数学建模讲义

微分方程模型

微分方程模型

1、人口预报问题

2、传染病问题

3、作战模型

4、捕食问题

5、阶梯教室设计问题

6、交通管理/堵塞问题

…………

建模示例1　如何预报人口的增长

背景

世界人口增长概况

年	1625	1830	1930	1960	1974	1987	1999
人口(亿)	5	10	20	30	40	50	60

中国人口增长概况

年	1908	1933	1953	1964	1982	1990	1995
人口(亿)	3	4.7	6	7	10.1	11.3	12

研究人口变化规律

控制人口过快增长

模型一：指数增长模型

常用的计算公式

今年人口 x_0, 年增长率 r

k年后人口

$$x_k = x_0(1+r)^k$$

马尔萨斯（**1788--1834**）提出的指数增长模型(1798)

$x(t)$ ~时刻t人口

r ~ 人口(相对)增长率(常数)

$$x(t+\Delta t) - x(t) = rx(t)\Delta t$$

$$x(t) = x_0 e^{rt}$$

$$\frac{dx}{dt} = rx, \quad x(0) = x_0$$

$$x(t) = x_0(e^r)^t \approx x_0(1+r)^t$$

随着时间增加人口按指数规律无限增长!

指数增长模型的应用及局限性

- 与19世纪以前欧洲一些地区人口统计数据吻合
- 适用于19世纪后迁往加拿大的欧洲移民后代
- 可用于短期人口增长预测
- 不符合19世纪后多数地区人口增长规律
- 不能预测较长期的人口增长过程

19世纪后人口数据 ⇨ 人口增长率r不是常数(逐渐下降

模型二：阻滞增长模型 (Logistic模型)

人口增长到一定数量后，增长率下降的原因：

资源、环境等因素对人口增长的阻滞作用

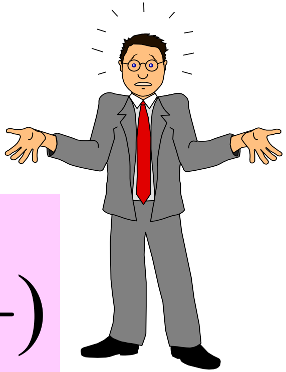
且阻滞作用随人口数量增加而变大 $\Rightarrow$ **r是x的减函数**

假定： $r(x)=r-sx \ (r,s>0)$ **r~固有增长率(x很小时)**

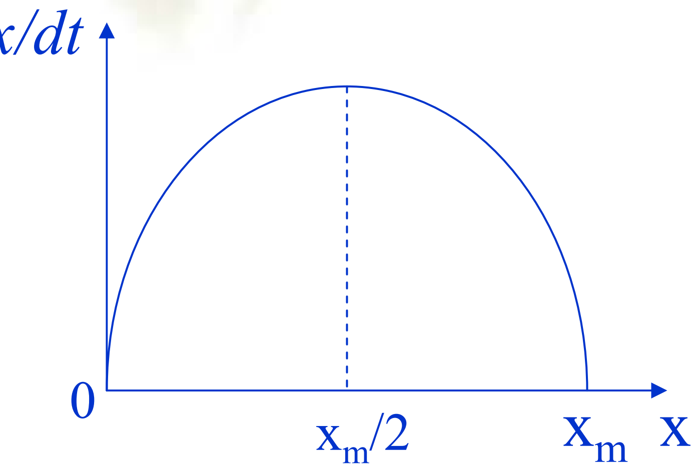
x_m~人口容量（资源、环境能容纳的最大数量）

$$\Rightarrow \ r(x_m)=0 \ \Rightarrow \ s=\frac{r}{x_m} \quad r(x)=r\left(1-\frac{x}{x_m}\right)$$

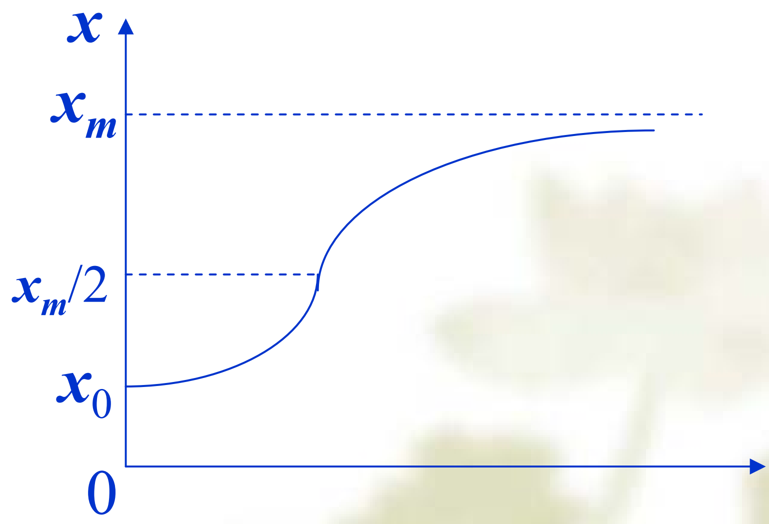
阻滞增长模型 (Logistic模型)



$$\frac{dx}{dt} = rx \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = r(x)x = rx\left(1 - \frac{x}{x_m}\right)$$



