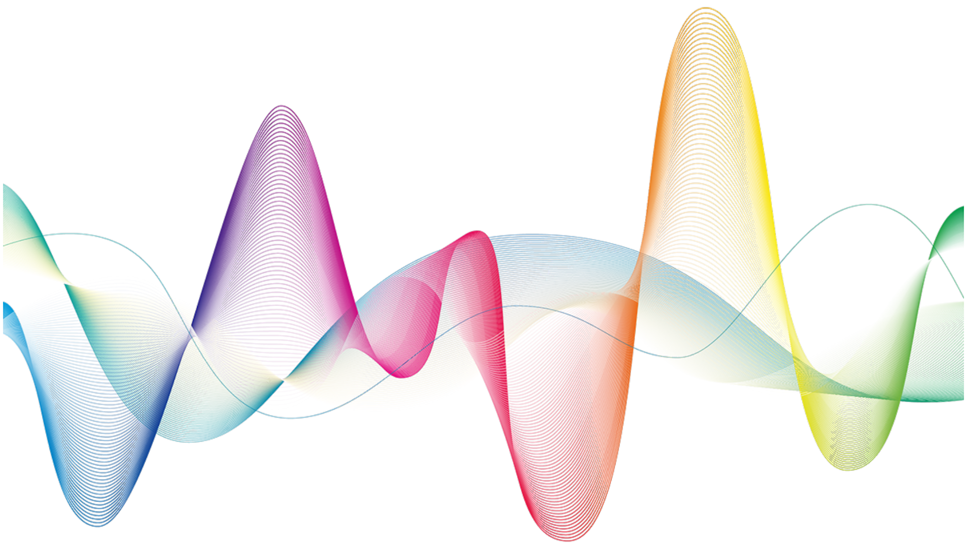
# EA614 - Análise de Sinais

## Tópico 2 - Sistemas Lineares e Invariantes com o Tempo

Levy Boccato
Renan Del Buono Brotto

2 de Agosto de 2024



# Conteúdo

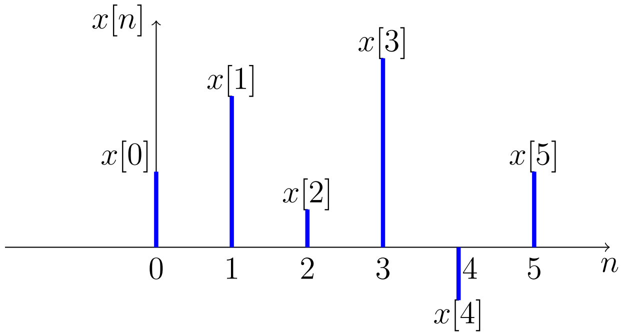
# 1 Sistemas Lineares e Invariantes com o Tempo

Uma classe particularmente importante de sistemas, tanto contínuos quanto discretos, é composta pelos sistemas que apresentam as propriedades de linearidade e invariância com o tempo.

**Vantagem:** é possível caracterizá-los de maneira simples e, ao mesmo tempo, completa.

Começaremos, então, estudando os sistemas lineares e invariantes com o tempo (LIT) a tempo discreto.

# 2 Sistemas LIT Discretos




Qualquer sequência $x[n]$ pode ser escrita em função do impulso unitário:

$$x[n] = \cdots + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + \cdots = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \tag{1}$$

Considere um sistema discreto que ao receber em sua entrada o sinal $\delta[n]$ (impulso unitário), produza a sequência $h[n]$ como saída:

$$\delta[n] \overset{T\{\cdot\}}{\Longleftrightarrow} h[n]$$

Se o sistema é **linear**, então:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \overset{T\{\cdot\}}{\Longleftrightarrow} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T\{\delta[n-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n] \tag{2}$$

Sendo também **invariante com o tempo**, sabemos que:

$$\delta[n-k] \overset{T\{\cdot\}}{\Longleftrightarrow} h[n-k] \tag{3}$$

Assim, $h_k[n] = T\{\delta[n-k]\} = h[n-k]$ e, com isto, a saída $y[n]$ pode ser escrita como:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n] \tag{4}$$

- $h[n]$ é a resposta ao impulso do sistema.

- O cálculo de $y[n]$ é conhecido como convolução; a operação de convolução é representada pelo símbolo '$*$'.

**Importante:** a saída de um sistema LIT, em resposta a uma entrada qualquer, pode ser calculada usando a entrada e a resposta ao impulso $h[n]$ do sistema. Portanto, o comportamento de um sistema LIT é única e perfeitamente descrito por sua resposta ao impulso $h[n]$.

## 2.1 Como calcular o resultado da soma de convolução?

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \tag{5}$$

<u>Procedimento:</u>

1. Representamos a sequência $x[n]$ de entrada no eixo $k$;
2. A sequência $h[n-k]$ é uma versão invertida e deslocada de $h[k]$;
3. Efetuamos o produto entre $x[k]$ e $h[n-k]$ (ponto a ponto);
4. Somamos todas as amostras do produto $x[k]h[n-k]$, obtendo o valor de $y[n]$.

Os passos acima são repetidos para todos os valores de $n \in \mathbb{Z}$.
<u>Exemplo:</u>

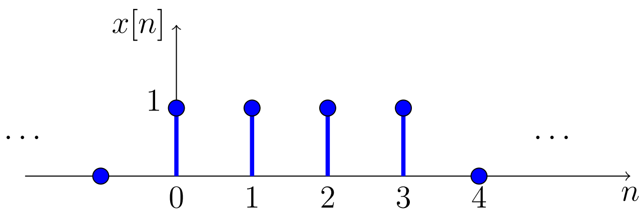



Figura 1: $x[n] = u[n] - u[n-4]$.

