

计算机组成原理—数字

刘宏伟

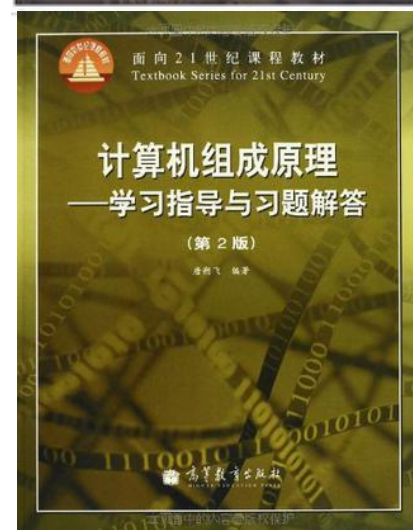
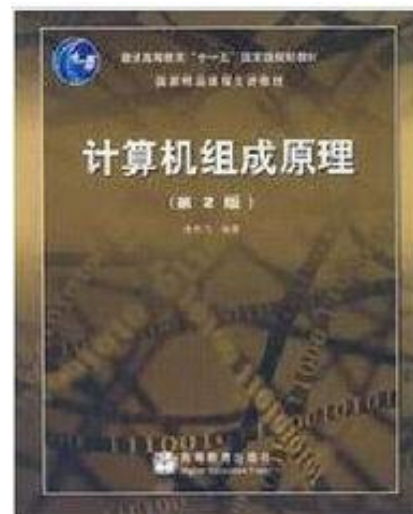
哈尔滨工业大学
计算机科学与技术学院

