Algoritmos e Programação de Computadores

Disciplina 113476

http://www.nickgentry.com/

Prof. Alexandre Zaghetto
http://alexandre.zaghetto.com
zaghetto@unb.com

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Ciência da Computação

O presente conjunto de *slides* não pode ser reutilizado ou republicado sem a permissão do instrutor.

Módulo 16
Recursividade

1. Recursividade

- É uma das ferramentas de programação mais poderosas e menos entendidas pelo principiantes em programação.

- Como vocês já não são mais principiantes, suponho eu, esse capítulo será mamão com açúcar.

- Após termos trabalhando com funções, alguns devem ter se perguntado:

Uma função pode chamar ela mesma?

- A resposta é sim, e esta técnica se chama RECURSIVIDADE.

- Algumas vezes ela facilita a interpretação de certos problemas.

1. Recursividade

• Uma questão fundamental é:

Quando parar de chamar a função?

• A recursão requer a repetição explícita de um processo até que determinada condição seja satisfeita.

• Se você não garantir isto, o algoritmo entrará num laço infinito.

1. Recursividade

- Exemplo:

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

int loop(int);

int main(int argc, char *argv[])
{
  int n;

  n = loop(5);

  system("PAUSE");
  return 0;
}

int loop(int x){

    if(x < 10)

    return loop(x);

}
```

1. Recursividade

Problema: Escreva uma função que recebe como parâmetro um inteiro positivo **N** e retorna a soma de todos os números inteiros entre 0 e **N**.

- Solução iterativa:

```
int somatorio(int N)
{
        int i, resp = 0;

        for( i = 1; i <= N; i++ )
                resp += i;

return resp;
}
```

1. Recursividade

Problema: Escreva uma função que recebe como parâmetro um inteiro positivo **N** e retorna a soma de todos os números inteiros entre 0 e **N**.

- Solução recursiva:

```
int somatorio(int N)
{
        if( N == 1 )
                return 1;
        else
                return N + somatorio(N - 1);
}
```

1. Recursividade

- A função fatorial:

$$n! = \begin{cases} 1 & se\ n = 0 \\ n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 & se\ n > 0 \end{cases}$$

➢ Exemplos

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

1. Recursividade

- A função fatorial:

  ✓ De forma iterativa:

$$fatorial\ (n) = 1 * 2 * 3 \ldots\ n$$

  ✓ De forma recursiva:

$$fatorial\ (n) = n * fatorial\ (n - 1),$$
$$fatorial\ (0) = 1$$

1. Recursividade

- Solução:

  ✓ De forma iterativa:

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

int main(int argc, char *argv[])
{
  int n, i, fat = 1;

  printf("Digite n:");
  scanf("%d", &n);

  for(i = 1; i<=n;i++) fat = fat*i;

  printf("%d \n", fat);

  system("PAUSE");
  return 0;
}
```

1. Recursividade

- Solução:

  ✓ De forma recursiva:

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

int fatorial (int);

int main(int argc, char *argv[])
{
  int n, fat;

  printf("Digite n:");
  scanf("%d", &n);

  fat = fatorial(n);
```

1. Recursividade

- Solução:

  ✓ De forma recursiva:

```
   printf("%d \n", fat);

  system("PAUSE");
  return 0;
}

int fatorial (int n){

    if(n==0)
        return 1;
    else
        return n*fatorial(n-1);
}
```

1. Recursividade

- Exemplo - fatorial(3):

```
int fatorial (int n){

    if(n==0)
        return 1;
    else
        return n*fatorial(n-1);
}
```

```
N = fatorial(3);
```

1. Recursividade

- Exemplo - fatorial(3):

```
int fatorial (int n){

    if(n==0)
        return 1;
    else
        return n*fatorial(n-1);
}
```

```
N = fatorial(3);
    return 3*fatorial(3-1);
```

1. Recursividade

- Exemplo - fatorial(3):

```
int fatorial (int n){

    if(n==0)
        return 1;
    else
        return n*fatorial(n-1);
}
```

```
N = fatorial(3);
    return 3*fatorial(3-1);
              [fatorial(2)];
```

1. Recursividade

- Exemplo - fatorial(3):

```
int fatorial (int n){

    if(n==0)
        return 1;
    else
        return n*fatorial(n-1);
}
```

```
N = fatorial(3);
    return 3*fatorial(3-1);
               [fatorial(2)];
               return 2*fatorial(2-1);
```

1. Recursividade

- Exemplo - fatorial(3):

```
int fatorial (int n){

    if(n==0)
        return 1;
    else
        return n*fatorial(n-1);
}
```

```
N = fatorial(3);
    return 3*fatorial(3-1);
              [fatorial(2)];
              return 2*fatorial(2-1);
                        [fatorial(1)];
```

1. Recursividade

- Exemplo - fatorial(3):

```
int fatorial (int n){

    if(n==0)
        return 1;
    else
        return n*fatorial(n-1);
}
```

```
N = fatorial(3);
    return 3*fatorial(3-1);
              [fatorial(2)];
              return 2*fatorial(2-1);
                         [fatorial(1)];
                         return 1*fatorial(1-1);
```

1. Recursividade

- Exemplo - fatorial(3):

```
int fatorial (int n){

    if(n==0)
        return 1;
    else
        return n*fatorial(n-1);
}
```

```
N = fatorial(3);
    return 3*fatorial(3-1);
              [fatorial(2)];
              return 2*fatorial(2-1);
                         [fatorial(1)];
                         return 1*fatorial(1-1);
                                   [fatorial(0)]
```

1. Recursividade

- Exemplo - fatorial(3):