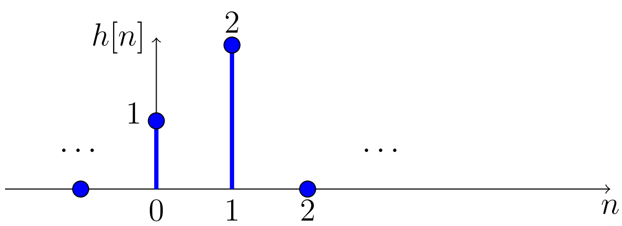
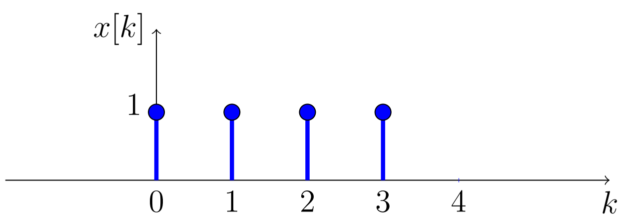
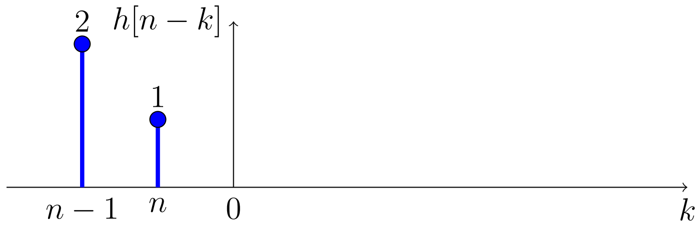



Figura 2: Resposta ao impulso $h[n]$.

Primeiro, desenhamos as sequências $x[k]$ e $h[n-k]$ no eixo $k$.



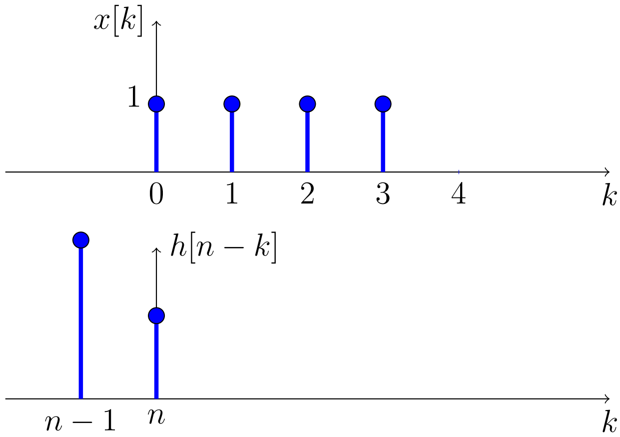



Dependendo do valor de $n$, o produto das sequências $x[k]$ e $h[n-k]$ poderá assumir valores diferentes. Por isso, faremos uma análise por regiões ou intervalos.

- Região 1: $n < 0$ – é a situação desenhada acima.

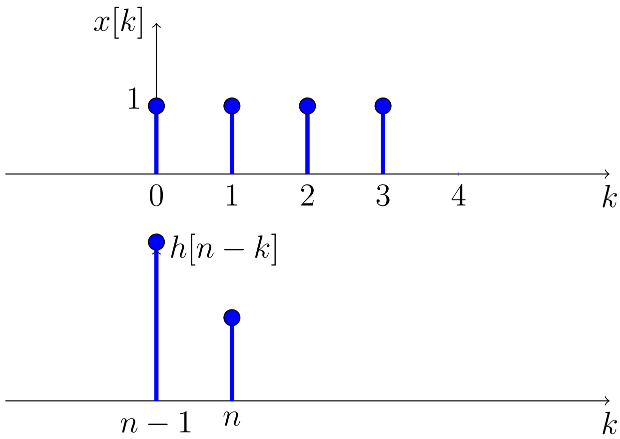
  $y[n] = 0$, pois não há interseção não-nula entre as sequências.

- Região 2: $n = 0$.



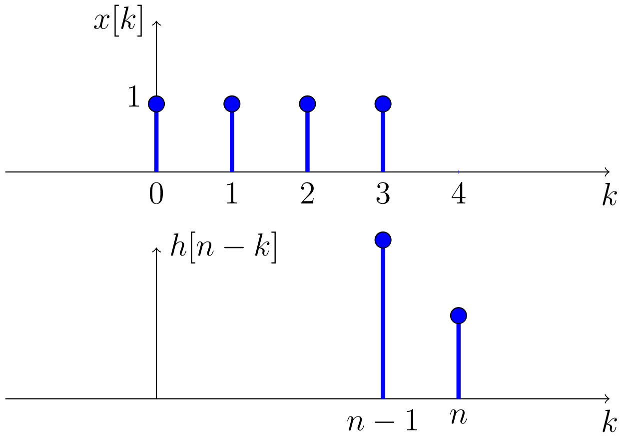

  Neste caso, $y[n] = 1$.

- Região 3: $0 < n \leq 3$.



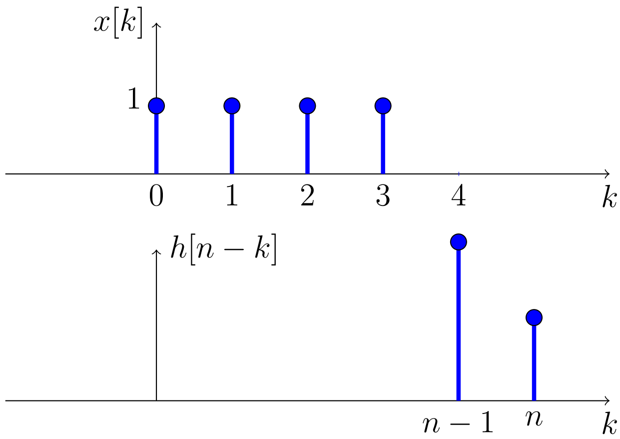

  Para todos estes valores de $n$, $y[n] = 3$.

- Região 4: $n = 4$.




Neste caso, $y[n] = 2$.

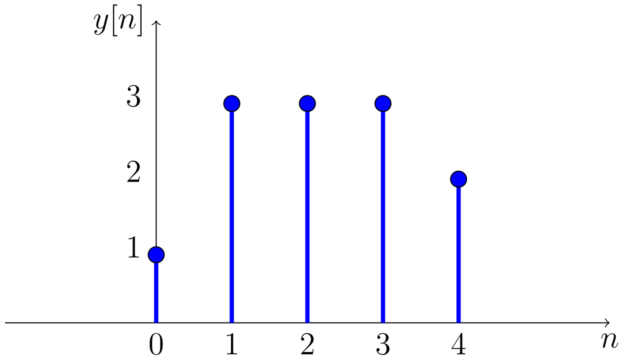
- Região 5: $n \geq 5$.