$\Rightarrow$



$$x(t) = \frac{x_m}{1 + \left(\frac{x_m}{x_0} - 1\right)e^{-rt}}$$

***x(t)~S*形曲线,**

***x*增加先快后慢**

模型的参数估计

用指数增长模型或阻滞增长模型作人口预报，必须先估计模型参数 r 或 r, x_m

- 利用统计数据用最小二乘法作拟合

例：美国人口数据（单位~百万）

1790	1800	1810	1820	1830	……	1950	1960	1970	1980
3.9	5.3	7.2	9.6	12.9	……	150.7	179.3	204.0	226.5

$\Rightarrow$ $r=0.2072,\ x_m=464$

- 专家估计

模 型 检 验

用模型预报**1990**年美国人口，与实际数据比较

$$x(1990) = x(1980) + \Delta x = x(1980) + rx(1980)[1 - x(1980)/x_m]$$

$\Rightarrow$ $x(1990) = 250.5$　　实际为**251.4** **(**百万**)**

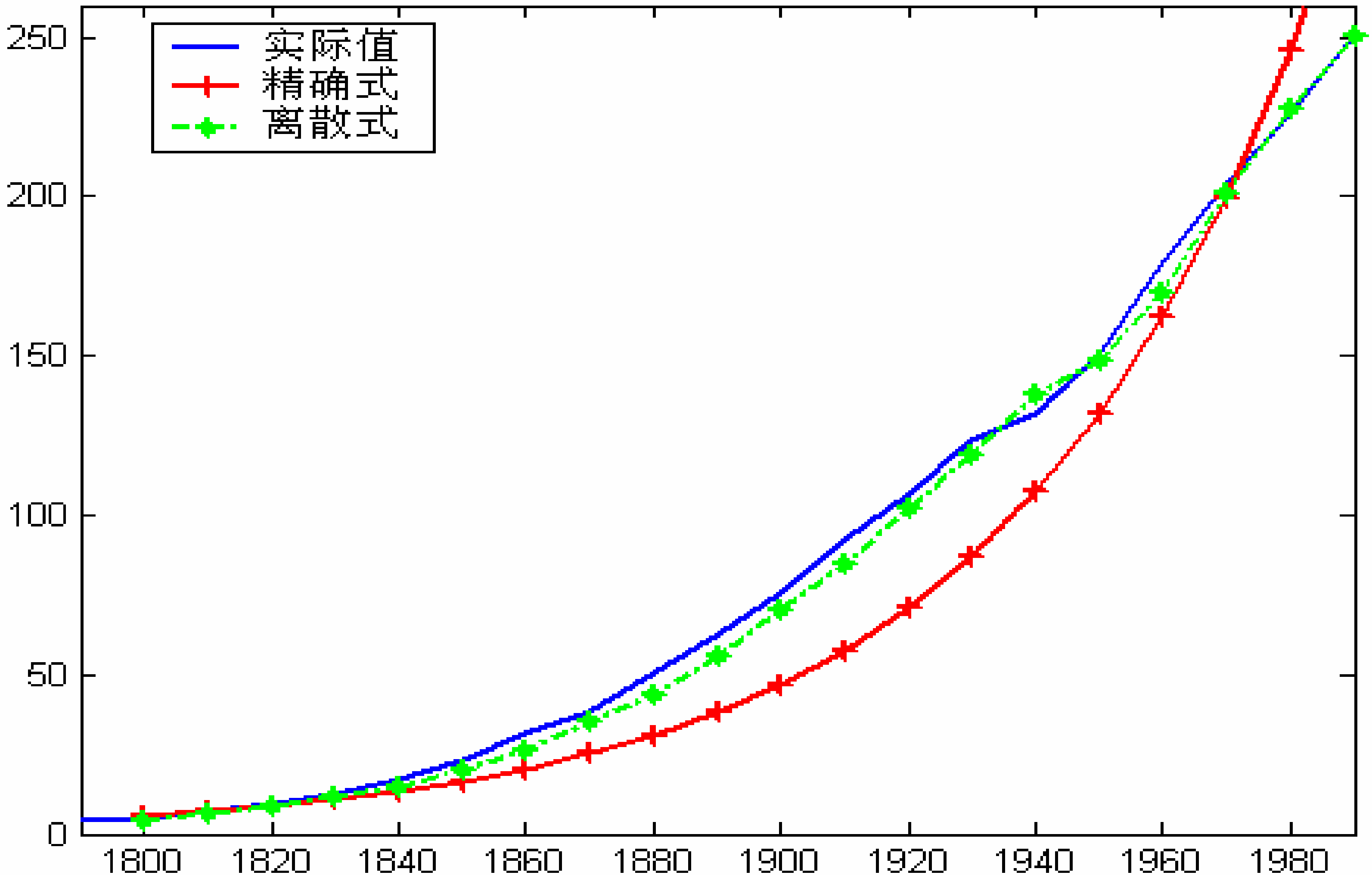
模 型 应 用——人 口 预 报

用美国**1790~1990**年人口数据重新估计参数

$\Rightarrow$ $r=0.2083,\ x_m=457.6$ $\Rightarrow$ $x(2000)=275.0$

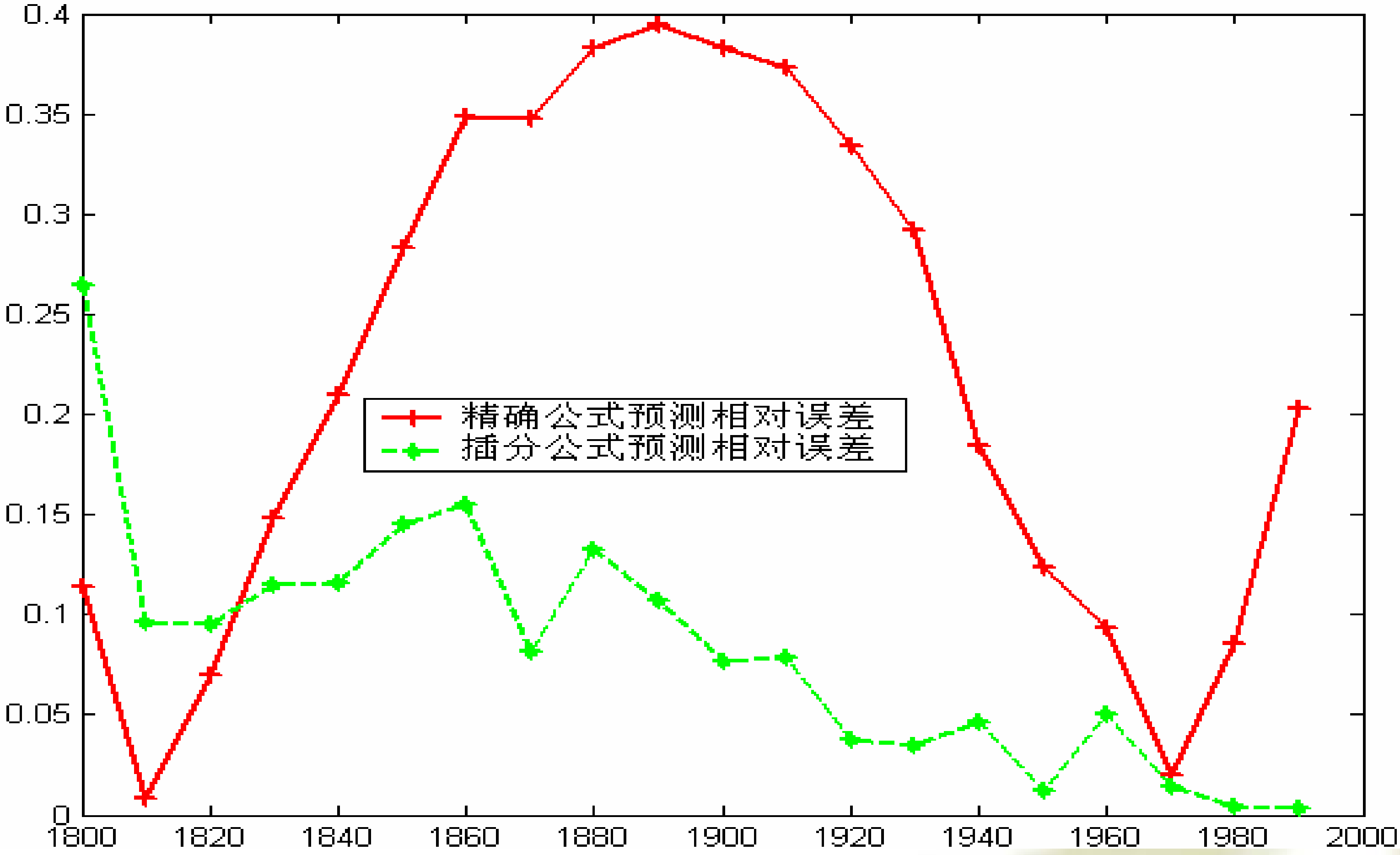