```
int fatorial (int n){

    if(n==0)
        return 1;
    else
        return n*fatorial(n-1);
}
```

```
N = fatorial(3);
    return 3*fatorial(3-1);
               [fatorial(2)];
               return 2*fatorial(2-1);
                          [fatorial(1)];
                          return 1*fatorial(1-1);
                                     [fatorial(0)]
                                     return 1;
```

1. Recursividade

- Exemplo - fatorial(3):

```
int fatorial (int n){

    if(n==0)
        return 1;
    else
        return n*fatorial(n-1);
}
```

```
N = fatorial(3);
    return 3*fatorial(3-1);
              [fatorial(2)];
              return 2*fatorial(2-1);
                       [fatorial(1)];
                       return 1*fatorial(1-1);
                                return 1;
```

1. Recursividade

- Exemplo - fatorial(3):

```
int fatorial (int n){

    if(n==0)
        return 1;
    else
        return n*fatorial(n-1);
}
```

```
N = fatorial(3);
    return 3*fatorial(3-1);
              [fatorial(2)];
              return 2*fatorial(2-1);
                        [fatorial(1)];
                        return 1*1;
```

1. Recursividade

- Exemplo - fatorial(3):

```
int fatorial (int n){

    if(n==0)
        return 1;
    else
        return n*fatorial(n-1);
}
```

```
N = fatorial(3);
    return 3*fatorial(3-1);
               [fatorial(2)];
               return 2*fatorial(2-1);
                             [fatorial(1)];
                             return 1;
```

1. Recursividade

- Exemplo - fatorial(3):

```
int fatorial (int n){

    if(n==0)
        return 1;
    else
        return n*fatorial(n-1);
}
```

```
N = fatorial(3);
    return 3*fatorial(3-1);
              [fatorial(2)];
              return 2*fatorial(2-1);
                        return 1;
```

1. Recursividade

- Exemplo - fatorial(3):

```
int fatorial (int n){

    if(n==0)
        return 1;
    else
        return n*fatorial(n-1);
}
```

```
N = fatorial(3);
    return 3*fatorial(3-1);
                [fatorial(2)];
                return 2*1;
```

1. Recursividade

- Exemplo - fatorial(3):

```
int fatorial (int n){

    if(n==0)
        return 1;
    else
        return n*fatorial(n-1);
}
```

```
N = fatorial(3);
    return 3*fatorial(3-1);
              [fatorial(2)];
              return 2;
```

1. Recursividade

- Exemplo - fatorial(3):

```
int fatorial (int n){

    if(n==0)
        return 1;
    else
        return n*fatorial(n-1);
}
```

```
N = fatorial(3);
      return 3*fatorial(3-1);
                  return 2;
```

1. Recursividade

- Exemplo - fatorial(3):

```
int fatorial (int n){

    if(n==0)
        return 1;
    else
        return n*fatorial(n-1);
}
```

```
N = fatorial(3);
      return 3*2;
```

1. Recursividade

- Exemplo - fatorial(3):

```
int fatorial (int n){

    if(n==0)
        return 1;
    else
        return n*fatorial(n-1);
}
```

```
N = fatorial(3);
    return 6;
```

1. Recursividade

- Exemplo - fatorial(3):

