right)$  и радиусами  $\frac{d}{2}\sqrt{n}$ , [84]. Кодовые слова двоичного  $q = 2$ ,  $-1 \equiv 1 \pmod{2}$  и троичного кодов  $q = 3$ ,  $-1 \equiv 2 \pmod{3}$  будут представлены векторами решетки, с координатными компонентами, принимающими значения из множества  $\{-1, 0, 1\}$ .

В соответствии с предлагаемым детерминированным методом определения кодового расстояния с использованием геометрических решеток выполняется следующая последовательность действий.

1. *Вложение кода в решетку.* Для этого базис решетки  $B_c$  масштабируется некоторой константой  $N$  такой, чтобы в результате приведения базиса  $B_c^T \in R^{(n+k) \times (k+n)}$  решетки получился базис размера  $n \times n$ :

$$B_c^T = \begin{pmatrix} N \cdot G & I_k \\ N \cdot q \cdot I_n & 0 \end{pmatrix},$$

где  $G \in F_q^{k \times n}$  - порождающая матрица кода,  $I_k$  - единичная матрица,  $B_c^T$  - транспонированный базис решетки.

В случае систематического кода  $G = (I_k | P)$ ,  $P \in F_q^{k \times (n-k)}$ , масштабирующий коэффициент  $N$  равен 1.

2. *Приведение базиса решетки.* Для приведения решетки используется блочный метод Коркина-Золотарева с размером блока  $\beta$ . После удаления линейно зависимых строк и столбцов получается некоторый короткий базис решетки  $\bar{b}_0, \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{n-m} \in R^{n+1}$ ,  $\text{rank}(L(b_0, b_1, \dots, b_{n-m})) = n - m + 1$ .

3. *Ортогонализация базиса решетки  $B_c$  методами QR-разложения* с целью получения ортогонального базиса решетки  $\bar{b}_0^\perp, \bar{b}_1^\perp, \dots, \bar{b}_{n-m}^\perp$  и коэффициентов Грама-Шмидта.

Ортогонализация базиса по Граму-Шмидту выполняется следующим образом:

$$b_1^\perp = b_1, \quad b_i^\perp = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mu_{i,j} b_j^\perp, \quad i = 2, 3, \dots, n,$$

где  $\mu_{i,j}$  -коэффициенты Грама-Шмидта вычисляемые по формуле

$$\mu_{i,j} = \frac{\langle b_i, b_j^\perp \rangle}{\langle b_j^\perp, b_j^\perp \rangle} = \frac{\langle b_i, b_j^\perp \rangle}{\|b_j^\perp\|^2}.$$

Коэффициенты Грама-Шмидта образуют верхнюю треугольную матрицу с  $n \times (n-1)/2$  ненулевыми элементами.

4. *Поиск кратчайшего вектора в решетке.* После чего в решетке ищется вектор с минимальным числом отличных от нуля координатных компонент.

Количество отличных от нуля компонент найденного вектора равняется искомому кодовому расстоянию.

Задача поиска кратчайшего вектора  $x$  в решётке сводится к целочисленному решению системы неравенств:

$$\begin{cases} x_n^2 \|b_n^\perp\|^2 \leq A^2, \\ (x_{n-1} + \mu_{n,n-1} x_n) \|b_{n-1}^\perp\|^2 \leq A^2 - x_n^2 \|b_n^\perp\|^2, \\ \dots \\ (x_1 + \sum_{i=2}^n x_i \mu_{i,j})^2 \|b_1^\perp\|^2 \leq A^2 - \sum_{j=2}^n l_j \end{cases}$$

где  $A$  - верхняя оценка кодового расстояния (начальная норма  $A = (n+1) \times r_{\max}^2$ ),  $x_i$  - координатная компонента искомого вектора  $l_j = (x_j + \sum_{i=j+1}^n x_i \mu_{i,j})^2 \|b_j^\perp\|^2$  - частичная сумма.

Для этой цели используется метод Каннана-Финке-Поста (КФП).

Метод КФП представляет собой вариант метода ветвей и границ и заключается в переборе линейных комбинаций базисных векторов решётки, дающих вектор с нормой, ограниченной сверху оценкой  $A$ , которая может уменьшаться в процессе поиска.

Для ускорения ортогонализации базиса решётки (этап 3 метода оценки кодового расстояния), предложено применять вместо модифицированного метода Грамма-Шмидта, параллельные методы QR-разложения матриц: блочный метод Хаусхолдера при использовании многоядерных процессоров и метод поворота Гивенса при использовании видеокарт.

Метод Хаусхолдера представляет собой линейное преобразование векторного пространства, которое описывает его отображение относительно гиперплоскости, которая проходит через начало координат. Этот метод эффективен в случае невысокого уровня параллелизма и размещения данных в кэш-памяти. Его целесообразно применять при использовании многоядерных процессоров общего назначения с мощным устройством управления, оснащённых кэш памятью большого объема, характерных для X86 архитектур.

Метод ортогонализации поворотом Гивенса, осуществляя обнуление координатных компонент. Метод легко распараллеливаем и особенно эффективен в случае низкоплотностных матриц. Эти свойства обуславливают его чрезвычайную эффективность в случае реализации вычислений на видеокартах.

В диссертации выполнено сравнение быстродействия последовательного модифицированного метода Грама-Шмидта, преобразования Хаусхолдера, выполняемых на многоядерных процессорах общего назначения (Intel Math Kernel Library i5-7700K), и вращения Гивенса, реализуемого на видеоускорителе NVidia GeForce 1070. Методы QR-разложения приведены в [138], реализация в Приложение 4.

Метод Гивенса, исполняемый на видеоускорителе, обеспечивает 895-кратное ускорение работы алгоритма ортогонализации в сравнение с модифицированным последовательным методом Грама-Шмидта и 5.5-кратное ускорение в сравнение с многоядерной реализацией (8-потоков) метода Хаусхолдера на размерах ортогонализуемого базиса порядка 5500, Таб. 3.1.

Таблица 3.1 - Сравнение времени работы алгоритмов ортогонализации базиса решеток, в секундах

Размер базиса решетки	Поворот Гивенса	Преобразования Хаусхолдера	Метод Грама-Шмидта
110	0.0027	0.0002	0.0029
160	0.0031	0.0003	0.0093
210	0.0041	0.0006	0.0211
260	0.0043	0.0008	0.0392
310	0.0046	0.0012	0.0662
360	0.0048	0.0014	0.0819
410	0.0051	0.0021	0.1355
460	0.0056	0.0025	0.1918
510	0.0065	0.0037	0.2515

560	0.0086	0.0043	0.3094
610	0.0074	0.0054	0.4066
660	0.0075	0.0063	0.5039
710	0.0084	0.0090	0.6283
760	0.0093	0.0097	0.7925
810	0.0107	0.0112	0.9362
860	0.0136	0.0129	1.1160
910	0.0222	0.0142	1.1367
960	0.0123	0.0170	1.5428
1000	0.015	0.02	1.7644
1500	0.02	0.06	5.9053
2000	0.04	0.13	14.4604
2500	0.06	0.22	28.1351
3000	0.10	0.50	48.7143
3500	0.15	0.57	78.0097
4000	0.17	0.80	119.3055
4500	0.23	1.15	165.1248
5000	0.28	1.47	227.5358
5500	0.35	1.90	313.0146

В случае размеров базиса около 100 многоядерная реализация (8-потоков) метода Хаусхолдера обеспечивает 10 кратное устроение работы алгоритма, метод Гивенса на видеокарте не дает ускорение. Причиной отсутствия ускорения являются затраты времени на копирование базиса для ортогонализации из ОЗУ ЭВМ в ОЗУ видеокарты.

Для 32000-мерной решетки, соответствующей низкоплотностному коду страничного уровня голографической памяти, работающему в условиях больших шумом, справедливы следующие оценки: по сравнению с последовательным методом Грамма-Шмидта преобразование Хаусхолдера на

многоядерных процессорах демонстрирует прирост скорости ортогонализации на два порядка, метод вращения Гивенса, исполняемый на процессорах видеокарт, обеспечивает дополнительный прирост еще на порядок.

Поиск кратчайшего вектора в решетке (этап 4) является самой вычислительно сложной частью предложенного метода оценки минимального кодового расстояния. Для реализации поиска используется метод Каннана-Финке-Поста (КФП). Рассмотрим его подробнее.

Решение задачи поиска кратчайшего вектора в решетке по методу КФП заключается в полном переборе всех линейных комбинаций векторов базиса решетки  $\|x\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^m x_i b_i \right\|^2 \leq A^2$ , где  $A$  - норма искомого кратчайшего вектора.

В качестве нормы берётся верхняя оценка длины кратчайшего вектора,  $A = \sqrt{\gamma_m} \det(L)^{\frac{1}{m}}$ , где  $\gamma_m$  - константа Эрмита, в тех случаях, когда наименьший из векторов в базисе решетки превосходит оценку,  $\|b_1\| > \sqrt{\gamma_m} \det(L)^{\frac{1}{m}}$ . По этой причине предварительное приведение базиса решетки позволяет уменьшить пространство перебора  $x_i$ . В случае оценки кодового расстояния в квазициклических кодах, мы можем брать гораздо более плотную верхнюю оценку Вонтобеля-Смарандиши,  $A = d_{min}(C(H))$ , (см. 3.1.2).

С целью уменьшения пространства перебора распишем базис решетки через ортогональные вектора, для простоты изложения используя метод ортогонализации Грамма-Шмидта. Получим  $b_i = \sum_{j=1}^i \mu_{i,j} b_j^\perp$ ,  $2 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j < i \leq m$ , где  $\mu_{i,j}$  - коэффициенты Грама-Шмидта. В этом случае поиск кратчайшего вектора сводится к решению системы неравенств:

$$\begin{cases} x_m^2 \|b_m^\perp\|^2 \leq A^2, \\ (x_{m-1} + \mu_{m,m-1} x_m) \|b_{m-1}^\perp\|^2 \leq A^2 - x_m^2 \|b_m^\perp\|^2 \\ \dots \\ (x_1 + \sum_{i=2}^m x_i \mu_{i,1})^2 \|b_1^\perp\|^2 \leq A^2 - \sum_{j=2}^m l_j \end{cases}, \text{ где } l_j = (x_j + \sum_{i=j+1}^m x_i \mu_{i,j})^2 \|b_j^\perp\|^2$$

и выбору одного из целочисленных векторов, у которого норма скалярного произведения с базисом решетки минимальна.

Формализуя задачу, получим обход дерева от корня к листу, в каждой из вершин которого решается соответствующее линейное уравнение. Из корня

$$\text{этого дерева выводит } 2 \cdot \left\lceil \frac{A}{\|b_m^\perp\|} \right\rceil = 2 \cdot \left\lceil \frac{\sqrt{\gamma_m} \det(L)^{\frac{1}{m}}}{\|b_m^\perp\|} \right\rceil \text{ ветвей или } 2 \cdot \left\lceil \frac{\|b_1\|}{\|b_m^\perp\|} \right\rceil \text{ ветвей в}$$

случае предварительного приведения базиса решетки. В силу симметричности дерева (по свойствам нормы) для получения искомого кратчайшего вектора нам необходимо перебрать только половину его вершин, см. рис. 3.1. В результате полного обхода дерева от корня к листу, мы будем получать предполагаемый кратчайший вектор  $x$  с нормой меньше либо равной искомой. Если норма полученного вектора будет меньше заданной ранее, целесообразно обновить ее с целью уменьшения пространства перебора. Остановка алгоритма осуществляется, когда завершен обход вершин дерева, или когда мы получили вектор с достаточной для нас нормой в случае поиска короткого вектора.

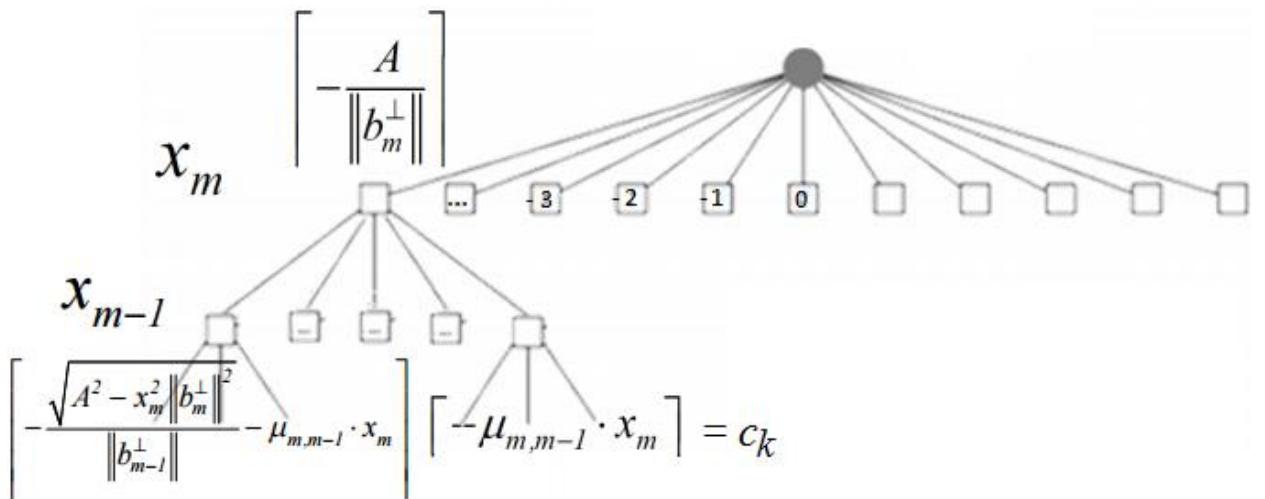


Рисунок 3.1 - Дерево перебора в методе Каннана-Финке-Поста

Из корня дерева выводит  $N$  ветвей, каждая из которых соответствует конкретному решению первого неравенства. При этом существует Гауссова эвристика, позволяющая с достаточно высокой точностью оценить число веток

на каждом из уровней дерева перебора,  $H_k = \frac{1}{2} \times \frac{V_k(A_k)}{\prod_{i=m+1-k}^m \|b_i^\perp\|}$ , [78]. Пусть  $\alpha_m$  —

произвольное решение этого неравенства. Ветвь дерева поиска, соответствующую данному решению, будем называть  $\alpha_m$ -ветвью. Следующая вершина  $\alpha_m$ -ветви помечается переменной  $x_{m-1}$ . Данная вершина является корнем дерева поиска для системы неравенств, полученной подстановкой  $x_m = \alpha_m$ . Блок схема метода КФП приведена на рисунке 3.2.

Описанный метод КФП представлен ниже в виде алгоритма 3.6, реализованного с использованием потоковой модели NPTL. Каждый из потоков осуществляет вычисление своей  $\alpha_m$ -ветви, исходящей из корня дерева, [96, 138].

**Алгоритм 3.6** поиска кратчайшего вектора в решетке (Каннана-Финкен-Поста)  $L(B), B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ :

**Вход:**  $\|b_1^\perp\|, \|b_2^\perp\|, \dots, \|b_m^\perp\|, \mu_{i,j} : 1 \leq j < i \leq m, A$ ;

**Выход:** Вектор  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in Z^m : \left\| \sum_{i=1}^m x_i b_i \right\| = \lambda_1(L(B))$ ;

Инициализация переменных:

$$x^m = (0)^m, x_1 = 1, c^m = (0)^m, l^{m+1} = (0)^{m+1}, y^m = (0)^m, \Delta x = x, \Delta^2 x = (-1)^m, \Delta^2 x(1) = 1, i = 1.$$

Повторять в цикле:

$$1. \quad l_i = l_{i+1} + (x_i - c_i)^2 \times \|b_i^\perp\|^2$$

2. Если  $l_i \leq A^2$  и  $i = 1$  то

возвращаем  $x^m$ , обновляем значение нормы кратчайшего вектора  $A = \|x^m\|$ .

Запускаем программу вновь с нормой  $A = A - 1$ .

3. Если  $l_i \leq A^2$  и  $i > 1$

$$i = i - 1 \text{ (Опускаемся на размерность ниже по дереву)}, \quad c_i = - \sum_{j=i+1}^m x_j \mu_{j,i},$$

$$c_i = -c_i$$

$$x_i = \text{round}(c_k),$$

$$\Delta x_i = 0.$$

**Если**  $c_i < x_i$  **то**  $\Delta^2 x_i = 1$ ;

**Иначе**  $\Delta^2 x_i = -1$ ;

**Иначе Если**  $l_i > A^2$  и  $i = m$  то

**Иначе**  $i = i + 1$ ,  $\Delta^2 x_i = -\Delta^2 x_i$ ,  $\Delta x_i = -\Delta x_i + \Delta^2 x_i$ ,  $x_i = x_i + \Delta x_i$ .

Не существует линейной комбинации дающей вектор в решетке короче ранее найденного. Останавливаем программу, возвращаем вектор  $x^m$  с нормой  $A = A + 1$ . Если ранее вектор не был найден, значит кратчайшим вектором решетки является самый короткий из векторов исходного базиса решетки.

Отметим, что зигзагообразный обход узлов предложенный Шнором-Охнером (Schnorr-Euchner zig-zag path) значительно ускоряет работу метода Каннана-Финке-Поста [79]. Однако в силу неоднородности нагрузки каждого вычислительного ядра требует более сложной декомпозиции решетки (дерева перебора).

Для повышения быстродействия процедуры оценки минимального кодового расстояния в диссертации предлагается параллельная процедура поиска кратчайшего вектора в решетке, основанного на КФП.

Сущность параллельного поиска заключается в предварительном вычислении значений координатных компонент дерева перебора, разбиение дерева и параллельный перебор на многоядерных процессорах общего назначения или процессорах видеокарт.

Для выполнение параллельного поиска кратчайших векторов мы будем хранить верхнюю треугольную матрицу Грамма-Шмидта состоящую из  $m \times (m-1)/2$  ненулевых элементов битовой точности  $p$  для каждого из исполнительных элементов (ядер). Таким, образом каждое из ядер потребует  $p \times m \times (m-1)/2$  бит памяти. Поскольку точность битовой представления коэффициентов будет влиять на сложность каждого из ядер, один из подходов заключается в аппостериорном оценки точности на основе моделирования процесса приведения базиса решетки, предложенного в работе [81].

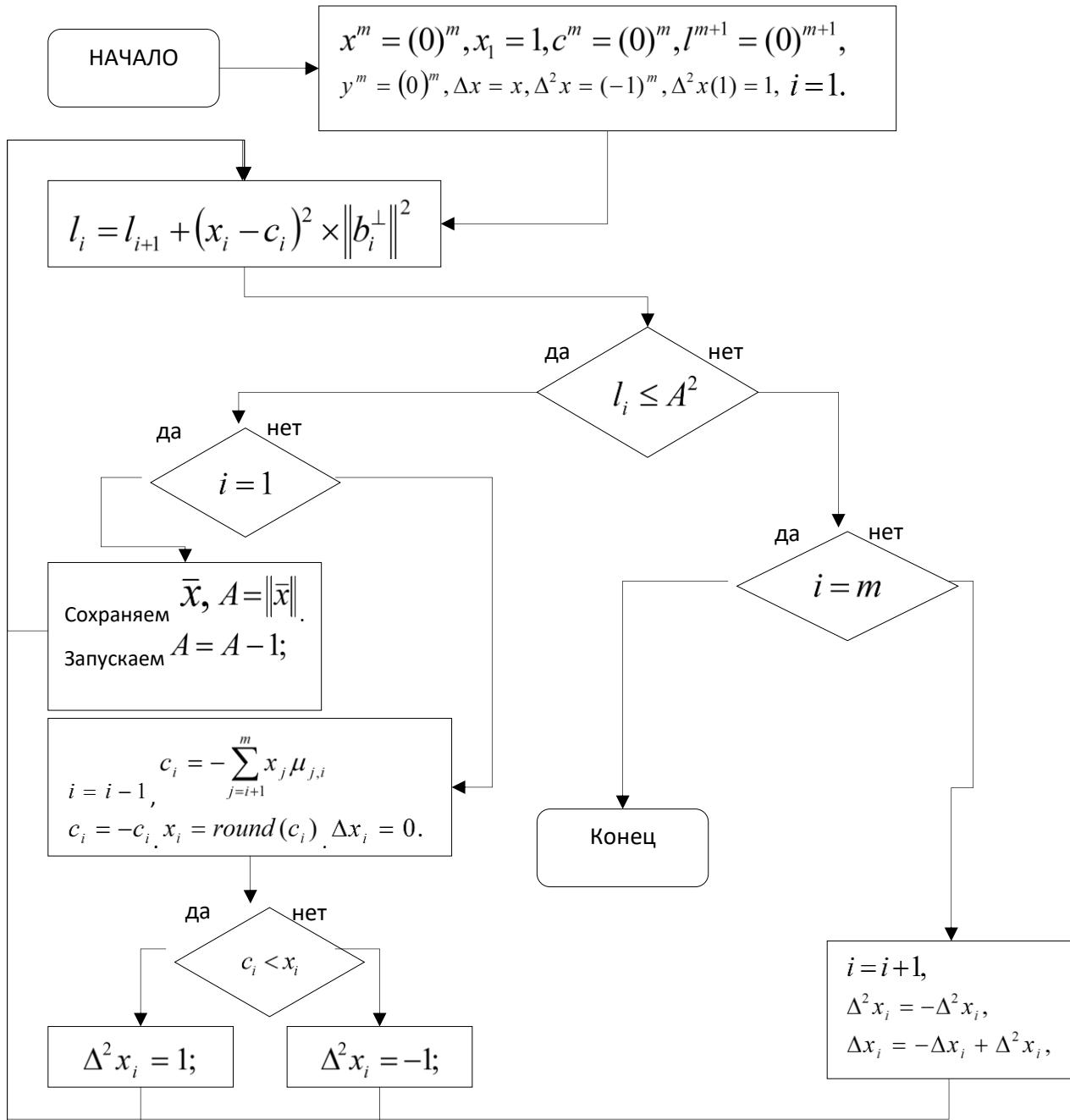


Рисунок 3.2 - Блок схема метода Каннана-Финке-Поста

Дерево перебора для неприведенного базиса решетки крайне несбалансированно, эффективность работы алгоритма будет зависеть от качества декомпозиции дерева перебора на поддеревья. При этом нами предлагается использовать гетерогенную вычислительную среду: центральный процессор будет выступать устройством управления - выполнять декомпозицию дерева на составляющие, выделяя ту часть, которую он будет

обрабатывать самостоятельно и ту, которую будет выполнять сопроцессор в соответствие с Гауссовой эвристикой. Еще одним важным фактором, влияющим на эффективность поиска кратчайшего вектора является частота обновления значения нормы предполагаемого кратчайшего вектора. В случае слишком частого обновления задержка на обновление может превысить совокупное ускорение работы алгоритма за счет отсечения веток новой нормой. Таким образом эффективность работы алгоритма зависит от качества декомпозиции и частоты обновления нормы.