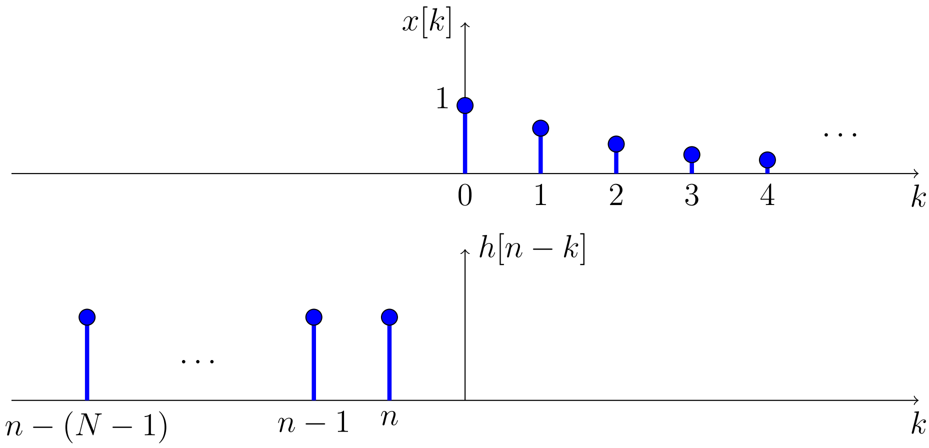

Como não há interseção não-nula entre as sequências, $y[n] = 0$.

Resumindo,

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n = 0 \\ 3, & 0 < n \leq 3 \\ 2, & n = 4 \\ 0, & n > 4 \end{cases} \tag{6}$$

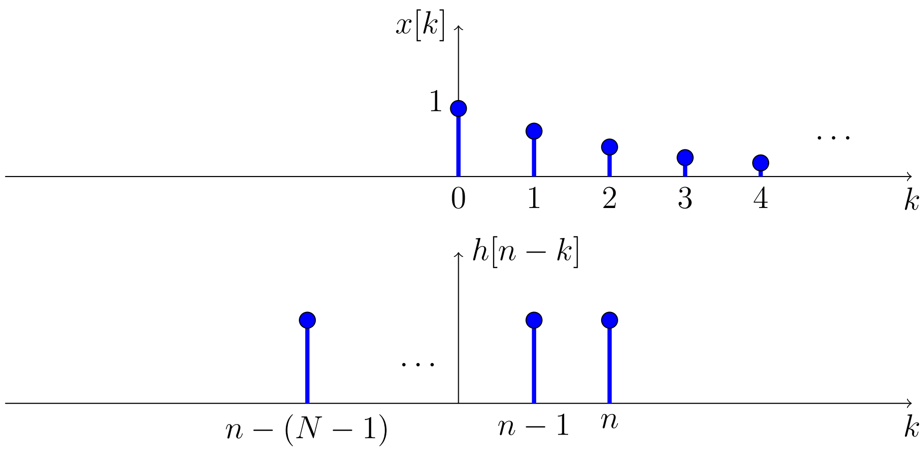



Exemplo 2: $x[n] = a^n u[n],\ 0 < a < 1,\ h[n] = u[n] - u[n-N]$.



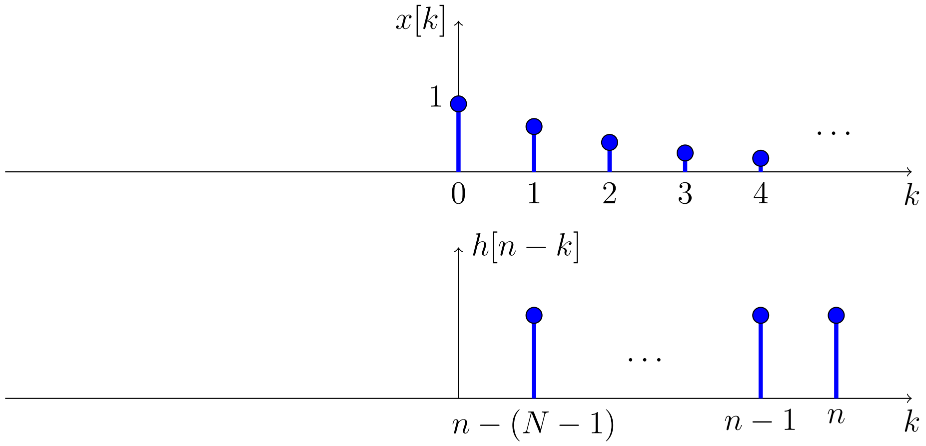

A saída $y[n]$ resulta da soma de todos os valores gerados pelo produto de $x[k]$ por $h[n-k]$.

- Se $n < 0$, não há interseção entre $x[k]$ e $h[n-k]$, então $x[k]h[n-k] = 0$ e $y[n] = 0$.
- Para $0 \leq n < N - 1$,




$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} x[k]\cancelto{1}{h[n-k]} = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^n a}{1 - a} = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

- Para $n \geq N-1$,



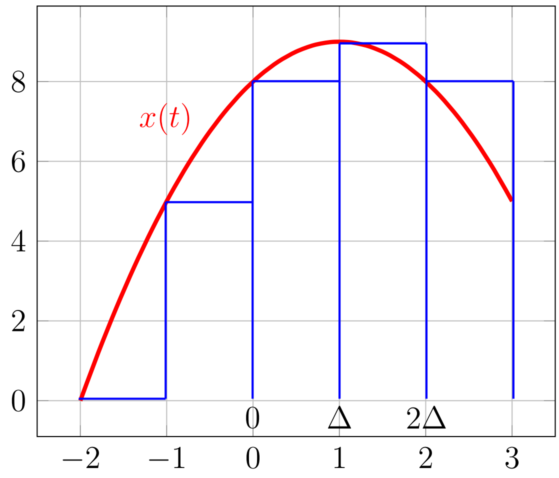

$$
\begin{aligned}
y[n] &= \sum_{k=n-(N-1)}^{n} x[k]\cancelto{1}{h[n-k]} \\
&= \sum_{k=n-(N-1)}^{n} a^k = \frac{a^n[a^{-(N-1)} - a]}{1-a} \\
&= \frac{a^n(a^{1-N} - a)}{1-a} = \frac{a^{n+1}(a^{-N} - 1)}{1-a}
\end{aligned}
$$

Resumindo,

$$
y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}, & 0 \leq n < N-1 \\ \dfrac{a^{n+1}(a^{-N}-1)}{1-a}, & n \geq N-1 \end{cases} \tag{7}
$$

# 3 Sistemas LIT Contínuos

No mesmo espírito da seção anterior, primeiramente vamos derivar uma representação de um sinal genérico $x(t)$ em função do impulso unitário, para, em seguida, expressar a resposta $y(t)$ de um sistema LIT.