```
int fatorial (int n){

    if(n==0)
        return 1;
    else
        return n*fatorial(n-1);
}
```

N = **6;**

1. Recursividade

- Escrevendo programas recursivos:

  - Primeiro podemos reconhecer um grande número de casos a solucionar: 0!, 1!, 2!, 3!, 4! etc.

  - Podemos também identificar um caso "trivial", não-recursivo, diretamente solucionável: 0!=1.

  - Encontramos um método para solucionar um caso "complexo" em termos de um caso "mais simples": n! = n*(n-1)!

  - A transformação do caso mais complexo no caso mais simples deve ocasionalmente resultar num caso "trivial".

1. Recursividade

- Fibonacci e razão áurea:

$$F(n) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } n = 0\,; \\ 1, & \text{se } n = 1; \\ F(n-1) + F(n-2) & \text{outros casos.} \end{cases}$$

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

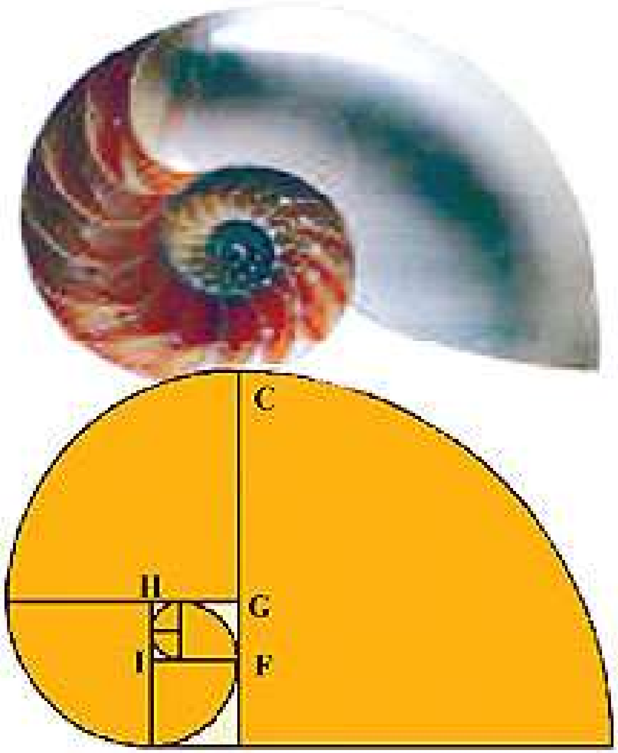
- Razão Áurea:

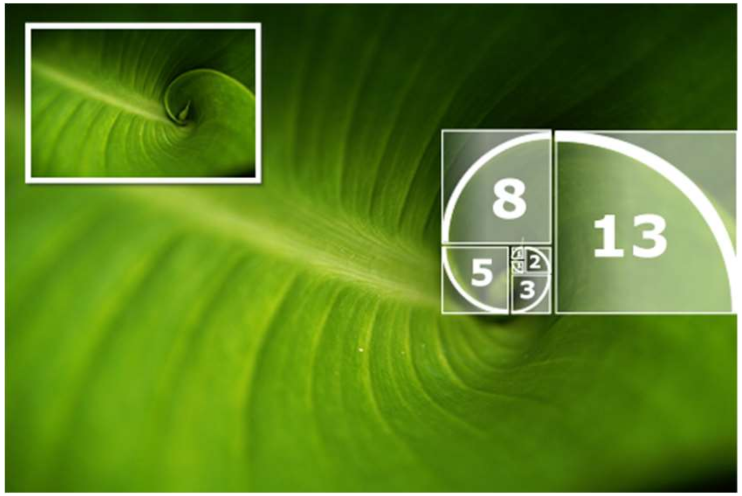
$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618\,033\,989\,.$$

55/34 ≈ 1,61765

1. Recursividade

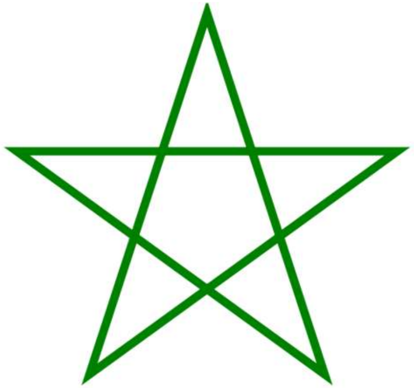
- Fibonacci e razão áurea:

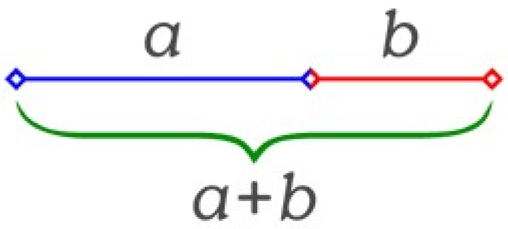


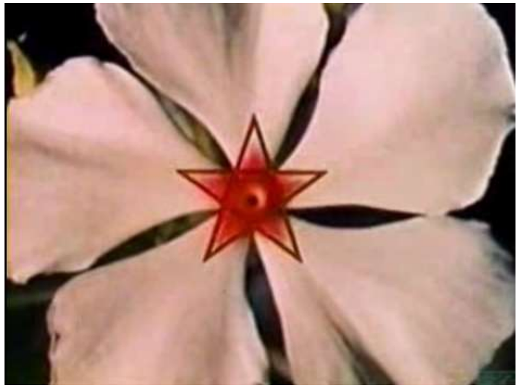


1. Recursividade

- Fibonacci e razão áurea:

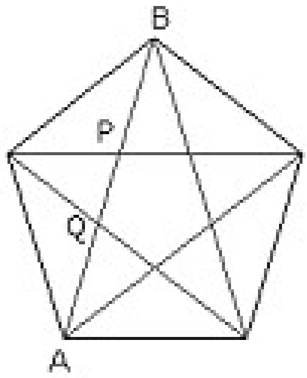






1. Recursividade

- Fibonacci e razão áurea:



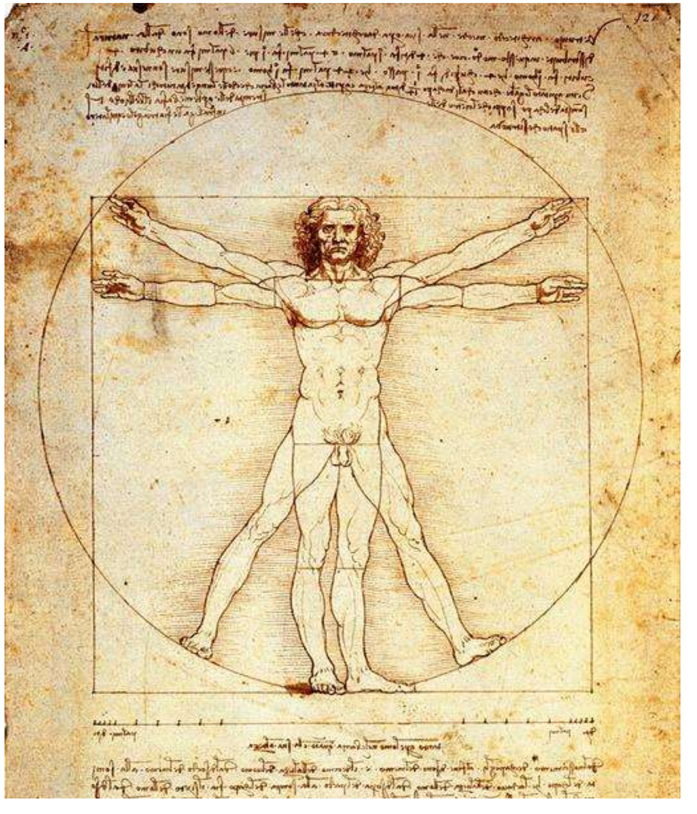


1. Recursividade

- Fibonacci e razão áurea:

1. Recursividade

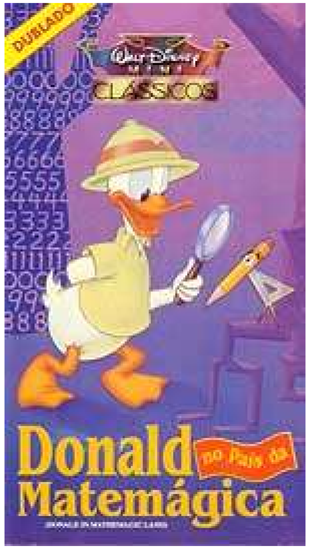
- Fibonacci e razão áurea:



1. Recursividade

- Fibonacci e razão áurea:

  ✓ Mais em “Donald no País da Matemágica”.



http://www.youtube.com/watch?v=hWLAtn3KVw8

1. Recursividade

- Fibonacci:

$$F(n) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } n = 0\,; \\ 1, & \text{se } n = 1; \\ F(n-1) + F(n-2) & \text{outros casos.} \end{cases}$$

