http://www.nickgentry.com/

Algoritmos e Programação de Computadores

Disciplina 113476

Prof. Alexandre Zaghetto
http://alexandre.zaghetto.com
zaghetto@unb.br

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Ciência da Computação

O presente conjunto de *slides* não pode ser reutilizado ou republicado sem a permissão do instrutor.

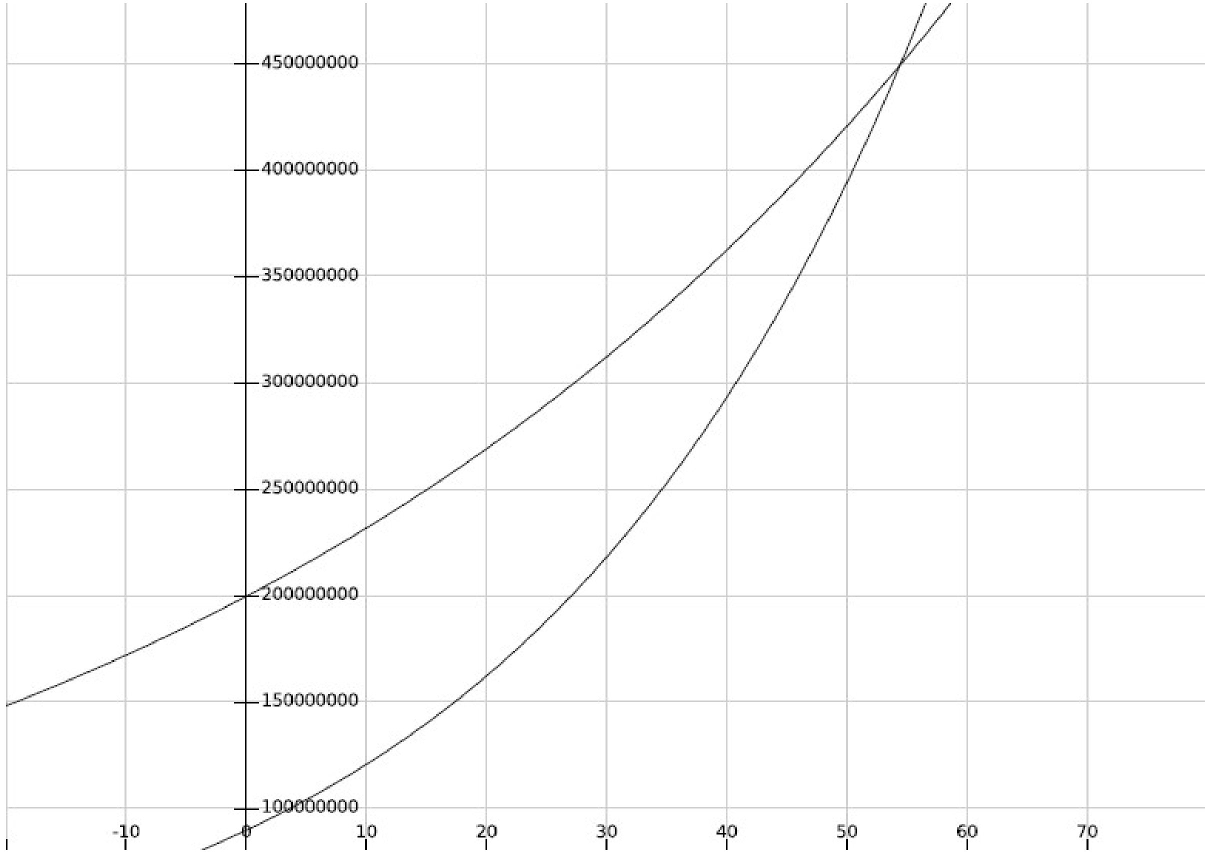
Prática de Laboratório III
Algoritmos com Repetições

1. Algoritmos com Repetições

Problema 1a: Supondo que a população de um país A seja da ordem de 90.000.000 de habitantes com uma taxa anual de crescimento de 3% e que a população de um país B seja, aproximadamente, de 200.000.000 de habitantes com uma taxa anual de crescimento de 1,5%, escreva um programa que calcule numericamente e escreva o número de anos necessários para que a população do país A ultrapasse ou iguale a população do país B, mantidas essas taxas de crescimento.

