합성 함수 (변수가 1개) $y=f(x)$ 의 미분법

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}} \quad \cdots ①$$

$\frac{dy}{dx}$ 는 분수가 아닌
미분하라는 연산기호
(식 y를 x에 관하여 미분하라)

합성 함수 (변수가 여러개) $y=f(x,y)$ 의 미분법

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}} \quad \cdots ②$$

곱의 법칙

$$\boxed{\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=\frac{df(x)}{dx}g(x)+f(x)\frac{dg(x)}{dx}} \quad \cdots ③$$

① 식의 경우 합성함수의 미분 or 연쇄법칙

합성함수: $f(g(x))$?

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dw}\cdot\frac{dw}{dx}$$

임의의 식을 끼워 넣는다

ex) $f(x)=(3x-4)^{50}$ $\quad \frac{df(x)}{dx}$

$u=3x-4$

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{df(x)}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{du^{50}}{du}\cdot\frac{d(3x-4)}{dx}=50u^{49}\times 3$$

$$=150(3x-4)^{49}$$

②

ex) $f(x,y) = (3x+1)^2 + (x+y+1)^3$ 을 x에 대하여 미분

$u = 3x+1$

$v = x+y+1$

$$\frac{u^2}{u} \cdot \frac{u}{x} + \frac{v^3}{v} \cdot \frac{v}{x}$$

$(x+y+z)^2 = x^2 + 2xy + 2xz + y^2 + 2yz + z^2$

$$2u \cdot 3 + 3v^2 \cdot 1$$

$$6(3x+1) + 3(x+y+1)^2$$

$$= 3x^2 + (6y+24)x + 3y^2 + 6y + 9$$

③

$y = xe^x$ 을 x에 대해 미분

곱의 법칙

$$\{f(x)g(x)\}' = f(x)'g(x) + f(x)g(x)'$$

$f(x) = x \quad g(x) = e^x$

$y = f(x)g(x) \qquad (e^x)' = e^x$

1/2 일 노트 참고

$$1 \cdot e^x + x \cdot e^x$$

$$e^x(1+x)$$

인공지능 에서는

- gradient descent
- loss value를 w로 편미분 optimizer 전달
- Back propagation

2-6 다음 함수를 x에 대해 미분

① $f(x) = \sin x + \cos x$

$= \cos x - \sin x$

② $f(x) = \frac{1}{1+\exp(-ax)} = \frac{1}{1+e^{-ax}}$

$u = 1 + \exp(v)$

$v = -ax$

$f(x) = \frac{1}{u} = u^{-1}$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{df(x)}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{du^{-1}}{du} \cdot \frac{d(1+e^{v})}{dv} \cdot \frac{d(-ax)}{dx}$$

$$-1 \cdot u^{-2} \cdot \exp(v) \cdot -a$$

$$= \frac{a \cdot \exp(v)}{u^2}$$

$$\frac{a \cdot exp(-ax)}{\{1+exp(-ax)\}^2}$$

위 식은 시그모이드 함수

한번 더 정리하면

$$S_a(x) = \frac{1}{1+exp(-ax)}$$

$$\frac{dS_a(x)}{dx} = \frac{a \cdot exp(-ax)}{\{1+exp(-ax)\}^2} = aS_a(x)\{1-S_a(x)\}$$