Seja $\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & 0 \leq t \leq \Delta \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$

Então, pelo desenho acima, uma aproximação para $x(t)$, denotada por $x_\Delta(t)$, pode ser obtida a partir da composição dos retângulos:

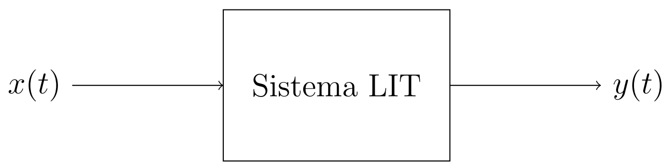
$$x_\Delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t - k\Delta)\Delta$$

Se tomarmos $\Delta$ cada vez menor, a aproximação $x_\Delta(t)$ se torna cada vez mais precisa, atingindo a igualdade com $x(t)$ no limite $\Delta \to 0$.

$$x(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t - k\Delta)\Delta$$

Porém, no limite, temos que $k\Delta \to \tau$, $\Delta \to d\tau$, $\delta_\Delta(t - k\Delta) \to \delta(t - \tau)$ e a somatória se torna uma integral, de modo que:

$$x(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau}_{\substack{\text{“Soma” de impulsos ponderados} \\ \text{pelas amostras do sinal}}}$$




Como a entrada $\delta_\Delta(t)$ produz a saída $h_\Delta(t)$, então, pela hipótese de invariância no tempo, $\delta_\Delta(t - k\Delta)$ produzirá a saída $h_\Delta(t - k\Delta)$.

Então, se $x_\Delta(t)$ for apresentado como entrada do sistema LIT, a saída $y_\Delta(t)$ pode ser escrita como:

$$y_\Delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)h_\Delta(t-k\Delta)\Delta$$

Mas $\lim_{\Delta\to 0} x_\Delta(t) = x(t)$, o que implica que $\lim_{\Delta\to 0} y_\Delta(t) = y(t)$ (por hipótese $x(t) \overset{T\{\cdot\}}{\Longleftrightarrow} y(t)$). Portanto,

$$y(t) = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)h_\Delta(t-k\Delta)\Delta.$$

No limite, temos:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

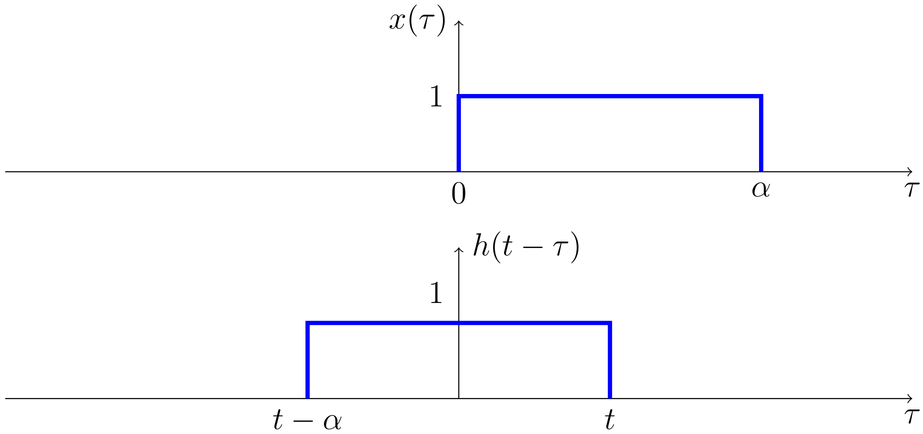
- $h(t)$ é a resposta do sistema LIT para a entrada impulso unitário $\delta(t)$.
- O cálculo de $y(t)$ é conhecido como integral de convolução, sendo representado como $y(t) = x(t) * h(t)$.

Novamente, percebemos que um sistema LIT é completamente caracterizado por sua resposta ao impulso.

## 3.1 Como calcular o resultado da integral de convolução?

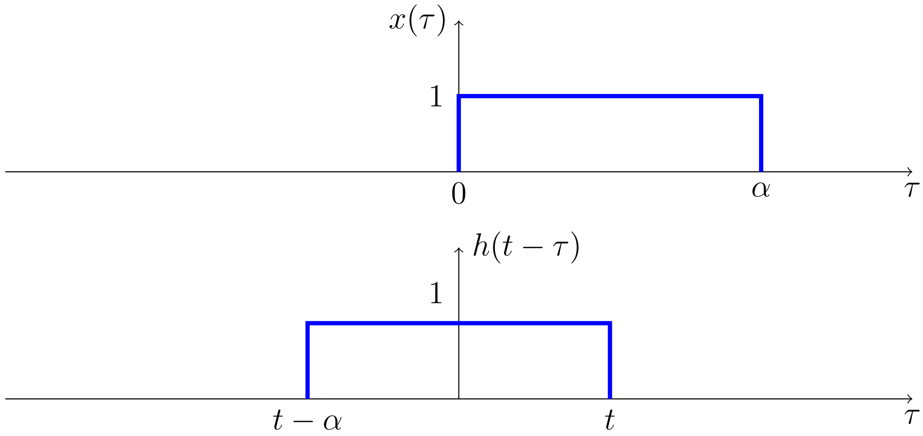
O procedimento é semelhante ao utilizado no caso discreto. Por isso, vamos ilustrá-lo diretamente por meio de um exemplo.

Exemplo: $x(t) = u(t) - u(t-\alpha)$, $h(t) = u(t) - u(t-\alpha)$



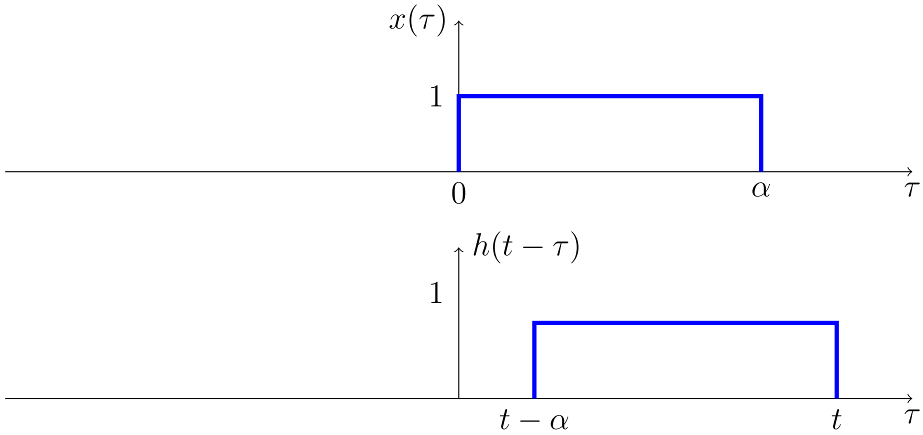

Região 1: $t < 0$; a interseção é nula e $y(t) = 0$.