Problema 1b: Escreva a solução para o problema 1a utilizando a linguagem Python.

1. Algoritmos com Repetições



1. Algoritmos com Repetições

Problema 2: Raízes de Equações

Em seu curso de álgebra você gastou muita energia para encontrar soluções para equações como

$$7x + 5 = 4x + 3$$

ou

$$x^2 = 3x + 5.$$

1. Algoritmos com Repetições

No caso de equações do primeiro grau, escritas na forma $ax + b = 0$, o valor de x é dado por $x = -b/a$. Para equações do segundo grau, escritas na forma $ax^2 + bx + c = 0$, a solução pode ser obtida por meio da fórmula de Bhaskara. A medida que avançamos para uma consideração de equações mais complicadas como

$$3x^3 = 7x + 2$$

ou

$$5\text{sen } x = x + 2$$

ou

$$x^5 = x^4 - 3x^2 + 1,$$

1. Algoritmos com Repetições

vemos que fórmulas explícitas para as soluções são tão complicadas que se tornam praticamente inúteis, ou então tais fórmulas nem mesmo existem. Quando se precisa de resposta para esses problemas, somos forçados a lançar mão de aproximações. Existe uma grande abundância de métodos para essas aproximações. Os métodos gráficos são talvez os mais simples dos muitos métodos propostos para encontrar raízes de equações. Suponhamos que você queira obter aproximações para as raízes da equação

$$3x^3 = 7x + 2.$$

1. Algoritmos com Repetições

Inicialmente reescrevemos a equação de modo que a expressão à esquerda seja igual a zero,

$$3x^3 - 7x - 2 = 0,$$

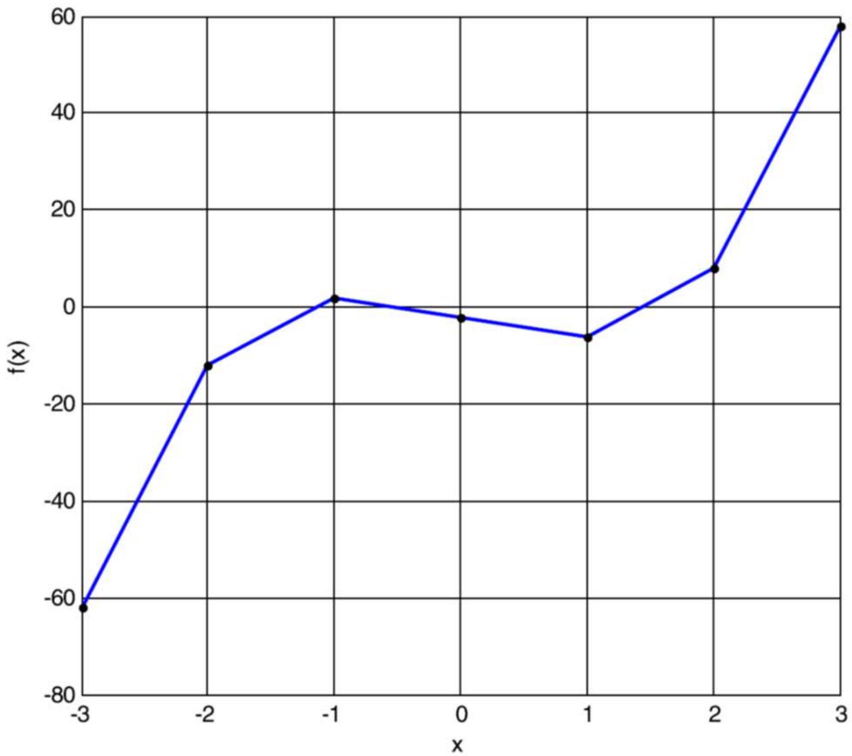
e reformulamos o problema da seguinte maneira: considere a função f(x) dada por,

$$f(x) = 3x^3 - 7x - 2,$$

e ache os valores de x para os quais a função f(x) é igual a zero, ou seja, $f(x) = 0$. Em seguida traçamos o gráfico de f(x).

