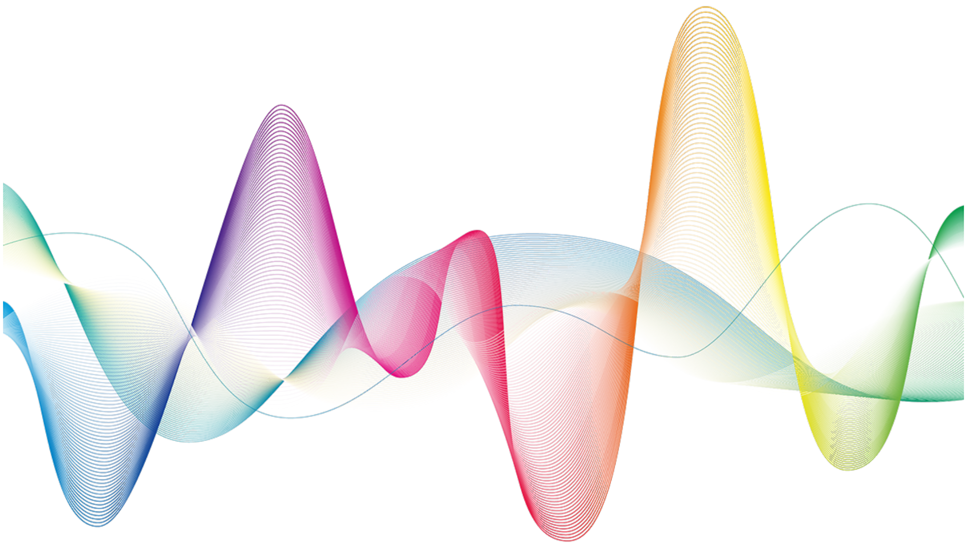
EA614 - Análise de Sinais

Tópico 1 - Sinais e Sistemas

Levy Boccato
Renan Del Buono Brotto

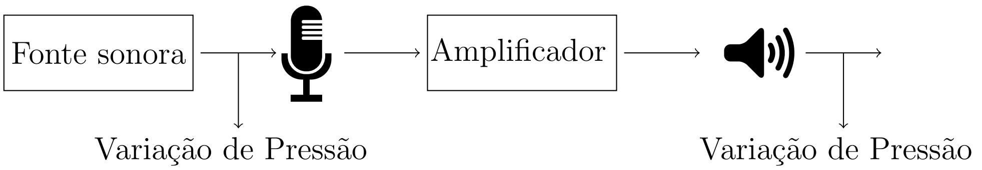
2 de Agosto de 2024



Conteúdo

1 Sinais e Sistemas: Introdução

Definição: Um sinal é uma manifestação física que carrega informação.
Exemplos:



- Tanto a variação de pressão do ar, quanto as variações elétricas correspondentes, observadas na saída do microfone, são exemplos de sinais (no caso, transportando a mesma informação);
- fumaça em conclaves;
- voz e áudio;
- imagem (fotografia, radiografia, tomografia etc.);
- sinais biomédicos: ECG, EEG, PCG, EMG etc.;
- vídeo.

Em geral, os sinais são representados como funções matemáticas de uma ou mais variáveis independentes:

- voz: função da variável tempo;
- imagem: função no espaço bidimensional, *e.g.*, dos eixos cartesianos x e y;
- vídeo: depende não só das variáveis x e y, mas também do tempo.

Classificação:

- sinais contínuos no tempo: $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$;
- sinais discretos no tempo: $x[n]$, $n \in \mathbb{Z}$.

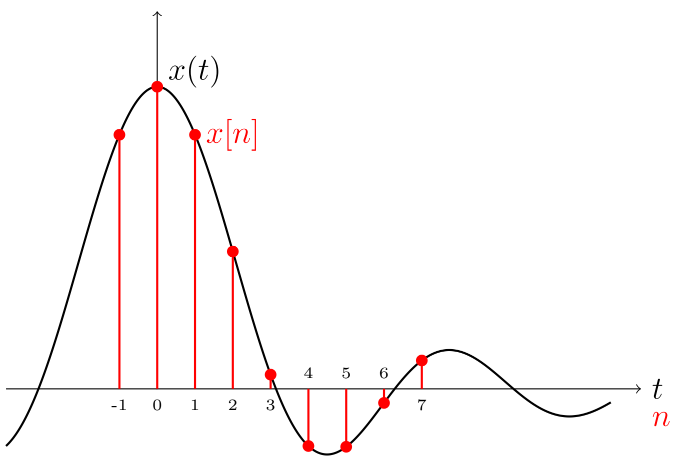


Figura 1: O sinal discreto $x[n]$ contém observações de $x(t)$ tomadas em instantes de tempo pré-fixados. Logo, a variável independente n é discreta e aponta o índice da amostra na sequência: $n \in \mathbb{Z}$.

Os sinais digitais são um caso particular dos discretos, nos quais a amplitude também é discreta.

2 Potência e Energia de um Sinal

As noções de potência e energia podem ser aplicadas a qualquer tipo de sinal, não apenas para tensão e corrente em um dispositivo.

Definições: Seja $x(t)$ um sinal contínuo no tempo.

- Potência instantânea: $|x(t)|^2$
- Energia de um sinal em um intervalo:

E

$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$$

Pot

- Energia total:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

- Potência média em um intervalo:

$$\frac{\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt}{t_2 - t_1}$$

- Potência média total:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt$$

Para um sinal $x[n]$ a tempo discreto:

- Potência instantânea: $|x[n]|^2$
- Energia em intervalo

E

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$$

Pot

- Energia total:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

- Potência média em um intervalo:

$$\frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$$

- Potência média total:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

Exemplo: bateria de carro de 12 volts.

- Potência instantânea normalizada (pressupõe uma resistência de 1 Ω): $|x(t)|^2 = 144$;

- Energia (t_1, t_2): $144(t_2 - t_1)$;
- Energia total: ∞;
- Potência média total:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}(144).(2T) = 144$$

Com base nestas definições, podemos classificar os sinais em dois tipos:

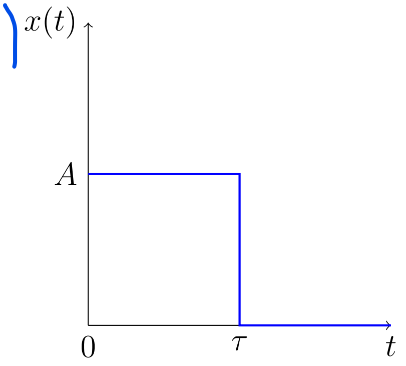
1. **Sinais de Energia:** apresentam energia total finita; consequentemente, a potência média total é nula.

   Exemplo:

$$x(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < \tau, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$E \neq \infty = \sum |x(n)|$

Pot $= 0$



$E_{TOTAL} = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{\tau} A^2 dt = A^2\tau$

2. **Sinais de Potência:** apresentam potência média total finita e diferente de zero. Para isso, a energia total deve tender ao infinito.