Параллельный поиск обеспечивает уменьшение времени оценки кодового расстояния примерно на порядок. Например, для оценки кодового расстояния тернарного кода [64, 97] реализованному в пакете MAGMA 2.2-09 алгоритму Брауэра-Циммермана потребуется порядка 134 дней, для аналогичной оценки предложенным методом потребуется около 15 дней. Для верхней оценки кодового расстояния CCSDS AR4JA-кода со скоростью 4/5 пакету Magma (без знания автоморфизмов) потребуется 344 дня, с использованием предложенного метода на это требуется около 27 дней.

Поиск кратчайшего вектора в решетке является самой вычислительно сложной частью предложенного в [82] метода оценки минимального кодового расстояния. Для повышения быстродействия процедуры оценки минимального кодового расстояния его целесообразно реализовывать аппаратно. См. раздел 4 диссертации.

Рассмотрим работу предложенного детерминированного метода определения кодового расстояния на примере тернарного совершенного кода Голея (11,6) с порождающей матрицей:

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решетка для поиска минимального расстояния в случае приведения блочным методом Коркина-Золотарева с размером блока  $\beta = 2$  и  $N=6$  примет вид:

$$B_c^T = \begin{pmatrix} 12 & 12 & 6 & 12 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 12 & 6 & 12 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 12 & 6 & 12 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 12 & 6 & 12 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 12 & 6 & 12 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 12 & 6 & 12 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 12 & 6 & 12 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

После приведения базиса решетки получим:

$$B_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 6 & 6 & 6 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 6 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -6 & 0 & -6 & 0 & 0 & -6 & 6 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 6 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 6 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 6 & 0 & 6 & 6 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 6 & 0 & -6 & -6 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 6 & 0 & 6 & -6 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & -6 & 6 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -6 & 0 & -6 & -6 & -6 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -6 & -6 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & -6 & 0 & -6 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & -6 & 0 & -6 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отбрасываем первые 6 строк и последние 6 столбцов, как вспомогательные координатные компоненты (подпространство векторов избыточности кода), и отмасштабируем значения координатных компонент в

решетке. Получим базис решетки, дающий некоторое слово малого веса, которое может оказаться словом наименьшего веса:

$$B_c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В качестве базиса решетки мы получили одиннадцать векторов, соответствующих 11 кодовым словам веса 5. Вектору решетки в последней строке  $x = (0, 0, -1, 0, 0, -1, 0, -1, -1, -1, 0)$  соответствует кодовое слово  $(0, 0, 2, 0, 0, 2, 0, 2, 2, 2, 0)$  веса 5. Для того чтобы убедиться, что не существуют слова меньшего веса, нам необходимо выполнить полный перебор среди всех возможных линейных комбинаций векторов решетки, отличающихся своими координатными компонентами. Запуск алгоритма Каннна-Финке-Поста показывает, что таковые вектора в решетке отсутствуют,  $d_{\min} = 5$ .

Корректность предложенного метода и программного комплекса, его осуществляющего были проверены на более чем 30 различных кодах. Использовались Полярные коды, коды Рида-Маллера, коды БЧХ, код Голея, Турбо-коды, LDPC-коды [85]. Например, для оценки кодового расстояния эквивалентной блочной матрицы Турбо-кода [156, 48, 13] при однопоточной реализации метода на ЭВМ (Phenom x4-965/ 8 Gb DDR3) потребовалась 21 секунда, тогда как оценка кодового расстояния в GAP 4.7.8 (Guava 3.12, Sonata 2.6) требует более 648000 секунд. Однопоточная реализация предложенного метода доступна на сайте [86], так же приведена в Приложение 4.

Предложенный метод поиска короткого вектора в решетке занял первое место на международном конкурсе Технического Университета г. Дармштадт и оставался лучшим результатом на протяжении полутора лет, Приложение 5.

Применение параллельного метода ортогонализации, параллельного поиска кратчайшего вектора и оценок кодового расстояния (отсекающие ветки в дереве перебора) обеспечивает ускорение определения кодового расстояния низкоплотностного кода величиной от 6 раз до 7 порядков, Таб. 3.2.

Таблица 3.2 - Время поиска кодового слова минимального веса, сек

Параметры кода, [n, k, d]	[384, 192, 15]	[1008, 504, 12 ≤ d ≤ 20]	[2016, 1008, 12 ≤ d ≤ 62]
Метод оценки			
Брауэр-Циммерман	59717	$10^{13}$	$10^{66}$
Предложенный метод с параллельным КФП	9432	$4 \times 10^6$	-

### 3.2.2 Вероятностный метод определения кодового расстояния с использованием геометрических решеток

Поиск кодового расстояния может быть дополнительно значительно ускорен с использованием предложенного в диссертации вероятностного метода.

Суть метода заключается в переборе всевозможных целых точек решетки  $L$ ,  $x \in \{L \cap S \cap P\}$ , где  $S$  – шар радиуса, равного верхней оценки кодового расстояния  $A$ ,  $P$  – подмножество точек, наиболее вероятно содержащее кратчайший вектор. Этот метод позволяет уменьшить пространство перебора путем выбора подходящего базиса решетки и области  $P$  [87].

Задача вероятностного поиска заключается в выборе области разбиения и набора базисов решетки, позволяющих достичь минимальных значений математического ожидания  $Exp$  и дисперсии  $Var$  мощности множества необходимого числа перебираемых точек в области  $P$  до получения кратчайшего вектора.

В диссертации предлагается следующим образом определить область  $P$ :

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i b_i^\perp : \frac{t_i}{2} < x_i \leq \frac{t_i + 1}{2} \right\}, t \in \mathbb{N}^n.$$

Для этой области:

$$Exp = \sum_{i=1}^n \left( \frac{t_i^2}{4} + \frac{t_i}{4} + \frac{1}{12} \right) \|b_i^\perp\|^2, \quad Var = \sum_{i=1}^n \left( \frac{t_i^2}{48} + \frac{t_i}{48} + \frac{1}{180} \right) \|b_i^\perp\|^4.$$

Выбор подходящего набора базисов решетки выполняется путем перестановок базиса решеток. Поскольку число, таких перестановок велико, в диссертации для этой цели используется метод Гивенса.

Ниже приводим формальное описание метода вероятностного поиска, [88].

Вход: порождающая матрица,ложенная в решетку  $L$ ,  $d_{\max}$  - верхняя оценка кодового расстояния,  $\gamma$ -точность поиска кратчайшего вектора.

1. Приведем решетку блочным методом Коркина-Золотарева с размером блока  $\beta$ ;
2. После удаления линейно зависимых строк и столбцов получим некоторый короткий базис решетки  $\bar{b}_0, \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{n-m} \in R^{n+1}$ ,  $rank(L(\bar{b}_0, \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{n-m})) = n-m+1$ . В случае, если среди получившихся коротких векторов, будет вектор нормы меньше изначальной оценки, примем длину полученного вектора, соответствующего некоторому слову малого веса за новую оценку с целью уменьшения дерева перебора;
3. Ортогонализуем полученный базис методами QR-разложения, получим ортогональное дополнение пространства решетки  $\bar{b}_i^\perp$  и коэффициенты Грама-Шмидта  $\mu_{ij}$  (верхняя треугольная матрица);
4. Повторять в цикле пока  $\|b_i\| > \gamma \cdot \lambda_i(L(B))$  :

В цикле по  $x$  от 1 до  $2^n$

$$v = b_m, \quad v = \mu_{m,1\dots m}$$

В цикле по  $j = m-1$  до 1

$$y = \lceil v_j - 0.5 \rceil$$

**Если**  $x = 1 \bmod 2$  **то**

**Если**  $v_j - y \leq 0$  **то**  $y = y - 1$

**Иначе**  $y = y + 1$ .

$$x = \lfloor x/2 \rfloor, v = v - y b_j, \nu = \nu - y \cdot \mu_{j,1..m}.$$

**Если**  $\|v\|^2 \leq 0.99 \|b_1\|^2$  то выйти из цикла (break).

5. Если вероятность успеха поиска вектора меньше требуемой, Success Probability( $B, u, \gamma$ ) , то остановить работу алгоритма (Требуется другая область поиска кратчайшего вектора).

Если  $x = 2^u$ , то прекратить работу алгоритма (“Короткий вектор не найден”).

6. Выполним поиск кратчайшего вектора  $\bar{v} \in Z^{n+1} : -d_{\max} \leq v_i \leq d_{\max}, i = 0..n$  ) в подрешетке с начальной нормой  $A' = (n+1) \times d_{\max}^2$ .

Представленный метод предусматривает использование следующих функций.

### Функция Success Probability

**Вход:** Ортогонализованный базис решетки  $B = (\|b_1^\perp\|^2, \|b_2^\perp\|^2, \dots, \|b_m^\perp\|^2)$  ,  $u$  -

размерность подпространства поиска,  $\gamma$  - точность поиска кратчайшего вектора

**Выход:** число измерений  $t_{\max} = \max \left\{ t \in \mathbb{Z} \mid \Pr \left[ \min \left\{ \|v\|^2 \leq \gamma \|b_1^\perp\|^2 \mid v \in V_t \right\} \right] \geq \frac{1}{2} \right\} \cup \{-\infty\}$

**Success Probability**( $B, u, \gamma$ ):  $x = \pi(\|b_1^\perp\|^2, \dots, \|b_m^\perp\|^2)$ ,  $\pi$  - перестановка

Вернуть  $\max \{ \text{LogSuccessProbBound}(x, k, u, \gamma) \mid k = 1, \dots, m-u \}$ .

Функция LogSuccessProbBound( $x, k, u, \gamma$ ):

Если  $\text{ExpLength}(x, k, u, 1) \leq \gamma \|b_1^\perp\|^2$ , то вернуть  $-1$

Иначе если  $\text{ExpLength}(x, k, u, 0) \geq \gamma \|b_1^\perp\|^2$ , то вернуть  $-\infty$

$q_\gamma = \text{RegularFalsi}(\text{ExpLength}(x, k, u, q) = \gamma \|b_1^\perp\|^2, q \in [0, 1])$

Вернуть  $\left\lceil \frac{k(k-1)}{4} \log_2(q_\gamma) - 1 \right\rceil$ .

**Функция ExpLength( $x, k, u, \gamma$ ):** Вернуть  $\frac{1}{12} \sum_{i=1}^{k-1} q^{k-i} x_i + \frac{1}{12} \sum_{i=k}^{m-u-1} x_i + \frac{1}{3} \sum_{i=m-u}^{m-1} x_i + x_m$ .

Применение вероятностного метода обеспечивает до 60 порядков ускорения определения кодового расстояния низкоплотностного кода с **приемлемой вероятностью ошибки**, достаточной для просеивания кодов по критерию кодового расстояния, Таб. 3.3, [104, 145, 146]. Вероятностный метод обеспечивает отсев множества кодов кандидатов со слабыми дистанческими свойствами.

Таблица 3.3 - Время поиска кодового слова минимального веса, сек

Параметры кода, $[n, k, d]$	[384,192, 15]	[1008,504, $12 \leq d \leq 20$ ]	[2016, 1008, $12 \leq d \leq 62$ ]	[32000, 16000, $14 \leq d \leq 82$ ]
Метод оценки				
Брауэр-Циммерман	59717	$10^{13}$	$10^{66}$	-
Предложенный метод с параллельным КФП	9432	$4 \times 10^6$	-	-
Предложенный вероятностный метод	-	$10^6$	$1.3 \times 10^6$	$3 \times 10^6$

Опираясь на предложенный методы построения кодов осуществляющий улучшения свойств кода (оценку кодового расстояния) и графа (структуру циклов в графе, связность), нами был построен код (КОД Б) со скоростью  $R = \frac{1}{3}$  и информационной длинной от 80 до 1600 используя протограф из стандарта 5G(КОД А) применяя аналогичную схему адаптации длины, [104].

В сравнение с кодом 5G удалось увеличить кодовое расстояние для циркулянтов: 8 с 20 до 23, циркулянта 32 с 31 до 44, [104].

На рис. 3.3 приведены результаты исследования эффективности построенного кода, с использование квадратурно фазовой модуляции (QPSK), 50 итераций итеративного декодера с мягкими метриками Sum-Product на АБГШ-канале, улучшение свойств кода и графа обеспечило энергетический выигрыш от 0.1 до 0.4 дБ в сравнение с кодом из стандарта 5G.

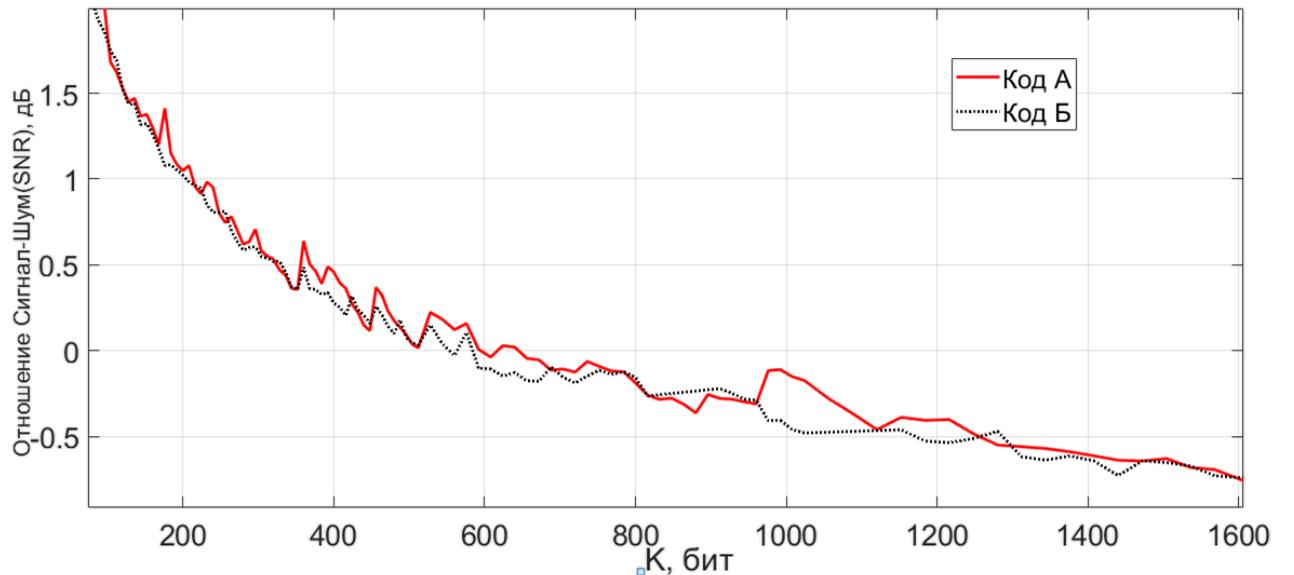


Рисунок 3.3— Требуемое отношение Сигнал-Шум для кода информационной длины  $K$ , скорости  $R = 1/3$ , для уровня блочной ошибки  $< 10^{-5}$ , с использование квадратурно фазовой модуляции (QPSK), 50 итераций итеративного декодера с мягкими метриками Sum-Product на АБГШ-канале.

### 3.3 Выводы

Чаще всего на практике для оценки кодового расстояния используют метод Брауэра-Циммермана, реализованный в алгебраическом пакете MAGMA. Недостатком этого метода является экспоненциальный рост вычислительной сложности при увеличении размерности кода. Это не позволяет его использовать при построении кодов для архивной голограмической памяти.

В диссертации предложены методы оценки кодового расстояния, опирающиеся на решение задачи Геометрии чисел – задачи поиска кратчайшего вектора. Для этого код вкладывается в решетку при помощи техники Каннана (Kannan's embedding technique). Кратчайшему вектору в решетке соответствует слово минимального веса. Решение задачи поиска кратчайшего вектора, требует выполнения ортогонализация базиса решетки и поиска кратчайшего вектора в сфере, ограниченной радиусом равным Хэммингову весу кодового слова.

Для фиксированной области перебора был предложен параллельный метод поиск кратчайшего вектора в решетке. Применение этого метода обеспечило ускорения оценки кодового расстояния от 3 до 10 раз.

Были предложены параллельные методы ортогонализации базиса решетки, обеспечившие 895-кратное ускорение на видеоускорителе (NVidia GeForce 1070), 162-кратное ускорение на 8-поточном процессоре (Intel i5-7700K) по сравнению с последовательным модифицированным методом Грамма-Шмидта.

Созданные детерминированный и вероятностный методы оценки кодового расстояния линейных блочных кодов, опирающиеся на быстрые методы поиска кратчайшего вектора в решетке, значительно ускоряют оценку кодового расстояния. Параллельный метод обеспечил пятикратное ускорение (для 8-поточной модели исполнения).

Вероятностный метод обеспечил ускорение от 5 до 60 порядков в случае поиска верхних и нижних оценок слов малого веса с погрешностью достаточной для построения кодов с уровнем ошибки на бит от  $10^{-10}$  до  $10^{-12}$ .

Предложенные методы оценки кодового расстояния позволяют значительно увеличить длину низкоплотностного кода, а также произвольного линейного блочного кода, для которого возможно определение кодового расстояния.

Дальнейшее ускорение поиска кодового слова минимального веса возможно с использованием аппаратного акселератора, реализующего поиск кратчайшего вектора в подрешетке (решетке). При этом поиск слова минимального веса сводится к многократному поиску кратчайшего вектора в подрешетке.

## 4 Разработка и исследование быстродействующих аппаратных средств построения низкоплотностных кодов

### 4.1 Аппаратно-ориентированная модификация метода поиска кратчайшего вектора в решетке

На рисунке 4.1 представлен алгоритм поиска кратчайшего вектора в решетке  $B_c^T$ , удобный для аппаратной реализации. Алгоритм реализует метод Каннана-Финке-Поста.

На вход алгоритма подаются: оценка нормы кратчайшего вектора  $A$ , ортогонализованный базис решетки  $b_i^\perp$  и коэффициенты Грама-Шмидта  $\mu_{i,j}$ .

Оценка нормы  $A$  кратчайшего вектора следует из определения 5  
 $A = \sqrt{\gamma_m} \det(L)^{\frac{1}{m}}$ . При ее вычислении используют приближение константы Эрмита,  $\gamma_m \leq \frac{2}{\pi} \Gamma(2 + \frac{m}{2})^{\frac{2}{m}}$ , где  $\Gamma$  - Гамма функция [89].

