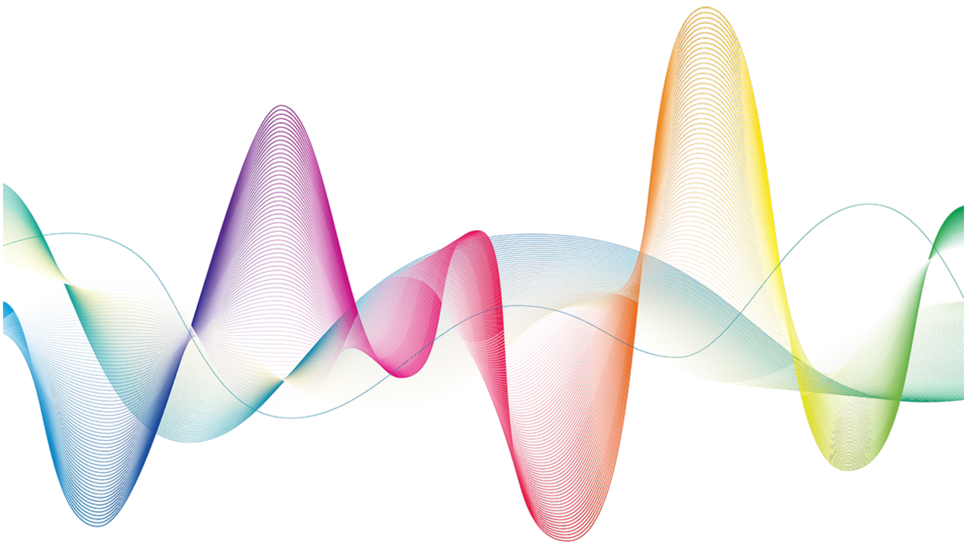
EA614 - Análise de Sinais

Tópico 7 - Amostragem

Levy Boccato
Renan Del Buono Brotto

11 de outubro de 2024



UNICAMP

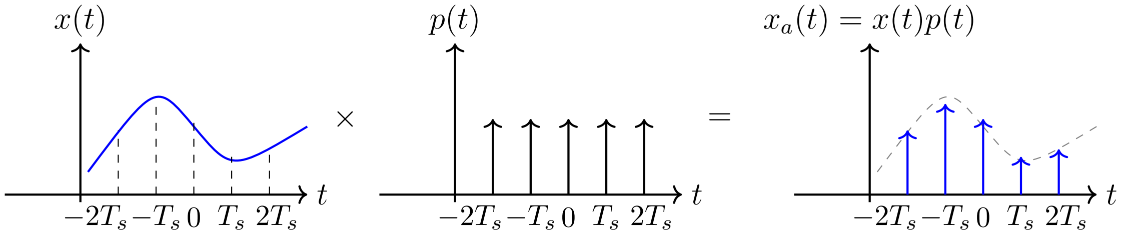
FEEC Unicamp

Conteúdo

1 Introdução

Neste tópico, vamos abordar um dos conceitos mais importantes para o tratamento de sinais reais (analógicos) por meio de sistemas de computação digital (discretos): o processo de amostragem. Inicialmente, veremos uma abordagem idealizada desse processo, a qual se mostra pertinente por facilitar a análise das consequências da amostragem e as condições necessárias para a reconstrução do sinal. Posteriormente, entenderemos como o processo empregado na prática pode ser descrito com naturalidade usando os resultados da amostragem ideal como base.

2 Amostragem Ideal



Esta forma de amostragem realiza o produto de $x(t)$ por um trem de impulsos (função pente), fornecendo como resultado um sinal "periódico" com impulsos cujas áreas correspondem às amplitudes de $x(t)$ nos instantes de amostragem.

$$x_a(t) = x(t)\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)\delta(t - kT_s)$$

Passando para o domínio da frequência:

$$X_a(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\big[X(j\omega) * \mathcal{F}\{p(t)\}\big]$$

Ora, no tópico anterior, vimos que a transformada de Fourier do trem de impulsos é

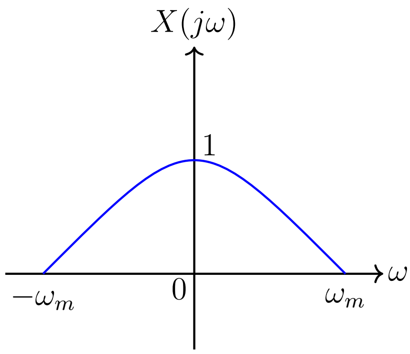
$$P(j\omega) = \frac{2\pi}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s),\ \omega_s = 2\pi/T_s.$$

Então,

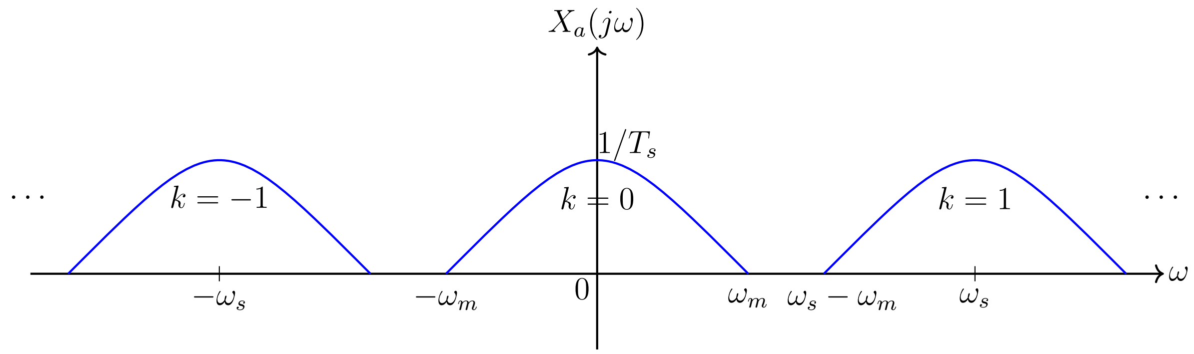
$$X_a(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[X(j\omega) * \frac{2\pi}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)\right]$$