   Exemplo: $x(t) = A\cos(\omega_0 t)$, $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$. Trata-se de um sinal periódico, com período T_0.

   - Potência instantânea:

$$|x(t)|^2 = A^2\cos^2(\omega_0 t) = A^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\omega_0 t)\right)$$

   - Potência média em um período:

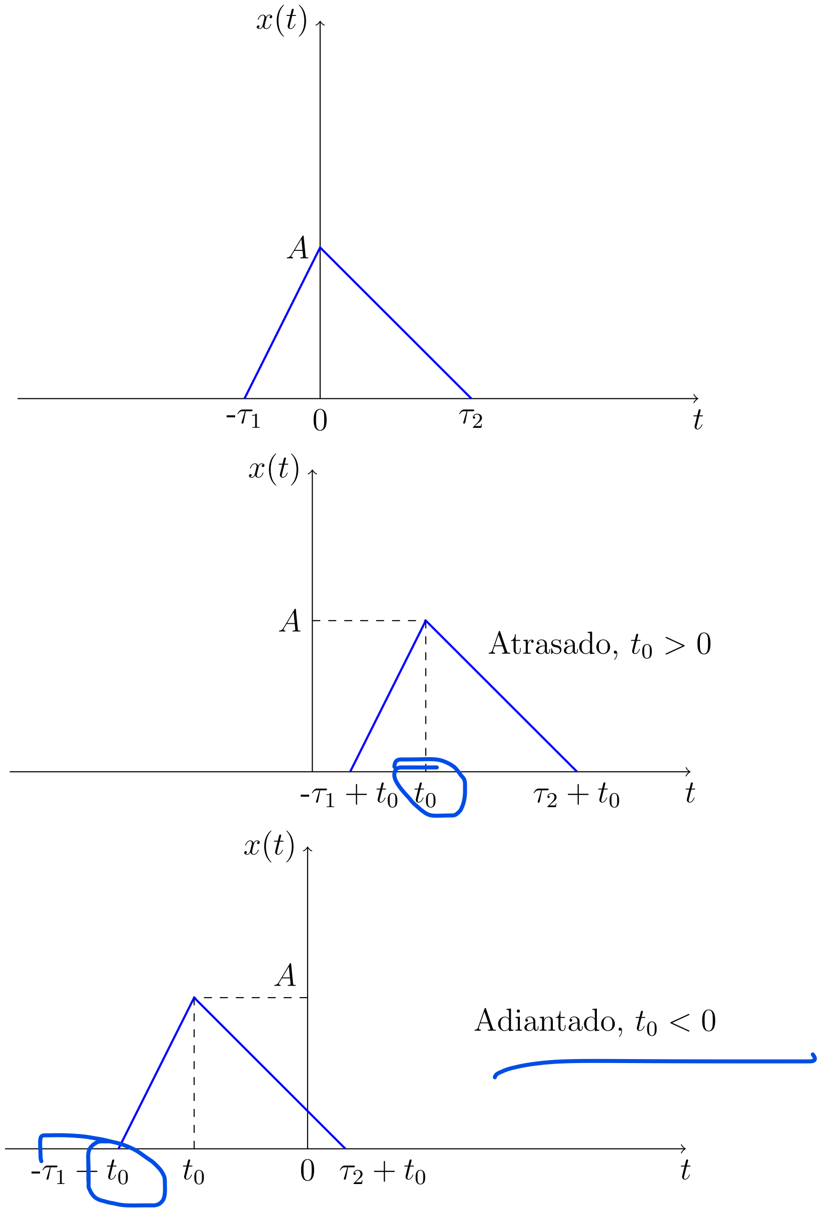
$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt = \frac{A^2}{2}\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} dt + \underbrace{\cancelto{0}{\int_0^{T_0} \frac{A^2}{2T_0}\cos(2\omega_0 t)dt}}_{\text{integral ao longo de um múltiplo do período da cossenóide}} = \frac{A^2}{2}$$

Se fizermos o cálculo da potência média total por período, vamos encontrar o valor $\dfrac{A^2}{2}$.

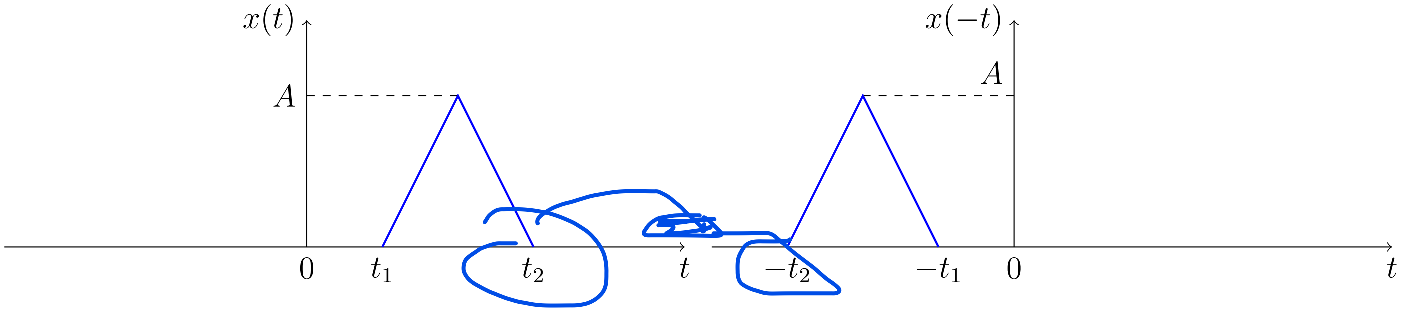
OBS.: O sinal $x(t) = t$, $\forall t$ possui $E_{\text{TOTAL}} \to \infty$ e, ao mesmo tempo, $P_{\text{Média}} \to \infty$.

3 Transformação da Variável Independente

a) Deslocamento
Dado um sinal $x(t)$, o sinal $x(t - t_0)$ é idêntico a $x(t)$ deslocado no eixo do tempo.

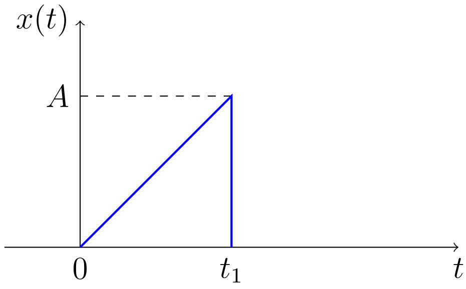


b) Inversão no eixo do tempo
Dado um sinal $x(t)$, o sinal $x(-t)$ é o resultado da rotação de $x(t)$ em torno do eixo vertical.



c) <u>Escalonamento</u>

Dado um sinal $x(t)$, o sinal $x(at)$, $a > 0$, é uma versão ampliada ou reduzida de $x(t)$.

