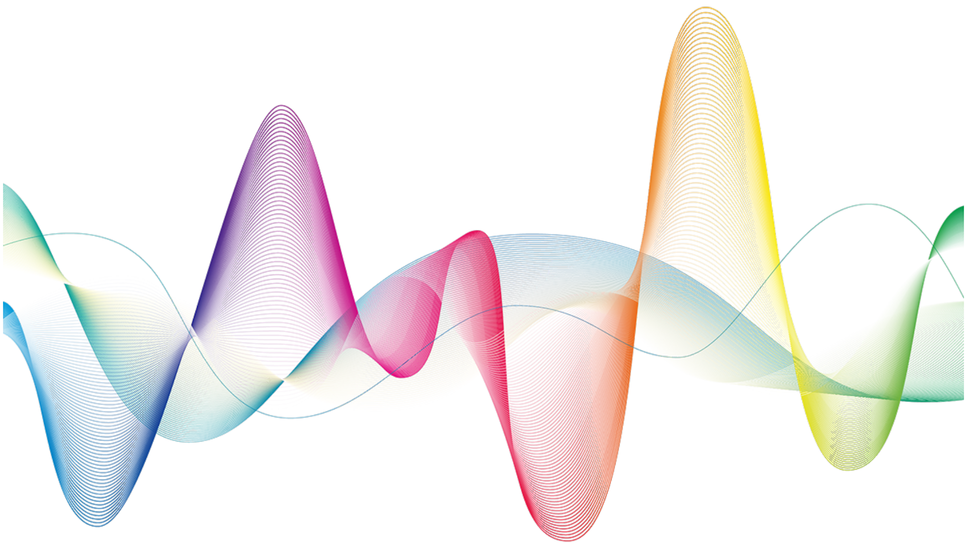
EA614 - Análise de Sinais

Tópico 9 - Transformada Discreta de Fourier

Levy Boccato
Renan Del Buono Brotto

29 de outubro de 2024



Conteúdo

1 Transformada Discreta de Fourier (DFT)

Neste tópico, vamos derivar uma representação no domínio da frequência para sequências de comprimento finito. Tal representação também será uma sequência de comprimento finito, em evidente contraste com $X(e^{j\Omega})$, que é uma função contínua de Ω (em radianos ou radianos/amostra). Interessantemente, a sequência gerada, denotada por $X[k]$, consistirá de amostras da transformada de Fourier $X(e^{j\Omega})$, e é conhecida como transformada discreta de Fourier (DFT, do inglês *discrete Fourier transform*).

Um caminho possível para a derivação da DFT parte da série de Fourier de sequências periódicas, como é feito no livro [Oppenheim & Schafer, 2010]. Aqui, porém, seguiremos uma abordagem mais intuitiva, trabalhando diretamente com um processo de amostragem, mas no domínio da frequência.

Seja $x[n]$ uma sequência de comprimento finito M com transformada de Fourier $X(e^{j\Omega})$. O espectro $X(e^{j\Omega})$ é uma função contínua em Ω. Pelo teorema da amostragem, vimos que é possível manipular e processar sinais contínuos acessando apenas um conjunto de amostras dele. Então, por que não aplicar o processo de amostragem sobre $X(e^{j\Omega})$?

1.1 Amostragem em Frequência

Vamos tomar, então, amostras de $X(e^{j\Omega})$ nas frequências $\Omega_k = \frac{2\pi}{N}k$, $k \in \mathbb{Z}$, onde N é um inteiro que define o número de amostras de $X(e^{j\Omega})$ coletadas em cada período de 2π. A sequência completa de amostras é representada por:

$$\tilde{X}[k] = X(e^{j\Omega})\Big|_{\Omega=\frac{2\pi}{N}k} \tag{1}$$

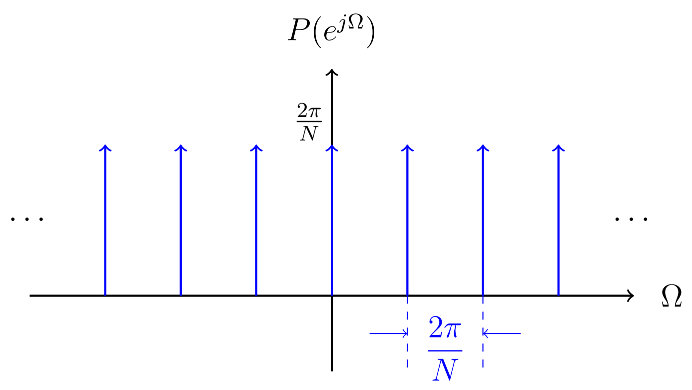
Uma vez que o espectro $X(e^{j\Omega})$ é periódico com período 2π e capturamos N amostras igualmente espaçadas em cada período, $\tilde{X}[k]$ é uma sequência periódica em k com período N:

$$\tilde{X}[k+rN] = X(e^{j\frac{2\pi}{N}(k+rN)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\underbrace{e^{-j2\pi rn}}_{=1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \tilde{X}[k].$$

O processo de amostragem ideal se dá através da multiplicação de $X(e^{j\Omega})$ pelo trem de impulsos em frequência:

$$P(e^{j\Omega}) = \frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{N}k\right),$$

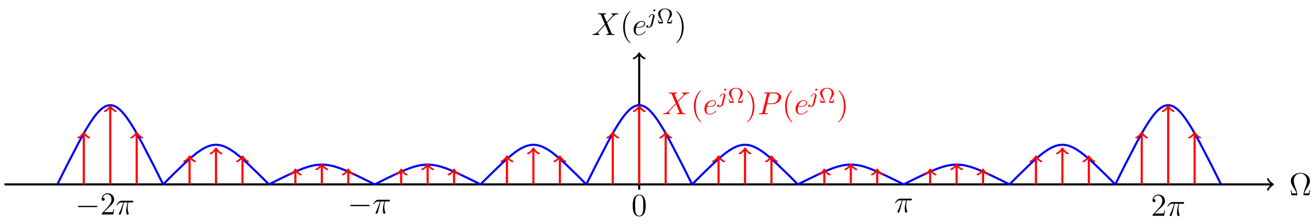
o qual pode ser visualizado na figura abaixo.



Então, o espectro amostrado é dado por:

$$
\begin{aligned}
X(e^{j\Omega})P(e^{j\Omega}) &= X(e^{j\Omega})\left[\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\Omega-\frac{2\pi}{N}k\right)\right]\\
&= \frac{2\pi}{N}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(e^{j\Omega})\delta\left(\Omega-\frac{2\pi}{N}k\right)\right]\\
&= \frac{2\pi}{N}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(e^{j\frac{2\pi}{N}k})\delta\left(\Omega-\frac{2\pi}{N}k\right)\right]\\
&= \frac{2\pi}{N}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\tilde{X}[k]\delta\left(\Omega-\frac{2\pi}{N}k\right)\right]
\end{aligned}
$$

O espectro amostrado é formado por impulsos situados nas frequências $\Omega_k = \frac{2\pi}{N}k$, $k \in \mathbb{Z}$, cujas áreas são diretamente proporcionais às amostras de $X(e^{j\Omega})$ nessas frequências, como ilustrado na figura abaixo.