$x(2010)=297.9$

Logistic模型在经济领域中的应用（如耐用消费品的售量）



$$x(t)=\frac{x_m}{1+\left(\frac{x_m}{x_0}-1\right)e^{-rt}}$$

$$\Rightarrow x(t+1)=x(t)+r\left(1-\frac{x(t)}{x_m}\right)x(t)$$



$$x(t)=\frac{x_m}{1+\left(\frac{x_m}{x_0}-1\right)e^{-rt}}$$

$$\Rightarrow x(t+1)=x(t)+r\left(1-\frac{x(t)}{x_m}\right)x(t)$$

模型三：人口发展方程

基本关系式 $p(r+dt,t+dt)dr = p(r,t)dr\left(1-d(r,t)dt\right.$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial p(r,t)}{\partial r}+\dfrac{\partial p(r,t)}{\partial t}=-d(r,t)p(r,t) \\ p(r,0)=p_0(r) \\ p(0,t)=p_1(t) \\ p(r_m,t)=0 \end{cases}$$

偏微分方程模型

其中t——时间段、r——年龄；

$p(r,t)$ ——t 时刻的人口年龄 r 密度函数

$d(r,t)$ ——t时刻、r年龄的人口相对死亡率(可统计量)

$p_1(t)$ ——t时刻的单位时间出生的婴儿数(可控量)