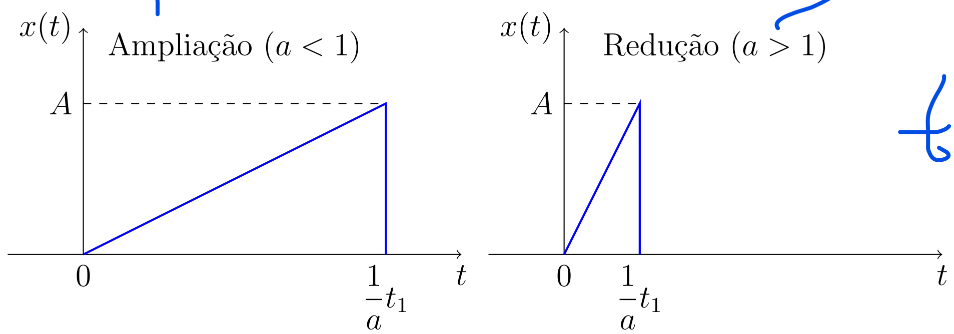


y −

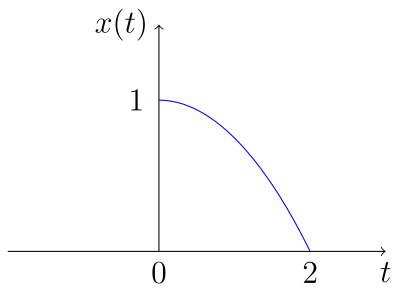
t +

y +

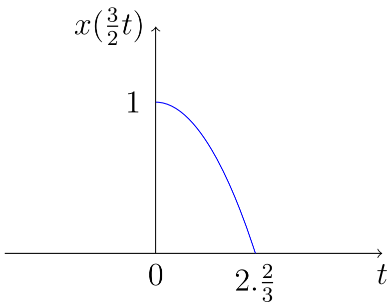
t −

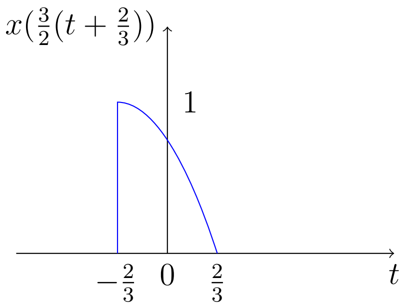


<u>Exemplo:</u> queremos obter $x\left(\dfrac{3}{2}t + 1\right)$ e $x(-t+1)$.

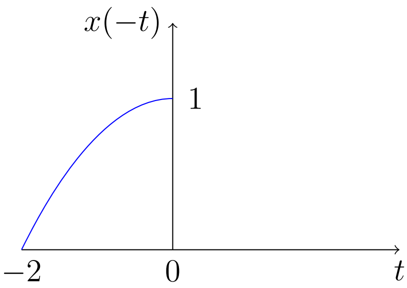


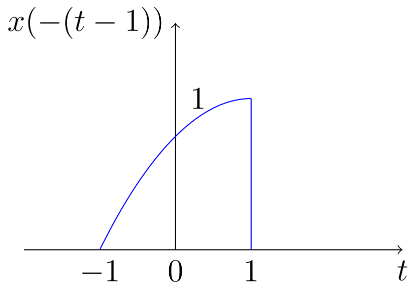
$x\left(\dfrac{3}{2}t + 1\right) = x\left(\dfrac{3}{2}(t + 2/3)\right)$. A partir de $x(t)$, geramos $x\left(\dfrac{3}{2}t\right)$ e, em seguida, aplicamos o deslocamento $t_0 = -2/3$ para obter $x\left(\dfrac{3}{2}(t + 2/3)\right)$.





$x(-t+1) = x(-(t-1))$. A partir de $x(t)$, geramos $x(-t)$ e, em seguida, aplicamos o deslocamento para obter $x(-t+1)$.





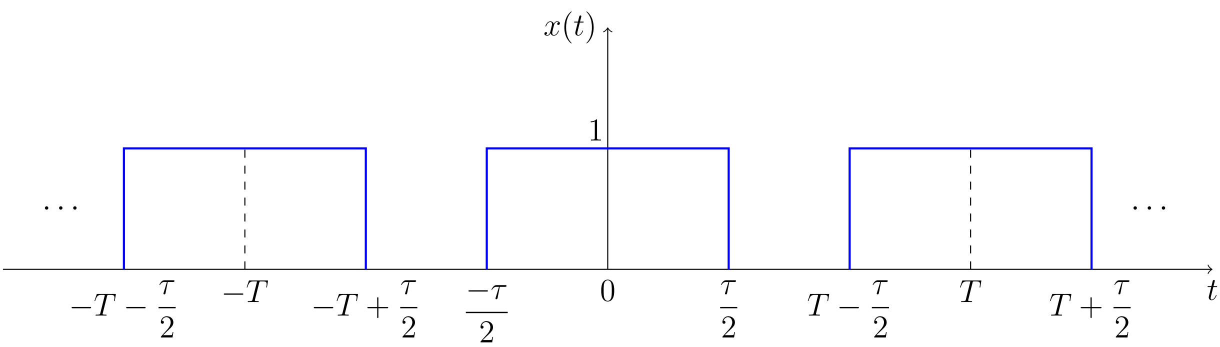
4 Periodicidade

gu t → Períod

Um sinal contínuo $x(t)$ é periódico com período T se, e somente se, $x(t) = x(t-nT)$, $\forall\ t \in \mathbb{R}$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}$.

- se $x(t)$ é periódico com período T, então $x(t)$ também é periódico com período kT, onde k é um número inteiro. A rigor, um sinal periódico possui infinitos períodos. Por isso, o menor período positivo é utilizado para descrever o sinal e é chamado de período fundamental.

  Exemplo: onda quadrada.



Um sinal discreto $x[n]$ é periódico com período N se, e somente se, $x[n] = x[n-kN]$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}$, $\forall\ k \in \mathbb{Z}$ e $N \in \mathbb{Z}$.