主要内容

- 1) 计算机中数的表示
- 2) 计算机的运算方法
- 3) 运算器的设计

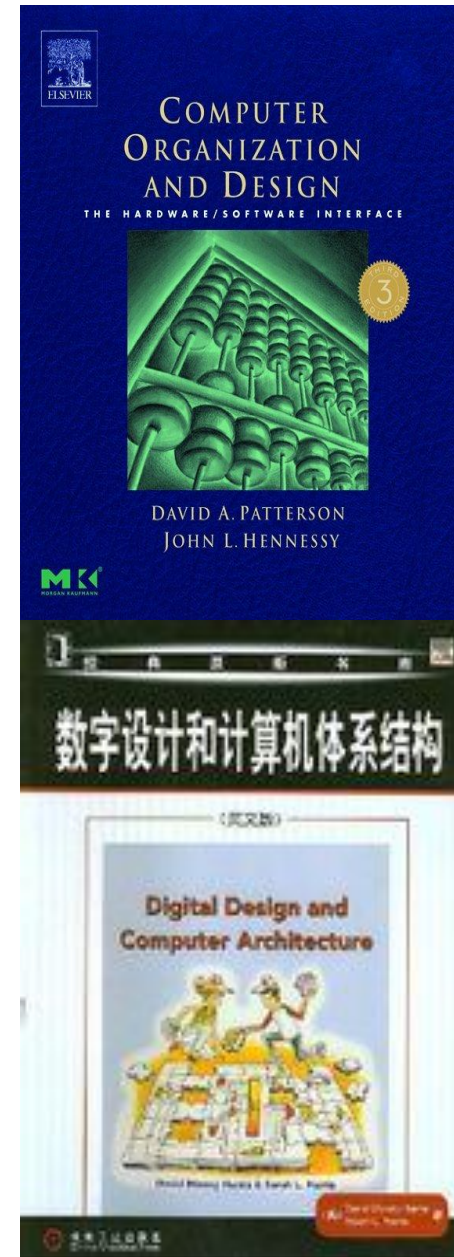
教材：计算机组成原理（第2版）

- 普通高等教育“十二五”规划教材
- 面向21世纪课程教材
- 全国普通高等学校优秀教材二等奖
- 普通高等教育精品教材



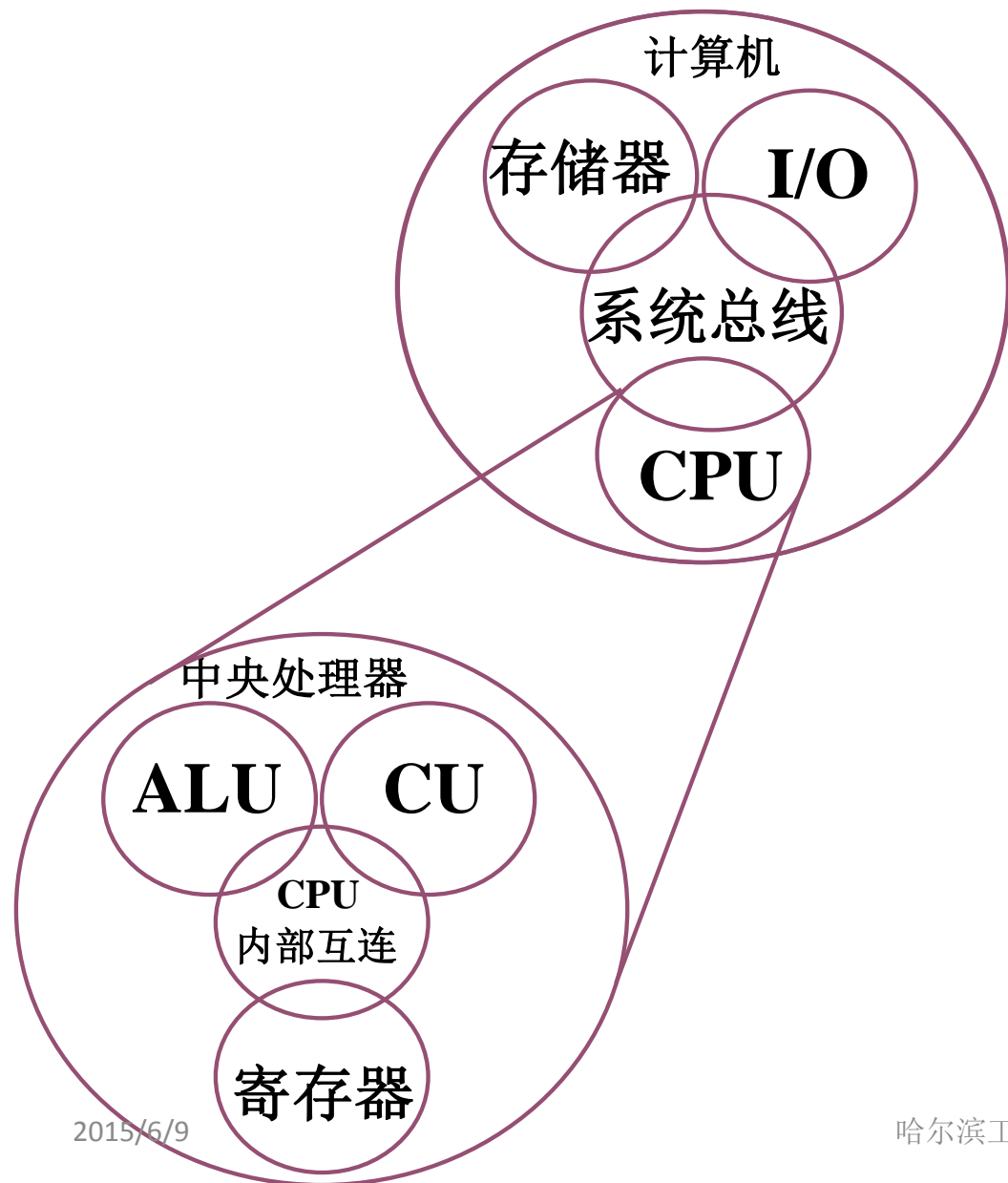
参考教材

- **David A. Patterson. John L. Hennessy. Computer Organization & Design: A Hardware/Software Interface**
- **David Harris, Sarah Harris. Digital Design and Computer Architecture. Morgan Kaufmann, 2007**