Vamos agora verificar qual é a sequência no tempo que está associada a este espectro amostrado. Aplicando a transformada inversa de Fourier, temos que:

$$\mathcal{F}^{-1}\{P(e^{j\Omega})X(e^{j\Omega})\} = p[n] * x[n],$$

onde

$$p[n] = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2\pi}{N}\sum_{k}\delta\left(\Omega-\frac{2\pi}{N}k\right)\right\} = \sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta[n-rN].$$

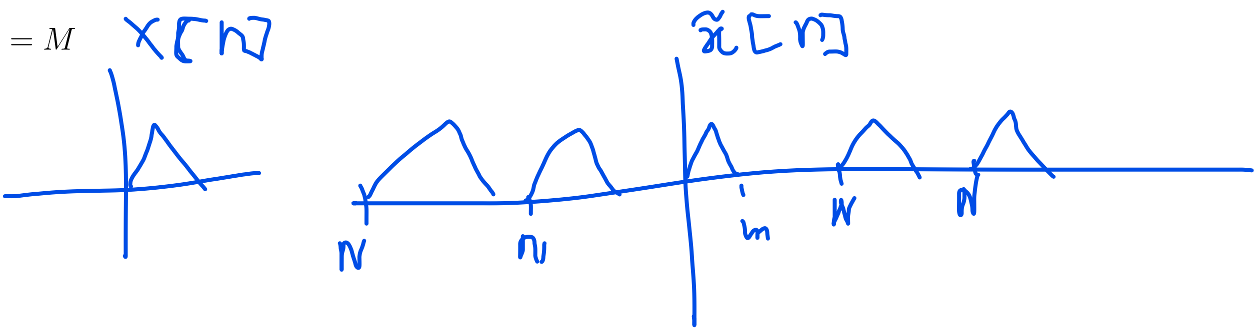
Então,

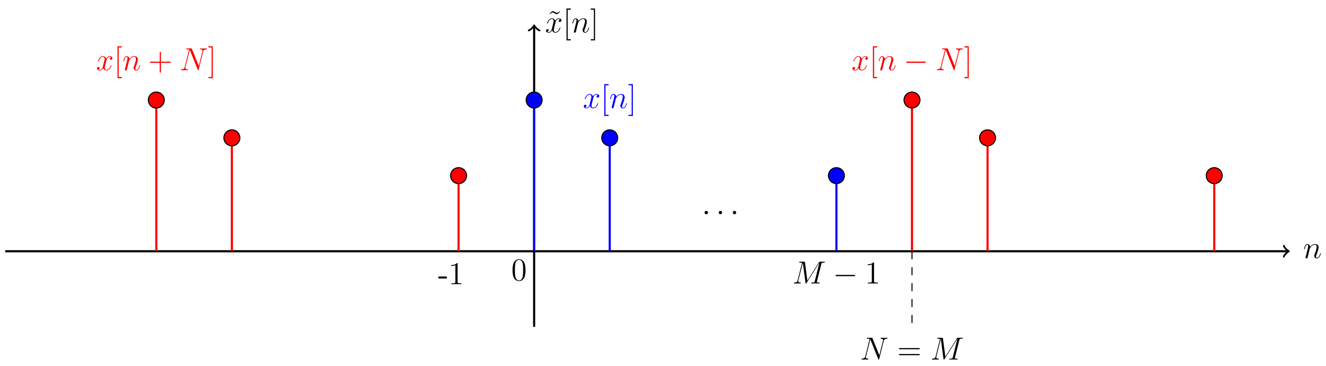
$$\tilde{x}[n] = \mathcal{F}^{-1}\{P(e^{j\Omega})X(e^{j\Omega})\} = \left(\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta[n-rN]\right) * x[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty}x[n-rN] \tag{2}$$

O sinal $\tilde{x}[n]$ nada mais é do que uma soma de réplicas da sequência $x[n]$ deslocadas pela "taxa de amostragem" N.

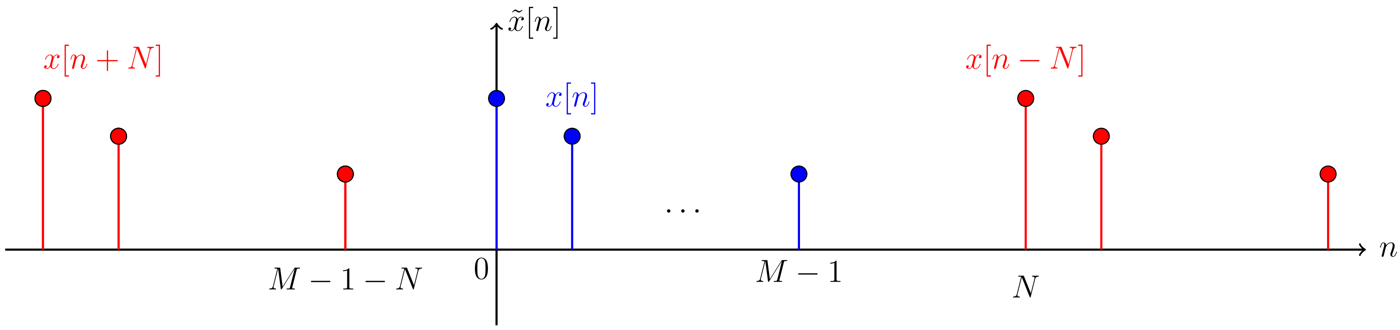
Há três possíveis configurações para $\tilde{x}[n]$, dependendo da relação entre o número de amostras por período (N) e o comprimento da sequência $x[n]$ (M):

- Caso 1: $N = M$

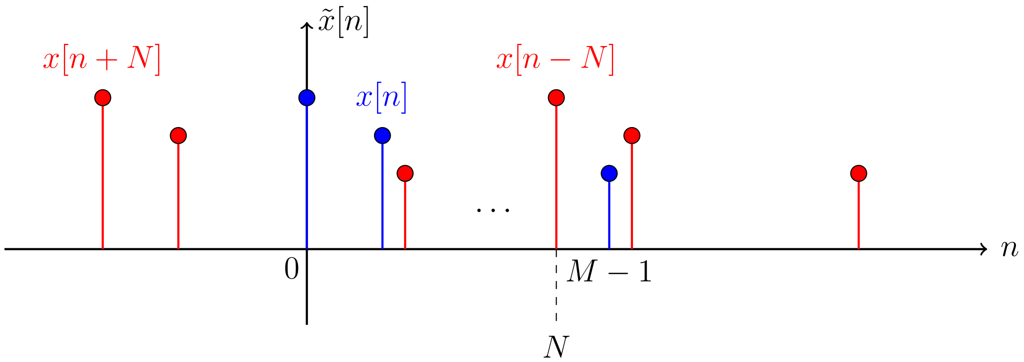




- Caso 2: $N > M$



- Caso 3: $N < M$



Observe que quando $N \geq M$, a sequência $\tilde{x}[n]$ é simplesmente uma extensão periódica de $x[n]$ com período N. Assim, quando olhamos para o intervalo $0 \leq n \leq N-1$ de $\tilde{x}[n]$, enxergamos a própria sequência $x[n]$.

Por outro lado, no caso em que $N < M$, obtemos uma sequência periódica $\tilde{x}[n]$ que não mais corresponde a uma extensão direta de $x[n]$: cada período, agora, equivale à sequência $x[n]$ com *aliasing* temporal devido à sobreposição entre as réplicas. Isso acontece porque subamostramos o espectro $X(e^{j\Omega})$, isto é, o número de amostras (N) por período de $X(e^{j\Omega})$ foi insuficiente.