Exemplo: $x[n] = A\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$

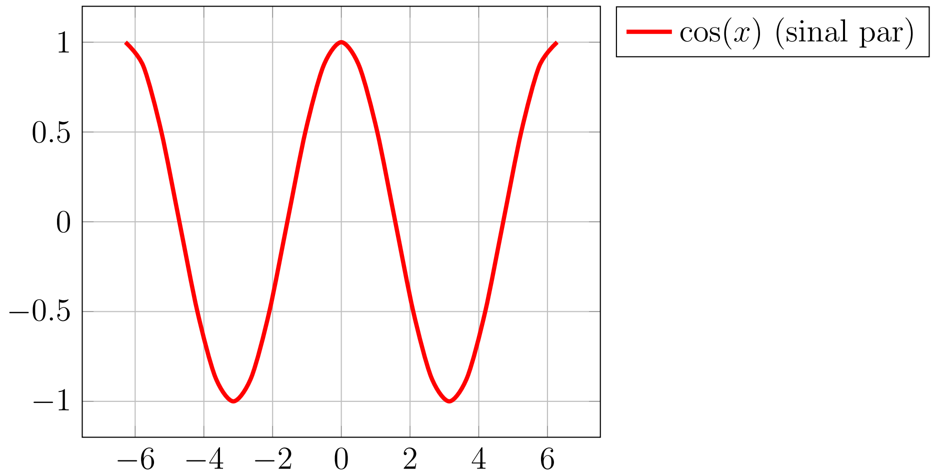
$$x[n+kN] = A\cos\left(\frac{2\pi(n+kN)}{N}\right) = \underbrace{A\cos\left(\frac{2\pi n}{N} + k.2\pi\right)}_{\text{Periódico com período } 2\pi} = A\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right).$$

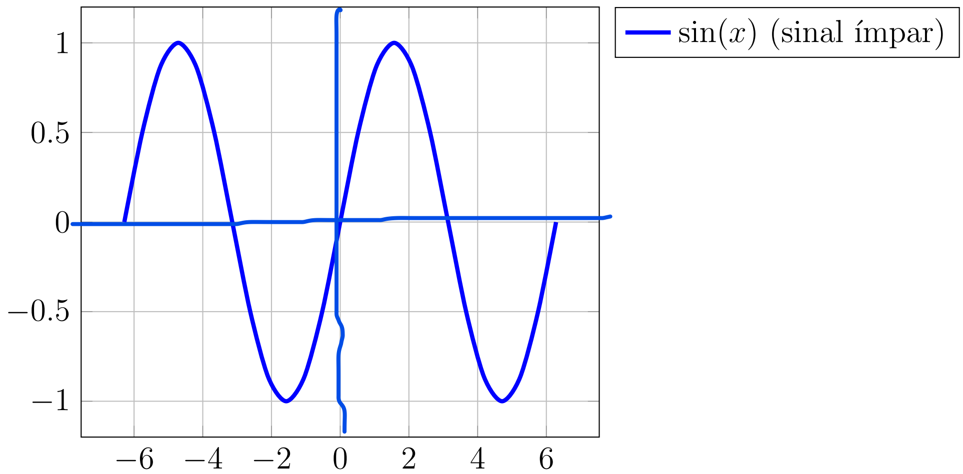
Portanto, $x[n]$ é um sinal discreto, periódico, com período fundamental N.

5 Simetria: Sinais Pares e Ímpares

- $x(t)$ é par se e somente se $x(t) = x(-t)$, $\forall\, t$.
- $x(t)$ é ímpar se e somente se $x(t) = -x(-t)$, $\forall\, t$.

Exemplos:





Qualquer sinal $x(t)$ pode ser escrito como a combinação de duas componentes, $x_p(t)$ e $x_i(t)$, que apresentem simetria par e ímpar, respectivamente.

$$x(t) = x_p(t) + x_i(t), \tag{1}$$

onde

$$x_p(t) = \frac{x(t)+x(-t)}{2}, \text{ é a componente par,} \tag{2}$$

$$x_i(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}, \text{ é a componente ímpar.} \tag{3}$$

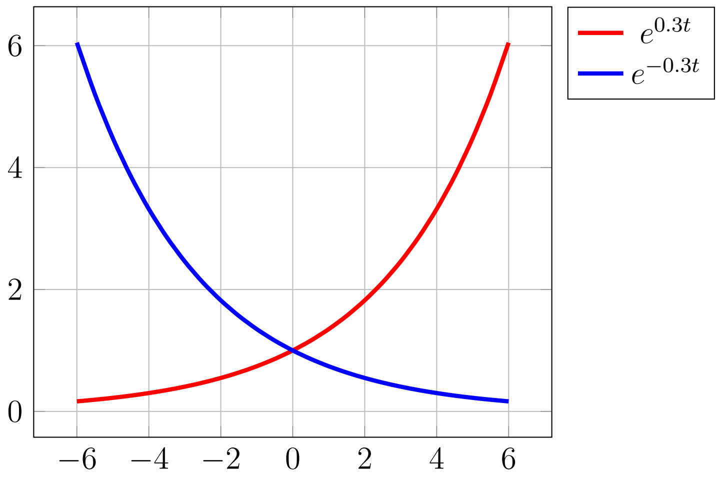
6 Sinais e Sequências Exponenciais

Uma classe particularmente importante de sinais e sequências para este curso está associada às funções exponenciais complexas. Começaremos caracterizando as exponenciais complexas contínuas, passando, então, às sequências exponenciais.

(A) **Exponenciais Complexas Contínuas**

Forma geral: $x(t) = ce^{at}$, $a, c \in \mathbb{C}$.

- exponenciais reais: $a, c \in \mathbb{R}$



- exponenciais complexas periódicas: a é um número puramente imaginário, c real. Por simplicidade, vamos adotar $c = 1$.

  Então $x(t) = e^{at} \xrightarrow{a=j\omega_0} x(t) = e^{j\omega_0 t}$, $-\infty < t < \infty$.

  Este tipo de exponencial é periódica em t com período fundamental $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$, pois:

  $e^{j\omega_0(t+2\pi n/\omega_0)} = e^{j\omega_0 t}\,\cancel{e^{j2\pi n}}^{\,1} = e^{j\omega_0 t}$

  T_0: período fundamental (em segundos);

  f_0: frequência fundamental (em Hertz), $f_0 = \dfrac{1}{T_0}$;

  $\dfrac{\omega_0}{2\pi} = 2\pi f_0$

  $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0$: frequência angular (em rad/s).

  Fórmula de Euler: $e^{j\omega_0 t} = \underbrace{\cos(\omega_0 t) + j\mathrm{sen}(\omega_0 t)}_{\text{também periódicos com período } T_0 = 2\pi/\omega_0}$ $\cos(\omega_0 t) + j\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)$

dist

  – Energia em um período:

$e^{j\omega_0 t} \neq |\cos(\omega_0 t) + \mathrm{sen}(\omega_0 t)|^2$

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} \underbrace{|e^{j\omega_0 t}|^2}_{=1} dt = \int_{t_0}^{t_0+T_0} 1 dt = \boxed{T_0} \tag{4}$$