Каждый базисный вектор решетки может быть выражен через ортогональные вектора следующим образом  $b_i = \sum_{j=1}^i \mu_{i,j} b_j^\perp, 2 \leq i \leq m, 1 \leq j < i \leq m$ . Координаты кратчайшего вектора решетки  $x_i$  удовлетворяют следующей системе неравенств [90, 91]:

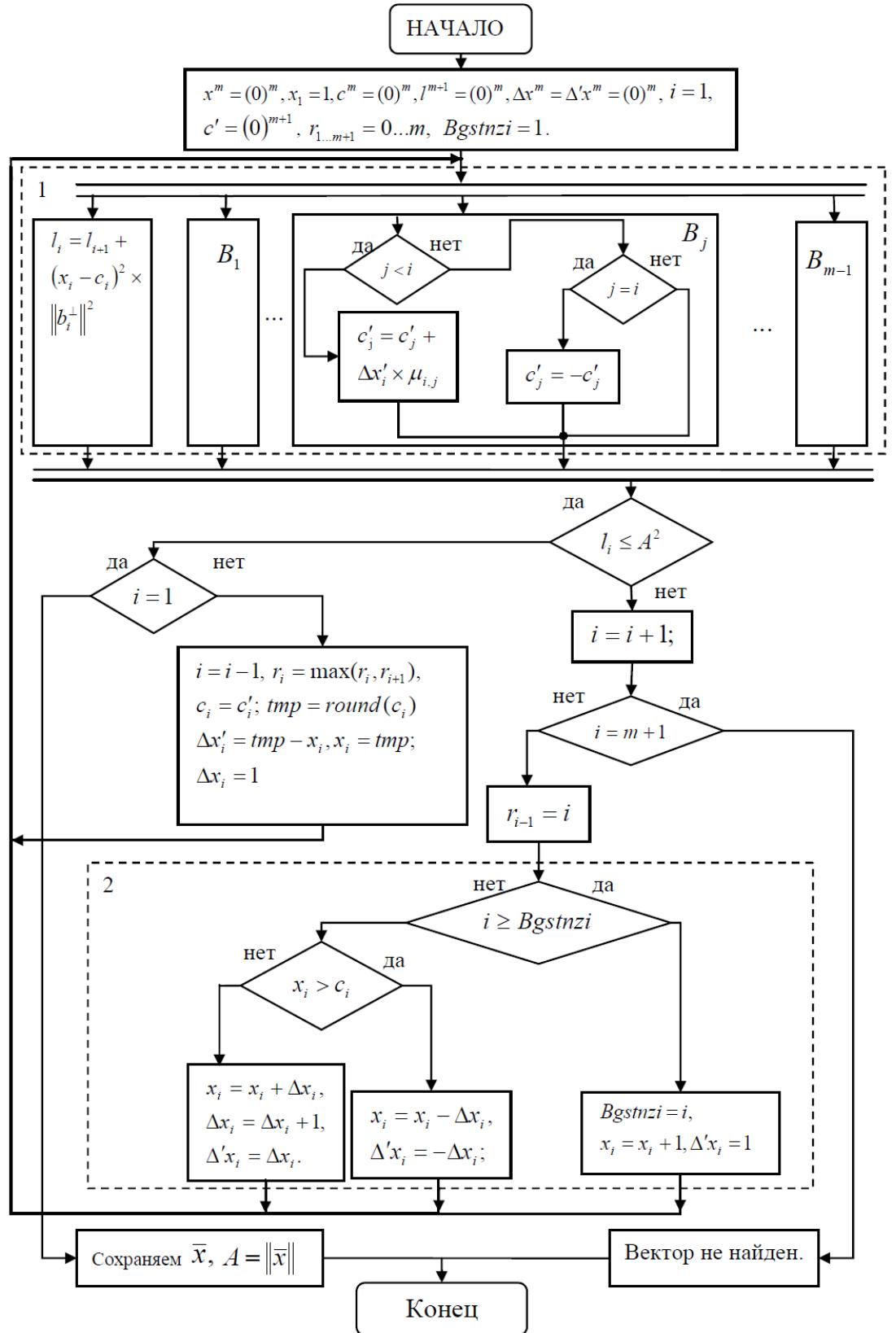


Рисунок 4.1 - Аппаратно-ориентированный алгоритм поиска кратчайшего вектора в решетке

$$\left\{ \begin{array}{l} x_m^2 \|b_m^\perp\|^2 \leq A^2, \\ (x_{m-1} + \mu_{m,m-1} x_m) \|b_{m-1}^\perp\|^2 \leq A^2 - x_m^2 \|b_m^\perp\|^2 \\ \dots \\ (x_1 + \sum_{i=2}^m x_i \mu_{i,j})^2 \|b_1^\perp\|^2 \leq A^2 - \sum_{j=2}^m l_j \end{array} \right.$$

где

$$l_j = (x_j + \sum_{i=j+1}^m x_i \mu_{i,j})^2 \|b_j^\perp\|^2.$$

Представленный алгоритм находит решение этой системы в виде вектора  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ . Особенностью алгоритма является одновременное (параллельное) выполнение всех мультипликативных операций (умножений), требующих наибольших временных затрат при аппаратной реализации (см. блок 1 на рис. 4.1). Умножения используются при расчете частичных сумм

$$l_i = l_{i+1} + (x_i - c_i)^2 \times \|b_i^\perp\|^2 \quad (1)$$

и величин изменения  $c_j$  во время перебора координатных компонент:

$$c'_j = c'_j + \Delta x'_i \times \mu_{i,j} \quad (2)$$

Перебор координатных компонент вектора  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  осуществляется при помощи зигзагообразного обхода Шнора (блок 2 на рис. 4.1), [95-96].

### **Структурно-функциональная организация быстродействующего устройства поиска кратчайшего вектора в решетке (подрешетке).**

Построение LDPC-кода для архивной голограммической памяти осуществлялось с использованием следующих аппаратных средств, [99, 122]: хост-компьютера и устройства памяти кратчайшего вектора в решетке. Функции, выполняемые хост-компьютером показаны на рис. 4.2.



Рисунок 4.2. Аппаратные средства построения LDPC-кодов

На рисунке 4.3 представлена блок-схема алгоритма поиска кратчайшего вектора в решетке, реализуемого устройством. В алгоритме дополнительно используются следующие обозначения:  $Bzstnzi$  - наибольший неравный нулю индекс  $i$ ,  $c_i$  - граница отрезка рассматриваемых значений  $x_i$ ,  $\Delta x_i$  - приращение  $x_i$ .

Ключевой особенностью алгоритма, обеспечивающего его высокое быстродействие, является параллельное выполнение всех умножений.

Структурная схема устройства поиска кратчайшего вектора, реализующая предложенный алгоритм, приведена на рисунке 4.4.

Устройство содержит: интерфейс с шиной PCI-E хост – компьютера, блок модификации  $c'_i$  и  $x'_i$ , блок модификации  $x_i$ , блок вычисления  $l_i$  и блок управления.

Интерфейсный блок предназначен для загрузки в разработанное устройство: оценки квадрата нормы искомого вектора  $A$ , коэффициентов Грама-Шмидта  $\mu_{i,j}$  и квадратов норм ортогонализованного базиса решетки  $\|b_i^\perp\|^2$ , предварительно вычисленных в хост-компьютере. Также интерфейсный блок передает в хост компьютер, найденный кратчайший вектор. Для оценки кодового расстояния кодов длины  $n$ , будет применяться блочный метод Коркина-Золотарева с размером блока  $\beta \leq 512$ .

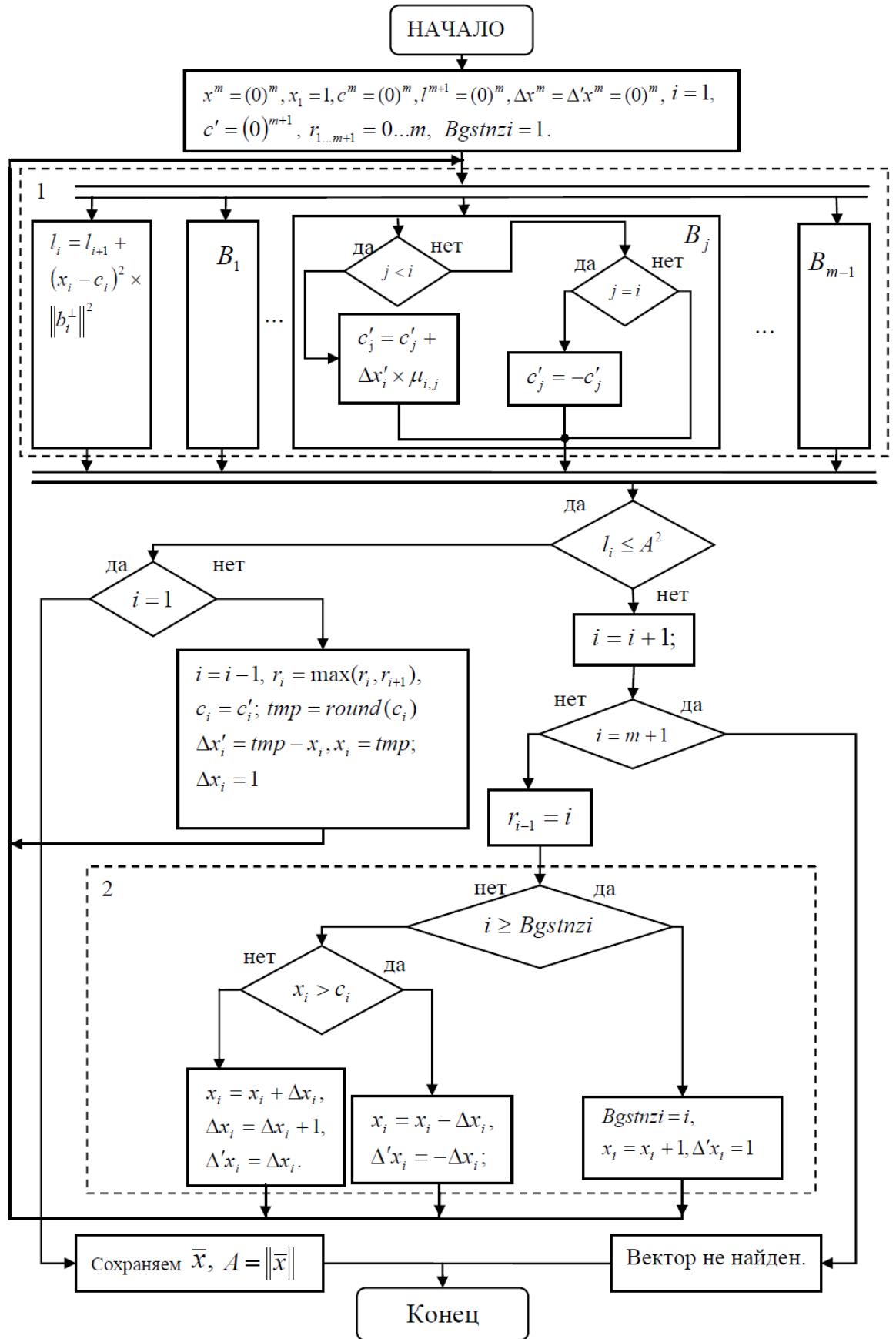


Рисунок 4.3 Блок-схема аппаратно-ориентированного алгоритма поиска кратчайшего вектора в решетке

Блок вычисления частичных сумм  $l_i$  (см. рис. 4.5), вычисляет значение  $l_i$ , сравнивает его с оценкой нормы  $A$  и в зависимости от результата сравнения формирует один из управляющих сигналов  $inc$  или  $dec$ . Сигналы  $inc$  и  $dec$  соответствуют увеличению ( $inc$ ) или уменьшению ( $dec$ ) индекса текущей координатной компоненты  $i$ . Они определяют направления сдвига регистров, хранящих  $l_i$ ,  $\|b_i^\perp\|^2$ ,  $c_i$ ,  $x_i$ , обеспечивая тем самым правильный выбор элементов из последовательности.

Блок модификации  $c'_i$  и  $x'_i$  приведен на Рис. 4.6. Он реализует вычисления, описанные в блоках  $B_1 - B_{m-1}$  алгоритма, кроме того, вычисляет значение  $x'_i$ . Блок содержит память RAM для хранения коэффициентов Грам-Шмидта  $\mu_{i,j}$ , разрядностью 32 бита. Объем RAM составляет  $m \times (m - 1) \times 32$  бит. Значения  $c'_j$  ( $j=1, \dots, m-1$ ) хранятся в 8-разрядных регистрах Rg и меняются на величину произведения  $c'_j = c'_j + \Delta x'_i \times \mu_{i,j}$ .

Блок модификации  $x_i$  (см. рис. 4.7), осуществляет изменение координатных компонент искомого вектора в процессе зигзагообразный обхода, а также возвращает непосредственно координаты искомого кратчайшего вектора в решетке. В предложенной аппаратной реализации используется 32 бита для коэффициентов и ортогонализованного базиса решетки  $\|b_i^\perp\|^2$ , а также 8 бит для  $c'$  и  $\Delta x'$ ;

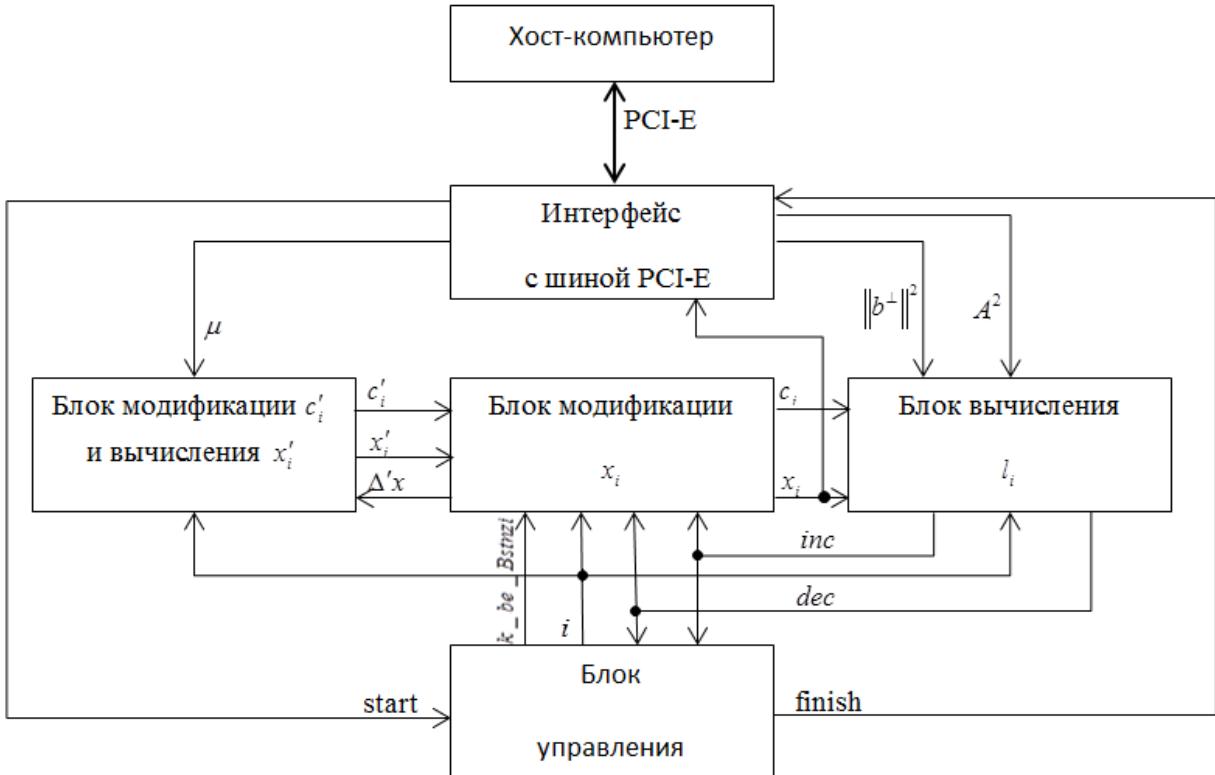


Рисунок 4.4. Структурная схема устройства для оценки кодового расстояния

В предложенном устройстве все умножения (требующие наибольших временных затрат) осуществляются параллельно (блок 1 алгоритма на рис. 4.3). Это обеспечивает высокую производительность устройства.

Синтез блоков устройства осуществлялся в САПР Vivado v2016.3 (64-bit) на FPGA Virtex UltraScale xcuvu440-flga2892-3-e. Результаты синтеза приведены в Табл. 4.1.

Таблица 4.1 - Результаты синтеза операционной части устройства для кодов разной длины

Размер блока	64	128	256	512
Количество LUT	690	1301	2803	6154
Количество FF	322	832	1120	2242
Количество DSP	28	46	92	184
Объём памяти, КБ	8,125	32,25	128,5	513

В Табл. 4.2 приведено сравнение по быстродействию предлагаемого устройства и программной реализации поиска по методу КФП на AMD Phenom 965/8 Gb DDR2-800. Выигрыш по быстродействию представленного устройства

по сравнению с программной реализацией составляет примерно 40 раз для LDPC кодов скоростью  $\frac{1}{2}$ . Устройство было синтезировано для FPGA Virtex 7 Ultrascale (xc7vx485tffg1930-2L) с тактовой частотой 250 МГц.