곱의법칙: $\{f(x)g(x)\}' = f(x)'g(x) + f(x)g(x)'$

시그모이드 함수를 2번 미분

$$\frac{d^2 S_a(x)}{dx^2} = \frac{d[aS(x)\{1-S_a(x)\}]}{dx}$$

$$= \frac{daS(x)}{dx}\{1-S_a(x)\} + aS(x) \cdot \frac{d(1-S_a(x))}{dx}$$

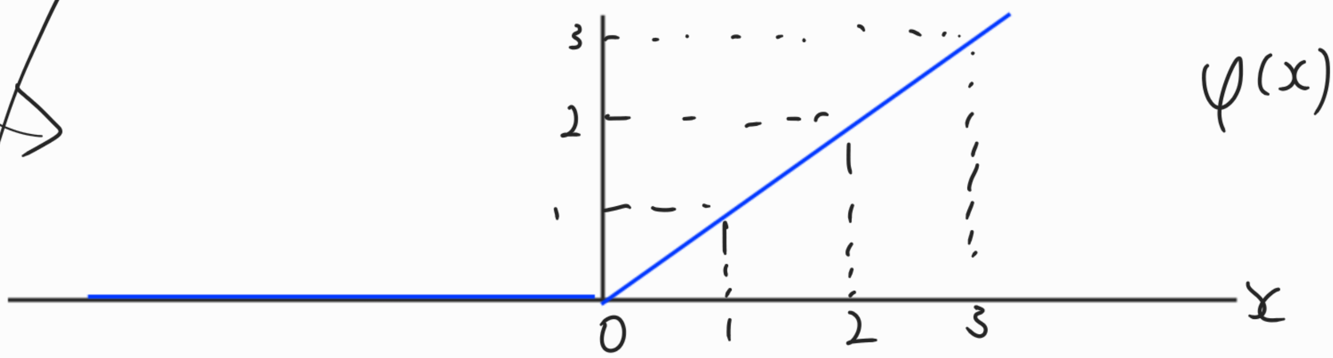
$$= a\frac{dS_a(x)}{dx}\{1-S_a(x)\} - aS_a(x)\frac{dS_a(x)}{}$$

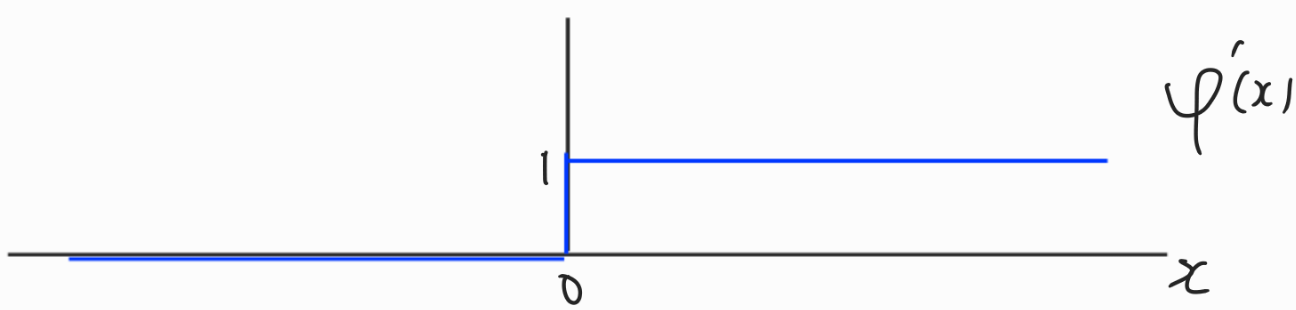
음 2계미분 어렵다

ReLU $\varphi(x)$ 비선형 함수

$$\varphi(x) = \max(0, x) = \begin{cases} x & (x>0) \\ 0 & (x \le 0) \end{cases}$$

$$\varphi'(x) = \begin{cases} 1 & (x>0) \\ 0 & (x \le 0) \end{cases}$$





인공지능에서

Sigmoid는 vanishing gradient 문제가 있어

Relu 사용

2-17

정규분포의 확률밀도 함수' $\varphi_{\mu,\sigma^2}(x)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$u = -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} exp\, u$$

$$\frac{d f(x)}{dx} = \frac{d(f(x))}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{d\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} exp\, u\right)}{du} \times -\frac{1}{2\sigma^2} \frac{d(x-\mu)^2}{dx}$$

$x^2 - 2x\mu + \mu^2$

$(exp(x))' = exp(x)$

$2x - 2\mu$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} exp\, u \times \left[-\frac{2(x-\mu)}{2\sigma^2}\right)$$

$$= \frac{2(x-\mu)}{\sqrt{2\pi}\,\sigma^3} exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

한번더

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$\frac{df(x)}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$u = \frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$\{\exp(x)\}' = \exp(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(u)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(u) \times \frac{1}{2\sigma^2} \frac{d(x-\mu)^2}{dx}$$

$$2x - 2\mu$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(u) \times \frac{2(x-\mu)}{2\sigma^2}$$

$$= \frac{2(x-\mu)}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$