1. Algoritmos com Repetições

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	-62	-12	2	-2	-6	8	58



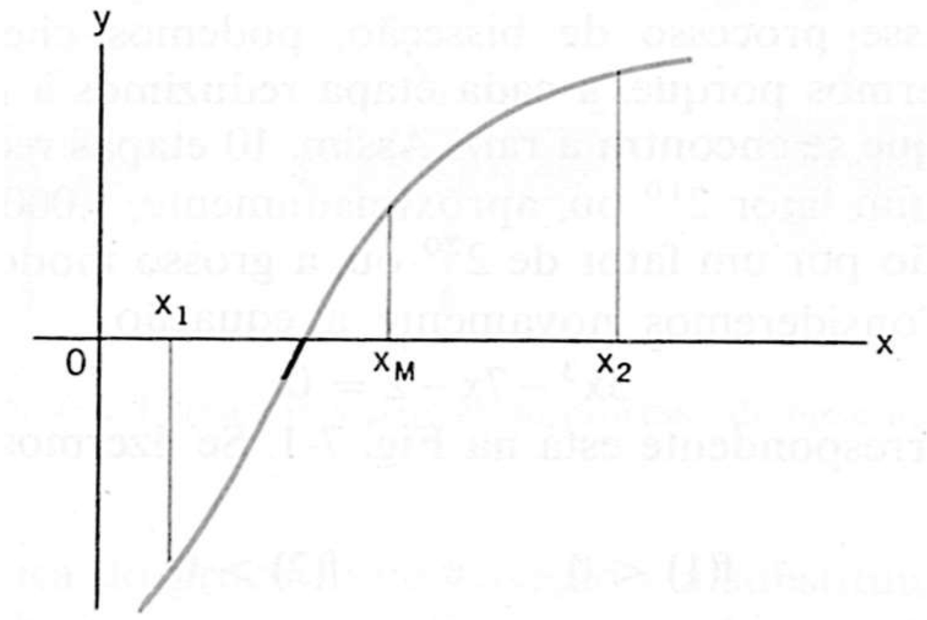
1. Algoritmos com Repetições

Podemos verificar a localização das raízes entre -2 e -1, entre -1 e 0 e entre 1 e 2. O método gráfico nos dará uma aproximação para uma raiz da equação. Uma vez que tenhamos uma idéia de onde fica uma raiz, podemos melhorar a sua precisão. Muitos dos métodos empregados em computadores para resolver tais problemas se resumem a métodos de busca. A estratégia geral em métodos de busca é estabelecer que o alvo (neste caso, a raiz de uma equação) deve ser encontrado em algum intervalo de uma variável, e então usar algum teste ou critério para reduzir esse intervalo. O *método da bisseção sucessiva* é uma técnica relativamente simples para reduzir repetidamente o tamanho de um intervalo em que será encontrada uma raiz de uma equação. O método destina-se a ser usado quando se sabe antecipadamente que a função é contínua e tem apenas uma raiz no intervalo.