Região 2: $0 \le t \le \alpha$.




$$y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^t 1 d\tau = t$$

Região 3: $\alpha < t \leq 2\alpha$.

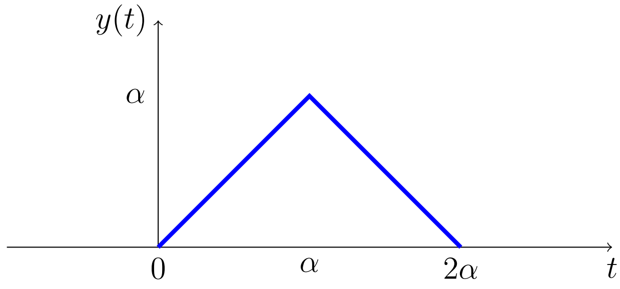



$$y(t) = \int_{t-\alpha}^{\alpha} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{t-\alpha}^{\alpha} 1 d\tau = \alpha - (t-\alpha) = 2\alpha - t$$

Região 4: $t > 2\alpha$. Não haverá interseção entre $x(\tau)$ e $h(t-\tau)$, de modo que $y(t) = 0$.

Resumindo:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & 0 \leq t \leq \alpha \\ 2\alpha - t, & \alpha < t \leq 2\alpha \\ 0, & t > 2\alpha \end{cases}$$




## 4 Propriedades da Convolução

- Comutativa: $x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$
  $x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$

  Verificação:

$$y[n] = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]}_{x[n]*h[n]} \xrightarrow{r=n-k} \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-r]h[r] = \underbrace{\sum_{r=-\infty}^{\infty} h[r]x[n-r]}_{h[n]*x[n]}$$

- Distributiva: $x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$
  $x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$

- Associativa:

$$x(t) * \big(h_1(t) * h_2(t)\big) = \big(x(t) * h_1(t)\big) * h_2(t) = \big(x(t) * h_2(t)\big) * h_1(t)$$

  Também vale para o caso discreto.

- Se $x(t) * h(t) = y(t)$, então
  $x(t) * h(t - t_0) = y(t - t_0)$
  $x(t - t_0) * h(t) = y(t - t_0)$
  $x(t - t_1) * h(t - t_2) = y(t - t_1 - t_2)$

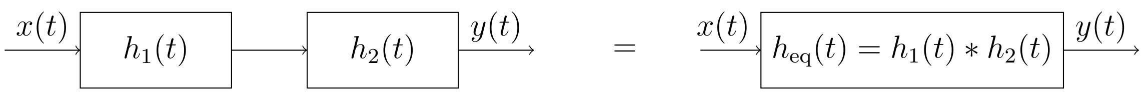
- $x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$, $x[n] * \delta[n - n_0] = x[n - n_0]$

- $x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ (sistema integrador)

  $x[n] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ (sistema acumulador)

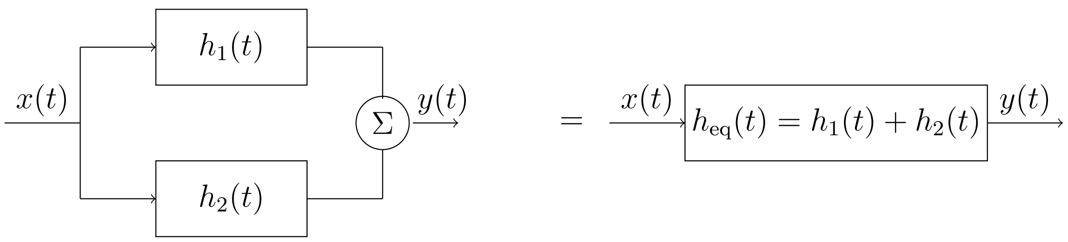
# 5 Propriedades dos Sistemas LIT

a) Conexão em série (cascata)




$$y(t) = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t) = x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = x(t) * h_{\text{eq}}(t)$$

b) Conexão em paralelo




$$y(t) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) = x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h_{\text{eq}}(t)$$

Estas duas propriedades valem para sistemas a tempo discreto.

c) Causalidade

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \cdots + h[-1]x[n+1] + h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + \cdots$$

Para o sistema ser causal, $y[n]$ só pode depender de $x[n]$ nos instantes $n' \leq n$, ou seja, em $n, n-1, n-2, \cdots$. Para isto ocorrer, $h[-1], h[-2], h[-3], \cdots$, têm de ser zero. Em outras palavras, $h[n] = 0$ para $n < 0$ garante causalidade. Analogamente, para sistemas contínuos $h(t) = 0$ para $t < 0$ garante a causalidade.

d) Estabilidade (BIBO)

$$\big|y[n]\big| = \left|\sum_k h[k]x[n-k]\right| \leq \sum_k \big|h[k]\big|.\big|x[n-k]\big|$$

Se a entrada é limitada, $\big|x[n]\big| \leq B_x$, $\forall\, n$. Logo, $\big|x[n-k]\big| \leq B_x$.

Sendo assim é correto afirmar que $\big|y[n]\big| \leq \sum_k \big|h[k]\big|.\big|x[n-k]\big| \leq \sum_k \big|h[k]\big| B_x$

O produto $B_x \sum_k \big|h[k]\big|$ será limitado (*i.e.*, menor que infinito) se $\sum_k \big|h[k]\big| < \infty$

O sistema LIT será estável (no sentido BIBO) se houver um limitante $B_h$ tal que $\sum_k \big|h[k]\big| \leq B_h < \infty$.