江苏省人口统计

年代	1950	1952	1954	1956	1958	1960	1962	1964	196
人口(千万)	3.583	3.739	3.904	4.102	4.258	4.245	4.333	4.532	4.74
年代	1968	1970	1972	1974	1976	1978	1980	1982	198
人口(千万)	4.996	5.252	5.437	5.567	5.700	5.834	5.938	6.088	6.07

作业：设法查找一部分人口数据(国家(内外)、地方皆可)，进行建模预报，并与实际数据比较，希望进一步改进模型。

作业格式——一篇较完整的论文!(见下)

建模的论文结构:

1、摘要——问题、模型、方法、结果

2、问题重述

3、模型假设

4、分析与建立模型

5、模型求解

6、模型检验

7、模型推广

8、参考文献

9、附录

建模示例二：传染病模型

模型1 最简单模型(早期模型)

- 假设1：每个病人在单位时间内传染的人数是常数r；
- 假设2：不考虑死亡问题；

问题分析：记$x(t)$表示t时刻病人数，且初始病人数$x(0)=x_0$；

则$[t, t+\Delta t]$时间段内增加的病人数为：

$$x(t+\Delta t)-x(t)=r\cdot x(t)\cdot \Delta t$$

得到微分方程：

$$\begin{cases} x'(t)=r\cdot x(t) \\ x(0)=x_0 \end{cases} \Rightarrow x(t)=x_0 e^{rt}$$

模型评价：与传染初期比较吻合，以后的误差大。

模型2 中期模型

- 假设1：每个病人在单位时间内传染的人数与未被传染的人数成正比r;
- 假设2：不考虑死亡问题；
- 假设3：总人数有限

问题分析：记$x(t)$表示t时刻病人数，且初始病人数$x(0)=x_0$；(t)为t时 刻未被传染的人数；总人数为n，即$x(t)+y(t)=n$.

则$[t, t+\Delta t]$时间段内增加的病人数为：

$$x(t+\Delta t)-x(t)=r\cdot x(t)\cdot y(t)\cdot \Delta t$$

得微分方程：

$$\begin{cases} x'(t)=r\cdot x(t)\cdot y(t) \\ x(0)=x_0, x(t)+y(t)=n \end{cases} \Rightarrow x(t)=\frac{n}{1+\left(n/x_0-1\right)e^{-r\cdot n\cdot t}}$$

$$x(t)=\frac{n}{1+\left(n/x_0-1\right)e^{-r\cdot n\cdot t}}$$

模型分析评价:

1. 不加控制，则最终人人得病;

2. 计算传染高峰期t_1:

$$x''(t)=0 \;\Rightarrow\; t_1=\left(\ln(n-x_0)-\ln(x_0)\right)/\left(r\cdot n\right)$$

说明: 人口n越多、传染强度r越大，高峰来得越早!

缺点: 没有考虑治愈问题和免疫问题。

模型3 精确模型

- 假设1：研究对象分成三类：传染源$x(t)$、敏感群$y(t)$ 和免疫群$z(t)$;
- 假设2：单位时间内每个传染源传染的人数与敏感群的人数成正比;
- 假设3：单位时间内传染源康复为免疫群的人数正比与传染源人数;
- 假设4：不考虑死亡且总人数有限。

问题分析: 记a——传染率, b——康复率; 初始条件为:

$$x(0)=x_0,y(0)=n-x_0,z(0)=0;$$

得微分方程:

$$\begin{cases} x'(t)=a\cdot x(t)\cdot y(t)-b\cdot x(t) \\ y'(t)=-ax(t)y(t) \\ z'(t)=bx(t) \\ x(0)=x_0,y(0)=n-x_0,z(0)=0; \end{cases}$$

解此微分方程组：

是非线性方程组，不易求解，变形以y为自变量：

$$\begin{cases} x'(t) = a\cdot x(t)\cdot y(t) - b\cdot x(t) \\ y'(t) = -ax(t)y(t) \\ z'(t) = bx(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{1}{y} - 1 \\ \dfrac{dz}{dy} = -\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{1}{y} \end{cases}$$

解得：$$\begin{cases} x = n - \dfrac{b}{a}\cdot\ln\dfrac{n-x_0}{y} - y \\ z = \dfrac{b}{a}\cdot\ln\dfrac{n-x_0}{y} \end{cases}$$

结论：

- 当$y \leqslant b/a$时，传染源减少直至平息；
- 当$y > b/a$时，传染源先增加再减少直至平息
- 控制y非常关键——研制疫苗、增强体质；
- 增大b/a也非常关键——隔离、治愈；

建模示例三：作战模型

- **Lanchester战斗模型**

设x部队和y部队相互交战，$x(t)$和$y(t)$分别是两部队在t时刻的战斗力，其连续可导。

战斗力的变化率＝后勤补给率－自然损失率－对方的杀伤率

常规战
$$\begin{cases} x'(t) = P(t) - ax - by \\ y'(t) = Q(t) - cx - ey \end{cases}$$

游击战
$$\begin{cases} x'(t) = P(t) - ax - gxy \\ y'(t) = Q(t) - ey - hxy \end{cases}$$