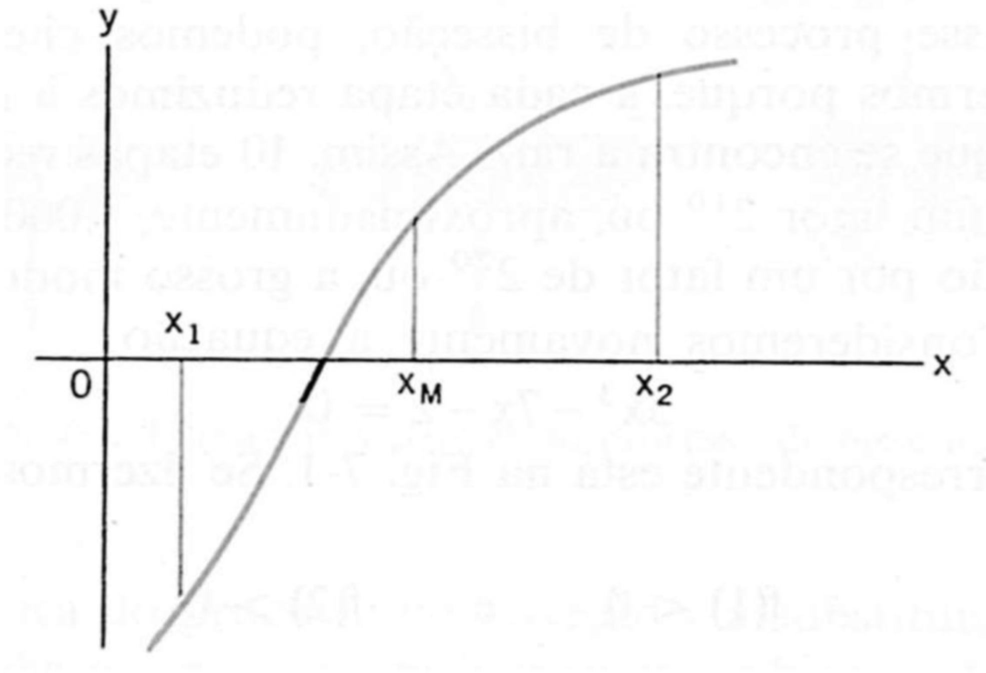
1. Algoritmos com Repetições

Suponhamos que estejamos procurando a raiz de uma função f(x) no intervalo [x_1 x_2]. Suponhamos, ainda, que $f(x_1) < 0$ e $f(x_2) > 0$, isto é, o gráfico de f(x) está abaixo do eixo x quando $x = x_1$, e acima do eixo eixo x quando $x = x_2$. Fazemos a bisseção do intervalo [x_1 x_2] e marcamos o ponto intermediário x_M,