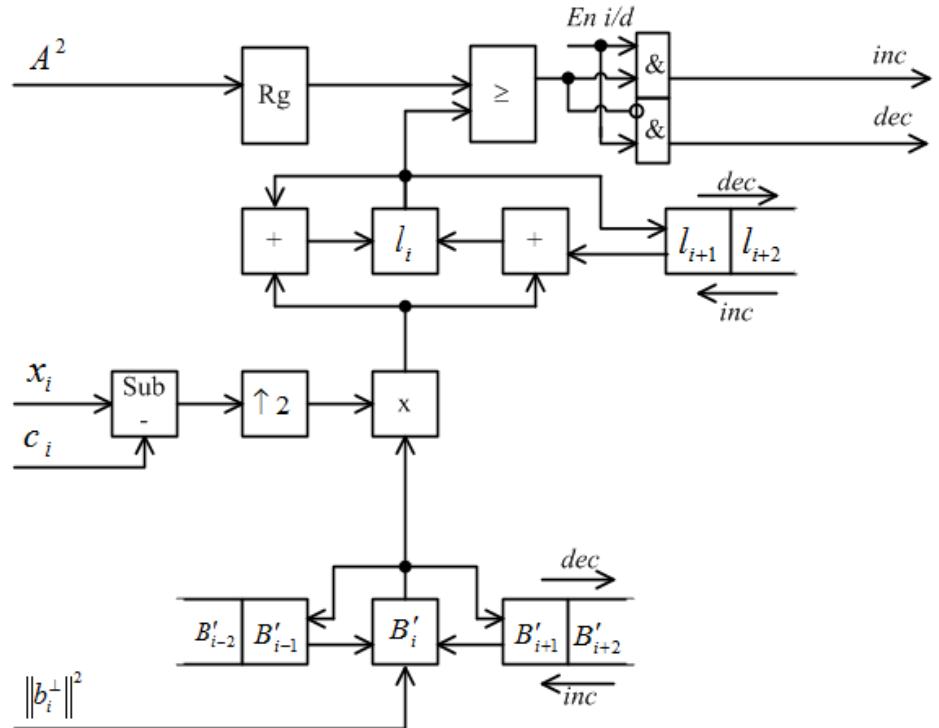


Рисунок 4.5. Блок вычисления  $l_i$

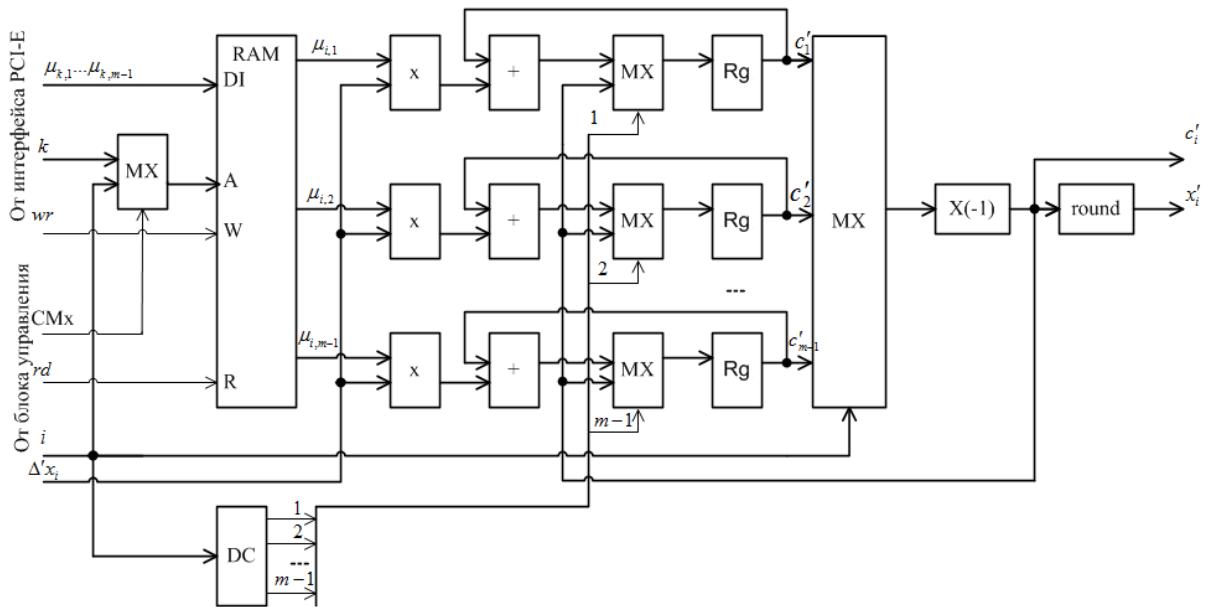


Рисунок 4.6. Блок модификации  $c'_i$  и  $x'_i$

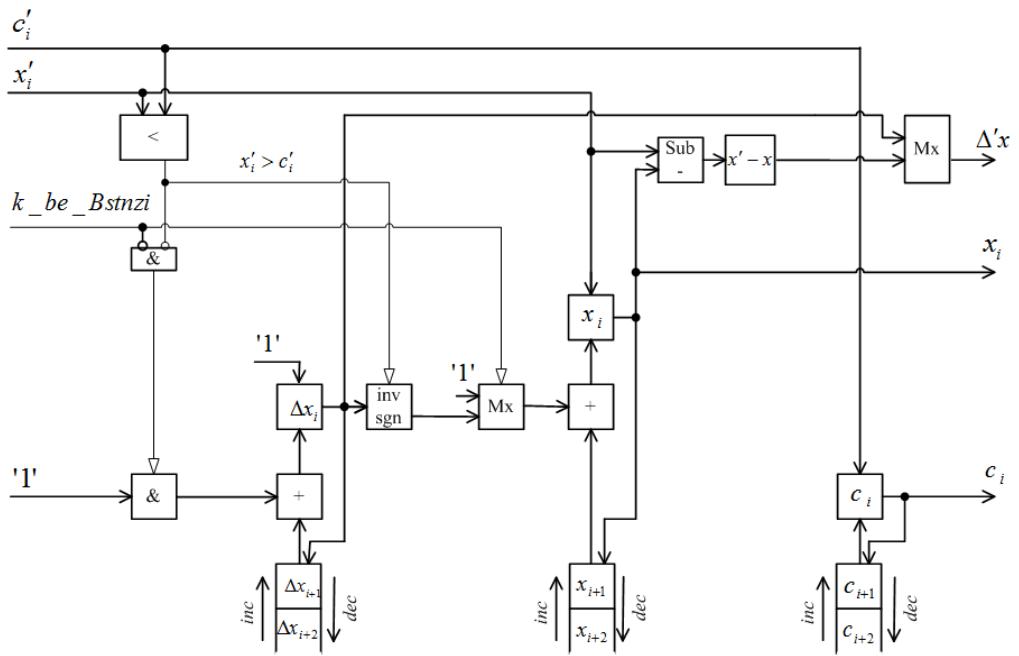


Рисунок 4.7. Блок модификации  $x_i$

#### 4.4 Результаты синтеза и сравнения программной и аппаратной реализаций

Для сравнения выполнялась программная реализация поиска кратчайшего слова по методу КФП на ПЭВМ (AMD Phenom 965/8 Gb DDR2-800). В Таблице 4.2 приведено сравнение по быстродействию предлагаемого устройства и программной реализации поиска. Исследование проводилось для LDPC кодов со скоростью  $\frac{1}{2}$  и длиной  $m = 64, 128, 256, 512$ .

Таблица 4.2 – Время поиска слов минимального веса предлагаемым устройством и программной реализацией

Параметры \ Размер блока	64	128	256	512
Сложность аппаратной реализации, вентилях	286716	474462	945778	1894860
Число циклов работы устройства	491919167	$236 \cdot 10^9$	$486 \cdot 10^9$	$1005 \cdot 10^9$
Время поиска слов предлагаемым устройством, с.	9.84	4720	9720	20100
Время поиска слов программной реализацией, с.	333.68	156011	329925	681946

## 4.2 Построение низкоплотностных кодов для архивной голографической памяти с повышенной корректирующей способностью

В диссертации с использованием предложенной процедуры (п. 2.1) был построен квазициклический низкоплотностный код  $(n,k) = (32000,16000)$  для архивной голографической памяти. Рассмотрим процесс построения кода подробнее.

В начале процесса построения кода на фазе оптимизации протографа (п. 2.1, шаги 2-3), были получены протографы, базовые матрицы которых размером 21 на 11 представлены на рис. 4.8-4.10.

0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1

Рисунок 4.8 – Базовая матрица протографа с кодовым расстоянием 22 и порогом итеративного декодирования при 30 и 200 итерациях  $Eb/No = 0.8903$  и  $Eb/No = 0.5503$ , соответственно.

0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1

Рисунок 4.9 – Базовая матрица протографа с кодовым расстоянием 24 и порогом итеративного декодирования при 30 и 200 итерациях  $Eb/No = 1.0403$  и  $Eb/No = 0.8303$ , соответственно.

0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1

Рисунок 4.10 – Базовая матрица протографа с кодовым расстоянием 54 и порогом итеративного декодирования при  $Eb / No = 1.1603$  и  $Eb / No = 0.8803$ , соответственно.

Характеристика треппинг-сетов для кода с базовой матрицей, приведенной на рис. 4.8, дана в Таблице 4.3. В таблице приведены символные узлы, образующие треппинг-сеты, и веса псевдокодовых слов, образованных Трэппин-сетами. Веса вычислены с использованием метода линейного программирования, приведенного во второй главе.

Таблица 4.3 - Треппинг-сеты для кода с базовой матрицей, приведенной на рис. 4.8

TS(a,b)	Вес псевдокодового слова, $\omega(p)$	Столбцы (символьные узлы), участвующие в псевдокодовом слове Трэппин-сета
(7, 7)	[8.781202]	9139 13040 14556 15304 17468 19075 28301
(9, 4)	[9.001648]	7616 9946 10184 10866 12151 13025 14541 15289 30384
(8, 8)	[9.855998]	10662 11380 12254 13770 16730 17487 21945 24782
(9, 9)	[9.861800]	7616 9285 11490 13025 14541 15289 16792 28447 29099
(8, 8)	[9.888543]	7616 7833 10184 10279 18475 18597 22027 22244
(10, 6)	[10.001831]	7616 8355 9400 11605 12172 12479 16028 17474 18380 26196
(10, 8)	[10.001831]	7616 9627 10184 10866 11832 13263 14541 15289 29827 30065
(10, 8)	[10.001831]	7616 10062 10184 10866 13263 14779 16973 19781 22027 22748
(8, 8)	[10.084940]	7616 8201 9246 10184 19060 19182 22149 22612
(7, 6)	[10.213432]	12185 12531 14765 15224 16959 17418 18136
(7, 6)	[10.244420]	13708 14315 15609 15979 25909 26516 26886
(7, 6)	[10.290990]	7616 7833 9341 10184 18597 19060 19277
(8, 6)	[10.719603]	9139 11344 13282 14339 16610 17710 18169 18858
(10, 9)	[10.747731]	7616 13025 13736 14541 15289 15661 17107 17453 22399 27823
(10, 10)	[10.861930]	7616 10062 10184 10866 13263 13698 18126 22027 26980 28977
(10, 9)	[10.938397]	7616 9934 10184 10647 12139 13013 14529 19060 24852 27573
(11, 9)	[11.002014]	7616 7854 9341 10184 10866 13263 14779 15527 19060 24948

		<b>28061</b>
...	...	...
(14, 4)	[14.002564]	7616 7833 10163 10184 10845 12151 13025 13242 14541 14758 15289 15506 18359 18597
...	...	...
(17, 6)	[17.003113]	7616 8317 9362 9579 10184 10866 11329 11784 12203 13263 13719 14779 15527 15990 19060 19298 29779
...	...	...

В таблице 4.3 приведены не все значения Трэппин-сетов, а только образующие псевдокодовые слова малого веса. Однако вес именно этих псевдокодовых слов  $\omega(p)$  определяет вероятность блочной ошибки.

Вероятность ошибки в символном узле Трэплинг-сета вычисляется по следующей формуле:

$$P_{TS} = Q\left(\frac{2m_\lambda + 2 \sum_{j=1}^{iter} \frac{m_{\lambda^{ext}}^{(j)} + m_\lambda}{\mu_{max}^j}}{\sqrt{\left(1 + \sum_{j=1}^{iter} \frac{1}{\mu_{max}^j}\right) m_\lambda + \sum_{j=1}^{iter} \frac{m_{\lambda^{ext}}^{(j)}}{\mu_{max}^j}}}\right),$$

где  $\mu_{max}^j$  - спектральный параметр роста логарифмов коэффициентов правдоподобия на  $j$  итерации алгоритма распространения доверия, показывает, насколько логарифмы правдоподобия  $\lambda$  растут быстрее в Трэплинг-Сете по отношению к оставшемуся графу;  $Q$  -  $Q$  - функция;  $m_\lambda$  начальное значение логарифмов правдоподобия в символьных узлах, полученных из канала,  $m_{\lambda^{ext}}^{(j)}$  - сообщение в методе распространения доверия на  $j$  итерации, вычисляемое при помощи Эволюции плотностей или ее аппроксимаций, например

$$m_{\lambda^{ext}}^{(j)} = \phi^{-1} \left( 1 - \left[ 1 - \phi \left( m_\lambda + (d_v - 1)m_{\lambda^{ext}}^{(j-1)} \right) \right]^{d_c - 1} \right),$$

$\lambda(\lambda^{ext})$ - логарифмы правдоподобия в символьных узлах из канала (внешние логарифмы правдоподобия из декодера на  $j - 1$  итерации, extrinsic information),  $d_c$ -вес проверочного узла,  $d_v$ -вес символьного узла,  $\phi$  - функция проверочного узла в Эволюции плотностей или ее приближении (Reciprocal Channel Approximation, RCA Gaussian Approximation), Приложение 4. Например, для аппроксимации Гауссианами получим:

$$\phi(x) = \begin{cases} \exp(-0.4527x^{0.86} + 0.0218), & \text{для } 0 \leq x < 10 \\ \sqrt{\frac{\pi}{x}} \exp(-0.25x) \left(1 - \frac{10}{7x}\right), & \text{для } x \geq 10 \end{cases}.$$

Применим предложенную линейную модель для оценки вероятности возникновения ошибки в символном узле треппинг-сета  $P_{TS}$ .

Например, для Трэппин-сета (17, 6), содержащего символные узлы: 12185, 12555, 13101, 14158, 14617, 14765, 14789, 15224, 15365, 16083, 16429, 16983, 17529, 18136, 26272, 26990, 27336, при отношении сигнал-шум 1.4 дБ  $P_{TS}$  соответственно равны 1.223185e-07, 1.126428e-07, 1.248727e-07, 1.234708e-07, 1.252041e-07, 1.157210e-07, 1.162862e-07, 1.220277e-07, 1.252517e-07, 1.136047e-07, 1.237212e-07, 1.094425e-07, 1.101199e-07, 1.104766e-07, 1.087270e-07, 1.100143e-07, 1.113092e-07. Усредненное значение по всем символам - 1.167771e-07.

Аналогично оценим  $P_{TS}$  для Трэппинг-сета (14, 4). 7616: 5.166419e-09; 7833: 4.477989e-09; 10163: 4.619398e-09; 10184: 4.502959e-09; 10845: 5.321935e-09; 12151: 4.635558e-09; 13025: 5.358256e-09; 13242: 5.674400e-09; 14541: 5.729683e-09; 14758: 5.721226e-09; 15289: 5.745688e-09; 15506: 5.164377e-09; 18359: 1.456904e-09; 18597: 1.440904e-09. Среднее: 4.643978e-09

Для Трэппин-сета (8, 6). 9139: 3.842229e-10; 11344: 3.397534e-10; 13282: 1.824814e-10; 14339: 3.376797e-10; 16610: 3.837266e-10; 17710: 1.805997e-10; 18169: 1.820864e-10; 18858: 2.630548e-10. Среднее: 2.817006e-10.

Таким образом, усредняя по информационным символам кода значения  $P_{TS}$  для всех треппинг-сетов из Таблицы 4.3, получим оценку вероятности ошибки по множеству Трэппинг-сетов: 1.726665e-09.

При отношении сигнал-шум 1.4 дБ базовая матрица, приведенная на рис. 4.8, не удовлетворяет условию  $P_{UB} < P_{BER}$ . Вероятность битовой ошибки по множеству Трэппин-сетов кода равна  $1.7 \cdot 10^{-9}$ , что больше требуемых  $10^{-12}$ .

Характеристика треппинг-сетов для кода с базовой матрицей, приведенной на рис. 4.9, дана в Таблице 4.4.

Таблица 4.4 - Треппинг-сеты для кода с базовой матрицей, приведенной на рис. 4.9

TS (a, b)	Вес псевдокодового слова, $\omega(p)$	Столбцы (символьные узлы), участвующие в псевдокодовом слове Трэппин-сета
(12, 12)	[17.297055]	4570 5497 7926 7966 8252 9485 10412 18727 18767 19649 27849 28445
(12, 12)	[17.297055]	4570 5166 8522 8562 8848 9485 10081 18722 19323 19363 27518 28445
(12, 12)	[17.297055]	4721 5648 8077 8117 8403 9636 10563 18277 18878 18918 28000 28596
(7, 7)	[18.891353]	6053 7254 7616 8212 18417 19013 19609
(8, 8)	[21.135316]	7733 8830 9252 10179 11243 12170 18534 18704
(7, 7)	[21.368022]	7896 8492 9077 10000 10596 18355 19293
(12, 11)	[21.598147]	7968 8271 8954 13924 15965 16502 16561 18769 19365 19668 19755 25892
(10, 10)	[22.116214]	7735 8272 8575 15342 16269 18449 18536 19669 26196 27123
(12, 11)	[22.401390]	7968 8027 8867 13924 15634 16502 16561 18741 18769 18828 19365 25892
(13, 13)	[22.953044]	7968 8271 8954 13924 15965 16502 16561 18769 19365 19668 19755 25892 26819
(14, 14)	[23.308733]	7912 8449 8580 8752 15519 16446 18323 18626 18713 19381 26373 27300 28938 29534
(14, 14)	[23.441228]	7735 8151 8272 8575 15342 16269 18449 18536 19548 19669 21323 21919 26196 27123
(16, 16)	[23.914631]	4570 5166 7649 8784 8848 8920 9707 10303 18450 18722 18794 19585 22092 22688 29530 30126
(16, 16)	[24.058115]	4689 5616 8027 8371 8564 8867 15634 16561 18438 18741 18828 19768 25892 26488 29053 29649
(11, 11)	[24.267965]	4574 5501 7766 8256 8580 14405 15460 19381 19653 28938 29534
(12, 10)	[24.552166]	7748 7786 8845 9267 10194 10662 11258 12359 13286 18549 18587 18719
(15, 13)	[24.585329]	7720 7779 8462 14359 14955 15414 15473 16010 16069 18277 19117 19176 19263 26327 26923
(14, 14)	[24.684611]	4728 5324 7807 9006 9078 9112 10929 18608 18880 18952 21323 22250 29688 30284
(14, 12)	[24.855100]	7892 7968 8271 8954 12465 13392 15965 16561 18693 19365 19668 19755 25892 26819
(18, 16)	[25.004586]	4574 5501 7912 8256 8449 8580 8752 15519 16446 18323 18626 18713 19381 19653 26373 27300 28938 29534
...	...	...

Линейная модель дает следующие вероятности ошибок  $P_{TS}$  для Трэппинг-сета (12, 12) при отношение сигнал-шум 1.4 dB, 4570: 2.630168e-07; 5166: 2.620616e-07; 8522: 4.241899e-07; 8562: 4.536300e-07; 8848: 4.105557e-07; 9485: 2.952741e-07; 10081: 2.923268e-07; 18722: 4.087889e-07; 19323: 4.309396e-07;

19363: 4.571745e-07; 27518: 2.260399e-07; 28445: 2.297366e-07. Средняя вероятность ошибки по подграфу Трэпин-сета: 3.461445e-07.

Трэпин-сет (12, 12). 4570:2.521952e-07; 5497:2.478352e-07; 7926: 4.081326e-07; 7966: 4.378850e-07; 8252: 3.866187e-07; 9485: 2.852650e-07; 10412: 2.873231e-07; 18727: 4.105099e-07; 18767: 4.404778e-07; 19649: 3.906458e-07; 27849: 2.182454e-07; 28445: 2.208116e-07. Средняя вероятность ошибки по подграфу: 3.321621e-07

Трэпин-сет (12, 12). 4721: 2.599513e-07; 5648: 2.644726e-07; 8077: 4.416100e-07; 8117: 4.521678e-07; 8403: 3.983156e-07; 9636: 2.934235e-07; 10563: 2.968188e-07; 18277: 3.961740e-07; 18878: 4.431977e-07; 18918: 4.585798e-07; 28000: 2.308703e-07; 28596: 2.272107e-07; 19365: 3.770099e-10; 21674: 9.448026e-11; 25892: 1.441660e-13. Среднее: 7.656254e-08

Усреднение по информационным символам кода значений  $P_{TS}$  для всех треппинг-сетов из Таблицы 4.4 дает оценку вероятности ошибки по множеству Трэпинг-сетов, равную 7.656254e-08.

Базовая матрица, приведенная на рис. 4.9, не удовлетворяет условию  $P_{UB} < P_{BER}$ . При отношении сигнал-шум 1.4 ДБ вероятность битовой ошибки по множеству Трэпин-сетов кода составляет 7.656254e-08, что больше требуемых  $10^{-12}$ .

Характеристика треппинг-сетов для кода с базовой матрицей, приведенной на рис. 4.10, представлена Трэпин-сетами (15, 14), (18, 18), (25, 23).

Линейная модель дает следующие вероятности ошибок  $P_{TS}$  для Трэпинг-сетов при отношении сигнал-шум 1.4 дБ.

Трэпин-сет (15, 14). 10662: 1.069067e-12; 10725: 6.781307e-12; 13059: 1.218794e-12; 13122: 8.135955e-12; 14385: 1.828696e-12; 14459: 1.212976e-12; 14638: 8.077101e-12; 15386: 6.562997e-12; 16656: 1.598787e-12; 16730: 1.159289e-12; 21945: 3.107531e-13; 22008: 7.994288e-13; 22941: 1.286929e-12; 23078: 1.506446e-12; 23194: 2.232073e-12. Среднее: 2.918707e-12.

Трэпин-сет (18, 18). 7616: 5.972829e-13; 7627: 5.241620e-13; 10184: 6.925564e-13; 10195: 3.670270e-13; 10866: 6.767801e-13; 12162: 3.493063e-13; 13036: 5.119405e-13; 13263: 5.784997e-13; 14552: 6.444547e-13; 14779: 3.728355e-13; 15289: 4.064789e-13; 15300: 6.395260e-13; 16973: 3.401904e-14; 18258: 3.475354e-14; 23506: 5.875287e-15; 23744: 6.095418e-15; 27584: 3.847128e-14; 28869: 4.053199e-14. Среднее: 3.622554e-13.

Трэпин-сет (25, 23). 7616: 1.029473e-13; 8051: 1.687002e-18; 9306: 4.516580e-14; 9773: 6.159254e-15; 10184: 6.837219e-14; 10619: 1.890528e-19; 10866: 3.583253e-14; 11063: 6.167990e-16; 13025: 9.317471e-14; 13207: 8.896956e-16; 13460: 2.733849e-16; 14541: 1.233733e-13; 14860: 1.287711e-15; 14976: 7.321990e-17; 15289: 1.249857e-13; 15608: 6.653103e-16; 15724: 1.326159e-17; 17635: 2.055339e-13; 19242: 7.999058e-14; 19492: 9.987388e-14; 22346: 4.496835e-17; 28468: 5.729449e-14; 28685: 4.234165e-16; 30146: 3.778013e-14; 31062: 2.134731e-20. Среднее: 4.339094e-14.

Усреднение по информационным символам кода значений  $P_{TS}$  для Трэпинг-сетов (15, 14), (18, 18), (25, 23) дает оценку вероятности ошибки по множеству Трэпинг-сетов, равную 1. 158302e-013.

Базовая матрица, приведенная на рис. 4.10, удовлетворяет условию  $P_{UB} < P_{BER}$  при отношении сигнал-шум 1.4 дБ. Вероятность битовой ошибки по множеству Трэпин-сетов кода составляет 1.158302e-013, что меньше требуемых  $10^{-12}$ .

Полученный протограф (рис. 4.10) является результатом поиска компромисса между дистанчными свойствами кода (свойства кода) и их потенциальным спектром связности (свойства графа), выраженного в пороге итеративного декодирования (водопад) и полке.