课程内容的组织

第 3 篇 CPU



第 6 章 计算机的运算方法

6.1 无符号数和有符号数

6.2 数的定点表示和浮点表示

6.3 定点运算

6.4 浮点四则运算

6.5 算术逻辑单元

6.1 无符号数和有符号数

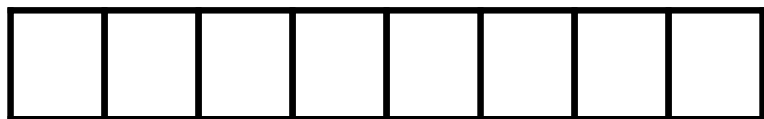
- 一、无符号数
 - ✓ 定义
- 二、有符号数
 - ✓ 特点
 - ✓ 举例
 - 机器数与真值的转换
 - 不同机器数形式之间的转化
 - 1、机器数与真值
 - 2、原码表示法
 - 3、补码表示法
 - 4、反码表示法
 - 5、移码表示法
 - ✓ 机器数表示的范围与其字长有关

6.1 无符号数和有符号数

一、无符号数

寄存器的位数

反映无符号数的表示范围



8 位

0 ~ 255



16 位

0 ~ 65535

二、有符号数

6.1

1. 机器数与真值

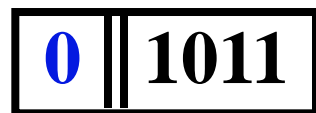
真值

机器数

带符号的数

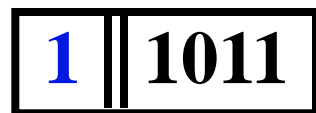
符号数字化的数

+ 0.1011



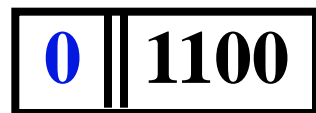
小数点的位置

- 0.1011



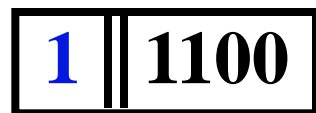
小数点的位置

+ 1100



小数点的位置

- 1100



小数点的位置

2. 原码表示法

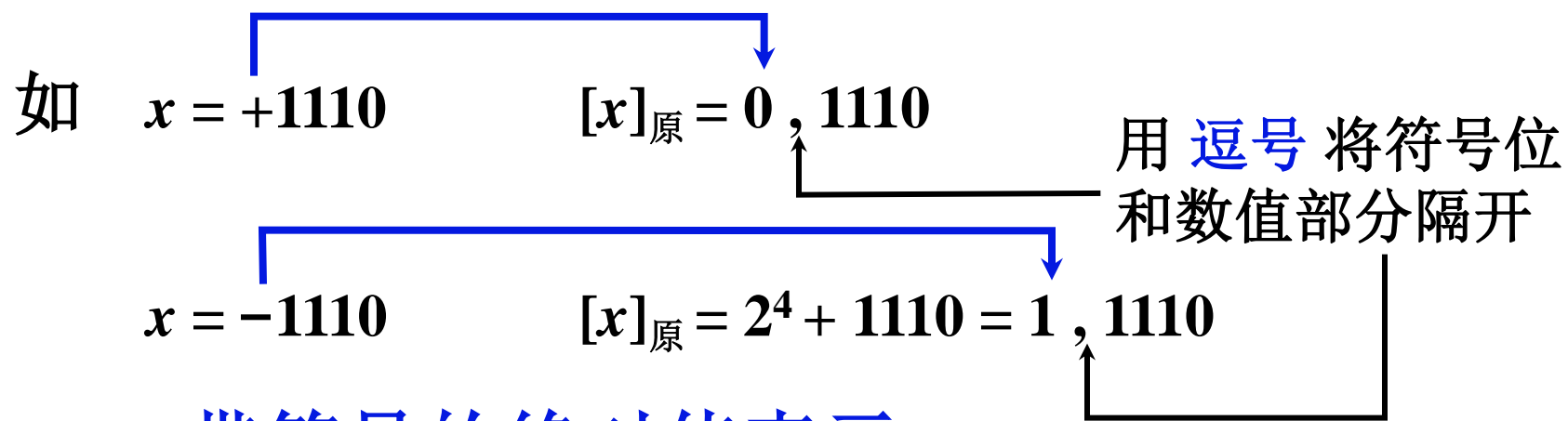
6.1

(1) 定义

整数

$$[x]_{\text{原}} = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ 2^n - x, & x < 0 \end{cases}$$