$$x_M = (x_1 + x_2)/2.$$



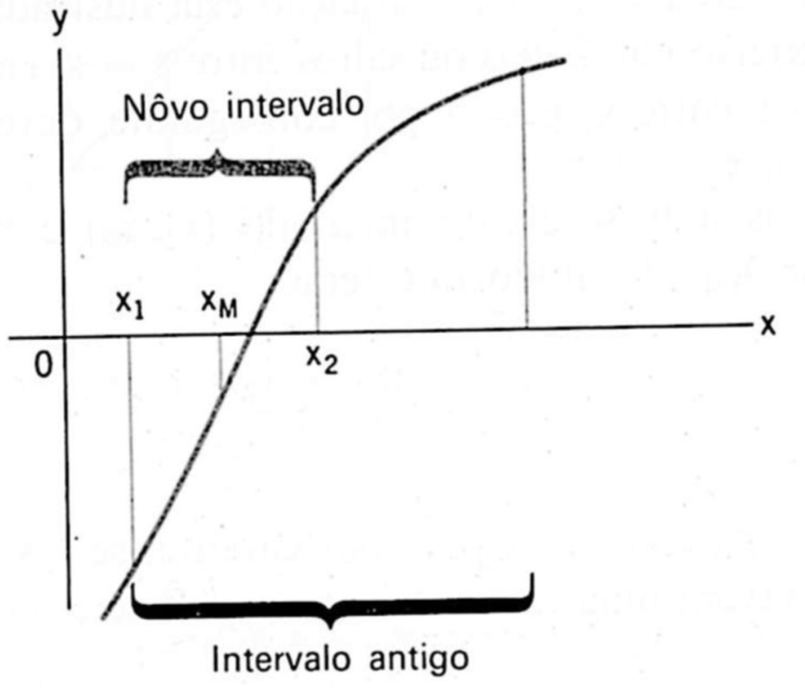
1. Algoritmos com Repetições



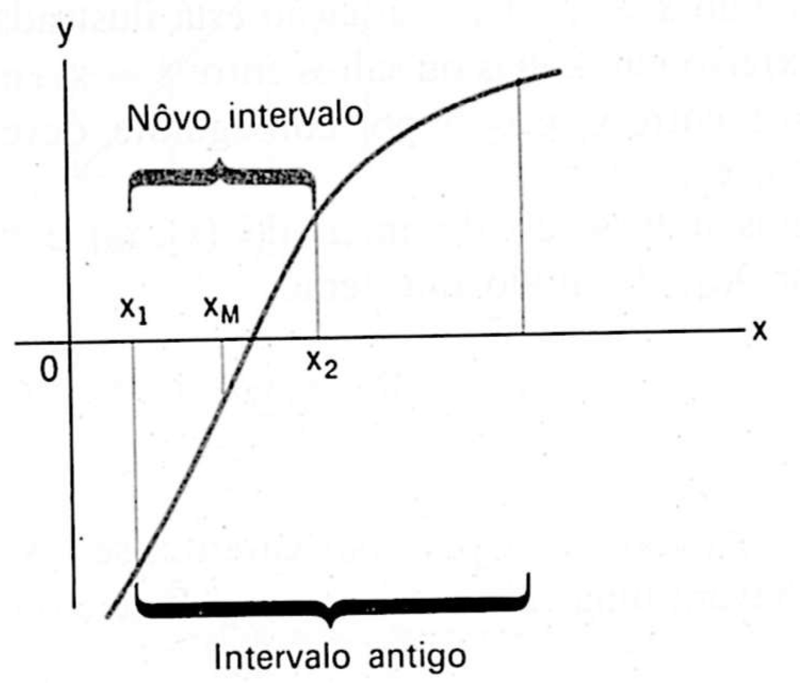
Se $f(x_M) = 0$, então achamos a raiz. No entanto, se $f(x_M) > 0$, então haverá uma raiz **entre x_1 e x_M**. Esse é o critério para reduzir o tamanho do intervalo de interesse. Atribuímos o valor de x_M a x_2 e o processo é repetido, ou seja, calculamos novamente os valores de x_M e $f(x_M)$, agora nesse novo intervalo. Se $f(x_M) < 0$, a raiz está **entre x_M e x_2**. Nesse caso, atribuimos o valor de x_M a x_1.

1. Algoritmos com Repetições

Podemos continuar repetindo este processo, reduzindo o intervalo á metade tantas vezes quanto queiramos, achando, a cada iteração, em que meio intervalo está a raiz.



1. Algoritmos com Repetições



A cada etapa, porém, antes de decidirmos prosseguir, podemos verificar a extensão do intervalo, isto é, $|x_2-x_1|$. Se for suficientemente pequeno (digamos menor que um valor ε) aceitamos o valor x_M como sendo a raiz.

1. Algoritmos com Repetições

Exemplo:

Problema: $3x^4 - 2x^3 + 7x - 4 = 0$ $[0, 1]$ $\in = 0,4$
Solução: Um número impar de raizes. Para $\in = 0,4$ a raiz é 0,625:

$$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 7x - 4 = 0$$

Etapa	X1	Sinal de F(X1)	X2	Sinal de F(X2)	XM	Sinal de F(XM)	|X1 – X2|
	0	–	1	+	0,5	–	1
1	0,5	–	1	+	0,75	+	0,5
2	0,5	–	0,75	+	0.625	+	0,25

Referência

[1] A. I. Forsythe, T. A. Keenan, E. I. Organick, W. Stenberg, "Ciência de Computadores", Volume 2, Série Ciência de Computação, Ao Livro Técnico S.A., Rio de Janeiro - Guanabara, 1972.