Полученный протограф (рис. 4.10) был расширен (шаг 4 процедуры построения кода) модификацией метода запрещенных коэффициентов. После чего для полученных кодов-кандидатов выполнялись шаги 5-9.

Для оценки вероятности ошибки на шаге 7 процедуры применялась следующая формула:

$$P_{\text{waterfall}}(N, \sigma) \approx Q\left(\frac{\sqrt{N}\left(C(\sigma) - C(\sigma^*) - \beta N^{-\frac{2}{3}}\right)}{\alpha}\right) + O\left(N^{-\frac{1}{3}}\right), \text{ (испр)}$$

где  $N$  - длина кода,  $\alpha$  - масштабирующий коэффициент,  $\beta$  - коэффициент сдвига,  $\sigma^*$  - порог итеративного декодирования (среднеквадратичное отклонение),  $C(\sigma)$  - среднеквадратичное отклонение в АБГШ-канале,  $C(\sigma^*)$  - пропускная способность канала соответствующая мощности шума  $\sigma^*$ ,  $Q$  -  $Q$ -функция.

Для определения штрафной функции (шаги 7-8 процедуры) на конечной длине применялся метод «Эволюции ковариации» (Covariance Evolution), Приложение 4. В соответствии с этим методом решалась система дифференциальных уравнений, соответствующая декодированию (ВР, метод распространения доверия) ансамблей кодов, заданных приведенными выше протографами.

Предварительно выполнялась параметризация для перехода от дискретной к непрерывным величинам (от дискретной кривизны к непрерывной кривизне пространства, от Гомологии к Когомологии):

$$\tau \doteq \frac{\ell}{N}, r_c \doteq \frac{R_c(\tau)}{N}, v_d(\tau) = \frac{V_d(\tau)}{N},$$

где  $\ell$  - число итераций peeling декодера,  $N$  - длина кода,  $V_d(\tau)(R_c(\tau))$  - число символьных (проверочных узлов) типа  $c_d$  во время  $\tau$ , позволившая осуществить переход от дискретной модели к непрерывной, представленной следующей системой дифф. уравнений:

$$\frac{\partial \hat{v}_d(\tau)}{\partial \tau} = f(\Delta V_d(\tau)) = E[\Delta V_d(\tau) | \{\hat{v}_d(\tau), \hat{r}_c(\tau)\}_{d \in \mathcal{F}_v, c \in \bar{\mathcal{F}}_c}]$$

$$\frac{\partial \hat{r}_c(\tau)}{\partial \tau} = f(\Delta R_c(\tau)) = E[\Delta R_c(\tau) | \{\hat{v}_d(\tau), \hat{r}_c(\tau)\}_{d \in \mathcal{F}_v, c \in \bar{\mathcal{F}}_c}]$$

$$\frac{\partial \delta_{c,c'}(\tau)}{\partial \tau} = Cov[\Delta R_c, \Delta R_{c'} | \mathfrak{E}(\tau)] +$$

$$\sum_{u \in \bar{\mathcal{F}}_c} \delta_{c,u}(\tau) \frac{\partial f(\Delta R_{c'}(\tau))}{\partial r_u} \Big| \mathfrak{E}(\tau) + \sum_{u \in \bar{\mathcal{F}}_c} \delta_{c',u}(\tau) \frac{\partial f(\Delta R_c(\tau))}{\partial r_u} \Big| \mathfrak{E}(\tau) + \\ \sum_{d \in \mathcal{F}_v} \delta_{c,d}(\tau) \frac{\partial f(\Delta R_{c'}(\tau))}{\partial r_d} \Big| \mathfrak{E}(\tau) + \sum_{d \in \mathcal{F}_v} \delta_{c',d}(\tau) \frac{\partial f(\Delta R_c(\tau))}{\partial r_d} \Big| \mathfrak{E}(\tau),$$

где  $\Delta V_d(\tau) = V_d(\tau + \frac{1}{N}) - V_d(\tau)$ ,  $\Delta R_c(\tau) = R_c(\tau + \frac{1}{N}) - R_c(\tau)$  и  $\mathcal{F}_v(\mathcal{F}_c)$  - множество типов узлов вершин (проверок) в графе Таннера,  $\mathfrak{E}(\tau)$ -ожидаемое распределение весов во время  $\tau$ :  $\mathfrak{E}(\tau) = \{\hat{v}_d(\tau), \hat{r}_c(\tau)\}_{d \in \mathcal{F}_v, c \in \bar{\mathcal{F}}_c}$ .

Размерность пространства системы дифференциальных уравнений равна:

$$\dim(DE) = \text{card}(c_d) + \text{max\_degree}(R_c) - 1,$$

где  $\text{card}(c_d)$  – число различных весов столбцов в базовой матрице,  $\text{max\_degree}(R_c)$  – максимальный вес строки в базовой матрице. Например, размерность для базовой матрицы на рис. 4.10,  $\dim(DE) = 4 + (11 - 1) = 14$ . Поскольку размерность растет линейно с ростом размера базовой матрицы дифференциальные уравнения можно решить численно (квази-аналитически).

Для упрощения оценки штрафной функции АБГШ-канал был заменен на стирающий канал. Возможность замены обусловлена топологическими особенностями (топологическими инвариантами, не допускающими нарушение «локальных свойств» графа, в симметричной фазе высоких шумов – “области водопада” в случае их отображения на другие типы каналов) предложенного метода построения кода, исключающего из политопа кода псевдокодовые слова малого веса. Полученные в результате симплексы (топологические комплексы и их приближения) можно рассматривать в качестве звездной области относительно множества принятых кодовых слов, рис 4.11. Отметим, что модификация кода с целью изменения длины при помощи “укорочения” (shortening) или “выкалывания” (puncturing) может приводить к нарушению топологических свойств. Для сохранения топологических инвариантов автором был предложен метод адаптации длины квазициклических кодов, см. глава 2.3.

Под звёздной областью относительно фиксированной точки  $x$  понимается подмножество  $D$  Евклидова пространства  $R^n$ , такое, что отрезок, соединяющий любую точку области  $D$  с точкой  $x$ , целиком принадлежит этой области.

Подмножество называется просто звёздной областью, если существует точка, относительно которой это подмножество звёздное.

Кодовые и псевдокодовые слова малого веса, представляющие собой пустоты, нарушают топологию звездных областей. Получение свойств локально выпуклого пространства звездной области, позволяющий осуществлять замену АБГШ-канала на стирающий канал, требует отсутствия таких пустот путем обеспечения достаточных дистанческих свойств и спектров связности, обеспечиваемых предложенной процедурой построения кода.

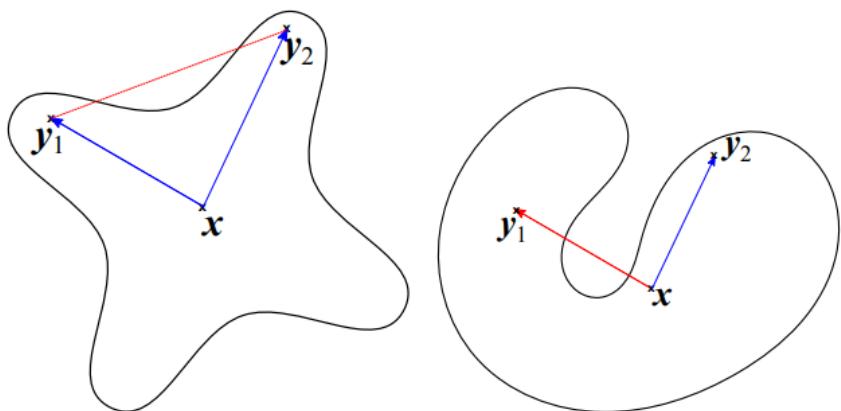


Рисунок 4.11 – (Слева) Звездная область политопа декодирования в случае исключение псевдокодовых слов малого веса на основе предложенной процедуры построения кода, где  $x$  -принятое слово из канала,  $y$ - кодовые и псевдокодовые слова. (Справа) Область политопа симплекса декодирования в случае наличия псевдокодовых слов малого веса

Результаты численного решения системы дифференциальных уравнений приведены на рис. 4.12, 4.13.

Полученная зависимость доли проверочных узлов веса 1 позволила вычислить коэффициенты  $\alpha, \beta$  для штрафной-функции (водопада)  $P_{\text{waterfall}}(N, \sigma)$ , пункт 7 процедуры построения.

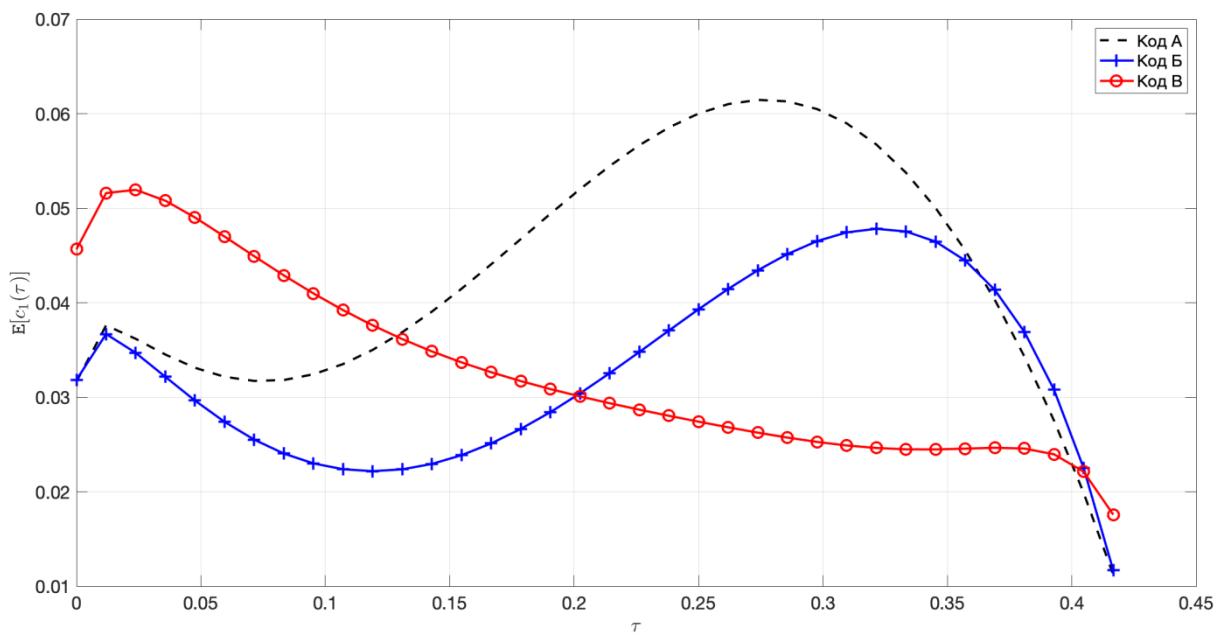


Рисунок 4.12 – Зависимость математического ожидания доли проверочных узлов веса 1 ( $E[c_1(\tau)]$ ) в методе «Эволюции ковариации» от критического времени ( $\tau$ ) для мощности шума  $\epsilon = 0.4$  на двоичном симметричном канале связи со стиранием, топологически эквивалентном АБГШ-каналу

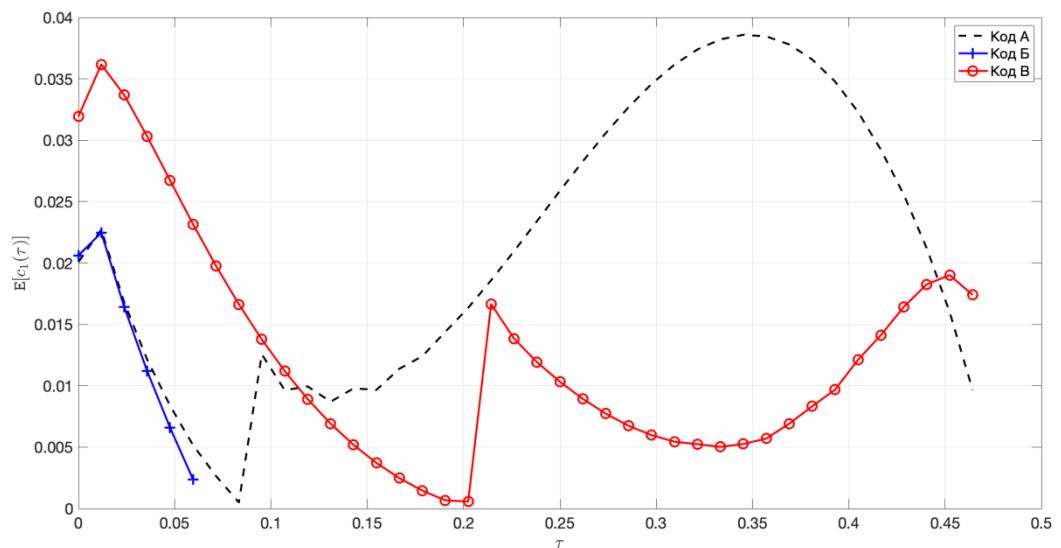


Рисунок 4.13 – Зависимость математического ожидания доли проверочных узлов веса 1 ( $E[c_1(\tau)]$ ) в методе Эволюции ковариации от критического времени ( $\tau$ ) для  $\epsilon = 0.45$  на двоичном симметричном канале связи со стиранием, топологически эквивалентном АБГШ-каналу

В результате модификации квазициклических кодов-кандидатов методом имитации отжига (шаг 8 процедуры) были получены 10 двоичных квазициклических кодов-кандидатов, структура циклов которых приведена на рис. 4.14-4.16.

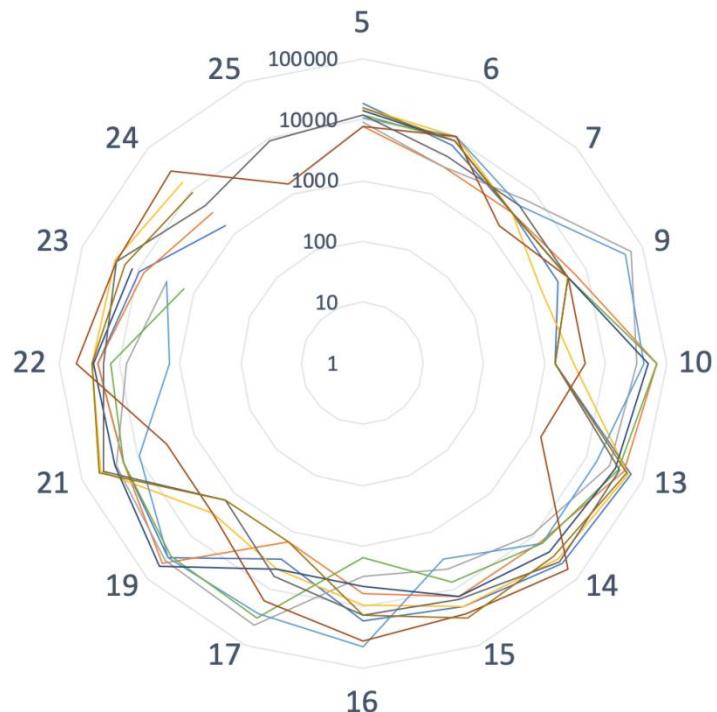


Рисунок 4.14 – Распределение значений EMD циклов длины 10 для 10 лучших кодов кандидатов

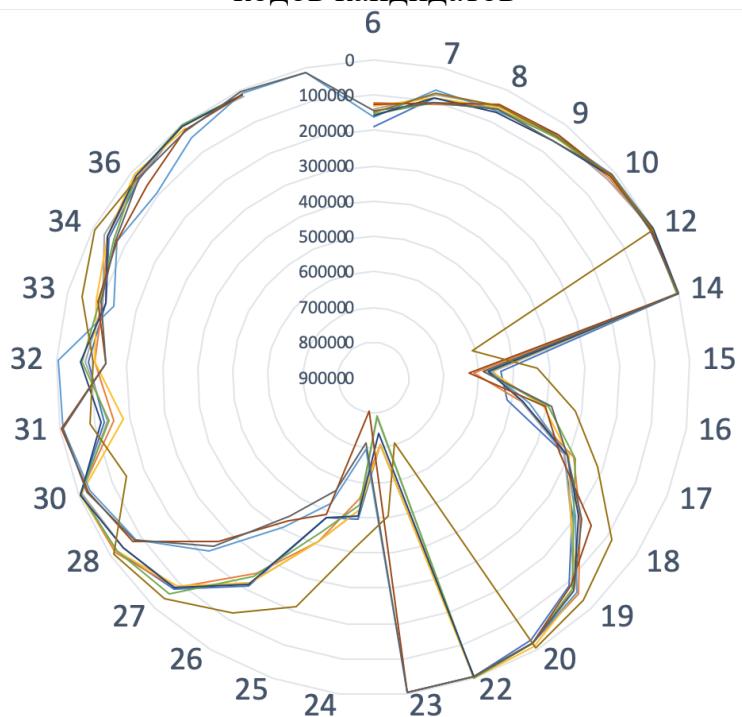


Рисунок 4.15 – Распределение значений EMD циклов длины 14 для 10 лучших кодов кандидатов

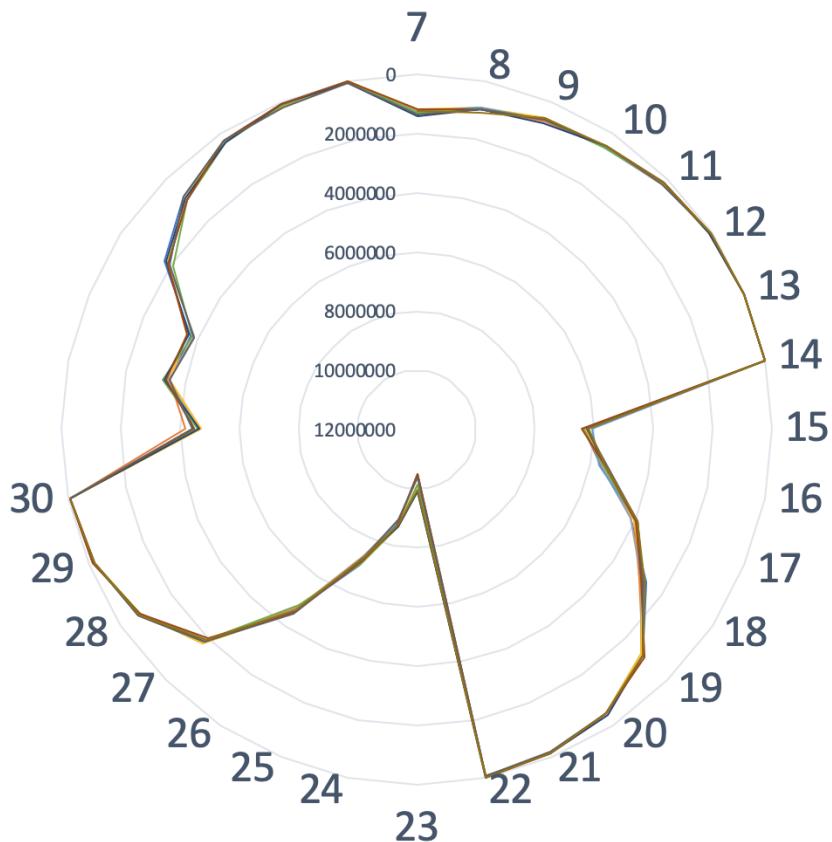


Рисунок 4.16 – Распределение значений EMD циклов длины 14 для 10 лучших кодов кандидатов

На рисунках 14-16 изображен спектр-связности (EMD Spectrum) для расширения фиксированного протографа, выбор кода осуществляется путем максимизации EMD для циклов образующих Треппинг-сеты, обуславливающих наибольшую битовую ошибку.

Из 10 полученных квазициклических кодов-кандидатов путем имитационного моделирования был выбран лучший код (КОД А,  $R=0,5$  и  $N=32000$ ), обладающий энергетическим выигрышем около 0.15 дБ по сравнению с двоичным F-LDPC-кодом (КОД Б), предложенным компанией TrellisWare для голограммической архивной памяти, Рис. 4.17, [1].