```
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...
```

Pro lar, implementar
a solução recursiva em C.

1. Recursividade

- Multiplicação de números naturais:

  - A multiplicação de a*b pode ser vista a soma de a, b vezes, ou seja:

$$a \cdot b = \begin{cases} a & se\ b = 1 \\ a \cdot (b-1) + a & se\ b > 1 \end{cases}$$

  - 6*3 = 6*(3-1)+6
    = 6*2+6
    = 6*(2-1)+6+6
    = 6*1+6+6
    = 6+6+6
    = 18

1. Recursividade

- Multiplicação de números naturais:

  ➢ A multiplicação de a*b pode ser vista a soma de a, b vezes, ou seja:

$$a \cdot b = \begin{cases} a & se\ b = 1 \\ a \cdot (b-1) + a & se\ b > 1 \end{cases}$$

  ➢ 6*3 = 6*(3-1)+6
  = 6*2+6
  = 6*(2-1)+6+6
  = 6*1+6+6
  = 6+6+6
  = 18

Pro lar, implementar
a solução recursiva em C.

1. Recursividade

Exercício: O quadrado de um número natural n é dado pela soma dos n primeiros números ímpares consecutivos. Por exemplo, $1^2=1$, $2^2=1+3$, $3^2=1+3+5$, $4^2=1+3+5+7$, etc. Dado um número n, escreva uma função recursiva que calcula seu quadrado usando a soma de ímpares.

1. Recursividade

Exercício: O quadrado de um número natural n é dado pela soma dos n primeiros números ímpares consecutivos. Por exemplo, $1^2=1$, $2^2=1+3$, $3^2=1+3+5$, $4^2=1+3+5+7$, etc. Dado um número n, escreva uma função recursiva que calcula seu quadrado usando a soma de ímpares.

- $5^2 = 1+3+5+7+9 = 25$

1. Recursividade

Exercício: O quadrado de um número natural n é dado pela soma dos n primeiros números ímpares consecutivos. Por exemplo, $1^2=1$, $2^2=1+3$, $3^2=1+3+5$, $4^2=1+3+5+7$, etc. Dado um número n, escreva uma função recursiva que calcula seu quadrado usando a soma de ímpares.

- $5^2 = 1+3+5+7+9 = 25$
- $5^2 = \underbrace{\boxed{1+3+5+7}}_{4^2}+9$

1. Recursividade

Exercício: O quadrado de um número natural n é dado pela soma dos n primeiros números ímpares consecutivos. Por exemplo, $1^2=1$, $2^2=1+3$, $3^2=1+3+5$, $4^2=1+3+5+7$, etc. Dado um número n, escreva uma função recursiva que calcula seu quadrado usando a soma de ímpares.

- $5^2 = 1+3+5+7+9 = 25$
- $5^2 = \underbrace{\boxed{1+3+5+7}}_{4^2}+9$
- $4^2 = \underbrace{\boxed{1+3+5}}_{3^2}+7$

1. Recursividade

Exercício: O quadrado de um número natural n é dado pela soma dos n primeiros números ímpares consecutivos. Por exemplo, $1^2=1$, $2^2=1+3$, $3^2=1+3+5$, $4^2=1+3+5+7$, etc. Dado um número n, escreva uma função recursiva que calcula seu quadrado usando a soma de ímpares.

- $5^2 = 1+3+5+7+9 = 25$
- $5^2 = \underbrace{\boxed{1+3+5+7}}_{4^2}+9$
- $4^2 = \underbrace{\boxed{1+3+5}}_{3^2}+7$
- $3^2 = \underbrace{\boxed{1+3}}_{2^2}+5$

1. Recursividade

Exercício: O quadrado de um número natural n é dado pela soma dos n primeiros números ímpares consecutivos. Por exemplo, $1^2=1$, $2^2=1+3$, $3^2=1+3+5$, $4^2=1+3+5+7$, etc. Dado um número n, escreva uma função recursiva que calcula seu quadrado usando a soma de ímpares.

- $5^2 = 1+3+5+7+9 = 25$
- $5^2 = \underbrace{\boxed{1+3+5+7}}_{4^2}+9$
- $4^2 = \underbrace{\boxed{1+3+5}}_{3^2}+7$
- $3^2 = \underbrace{\boxed{1+3}}_{2^2}+5$
- $2^2 = \underbrace{\boxed{1}}_{1^2}+3$

1. Recursividade

Exercício: O quadrado de um número natural n é dado pela soma dos n primeiros números ímpares consecutivos. Por exemplo, $1^2=1$, $2^2=1+3$, $3^2=1+3+5$, $4^2=1+3+5+7$, etc. Dado um número n, escreva uma função recursiva que calcula seu quadrado usando a soma de ímpares.

- $5^2 = 1+3+5+7+9 = 25$
- $5^2 = \underbrace{\boxed{1+3+5+7}}_{4^2}+9$
- $4^2 = \underbrace{\boxed{1+3+5}}_{3^2}+7$
- $3^2 = \underbrace{\boxed{1+3}}_{2^2}+5$
- $2^2 = \underbrace{\boxed{1}}_{1^2}+3$
- $1^2 = 1$

1. Recursividade

Exercício: O quadrado de um número natural n é dado pela soma dos n primeiros números ímpares consecutivos. Por exemplo, $1^2=1$, $2^2=1+3$, $3^2=1+3+5$, $4^2=1+3+5+7$, etc. Dado um número n, escreva uma função recursiva que calcula seu quadrado usando a soma de ímpares.

- $5^2 = 1+3+5+7+9 = 25$
- $5^2 = \underbrace{\boxed{1+3+5+7}}_{4^2}+9$
- $4^2 = \underbrace{\boxed{1+3+5}}_{3^2}+7$
- $3^2 = \underbrace{\boxed{1+3}}_{2^2}+5$
- $2^2 = \underbrace{\boxed{1}}_{1^2}+3$
- $1^2 = 1$

$$n^2 = (2*n-1) + (n-1)^2$$

1. Recursividade

- Solução:

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

int quadrado (int);

int main (int argc, char *argv[])
{
    int n = 6, result;

    result = quadrado(n);
    printf("%d \n", result);

    system("PAUSE");
    return 0;
}

int quadrado (int n){

    if (n==1)
       return 1;
    else
       return (2*n-1) + quadrado(n-1);
}
```