Dado que $h(t) * \delta(t - t_0) = h(t - t_0)$, concluímos que:

$$X_a(j\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\big(j(\omega - k\omega_s)\big) \tag{1}$$



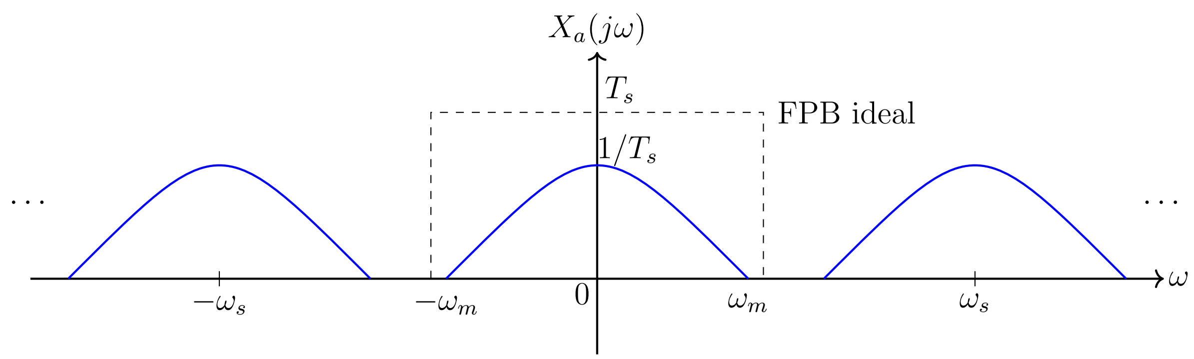
Amostragem Ideal

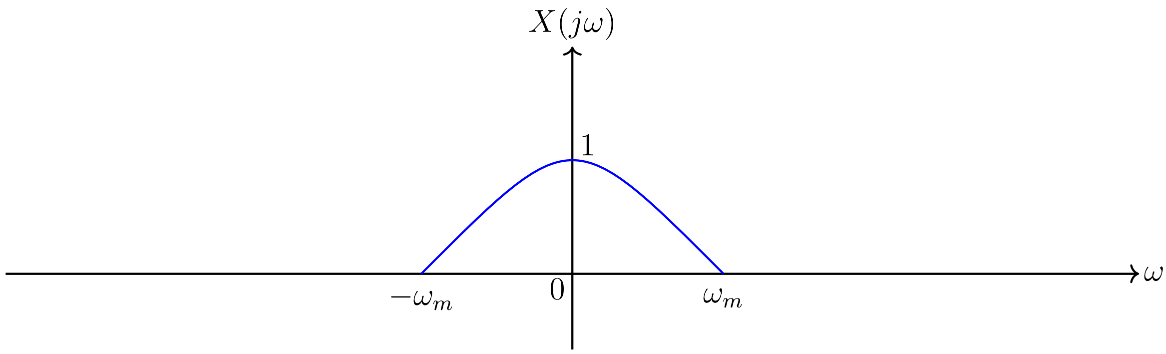


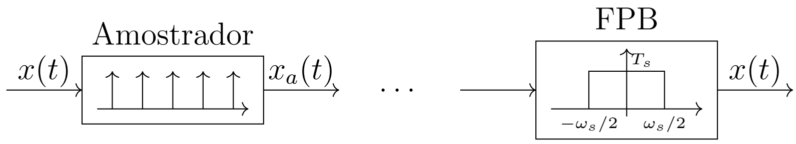
Note que:

- $X_a(j\omega)$ é periódico com período $\omega_s = 2\pi/T_s$;
- quanto menor o valor de T_s, mais próximas entre si estarão as amostras no tempo e mais espaçadas as réplicas do espectro de $x(t)$ na frequência. No limite de $T_s \to 0$, o sinal amostrado será o próprio sinal contínuo.

A partir do sinal amostrado $x_a(t)$, é possível recuperar, sem perdas, o sinal completo $x(t)$ aplicando um filtro passa-baixas ideal sobre $x_a(t)$, o qual irá capturar a componente espectral centrada em $\omega = 0$ e eliminar as demais réplicas.







A recuperação do sinal original só é possível se as componentes espectrais em $X_a(j\omega)$ não estiverem sobrepostas. O fenômeno denominado *aliasing* ocorre se o tempo entre amostras for muito grande, ou seja, se a frequência de amostragem ω_s for pequena em comparação com a velocidade de variação do sinal (*i.e.*, em relação a ω_m).

Para evitar *aliasing*, a condição a ser respeitada é que $\omega_s - \omega_m > \omega_m$.