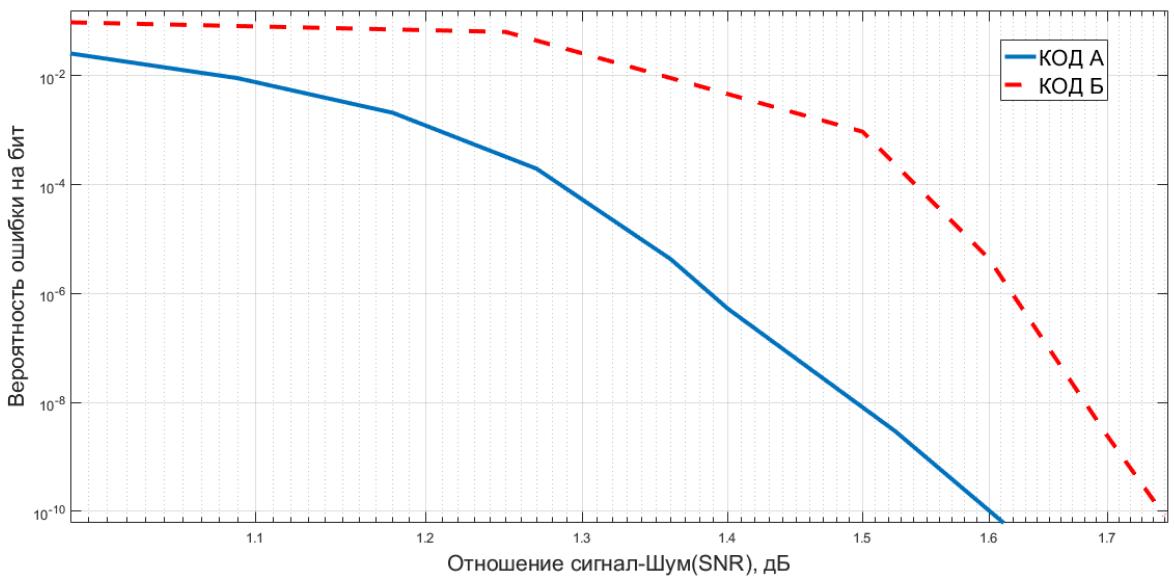


Рисунок 4.17 - Результаты моделирования двоичных квазициклических LDPC-кодов при 30 итерациях Normalize offset Min-Sum декодером с фиксированной точкой 7 бит (Layered scheduler)

С целью демонстрации эффективности предложенной процедуры построения кодов наряду с протографом кода А (базовая матрица приведена на рис. 4.10) также были расширены протографы кодов В (базовая матрица приведена на рис. 4.8) и Д (базовая матрица приведена на рис. 4.9) с использованием метода имитации отжига (шаг 8). Лучшие квазициклические коды из полученных были выбраны путем имитационного моделирования, используя 30 итераций Normalize offset Min-Sum декодера с плавающей запятой (Layered scheduler), кривые помехоустойчивости представлены на рис. 4.18.

Рис 4.18 демонстрирует компромисс между началом «водопада» и «полкой» в кривой помехоустойчивости кода. Код В благодаря наилучшему порогу итеративного декодирования ( $Eb/No = 0.8903$ ) обеспечивает наилучший водопад, однако рано выходит на «полку» из-за недостаточного кодового расстояния ( $d = 22$ ). Код Д с кодовым расстоянием 24 и порогом итеративного декодирования  $Eb/No = 1.0403$  имеет «водопад» хуже, однако увеличение кодового расстояние понижает «полку» на порядок. Код А с кодовым расстоянием 54 и порогом итеративного декодирования  $Eb/No = 1.1603$  имеет

худший из «водопадов», однако увеличение кодового расстояние значительно понижает «полку».

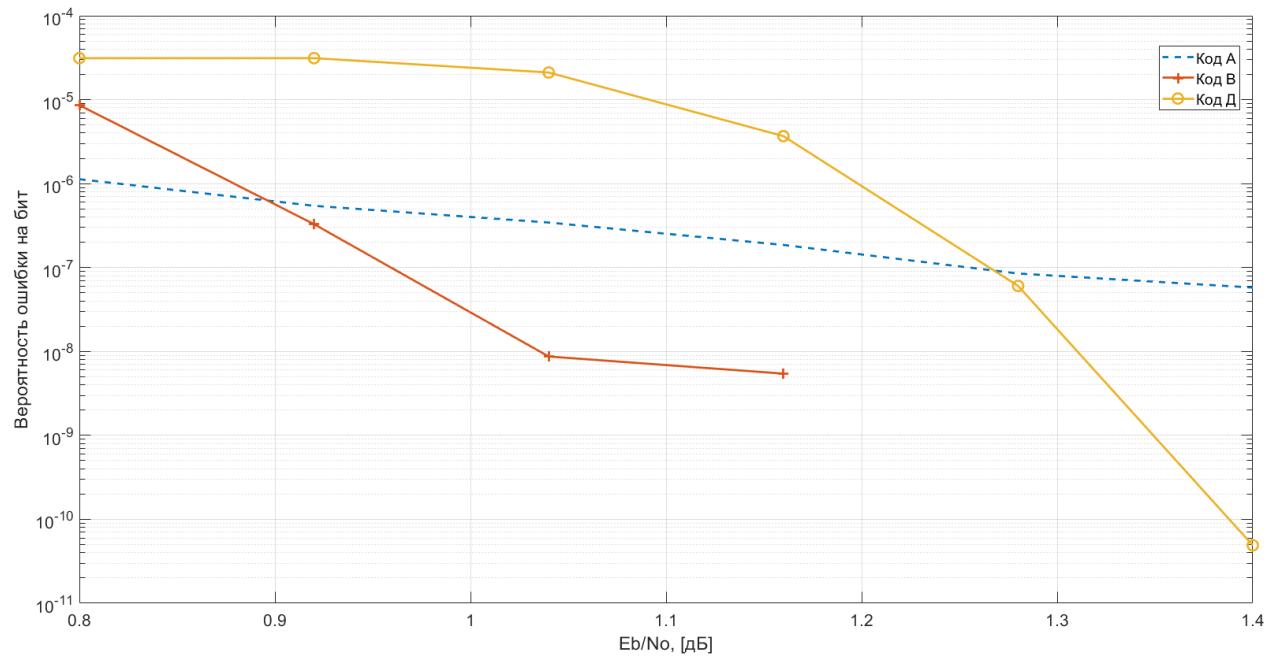


Рисунок 4.18 – Результаты моделирования двоичных квазициклических LDPC-кодов (А, В, Д) при 30 итерациях Adjusted Min-Sum декодера с плавающей запятой (Layered scheduler)

### 4.3 Выводы

Построение LDPC-кода для архивной голограммической памяти осуществлялось с использованием следующих аппаратных средств: хост-компьютера и устройства поиска кратчайшего вектора в решетке.

Устройство, реализованное на FPGA, осуществляет поиск кратчайшего вектора в решетке, который является самой вычислительно сложной частью предложенных в диссертации методов оценки минимального кодового расстояния.

Предложена аппаратно-ориентированная модификация алгоритма КФП, выполняемого устройством. Ее особенностью является одновременное (параллельное) выполнение всех мультипликативных операций (умножений), требующих наибольших временных затрат при аппаратной реализации

Разработана структурно-функциональная организация устройства поиска кратчайшего вектора в решетке, использованная при реализации представленных методов, позволяющая определять кодовое расстояние с высоким быстродействием. Выигрыш по быстродействию представленного устройства по сравнению с программной реализацией составляет примерно 40 раз.

Разработаны структурная схема устройства и функциональные схемы его основных блоков. Объем оборудования устройства для поиска кратчайшего вектора в 512-мерной подрешетке оценен в 1894860 вентиляй и 513 Кбайт оперативной памяти.

Построен квазициклический низкоплотностный код со скоростью 0.5 длины  $N=32000$  для архивной голограммической памяти, обеспечивающий энергетический выигрыш в 0.15 дБ по сравнению с кодом, используемым в настоящее время.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

### **ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ**

В диссертационной работе решена научно-техническая задача, заключающаяся в повышение эффективности исправления ошибок, возникающих в каналах записи/воспроизведения накопителей архивной голограммической памяти, за счет построения низкоплотностных кодов, обладающих лучшей помехоустойчивостью.

**В ходе решения этой задачи получены следующие основные результаты:**

1. Проведен анализ существующих методов построения низкоплотностных кодов. Показано, что главным недостатком известных методов является игнорирование комбинаторно-алгебраических свойств графа Таннера и дистантных свойств кода, в результате чего построенные коды содержат кодовые и псевдокодовые слова малого веса.

2. Предложена процедура построения квазициклических низкоплотностных кодов. Отличительными особенностями процедуры являются модификация протографа в случае «неудачного» его расширения и использование дистантных свойств кодов и их спектров связности для просеивания кодов кандидатов.

3. Создан метод расширения базовой матрицы (протографа) процедуры построения квазициклических низкоплотностных кодов. Отличительной особенностью метода является последовательное использование жадного метода запрещенных коэффициентов и метода имитации отжига. Предложенный метод позволил увеличить вероятность успешного расширения базовой матрицы на порядок и уменьшить минимальный размер циркулянта на 10%. Предложенный метод был защищен международными патентами: WO/2018/093286, EP3533145, US20190273511, CN110024294, WO/2017/105270.

4. Предложен метод адаптации по длине квазициклических двоичных низкоплотностных кодов, отличительной особенность которого является расширение множества допустимых циклических сдвигов в кольце

циклических матриц перестановок. Метод позволил улучшить спектры связности, обеспечив тем самым дополнительный энергетический выигрыш 0.1 дБ. На метод адаптации длины были получены международные патенты: WO/2018/030909, US20190268021, EP3529899.

5. Создан детерминированный и вероятностный методы оценки кодового расстояния линейных блочных кодов, опирающиеся на быстрые методы поиска кратчайшего вектора в решетке и значительно ускоряющие оценку кодового расстояния. Параллельный метод обеспечил пятикратное ускорение (для 8-поточной модели исполнения). Вероятностный метод обеспечил ускорение от 5 до 60 порядков в случае поиска верхних и нижних оценок слов малого веса с погрешностью достаточной для построения кодов с уровнем ошибки на бит от  $10^{-10}$  до  $10^{-12}$ .

6. Разработана структурно-функциональная организация устройства поиска кратчайшего вектора в решетке, реализующего представленные методы и позволяющего определять кодовое расстояние с высоким быстродействием. Выигрыш по быстродействию представленного устройства по сравнению с программной реализацией составляет примерно 40 раз. Разработаны его структурная схема и функциональные схемы его основных блоков. Объем оборудования устройства для поиска кратчайшего вектора в 512-мерной подрешетки оценен в 1894860 вентиляй и 513 Кбайт оперативной памяти.

7. Построен квазициклический низкоплотностный код со скоростью 0.5 длины N=32000 для архивной голографической памяти, обеспечивающий энергетический выигрыш в 0.15 дБ по сравнению с наилучшим кодом из открытых источников, используемым в настоящее время.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Holographic Data Storage: From Theory to Practical Systems Kevin Curtis, Lisa Dhar, Adrian Hill, William Wilson and Mark Ayres 2010 John Wiley & Sons, Ltd.
2. Brady, D. & Psaltis, Information capacity of 3-D holographic data storage D. Opt Quant Electron September 1993, Volume 25, Issue 9, pp 1597–1610
3. Mark R. Ayres; Ken Anderson; Fred Askham; Brad Sissom; Adam C. Urness Holographic data storage at 2+ Tbit/in<sup>2</sup> Proceedings Volume 9386, Practical Holography XXIX: Materials and Applications; 93860G (2015); doi: 10.1117/12.2080156
4. Richardson T. Error floor of LDPC codes // Proc. 41st Allerton Conf. Comm., Control, and Comput., Monticello, IL. - 2003. P. 1426–1435.
5. Vasić B., Chilappagari S.K., Nguyen D.V., Planjery, S.K. Trapping set ontology // Proceeding 47th Annual Allerton Conference on CCC. - 2009., P.1-7.
6. Aji, S.M.; McEliece, R.J. (Mar 2000). "The generalized distributive law". Information Theory, IEEE Transactions on. 46 (2): 325–343
7. P.O. Vontobel Algebraic Coding for Iterative Decoding. Phd Thesis Diss. ETH No. 14961, ETH Zurich, 2003
8. M. P. C. Fossorier, Shu Lin and Dojun Rhee, "Bit-error probability for maximum-likelihood decoding of linear block codes and related soft-decision decoding methods," in IEEE Transactions on Information Theory, vol. 44, no. 7, pp. 3083-3090, Nov 1998.
9. Shashi Kiran Chilappagari, Michael Chertkov, Bane V. Vasic: An Efficient Instanton Search Algorithm for LP Decoding of LDPC Codes Over the BSC. IEEE Trans. Information Theory 57(7): 4417-4426 (2011)
10. Shashi Kiran Chilappagari, Michael Chertkov, Mikhail G. Stepanov, Bane V. Vasic: Instanton-based techniques for analysis and reduction of error floors of LDPC codes. IEEE Journal on Selected Areas in Communications 27(6): 855-865 (2009)

11. A. Amraoui, A. Montanari, T. Richardson and R. Urbanke, "Finite-Length Scaling for Iteratively Decoded LDPC Ensembles," in IEEE Transactions on Information Theory, vol. 55, no. 2, pp. 473-498, Feb. 2009.
12. Jinghu Chen, R. M. Tanner, C. Jones and Yan Li, "Improved min-sum decoding algorithms for irregular LDPC codes," Proceedings. International Symposium on Information Theory, 2005. ISIT 2005., Adelaide, SA, 2005, pp. 449-453.
13. A. Amraoui, A. Montanari, R. Urbanke, "How to find good finite-length codes: from art towards science", Eur. Trans. Telecomm., vol. 18, pp. 491-508, 2007
14. I. Djurdjevic, J. Xu, K. Abdel-Ghaffar, S. Lin, "A class of low-density parity-check codes constructed based on Reed-Solomon codes with two information symbols", IEEE Commun. Lett., vol. 7, no. 7, pp. 317-319, Jul. 2003.
15. Y. Kou, S. Lin, M. P. C. Fossorier, "Low-density parity-check codes based on finite geometries: A rediscovery and new results", IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 47, no. 7, pp. 2711-2736, Nov. 2001.
16. L. Lan, Y. Y. Tai, S. Lin, B. Memari and B. Honary, "New Constructions of Quasi-Cyclic LDPC Codes Based on Special Classes of BIBDs for the AWGN and Binary Erasure Channels," in IEEE Transactions on Communications, vol. 55, no. 12, pp. 2381-2381
17. F. Zhang, X. Mao, W. Zhou, H. D. Pfister, "Girth-10 LDPC codes based on 3-D cyclic lattices", IEEE Trans. Vehic. Techn., vol. 57, no. 2, pp. 1049-1060, Mar. 2008.
18. M.E. O'Sullivan. "Algebraic construction of sparse matrices with large girth". IEEE Trans. In Theory, vo1.S2, no.2, pp.718-727, Feb. 2006.
19. Richardson, T.; Shokrollahi, A.; Urbanke, R., "Design of provably good low-density parity check codes," Information Theory, 2000. Proceedings. IEEE International Symposium on, vol., no., pp.199, 2000;
20. Richardson, T.J.; Urbanke, R.L., "The capacity of low-density parity-check codes under message-passing decoding," Information Theory, IEEE Transactions on, vol.47, no.2, pp.599,618, Feb 2001

21. J. Rosenthal and P. O. Vontobel, "Constructions of LDPC codes using Ramanujan graphs and ideas from Margulis," in Proc. 38th Allerton Conf. Communication, Control, and Computing, Monticello, IL, 2000, pp. 248–257.;
22. M. Fossorier, "Quasi-cyclic low-density parity-check codes from circulant permutation matrices," IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 50, no. 8, pp. 1788-1793, Aug. 2004;
23. R. M. Tanner, D. Sridhara, and T. E. Fuja, "A class of group-structured LDPC codes," in Proc. Int. Conf. Information Systems Technology and its Applications, July 2001.
24. Sarah Johnson Low-Density Parity-Check Codes from Combinatorial Designs. Phd thesis The University of Newcastle Callaghan. 2004. 211 page
25. Sae-Young Chung; Forney, G.D., Jr.; Richardson, T.J.; Urbanke, R., "On the design of low-density parity-check codes within 0.0045 dB of the Shannon limit," Communications Letters, IEEE, vol.5, no.2, pp.58,60, Feb 2001
26. T. J. Richardson and R. L. Urbanke, "Multi-edge type LDPC codes," in Workshop honoring Prof. Bob McEliece on his 60th birthday, California Institute of Technology, Pasadena, California, 2002. Richardson T, Urbanke R Multi-Edge Type LDPC Codes
27. J. Thorpe Low-Density Parity-Check (LDPC) Codes Constructed from Protographs IPN Progress Report 42-154 2003,
28. Fogal, S. L. and McEliece, Robert and Thorpe, Jeremy (2005) Enumerators for protograph ensembles of LDPC codes. In: 2005 IEEE International Symposium on Information Theory. IEEE, Piscataway, NJ, pp. 2156-2160.
29. S.-Y. Chung, T. J. Richardson, and R. L. Urbanke, "Analysis of sum-product decoding of low-density parity-check codes using a Gaussian approximation," IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 47, no. 2, pp. 657– 670, 2001.
30. F. Lehmann and G. M. Maggio, "Analysis of the iterative decoding of LDPC and product codes using the Gaussian approximation," IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 49, no. 11, pp. 2993–3000, 2003.

31. S.-Y. Chung, "On the construction of some capacity-approaching coding schemes," Ph.D. dissertation, MIT, Cambridge, MA, 2000 p. 189-193
32. S. Jayasooriya, M. Shirvanimoghaddam, L. Ong, G. Lechner, and S. J. Johnson, "A new density evolution approximation for LDPC and multi-edge type LDPC codes," IEEE Trans. Commun., vol. 64, no. 10, pp. 4044–4056, Oct 2016.
33. B.-Y. Chang, L. Dolecek, and D. Divsalar, "EXIT chart analysis and design of non-binary protograph-based LDPC codes," in Military Communications Conference, MILCOM 2011. IEEE, 2011, pp. 566–571.
34. G. Liva and M. Chiani, "Protograph Idpc codes design based on exit analysis," in Proc. IEEE Globecom, Washington, USA, Nov. 2007, pp. 3250-3254.
35. C. Measson, A. Montanari, T. Richardson, and R. Urbanke, "The Generalized Area Theorem and some of its Consequences," Information Theory, IEEE Transactions on, vol. 55, no. 11, pp. 4793-4821,2009.
36. G. Liva and M. Chiani, "Extrinsic information transfer analysis for protograph-based LDPC codes", IEEE Trans. Comm., 2006.
37. Stephan Ten Brink "Convergence of iterative decoding", ELECTRONICS LETTERS, vol. 35, no. 10, May 1999, pages 806 - 808
38. G. Liva and M. Chiani, "Protograph Idpc codes design based on exit analysis," in Proc. IEEE Globecom, Washington, USA, Nov. 2007, pp. 3250-3254.
39. D. Divsalar, S. Dolinar, and C. Jones. "Construction of Protograph LDPC Codes with Linear Minimum Distance." In Proc. of the IEEE Intern. Symp. on Inform. Theory (Seattle, Washington). Piscataway, NJ: IEEE, July 2006.,
40. CCSDS 131.1-O-2 Low Density Parity Check Codes For Use in Near-Earth and Deep Space Applications, 131x1o2e2s.pdf
41. Cuizhu Shi; Ramamoorthy, A., "Design and analysis of E2RC codes," in Selected Areas in Communications, IEEE Journal on , vol.27, no.6, pp.889-898
42. Smarandache R., Vontobel P.O. Quasi-Cyclic LDPC Codes: Influence of Proto- and Tanner-Graph Structure on Minimum Hamming Distance Upper Bounds// IEEE Trans. Inform. Theory.- 2012.- vol.58, #2, P.585-607.