x 为真值 n 为整数的位数



带符号的绝对值表示

小数

6.1

$$[x]_{\text{原}} = \begin{cases} x & 1 > x \geq 0 \\ 1 - x & 0 \geq x > -1 \end{cases}$$

x 为真值

如

$x = +0.1101$ $[x]_{\text{原}} = 0.1101$ 用 **小数点** 将符号位和数值部分隔开

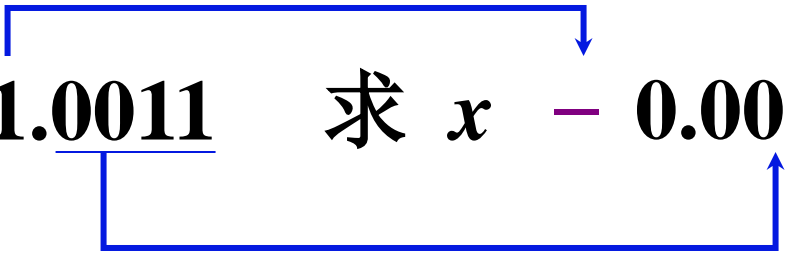
$x = -0.1101$ $[x]_{\text{原}} = 1 - (-0.1101) = 1.1101$

$x = +0.1000000$ $[x]_{\text{原}} = 0.1000000$ 用 **小数点** 将符号位和数值部分隔开

$x = -0.1000000$ $[x]_{\text{原}} = 1 - (-0.1000000) = 1.1000000$

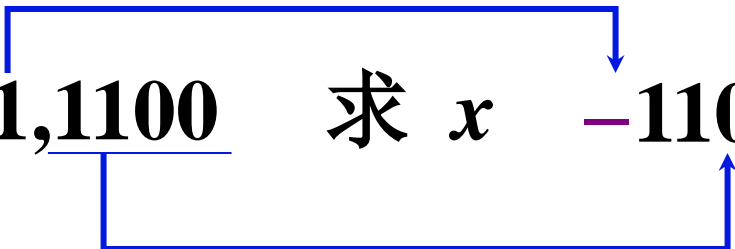
(2) 举例

6.1

例 6.1 已知 $[x]_{\text{原}} = 1.0011$ 求 x  $- 0.0011$

解：由定义得

$$x = 1 - [x]_{\text{原}} = 1 - 1.0011 = -0.0011$$

例 6.2 已知 $[x]_{\text{原}} = 1,1100$ 求 x  $- 1100$

解：由定义得

$$x = 2^4 - [x]_{\text{原}} = 10000 - 1,1100 = -1100$$

例 6.3 已知 $[x]_{\text{原}} = 0.1101$ 求 x

解：根据定义 $\because [x]_{\text{原}} = 0.1101$

$$\therefore x = +0.1101$$

例 6.4 求 $x = 0$ 的原码

解：设 $x = +0.0000$ $[+0.0000]_{\text{原}} = 0.0000$

$x = -0.0000$ $[-0.0000]_{\text{原}} = 1.0000$

同理，对于整数 $[+0]_{\text{原}} = 0,0000$

$[-0]_{\text{原}} = 1,0000$

$\therefore [+0]_{\text{原}} \neq [-0]_{\text{原}}$

原码的特点：简单、直观

6.1

但是用原码作加法时，会出现如下问题：

要求	数1	数2	实际操作	结果符号
加法	正	正	加	正
加法	正	负	减	可正可负
加法	负	正	减	可正可负
加法	负	负	加	负

能否 只作加法？

找到一个与负数等价的正数 来代替这个负数

就可使 减 → 加

3. 补码表示法

6.1

(1) 补的概念

• 时钟

逆时针

$$\begin{array}{r} 6 \\ - 3 \\ \hline 3 \end{array}$$

顺时针