游击对常规战
$$\begin{cases} x'(t) = P(t) - ax - gxy \\ y'(t) = Q(t) - cx - ey \end{cases}$$

a,b,c,e,g,h——损失率

$P(t),Q(t)$——后勤补给率

$x(t),y(t)$——双方战斗力

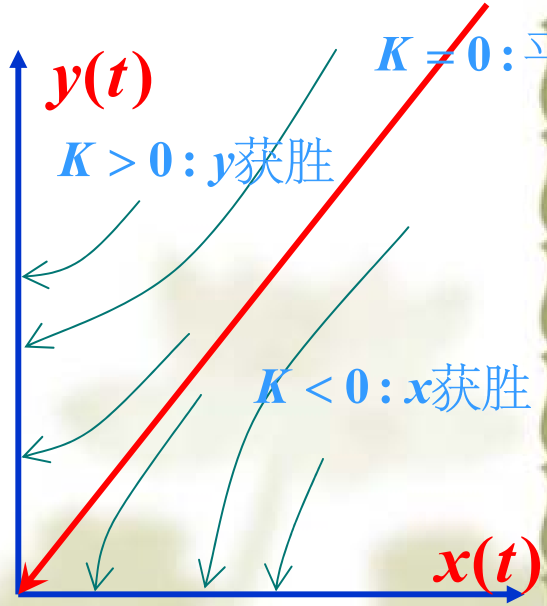
x_0,y_0—开始时双方战斗力

t——战斗时刻

1. 常规战——平方律

为讨论方便，简化模型为：

常规战 $\begin{cases} x'(t) = -by \\ y'(t) = -cx \end{cases} \longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{cx}{by}$



$$\longrightarrow b\left(y^2 - y_0^2\right) = c\left(x^2 - x_0^2\right)$$

$$\longrightarrow by^2 - cx^2 = K\left(= by_0^2 - cx_0^2\right)$$

$$\longrightarrow \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 \gtrless \frac{c}{b} = \frac{r_x p_x}{r_y p_y}$$

射击率

命中率

结论：常规战胜负取决于开战前力量(人数)对比，且此比值平方放大。——集中优势兵力(三大战役)

2. 游击战——线性律

简化模型为：

游击战 $\begin{cases} x'(t) = -gxy \\ y'(t) = -hxy \end{cases} \longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{h}{g}$

$\longrightarrow g(y - y_0) = h(x - x_0)$

$\longrightarrow gy - hx = L(= gy_0 - hx_0)$

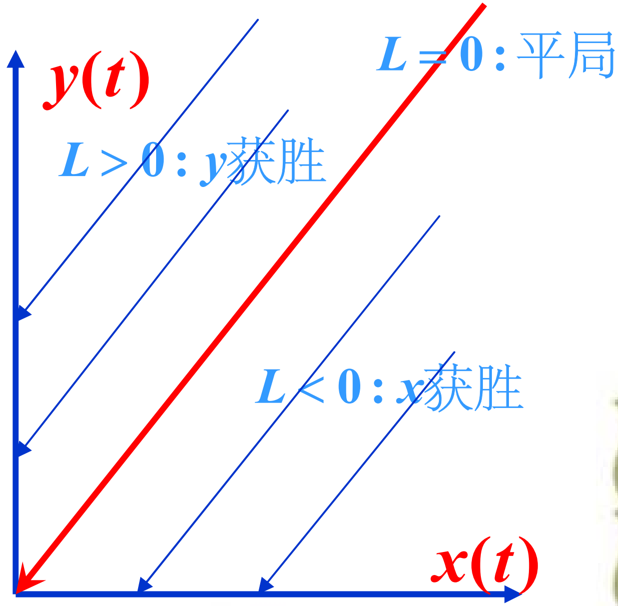
$\longrightarrow \dfrac{y_0}{x_0} \gtrless \dfrac{h}{g} \quad \left(h = r_x \dfrac{S_{rx}}{S_y}, g = r_y \dfrac{S_{ry}}{S_x} \right)$

射击率

一次射击的有效面积

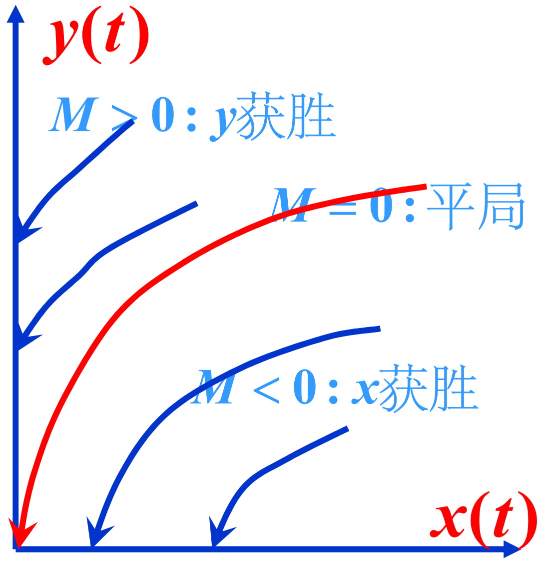
游击队员的活动面积

$\longrightarrow \dfrac{S_y y_0}{S_x x_0} \gtrless \dfrac{r_x S_{rx}}{r_y S_{ry}}$



结论：战前力量对比与队员活动面积对比同样重要.