1. Algoritmos com Repetições

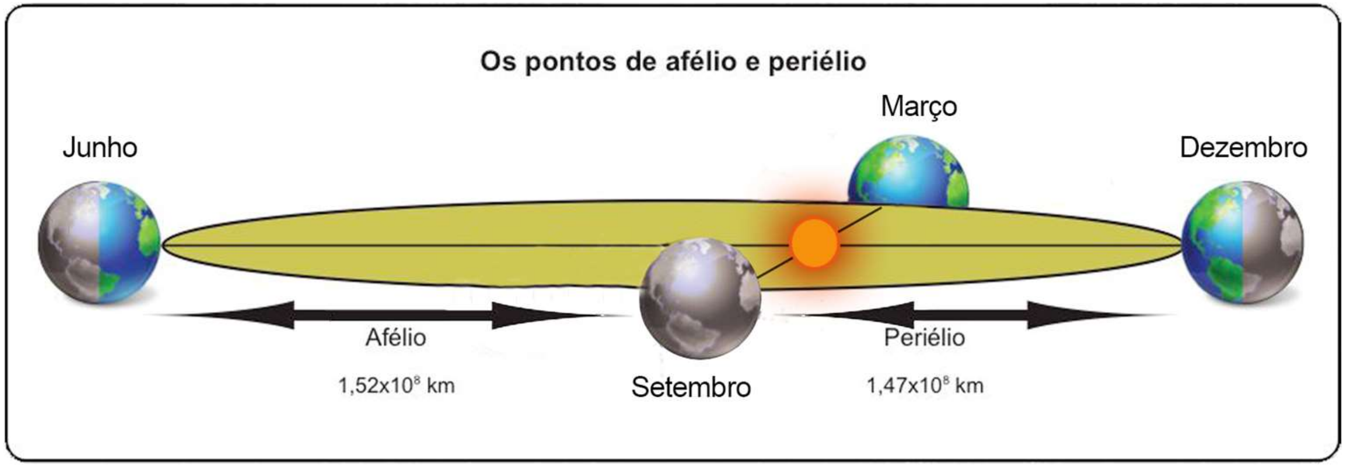
Problema 2a: Implemente o algoritmo da bisseção discutido em sala de aula e determine as raízes das seguintes funções, nos intervalos e com a precisão indicados. Implementar em linguagem C.

a) $x^3 - x - 1 = 0$, Intervalo [0; 2], $\varepsilon = 0,1$ ➔ Ref.: 1.3247
b) $x + \ln x = 0$, Intervalo [0,1; 1], $\varepsilon = 0,1$ ➔ Ref.: 0.5671
c) $5 - x = 5*\text{sen } x$, Intervalo [0; 2], $\varepsilon = 0,1$ ➔ Ref.: 0.9456
d) $x^3 - 3x - 2 = 0$, Intervalo [1; 2.5], $\varepsilon = 0,1$ ➔ Ref.: 2
e) $x^3 - 2x^2 - 13x - 10=0$, Intervalo [-1.5; -0.5], $\varepsilon = 0,1$ ➔ Ref.: -1

Problema 2b: Escreva a solução para o Problema 4a utilizando a linguagem Python.