Deste modo, não conseguiríamos recuperar $x[n]$ extraindo um período da sequência $\tilde{x}[n]$. Isso também significa que não seria possível reconstruir $X(e^{j\Omega})$ usando apenas as amostras tomadas nas frequências múltiplas de $2\pi/N$.

n = length

Resumo: Se $x[n]$ tem comprimento finito e tomamos um número suficientemente grande de amostras de $X(e^{j\Omega})$ igualmente espaçadas – mais especificamente, número de amostras por período maior ou igual ao comprimento de $x[n]$ – então, a transformada de Fourier $X(e^{j\Omega})$ pode ser recuperada a partir das amostras $X(e^{j\frac{2\pi}{N}k})$ através da fórmula de interpolação (como ocorre na amostragem no tempo de sinais contínuos) ou, equivalentemente, a sequência $x[n]$ pode ser recuperada da sequência $\tilde{x}[n]$ através de uma "filtragem" no tempo:

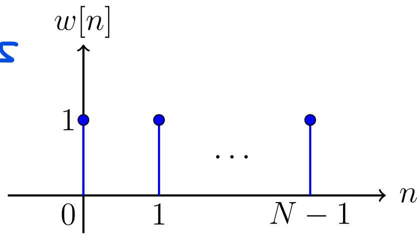
$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

ou

$$x[n] = \tilde{x}[n].w[n],$$

onde $w[n]$ é uma janela retangular de comprimento N.

trem de impulsos



1.2 Relação entre a sequência de amostras em frequência e a extensão periódica

A sequência $\tilde{x}[n]$ também pode ser escrita em função da sequência de amostras em frequência $\tilde{X}[k]$. Por definição, $\tilde{x}[n]$ é o sinal resultante da transformada inversa do espectro amostrado:

$$\tilde{x}[n] = \mathcal{F}^{-1}\left\{ \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(e^{j\frac{2\pi}{N}k})\delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{N}k\right) \right\}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} \tilde{x}[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \left[\frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(e^{j\frac{2\pi}{N}k})\delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{N}k\right)\right] e^{j\Omega n} d\Omega \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) \int_{2\pi} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{N}k\right) e^{j\Omega n} d\Omega \end{aligned}$$

Somente N impulsos estão dentro de um intervalo de duração 2π. Então,

$$\begin{aligned} \tilde{x}[n] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \end{aligned} \quad (3)$$

Somente em N

Observe que a soma em (3) envolve apenas um período da sequência de amostras espectrais, o que é bastante compreensível tendo em vista que um período de $\tilde{X}[k]$ contém toda a informação sobre esta sequência. Além disso, podemos notar que:

- A expressão em (3) possui o caráter de uma transformada inversa, pois nos mostra como obter o sinal no tempo a partir de componentes espectrais;
- Em vez de termos uma integral em frequência, como ocorre na transformada inversa de Fourier, temos uma soma baseada na sequência de amostras do espectro $X(e^{j\Omega})$;
- Somente as exponenciais complexas nas frequências selecionadas pela amostragem, $\boxed{\Omega_k = \frac{2\pi}{N}k}$, estão envolvidas.

Analogamente, a sequência de amostras em frequência $\tilde{X}[k]$ pode ser obtida a partir da sequência periódica $\tilde{x}[n]$. Para percebermos esta relação, lembremos que $\tilde{X}[k] = X(e^{j\Omega})\Big|_{\Omega=\frac{2\pi}{N}k}$. Então, repetição

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

A somatória completa pode ser dividida em pequenas somas de N elementos consecutivos, como mostra a expressão abaixo:

$$\tilde{X}[k] = \cdots + \sum_{n=-N}^{-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \sum_{n=N}^{2N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \cdots$$

Convenientemente, todas as parcelas podem ser reescritas de modo que passem a varrer o mesmo intervalo de índices, desde 0 a $N-1$. Por exemplo, considerando uma nova variável $n' = n + N$ na primeira soma, temos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-N}^{-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} &= \sum_{n'=0}^{N-1} x[n'-N]e^{-j\frac{2\pi}{N}k(n'-N)} \\
&= \sum_{n'=0}^{N-1} x[n'-N]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn'}e^{j\frac{2\pi}{N}kN} = \sum_{n'=0}^{N-1} x[n'-N]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn'}e^{j2\pi k} \\
&= \sum_{n'=0}^{N-1} x[n'-N]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn'}
\end{aligned}$$

↳ x(n)

Fazendo uma transformação de variáveis semelhante em cada parcela e explorando a periodicidade da exponencial complexa discreta, $e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = e^{j\frac{2\pi}{N}k(n-lN)}, \forall l \in \mathbb{Z}$, podemos escrever que:

$$\begin{aligned}
\tilde{X}[k] &= \cdots + \sum_{n=0}^{N-1} x[n-N]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \sum_{n=0}^{N-1} x[n+N]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-rN] \right\} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}
\end{aligned}$$

Finalmente, usando (2), chegamos a:

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \tag{4}$$

1.3 Definição da DFT

Na seção anterior, mostramos que a amostragem do espectro de uma sequência $x[n]$ cria uma relação entre a sequência de amostras em frequência, $\tilde{X}[k]$, e uma extensão periódica, com período N, da sequência $x[n]$. Em particular, a Equação (4) indica que as amostras espectrais podem ser calculadas a partir de um período da extensão periódica $\tilde{x}[n]$. Da mesma forma, a Equação (3) revela como a extensão periódica pode ser obtida a partir de um período das amostras espectrais.

Tendo estes resultados em mãos, estamos prontos para definir a transformada discreta de Fourier (DFT, do inglês *discrete Fourier transform*). Seja $x[n]$ uma sequência de comprimento finito M, tal que $x[n] = 0$ para $n < 0$ e $n \geq M$. A DFT de $x[n]$ com comprimento N corresponde a uma sequência de duração finita equivalente a um período de $\tilde{X}[k]$:

$$X[k] = \begin{cases} \tilde{X}[k], & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Portanto, a partir de (4):

$$X[k] = \text{DFT}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \tag{5}$$

Por sua vez, a DFT inversa de $X[k]$ corresponde a um período da extensão periódica $\tilde{x}[n]$. Assim, a partir de (3), obtemos:

$$\tilde{x}[n] = \text{DFT}^{-1}\{X[k]\} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \tag{6}$$

O parâmetro N define o número de amostras coletadas em um período da transformada de Fourier, assim como o período de $\tilde{x}[n]$ e $\tilde{X}[k]$, e o comprimento (ou número de pontos) da DFT.

As Equações (5) e (6) mostram como podemos obter uma sequência de N amostras em frequência a partir de uma sequência de comprimento N no tempo, e vice-versa. É importante enfatizar que a sequência temporal envolvida na definição geral da DFT corresponde a um período de $\tilde{x}[n]$, que pode (ou não) ser igual à sequência original $x[n]$.

Conforme detalhado na Seção 1.1, se $N \geq M$, não acontece *aliasing* temporal por causa da amostragem em frequência, de modo que em um período da extensão periódica $\tilde{x}[n]$ encontramos exatamente a sequência $x[n]$ original.

Nesta condição, a transformada discreta de Fourier e a DFT inversa podem ser expressas como:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \tag{7a}$$

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \tag{7b}$$

Se, porém, esta condição for violada, a DFT inversa de $X[k]$ não é a sequência $x[n]$, mas sim uma versão de $x[n]$ truncada e com *aliasing* temporal.

Observação: se tomarmos a DFT de uma sequência $x[n]$ de comprimento M usando $N > M$ pontos, basta imaginar que $x[n]$, na verdade, possui N amostras, sendo as últimas $N - M$ amostras iguais a zero. Este procedimento é conhecido como *zero-padding*.

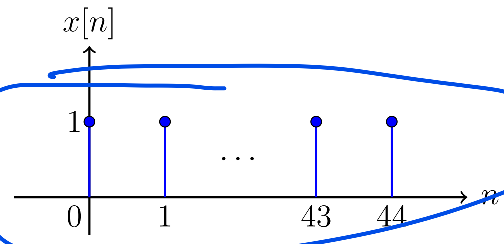
1.4 Exemplos

a) $x[n] = u[n] - u[n-45]$.

$M = 44 + 1 = 45$

$N < 45$

Aliasing



Vamos calcular a DFT usando $N = 10$ pontos. Como $N < M$, sabemos de antemão que haverá *aliasing.*

$$X[k] = X(e^{j\Omega})\Big|_{\Omega=\frac{2\pi}{10}k}, \quad k = 0, \cdots, 9.$$

Ora, $X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{44} e^{-j\Omega n} = \dfrac{1 - e^{-j\Omega 45}}{1 - e^{-j\Omega}}$.