3. 游击队<>常规部队(抛物律)



简化模型为：

游击战 $\begin{cases} x'(t) = -gxy \\ y'(t) = -bx \end{cases} \longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b}{gy}$

$$\longrightarrow g\left(y^2 - y_0^2\right) = 2b\left(x - x_0\right)$$

$$\longrightarrow gy^2 - 2bx = M\left(= gy_0^2 - 2bx_0\right)$$

$$\longrightarrow \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \frac{2b}{gx_0} \quad \left(b = r_x p_x, g = r_y \frac{S_{ry}}{S_x}\right)$$

射击率

一次射击的有效面积

游击队员的活动面积

$$\longrightarrow \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 2\frac{r_x}{r_y}\frac{S_x p_x}{S_{ry}}\frac{1}{x_0}$$

结论：该模型适合以弱胜强.

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 2\frac{r_x}{r_y}\frac{S_x p_x}{S_{ry}}\frac{1}{x_0}$$

举例：游击甲方x——兵力100，命中率0.1, 活动范围0.1平方公里，射击率是正规乙方的一半，乙方每次有效射击面积1平方米，则乙方取胜需要兵力y_0:

$$y_0 > \sqrt{2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{0.1\cdot 10^6\cdot 0.1}{1}\cdot 100} = 1000$$ 需10倍的兵力！

模型检验：1) 1954年J. H. Engel用常规战模型分析了美日硫磺岛战役，结果与美方战地记录吻合！

2) 游击<>常规战应用——越南战争美国撤军：

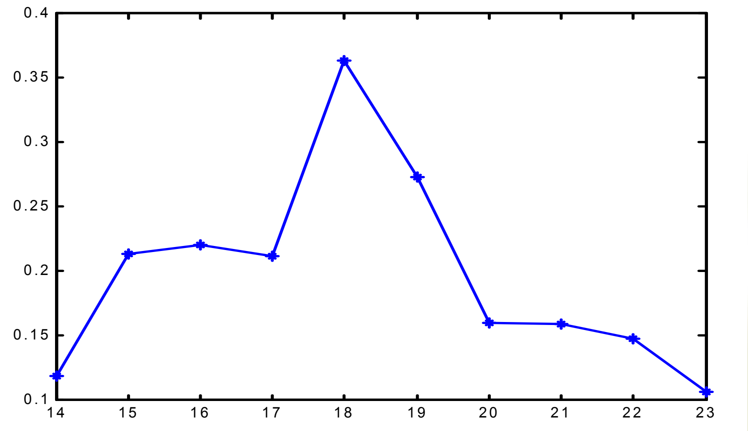
1968年美方兵力只有6倍，且只能增援到6.7倍，故没有增援，而于1973年撤军。

建模示例4：地中海鲨鱼问题

意大利生物学家**Ancona**曾致力于鱼类种群相互制约关系的研究，他从第一次世界大战期间,地中海各港口捕获的几种鱼类捕获量百分比的资料中，发现鲨鱼等的比例有明显增加(见下表),而供其捕食的食用鱼的百分比却明显下降.显然战争使捕鱼量下降，食用鱼增加，鲨鱼等也随之增加,但为何鲨鱼的比例大幅增加呢？

捕获鱼中鲨鱼等食肉鱼的比例

年代	1914	1915	1916	1917	1918
百分比	11.9	21.4	22.1	21.2	36.4
年代	1919	1920	1921	1922	1923
百分比	27.3	16.0	15.9	14.8	10.7



他无法解释这个现象，于是求助于著名的意大利数学家**V. Volterra**，希望建立一个食饵—捕食系统的数学模型，定量地回答这个问题.

1. 基本假设：

(1)食饵由于捕食者的存在使增长率降低，假设降低的程度与捕食者数量成正比；

(2)捕食者由于食饵为它提供食物的作用使其死亡率降低或使之增长，假定增长的程度与食饵数量成正比。

2. 符号说明：

x——食饵在t时刻的数量；

y——捕食者在t时刻的数量；

a——食饵独立生存时的增长率；

b——捕食者独立生存时的死亡率；

e——捕食者掠取食饵的能力；

f——食饵对捕食者的供养能力.

κ——捕获能力系数.

3. 模型(一) 不考虑人工捕获

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(a - ey) \\ \dfrac{dy}{dt} = y(-b + fx) \end{cases}$$

该模型反映了在没有人工捕获的自然环境中食饵与捕食者之间的制约关系，没有考虑食饵和捕食者自身的阻滞作用，是最简单的模型.

4. 模型(一) 求解

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(a-ey) \\ \dfrac{dy}{dt} = y(-b+fx) \end{cases} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{x(a-ey)}{y(-b+fx)}$$

$$\Rightarrow \left(f - \frac{b}{x}\right)dx = \left(\frac{a}{y} - e\right)dy$$

$$\Rightarrow \frac{x^b}{e^{fx}} \cdot \frac{y^a}{e^{ey}} = c$$

利用微分方程的相关理论，知原方程组的解是周期解，设周期为**T**，则为了解释问题中的数据，需计算**x**、**y**的平均值：

$$\bar{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = \frac{1}{Tf}\int_0^T \left(\frac{y'}{y} + b\right)dt$$

$$= \frac{b}{f} + \frac{1}{Tf}\left(\ln y(T) - \ln y(0)\right) = \frac{b}{f}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)dt = \frac{a}{e}$$