$$\begin{array}{r} 6 \\ + 9 \\ \hline 15 \\ - 12 \\ \hline 3 \end{array}$$

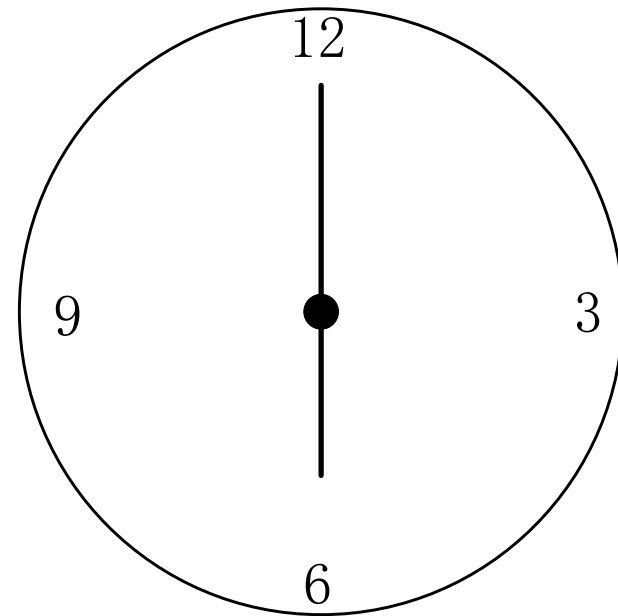
可见 -3 可用 $+9$ 代替 减法 \rightarrow 加法
称 $+9$ 是 -3 以 12 为模的 补数

记作 $-3 \equiv +9 \pmod{12}$

同理 $-4 \equiv +8 \pmod{12}$

$-5 \equiv +7 \pmod{12}$

时钟以
12为模



结论

6.1

➤ 一个负数加上 “模” 即得该负数的补数

➤ 一个正数和一个负数互为补数时

它们绝对值之和即为 模 数

• 计数器（模 16） $1011 \longrightarrow 0000$?

$$\begin{array}{r} 1011 \\ - 1011 \\ \hline 0000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1011 \\ + 0101 \\ \hline 10000 \end{array}$$

自然去掉

可见 -1011 可用 $+0101$ 代替

记作 $-1011 \equiv +0101 \pmod{2^4}$

同理 $-011 \equiv +101 \pmod{2^3}$

$-0.1001 \equiv +1.0111 \pmod{2}$

(2) 正数的补数即为其本身

6.1

两个互为补数的数

分别加上模

结果仍互为补数

$$\boxed{-1011} \equiv + \boxed{0101} \pmod{2^4}$$

$$\begin{array}{r} + 10000 \\ \hline \end{array}$$

$$+ 0101 \equiv + \boxed{10101}$$

$$\therefore + 0101 \equiv + 0101 \pmod{2^4}$$

丢掉

可见 $+ 0101 \xrightarrow{?} + 0101$
 $\quad \quad \quad \downarrow ?$
 $\quad \quad \quad - 1011$

? $\boxed{0}, 0101 \rightarrow + 0101$

? $\boxed{1}, 0101 \rightarrow - 1011$

$$2^{4+1} - 1011 = 100000$$

$$\begin{array}{r} - 1011 \\ \hline 1, 0101 \end{array}$$

用 逗号 将符号位
和数值部分隔开

$$\pmod{2^{4+1}}$$

(3) 补码定义

6.1

整数

$$[x]_{\text{补}} = \begin{cases} 0, x & 2^n > x \geq 0 \\ 2^{n+1} + x & 0 > x \geq -2^n \pmod{2^{n+1}} \end{cases}$$