43. Gao X., Zhang N. Determination of the shortest balanced cycles in QC-LDPC codes Matrix// JSAT. - 2011.- Vol.2, # 4. P. 15-22.
44. Vukobratovic, D.; Senk, V., "Transactions papers evaluation and design of irregular LDPC codes using ACE spectrum," Communications, IEEE Transactions on, vol.57, no.8, pp.2272, 2279, Aug. 2009
45. Wang Y., Draper S.C. and Yedidia J.S., ``Hierarchical and high-girth QC LDPC codes", IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 59, no. 7, pp. 4553-4583, July 2013.
46. Xiao-Yu Hu; Fossorier, M.P.C.; Eleftheriou, E., "On the computation of the minimum distance of low-density parity-check codes," Communications, 2004 IEEE International Conference on, vol.2, no., pp.767,771 Vol.2, 20-24 June 2004
47. M. Diouf, D. Declercq, M. Fossorier, S. Ouya and B. Vasić, "Improved PEG construction of large girth QC-LDPC codes," 2016 9th International Symposium on Turbo Codes and Iterative Information Processing (ISTC), Brest, 2016, pp. 146-150.
48. M. Karimi and A.H. Banihashemi. "On the girth of quasi-cyclic protograph LDPC codes". IEEE Trans. In Theory, vol.59, no.7, pp.4542-45S2, July 2013.
49. D. Divsalar, S. Dolinar, and C. Jones, "Low-rate LDPC codes with simple protograph structure," in International Symposium on Information Theory (ISIT), Sept. 2005, pp. 1622 –1626.
51. R1-1700831 WG1 NR AdHoc Discussion on LDPC design considerations, Qualcomm Incorporated, 3GPP TSG-RAN, 16th – 20th January 2017 Spokane, USA
52. R1-166769, Discussion on Length-Compatible Quasi-Cyclic LDPC Codes, Samsung from 3GPP TSG-RAN WG1 86, 22th – 26th August 2016, Gothenburg, Sweden
53. Andries E. Brouwer, Bounds on linear codes, in: Vera S. Pless and W. Cary Huffman (Eds.), Handbook of Coding Theory, pp. 295-461, Elsevier, 1998.
54. K.-H. Zimmermann, Integral Hecke Modules, Integral Generalized Reed-Muller Codes, and Linear Codes, Tech. Rep. 3-96, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1996.;

55. A. Betten, H. Fripertinger, A. Kerber, A. Wassermann, K.-H. Zimmermann, Codierungstheorie: Konstruktionen und Anwendungen linearer Codes, Berlin: Springer, 1998.
56. Grassl, Markus. «Bounds on the minimum distance of linear codes and quantum codes. «Online available at <http://www.codetables.de>. Accessed on 2018-01-24.
57. Grassl M. Searching for linear codes with large minimum distance. In: Bosma W., Cannon J. (eds) Discovering Mathematics with Magma. Algorithms and Computation in Mathematics, vol 19. Springer, Berlin, Heidelberg, 2006, pp 287-313
58. K.-H. Zimmermann, Integral Hecke Modules, Integral Generalized Reed-Muller Codes, and Linear Codes, Tech. Rep. 3-96, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1996.
59. D. J. MacKay and M. C. Davey, “Evaluation of Gallager codes for short block length and high rate applications,” Proc. of the IMA Workshop on Codes, System and Graphical Models, 1999. Springer-Verlag 2001, pp. 113–130
60. R. Smarandache and P. O. Vontobel, “Quasi-cyclic LDPC codes: Influence of proto- and Tanner-graph structure on minimum Hamming distance upper bounds,” IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 58, no. 2, pp. 585–607, Feb. 2012
61. Brian K. Butler: Minimum Distances of the QC-LDPC Codes in IEEE 802 Communication Standards. CoRR abs/1602.02831 (2016); <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/53434-matrix-permanent-using-recursion>
62. B. K. Butler and P. H. Siegel, “Bounds on the minimum distance of punctured quasi-cyclic LDPC codes,” IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 59, no. 7, pp. 4584–4597, Jul. 2013
63. Tanner, R.M. (1981) A Recursive Approach to Low Complexity Codes. IEEE Transactions on Information Theory, 27, 533-547
64. Tanner, R.M., "Minimum-distance bounds by graph analysis," Information Theory, IEEE Transactions on, vol.47 (2), pp.808-821, Feb 2001

65. Tom Høholdt, Heeralal Janwa Eigenvalues and expansion of bipartite graphs Designs Codes and Cryptography. 12/2012; 65(3), pp. 259-273; 66.
66. Tom Høholdt, Heeralal Janwa Optimal Bipartite Ramanujan Graphs from Balanced Incomplete Block Designs: Their Characterizations and Applications to Expander/LDPC Codes. Proceeding AAECC-18 '09 Proceedings of the 18th International Symposium on Applied Algebra, Algebraic Algorithms and Error-Correcting Codes P. 53-64
67. Min-Ho Shin; Joon-Sung Kim; Hong-Yeop Song, "Generalization of Tanner's minimum distance bounds for LDPC codes," Communications Letters, IEEE, vol.9, no.3, pp.240,242, March 2005
68. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учеб. для вузов. — 10-е изд., исп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 304 с. - ISBN 5-9221-0304-0.
69. Golub G.H., van Loan C.F. Matrix Computations. The John Hopkins University Press, third edition, 1996. 728 p.
70. Longley J.W. Modified Gram-Schmidt process vs. classical Gram-Schmidt // Communications in Statistics - Simulation and Computation. 1981. № 10(5). P. 517-527
71. Hingham N.J. Accuracy and Stability of Numerical Algorithms Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002, 711 p.
72. Gudula Runger and Michael Schwind Comparison of Different Parallel Modified Gram-Schmidt Algorithms J.C. Cunha and P.D. Medeiros (Eds.): Euro-Par 2005, LNCS 3648, pp. 826–836, 2005 Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2005
73. Milde B., Schneider M. Parallel Implementation of Classical Gram-Schmidt Orthogonalization on CUDA Graphics Cards Technische Universität Darmstadt Fachbereich Informatik Kryptographie und Computer algebra, 2009, 4 p. [http://www.cdc.informatik.tu-darmstadt.de/~mischnei/CUDA\\_GS\\_2009\\_12\\_22.pdf](http://www.cdc.informatik.tu-darmstadt.de/~mischnei/CUDA_GS_2009_12_22.pdf)
74. M. Gentleman. Least Squares Computations by Givens Transformations Without Square Roots. J. Inst. Math. Appl., №12, 1973. pp. 329-336

75. Götze J., Schwiegelshohn U. A square root and division free givens rotation for solving least squares problems on systolic arrays Journal SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing archive Volume 12 Issue 4, July 1991 Pages 800 – 807
76. Householder, A. S. (1958). "Unitary Triangularization of a Nonsymmetric Matrix". *Journal of the ACM* 5 (4): 339–342. DOI:10.1145/320941.320947. MR 0111128.
77. Bischof, C. H., Van Loan C. The WY representation for products of Householder matrices. F. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, Vol. 8, №1, 1987, pp 2-13
78. C. P. Schnorr and H. H. Hörner. Attacking the Chor-Rivest Cryptosystem by Improved Lattice Reduction. Advances in Cryptology - EUROCRYPT '95. LNCS Volume 921, 1995, pp 1-12.
79. Schnorr, C.P., Euchner, M.: Lattice basis reduction: Improved practical algorithms and solving subset sum problems. *Mathematical Programming* 66, 181–199 (1994)
80. Goldstein D., Mayer A. On the equidistribution of Hecke points. *Forum Mathematicum.*, 2003, Vol. 15, № 2, pp. 165–189.
81. Yuanmi Chen and Phong Nguyen. BKZ 2.0: better lattice security estimates. *Advances in Cryptology – ASIACRYPT 2011*. Volume 7073 of the series *Lecture Notes in Computer Science* pp. 1-20
82. Betten A., Braun M., Fripertinger H. Error-Correcting Linear Codes Classification by Isometry and Applications. Berlin: Springer-Verlag, 2006. – 818 p., ctp. 594-596
83. Block Reduced Lattice Bases and Successive Minima/C. P. Schnorr// Combinatorics, Probability and Computing. – 1994. –Vol. 3. – №4. –p. 507-522.
84. Ivanova V.S. Lattice Basis Reduction in Infinity Norm. Darmstadt: Techn. Univer. Darmstadt. –2010. – 31 p.
85. Database of ML Simulation Results. Kaiserslautern Univer. /Helmling M., Scholl S. URL: <http://www.uni-kl.de/channel-codes/> –27.10.201031

86. Усатюк В.С. Методы геометрии чисел. Архив ‘measure code distance.rar’ Режим доступа: <http://www.lcrypto.com/lsov> – (Дата обращения: 27.10.2015).32
87. C. Schnorr. Lattice Reduction by Random Sampling and Birthday Methods. STACS, volume 2607 of Lecture Notes in Computer Science, Springer, 2003, pp 145-156.
88. Johannes Buchmann, Christoph Ludwig Practical lattice basis sampling reduction. In ANTS, volume 4076 of LNCS, pages 222–237. Springer, 2006.
89. Kitaoka, Yoshiyuki (1993). Arithmetic of quadratic forms // Cambridge Tracts in Mathematics. 106. Cambridge University Press, 269 pages
90. Kannan R. Improved Algorithms for Integer Programming and Related Lattice Problems // In Proceedings of the Fifteenth Annual ACM Symposium on Theory of Computing, USA. ACM, 1983. - pp. 193-206.
91. Fincke U., Pohst M. Improved Methods for Calculating Vectors of Short Length in a Lattice, Including a Complexity Analysis // Mathematics of computation, 1985. - № 170(44). - pp. 463-471.
92. Jon Feldman. Decoding Error-Correcting Codes via Linear Programming. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2003
93. Vontobel, “Graph-covers and iterative decoding of finite length codes,” in Proc. IEEE Int. Symp. Turbo Codes Appl., 2003, pp.75–82.
94. S. Myung K. Yang "Extension of quasi-cyclic LDPC codes by lifting" Proc. IEEE Inter. Symp. Information Theory 2005 pp. 2305-2309, 2005.

#### ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В рецензируемых научных журналах и изданиях, рекомендуемых ВАК:

95. Кузьмин, О.В. Программный комплекс приведения базиса целочисленных решеток. [Текст] /О.В. Кузьмин, В.С. Усатюк//Программные продукты и системы. – 2012. – №4(100). – с. 180-183.

96. Кузьмин, О.В. Параллельные алгоритмы вычисления локальных минимумов целочисленных решеток /О.В. Кузьмин, В.С. Усатюк//Программные продукты и системы. – 2015. – №1(109). – с. 55-62.

97. Усатюк, В.С. Определение кодового расстояния недвоичного LDPC-кода блочным методом Коркина-Золотарева. [Текст] //Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Управление, вычислительная техника, информатика. Медицинское приборостроение. - 2015. - № 3 (16). - с. 76-85.

98. Усатюк, В.С. Построение квазициклических недвоичных низкоплотностных кодов на основе совместной оценки их дистантных свойств и спектров связности. [Текст] / В.С. Усатюк, С. И. Егоров //Телекоммуникации. – 2016. - №8.с 32-40

99. Усатюк, В.С. Устройство для оценки кодового расстояния линейного блочного кода методом геометрии чисел. [Текст]/ В.С. Усатюк, С. И. Егоров //Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Управление, вычислительная техника, информатика. Медицинское приборостроение. - 2017. - № 4 (25). - с. 24-33.

Публикации автора в научных журналах и изданиях, индексируемых в SCOPUS:

100. Usatyuk V., Egorov S., "Generalization of floor lifting for QC-LDPC codes" 2017 IEEE East-West Design & Test Symposium (EWCTS), Novi Sad, 2017, pp.1-6.

101. Usatyuk V., I. Vorobyev, "Simulated Annealing Method for Construction of High-Girth QC-LDPC Codes," 2018 41st International Conference on Telecommunications and Signal Processing (TSP), Athens, Greece, 2018, pp. 1-5.

102. I. Vorobyev, N. Polyanskii, G. Svistunov, S. Egorov and V. Usatyuk, "Generalization of Floor Lifting for QC-LDPC Codes: Theoretical Properties and Applications," 2018 IEEE East-West Design & Test Symposium (EWCTS), Kazan, 2018, pp. 1-6

103. Usatyuk V., I. Vorobyev, "Construction of High Performance Block and Convolutional Multi-Edge Type QC-LDPC codes," 2019 42nd International Conference on Telecommunications and Signal Processing (TSP), Budapest, Hungary, 2019, pp. 158-163,

104. Usatyuk V., S. Egorov, G. Svistunov, "Construction of Length and Rate Adaptive MET QC-LDPC Codes by Cyclic Group Decomposition," 2019 IEEE East-West Design & Test Symposium (EWCTS), Batumi, Georgia, 2019, pp. 1-5

105. G. Svistunov, Usatyuk V., "Interleaved Cyclic Group Decomposition Length Adaptive MET QC-LDPC Codes," 2019 IEEE International Black Sea Conference on Communications and Networking (BlackSeaCom), Sochi, Russia, 2019, pp. 1-3

106. S. German, U. Vasiliy and E. Sergey, "Protograph Sieving Method for Construction Moderate Length Multi-Edge Type QC-LDPC Codes," 2019 IEEE East-West Design & Test Symposium (EWCTS), Batumi, Georgia, 2019, pp. 1-4

107. Usatyuk V., and E. Sergey, "Hyper Neural Network as the Diffeomorphic Domain for Short Code Soft Decision Beyond Belief Propagation Decoding Problem," 2020 IEEE East-West Design & Test Symposium (EWCTS), Varna, Bulgaria, 2020, pp. 1-6

108. Usatyuk V. "Wireless Channels Topology Invariant as Mathematical Foundation of Neural Network Channel Estimation Transfer Learning Properties," 2020 43rd International Conference on Telecommunications and Signal Processing (TSP), Milan, Italy, 2020, pp. 105-111

#### Патенты на изобретения:

109. Usatyuk, Vasily Stanislavovich; Gaev, Vladimir Anatolyevich; Shatilov, Sergey Valeryevich; Khodunin, Alexander Viktorovich DETERMINATION OF A QUASI-CYCLIC LOW-DENSITY PARITY-CHECK, QC-LDPC, CODE FOR CHANNEL CODING IN DIGITAL COMMUNICATION SYSTEMS. Номер патентной заявки No.: WO2017105270. Дата публикации: 22.06.2017, Дата подачи заявки: 15.12.2015.

110. Usatyuk, Vasily Stanislavovich; Polianski, Nikita Andreevich CONSTRUCTION OF QC-LDPC CODES FOR A HYBRID AUTOMATIC REPEAT REQUEST (HARQ) SCHEME. Номер патентной заявки No.: WO2018030909. Дата публикации: 15.02.2018, Дата подачи заявки: 11.08.2016.

111. Usatyuk, Vasily Stanislavovich GENERATION OF SPATIALLY-COUPLED QUASI-CYCLIC LDPC CODES. Номер патентной заявки No.: WO2018093286. Дата публикации: 21.11.2016, Дата подачи заявки: 24.05.2018.

112. Usatyuk, Vasily Stanislavovich; Polianski, Nikita Andreevich; Vorovyyev, Ilya Viktorovich DEVICES AND METHODS FOR GENERATING A LOW DENSITY PARITY CHECK CODE FOR A INCREMENTAL REDUNDANCY HARQ COMMUNICATION APPARATUS. Номер патентной заявки No.: WO2018111129. Дата публикации: 13.12.2016, Дата подачи заявки: 21.06.2018.

113. Vasily Stanislavovich USATYUK; Nikita Andreevich POLIANSKII; Ilya Viktorovich VOROBYEV, Vladimir Anatolyevich GAEV; German Viktorovich SVISTUNOV; Mikhail Sergeevich KAMENEV, Yulia Borisovna KAMENEVA GENERALIZED LOW-DENSITY PARITY CHECK CODES IN DIGITAL COMMUNICATION SYSTEM. Номер патентной заявки No.: US20200220556. Дата публикации: 09.07.2020. Дата подачи заявки 09.01.2020

114. Vasily Stanislavovich USATYUK; Nikita Andreevich POLIANSKII; Ilya Viktorovich VOROBYEV; Vladimir Anatolyevich GAEV; German Viktorovich SVISTUNOV; Mikhail Sergeevich KAMENEV; Yulia Borisovna KAMENEVA GENERALIZED LOW-DENSITY PARITY CHECK CODES (GLDPC). Номер патентной заявки No.: CN111279618. Дата публикации: 12.06.2020. Дата подачи заявки 10.07.2017

115. Vasily Stanislavovich USATYUK; Nikita Andreevich POLIANSKII; Ilya Viktorovich VOROBYEV; Vladimir Anatolyevich GAEV; German Viktorovich SVISTUNOV; Mikhail Sergeevich KAMENEV; Yulia Borisovna KAMENEVA GENERALIZED LOW-DENSITY PARITY CHECK CODES (GLDPC). Номер патентной заявки No.: CN111164897. Дата публикации: 15.05.2020. Дата подачи заявки 13.07.2017

116. Vasily Stanislavovich USATYUK; Nikita Andreevich POLIANSKII; Ilya Viktorovich VOROBYEV; Vladimir Anatolyevich GAEV; German Viktorovich SVISTUNOV; Mikhail Sergeevich KAMENEV; Yulia Borisovna KAMENEVA GENERALIZED LOW-DENSITY PARITY CHECK CODES (GLDPC). Номер патентной заявки No.: US20200153457. Дата публикации: 14.05.2020. Дата подачи заявки 13.01.2020

117. Vasily Stanislavovich USATYUK; Nikita Andreevich POLIANSKII; Ilya Viktorovich VOROBYEV; Vladimir Anatolyevich GAEV; German Viktorovich SVISTUNOV; Mikhail Sergeevich KAMENEV; Yulia Borisovna KAMENEVA GENERALIZED LOW-DENSITY PARITY CHECK CODES (GLDPC). Номер патентной заявки No.: EP3649737. Дата публикации: 13.05.2020, Дата подачи заявки: 10.07.2017.

118. USATYUK, Vasily Stanislavovich; VOROBYEV, Ilya Viktorovich; GAEV, Vladimir Anatolyevich; SVISTUNOV, German Viktorovich; KAMENEV, Mikhail Sergeevich; KAMENEVA, Yulia Borisovna GENERALIZED LOW-DENSITY PARITY CHECK CODES (GLDPC). Номер патентной заявки No.: IN202037000519. Дата публикации: 13.03.2020, Дата подачи заявки: 06.01.2020.

119. USATYUK, Vasily Stanislavovich; VOROBYEV, Ilya Viktorovich; GAEV, Vladimir Anatolyevich; SVISTUNOV, German Viktorovich; KAMENEV, Mikhail Sergeevich; KAMENEVA, Yulia Borisovna GENERALIZED LOW-DENSITY PARITY CHECK CODES (GLDPC). Номер патентной заявки No.: IN202037002671. Дата публикации: 28.02.2020, Дата подачи заявки: 21.01.2020.

120. Vasily Stanislavovich USATYUK; Nikita Andreevich POLIANSKII; Ilya Viktorovich VOROBYEV DEVICES AND METHODS FOR GENERATING A LOW DENSITY PARITY CHECK CODE FOR A INCREMENTAL REDUNDANCY HARQ COMMUNICATION APPARATUS. Номер патентной заявки No.: US20190349003. Дата публикации: 14.11.2019, Дата подачи заявки: 13.06.2019.

121. USATYUK VASILY STANISLAVOVICH; POLIANSKII NIKITA ANDREEVICH; VOROBYEV ILYA VIKTOROVICH DEVICES AND METHODS

FOR GENERATING A LOW DENSITY PARITY CHECK CODE FOR A INCREMENTAL REDUNDANCY HARQ COMMUNICATION APPARATUS. Номер патентной заявки No.: EP3539234. Дата публикации: 18.09.2019, Дата подачи заявки: 13.12.2016.

122. Vasily Stanislavovich USATYUK GENERATION OF SPATIALLY-COUPLED QUASI-CYCLIC LDPC CODES. Номер патентной заявки No.: US20190273511. Дата публикации: 18.09.2019, Дата подачи заявки: 13.12.2016.

123. Vasily Stanislavovich USATYUK GENERATION OF SPATIALLY-COUPLED QUASI-CYCLIC LDPC CODES. Номер патентной заявки No.: EP3533145. Дата публикации: 04.09.2019, Дата подачи заявки: 21.11.2016.

124. USATYUK, Vasily Stanislavovich; ILYA Viktorovich VOROBYEV; Nikita Andreevich POLIANSKII; German Viktorovich SVISTUNOV METHOD AND APPARATUS FOR ENCODING AND DECODING OF VARIABLE LENGTH QUASI-CYCLIC LOW-DENSITY PARITY-CHECK, QC-LDPC, CODES. Номер патентной заявки No.: US20190268021. Дата публикации: 29.08.2019, Дата подачи заявки: 14.05.2019.

125. USATYUK VASILY STANISLAVOVICH; VOROBYEV ILYA VIKTOROVICH; POLIANSKII NIKITA ANDREEVICH; SVISTUNOV GERMAN VIKTOROVICH METHOD AND APPARATUS FOR ENCODING AND DECODING OF VARIABLE LENGTH QUASI-CYCLIC LOW-DENSITY PARITY-CHECK, QC-LDPC, CODES. Номер патентной заявки No.: EP3529899. Дата публикации: 29.08.2019, Дата подачи заявки: 14.05.2019.

126. USATYUK, Vasily Stanislavovich; POLIANSKII, Nikita Andreevich; SVISTUNOV German Viktorovich METHOD AND APPARATUS FOR ENCODING AND DECODING OF VARIABLE LENGTH QUASI-CYCLIC LOW-DENSITY PARITY-CHECK, QC-LDPC, CODES. Номер патентной заявки No.: IN201917019480. Дата публикации: 09.08.2019, Дата подачи заявки: 16.05.2019.

127. USATYUK, Vasily Stanislavovich GENERATION OF SPATIALLY-COUPLED QUASI-CYCLIC LDPC CODES. Номер патентной заявки No.: IN201937021290. Дата публикации: 19.07.2019, Дата подачи заявки: 29.05.2019.