5. 模型(二) 考虑人工捕捞

K——捕获能力系数.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(a - ey) - Kx \\ \dfrac{dy}{dt} = y(-b + fx) - Ky \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x[(a - K) - ey)] \\ \dfrac{dy}{dt} = y[-(b + K) + fx] \end{cases}$$

类似可计算x、y的平均值：

$$\bar{x} = \frac{b + K}{f}$$

$$\bar{y} = \frac{a - K}{e}$$

结论：增加捕捞后捕食者平均值降低，而饵食(食用鱼)平均值增加；进一步捕捞能力系数下降也导致捕食者(鲨鱼等)数量上升。——"涸泽而鱼"除外

推广：解释杀虫剂的反效果——杀虫剂在杀死害虫的同时也杀死其天敌益虫，这将导致害虫量的增加。

用Matlab软件求常微分方程的数值解

$[t, x]=\text{solver}('\text{fun}', ts, x_0, \text{options})$

自变量值

函数值

ode45
ode23
ode113
ode15s
ode23s

由待解方程写成的m-文件名

ts=[t_0,t_f]，t_0、t_f为自变量的初值和终值

函数的初始值

ode23：组合的2/3阶龙格-库塔-芬尔格算法
ode45：运用组合的4/5阶龙格-库塔-芬尔格算法

help ode45/23….

用于设定误差限(缺省时设定相对误差10^{-3}, 绝对误差10^{-6}),命令为：
options=odeset('reltol',rt,'abstol',at),
rt, at：分别为设定的相对误差和绝对误差.

6. 模型检验

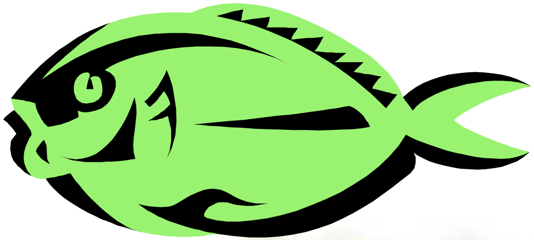
针对一组具体的数据用 **Matlab** 软件进行计算.

设食饵和捕食者的初始数量分别为 $x(0)=x_0$， $y(0)=y_0$

对于数据 $a=1, e=0.1, b=0.5, f=0.02, x_0=25, y_0=2$，

t 的终值经试验后确定为 15，即模型为：

$$\begin{cases} x' = x(1-0.1y) \\ y' = y(-0.5+0.02x) \\ x(0)=25, y(0)=2 \end{cases}$$



首先，建立m-文件shier.m如下：

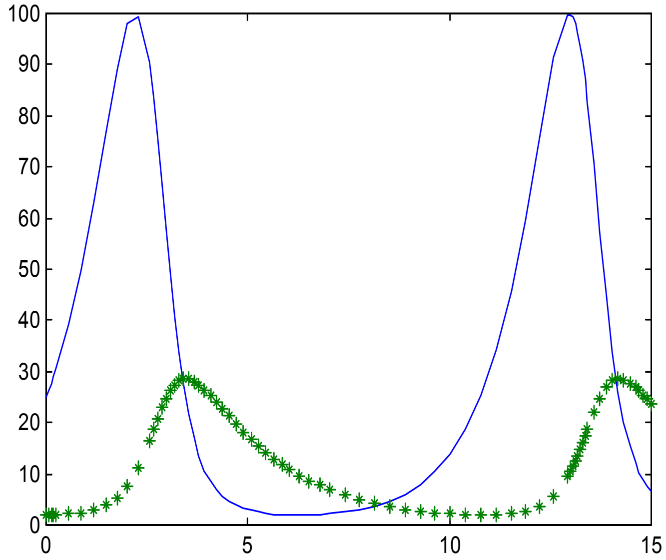
```
function dx=shier(t,x)
dx=zeros(2,1);
dx(1)=x(1)*(1-0.1*x(2));
dx(2)=x(2)*(-0.5+0.02*x(1));
```

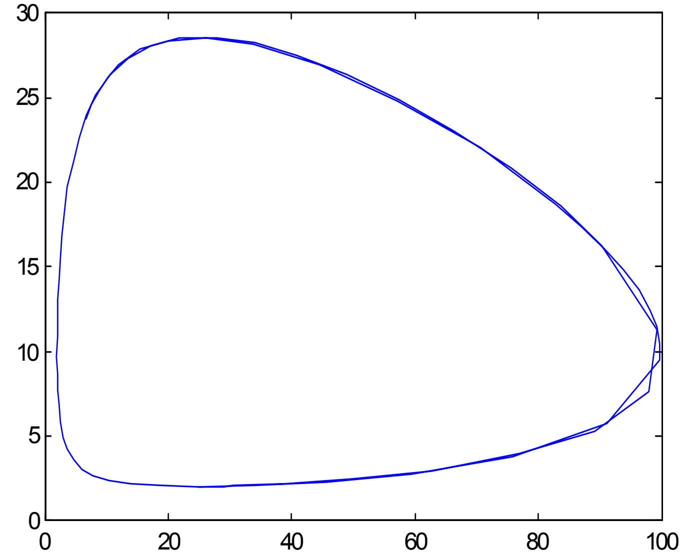
其次，建立主程序shark.m如下：

```
[t,x]=ode45('shier',[0 15],[25 2]);
plot(t,x(:,1),'-',t,x(:,2),'*')
plot(x(:,1),x(:,2))
```