x 为真值

n 为整数的位数

如

$$x = +1010$$

$$x = -1011000$$

$$[x]_{\text{补}} = 0,1010$$

用 逗号 将符号位
和数值部分隔开

$$[x]_{\text{补}} = 2^{7+1} + (-1011000)$$

$$= 100000000$$

$$- 1011000$$

$$\hline 1,0101000$$

$$[x]_{\text{补}} = \begin{cases} x & 1 > x \geq 0 \\ 2 + x & 0 > x \geq -1 \pmod{2} \end{cases}$$

x 为真值

如 $x = +0.1110$

$x = -0.1100000$

$$[x]_{\text{补}} = 0.1110$$

$$[x]_{\text{补}} = 2 + (-0.1100000)$$

$$= 10.0000000$$

$$- 0.1100000$$

$$1.0100000$$

用 小数点 将符号位

和数值部分隔开

(4) 求补码的快捷方式

6.1

设 $x = -1010$ 时

$$\begin{aligned} \text{则 } [x]_{\text{补}} &= 2^{4+1} - 1010 &= 11111 + 1 - 1010 \\ &= 100000 &= 11111 + 1 \\ &\quad - 1010 &\quad - 1010 \\ \hline &= 1,0110 &\quad \boxed{10101} + 1 \\ & &= 1,0110 \end{aligned}$$

$$\text{又 } [x]_{\text{原}} = \boxed{1,1010}$$

当真值为 负 时，补码 可用 原码除符号位外
每位取反，末位加 1 求得

(5) 举例

6.1

例 6.5 已知 $[x]_{\text{补}} = 0.0001$

求 x

解：由定义得 $x = +0.0001$

例 6.6 已知 $[x]_{\text{补}} = 1.0001$ $[x]_{\text{补}} \xrightarrow{?} [x]_{\text{原}}$

求 x

$$[x]_{\text{原}} = 1.1111$$

解：由定义得

$$\therefore x = -0.1111$$

$$x = [x]_{\text{补}} - 2$$

$$= 1.0001 - 10.0000$$

$$= -0.1111$$

例 6.7 已知 $[x]_{\text{补}} = 1,1110$

6.1

求 x

解：由定义得

$$x = [x]_{\text{补}} - 2^{4+1}$$

$$= 1,1110 - 100000$$

$$= -0010$$

$$[x]_{\text{补}} \xrightarrow{?} [x]_{\text{原}}$$

$$[x]_{\text{原}} = 1,0010$$

$$\therefore x = -0010$$

当真值为 负 时，原码 可用 补码除符号位外

每位取反，末位加 1 求得

练习 求下列真值的补码

6.1

真值	$[x]_{\text{补}}$	$[x]_{\text{原}}$
$x = +70 = 1000110$	0, 1000110	0,1000110
$x = -70 = -1000110$	1, 0111010	1,1000110
$x = 0.1110$	0.1110	0.1110
$x = -0.1110$	1.0010	1.1110
$x = \boxed{0.0000} [+ 0]_{\text{补}} = [- 0]_{\text{补}}$	$\boxed{0.0000}$	0.0000
$x = \boxed{-0.0000}$	$\boxed{0.0000}$	1.0000
$x = -1.0000$	1.0000	不能表示

由小数补码定义
$$[x]_{\text{补}} = \begin{cases} x & 1 > x \geq 0 \\ 2 + x & 0 > x \geq -1 \text{ (mod 2)} \end{cases}$$

$$[-1]_{\text{补}} = 2 + x = 10.0000 - 1.0000 = 1.0000$$

4. 反码表示法

6.1

(1) 定义

整数

$$[x]_{\text{反}} = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ (2^{n+1} - 1) + x & 0 \geq x > -2^n \end{cases} \pmod{2^{n+1} - 1}$$

x 为真值

n 为整数的位数

如 $x = +1101$

$$[x]_{\text{反}} = 0,1101$$



用 逗号 将符号位
和数值部分隔开

$x = -1101$

$$\begin{aligned} [x]_{\text{反}} &= (2^{4+1} - 1) - 1101 \\ &= 11111 - 1101 \\ &= 1,0010 \end{aligned}$$