Amostrando em $\dfrac{2\pi}{N}k$:

$$X[k] = \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi}{10}45k}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{10}k}} = \frac{1 - e^{-j9\pi k}}{1 - e^{-j\frac{\pi}{5}k}}, \quad k = 0, \cdots, 9.$$

A Figura 1 mostra a magnitude da transformada de Fourier $X(e^{j\Omega})$ e da sequência $X[k]$. Como esperado, $X[k]$ contém $N = 10$ amostras de $X(e^{j\Omega})$ nas frequências múltiplas de $\frac{2\pi}{N}$.

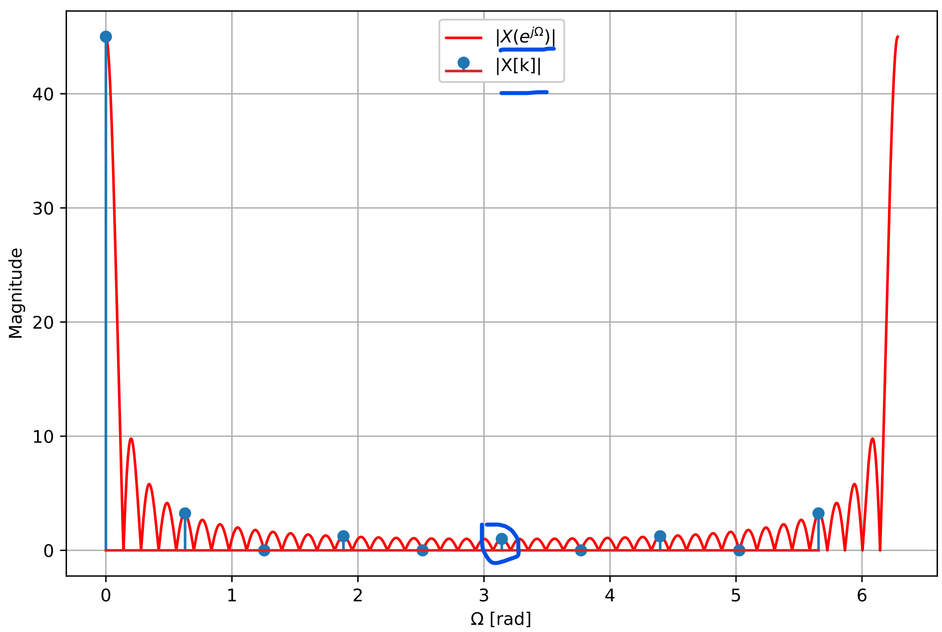


Figura 1: Transformada de Fourier e DFT de $N = 10$ pontos de $x[n]$.

Mas quem é $\text{DFT}^{-1}\{X[k]\}$? Em outras palavras, qual sequência de comprimento N no tempo nos leva a $X[k]$ em frequência?

$$X[k] = X(e^{j\Omega})\Big|_{\Omega=\frac{2\pi}{10}k} = \sum_{n=0}^{44} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{10}kn}$$

$$= \sum_{n=0}^{9} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{10}kn} + \sum_{n=10}^{19} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{10}kn} + \cdots + \sum_{n=40}^{44} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{10}kn}$$

Como $x[n] = 0$ para $n > 44$, podemos estender o último somatório até $n = 49$ sem problemas. Além disso, vamos aplicar uma mudança de variáveis:

- Fazemos $n' = n - 10$ no segundo somatório:

$$\sum_{n=10}^{19} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{10}kn} = \sum_{n'=0}^{9} x[n'+10]e^{-j\frac{2\pi}{10}k(n'+10)}.$$

  Já que $e^{-j\frac{2\pi}{N}k(n'+10)} = e^{-j\frac{2\pi}{10}kn'}$, temos que

$$\sum_{n=10}^{19} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n'=0}^{9} x[n'+10]e^{-j\frac{2\pi}{10}kn'}$$

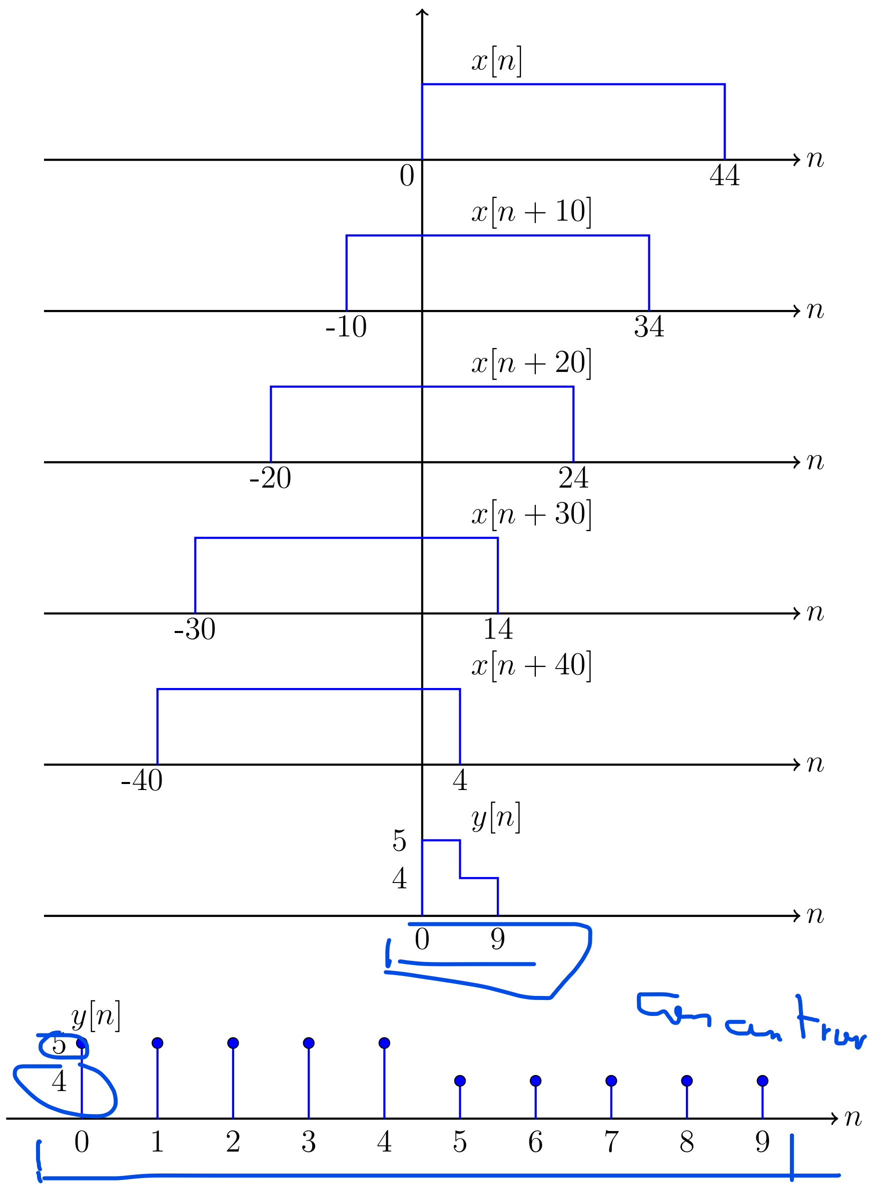
- Nas outras somatórias, fazemos $n' = n - 20$, $n' = n - 30$ e $n' = n - 40$, respectivamente. Com isto,

$$X[k] = \sum_{n=0}^{9} \{x[n] + x[n+10] + x[n+20] + x[n+30] + x[n+40]\}.e^{-j\frac{2\pi}{10}nk}.$$

  Esta expressão equivale à DFT de $N = 10$ pontos de uma sequência de comprimento 10 correspondente a

$$y[n] = x[n] + x[n+10] + x[n+20] + x[n+30] + x[n+40], 0 \leq n \leq 9$$

  Logo, $\text{DFT}^{-1}\{X[k]\} = y[n]$, conforme ilustrado na figura abaixo.