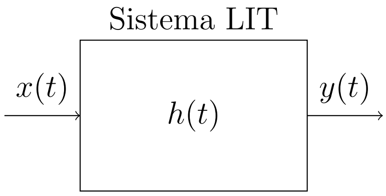
Analogamente, para sistemas contínuos,

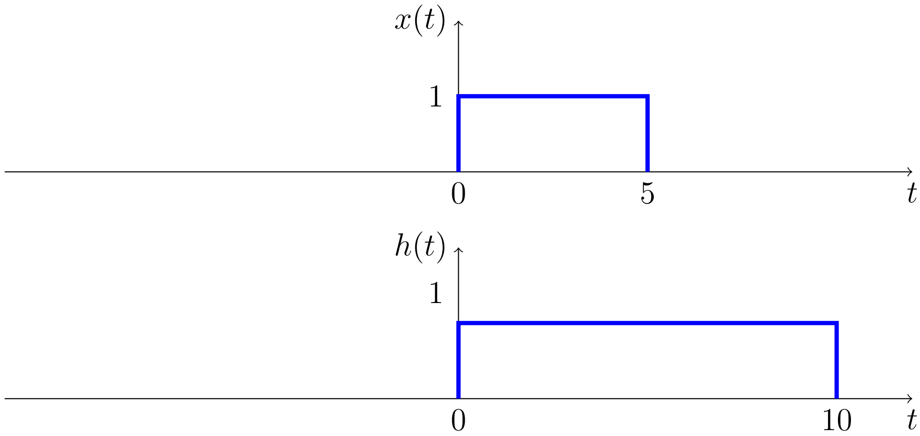
$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$

é a condição para a estabilidade.

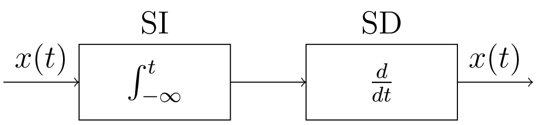
## 5.1 Exemplo

Vamos ilustrar como as propriedades da convolução podem ser usadas para facilitar o cálculo da resposta de um sistema a uma determinada entrada. No caso, vamos considerar o cenário apresentado na figura abaixo.

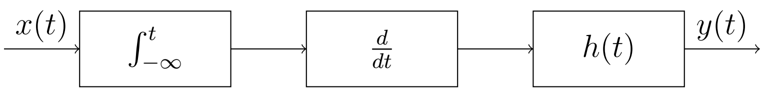



Conforme demonstrado no Tópico 1, tanto o sistema integrador (SI) quanto o sistema diferenciador (SD) são LIT. Além disso, sabemos que suas operações entrada-saída estão inversamente relacionadas, de maneira que passar um sinal por uma cascata formada por um SI seguido de um SD não modifica esse sinal. Ou seja, um sistema desfaz o que o outro fez, e a cascata não tem efeito algum sobre um sinal[1]:

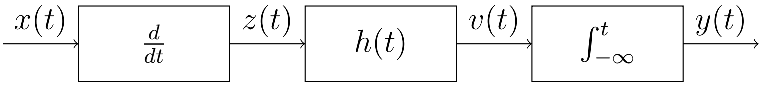



Tendo isto em mente, em vez de diretamente calcularmos $y(t) = x(t) * h(t)$, vamos explorar a cascata SI-SD (que, como vimos, não tem efeito algum sobre um sinal), inserindo-a em série com o sistema LIT original.



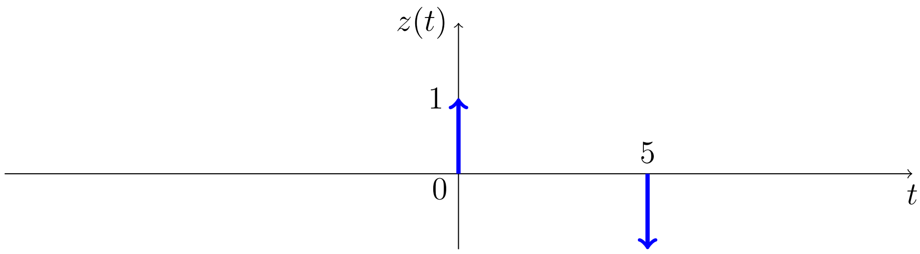

Embora esta ideia pareça ter complicado nossa tarefa, podemos utilizar o fato de que a ordem dos sistemas em uma cascata é irrelevante e, então, rearranjá-los da seguinte forma:

[1] Essa característica é verdadeira para a grande maioria dos sinais de interesse. Contudo, como os dois sistemas (integrador e diferenciador) são instáveis, existem alguns sinais especiais que podem levar a saída a divergir; nesses casos particulares, não é possível explorar a cascata.



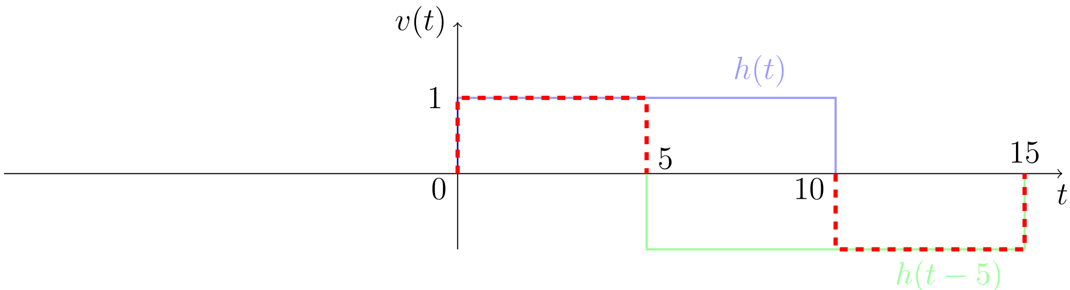

O caminho que vamos percorrer para obter a saída $y(t)$ consiste em: (1) calcular $z(t) = \frac{dx(t)}{dt}$; (2) determinar a convolução entre $z(t)$ e $h(t)$, *i.e.*, $v(t) = z(t) * h(t)$; e (3) calcular $y(t) = \int_{-\infty}^{t} v(\tau)d\tau$.

Ora, o sinal de entrada pode ser escrito como $x(t) = u(t) - u(t-5)$. Então, sua derivada corresponde a $z(t) = \delta(t) - \delta(t-5)$, conforme ilustra a figura abaixo.