Taxa de Nyquist: $\begin{cases} \omega_s = 2\omega_m \\ T_s = \pi/\omega_m \end{cases}$

O sinal $x_a(t)$ ainda é analógico (tempo contínuo). Podemos, porém, trazer as amostras coletadas para o contexto discreto construindo a sequência:

$$x[n] = x(nT_s), \; n \in \mathbb{Z}$$

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

Aplicando a transformada de Fourier:

$$X_a(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\mathcal{F}\{\delta(t - nT_s)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)e^{-j\omega T_s n}$$

Fazendo a seguinte mudança de notação:

$$x(nT_s) = x[n], \quad \omega T_s = \Omega \quad \text{e} \quad X_a(j\omega) = X(e^{j\Omega})$$

obtemos

$$\boxed{X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}} \tag{2}$$

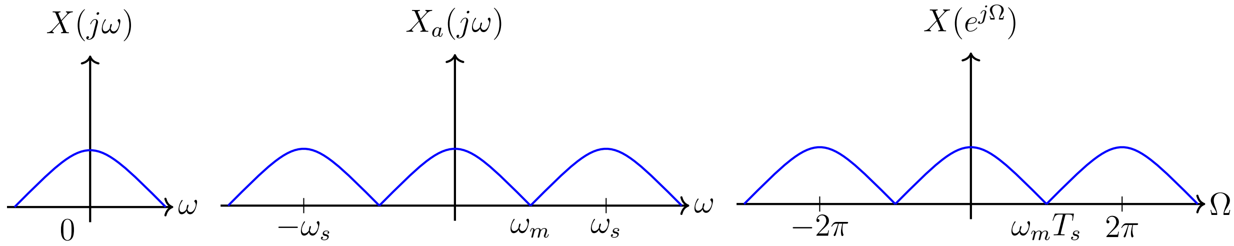
Esta é a famosa expressão da Transformada de Fourier de Sinais Discretos.

Comentários:

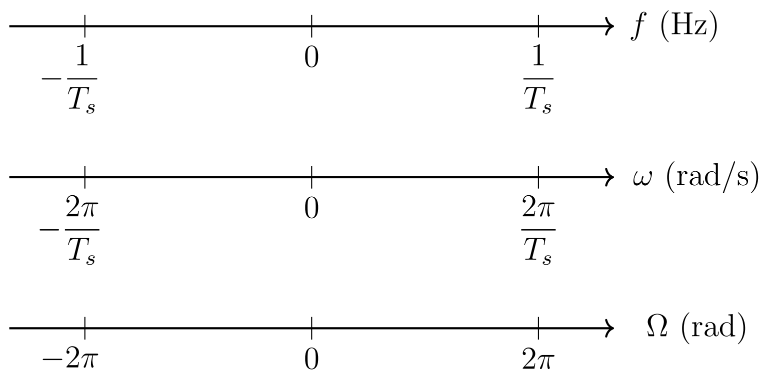
- Percebemos que $\mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$ é, na verdade, um caso particular da transformada de Fourier que estudamos no contexto de sinais contínuos. Isto ocorre porque $X(e^{j\Omega})$ surge a partir da transformada de um sinal formado por impulsos cujas áreas são as amostras de $x(t)$ (portanto, ele é discreto no tempo). Sendo assim, o resultado obtido, denotado por $X(e^{j\Omega})$, é um espectro usual de Fourier, de modo que todas as propriedades estudadas anteriormente para $\mathcal{F}\{\cdot\}$ são válidas para a transformada de Fourier de sinais discretos.

- A variável Ω é igual à frequência em radianos por segundo normalizada pelo intervalo (período de amostragem) T_s. Ela é dada em radianos ou, conforme sugerido por alguns autores, radianos/amostra.

Relação entre os eixos de frequência



$$\boxed{\begin{array}{c} \omega = 2\pi f \\ \Omega = \omega T_s \end{array}}$$

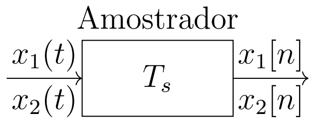


Observamos o surgimento de réplicas espectrais e de um espectro periódico por conta do processo de amostragem; isto nos levou a um espectro (discreto) periódico ($X(e^{j\Omega})$), fato já esperado por conta da ambiguidade de frequências e da periodicidade de $e^{j\Omega n}$ em Ω (período 2π).

2.1 Teorema da Amostragem (Nyquist-Shannon)

Seja $x(t)$ um sinal a tempo contínuo e limitado em banda com $X(j\omega) = 0$ para $|\omega| \geq \omega_m$. Então, $x(t)$ é única e perfeitamente representado por suas amostras $x[n] = x(nT_s)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, desde que $\omega_s = 2\pi/T_s > 2\omega_m$.

Por quê estritamente maior ?



$x_1(t) = \cos\big(2\pi(f_s/2)t + \theta\big)$. Amostrando com $\omega_s = 2\pi f_s$:

$$x_1[n] = \cos\big(2\pi(f_s/2)n/f_s + \theta\big) = \cos(\pi n + \theta) = \cos(\pi n).\cos(\theta)$$

$x_2(t) = \cos\big(2\pi(f_s/2)t\big).\cos(\theta)$. Amostrando com $\omega_s = 2\pi f_s$:

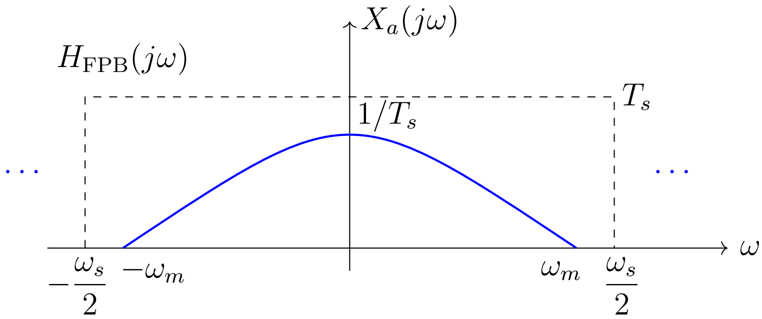
$$x_2[n] = \cos\big(2\pi(f_s/2)n/f_s\big).\cos(\theta) = \cos(\pi n).\cos(\theta)$$

Ora, $x_1(t) \neq x_2(t)$, mas $x_1[n] = x_2[n]$. Portanto **não** sabemos dizer qual sinal analógico ($x_1(t)$ ou $x_2(t)$, ambos com frequência $f_s/2$), gerou o sinal discreto. Isto demonstra que $f_s/2$ não é bem representada na amostragem.