小数

6.1

$$[x]_{\text{反}} = \begin{cases} x & 1 > x \geq 0 \\ (2 - 2^{-n}) + x & 0 \geq x > -1 \pmod{2 - 2^{-n}} \end{cases}$$

x 为真值

n 为小数的位数

如

$$x = +0.1101$$

$$x = -0.1010$$

$$[x]_{\text{反}} = 0.1101$$

$$[x]_{\text{反}} = (2 - 2^{-4}) - 0.1010$$

$$= 1.1111 - 0.1010$$

$$= 1.0101$$

用 小数点 将符号位

和数值部分隔开



(2) 举例

6.1

例6.8 已知 $[x]_{\text{反}} = 0,1110$ 求 x

解: 由定义得 $x = +1110$

例6.9 已知 $[x]_{\text{反}} = 1,1110$ 求 x

解: 由定义得
$$\begin{aligned} x &= [x]_{\text{反}} - (2^{4+1} - 1) \\ &= 1,1110 - 11111 \\ &= -0001 \end{aligned}$$

例 6.10 求 0 的反码

解: 设 $x = +0.0000$ $[+0.0000]_{\text{反}} = 0.0000$

$x = -0.0000$ $[-0.0000]_{\text{反}} = 1.1111$

同理, 对于整数 $[+0]_{\text{反}} = 0,0000$ $[-0]_{\text{反}} = 1,1111$

$\therefore [+0]_{\text{反}} \neq [-0]_{\text{反}}$

三种机器数的小结

- 最高位为符号位，书写上用 “,”（整数）或 “.”（小数）将数值部分和符号位隔开
- 对于正数，原码 = 补码 = 反码
- 对于负数，符号位为 1，其数值部分
原码除符号位外每位取反末位加 1 → 补码
原码除符号位外每位取反 → 反码

例6.11 设机器数字长为8位（其中1位为符号位）6.1

对于整数，当其分别代表无符号数、原码、补码和反码时，对应的真值范围各为多少？

二进制代码	无符号数 对应的真值	原码对应 的真值	补码对应 的真值	反码对应 的真值
00000000	0	+0	± 0	+0
00000001	1	+1	+1	+1
00000010	2	+2	+2	+2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
01111111	127	+127	+127	+127
10000000	128	-0	-128	-127
10000001	129	-1	-127	-126
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
11111101	253	-125	-3	-2
11111110	254	-126	-2	-1
11111111	255	-127	-1	-0

例6.12 已知 $[y]_{\text{补}}$ 求 $[-y]_{\text{补}}$

解： 设 $[y]_{\text{补}} = y_0 \cdot y_1 y_2 \cdots y_n$

< I > $[y]_{\text{补}} = 0 \cdot y_1 y_2 \cdots y_n$

$[y]_{\text{补}}$ 连同符号位在内， 每位取反， 末位加 1

即得 $[-y]_{\text{补}}$

$$[-y]_{\text{补}} = 1 \cdot \overline{y_1} \overline{y_2} \cdots \overline{y_n} + 2^{-n}$$

< II > $[y]_{\text{补}} = 1 \cdot y_1 y_2 \cdots y_n$

$[y]_{\text{补}}$ 连同符号位在内， 每位取反， 末位加 1

即得 $[-y]_{\text{补}}$

$$[-y]_{\text{补}} = 0 \cdot \overline{y_1} \overline{y_2} \cdots \overline{y_n} + 2^{-n}$$



5. 移码表示法

6.1

补码表示很难直接判断其真值大小

如	十进制	二进制	补码	
	$x = +21$	$+10101$	$0,10101$	 错 大
	$x = -21$	-10101	$1,01011$	
	$x = +31$	$+11111$	$0,11111$	 错 大
	$x = -31$	-11111	$1,00001$	

