

Preuve: Posons $P(n) : F_n^{(p)} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor + 1} \binom{n-pk}{k}$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor + 1} \binom{n-pk}{k} = \sum_{k=0}^1 \binom{0-pk}{k} = \underbrace{\binom{0}{0}}_{=1} + \underbrace{\binom{-p}{1}}_{=0} = 1$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(k)$ soit vraie.

$$\begin{aligned} F_{n+1}^{(p)} &= F_{n-p}^{(p)} + F_n^{(p)} \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-p}{p+1} \rfloor + 1} \binom{n-p-pk}{k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor + 1} \binom{n-pk}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-p}{p+1} \rfloor + 2} \binom{n-p-p(k-1)}{k-1} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor + 1} \binom{n-pk}{k} \end{aligned}$$

Or $\binom{n}{-1} = 0$ donc on peut décaler l'indice de la première somme à $k = 0$:

$$= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-p}{p+1} \rfloor + 2} \binom{n-pk}{k-1} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor + 1} \binom{n-pk}{k}$$

On peut alors essayer de regrouper les deux sommes :

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-p}{p+1} \rfloor + 2} \left(\binom{n-pk}{k-1} + \binom{n-pk}{k} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-p}{p+1} \rfloor + 1} \binom{(n+1)-pk}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n+1}{p+1} \rfloor + 1} \binom{(n+1)-pk}{k} \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Par le principe de récurrence forte, $P(n) : F_n^{(p)} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor + 1} \binom{n-pk}{k}$ ■