求解结果：

数值解如下图：$x(t)$ 为实线，$y(t)$ 为 “*” 线. 相图 (x, y) 为：





由上两图知：$x(t)$与$y(t)$都是周期函数

模型（二） 考虑人工捕获

设表示捕获能力的系数为***K***，相当于食饵的自然增长率由***a***降为***a-K***，捕食者的自然死亡率由***b***增为 ***b+K***

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1[(r_1 - e) - \lambda_1 x_2] \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_2[-(r_2 + e) + \lambda_2 x_1] \end{cases}$$

仍取$a = 1, e = 0.1, b = 0.5, f = 0.02, x(0) = 25, y(0) = 2$

设战前捕获能力系数***K*=0.3**, 战争中降为***K*=0.1**, 则战前与战争中的模型分别为:

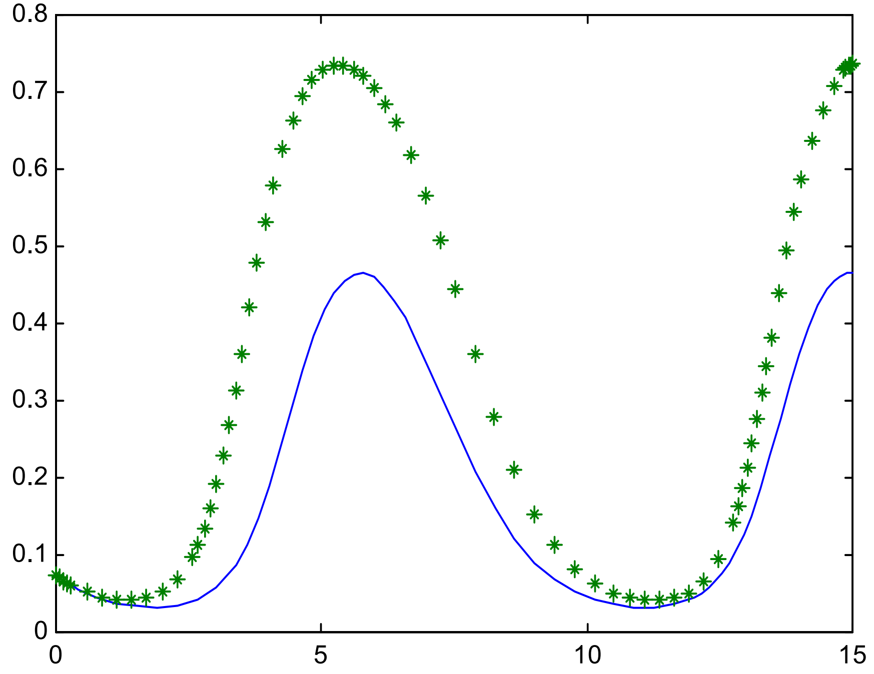
$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1(0.7 - 0.1x_2) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_2(-0.8 + 0.02x_1) \\ x_1(0) = 25, x_2(0) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1(0.9 - 0.1x_2) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_2(-0.6 + 0.02x_1) \\ x_1(0) = 25, x_2(0) = 2 \end{cases}$$

模型求解:

1、分别用**m-**文件**shier1.m**和**shier2.m**定义上述两个方程

2、建立主程序**shark1.m**, 求解两个方程，并画出两种情况下鲨鱼数在鱼类总数中所占比例 **y(t)/[y(t)+y(t)]**



To Matlab(shark1)

实线为战前的鲨鱼比例，“*”线为战争中的鲨鱼比例

结论：战争中鲨鱼的比例比战前高！

补充——差分方程

1. 定义——对一数列$\{a_n\}$，把数列中的和前面$a_i(0\leqslant i\leqslant n)$关联起来的方程叫做差分方程, 差分方程也叫递推关系.

例如：$a_n = a_{n-1} - na_{n-2}$， $a_n - 3a_{n-1} = n$

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} - na_{n-2} \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases}$$ ←差分初值问题

例：在一个平面上有n个圆两两相交，但任三个圆无公共点. 设此n个圆将平面分成a_n个区域，试建立关于a_n的差分方程.

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2(n-1) \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

2. 解法——常系数线性差分方程的解法

K阶常系数线性齐次差分方程形如：

$$a_n + b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2} + \cdots + b_k a_{n-k} = 0 \quad (b_i\text{是常数，}\ b_k \neq 0, n \geq k)$$

$$x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_k = 0$$ ←差分方程的特征方程

基于此特征方程，可得到与常系数线性微分方程类似的结论！

$$\left(e^x\right)^t \rightarrow \left(x\right)^n$$ 单根、重根、复根、非齐次都类似！

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \\ a_1 = a_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{特征根} x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow a_n = c_1\left[\left(1+\sqrt{5}\right)/2\right]^n + c_2\left[\left(1-\sqrt{5}\right)/2\right]^n$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left(\left(1+\sqrt{5}\right)^n + \left(1-\sqrt{5}\right)^n\right)$$

练习:

$$a_n - 4a_{n-1} + a_{n-2} = 2^n$$

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} - a_{n-2} \\ a_1 = 1, a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_n - 3a_{n-1} = n \\ a_1 = 3 \end{cases}$$