$x + 2^5$

$+10101 + 100000 = 110101$	 大 正确
$-10101 + 100000 = 001011$	
$+11111 + 100000 = 111111$	 大 正确
$-11111 + 100000 = 000001$	

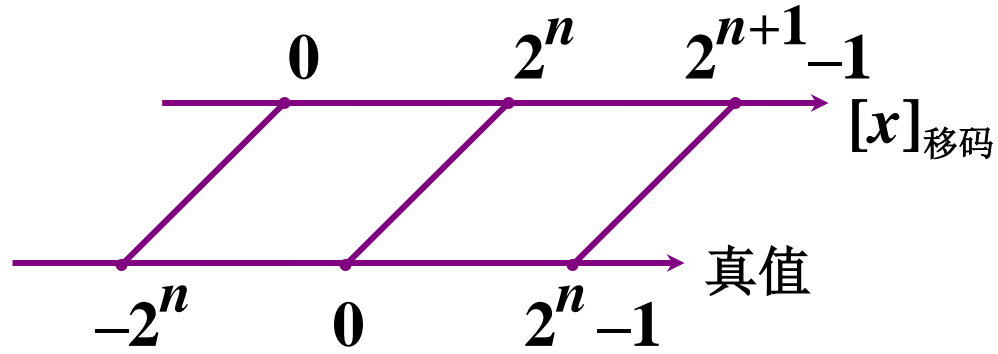
(1) 移码定义

6.1

$[x]_{\text{移}} = 2^n + x \quad (2^n > x \geq -2^n)$

x 为真值, n 为 整数的位数

移码在数轴上的表示



如 $x = 10100$

$[x]_{\text{移}} = 2^5 + 10100 = 1,10100$

$x = -10100$

$[x]_{\text{移}} = 2^5 - 10100 = 0,01100$

用 逗号 将符号位
和数值部分隔开

(2) 移码和补码的比较

设 $x = +1100100$

$$[x]_{\text{移}} = 2^7 + 1100100 = \mathbf{1},1100100$$

$$[x]_{\text{补}} = \mathbf{0},1100100$$

设 $x = -1100100$

$$[x]_{\text{移}} = 2^7 - 1100100 = \mathbf{0},0011100$$

$$[x]_{\text{补}} = \mathbf{1},0011100$$

补码与移码只差一个符号位

(3) 真值、补码和移码的对照表

6.1

真值 x ($n=5$)	$[x]_{\text{补}}$	$[x]_{\text{移}}$	$[x]_{\text{移}}$ 对应的 十进制整数
- 1 0 0 0 0	1 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0
- 1 1 1 1 1	1 0 0 0 1	0 0 0 0 1	1
- 1 1 1 1 0	1 0 0 0 1 0	0 0 0 0 1 0	2
⋮	⋮	⋮	⋮
- 0 0 0 0 1	1 1 1 1 1 1	0 1 1 1 1 1	31
± 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	1 0 0 0 0 0	32
+ 0 0 0 0 1	0 0 0 0 0 1	1 0 0 0 0 1	33
+ 0 0 0 1 0	0 0 0 0 1 0	1 0 0 0 1 0	34
⋮	⋮	⋮	⋮
+ 1 1 1 1 0	0 1 1 1 1 0	1 1 1 1 1 0	62
+ 1 1 1 1 1	0 1 1 1 1 1	1 1 1 1 1 1	63

(4) 移码的特点

6.1

➤ 当 $x = 0$ 时 $[+0]_{\text{移}} = 2^5 + 0 = 1,00000$

$$[-0]_{\text{移}} = 2^5 - 0 = 1,00000$$

$$\therefore [+0]_{\text{移}} = [-0]_{\text{移}}$$

➤ 当 $n = 5$ 时 最小的真值为 $-2^5 = -100000$

$$[-100000]_{\text{移}} = 2^5 - 100000 = 000000$$

可见，最小真值的移码为全 0

用移码表示浮点数的阶码

能方便地判断浮点数的阶码大小