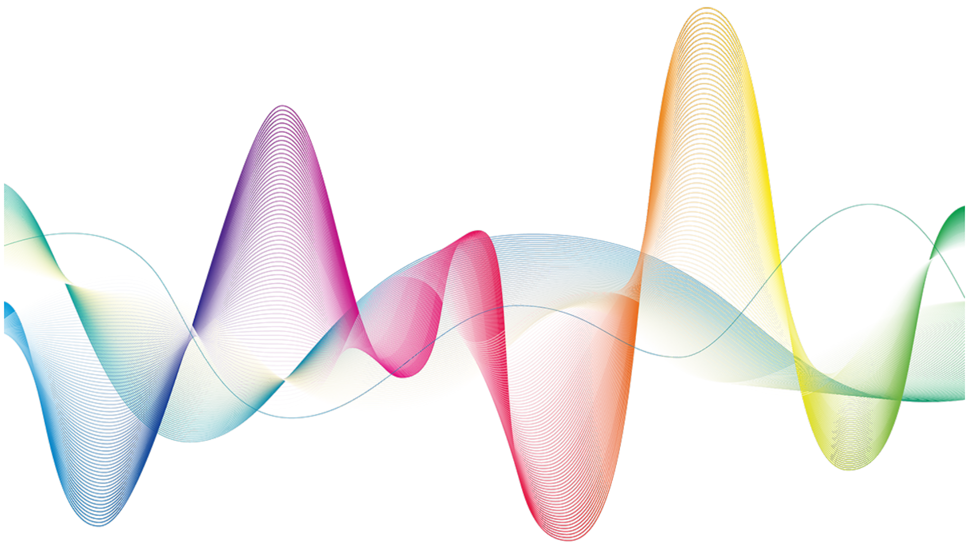
EA614 - Análise de Sinais

Método Alternativo para Calcular a Convolução de Sinais Discretos

Levy Boccato
Renan Del Buono Brotto

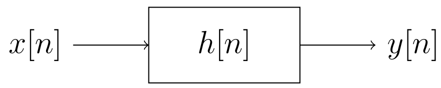
2 de Agosto de 2024



Conteúdo

1 Convolução de Sinais Discretos

Considere um sistema linear e invariante com o tempo (LIT) cuja resposta ao impulso é dada por $h[n]$.



SISTEMA LIT

Sabemos que a saída $y[n]$ gerada para uma entrada $x[n]$ é determinada pela soma de convolução:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k]$$

Um procedimento possível para se calcular $y[n]$ consiste em realizar os seguintes passos:

1. Representar a sequência $x[k]$ (no eixo k).
2. Representar $h[n-k]$, que corresponde a uma versão invertida e deslocada de $h[k]$.
3. Multiplicar, ponto a ponto, as sequências $x[k]$ e $h[n-k]$.
4. Somar todas as amostras de $x[k]h[n-k]$ (*i.e.*, por todo o eixo k), obtendo $y[n]$.

Os passos acima são repetidos para todos os valores de $n \in \mathbb{Z}$.

Interessantemente, há uma forma alternativa para resolver a convolução, apoiada no fato de conhecermos a resposta ao impulso $h[n]$.

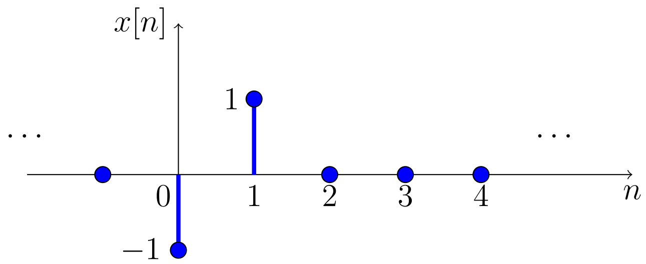
- Como o sistema é **invariante com o tempo**, se (e por definição) a entrada $\delta[n]$ produz como saída $h[n]$, então $\delta[n-k]$ produz $h[n-k]$.
- Como o sistema é **linear**, então a entrada $x[k]\delta[n-k]$, para um determinado valor de k, com $x[k]$ sendo um escalar, produz como saída $x[k]h[n-k]$.