Pot media

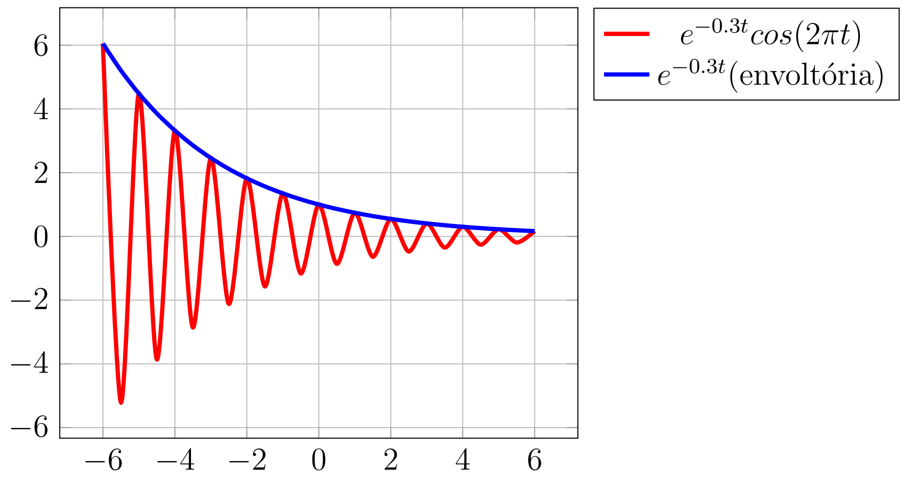
- Energia total: ilimitada
- Potência média em um período: $\dfrac{E_{\text{período}}}{T_0} = 1$
- Potência média total: 1

- Exponenciais complexas gerais: $c, a, \in \mathbb{C}$.

  Seja $c = |c|e^{j\theta}$ e $a = r + j\omega$. Então, $x(t) = \underbrace{|c|e^{rt}}_{\substack{\text{amplitude c/}\\ \text{variação}\\ \text{exponencial}}} \cdot \underbrace{e^{j(\omega t+\theta)}}_{\substack{\text{componente}\\ \text{periódica}}}$

  Usando a fórmula de Euler: $x(t) = |c|e^{rt}\big(\cos(\omega t + \theta) + j\text{sen}(\omega t + \theta)\big)$.

  Exemplo: $r < 0$: amplitude amortecida



  Dica para manipulação matemática:

$$x(t) = e^{j\theta_1 t} + e^{j\theta_2 t} = e^{j\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)t}\left(e^{j\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)t} + e^{-j\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)t}\right) \tag{5}$$

$$= 2e^{j\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)t}\frac{\left(e^{j\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)t} + e^{-j\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)t}\right)}{2} \tag{6}$$

$$= 2e^{j\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)t}\cos\left(\frac{(\theta_1-\theta_2)t}{2}\right). \tag{7}$$

(B) **Sequências Exponenciais Complexas**

Forma Geral: $x[n] = c\alpha^n = ce^{\beta n}$, $-\infty < n < \infty$, n inteiro, $e^{\beta} = \alpha$.

- exponenciais reais: $c, \alpha \in \mathbb{R}$. Ilustramos o comportamento desse tipo de sequência na Figura 2, considerando, sem perda de generalidade, o caso em que $c = 1$.

  Para o caso em que $\alpha > 0$ temos dois possíveis comportamentos: (1) a amplitude decai para zero à medida que n aumenta, se $0 < \alpha < 1$ e (2) a sequência diverge, se $\alpha > 1$.

  Já quando $\alpha < 0$, passamos a ter os dois comportamentos descritos acima, ou seja, convergência para zero se $-1 < \alpha < 0$ e divergência se $\alpha < -1$, mas com uma alternância de sinal nos valores da sequência.

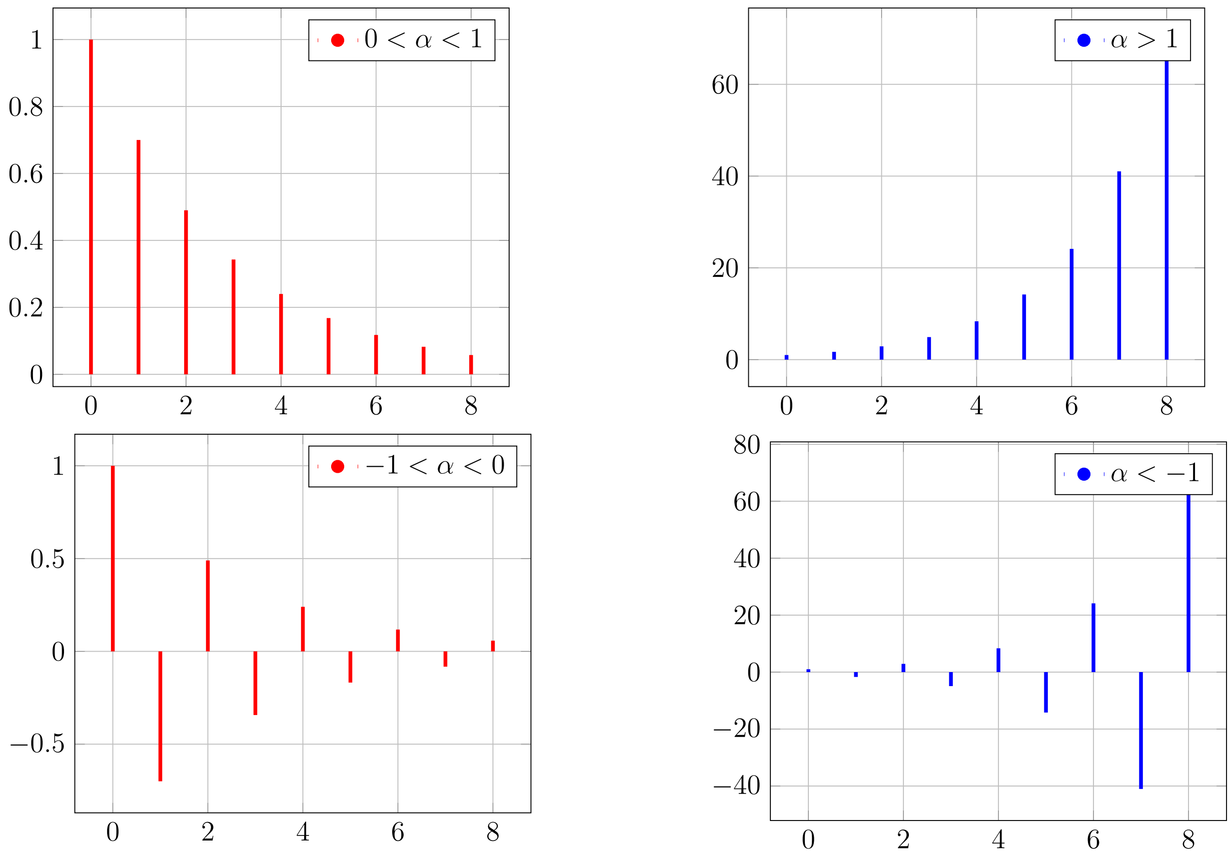


Figura 2: Possíveis comportamentos para as exponenciais reais.

- <u>exponenciais complexas com amplitude constante:</u> $c = 1$, $\beta = j\omega_0$.
  $x[n] = e^{j\omega_0 n}$
  Como $e^{j\omega_0 n} = \cos[\omega_0 n] + j\text{sen}[\omega_0 n]$, temos que $\cos[\omega_0 n] = \text{Re}\{e^{j\omega_0 n}\}$ e $\text{sen}[\omega_0 n] = \text{Im}\{e^{j\omega_0 n}\}$.