2.2 Processo de Reconstrução

Vamos olhar com mais calma para a reconstrução de $x(t)$ a partir da sequência de amostras $x[n]$.

Como $\omega_s > 2\omega_m$, necessariamente $\omega_m < \omega_s/2$. Sendo assim, não há ocorrência de *aliasing* e um FPB ideal com frequência de corte igual a $\omega_s/2$ garante a recuperação, pois em sua faixa de passagem haverá apenas uma componente sem distorções proporcional a $X(j\omega)$.



Mas o que a filtragem passa-baixas realiza no domínio do tempo?

$$x_r(t) = x_a(t) * h_{\text{FPB}}(t),$$

onde

$$h_{\text{FPB}}(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{H_{\text{FPB}}(j\omega)\right\} = \frac{\text{sen}(\omega_s t/2)}{\omega_s t/2}.$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} x_r(t) &= x_a(t) * h_{\text{FPB}}(t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta(t - kT_s) * h_{\text{FPB}}(t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_{\text{FPB}}(t - kT_s) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \frac{\text{sen}(\omega_s(t - kT_s)/2)}{\omega_s(t - kT_s)/2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \omega_s = 2\pi/T_s. \end{aligned} \tag{3}$$

Nos instantes $t = nT_s$, n inteiro,

$$h_{\text{FPB}}(t - kT_s) = \frac{\text{sen}(\omega_s(nT_s - kT_s)/2)}{\omega_s(nT_s - kT_s)/2} = \frac{\text{sen}(\omega_s mT_s/2)}{\omega_s mT_s/2} = \frac{\text{sen}(\pi m)}{\pi m} = \begin{cases} 1, & \text{caso } m = 0 \\ 0, & \text{caso } m \neq 0 \end{cases},$$

para $m = n - k$.

Como $x_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_{\text{FPB}}(t - kT_s)$ (convolução), concluímos que nos instantes $t = nT_s$, $x_r(nT_s) = x[n]$ (as demais amostras da sequência $x[n]$ não interferem, pois $h_{\text{FPB}}(kT_s)$ é zero para $k \neq 0$). Ou seja, o sinal que reconstruímos de acordo a **fórmula de interpolação** possui exatamente os mesmos valores que o sinal contínuo original nos instantes de amostragem (e isso independe do período de amostragem). Além disso, com as garantias dadas pelo teorema da amostragem, a interpolação realizada em (3) é perfeita.

3 Resumo da Amostragem Ideal e Processamento Digital de Sinais

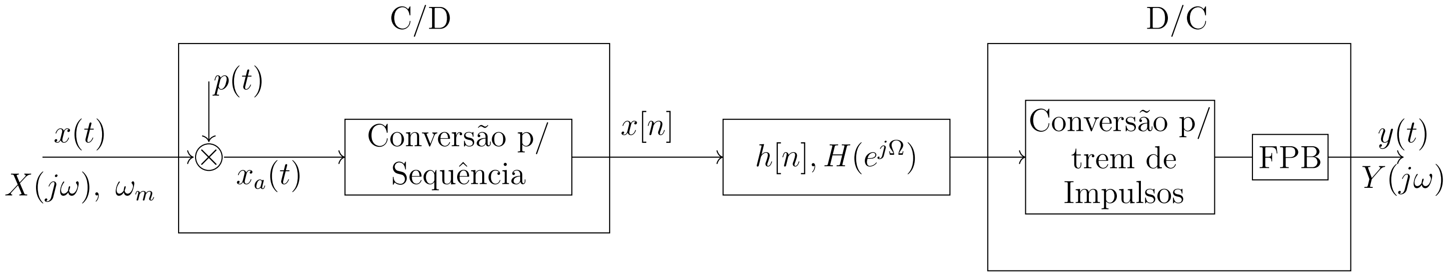


Figura A - Esquema base para o processamento digital de sinais.

O sistema da figura A mistura elementos de processamento/filtragem a tempo contínuo com sequências e sistemas a tempo discreto. Vamos, então, encontrar algumas relações de equivalência.

$$x[n] = x(nT_s) \iff X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T_s}\sum_k X\left(j\left(\frac{\Omega}{T_s} - \frac{2\pi k}{T_s}\right)\right) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s)).$$

Quando $x[n]$ passa pelo filtro ($h[n]$), obtemos $y[n] \iff Y(e^{j\Omega})$.

A saída do conversor D/C é dada pela fórmula de interpolação:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]h_{\text{FPB}}(t - nT_s).$$

No domínio da frequência,

$$
\begin{aligned}
Y(j\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] H_{\text{FPB}}(j\omega) e^{-j\omega n T_s} \\
&= H_{\text{FPB}}(j\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] e^{-j\omega n T_s} \\
&= H_{\text{FPB}}(j\omega) Y(e^{j\Omega}) = \begin{cases} T_s . Y(e^{j\omega T_s}), & |\omega| < \omega_s/2 = \pi/T_s \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

O ajuste no eixo de frequências $\Omega = \omega T_s$ equivale a gerar o trem de impulsos a partir das amostras.
Caso especial: $h[n] \iff H(e^{j\Omega})$ é um sistema LIT.
Então,

$$Y(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega}).H(e^{j\Omega}).$$

Combinando esta expressão com a anterior, vemos que:

$$Y(j\omega) = H_{\text{FPB}}(j\omega).H(e^{j\omega T_s}).X(e^{j\omega T_s})$$

Substituindo a expressão de $X(e^{j\omega T_s})$:

$$Y(j\omega) = H_{\text{FPB}}(j\omega).H(e^{j\omega T_s}).\left[\frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\big(j(\omega - 2\pi k/T_s)\big)\right].$$

