Preuve: Posons $P(n) : F_n^{(p)} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor + 1} \binom{n-pk}{k}$

Initialisation : Pour $n \leq p$, on a

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor + 1} \binom{n-pk}{k} = \sum_{k=0}^{1} \binom{n-pk}{k} = \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} + \underbrace{\binom{n-p}{1}}_{n-p \leq 0 \text{ donc } 0} = 1$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \in [\![0, n]\!], P(k)$ soit vraie.

$$\begin{aligned} F_{n+1}^{(p)} &= F_{n-p}^{(p)} + F_n^{(p)} \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-p}{p+1} \rfloor + 1} \binom{n-p-pk}{k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor + 1} \binom{n-pk}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-p}{p+1} \rfloor + 2} \binom{n-p-p(k-1)}{k-1} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor + 1} \binom{n-pk}{k} \end{aligned}$$

Or $\binom{n}{-1} = 0$ donc on peut décaler l'indice de la première somme à $k = 0$:

$$F_{n+1}^{(p)} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-p}{p+1} \rfloor + 2} \binom{n-pk}{k-1} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor + 1} \binom{n-pk}{k}$$

On peut alors essayer de regrouper les deux sommes :
$\lfloor \frac{n-p}{p+1} \rfloor + 2 = \lfloor \frac{n+p+2}{p+1} \rfloor$ et $\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{n+p+1}{p+1} \rfloor$ donc $\lfloor \frac{n-p}{p+1} \rfloor + 2 \geq \lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor + 1$

On souhaite donc montrer que $\lfloor \frac{n-p}{p+1} \rfloor + 2 > n - p\left(\lfloor \frac{n-p}{p+1} \rfloor + 2\right)$: on a

$$\begin{aligned} \frac{n-p}{p+1} - 1 < \left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor &\Leftrightarrow (p+1)\left(\left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2\right) > n - p + (p+1) \\ &\Leftrightarrow -(p+1)\left(\left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2\right) < -n - 1 \\ &\Leftrightarrow n - (p+1)\left(\left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2\right) < -1 \\ &\Leftrightarrow n - p\left(\left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2\right) < -1 + \left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2 \\ &\Leftrightarrow n - p\left(\left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2\right) < \left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2 \end{aligned}$$

Donc $\binom{n - \lfloor \frac{n-p}{p+1} \rfloor + 2}{\lfloor \frac{n-p}{p+1} \rfloor + 2} = 0$, ce qui permet d'utiliser $\lfloor \frac{n-p}{p+1} \rfloor + 2$ comme indice commun au deux sommes, qu'on peut donc regrouper :

$$
\begin{aligned}
F_{n+1}^{(p)} &= \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2} \left(\binom{n-pk}{k-1} + \binom{n-pk}{k} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-p}{p+1} + 1 \right\rfloor + 1} \binom{(n+1)-pk}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n+1}{p+1} \right\rfloor + 1} \binom{(n+1)-pk}{k}
\end{aligned}
$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Par le principe de récurrence p-ième, $P(n) : F_n^{(p)} = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{p+1} \right\rfloor + 1} \binom{n-pk}{k}$ ■