  Energia total: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |e^{j\omega_0 n}|^2 \to \infty$.
  Potência média total: $\lim_{N\to\infty} \dfrac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |e^{j\omega_0 n}|^2 = 1$.
  Vamos, então, analisar as propriedades de periodicidade de $e^{j\omega_0 n}$, destacando as suas semelhanças e diferenças em relação a $e^{j\omega_0 t}$.
  <u>Periodicidade:</u>

  a) $e^{j\omega_0 t}$ é distinta para cada valor de ω_0. Contudo, $e^{j\omega_0 n}$ é periódica em ω_0 com período fundamental 2π, pois

  $$e^{j(\omega_0 + 2\pi k)n} = e^{j\omega_0 n}\cancelto{1}{e^{j2\pi kn}} = e^{j\omega_0 n}.$$

  Assim, todas as possíveis exponenciais complexas do tipo $e^{j\omega_0 n}$ são descritas em um intervalo de tamanho 2π em ω_0, *i.e.*, $\theta \leq \omega_0 \leq \theta + 2\pi$. Ou seja, os valores de ω_0 em um intervalo de duração 2π são suficientes para caracterizar todas as exponenciais discretas.

  b) $e^{j\omega_0 t}$ é periódica em t para qualquer valor de ω_0, com período $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Todavia, $e^{j\omega_0 n}$ nem sempre é periódica em n, pois exige-se que $\exists\ N$ inteiro tal que $e^{j\omega_0 (n+N)} = e^{j\omega_0 n}$, $\forall\ n$. Para que isto seja verdade, $e^{j\omega_0 N} = 1 \to \omega_0 N = 2\pi k$, para algum inteiro k. Para que esta última igualdade se verifique é preciso

$$\omega_0 = \frac{k}{N}2\pi \rightarrow \omega_0 = (\text{racional}) \times \pi.$$

Sendo assim:

- se $\omega_0 = (\text{racional}) \times \pi$, então $e^{j\omega_0 n}$ é periódico, com período N_0. Mas qual o valor de N_0?

  $$e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 (n+N_0)} \rightarrow \cancel{e^{j\omega_0 n}} = \cancel{e^{j\omega_0 n}} e^{j\omega_0 N_0} \rightarrow e^{j\omega_0 N_0} = 1.$$

  Logo,

  $$\omega_0 N_0 = (\text{inteiro positivo}) \times 2\pi$$

  N_0 será o período fundamental quando tomarmos o menor inteiro positivo que preserve a igualdade acima.
  Assim,

  $$N_0 = \min_{\text{inteiros positivos}} \left\{ \text{inteiro positivo} \times \frac{2\pi}{\omega_0} \right\}$$

  Ou seja, para um valor fixo de ω_0, devemos encontrar o menor inteiro positivo que quando multiplicado por $\dfrac{2\pi}{\omega_0}$ resulte em um número natural, o qual representará o período fundamental.

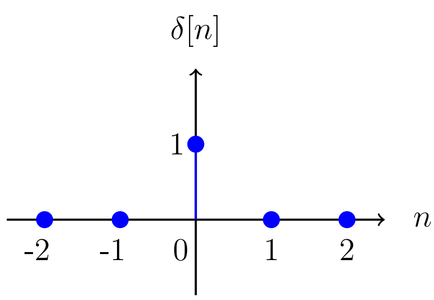
c) $e^{j\omega_0 t}$ oscila com frequência $\omega_0 = 2\pi f_0$. Quanto maior o valor de ω_0, maior o número de oscilações por segundo e menor o período $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.
Porém, para $e^{j\omega_0 n}$, $\omega_0 = \text{racional} \times \pi$, a frequência cresce com $0 \leq \omega_0 \leq \pi$, mas decresce com ω_0 para $\pi \leq \omega_0 \leq 2\pi$. Afinal, devido à periodicidade em ω_0, o comportamento ao redor de $\omega_0 = 2\pi$ é igual ao comportamento ao redor de $\omega_0 = 0$.
<u>Corolário:</u> seja $x_k[n] = e^{j\left(\frac{2\pi}{N}k\right)n}$, com $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$, k inteiro. Quantas exponenciais discretas periódicas com frequências múltiplas de $\frac{2\pi}{N}$ diferentes existem ?
Como frequências afastadas de 2π são equivalentes, o índice k deve percorrer um conjunto de apenas N valores diferentes. Isto quer dizer que existem somente N exponenciais complexas que são distinguíveis com frequências múltiplas de $\frac{2\pi}{N}$.

7 Degrau e Impulso

Vamos apresentar dois tipos de sinais teóricos que serão importantes para o desenvolvimento do curso.

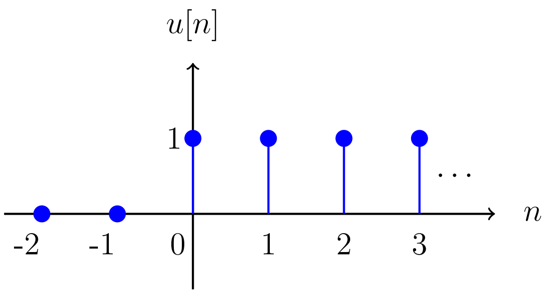
a) Sequência impulso unitário:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$



b) Sequência degrau unitário:

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$



Essa sequência pode ser usada como delimitadora:

$y[n] = x[n].u[n] \rightarrow y[n] = 0, \text{ para } n < 0.$

Relações entre $\delta[n]$ e $u[n]$:

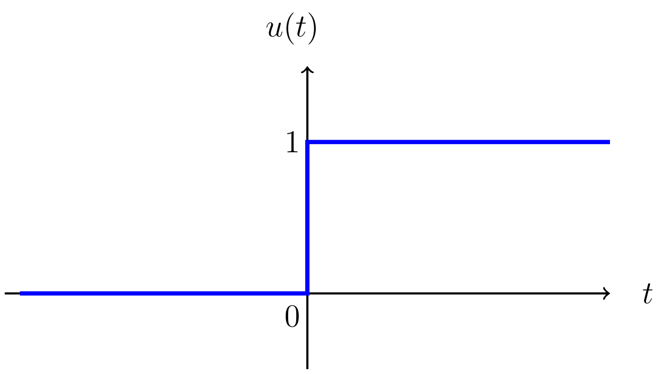
- $\delta[n] = u[n] - u[n-1]$;
- $u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m]$;
- $u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \cdots$

Propriedade:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] =$$
$$\cdots + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + \cdots + \underbrace{x[n]\delta[0]}_{\substack{\text{único} \\ \text{termo} \\ \text{não-nulo}}} + \cdots = x[n].$$