Se $x(t)$ tem banda limitada, de modo que $X(j\omega) = 0$ para $|\omega| > \omega_s/2$, então o filtro ideal de reconstrução cancela o fator $1/T_s$ e seleciona somente a componente em banda base ($k = 0$) da equação acima. Ou seja,

$$Y(j\omega) = \begin{cases} H(e^{j\omega T_s}).X(j\omega), & |\omega| < \omega_s/2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

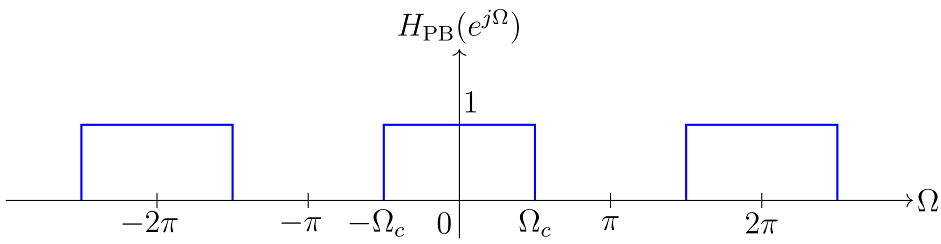
Sendo assim, $Y(j\omega) = H_{\text{efetivo}}(j\omega).X(j\omega)$, onde

$$H_{\text{efetivo}}(j\omega) = \begin{cases} H(e^{j\omega T_s}), & |\omega| < \omega_s/2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

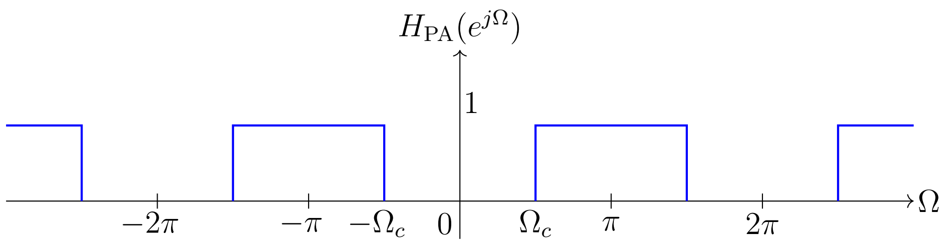
Isso significa que o sistema inteiro – que inclui uma passagem ao domínio discreto – é equivalente a um sistema LIT cuja resposta em frequência efetiva é dada pela relação obtida acima. A importância do processo de amostragem e desta equivalência deve ser ressaltada: é possível obter efeitos desejados no sinal analógico $x(t)$ por meio do processamento a tempo discreto de amostras deste sinal.

