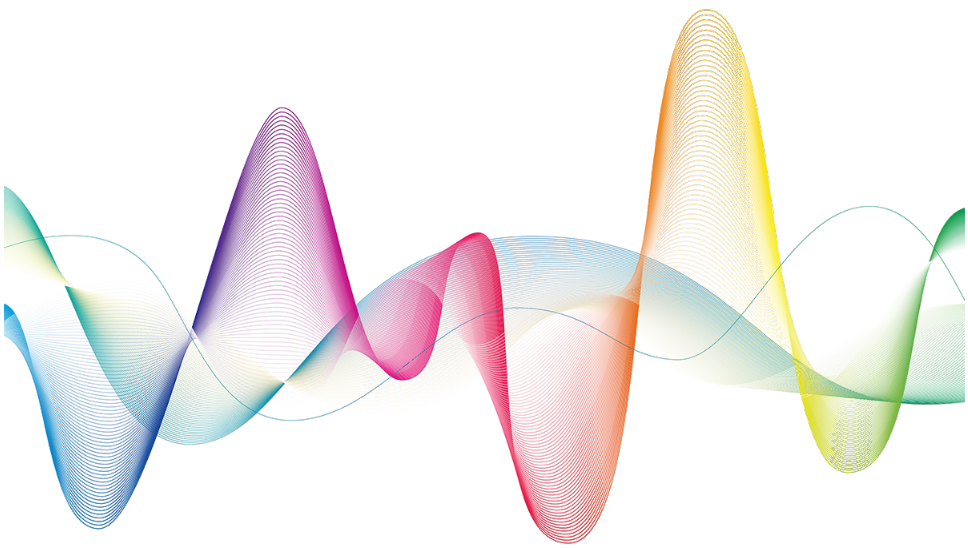
EA614 - Análise de Sinais

Condições para a Estabilidade BIBO de Sistemas LIT

Levy Boccato
Renan Del Buono Brotto

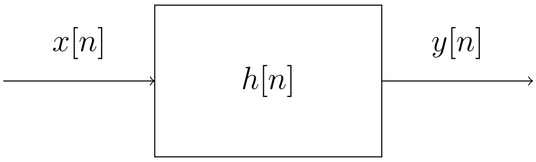
2 de Agosto de 2024



Conteúdo

1 Estabilidade BIBO de Sistemas LIT

Considere um sistema LIT a tempo discreto.



Sabemos que a saída $y[n]$ é dada pela convolução da entrada com a resposta ao impulso:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \tag{1}$$

Um sistema LIT é dito estável (no sentido BIBO – *bounded-input, bounded-output*) quando a saída $y[n]$ nunca diverge (ou seja, sempre possui amplitude limitada) para qualquer entrada $x[n]$ limitada.

1.1 Condição Suficiente

Por hipótese, $|x[n]| \leq B_x < \infty$. Então, vamos analisar o módulo da saída do sistema:

$$|y[n]| = \left| \sum_k h[k]x[n-k] \right| \leq \sum_k |h[k]||x[n-k]| \tag{2}$$

No máximo, todas as amostras da sequência $x[n]$ valem B_x. Então,

$$\begin{aligned} |y[n]| &\leq \sum_k |h[k]|B_x \\ &\leq B_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \end{aligned} \tag{3}$$

Para que $|y[n]| \leq B_y < \infty$, basta que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$, *i.e.*, que a resposta ao impulso do sistema seja absolutamente somável.

1.2 Condição Necessária

Interessantemente, a condição de $h[n]$ ser absolutamente somável também é necessária para haver estabilidade.

Suponha que tenhamos um sistema LIT tal que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \to \infty$$

Para ele ser considerado instável, basta identificarmos uma sequência $x[n]$ limitada em amplitude que faça com que a saída $y[n]$ não seja limitada.

Considere, então, a sequência

$$x[n] = \begin{cases} 0, & \text{se } h[-n] = 0 \\ 1, & \text{se } h[-n] > 0 \\ -1, & \text{se } h[-n] < 0 \end{cases} \tag{4}$$

ou, de forma simplificada, $x[n] = \text{sign}\,(h[-n])$.

Esta entrada, embora um pouco atípica, é limitada: $|x[n]| \leq 1, \forall n$. A Figura 1 ilustra como a sequência de entrada $x[n]$ para uma resposta ao impulso simples.