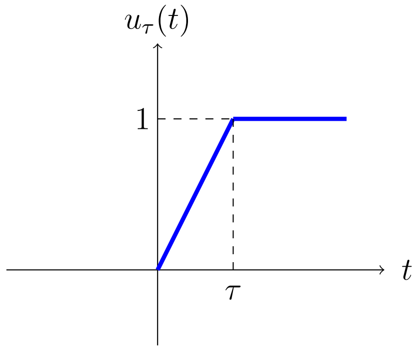
c) Função degrau

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

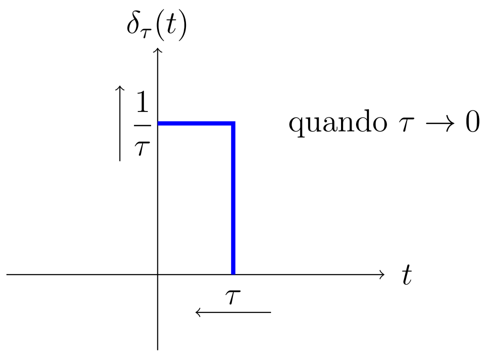


d) Impulso unitário (Delta de Dirac)

Considere $\tau > 0$ e $u_\tau(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t/\tau, & 0 \le t < \tau \\ 1, & t > \tau \end{cases}$



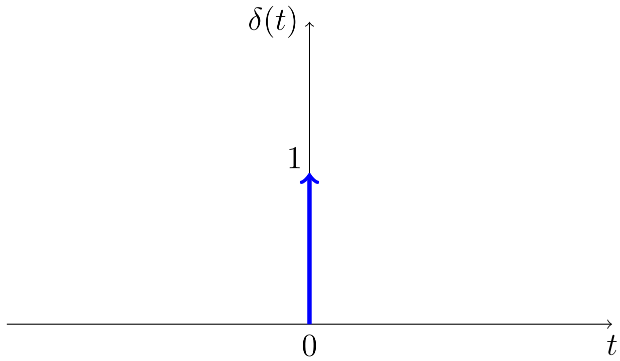
Seja $\delta_\tau(t) = \dfrac{du_\tau(t)}{dt}$.



Definimos a "função" impulso unitário como

$$\delta(t) \triangleq \lim_{\tau \to 0} \delta_\tau(t)$$

<u>Características:</u> amplitude ilimitada (diverge), largura zero e área unitária. O impulso será representado como mostrado abaixo



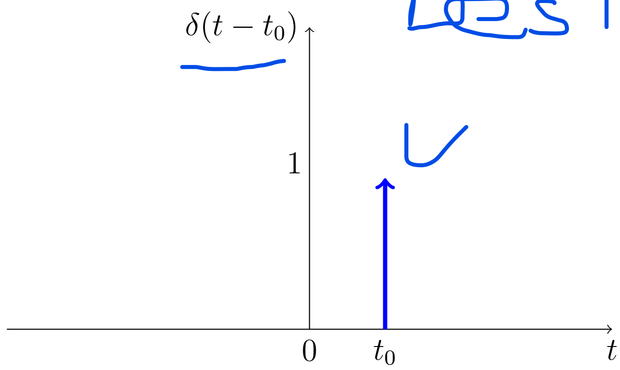
OBS: $x(t) = a\delta(t)$ - a constante a passa a definir a área do impulso; sua amplitude continua divergente e a largura é zero.

$x(t) = \delta(t - t_0)$

Deslocado

$t - t_0 = 0$

$t = +t_0$

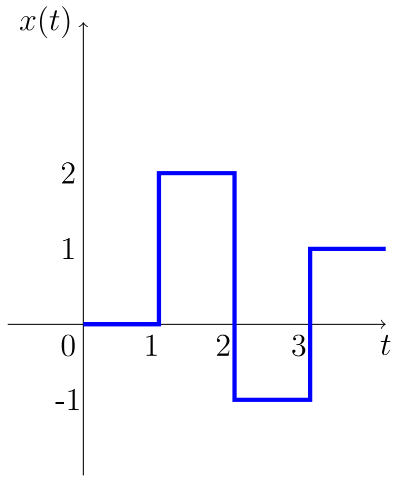


Vejamos mais algumas propriedades do impulso $\delta(t)$:

- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$ e $\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t)dt = 1, \forall\epsilon > 0$
- $\delta(t) = \dfrac{du(t)}{dt}$

  $\delta(t) = \lim_{\tau\to 0} \delta_\tau(t) = \lim_{\tau\to 0} \dfrac{du_\tau(t)}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left[\lim_{\tau\to 0} u_\tau(t)\right] = \dfrac{du(t)}{dt}$
- $\delta(t) = \delta(-t)$
- $u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau$
- $u(t) = \int_{0}^{\infty} \delta(t - \alpha)d\alpha$
- $x(t).\delta(t - t_0) = x(t_0).\delta(t - t_0)$
- $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_0)\delta(t - t_0)dt = x(t_0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)dt = x(t_0)$

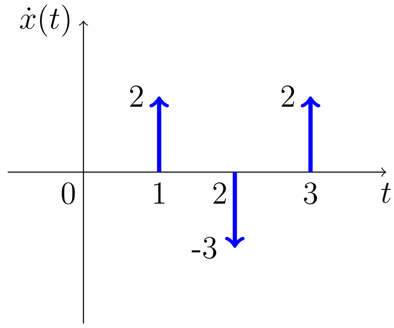
Exemplo: escrever $x(t)$ como uma combinação de degraus.



$x(t) = 2u(t - 1) - 3u(t - 2) + 2u(t - 3)$.

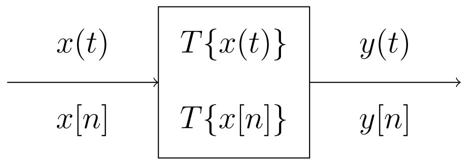
Aplicando a derivada:

$$\frac{dx(t)}{dt} = 2\delta(t-1) - 3\delta(t-2) + 2\delta(t-3)$$



8 Sistemas Contínuos e Discretos no Tempo

Definição: um sistema pode ser visto como um processo ou transformação que mapeia um sinal de entrada em uma resposta observável, que corresponde ao sinal de saída.



Exemplos:

- amplificador: $y(t) = ax(t)$;
- atrasador: $y(t) = x(t - t_0)$;
- discreto: $y[n] = x[n] + ay[n-1]$.

Caracterização de Sistemas:

a) Sem memória: a saída em um instante t depende da entrada somente no instante t; se amostras passadas influenciam a saída atual, o sistema possui memória.

   Exemplos: $y[n] = x^2[n]$ (sem memória), $y[n] = x[n-2]$ (com memória).

b) Causalidade: a saída em um instante t_0 depende da entrada somente nos instantes $t \leq t_0$.

   - o sistema nunca é antecipativo;
   - todo sistema que opera em tempo real (isto é, que produz a saída à medida que a entrada evolui no tempo) é causal.
   - sistemas que não operam em tempo real podem não ser causais (*e.g.*, sistemas que processam dados armazenados em disco ou memória).

c) Estabilidade BIBO (*Bounded Input, Bounded Output*): um sistema é estável se e somente se qualquer entrada com amplitude limitada produz uma saída com amplitude limitada.

