

TITRE

1. Introduction

La suite de Fibonacci a tout d'abord été étudiée en Inde via un problème de combinatoire dans des sortes de poèmes au V^e siècle avant J.-C. par Pingala [1]. Puis, elle a été étudiée en Italie par le célèbre Léonard de Pise, plus connu sous le nom de Fibonacci, dans un problème sur la taille d'une population de lapins apparu dans son ouvrage *Liber abbaci* [2] en 1202.

Cette suite aura toujours créé un engouement, et donc énormément de généralisation ont été créées comme les suites de Lucas [3].

Mais parmi toutes ces généralisations, beaucoup sont laissées de côté, et nous allons nous intéresser à l'une d'entre elles.

2. Définition

Comme beaucoup le savent la suite de fibonacci est construite de manière récurrente en sommant les deux termes précédent et en prenant $F_0 = 1$ et $F_1 = 1$ (ou parfois $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$), i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n := \begin{cases} F_0 = F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n \geq 2 \end{cases}$$

Pour généraliser cette suite nous n'allons pas sommer les deux termes précédents, mais le terme précédent et un terme se trouvant p terme plus loin de ce premier terme et pour ce faire nous avons besoin que les p premiers termes valent 1, i.e.

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, F_n^{(p)} := \begin{cases} F_j^{(p)} = 1, \text{ si } 0 \leq j \leq p \\ F_{n+p+1}^{(p)} = F_{n+p}^{(p)} + F_n^{(p)} \text{ si } n > p \end{cases}$$

On nomme p comme étant l'ordre de la suite engendré et $(F_n^{(p)})_{n \in \mathbb{N}}$ la suite engendré pour un certain entier p

Proposition 1: Définition par récurrence équivalente

Nous pouvons considérer la définition suivante comme équivalente à la définition de base:

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, F_{n-p}^{(p)} = \begin{cases} F_j^{(p)} = 0, \text{ si } 0 \leq j < p \\ F_n^{(p)} = 1, \text{ si } n = p \\ F_{n+p+1}^{(p)} = F_{n+p}^{(p)} + F_n^{(p)} \text{ si } n > p \end{cases}$$

Ce qui revient à décaler les suites de p termes

Preuve:

Il est évident que les deux définitions sont équivalentes moyennant un décalage car les $p - 1$ premiers termes de la seconde définition valent 0 et le p -ième vaut 1

Q.E.D.

3. Exemple de suite générée

Pour $p = 0$:

Par la définition:

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n^{(0)} = \begin{cases} F_0^{(0)} = 1 \\ F_{n+1} = F_n + F_n = 2F_n \end{cases}$$

On retombe sur une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1, donc

$$F_n^{(0)} = 2^n$$

Pour $p = 1$

On retombe par construction sur la suite de Fibonacci, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n^{(1)} = \begin{cases} F_0 = F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

ou par la formule de Binet $F_n^0 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} - \varphi'^{n+1})$ avec $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\varphi' = -\frac{1}{\varphi}$

Pour $p = 2$

Par la définition:

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n^{(2)} = \begin{cases} F_0 = F_1 = F_2 = 1 \\ F_{n+3} = F_{n+2} + F_n \end{cases}$$

Ainsi on tombe sur la suite des vaches de Narayana [4]

D'expression fonctionnelle $F_n^{(2)} = \frac{\lambda^{n+2}}{(\lambda-\nu)(\lambda-\mu)} + \frac{\mu^{n+2}}{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)} + \frac{\nu^{n+2}}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}$ avec λ, μ et ν les racines complexes du polynôme: $x^3 - x^2 - 1$

A voir

Si $p \rightarrow +\infty$

Alors par la définition les p premiers termes valent 1, donc on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n^{(+\infty)} = 1$$

4. Écriture fonctionnelle des suites

Proposition 2: Expression fonctionnelle de $(F_n^{(p)})_{n \in \mathbb{N}}$

Soit R_1, R_2, \dots, R_{p+1} les racines complexes du polynôme $x^{p+1} - x^p - 1$

Alors

$$F_n^{(p)} = \sum_{i=1}^{p+1} \frac{R_i^{n+p}}{\prod_{j=1, j \neq i}^{p+1} R_i - R_j}$$

Preuve:

Pour démontrer cette proposition nous utiliserons la seconde définitions qui décale les suites avec p zéros.

Le théorème d'Alembert-Gauss, nous assure que le polynôme caractéristique $x^{p+1} - x^p - 1$ possède $p + 1$ racines complexes, notées: R_1, R_2, \dots, R_{p+1}

Ainsi $F_n^{(p+n)} = \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i R_i^n$ avec λ_i des constantes qu'ils restent à déterminer.

Pour cela, nous posons le système suivant grâce aux p premiers termes qui sont définis:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_{p+1} = F_0^{(p)} = 0 \\ \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 + \lambda_3 R_3 + \dots + \lambda_{p+1} R_{p+1} = F_1^{(p)} = 0 \\ \lambda_1 R_1^2 + \lambda_2 R_2^2 + \lambda_3 R_3^2 + \dots + \lambda_{p+1} R_{p+1}^2 = F_2^{(p)} = 0 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \lambda_1 R_1^{p+1} + \lambda_2 R_2^{p+1} + \lambda_3 R_3^{p+1} + \dots + \lambda_{p+1} R_{p+1}^{p+1} = F_p^{(p)} = 1 \end{cases}$$

Ce qui est équivalent au système suivant:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ R_1 & R_2 & R_3 & \dots & R_{p+1} \\ R_1^2 & R_2^2 & R_3^2 & \dots & R_{p+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1^{p+1} & R_2^{p+1} & R_3^{p+1} & \dots & R_{p+1}^{p+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \vdots \\ \lambda_{p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

On reconnaît la transposé d'une matrice de Vandermonde carré d'ordre $p + 1$ dont les coefficients sont deux à deux distincts, donc cette matrice est inversible, notons A cette matrice et Λ la matrice composée des coefficients que l'on cherche alors:

$$\Lambda = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi ce produit indique que l'on s'intéresse qu'à la dernière colonne de A^{-1} .