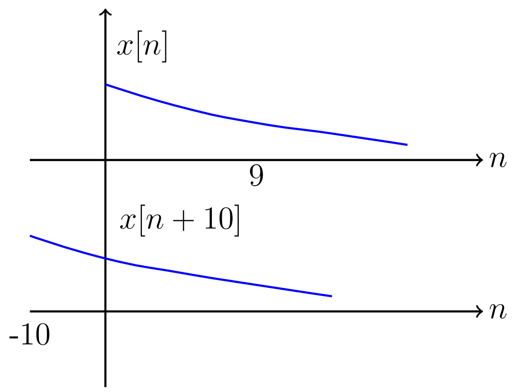
b) $x[n] = a^n u[n]$ — comprimento infinito.

Queremos calcular 10 amostras de $X(e^{j\Omega})$ por meio de uma sequência $y[n]$ de comprimento 10. Quem é $y[n]$?

$$Y[k] = \text{DFT}\{y[n]\} = X(e^{j\Omega})\Big|_{\Omega=\frac{2\pi}{10}k} \longrightarrow Y[k] = \frac{1}{1 - ae^{-j\frac{2\pi}{10}k}},\ k = 0, \cdots, 9.$$

Ora, $\mathcal{F}\{x[n]\} = \dfrac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}$.

Do exemplo anterior, sabemos que quando $N < M$ amostras, é como se estivéssemos lidando com a sequência de comprimento N (0 a $N-1$) resultante da superposição de réplicas de $x[n]$ deslocadas de rN, $r \in \mathbb{Z}$.



Ou seja,

$$y[n] = (x[n] + x[n+10] + x[n+20] + \cdots).\underbrace{W_{10}[n]}_{\substack{\text{Janela}\\ \text{retangular}\\ \text{de 0 a 9}}}$$

Portanto:

$$y[n] = (a^n + a^{n+10} + a^{n+20} + \cdots).W_{10}[n] = a^n \underbrace{(1 + a^{10} + a^{20} + \cdots)}_{\text{Soma de PG de razão } a^{10}}.W_{10}[n]$$

$$= a^n \frac{1}{1-a^{10}}.W_{10}[n] = \frac{a^n}{1-a^{10}}, \ n = 0, \ \cdots, \ 9.$$

2 Propriedades da DFT

2.1 Linearidade

Sejam $x_1[n]$ e $x_2[n]$ dois sinais discretos no tempo com comprimentos N_1 e N_2, respectivamente. Então:

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} aX_1[k] + bX_2[k], \tag{8}$$

onde $X_1[k] = \text{DFT}\{x_1[n]\}$ e $X_2[k] = \text{DFT}\{x_2[n]\}$.

Para que a relação em (8) seja válida, as DFTs de $x_1[n]$ e $x_2[n]$ devem ser computadas usando $N \geq \max(N_1, N_2)$.

2.2 Deslocamento circular ?

Da teoria de transformada de Fourier de sinais discretos, sabemos que um deslocamento no tempo produz uma componente linear de fase no domínio espectral:

$$x_1[n] = x[n-m] \Leftrightarrow X_1(e^{j\Omega}) = e^{-j\Omega m} X(e^{j\Omega})$$

A questão que vamos considerar aqui é se existe uma propriedade similar para a DFT. Vamos, então, analisar o que acontece no domínio do tempo quando inserimos uma componente linear de fase nas amostras espectrais.

Seja

$$X_1[k] = e^{-j\frac{2\pi}{N}mk} X[k], 0 \leq k \leq N-1.$$

Ambas as DFTs possuem N pontos e, portanto, estão associadas a sequências de comprimento N.

Vamos determinar quem é a sequência $x_1[n]$ associada a $X_1[k]$ e relacioná-la com $x[n]$:

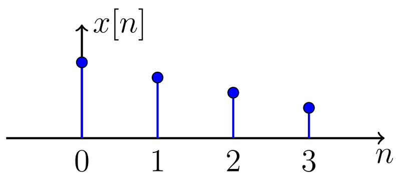
$$\begin{aligned} x_1[n] = \text{DFT}^{-1}\{X_1[k]\} &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(X[k]e^{-j\frac{2\pi}{N}mk}\right)e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[k]e^{j\frac{2\pi}{N}(n-m)k} \end{aligned}$$

Usando (6), constatamos que:

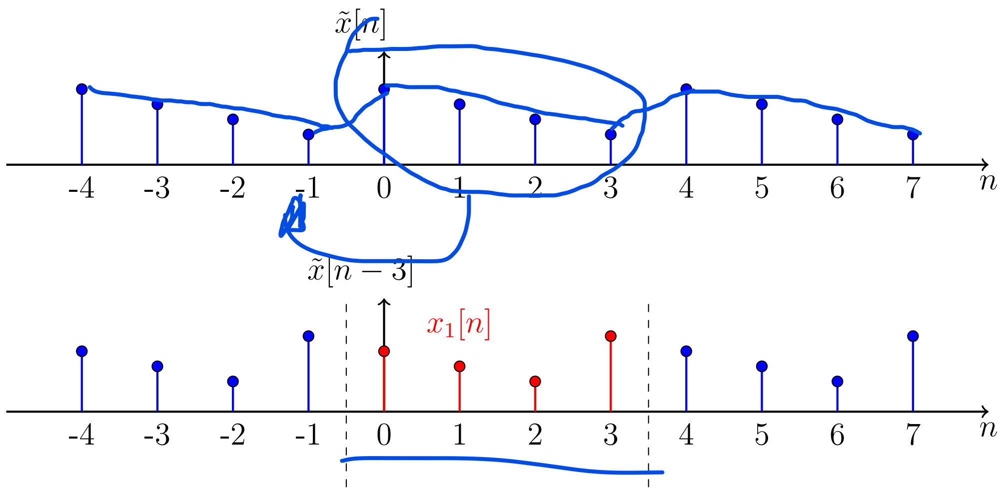
$$x_1[n] = \tilde{x}[n-m],\ 0 \leq n \leq N-1 \tag{9}$$

Ou seja, a sequência $x_1[n]$ equivale a um período da extensão periódica de $x[n]$ deslocada de m unidades. Assim, a multiplicação das amostras espectrais por uma exponencial complexa também está associada a um deslocamento temporal, como ocorre na transformada de Fourier. Contudo, este deslocamento tem agora um caráter distinto: a extensão periódica de $x[n]$ é que deve ser deslocada no tempo, e o conteúdo observado no intervalo $0 \leq n \leq N-1$ define a sequência $x_1[n]$.

Vejamos um exemplo para tornar mais palpável esta relação. Considere a sequência $x[n]$ de comprimento $N = 4$ mostrada abaixo.

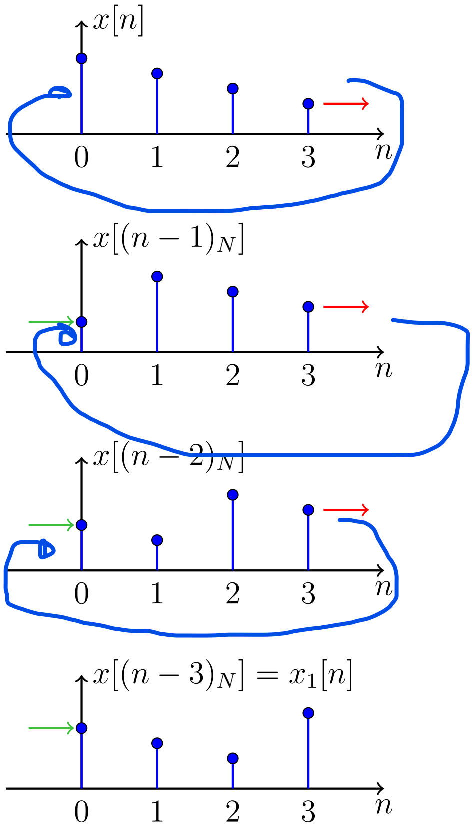


A sequência $x_1[n]$ que tem como DFT $X_1[k] = e^{-j\frac{2\pi}{N}3k}X[k]$, $0 \leq k \leq N-1$, corresponde a um período da extensão periódica de $x[n]$ deslocada linearmente por $m = 3$ unidades à direita, como vemos na figura abaixo.