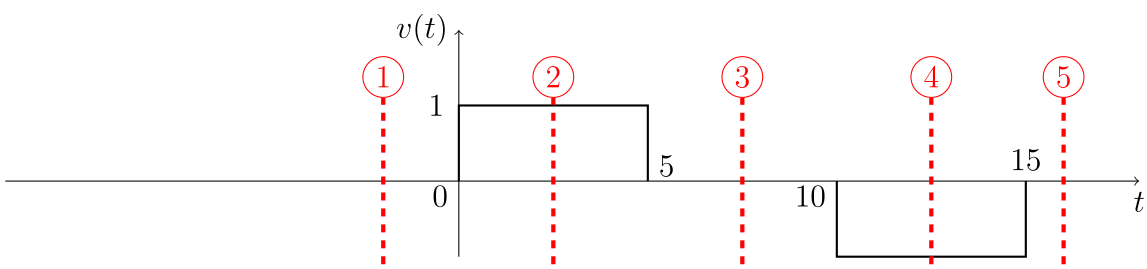



Em seguida, podemos determinar $v(t)$ fazendo a convolução de $z(t)$ com $h(t)$. Aqui, podemos perceber uma grande simplificação: como $z(t)$ é um sinal formado por impulsos, a convolução com $h(t)$ pode ser facilmente obtida, uma vez que $\delta(t-t_0) * h(t) = h(t-t_0)$. Por isso:

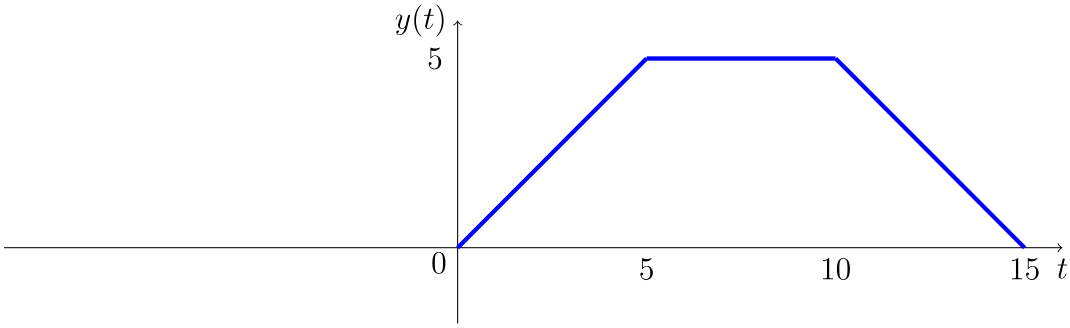
$$v(t) = z(t) * h(t) = [\delta(t) - \delta(t-5)] * h(t) = h(t) - h(t-5).$$




Finalmente, a saída do sistema LIT original é dada pela resposta do sistema integrador ao sinal $v(t)$. Note que, para cada instante $t$, a resposta $y(t)$ equivale à área total de $v(t)$ considerando seu conteúdo desde $-\infty$ até o instante $t$. Há, portanto, cinco situações pertinentes para analisar, as quais estão indicadas na figura abaixo.




Se $t \leq 0$ (ponto 1), a integral é nula; para $0 < t \leq 5$ (ponto 2), a integral aumenta de valor linearmente com $t$; para $5 < t \leq 10$ (ponto 3), a integral mantém um valor constante e igual a 5, correspondente à área do primeiro retângulo; para $10 < t \leq 15$ (ponto 4), a área passa a diminuir cada vez mais conforme $t$ aumenta, até chegar em 0 quando $t > 15$ (ponto 5). Sendo assim, o sinal de saída $y(t)$ corresponde a:




# 6 Aplicação: Elefante em uma Garrafa

A teoria de sistemas LIT e a generalidade da operação de convolução podem ser úteis para o tratamento de muitos problemas práticos, como, por exemplo, o desafio de colocar um elefante dentro de uma garrafa. Este curioso dilema é explorado pelo Prof. Jugurta Montalvão (UFS) em um vídeo bastante didático (Desmistificando a Convolução).

Do ponto de vista acústico, esse desafio equivale a tentar produzir o som de um elefante como se ele estivesse dentro de uma garrafa.

O caminho para conseguir esta "proeza" consiste em enxergar a garrafa como um sistema LIT que, sendo alimentado com um sinal de entrada, produz uma saída (sinal sonoro) a partir da operação de convolução. Dessa maneira, se conhecemos a resposta ao impulso da garrafa, podemos saber, usando a operação de convolução, o som que um elefante faria dentro de tal garrafa, mesmo que esse experimento seja impossível no mundo real.

Figura 3: Com a operação de convolução, podemos colocar um elefante dentro de uma garrafa. Imagem extraída do vídeo do Prof. Jugurta Montalvão.

A convolução, apesar de parecer complicada à primeira vista, permite que se soubermos como um sistema responde ao equivalente ao "átomo" de um sinal (impulso unitário), saberemos como este sistema responde a qualquer combinação dessas unidades, ou seja, como esse sistema lidará com qualquer sinal de entrada.

# 7 Resposta de Sistemas LIT a Exponenciais Complexas

## 7.1 Tempo Discreto

Seja $x[n] = z^n, \ z \in \mathbb{C}$ a entrada de um sistema LIT. Então, a saída do sistema pode ser escrita como:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{n-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k}$$

Caso a somatória envolvida no termo à direita convirja, podemos representá-la por

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k},$$

de modo que

$$y[n] = z^n H(z) = H(z) x[n].$$

Ou seja, a saída é igual à entrada do sistema multiplicada por uma constante (ganho) dado por $H(z)$.
**Caso particular:** $z = e^{j\omega_0} \longrightarrow y[n] = H(e^{j\omega_0}) e^{j\omega_0 n}$

- $e^{j\omega_0 n}$ e $z^n$ são autofunções de um sistema LIT.
- $H(e^{j\omega_0})$ (resposta em frequência do sistema avaliada na frequência $\omega = \omega_0$) e $H(z)$ (função de transferência do sistema avaliada no ponto $z$) são os autovalores correspondentes.
(Analogia com $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$, onde $\lambda$ é o autovalor associado ao autovetor $\mathbf{x}$).

## 7.2 Tempo Contínuo

Seja $x(t) = e^{st}, \ s \in \mathbb{C}$ a entrada de um sistema LIT. Então, a saída do sistema pode ser escrita como:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau = e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

Caso a integral envolvida no termo à direita convirja, podemos representá-la por

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau,$$

de modo que

$$y(t) = e^{st} H(s) = H(s) x(t).$$

A saída é igual à entrada do sistema multiplicada por uma constante (ganho) dado por $H(s)$.
**Caso particular:** $s = j\omega_0 \longrightarrow y(t) = H(j\omega_0).e^{j\omega_0 t}$.