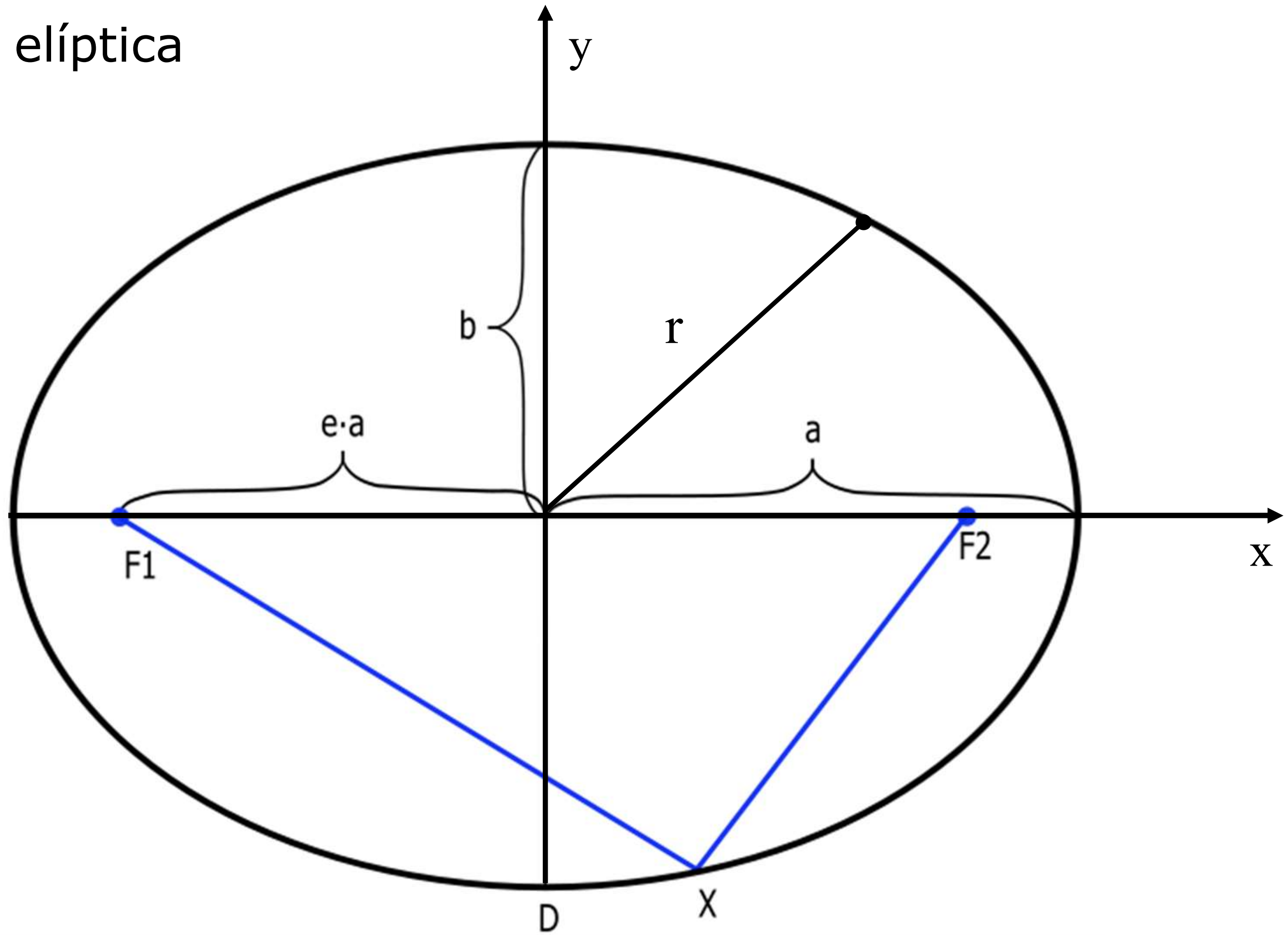
1. Algoritmos com Repetições

Problema 3: Escreva um programa utilizando a playAPC que simula simultaneamente o movimento da Terra ao redor do Sol e o movimento da Lua ao redor da Terra. Considere que as trajetórias de ambas são elípticas. No caso da Terra, o Sol é um dos focos e no caso da Lua, a Terra é um dos focos. Não é necessário simular a proporção real entre os semieixos maiores (a) da Lua e da Terra, nem a excentricidade (e) das duas trajetórias. Encontre empiricamente valores de (a) e (e) de forma que seja possível observar trajetórias elípticas. Simule, porém, a proporção real entre os movimento de translação da Terra e da Lua.



1. Algoritmos com Repetições

Trajetória elíptica



1. Algoritmos com Repetições

Trajetória elíptica

- Coordenadas cartesianas, com centro na origem:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- Coordenadas polares, com origem no centro da elipse:

$$r = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}}$$