1. Recursividade

Exercício: Escrever um programa recursivo que dados n e k, mostra na tela do computador todas as combinações de n, k a k. Por exemplo, se n = 6 e k = 4:

i	j	k	m
3	2	1	0
4	2	1	0
4	3	1	0
4	3	2	0
4	3	2	1
5	2	1	0
5	3	1	0
5	3	2	0
5	3	2	1
5	4	1	0
5	4	2	0
5	4	2	1
5	4	3	0
5	4	3	1
5	4	3	2

1. Recursividade

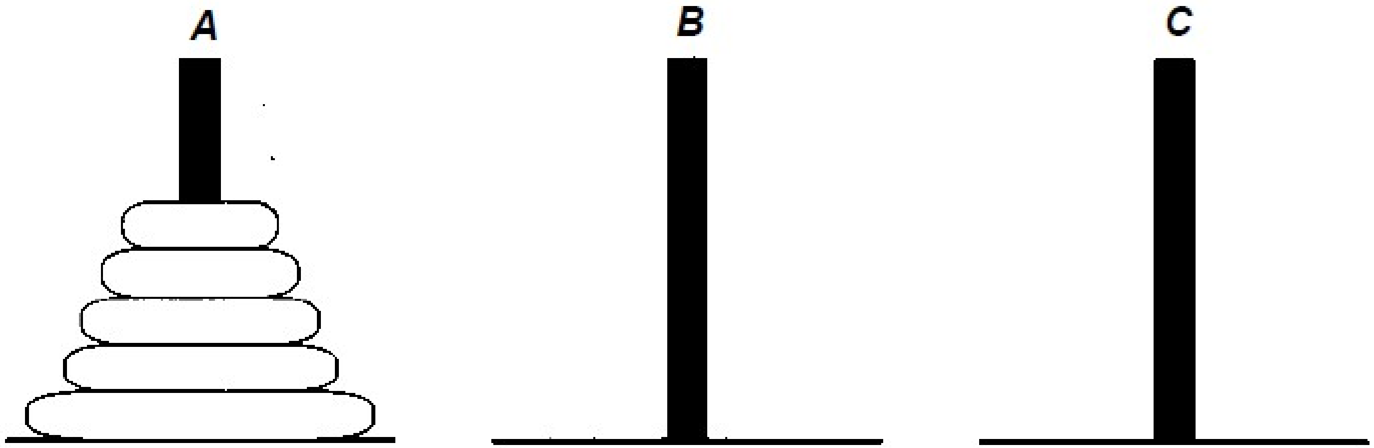
Exercício: Escrever um programa recursivo que dados n e k, mostra na tela do computador todas as cominações de n, k a k. Por exemplo, se n = 6 e k = 4:

i	j	k	m
3	2	1	0
4	2	1	0
4	3	1	0
4	3	2	0
4	3	2	1
5	2	1	0
5	3	1	0
5	3	2	0
5	3	2	1
5	4	1	0
5	4	2	0
5	4	2	1
5	4	3	0
5	4	3	1
5	4	3	2

```
for(i = 3; i<6; i++)
  for(j = 2; j<i; j++)
    for(k = 1; k<j; k++)
      for(m = 0; m<k; m++)
        printf("%d%d%d%d",i,j,k,m);
```

1. Recursividade

- O problema das Torres de Hanoi:



➢ O objetivo é deslocar os cinco discos para a estaca C, usando B como auxiliar.

➢ Somente o primeiro disco pode ser deslocado.

➢ Um disco maior não pode ser posicionado sobre um menor.

1. Recursividade

- O problema das Torres de Hanoi:

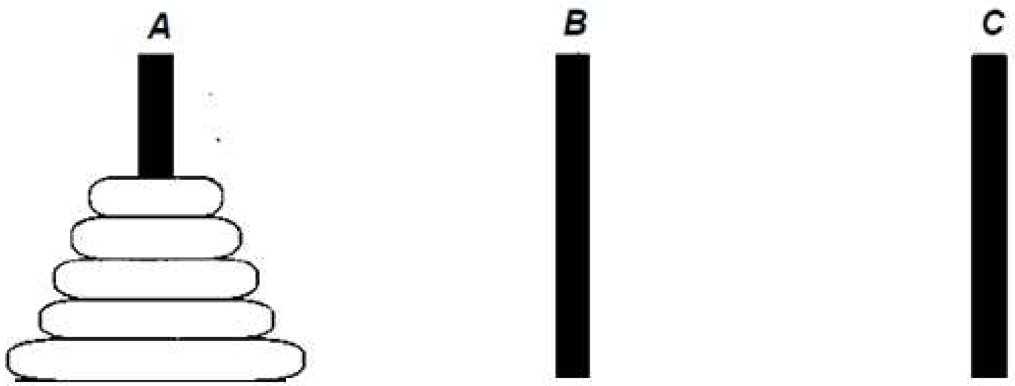
  ➢ Considerando o caso geral, para *n* discos:

    ✓ Suponha que tivéssemos uma solução para *n-1* discos e pudéssemos dar a solução para *n*, em função da solução para *n-1* discos.