3.1 Filtros Discretos no Tempo

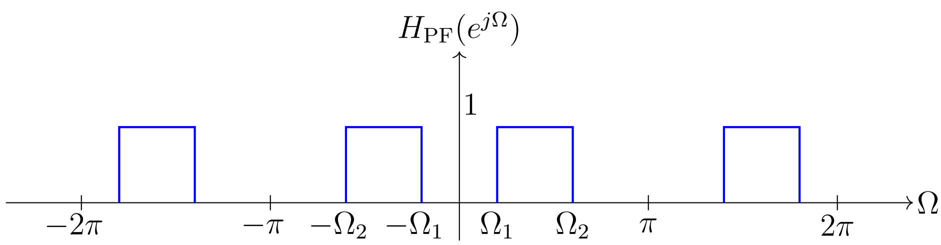
a) FPB Ideal



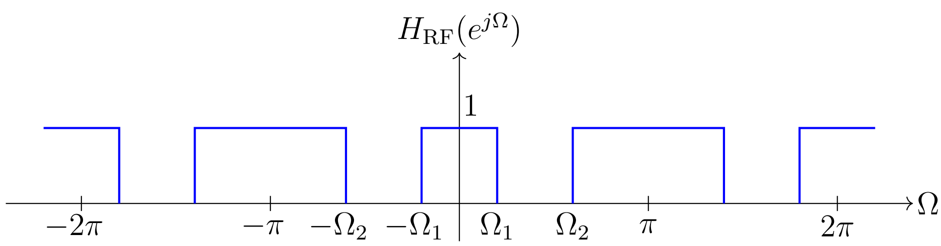
b) FPA Ideal



c) FPF Ideal

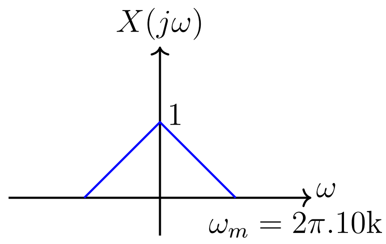


d) FRF Ideal

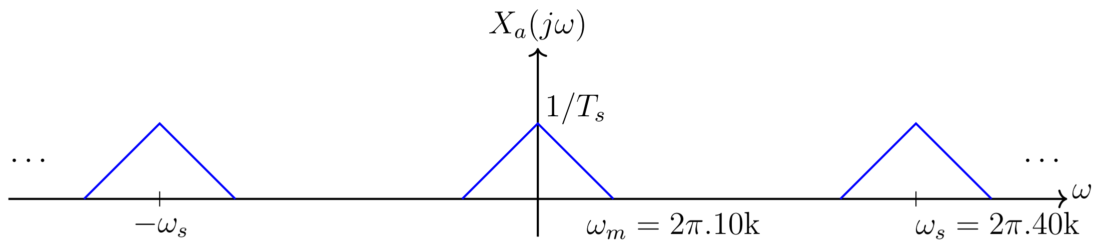


3.2 Exercício de fixação

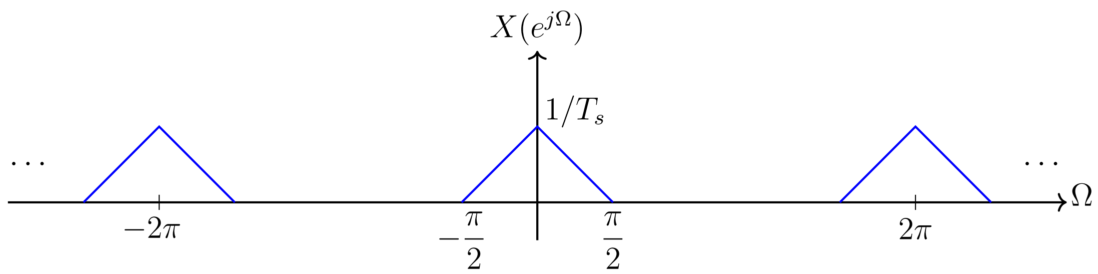
Um sinal $x(t)$ limitado a 10 kHz é amostrado a uma taxa de 40000 amostras/s, gerando a sequência $x[n]$. Esboce a resposta de amplitude de um filtro discreto passa-baixas que, atuando sobre $x[n]$, produz uma limitação de faixa equivalente à de um filtro analógico passa-baixas ideal com frequência de corte igual a 8 kHz.



Processo de amostragem com $\omega_s = 2\pi.40\text{k}$:



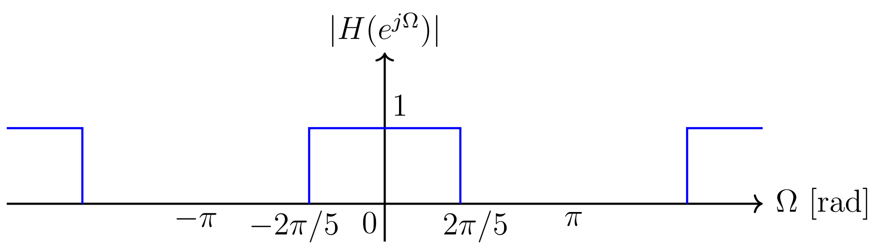
Passando para o eixo de frequências $\Omega = \omega T_s$:



Qual frequência Ω está associada à frequência analógica $f = 8$ kHz?

$$\Omega = \omega T_s = 2\pi f \frac{1}{f_s} \rightarrow \Omega = 2\pi \frac{8.10^3}{40.10^3} = \frac{2\pi}{5}.$$

Então, se utilizarmos um FPB ideal discreto com resposta em frequência



o resultado será equivalente a filtrar $x(t)$ com um FPB ideal analógico com corte em 8 kHz.

4 Perspectivas Mais Realistas de Amostragem

4.1 Filtro Anti-Aliasing

Taxas de amostragem menores tendem a reduzir a carga de processamento computacional, pois há menos amostras a processar. Se a entrada não é limitada em banda (*e.g.*, se o sinal $x(t)$ tem duração finita no tempo, o espectro tende a ser infinito) ou a frequência de Nyquist já é muito elevada, pré-filtragem pode ser muito importante.

Mesmo que o sinal seja limitado em banda, ruído aditivo de banda larga pode inserir conteúdo de alta frequência que, caso ignorado, produzirá *aliasing*.

Todos esses fatores motivam o uso de um filtro anti-aliasing.

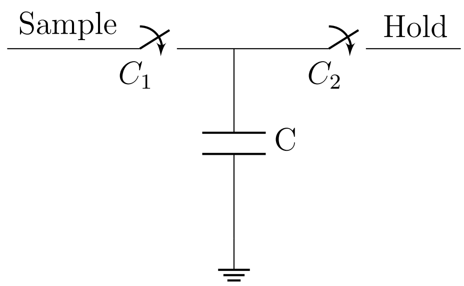
Ideal: $H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c < \omega_s/2 \\ 0, & |\omega| \geq \omega_c \end{cases}$

Exemplo: sinais de fala poderiam ser limitados, com perdas suportáveis, a 20 kHz.

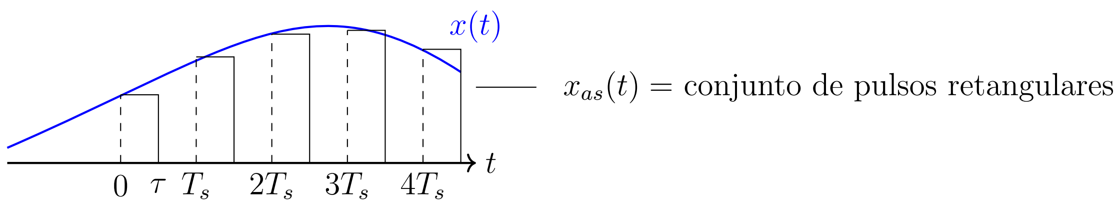
Como já discutido, preparar um filtro analógico ideal é praticamente inviável.

Interessante: o projeto do filtro anti-aliasing pode ser facilitado se amostrarmos o sinal a uma taxa maior do que a de Nyquist, uma técnica denominada *oversampling*. Esta ideia, combinada com técnicas digitais de ajuste de amostragem (interpolação e decimação), permite que se trabalhe com a taxa desejada (volume de dados menor) e que o filtro anti-aliasing seja mais simples.

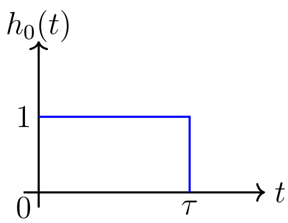
4.2 Segurador de Ordem Zero



A chave C_1 fecha em $t = nT_s$, quando o capacitor carrega/descarrega até atingir o valor da amostra do sinal. Em $t = nT_s + \epsilon$, C_1 abre e C_2 fecha, de modo que o valor coletado da amostra é preservado.