Se $|y(t)| \leq B_y < \infty$ para todo t, em resposta à entrada $x(t)$ limitada, para a qual $|x(t)| \leq B_x < \infty$, então o sistema é estável (observe que essa condição deve valer para qualquer $x(t)$).

d) Invariância com o tempo: um sistema é invariante com o tempo se e somente se suas características (no tocante à transformação entrada-saída) não mudam com o tempo. Isto é, se $x(t) \Longleftrightarrow y(t)$, então necessariamente $x(t-t_0) \Longleftrightarrow y(t-t_0)$.

e) Linearidade: um sistema é linear se e somente se a sua resposta a uma combinação linear de entradas for a combinação linear das respectivas saídas (sobreposição dos efeitos).

$ax_1(t) + bx_2(t) \Longleftrightarrow ay_1(t) + by_2(t)$, onde $y_1(t) = \mathrm{T}\{x_1(t)\}$ e $y_2(t) = \mathrm{T}\{x_2(t)\}$.

8.1 Exemplos

a) $y[n] = x[-n]$

Vamos analisar quais propriedades são válidas para este sistema discreto.

- Linearidade

  Para checar se o sistema é linear, vamos considerar duas entradas, $x_1[n]$ e $x_2[n]$, e as saídas correspondentes, $y_1[n] = x_1[-n]$ e $y_2[n] = x_2[-n]$.Então, vamos analisar qual é a resposta do sistema para uma entrada $x'[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$:

$$y'[n] = x'[-n] = \alpha x_1[-n] + \beta x_2[-n] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n].$$

  Observe que a saída é equivalente à combinação linear das saídas individuais ($y_1[n]$ e $y_2[n]$). Logo, concluímos que **o sistema é linear**.

- Causalidade

  Devemos verificar se a saída $y[n]$ depende da entrada em instantes futuros $(n+1, n+2, \ldots)$. Note que quando $n > 0$, a saída $y[n]$ depende da entrada em instantes negativos (*e.g.*, $y[2] = x[-2]$). Por outro lado, para $n < 0$, a saída $y[n]$ depende da entrada em instantes positivos (*e.g.*, $y[-4] = x[-(-4) = x[4]$). Neste caso, o sistema precisa conhecer a entrada em um instante futuro para determinar a saída. Logo, **o sistema não é causal**.

- Estabilidade

  Considere uma entrada $x[n]$ limitada em amplitude, *i.e.*, $|x[n]| \leq B_x < \infty, \forall n$. A magnitude da saída é dada por $|y[n]| = |x[-n]|$. Como $|x[n]| \leq B_x$ para todo instante de tempo, $|y[n]|$ também é inferior ao limitante B_x. Ou seja, a saída também é limitada em amplitude. Portanto, **o sistema é estável**.

- Memória

  A saída $y[n]$ para instantes $n > 0$ depende da entrada em instantes negativos (*e.g.*, $y[5] = x[-5]$). Logo, **o sistema possui memória**.

- Invariância com o tempo

  Para avaliarmos se o sistema é invariante com o tempo, temos que obter: (1) a saída do sistema para uma entrada deslocada, aqui denotada por $z[n] = x[n-n_0]$; e (2) a saída deslocada no tempo (ou seja, $y[n-n_0]$).

  Considerando a entrada $z[n] = x[n-n_0]$, a saída do sistema corresponde a:

$$y_{n_0}[n] = z[-n] = x[-n-n_0].$$

  Por sua vez, sabendo que $y[n] = x[-n]$, podemos escrever que a saída do sistema deslocada no tempo é dada por:

$$y[n-n_0] = x[-(n-n_0)] = x[-n+n_0].$$

  Observe que $y[n-n_0] \neq y_{n_0}[n]$. Ou seja, a saída do sistema para uma entrada deslocada $x[n-n_0]$ não é igual à saída original deslocada pelo mesmo intervalo n_0. Portanto, concluímos que **o sistema não é invariante com o tempo**.

b) $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

Neste caso, vamos analisar apenas a validade de duas propriedades: linearidade e invariância com o tempo.

- Linearidade

  Seja $x'(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ a entrada do sistema. Então, a saída corresponde a:

$$y'(t) = \frac{dx'(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\right].$$

  Como a derivada é um operador linear,

$$y'(t) = \alpha\frac{dx_1(t)}{dt} + \beta\frac{dx_2(t)}{dt} = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t),$$

  onde $y_1(t) = \frac{dx_1(t)}{dt}$ e $y_2(t) = \frac{dx_2(t)}{dt}$ representam as saídas do sistema para as entradas $x_1(t)$ e $x_2(t)$, respectivamente. Vemos, portanto, que **o sistema é linear**.

- Invariância com o tempo

  Considerando a entrada $z(t) = x(t-t_0)$, a saída do sistema corresponde a:

$$y_{t_0}(t) = \frac{dz(t)}{dt} = \frac{dx(t-t_0)}{dt}.$$

  Por sua vez, a saída do sistema deslocada no tempo por t_0 é dada por:

$$y(t-t_0) = \frac{dx(t-t_0)}{dt}.$$

  Como $y(t-t_0) = y_{t_0}(t)$, concluímos que **o sistema é invariante com o tempo**.

c) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$

Novamente, vamos verificar somente as propriedades da linearidade e da invariância com o tempo.

- Linearidade

  Seja $x'(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ a entrada do sistema. Então, a saída corresponde a:

$$y'(t) = \int_{-\infty}^{t} x'(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} (\alpha x_1(\tau) + \beta x_2(\tau))\, d\tau.$$

  Como a integral é um operador linear,

$$y'(t) = \alpha \int_{-\infty}^{t} x_1(\tau)d\tau + \beta \int_{-\infty}^{t} x_2(\tau)d\tau = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t),$$

  onde $y_1(t) = \int_{-\infty}^{t} x_1(\tau)d\tau$ e $y_2(t) = \int_{-\infty}^{t} x_2(\tau)d\tau$ representam as saídas do sistema para as entradas $x_1(t)$ e $x_2(t)$, respectivamente. Vemos, portanto, que **o sistema é linear**.

- Invariância com o tempo

  Considerando a entrada $z(t) = x(t - t_0)$, a saída do sistema corresponde a:

$$y_{t_0}(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau - t_0)d\tau.$$

  Reescrevendo a integral em termos da variável $\nu = \tau - t_0$, temos que:

$$y_{t_0}(t) = \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\nu)d\nu.$$

  Por sua vez, a saída do sistema deslocada no tempo por t_0 é dada por:

$$y(t - t_0) = \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\tau)d\tau.$$

  Como $y(t - t_0) = y_{t_0}(t)$, concluímos que **o sistema é invariante com o tempo**.