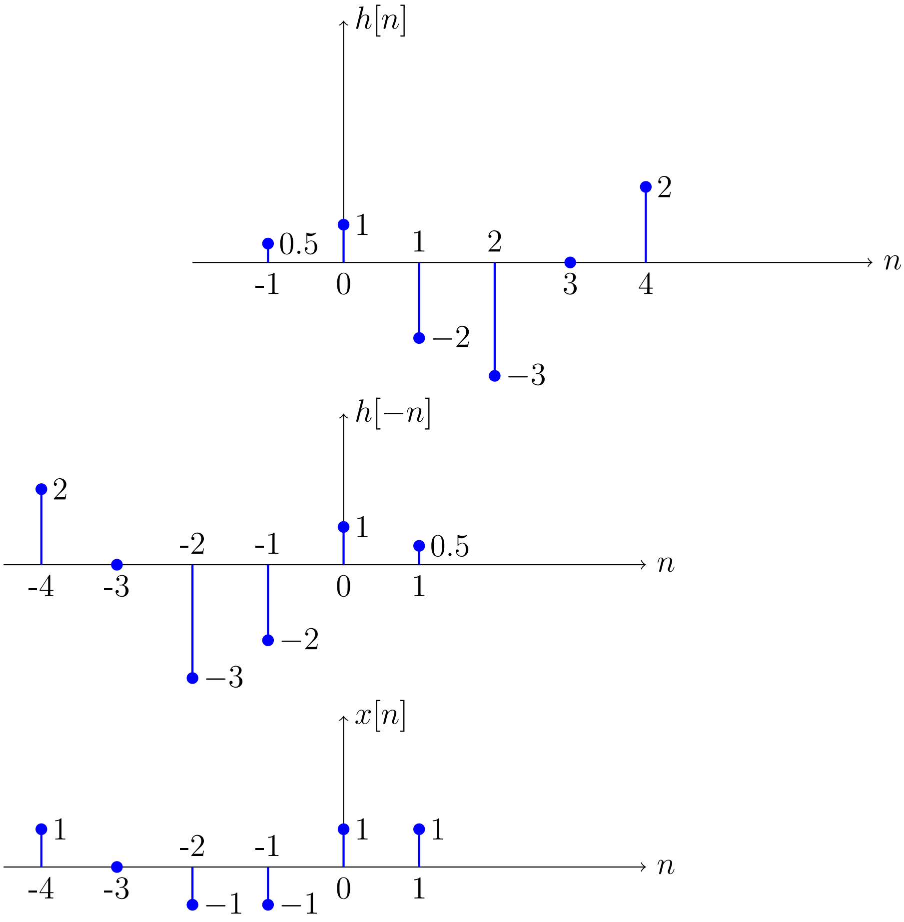


Figura 1: Sequência $x[n]$.

A saída do sistema LIT para esta entrada será dada por:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n-k]x[k] \tag{5}$$

Vamos avaliar a saída no instante de tempo $n = 0$:

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[-k]x[k] = \ldots + h[1]x[-1] + h[0]x[0] + h[-1]x[1] + \ldots \tag{6}$$

Se o termo $h[-k] > 0$, então

$$h[-k]x[k] = \underbrace{h[-k]}_{>0}.1 > 0.$$

Se o termo $h[-k] < 0$, então

$$h[-k]x[k] = \underbrace{h[-k]}_{<0}.(-1) > 0.$$

Ou seja, todos os termos envolvidos na soma em (6) são positivos. Assim,

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \tag{7}$$

Como, por hipótese, $\sum_k |h[k]| \to \infty$, a saída no instante $n = 0$ também será divergente. Logo, $y[0] \to \infty$ e a saída $y[n]$ não pode ser considerada limitada.

Conclusão: como uma entrada limitada deu origem a uma saída ilimitada, o sistema com certeza é instável. Assim, percebemos que quando $\sum_k |h[k]| \to \infty$, o sistema LIT inevitavelmente é instável.

1.3 Corolário

O fato de a resposta ao impulso $h[n]$ ser ou não absolutamente somável determina a existência da transformada de Fourier: $\exists \mathcal{F}\{h[n]\}$ se $h[n]$ é absolutamente somável. Há, porém, algumas exceções quando admitimos a presença de impulsos na frequência. Por exemplo, o degrau unitário $u[n]$ não é absolutamente somável, mas é possível representá-lo em frequência com Fourier.

Para ser estável, é necessário e suficiente que $h[n]$ seja absolutamente somável e, portanto, que $\exists \mathcal{F}\{h[n]\}$, o que equivale dizer que a circunferência de raio unitário pertence à região de convergência da transformada Z de $H(z)$.