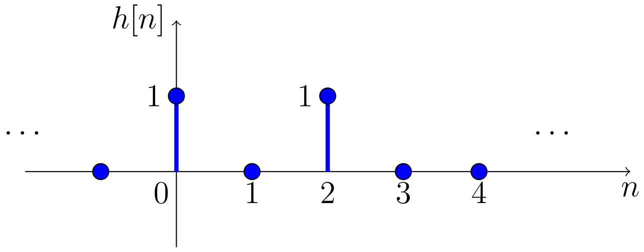
Sendo assim, dada uma entrada $x[n]$ qualquer, podemos obter a saída $y[n]$ correspondente da seguinte maneira:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = +\cdots\ x[-1]h[n+1] + x[0]h[n] + x[1]h[n-1] + \cdots$$

Para todo instante $k \in \mathbb{Z}$ em que $x[k] \neq 0$, devemos representar $h[n-k]$ com amplitude corrigida pelo ganho $x[k]$. Então, basta somar todas as sequências do tipo $x[k]h[n-k]$, em todo o eixo do tempo n, para obter $y[n]$.

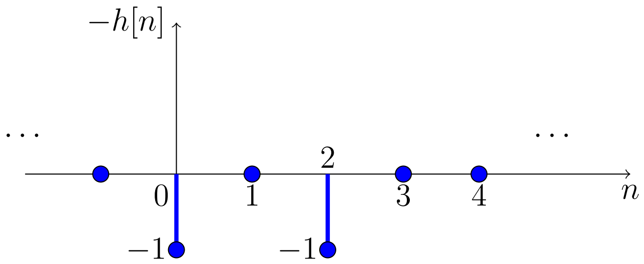
Vamos ilustrar essa ideia por meio de um exemplo simples:



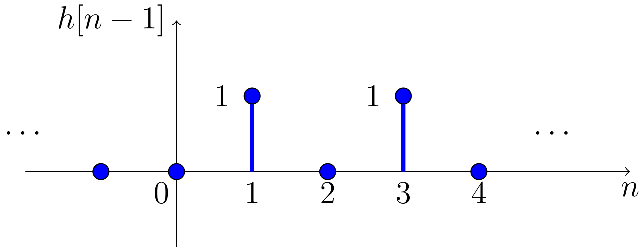


Então,

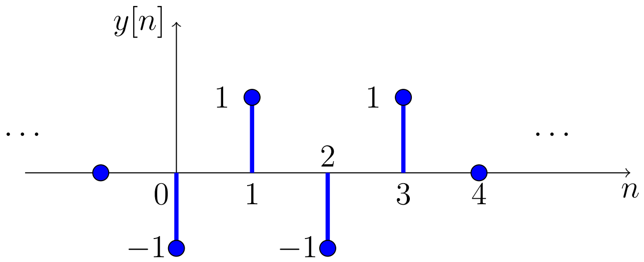
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[0]h[n] + x[1]h[n-1] = -1.h[n] + 1.h[n-1]$$



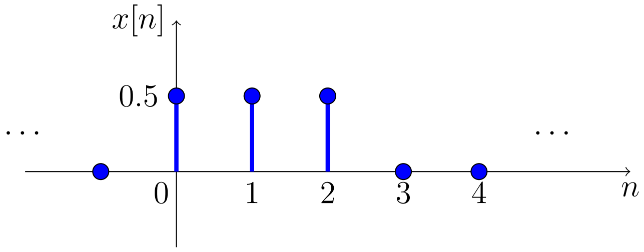
$$+$$

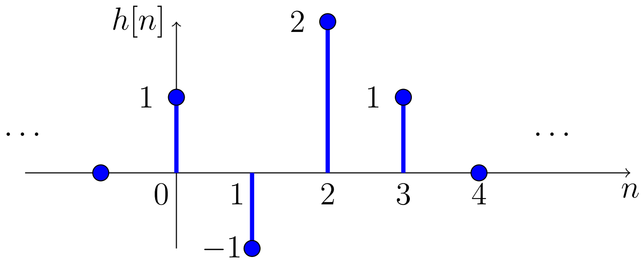


$$=$$



Vejamos mais um exemplo:

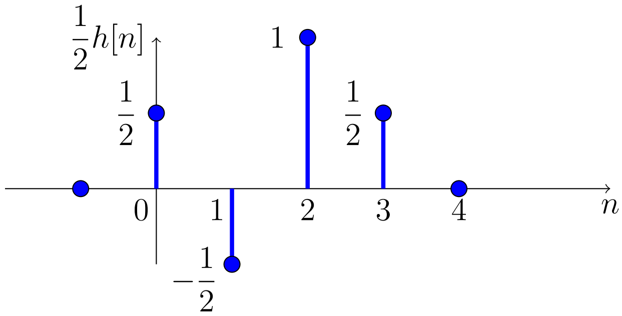


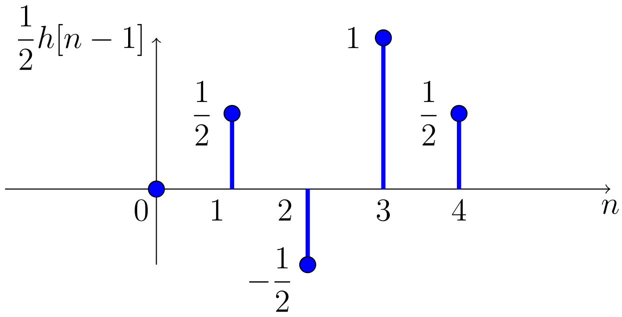


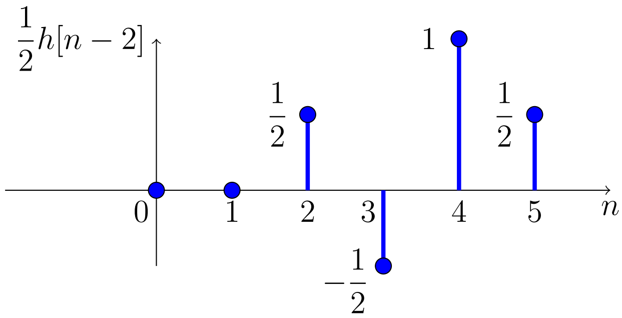
A saída $y[n]$ é obtida a partir da própria definição da convolução:

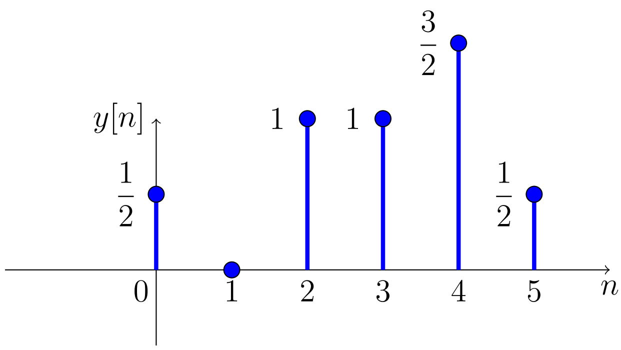
$$
\begin{aligned}
y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[0]h[n] + x[1]h[n-1] + x[2]h[n-2] \\
&= \frac{1}{2}h[n] + \frac{1}{2}h[n-1] + \frac{1}{2}h[n-2] \\
&= \frac{1}{2}\Big(h[n] + h[n-1] + h[n-2]\Big)
\end{aligned}
$$

Fazendo a soma das versões deslocadas de $h[n]$, obtemos:







