Gaspar Daguet
Julien Thillard
Louwen Fricout
Albin Chaboissier

Changement du temps de gestation des lapins de Fibonacci

Table des Matières

1. Introduction

La suite de Fibonacci a tout d'abord été étudiée en Inde via un problème de combinatoire dans des sortes de poèmes au Vᵉ siècle avant J.-C. par Pingala propriété 0 notamment. Puis, elle a été étudiée en Italie par le célèbre Léonard de Pise, plus connu sous le nom de Fibonacci, dans un problème sur la taille d'une population de lapins apparu dans son ouvrage *Liber abaci* propriété 0 en 1202.
Cette suite aura toujours créé un certain engouement, et donc énormément de généralisation ont été créé comme les suites de Lucas propriété 0.
Mais parmi toutes ces généralisations, beaucoup sont laissées de coté, et nous allons nous intéresser à l'une d'entre elles.

2. Définition

Comme beaucoup le savent la suite de Fibonacci est construite de manière récurrente en sommant les deux termes précédent et en prenant $F_0 = 1$ et $F_1 = 1$ (ou parfois $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$), i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n := \begin{cases} F_0 = F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n \geq 2 \end{cases}$$

Pour généraliser cette suite nous n'allons pas sommer les deux termes précédents, mais le terme précédent et un terme se trouvant p terme plus loin de ce premier terme et pour ce faire nous avons besoin que les $p + 1$ premiers termes valent 1, i.e.

Définition 1:

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, F_n^{(p)} := \begin{cases} F_j^{(p)} = 1, \text{si } \ 0 \leq j \leq p \\ F_{n+p+1}^{(p)} = F_{n+p}^{(p)} + F_n^{(p)} \text{ si } \ n > p \end{cases}$$

On nomme p comme étant l'ordre de la suite engendré et $\left(F_n^{(p)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite engendré pour un certain entier p

Définition 2: Relation de Récurrence Équivalente

Nous pouvons considérer la définition suivante comme équivalente à la définition précédente :

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, T_n^{(p)} = \begin{cases} T_j^{(p)} = 0, \text{si } 0 \leq j < p \\ T_n^{(p)} = 1, \text{si } \ n = p \\ T_{n+p+1}^{(p)} = T_{n+p}^{(p)} + T_n^{(p)} \text{ si } \ n > p \end{cases}$$

Ce qui revient à décaler les termes de la suite de p rangs.

Preuve:

Il est évident que les deux définitions sont équivalentes moyennant un décalage de p car les $p - 1$ premier termes de la seconde définitions valent 0 et le p-ième vaut 1
Donc on a bien que $\forall n \geq p, T_{n-p}^{(p)} = F_n^{(p)}$

Q.E.D.

Ainsi on peut déjà généraliser les suites pour les termes négatifs de -1 à $-p$ avec
$\forall n \in [\![-p; -1]\!], F_n^{(p)} = T_{n-p}^{(p)} = 0$

3. Exemple de suite généré

Pour $p = 0$:
Par la définition:

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n^{(0)} = \begin{cases} F_0^{(0)} = 1 \\ F_{n+1} = F_n + F_n = 2F_n \end{cases}$$

On retombe sur un suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1, donc

$$F_n^{(0)} = 2^n$$

Pour $p = 1$
On retombe par construction sur la suite de Fibonacci, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n^{(1)} = \begin{cases} F_0 = F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

ou par la formule de Binet $F_n^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+1} - \varphi'^{n+1}\right)$ avec $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\varphi' = -\frac{1}{\varphi}$

Pour $p = 2$
Par la définition:

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n^{(2)} = \begin{cases} F_0 = F_1 = F_2 = 1 \\ F_{n+3} = F_{n+2} + F_n \end{cases}$$

Ainsi on tombe sur la suite des vaches de Narayana propriété 0
D'expression fonctionnelle $F_n^{(2)} = \frac{\lambda^{n+2}}{(\lambda-\nu)(\lambda-\mu)} + \frac{\mu^{n+2}}{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)} + \frac{\nu^{n+2}}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}$ avec λ, μ et ν les racines complexes du polynôme: $x^3 - x^2 - 1$

Pour quelque valeurs de p:

p \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768
1	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987
2	1	1	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60	88	129	189
3	1	1	1	1	2	3	4	5	7	10	14	19	26	36	50	69
4	1	1	1	1	1	2	3	4	5	6	8	11	15	20	26	34
5	1	1	1	1	1	1	2	3	4	5	6	7	9	12	16	21
6	1	1	1	1	1	1	1	2	3	4	5	6	7	8	10	13
7	1	1	1	1	1	1	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	3	4	5	6	7	8
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	3	4	5	6	7