Interessantemente, podemos obter a sequência $x_1[n]$ diretamente a partir de $x[n]$, isto é, sem fazer o deslocamento linear da extensão periódica $\tilde{x}[n]$. Isto é possível através da definição de um novo tipo de deslocamento, chamado de **deslocamento circular**. Em suma, deslocar circularmente uma sequência $x[n]$, definida no intervalo $0 \leq n \leq N-1$, significa deslocá-la de tal modo que, a cada movimento, a amostra que sairia do intervalo de interesse por uma extremidade é reinserida na posição vazia na outra extremidade. Vamos usar a notação $x[(n-m)_N]$ para indicar o deslocamento circular de m unidades da sequência $x[n]$ de comprimento N.

Considerando a sequência $x[n]$ do exemplo anterior, apresentamos a seguir como a sequência $x_1[n]$ é obtida através do deslocamento circular de $x[n]$. As setas em vermelho acompanham as amostras que vão deixar o intervalo de interesse na extremidade à direita, enquanto as setas em verde indicam o retorno destas amostras na extremidade à esquerda.



Sendo assim, podemos formalizar a propriedade do deslocamento temporal da seguinte forma:

$$x_1[n] = \underbrace{x\left[(n-m)_N\right]}_{\text{Deslocamento circular}} \overset{\text{DFT}}{\longleftrightarrow} X_1[k] = X[k]e^{-j\frac{2\pi}{N}mk},$$

onde $0 \leq n \leq N-1$ e $0 \leq k \leq N-1$.

2.3 Convolução circular

Uma das propriedades mais importantes da transformada de Fourier estabelece que a convolução no tempo entre duas sequências $x_1[n]$ e $x_2[n]$ está associada ao produto dos espectros no domínio da frequência:

$$\underbrace{y[n] = x_1[n] * x_2[n]}_{\text{seq. de comp. } N_1+N_2-1} \overset{\mathcal{F}\{\cdot\}}{\Longleftrightarrow} X_1(e^{j\Omega})X_2(e^{j\Omega}) = Y(e^{j\Omega})$$

Será que a DFT possui uma propriedade similar com relação à convolução? Isto é, será que a convolução de duas sequências também está associada ao produto das respectivas DFTs?

Para analisar esta questão, vamos considerar duas sequências, $x_1[n]$ e $x_2[n]$, causais e com comprimentos N_1 e N_2, respectivamente. As DFTs de N pontos destas sequências são denotadas por $X_1[k]$ e

$X_2[k]$, respectivamente, sendo que $N \geq \max(N_1, N_2)$. Esta última condição é necessária para assegurar que $x_1[n] = \text{DFT}^{-1}\{X_1[k]\}$ e $x_2[n] = \text{DFT}^{-1}\{X_2[k]\}$.

Se aplicarmos o processo de amostragem em frequência sobre $Y(e^{j\Omega})$, à semelhança do que foi discutido na Seção 1.1, obtemos a sequência de amostras

$$\tilde{Y}[k] = Y(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = X_1(e^{j\frac{2\pi}{N}k})X_2(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = \tilde{X}_1[k]\tilde{X}_2[k]$$

Usando (2), percebemos que o espectro obtido a partir da amostragem de $Y(e^{j\Omega})$ está associado à extensão periódica de $y[n]$ com período N:

$$\underbrace{\tilde{y}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} y[n - rN]}_{\text{Extensão periódica de } y[n]} \xleftrightarrow{\mathcal{F}\{\cdot\}} Y(e^{j\Omega})P(e^{j\Omega}) = \frac{2\pi}{N}\sum_{k}\tilde{Y}[k]\delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$$

Então, se tomarmos um período da sequência de amostras $\tilde{Y}[k]$, ficamos com a sequência

$$Y[k] = \tilde{Y}[k] = X_1[k]X_2[k],\ 0 \leq k \leq N-1.$$

Ora, $Y[k]$ representa a DFT de N pontos da sequência correspondente a um período da extensão periódica $\tilde{y}[n]$.

Ou seja, o produto das DFTs de N pontos de $x_1[n]$ e $x_2[n]$ está associado no domínio do tempo a uma sequência de comprimento N que equivale a um período da extensão periódica de $y[n] = x_1[n] * x_2[n]$:

$$x_3[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} y[n - rN],\ 0 \leq n \leq N-1 \xleftrightarrow{\text{DFT}} Y[k] = X_1[k]X_2[k],\ 0 \leq k \leq N-1 \tag{10}$$

Interessantemente, é possível expressar a sequência $x_3[n]$ diretamente em função das sequências $x_1[n]$ e $x_2[n]$. Ora,

$$\begin{aligned} x_3[n] &= \text{DFT}^{-1}\{X_1[k]X_2[k]\} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_1[k]X_2[k]e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \end{aligned}$$

Usando a expressão da DFT (Equação (7a)) para substituir $X_1[k]$, obtemos:

$$\begin{aligned} x_3[n] &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{r=0}^{N-1} x_1[r]e^{-j\frac{2\pi}{N}kr}\right)X_2[k]e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \\ &= \sum_{r=0}^{N-1} x_1[r]\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_2[k]e^{-j\frac{2\pi}{N}rk}e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\right) \end{aligned}$$

O termo entre parênteses corresponde à DFT inversa de $X_2[k]e^{-j\frac{2\pi}{N}rk}$, que equivale à sequência $x_2[n]$ deslocada circularmente de r unidades, *i.e.*, $x_2[(n-r)_N]$. Portanto:

$$x_3[n] = \sum_{r=0}^{N-1} x_1[r]x_2[(n-r)_N] \tag{11}$$

A operação em (11) se parece muito com a convolução entre $x_1[n]$ e $x_2[n]$, exceto pelo fato de envolver um deslocamento circular. Por isso, esta operação é conhecida como **convolução circular** e é denotada por

$$x_3[n] = x_1[n] \, Ⓝ \, x_2[n] = \sum_{r=0}^{N-1} x_1[r]x_2[(n-r)_N] \tag{12}$$

O que acabamos de demonstrar é que a sequência $x_3[n]$, que resulta da convolução circular (de comprimento N) entre $x_1[n]$ e $x_2[n]$, tem DFT dada pelo produto das DFTs $X_1[k]$ e $X_2[k]$. Portanto, podemos resumir a propriedade através da seguinte relação:

$$x_3[n] = \sum_{r=0}^{N-1} x_1[r]x_2[(n-r)_N] = x_1[n] \, Ⓝ \, x_2[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X_3[k] = X_1[k]X_2[k] \; 0 \leq k \leq N-1 \tag{13}$$

Em outras palavras, a DFT da convolução circular entre duas sequências de comprimento N é equivalente ao produto das DFTs das sequências.

2.4 Relação entre Convolução Circular e Convolução Linear

A despeito de sua inegável beleza matemática, a propriedade demonstrada na seção anterior parece ter pouco apelo prático, pois é a operação de convolução linear que está diretamente relacionada à ação de um sistema linear e invariante com o tempo, e não a circular. Assim, em um primeiro momento, temos a sensação de que não há uma propriedade da DFT vinculada à operação de convolução linear.

No entanto, durante a derivação da propriedade, verificamos que a sequência $x_3[n] = x_1[n] \, Ⓝ \, x_2[n]$ também pode ser escrita como:

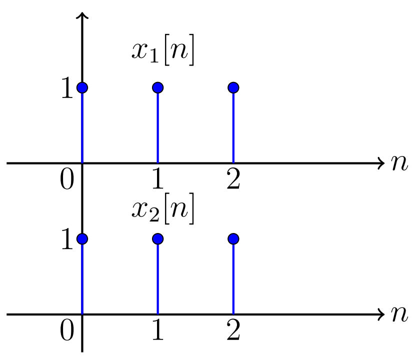
$$x_3[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} y[n-rN], \; 0 \leq n \leq N-1 \tag{14}$$

Com base nesta relação, percebemos que a convolução circular de N pontos entre $x_1[n]$ e $x_2[n]$ é igual a um período da extensão periódica da convolução linear de $x_1[n]$ e $x_2[n]$. Como o resultado da convolução circular depende do parâmetro N escolhido, sua relação com a convolução linear fica em função deste parâmetro.