Seja $h_0(t)$



Podemos escrever o sinal amostrado como:

$$x_{as}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s).h_0(t - kT_s).$$

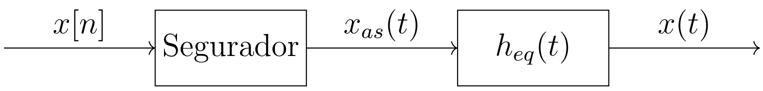
Contudo, $\sum_k h_0(t - kT_s) = h_0(t) * \sum_k \delta(t - kT_s)$. Então,

$$x_{as}(t) = h_0(t) * \underbrace{\left[\sum_k x(kT_s)\delta(t - kT_s)\right]}_{\text{Amostragem ideal}} = h_0(t) * x_a(t).$$

No domínio da frequência, $X_{as}(j\omega) = X_a(j\omega).\mathcal{F}\{h_0(t)\} = X_a(j\omega).\tau\mathrm{Sa}(\omega\tau/2).e^{-j\omega\tau/2}$

- $X_{as}(j\omega)$ é igual a $X_a(j\omega)$, exceto pelo fator multiplicativo dado pelo *sampling*.
- $X_{as}(j\omega)$ possui versões deslocadas de $X(j\omega)$, mas não é periódico, pois cada componente é multiplicada por um ganho proporcional a $\mathrm{Sa}(\cdot)$.

Como podemos recuperar $x(t)$ a partir das amostras?

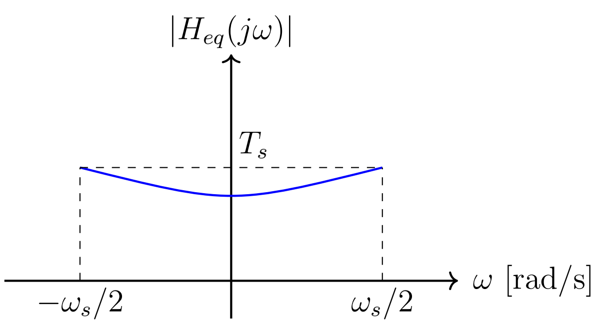


$$\begin{aligned} X(j\omega) &= X_{as}(j\omega).H_{eq}(j\omega) \\ &= \left[\frac{1}{T_s}\sum_k X\big(j(\omega - 2\pi k/T_s)\big)\right].e^{-j\omega\tau/2}.\tau\mathrm{Sa}(\omega\tau/2).H_{eq}(j\omega). \end{aligned}$$

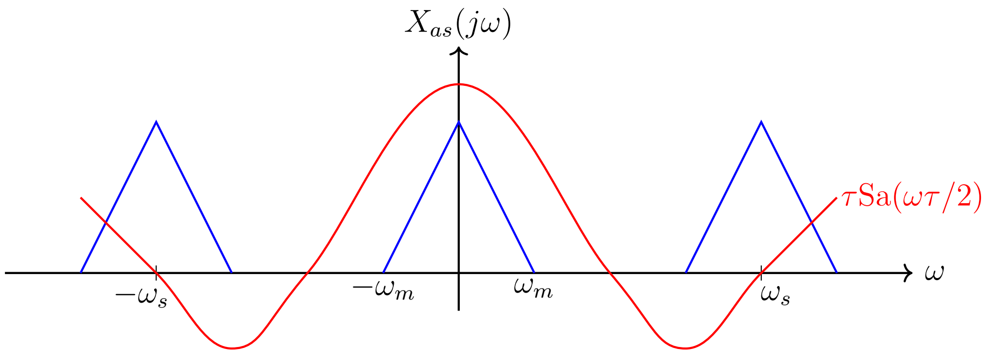
O filtro $h_{eq}(t) \Longleftrightarrow H_{eq}(j\omega)$ deve:

- capturar a componente espectral centrada em $\omega = 0$;
- corrigir o ganho introduzido pelo *sampling*.

Assim, $H_{eq}(j\omega) = \dfrac{1}{e^{-j\omega\tau/2}.\tau\mathrm{Sa}(\omega\tau/2)}.T_s$, $|\omega| < \omega_s/2$.

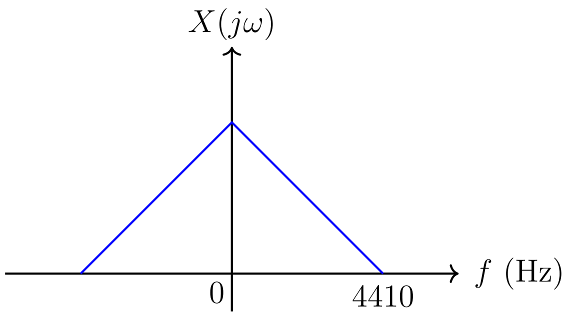


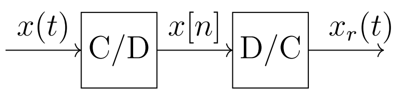
Aplicando este filtro sobre o sinal amostrado,



recuperamos $x(t)$.