    ✓ No caso trivial, no qual temos apenas um único disco, basta deslocá-lo de A para C.

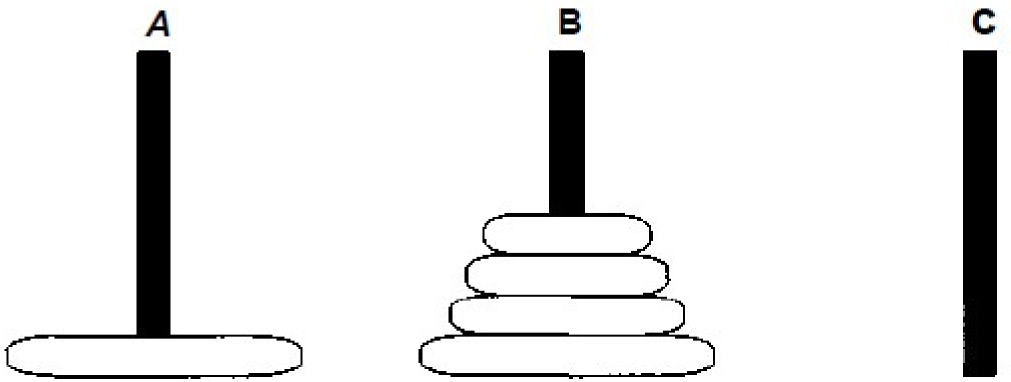
1. Recursividade

- O problema das Torres de Hanoi:
  - Se n = 5:
    - ✓ Vamos supor que eu pudesse movimentar os quatro primeiros discos da estaca A para a estaca B, usando C como auxiliar.



1. Recursividade

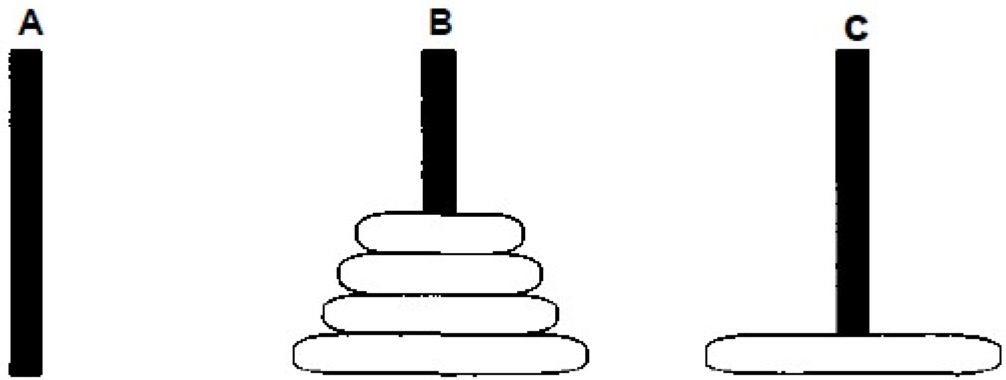
- O problema das Torres de Hanoi:
  - ➢ Se n = 5:
    - ✓ Vamos supor que eu pudesse movimentar os quatro primeiros discos da estaca A para a estaca B, usando C como auxiliar.



(a)

1. Recursividade

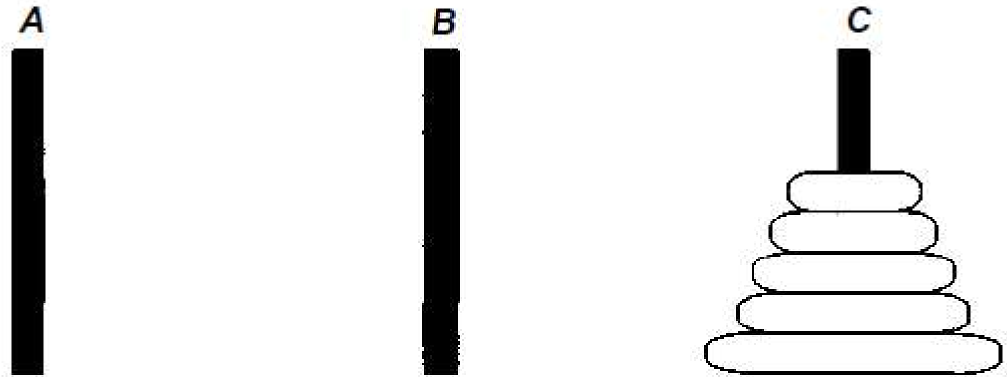
- O problema das Torres de Hanoi:
  - ➢ Se n = 5:
    - ✓ Poderíamos deslocar o maior disco de A para C.



(b)

1. Recursividade

- O problema das Torres de Hanoi:
  - ➢ Se n = 5:
    - ✓ E, por último, aplicar novamente a solução aos quatro discos, movendo-os de B para C, usando A como auxiliar.