De plus l'on sait que le i -èmes coefficient de la dernière ligne d'une matrice de Vandermonde [5] (colonne ici, car on a la transposé) est égale à:

$$\frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p+1} R_i - R_j}$$

Donc

$$\forall i \in \llbracket 1; p+1 \rrbracket, \lambda_i = \frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p+1} R_i - R_j}$$

Ainsi en remplaçant les λ_i dans $\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i R_i^n$, On trouve bien:

$$F_{n-p}^{(p)} = \sum_{i=1}^{p+1} \frac{R_i^n}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p+1} R_i - R_j}$$

Ainsi en revenant à la définition de base:

$$F_n^{(p)} = \sum_{i=1}^{p+1} \frac{R_i^{n+p}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p+1} R_i - R_j}$$

Q.E.D.

Proposition 3: Expression fonctionnelle via le triangle de Pascale

5. Sur les limites de quotients des $(F_n^{(p)})$

Le ratio de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci a toujours été porteur de mystère et d'isotérisme, néanmoins il en reste intéressant de s'y intéresser.

C'est pourquoi nous allons voir les propriétés de deux généralisations de la limite de quotient.

1er généralisation:

Pour cette première généralisation, nous ne généraliserons par réelement le quotient, i.e. que nous allons nous intéresser à:

$$\forall p \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_n^{p+1}}{F_n^{(p)}}$$

Regardons ce que cela donne pour certains p :

Pour $p = 0$

On sait que $\forall n \in \mathbb{N}, F_n^{(0)} = 2^n$

Ainsi

$$\frac{F_{n+1}^{(0)}}{F_n^{(0)}} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$$

Pour $p = 1$

Il est connu que la limite du quotient la suite de Fibonacci tend vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Pour $p \rightarrow +\infty$
 On a définie pour $p \rightarrow +\infty$,

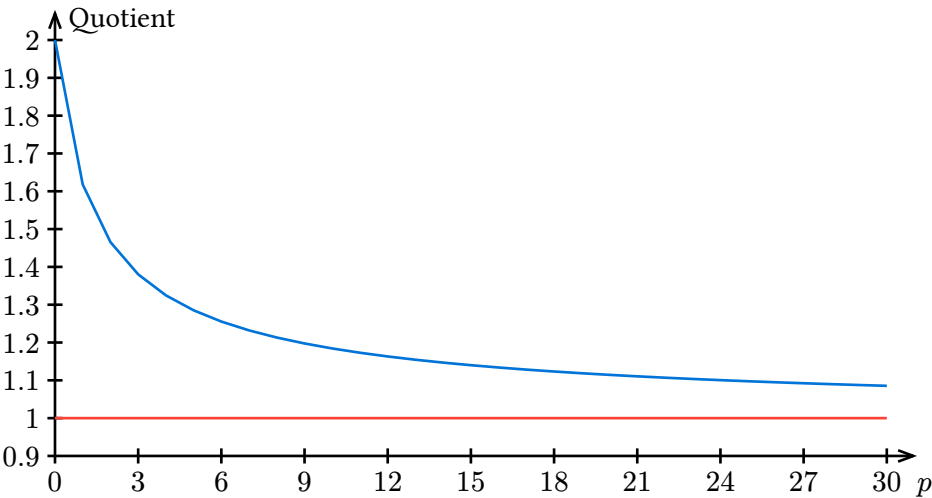
$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n^{(+\infty)} = 1$$

Donc

$$\frac{F_{n+1}^{(+\infty)}}{F_n^{(+\infty)}} = \frac{1}{1} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Pour $p > 1$
 Au dela 1, il deviens difficile de calculer algébriquement le qotient, nous avons donc calculer informatiquement jusqu'à $p = 30$ en voici le tableau:

Ainsi on peut traduire le tableau en un graphique



Dont on voit clairement qui tend vers 1

p	quotient
0	2
1	1,618033989
2	1,465571232
3	1,380277569
4	1,324717957
5	1,285199033
6	1,255422871
7	1,232054631
8	1,213149723
9	1,197491434
10	1,184276322
11	1,172950750
12	1,163119791
13	1,154493551
14	1,146854042
15	1,140033937
16	1,133902490
17	1,128355940
18	1,123310806
19	1,118699108
20	1,114464880
21	1,110561598
22	1,106950245
23	1,103597835
24	1,100476279
25	1,097561494
26	1,094832708
27	1,092271899
28	1,089863353
29	1,087593296
30	1,085449605

References

1. Pingala. [https://fr.wikipedia.org/wiki/Pingala_\(math%C3%A9maticien\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Pingala_(math%C3%A9maticien))
2. Liber abbaci
3. Suite de Lucas. https://fr.wikipedia.org/wiki/Suite_de_Lucas
4. Suite des vaches de Narayana. <https://oeis.org/A000930>
5. The Inverse matrix of Vandermonde matrix. <http://www.vesnik.math.rs/vol/mv19303.pdf>