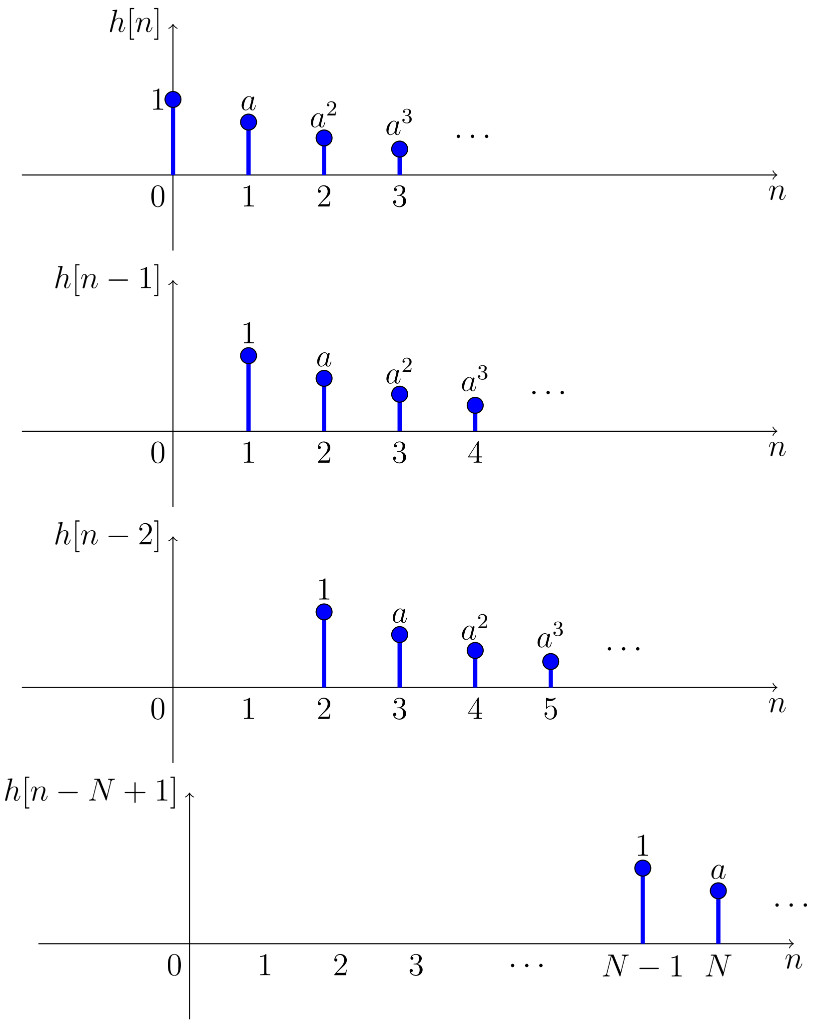


No fundo, esta estratégia para calcular a convolução faz uso direto da própria definição, e se mostra particularmente adequada quando os sinais envolvidos têm duração limitada (e pequena), embora também possa ser usada no contexto de sinais de duração infinita.

<u>Exemplo:</u> $x[n] = u[n] - u[n-N]$, $h[n] = a^n u[n]$

Ora, $x[n]$ é diferente de zero apenas no intervalo $0 \leq n \leq N-1$. Então,

$$y[n] = x[0]h[n] + \cdots + x[N-1]h[n-(N-1)] = 1.h[n] + \cdots + 1.h[n-(N-1)]$$



Devemos considerar três casos possíveis:

1. $n < 0$: $y[n] = 0$.

2. Nem todas as versões deslocadas $h[n-k]$ são não-nulas. Isto ocorre no intervalo $0 \leq n \leq N-1$. Analisemos alguns instantes de tempo em particular:

$$y[0] = \underbrace{1}_{h[n]} + 0 + \cdots + 0$$

$$y[1] = \underbrace{a}_{h[n]} + \underbrace{1}_{h[n-1]} + \cdots + 0$$

$$y[2] = \underbrace{a^2}_{h[n]} + \underbrace{a}_{h[n-1]} + \underbrace{1}_{h[n-2]} + \cdots + 0$$

Como regra geral, percebemos que $y[n]$ terá que somar termos do tipo a^m com m indo de 0 a n:

$$y[n] = \sum_{m=0}^{n} a^m = \frac{1 - a^n a}{1 - a}$$

3. Todas as versões deslocadas $h[n-k]$ são não-nulas. Isto ocorre para $n \geq N-1$. Nesta região, $y[n]$ será dado por:

$$\begin{aligned} y[n] &= h[n] + \cdots + h[n-(N-1)] \\ &= a^n + a^{n-1} + \cdots + a^{n-(N-1)} = a^n[1 + a^{-1} + \cdots + a^{-(N-1)}] \\ &= a^n \sum_{m=0}^{N-1} a^{-m} = \frac{a^n[1 - a^{-(N-1)}a^{-1}]}{1 - a^{-1}} \end{aligned}$$

Multiplicando o numerador e o denominador por $(-a)$:

$$y[n] = \frac{a^n[-a + a^{-(N-1)}]}{-a+1} = \frac{a^n[a^{-(N-1)}] - a}{1-a} = \frac{a^{n-(N-1)} - a^n.a}{1-a}$$

Note que o resultado é idêntico àquele demonstrado nas notas de aula (o qual havia sido obtido utilizando o outro procedimento).