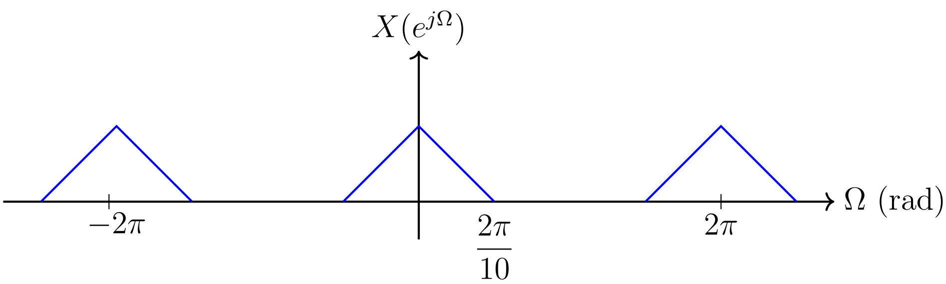
4.3 Superamostragem



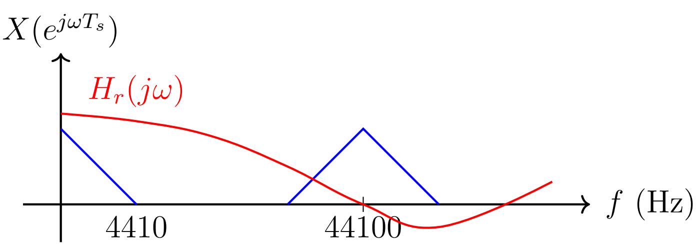


Considere $f_s = 44100$ Hz.

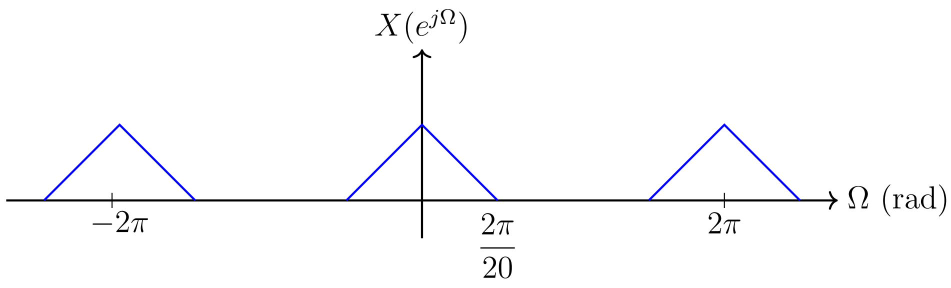
Pelo mapeamento de frequências, $\Omega_{max} = 4410.\dfrac{2\pi}{44100} = \dfrac{2\pi}{10}$.



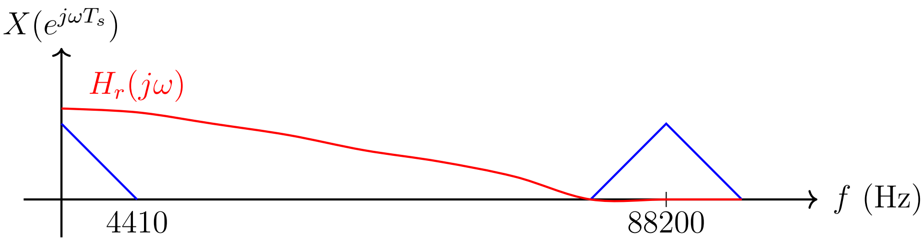
Na reconstrução, a frequência 2π se torna $2\pi(44100)$:



Agora, considere $f_s = 2.44100 = 88200$ Hz.

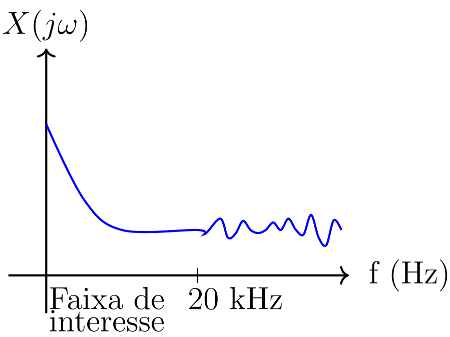


Na reconstrução, a frequência 2π vira $2\pi f_s = 88200.2\pi$:

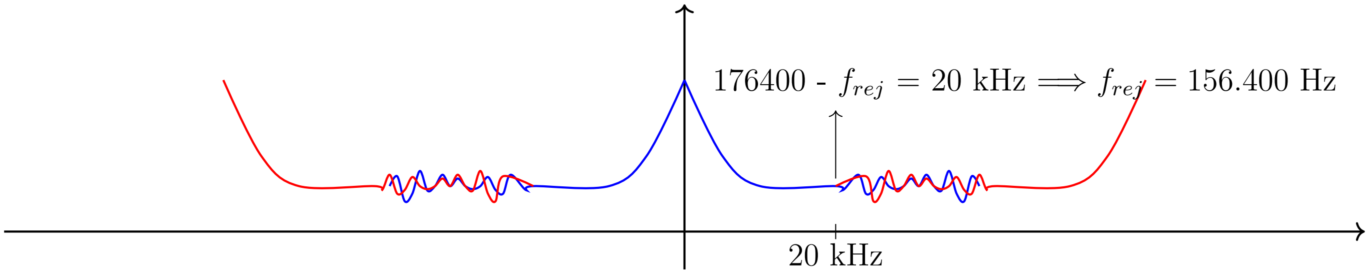


Ocorrem menos distorções na faixa de frequências de interesse (onde temos o espectro de frequências do sinal original) com uma frequência de amostragem f_s mais elevada. Como não há conteúdo espectral entre 4410 e 88200 Hz, podemos utilizar um filtro passa-baixas mais simples para a conversão D/C. Ou seja, a superamostragem (*oversampling*) simplifica o projeto do filtro de reconstrução.

E o anti-aliasing?



Se amostrarmos a 40 kHz, para não haver *aliasing*, o pré-filtro de anti-*aliasing* teria de ser ideal. Se, porém, amostrarmos a 176.400 Hz



Para não acontecer *aliasing* na região de 20 kHz, a cauda da réplica situada em $f_s = 176400$ Hz não pode atingir 20 kHz. Logo, se usarmos um FPB barato que deixe passar o conteúdo de $X(j\omega)$ até 156400 Hz, ainda assim ficamos com a faixa de 0 a 20 kHz intacta, podendo recuperar o sinal original.