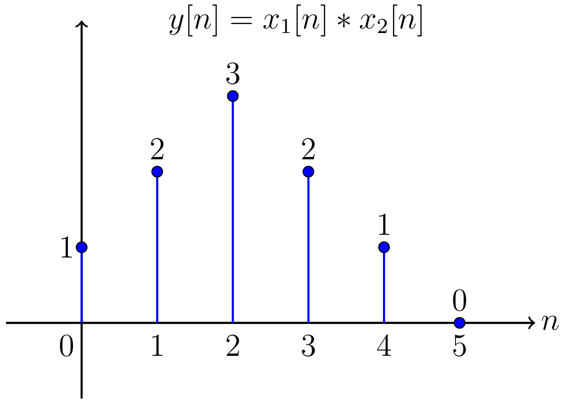
Vamos, então, analisar essa relação através de um exemplo ilustrativo.

Exemplo: $x_1[n] = x_2[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

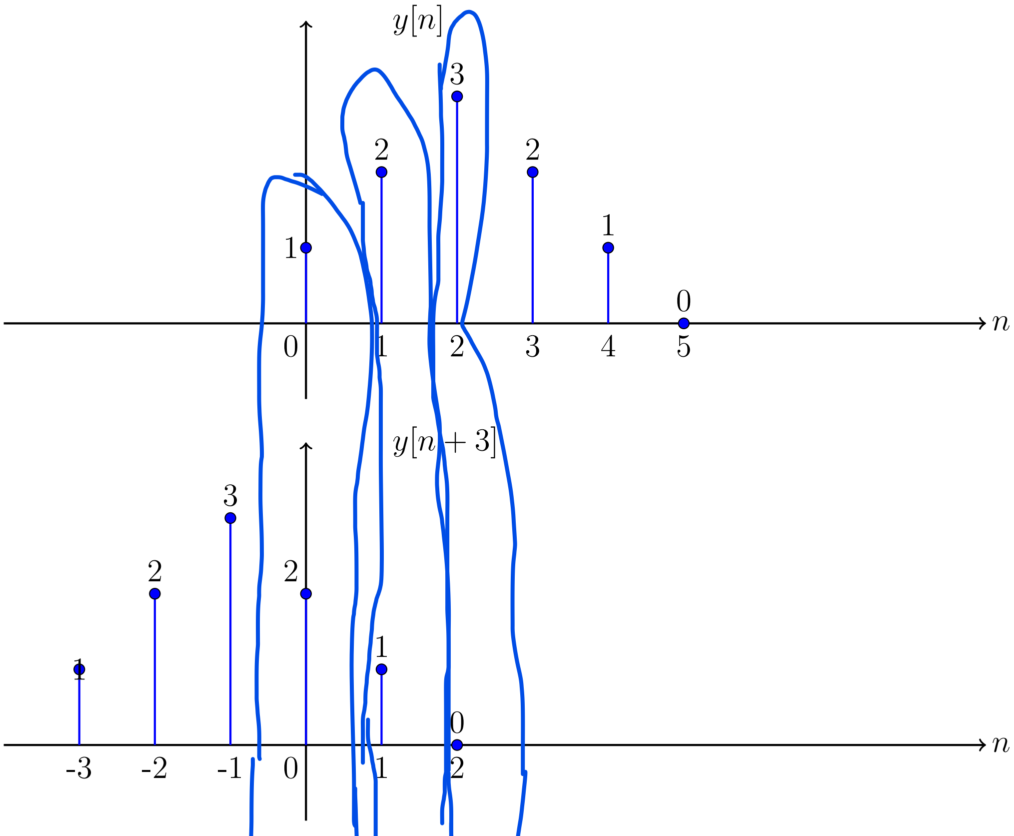
a) $N = N_1 = N_2 = 3$

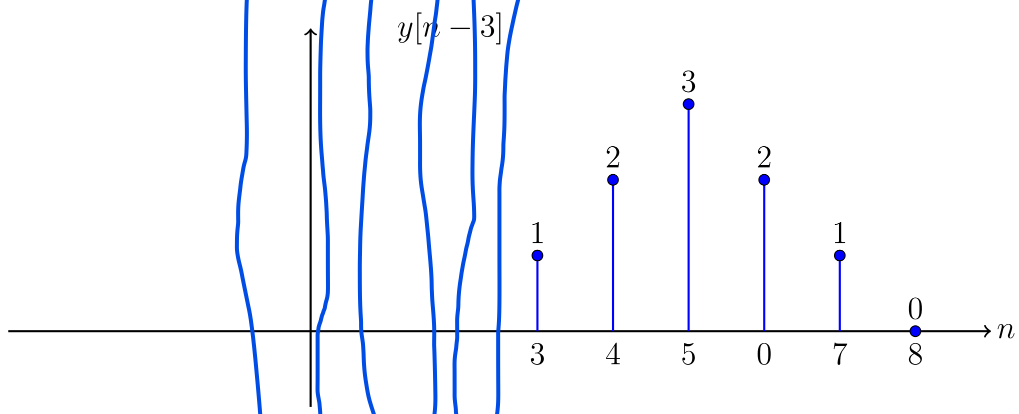


A convolução linear entre as duas sequências corresponde a:

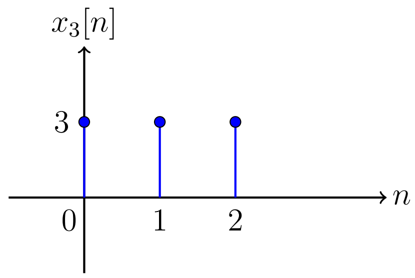


Então, usando (14), a convolução circular entre $x_1[n]$ e $x_2[n]$ é obtida fazendo uma soma de réplicas de $y[n]$ deslocadas de múltiplos de N:





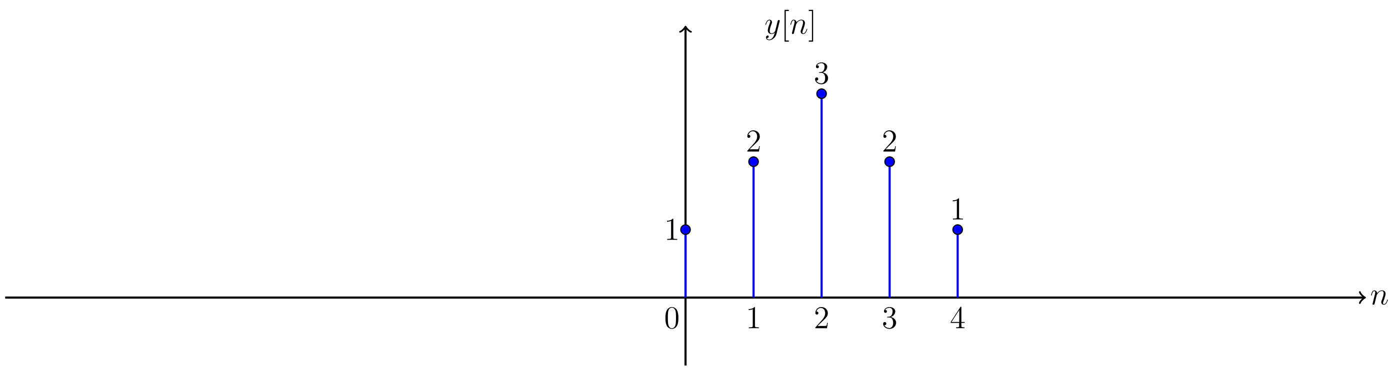
Calculando a soma no intervalo $0 \leq n \leq N-1$, obtemos a sequência $x_3[n]$:

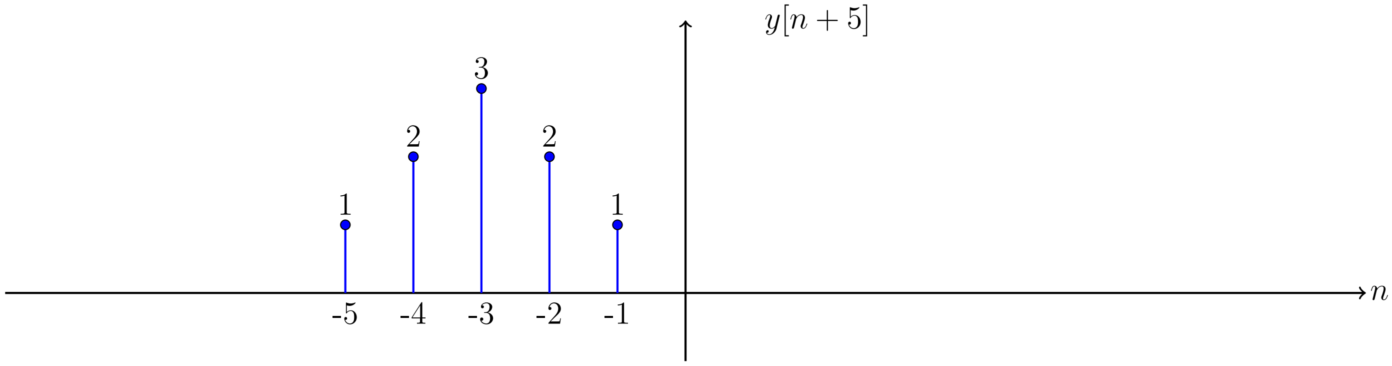


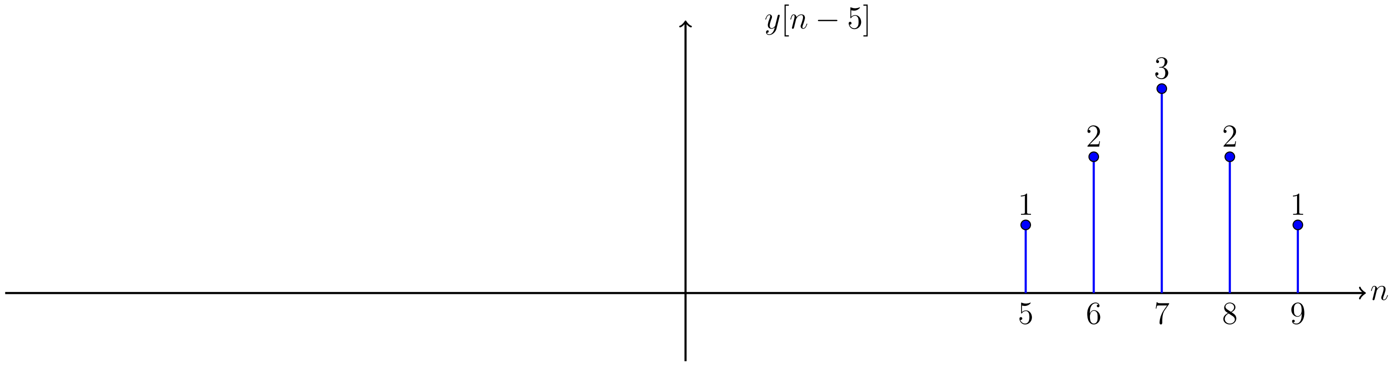
Claramente, o resultado não é igual ao da convolução linear. Isso ocorreu porque houve sobreposição entre as réplicas.

b) $N = N_1 + N_2 - 1 = 5$.

Agora, o intervalo de interesse é $0 \leq n \leq \underbrace{N_1 + N_2 - 2}_{N-1}$. Além disso, o deslocamento das réplicas de $y[n]$ é de $N = 5$.





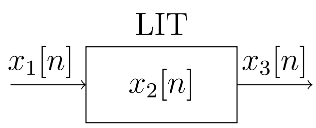


Neste caso, não há mais sobreposição entre as réplicas no intervalo entre 0 e $N-1$, de modo que $x_3[n] = y[n]$, *i.e.*, o resultado da convolução circular de $x_1[n]$ e $x_2[n]$ é idêntico ao da convolução linear entre as sequências.

O exemplo que acabamos de abordar mostra que é possível usar a convolução circular (ou, no domínio da frequência, o produto de DFTs) para calcular a convolução linear e, assim, implementar um sistema LIT. Este belo resultado será formalizado na próxima seção.

2.5 Implementação de Sistemas LIT usando DFTs

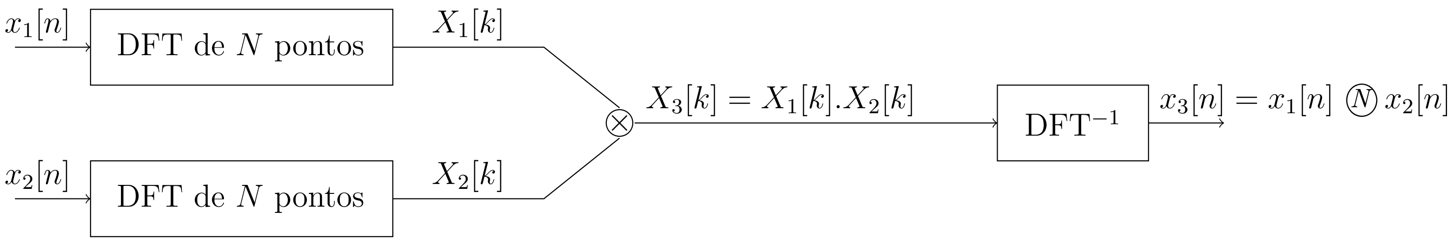
Considere um sistema linear e invariante com o tempo cuja resposta ao impulso é $x_2[n]$, e cuja entrada é $x_1[n]$.



A saída do sistema é dada pela convolução linear:

$$x_3[n] = x_1[n] * x_2[n]$$

Se adotarmos $N \geq N_1 + N_2 - 1$, onde N_1 e N_2 são os comprimentos das sequências $x_1[n]$ e $x_2[n]$, respectivamente, então o sistema LIT pode ser implementado da seguinte forma:



Dependendo dos comprimentos envolvidos, esta abordagem alternativa pode ser computacionalmente mais eficiente graças à rapidez dos algoritmos FFT (*Fast Fourier Transform*).

3 Relação entre as frequências ω, Ω e os índices k

Considere que $x[n]$ foi obtida a partir da amostragem de $x(t)$ a uma taxa f_s, sendo constituída de N amostras.

O elemento $X[k]$ corresponde a qual frequência de $x(t)$, em Hz?

- $X[k]$ contém a amostra de $X(e^{j\Omega})$ em $\Omega = \dfrac{2\pi}{N}k$.
- $X(e^{j\Omega})$ contém as frequências Ω que se associam a f segundo a relação:

$$\Omega = \omega.T_s = 2\pi f T_s$$

Juntando os dois resultados, $\dfrac{2\pi}{N}k = \dfrac{2\pi f}{f_s}$.

Então,

$$k = \frac{Nf}{f_s}$$

ou

$$f = \frac{k.f_s}{N}, \; k = 0, \; \cdots, \; N-1.$$

Comentário Final:

- A teoria de amostragem requer que $x(t)$ seja limitado em frequência;
- A DFT exige $x[n]$ (e, portanto, $x(t)$) limitado no tempo;
- A teoria "proíbe" que as duas coisas ocorram juntas. Na prática, os sinais são quase limitados no tempo e na frequência.

Referências

[Oppenheim & Schafer, 2010] A. V. Oppenheim, R. W. Schafer, *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice Hall, 3ª ed., 2010.