(c)

1. Recursividade

- O problema das Torres de Hanoi:

  - Para mover *n* discos de A para C, usando B como auxiliar:

    1. Se n=1, desloque o único disco de A para C e pare.

    2. Desloque os *n-1* primeiros discos de A para B, usando C como auxiliar.

    3. Desloque o último disco de A para C.

    4. Mova os *n-1* discos de B para C, usando A como auxiliar.

1. Recursividade

- Solução:

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

void hanoi(int, char, char, char);

int main(int argc, char *argv[])
{

  int n = 3;

  hanoi(n, 'A', 'B', 'C');

  return 0;
}

void hanoi(int n, char origem, char intermediario, char destino){

    if(n==1){
       printf("Mover %c -> %c \n",origem, destino);
       exit;
    }else{
       hanoi(n-1, origem, destino, intermediario);
       printf("Mover %c -> %c \n",origem, destino);
       hanoi(n-1, intermediario, origem, destino);
    }
}
```

1. Recursividade

- Algoritmo de Euclides para determinação do MDC:

1. Sejam *a* e *b* dois números inteiros, com *a*>*b*.

2. Divida *a* por *b*, encontrando um quociente *q* e um resto *r* (isto é, *a* = *q***b*+*r*).

3. Defina *a* = *b* e *b* = *r*.

4. Repita os passos 2 e 3, até que *b* seja igual a 0.

5. O MDC é igual ao valor armazenado em *a*.

1. Recursividade

- MDC(1976, 1032):

1. a = 1976 e b = 1032.

2. Divida *a* por *b*, encontrando um quociente *q* e um resto *r* (isto é, *a* = *q***b*+*r*).

3. Defina *a* = *b* e *b* = *r*.

4. Repita os passos 2 e 3, até que *b* seja igual a 0.

5. MDC(1976, 1032) = *a*.

Passo	a	b	q	r
1	**1976**	**1032**		
2	1976	1032	1	944
3	1032	944		
4 e 2	1032	944	1	88
3	944	88		
4 e 2	944	88	10	64
3	88	64		
4 e 2	88	64	1	24
3	64	24		
4 e 2	64	24	2	16
3	24	16		
4 e 2	24	16	1	8
3	16	8		
4 e 2	16	8	2	0
3	8	0		
5	MDC = 8			

1. Recursividade

- MDC(1976, 1032):

1. a = 1976 e b = 1032.

2. Divida *a* por *b*, encontrando um quociente *q* e um resto *r* (isto é, *a* = *q*b+r*).

3. Defina *a* = *b* e *b* = *r*.

4. Repita os passos 2 e 3, até que *b* seja igual a 0.

5. MDC(1976, 1032) = a.

Passo	a	b	q	r
1	1976	1032		
2	**1976**	**1032**	**1**	**944**
3	1032	944		
4 e 2	1032	944	1	88
3	944	88		
4 e 2	944	88	10	64
3	88	64		
4 e 2	88	64	1	24
3	64	24		
4 e 2	64	24	2	16
3	24	16		
4 e 2	24	16	1	8
3	16	8		
4 e 2	16	8	2	0
3	8	0		
5	MDC = 8			

1. Recursividade

- MDC(1976, 1032):

1. a = 1976 e b = 1032.

2. Divida *a* por *b*, encontrando um quociente *q* e um resto *r* (isto é, *a* = *q***b*+*r*).

3. **Defina *a* = *b* e *b* = *r*.**

4. Repita os passos 2 e 3, até que *b* seja igual a 0.

5. MDC(1976, 1032) = a.

Passo	a	b	q	r
1	1976	1032		
2	1976	1032	1	944
3	**1032**	**944**		
4 e 2	1032	944	1	88
3	944	88		
4 e 2	944	88	10	64
3	88	64		
4 e 2	88	64	1	24
3	64	24		
4 e 2	64	24	2	16
3	24	16		
4 e 2	24	16	1	8
3	16	8		
4 e 2	16	8	2	0
3	8	0		
5	MDC = 8			

1. Recursividade

- MDC(1976, 1032):

1. a = 1976 e b = 1032.

2. Divida *a* por *b*, encontrando um quociente *q* e um resto *r* (isto é, *a* = *q*b*+*r*).**

3. Defina *a* = *b* e *b* = *r*.

4. Repita os passos 2 e 3, até que *b* seja igual a 0.

5. MDC(1976, 1032) = a.

Passo	a	b	q	r
1	1976	1032		
2	1976	1032	1	944
3	1032	944		
4 e 2	**1032**	**944**	**1**	**88**
3	944	88		
4 e 2	944	88	10	64
3	88	64		
4 e 2	88	64	1	24
3	64	24		
4 e 2	64	24	2	16
3	24	16		
4 e 2	24	16	1	8
3	16	8		
4 e 2	16	8	2	0
3	8	0		
5	MDC = 8			

1. Recursividade

- MDC(1976, 1032):

1. a = 1976 e b = 1032.

2. Divida *a* por *b*, encontrando um quociente *q* e um resto *r* (isto é, *a* = *q***b*+*r*).

3. Defina *a* = *b* e *b* = *r*.

4. Repita os passos 2 e 3, até que *b* seja igual a 0.

5. MDC(1976, 1032) = a.

Passo	a	b	q	r
1	1976	1032		
2	1976	1032	1	944
3	1032	944		
4 e 2	1032	944	1	88
3	**944**	**88**		
4 e 2	944	88	10	64
3	88	64		
4 e 2	88	64	1	24
3	64	24		
4 e 2	64	24	2	16
3	24	16		
4 e 2	24	16	1	8
3	16	8		
4 e 2	16	8	2	0
3	8	0		
5	MDC = 8			