128. USATYUK, Vasily Stanislavovich; VOROBYEV, Ilya Viktorovich DEVICES AND METHODS FOR GENERATING A LOW DENSITY PARITY CHECK CODE FOR A INCREMENTAL REDUNDANCY HARQ COMMUNICATION APPARATUS. Номер патентной заявки No.: IN201937022330. Дата публикации: 19.07.2019, Дата подачи заявки: 05.06.2019.

129. USATYUK VASILY STANISLAVOVICH; VOROBYEV ILYA VIKTOROVICH; POLIANSKII NIKITA ANDREEVICH; SVISTUNOV GERMAN VIKTOROVICH METHOD AND APPARATUS FOR ENCODING AND DECODING OF VARIABLE LENGTH QUASI-CYCLIC LOW-DENSITY PARITY-CHECK, QC-LDPC, CODES. Номер патентной заявки No.: CN110024295. Дата публикации: 16.07.2019, Дата подачи заявки: 14.11.2016.

130. USATYUK VASILY STANISLAVOVICH GENERATION OF SPATIALLY-COUPLED QUASI-CYCLIC LDPC CODES. Номер патентной заявки No.: CN110024294. Дата публикации: 16.07.2019, Дата подачи заявки: 21.11.2016.

131. USATYUK, Vasily Stanislavovich; POLIANSKII, Nikita Andreevich; VOROBYEV, Ilya Viktorovich; GAEV, Vladimir Anatolyevich; SVISTUNOV, German Viktorovich; KAMENEV, Mikhail Sergeevich; KAMENEVA, Yulia Borisovna GENERALIZED LOW-DENSITY PARITY CHECK CODES (GLDPC). Номер патентной заявки No.: WO2019013662. Дата публикации: 17.01.2019, Дата подачи заявки: 10.07.2017.

132. USATYUK, Vasily Stanislavovich; POLIANSKII, Nikita Andreevich; VOROBYEV, Ilya Viktorovich; GAEV, Vladimir Anatolyevich; SVISTUNOV, German Viktorovich; KAMENEV, Mikhail Sergeevich; KAMENEVA, Yulia Borisovna GENERALIZED LOW-DENSITY PARITY CHECK CODES (GLDPC). Номер патентной заявки No.: WO2019013663. Дата публикации: 13.07.2017, Дата подачи заявки: 17.01.2019.

133. USATYUK, Vasily Stanislavovich; VOROBYEV, Ilya Viktorovich; POLIANSKII, Nikita Andreevich; SVISTUNOV, German Viktorovich; METHOD AND APPARATUS FOR ENCODING AND DECODING OF VARIABLE

LENGTH QUASI-CYCLIC LOW-DENSITY PARITY-CHECK, QC-LDPC, CODES. Номер патентной заявки No.: WO2018088923. Дата публикации: 14.11.2016, Дата подачи заявки: 17.05.2018.

134. USATYUK, Vasily Stanislavovich; GAEV, Vladimir Anatolyevich GENERALIZED QUASI-CYCLIC LDPC CONVOLUTIONAL CODES FOR DIGITAL COMMUNICATION SYSTEMS. Номер патентной заявки No.: WO2017105291. Дата публикации: 22.06.2017, Дата подачи заявки: 16.08.2016.

135. USATYUK VASILY STANISLAVOVICH; POLIANSKII NIKITA ANDREEVICH; VOROBYEV ILYA VIKTOROVICH; GAEV VLADIMIR ANATOLYEVICH; SVISTUNOV GERMAN VIKTOROVICH; KAMENEV MIKHAIL SERGEEVICH; KAMENEVA YULIA BORISOVNA GENERALIZED LOW-DENSITY PARITY CHECK CODES (GLDPC). Номер патентной заявки No.: EP3652863. Дата публикации: 20.05.2020, Дата подачи заявки: 13.07.2017.

В других изданиях:

136. Усатюк, В.С. Оценка эффективности библиотек вычислений произвольной точности. [Текст] / М.У. Изимов, Усатюк В.С. Современные проблемы естествознания образования и информатики: Материалы VII(I) Межвузовской научной конференции. Братск, 3 декабря 2008. – Братск: ГОУ ВПО «БрГУ», 2008. с. 97-100

137. Усатюк, В.С. Задачи теории решеток и их взаимные редукции. [Текст] / Усатюк В.С. // Молодежь. Наука. Инновация (Youth. Science. Innovation): Труды II международной научно-практической Интернет-конференции /Под ред. Г.К. Сафаралиева, А.Н. Андреева, В.А. Казакова – Пенза: Издательство Пензенского филиала РГУИТП, 2010-2011. – с. 362-367

138. Усатюк, В.С. Реализация параллельных алгоритмов ортогонализации в задаче поиска кратчайшего базиса целочисленной решетки. [Текст] / Усатюк В.С. // Прикладная дискретная математика. Приложение. – 2012. – № 5. – с. 120-122.

139. Усатюк, В.С. Обзор методов приведения базиса решеток и некоторых их приложений. [Текст] / Усатюк В.С. // Наука. Технологии. Инновации//Материалы всероссийской научной конференции молодых ученых в 7-и частях. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2012. Часть 2 – с. 147-151

140. Усатюк, В.С. Экспериментальная оценка точности представления плавающих чисел и времени выполнения блочного метода Коркина-Золотарева для приведения базиса целочисленных решеток сложных по Гольдштейну-Майеру. [Текст] / Усатюк В.С. //Наука. Технологии. Инновации//Материалы всероссийской научной конференции молодых ученых в 7-и частях. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2012. Часть 2 – с. 151-155

141. Усатюк, В.С. Реализация параллельного алгоритма поиска кратчайшего вектора в блочном методе Коркина–Золотарева [Текст] / Усатюк В.С. // Прикладная дискретная математика. Приложение. –2013. – № 6. – с. 130-131.

142. Усатюк, В.С. Приложение блочного метода Коркина-Золотарева для демодуляции сигналов MIMO. [Текст] / Усатюк В.С. // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2015. - №5. Том 22. – с. 600-602

143. Усатюк, В.С. Построение двоичных низкоплотностных квазициклических кодов методом назначения случайных разрешенных сдвигов циркулянта. [Текст] / Усатюк В.С. // Проблемы передачи в сетях и системах телекоммуникаций// Материалы 18-й Международной научно-технической конференции. 2015 Рязань, 26-28 октября 2015 г. Москва-Научно-техническое издательство "Горячая линия-Телеком", с. 35-39

144. Усатюк, В.С. Определение кодового расстояния линейного блочного кода методом Коркина-Золотарева. [Текст] / Усатюк В.С. // II International Conference «Engineering & Telecommunication En&T 2015». November 18-19, 2015. Book of Abstracts. – Moscow – Dolgoprudny: MIPT, 2015. p. 51-53

145. Усатюк, В.С. Вероятностный метод определения кодового расстояния линейного блочного кода. [Текст] / Усатюк В.С. // III International

Conference «Engineering & Telecommunication En&T 2016». November 29-30, 2016. Book of Abstracts. – Moscow – Dolgoprudny: MIPT, 2016. p. 43-46

146. Усатюк, В.С. Вероятностный метод определения кодового расстояния линейного блочного двоичного и тернарного кодов [Текст] / Усатюк В.С. // Новые информационные технологии и системы. Сборник научных статей XIII Международной научно-технической конференции. 2016 Пензенский государственный университет. - Пенза, 2016. - с. 171-173.

147. Усатюк, В.С. Length adaption methods for QC-LDPC codes. Конференция Оптико-электронные приборы и устройства в системах распознавания образов, обработки изображений и символьной информации. Распознавание – 2017: сб. материалов XIII Междунар. науч.-техн. конф. 2017. Юго-Западный государственный университет (Курск) – с. 27-29.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Пример протографа построенного МЕТ QC LDPC-кода

Протограф предложенного кода со скоростью  $RATE = \frac{VN - CN}{VN - PN} = 0.5$  (VN - 42 столбца/символа, CN - 22 строки/проверки, PN - 2 последних символа выколоты для улучшения порога cut-set condition в машинном обучение или Multi-Edge Type LDPC Code в помехоустойчивом кодирование), 40 итераций метода распространения доверия (layered планировщик) порог 0.55 dB на уровне  $10^{-12}$ .

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Акты о внедрении предложенных методов построения  
LDPC-кодов

Certificate

Results of Usatyuk Vasily Stanislavovich PhD theses research:

1. Combinatorial optimization of code (estimation of Hamming distance, enumerating of weight Spectrum) and graph ensembles (cycles topology, Extrinsic Message Degree – EMD, Approximate Cycle EMD – ACE);
2. Statistical physics optimization of code and graph ensembles based on protograph extrinsic information transfer chart – PEXIT chart, Density evolution and Covariance evolutional methods

have application in Huawei's LDPC code construction.

Director,

Ph.D

2016-10-26

Подпись г-на Ли Кэхуа  
директора  
КОНЦА БЕРНА  
МЕНЕДЖЕР ПО ПЕРСОНАЛУ  
ПИВОВАРОВ А. С.



### ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Расширенные протографы

Пример с определением “Трэпинн-Сетов”. Код 4 на 36 с циркулянтом 278

236	176	256	107	239	125	154	153	199	210	168	260	277	68	12	15	101	108	191	246	117	157	134	62	173	73	171	197	184	148	81	44	56	32	203	268
277	237	177	257	108	240	126	155	154	200	211	169	261	278	69	13	16	102	109	192	247	118	158	135	63	174	74	172	198	185	149	82	45	57	33	204
230	278	238	178	258	109	241	127	156	155	201	212	170	262	279	70	14	17	103	110	193	248	119	159	136	64	175	75	173	199	186	150	83	46	58	34
34	231	279	239	179	259	110	242	128	157	156	202	213	171	263	280	71	15	18	104	111	194	249	120	160	137	65	176	76	174	200	187	151	84	47	59

42 на 7 кодовое расстояние 4 (верхняя оценка протографа 11) matrix21.txt

1	-1	14	20	2	-1	-1	13	8	-1	-1	12	16	17	16	17	-1	7	-1	-1	-1	6	-1	-1	-1	-1	-1	16	15	10	25	-1	-1	9	-1	-1	-1	6	0			
-1	-1	-1	-1	0	0	-1	-1	10	6	2	-1	-1	-1	-1	-1	14	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	16	14	1	-1	-1	-1	10	14	-1	-1	-1	28	26	5	12	7	
29	-1	15	12	-1	-1	-1	20	-1	29	-1	-1	15	-1	26	12	-1	15	-1	6	28	14	-1	27	-1	14	28	-1	4	-1	23	-1	11	2	-1	-1	26	-1	-1	-1	25	17
18	27	-1	0	10	-1	7	18	-1	-1	-1	2	-1	20	-1	-1	7	27	18	1	-1	7	1	21	0	-1	-1	27	-1	-1	-1	16	-1	8	23	-1	-1	-1	-1	4	-1	
-1	23	2	-1	-1	10	22	1	11	-1	1	26	1	10	-1	-1	-1	24	11	16	-1	-1	12	2	13	6	-1	26	24	-1	-1	-1	-1	5	7	5	29	-1	-1	-1	20	
-1	14	-1	-1	-1	18	22	-1	27	-1	10	-1	-1	-1	2	27	14	-1	-1	-1	26	18	22	-1	14	-1	-1	24	-1	7	13	-1	-1	-1	13	-1	-1	5	6	-1		
-1	-1	-1	-1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	8	-1	28	-1	29	10					

42 на 7 кодовое расстояние 5 (верхняя оценка протографа 11) matrix20.txt

8	-1	17	11	8	-1	-1	2	1	-1	-1	24	4	0	7	24	-1	0	-1	-1	-1	3	-1	-1	-1	-1	-1	11	23	2	22	-1	-1	-1	-1	-1	3	7				
-1	-1	-1	-1	2	0	-1	-1	-1	6	10	28	-1	-1	-1	-1	10	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	8	20	23	-1	-1	-1	15	10	-1	-1	-1	19	25	8	0	16	
13	-1	27	27	-1	-1	-1	1	-1	14	-1	-1	3	-1	12	3	-1	11	-1	25	20	21	-1	19	-1	1	27	-1	17	-1	4	-1	4	2	-1	-1	25	-1	-1	-1	6	1
0	10	-1	2	7	-1	1	20	-1	-1	-1	7	-1	12	-1	-1	20	14	4	2	-1	7	26	12	29	-1	-1	1	-1	-1	-1	17	-1	3	14	-1	-1	-1	-1	14	-1	
-1	25	28	-1	-1	10	9	3	1	-1	15	2	18	0	-1	-1	-1	3	25	11	-1	-1	18	3	26	2	-1	0	11	-1	-1	-1	-1	19	21	11	0	-1	-1	-1	7	
-1	3	-1	-1	-1	5	22	-1	7	-1	17	-1	-1	-1	12	17	12	-1	-1	-1	7	10	26	-1	24	-1	-1	2	-1	21	8	-1	-1	-1	-1	5	-1	-1	-1	19	19	-1
-1	-1	-1	-1	26	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	7	-1	26	-1	10	23					

42 на 7 кодовое расстояние 6 (верхняя оценка протографа 11) matrix26.txt

18	-1	15	11	11	-1	-1	27	0	-1	-1	14	9	12	26	13	-1	10	-1	-1	-1	11	-1	-1	-1	-1	26	22	17	0	-1	-1	20	-1	-1	-1	-1	20	3			
-1	-1	-1	-1	2	3	-1	-1	8	12	12	-1	-1	-1	-1	-1	14	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	9	27	17	-1	-1	-1	14	14	-1	-1	-1	-1	22	20	2	1	0
2	-1	25	2	-1	-1	-1	23	-1	2	-1	-1	19	-1	8	9	-1	18	-1	11	15	11	-1	5	-1	4	9	-1	19	-1	26	-1	27	1	-1	-1	7	-1	-1	8	28	
17	24	-1	20	1	-1	4	28	-1	-1	-1	1	-1	14	-1	-1	8	19	16	22	-1	25	15	25	25	-1	-1	0	-1	-1	-1	14	-1	20	27	-1	-1	-1	-1	12	-1	
-1	13	13	-1	-1	4	3	16	13	-1	12	3	29	8	-1	-1	-1	-1	20	27	14	-1	-1	2	28	18	3	-1	17	22	-1	-1	-1	-1	12	25	19	17	-1	-1	-1	29
-1	10	-1	-1	-1	25	10	-1	6	-1	13	-1	-1	-1	25	14	13	-1	-1	-1	22	25	25	-1	16	-1	-1	11	-1	27	9	-1	-1	-1	9	-1	-1	-1	25	19	-1	
-1	-1	-1	-1	29	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	6	-1	0	-1	22	13						

42 на 7 кодовое расстояние 7 (верхняя оценка протографа 11) matrix13.txt

14	-1	4	29	14	-1	-1	0	7	-1	-1	3	27	0	1	5	-1	7	-1	-1	-1	22	-1	-1	-1	-1	28	6	16	6	-1	-1	0	-1	-1	-1	-1	0	10	14			
-1	-1	-1	-1	16	3	-1	-1	18	6	11	-1	-1	-1	-1	-1	10	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	29	9	0	-1	-1	-1	18	12	-1	-1	-1	15	4	22	10	16	-1	
16	-1	12	24	-1	-1	-1	3	-1	10	-1	-1	23	-1	14	6	-1	12	-1	2	15	28	-1	11	-1	4	10	-1	17	-1	29	-1	0	3	-1	-1	26	-1	-1	-1	9	11	16
26	19	-1	22	4	-1	18	12	-1	-1	-1	11	-1	2	-1	-1	18	13	29	7	-1	11	28	19	17	-1	-1	7	-1	-1	-1	13	-1	15	9	-1	-1	-1	-1	0	-1	26	
-1	23	11	-1	-1	0	14	4	15	-1	14	10	26	10	-1	-1	-1	-1	15	17	12	-1	-1	6	22	17	15	-1	10	25	-1	-1	-1	-1	16	9	3	20	-1	-1	-1	0	-1
-1	7	-1	-1	-1	27	25	-1	18	-1	29	-1	-1	-1	19	15	0	-1	-1	-1	6	26	12	-1	8	-1	-1	29	-1	14	19	-1	-1	-1	-1	17	-1	-1	-1	17	17	-1	-1
-1	-1	-1	-1	29	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	11	-1	9	-1	9	7	-1					

ПРИЛОЖЕНИЕ 4. Список исходных и бинарных файлов с использованными/реализованными и/или предложенными автором методами в процессе построения MET QC LDPC-кодов (Multi-Edge Type Quasi-Cyclic LDPC Codes):

1. Эволюции плотностей (Density Evolution, DE) или ее приближении (Gaussian Approximations, GA):  
-[Density Evolution](#); -[Relay Flat Fading DE](#); -[Reciprocal-channel approximation](#); -[Gaussian Approximation](#) .
2. Графики взаимной информации проверочных и символьных узлов (аналог density evolution) для:  
-распределения весов , [EXIT-Chart](#);  
-заданного протографа [Protopraph Exit-Chart \(PEXIT-Chart\)](#).
3. Эволюция ковариации [Covariance-Evolution](#).
4. Расширение протографа методом иммитации отжига с максимизацией обхвата(girth), спектра связности (EMD Spectrum), для построения квазициклического кода <https://github.com/Lcrypto/Simulated-annealing-lifting-QC-LDPC>.
5. Оценка спектра связности квазициклического LDPC-кода (MET QC LDPC) [EMD Spectrum of QC-LDPC codes](#).
6. Адаптация кода по длине с оптимизации при помощи спектра связности EMD и оценки кодового расстояния [floor scale modular lifting](#) и их аппроксимации ACE [floor-scale-modular-lifting](#).
7. Верхняя оценка кодового расстояния MacKay-Vontobel-Smarandache:  
-[Sequential](#) ; -[Parallel](#).
8. Нижняя оценка кодового расстояния Таннера [Tanner lower bound](#).
9. Оценка кодового расстояния методом [Брауэра-Циммерман](#) требует [Магма либо GAP](#).
- 10.Поиск кратчайшего базиса ([Shortest Basis Problem](#)) и кратчайшего вектора ([Shortest Vector Problem](#)) в решетке.
11. Параллельные методы [ортогонализации базиса решеток](#) Грамм-Шмидт, Гивенс и Хаусхолдер на GPU, [Intel MKL](#);
- 12.Оценка кодового расстояния [методом геометрии чисел](#).
13. Поиск Трэпинг Сетов в коде и оценка его полки по FER(BLER) для заданного декодера методом распространения доверия [Importance Sampling Trapping Set \(TS\) search and TS weighing](#), без спектрального метода для оценки BER.
14. Платформы для иммитационного моделирования Низкоплотностных кодов с планировщиками [flooding, layered schedulers](#) и декодерами: [normalize min-sum; offset-min; sum-product;log-sum-product + self-corrected](#) .
15. Платформа для моделирования [Низкоплотностных кодов MET QC-LDPC из стандарта 5G](#).

**По мере дальнейшей публикации статей часть исходных файлов будут раскрыты, а репозитории дополнены.**

ПРИЛОЖЕНИЕ 5. Скриншот результатов конкурса по Геометрии Чисел технического университета Дармштадт - [Поиск кратчайшего вектора в циклической решетке](#) (на идеалах кольца кругового многочлена).

IDEAL LATTICE CHALLENGE						SVP HALL OF FAME	
Position	Dimension	Index	Seed	Euclidean norm	Contestant	Solution	
1	128	256	0	2959	Tsukasa Ishiguro, Shinsaku Kiyomoto, Yutaka Miyake, Tsuyoshi Takagi	vec	2013-04-11
2	108	324	0	2669	Tsukasa Ishiguro, Shinsaku Kiyomoto, Yutaka Miyake, Tsuyoshi Takagi	vec	2013-03-8
3	102	103	0	2670	Usatyuk Vasiliy	vec	2013-07-17
4	100	202	0	2660	Po-Chun Kuo, Po-Hsiang Hao	vec	2013-02-21
5	96	288	0	2493	Tsukasa Ishiguro, Shinsaku Kiyomoto, Yutaka Miyake, Tsuyoshi Takagi	vec	2013-02-20
<a href="#">Complete list</a>							
APPROX-SVP HALL OF FAME							
Position	Dimension	Index	Seed	Euclidean norm	Contestant	Solution	
1	478	958	0	487384	Usatyuk Vasiliy	vec	2013-08-24
2	452	908	0	412796	Usatyuk Vasiliy	vec	2013-08-11
3	424	856	0	367585	Usatyuk Vasiliy	vec	2013-08-5
4	420	421	0	419016	Michael Schneider	vec	2013-08-2
5	400	1212	0	283869	Usatyuk Vasiliy	vec	2013-08-5
<a href="#">Complete list</a>							