- $e^{j\omega t}$ e $e^{st}$ são autofunções do sistema LIT.
- $H(j\omega_0)$ (resposta em frequência do sistema avaliada em $\omega = \omega_0$) e $H(s)$ são os autovalores correspondentes.

### 7.3 Resposta em Frequência

$H(j\omega)$ (ou $H(e^{j\omega})$, no caso discreto) é uma função da frequência angular $\omega = 2\pi f$, $\omega \in \mathbb{R}$, e representa a **resposta em frequência** do sistema LIT, a qual indica como o sistema reage para cada frequência de excitação fornecida em sua entrada.

**Observações:**

- Nem todo sistema LIT admite uma caracterização no domínio da frequência; conforme veremos ao longo da exposição sobre transformada de Fourier, a integral (ou somatório) presente na definição de $H(j\omega)$ (ou $H(e^{j\omega})$) converge para um resultado bem definido sempre que o sistema LIT for estável.
- Assim como $h(t)$ ($h[n]$) é a informação essencial para a caracterização de um sistema LIT no domínio do tempo, $H(j\omega)$ ($H(e^{j\omega})$) é a informação correspondente no domínio da frequência, explicitando o ganho e a fase aplicados pelo sistema para cada frequência de excitação $\omega$.

Por que este resultado é importante?

Caso seja possível enxergar um determinado sinal $x(t)$ como uma combinação linear de exponenciais complexas, *i.e.*,

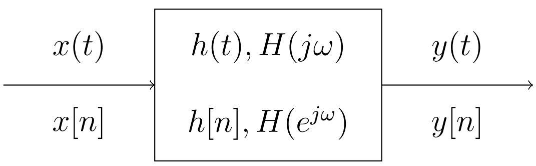
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_k t},$$

então a saída de um sistema LIT será

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(j\omega_k) c_k e^{j\omega_k t}.$$

A partir do próximo tópico, passaremos a ver maneiras de representar sinais (periódicos e não-periódicos) em termos de exponenciais complexas. Tais representações nos remetem à série e à transformada de Fourier, sendo ferramentas muito valiosas para a caracterização e análise de sinais e sistemas.

# 8 Resumo




A resposta ao impulso caracteriza completamente o sistema; quando existir, a resposta em frequência também será útil para descrevê-lo.

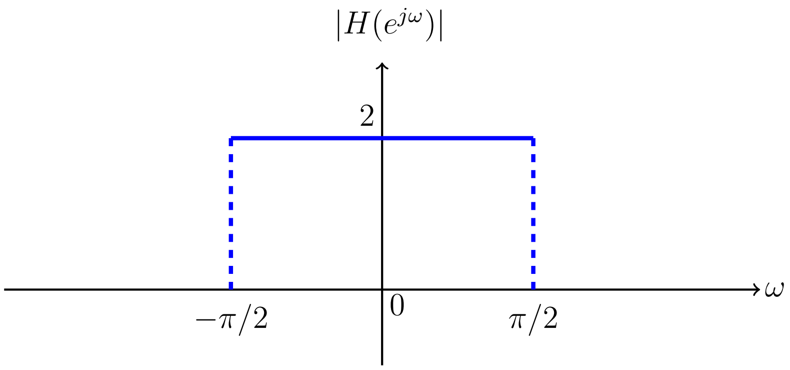
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

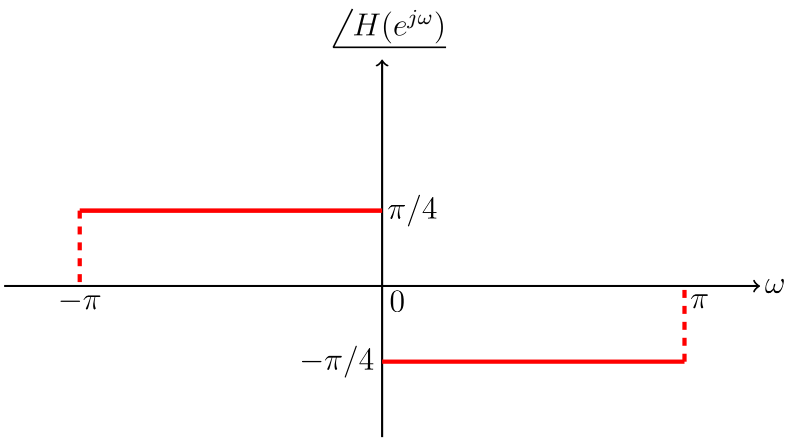
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

Se $x(t) = e^{j\omega_0 t}$, então $y(t) = H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}$.

Se $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, então $y[n] = H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n}$.

Exemplo:




Supondo que a entrada seja $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{10}n\right)$, qual a saída do sistema?

a) $\cos\left(\frac{\pi}{10}n - \frac{\pi}{4}\right)$

b) $2\cos\left(\frac{\pi}{4}n + \frac{\pi}{4}\right)$

c) $2\cos\left(\frac{\pi}{10}n\right)$

d) $2\cos\left(\frac{\pi}{10}n - \frac{\pi}{4}\right)$

**Solução:**

$$y[n] = \underbrace{\sum_k \left[\frac{1}{2}e^{j\omega_0(n-k)} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0(n-k)}\right]}_{x[n-k]=cos(\omega_0(n-k))} .h[k] = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 n}\sum_k h[k]e^{-j\omega_0 k} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 n}\sum_k h[k]e^{j\omega_0 k}$$

$$y[n] = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 n}H(e^{j\omega_0}) + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 n}H(e^{j(-\omega_0)})$$

Ora, a partir dos gráficos de $|H(e^{j\omega})|$ e $\angle H(e^{j\omega})$, temos que:

$H(e^{j\pi/10}) = 2e^{j(-\pi/4)}$ e $H(e^{j(-\pi/10)}) = 2e^{j(\pi/4)}$.
Então,

$$y[n] = 2\frac{1}{2}e^{j(\pi/10)n}e^{-j\pi/4} + 2\frac{1}{2}e^{j(-\pi/10)n}e^{j\pi/4} = 2\left[\frac{1}{2}e^{j(\pi n/10-\pi/4)} + \frac{1}{2}e^{-j(\pi n/10-\pi/4)}\right] = 2\cos\left(\frac{\pi}{10}n - \frac{\pi}{4}\right).$$