1. Recursividade

- MDC(1976, 1032):

1. a = 1976 e b = 1032.

2. Divida *a* por *b*, encontrando um quociente *q* e um resto *r* (isto é, *a* = *q*b*+*r*).**

3. Defina *a* = *b* e *b* = *r*.

4. Repita os passos 2 e 3, até que *b* seja igual a 0.

5. MDC(1976, 1032) = a.

Passo	a	b	q	r
1	1976	1032		
2	1976	1032	1	944
3	1032	944		
4 e 2	1032	944	1	88
3	944	88		
4 e 2	**944**	**88**	**10**	**64**
3	88	64		
4 e 2	88	64	1	24
3	64	24		
4 e 2	64	24	2	16
3	24	16		
4 e 2	24	16	1	8
3	16	8		
4 e 2	16	8	2	0
3	8	0		
5	MDC = 8			

1. Recursividade

- MDC(1976, 1032):

1. a = 1976 e b = 1032.

2. Divida *a* por *b*, encontrando um quociente *q* e um resto *r* (isto é, $a = q*b+r$).

3. **Defina *a* = *b* e *b* = *r*.**

4. Repita os passos 2 e 3, até que *b* seja igual a 0.

5. MDC(1976, 1032) = a.

Passo	a	b	q	r
1	1976	1032		
2	1976	1032	1	944
3	1032	944		
4 e 2	1032	944	1	88
3	944	88		
4 e 2	944	88	10	64
3	**88**	**64**		
4 e 2	88	64	1	24
3	64	24		
4 e 2	64	24	2	16
3	24	16		
4 e 2	24	16	1	8
3	16	8		
4 e 2	16	8	2	0
3	8	0		
5	MDC = 8			

1. Recursividade

- MDC(1976, 1032):

1. a = 1976 e b = 1032.

2. Divida *a* por *b*, encontrando um quociente *q* e um resto *r* (isto é, *a = q*b+r*).

3. Defina *a = b* e *b = r*.

4. Repita os passos 2 e 3, até que *b* seja igual a 0.

5. MDC(1976, 1032) = a.

Passo	a	b	q	r
1	1976	1032		
2	1976	1032	1	944
3	1032	944		
4 e 2	1032	944	1	88
3	944	88		
4 e 2	944	88	10	64
3	88	64		
4 e 2	**88**	**64**	**1**	**24**
3	**64**	**24**		
4 e 2	**64**	**24**	**2**	**16**
3	**24**	**16**		
4 e 2	**24**	**16**	**1**	**8**
3	**16**	**8**		
4 e 2	**16**	**8**	**2**	**0**
3	8	0		
5	MDC = 8			

1. Recursividade

- MDC(1976, 1032):

1. a = 1976 e b = 1032.

2. Divida *a* por *b*, encontrando um quociente *q* e um resto *r* (isto é, *a* = *q***b*+*r*).

3. Defina *a* = *b* e *b* = *r*.

4. Repita os passos 2 e 3, até que *b* seja igual a 0.

5. MDC(1976, 1032) = a.

Passo	a	b	q	r
1	1976	1032		
2	1976	1032	1	944
3	1032	944		
4 e 2	1032	944	1	88
3	944	88		
4 e 2	944	88	10	64
3	88	64		
4 e 2	88	64	1	24
3	64	24		
4 e 2	64	24	2	16
3	24	16		
4 e 2	24	16	1	8
3	16	8		
4 e 2	16	8	2	0
3	**8**	**0**		
5	MDC = 8			

1. Recursividade

- MDC(1976, 1032):

1. a = 1976 e b = 1032.

2. Divida *a* por *b*, encontrando um quociente *q* e um resto *r* (isto é, *a* = *q***b*+*r*).

3. Defina *a* = *b* e *b* = *r*.

4. Repita os passos 2 e 3, até que *b* seja igual a 0.

5. MDC(1976, 1032) = a.

Passo	a	b	q	r
1	1976	1032		
2	1976	1032	1	944
3	1032	944		
4 e 2	1032	944	1	88
3	944	88		
4 e 2	944	88	10	64
3	88	64		
4 e 2	88	64	1	24
3	64	24		
4 e 2	64	24	2	16
3	24	16		
4 e 2	24	16	1	8
3	16	8		
4 e 2	16	8	2	0
3	8	0		
5	**MDC = 8**			

1. Recursividade

- MDC(1976, 1032):

1. a = 1976 e b = 1032.

2. Divida *a* por *b*, encontrando um quociente *q* e um resto *r* (isto é, *a* = *q***b*+*r*).

3. Defina *a* = *b* e *b* = *r*.

4. Repita os passos 2 e 3, até que *b* seja igual a 0.

5. MDC(1976, 1032) = a.

Passo	a	b	q	r
1	1976	1032		
2	1976	1032	1	944
3	1032	944		
4 e 2	1032	944	1	88
3	944	88		
4 e 2	944	88	10	64
3	88	64		
4 e 2	88	64	1	24
3	64	24		
4 e 2	64	24	2	16
3	24	16		
4 e 2	24	16	1	8
3	16	8		
4 e 2	16	8	2	0
3	8	0		
5	**MDC = 8**			

Pro lar, implementar
a solução recursiva em C.

1. Recursividade

- Em termos gerais, não há por que procurar uma solução recursiva para um problema.

- A maioria dos problemas pode ser solucionada usando métodos não-recursivos.

- Uma solução recursiva ocupa mais memória e é mais lenta que a solução iterativa para um mesmo problema.

    - Em cada instância, todos os parâmetros e variáveis locais são criados novamente, independentemente dos que já existiam antes.

- Nem sempre é fácil reconhecer situações apropriadas para a utilização de recursividade.

- Porém, há certos problemas cuja natureza permite uma solução recursiva bem mais elegante e intuitiva do que a solução iterativa.