Si $p \longrightarrow +\infty$
Par la définition, les $p + 1$ premiers termes valent 1, donc on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n^{(+\infty)} = 1$$

4. Écriture fonctionnelle des suites

Proposition 1: Expression fonctionnelle de $\left(F_n^{(p)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Soit $R_1, R_2, \dots, R_{p+1}$ les racines complexes du polynômes $x^{p+1} - x^p - 1$

Alors

$$F_n^{(p)} = \sum_{i=1}^{p+1} \frac{R^{n+p}}{\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{p+1} (R_i - R_j)}$$

Preuve:

Pour démontrer cette proposition nous utiliserons la seconde définition de la suite, qui décale les termes de la suites avec p zéros [def].

Le théorème d'Alembert-Gauss nous assure que le polynôme caractéristique $x^{p+1} - x^p - 1$ possède $p+1$ racines complexes, notées: $R_1, R_2, \dots, R_{p+1}$

Ainsi nous avons que $(R_i)_{1\leq i\leq p+1}$ forme une base des suites linéaires u respectant cette relation de récurrence : $u_{n+p+1} = u_{n+p} + u_n$ propriété 0, il faut donc trouver l'écriture de $F_n^{(p)}$ dans cette base.

Donc nous avons que $F_{n-p}^{(p)} = \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i R_i^n$ avec λ_i des constantes qu'il reste à déterminer.

Pour cela, nous posons le système suivant grâce aux p premiers termes qui sont définis :

$$\begin{cases}
\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_{p+1} = F_0^{(p)} = 0 \\
\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 + \lambda_3 R_3 + \dots + \lambda_{p+1} R_{p+1} = F_1^{(p)} = 0 \\
\lambda_1 R_1^2 + \lambda_2 R_2^2 + \lambda_3 R_3^2 + \dots + \lambda_{p+1} R_{p+1}^2 = F_2^{(p)} = 0 \\
\quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
\lambda_1 R_1^{p+1} + \lambda_2 R_2^{p+1} + \lambda_3 R_3^{p+1} + \dots + \lambda_{p+1} R_{p+1}^{p+1} = F_p^{(p)} = 1
\end{cases}$$

Ce qui est équivalent à l'équation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\
R_1 & R_2 & R_3 & \dots & R_{p+1} \\
R_1^2 & R_2^2 & R_3^2 & \dots & R_{p+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
R_1^{p+1} & R_2^{p+1} & R_3^{p+1} & \dots & R_{p+1}^{p+1}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \vdots \\ \lambda_{p+1} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

On reconnaît la transposée d'une matrice de Vandermonde d'ordre $p+1$ dont les coefficients sont deux à deux distincts, dont la preuve est laissé au lecteur. Cette matrice est donc inversible, notons A cette matrice et Λ la matrice composée des coefficients que l'on cherche. On a alors :

$$\Lambda = \mathrm{A}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi ce produit indique que l'on ne s'intéresse qu'à la dernière colonne de A^{-1}.
De plus, on sait que le i-ème coefficient de la dernière ligne de l'inverse d'une matrice de Vandermonde propriété 0 (colonne ici, car on a la transposée) est égale à :

$$\frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{p+1} (R_i - R_j)}$$

Donc

$$\forall i \in [\![1; p+1]\!], \lambda_i = \frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{p+1} (R_i - R_j)}$$

Ainsi en remplacant les λ_i dans $\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i R_i^n$, on trouve bien:

$$F_{n-p}^{(p)} = \sum_{i=1}^{p+1} \frac{R_i^n}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{p+1} (R_i - R_j)}$$

Ainsi en revenant à la définition :

$$F_n^{(p)} = \sum_{i=1}^{p+1} \frac{R_i^{n+p}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{p+1} (R_i - R_j)}$$

Q.E.D.

Proposition 2: Expression fonctionnelle via le triangle de Pascal

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, F_n^{(p)} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor + 1} \binom{n-pk}{k}$$

Preuve:
On souhaite montrer par récurrance sur n et à p fixé la proposition écrite ci-dessus
Posons $P(n) : F_n^{(p)} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor + 1} \binom{n-pk}{k}$
Initialisation : Pour $n \leq p$, on a

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor + 1} \binom{n-pk}{k} = \sum_{k=0}^{1} \binom{n-pk}{k} = \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} + \underbrace{\binom{n-p}{1}}_{n-p\leq 0 \text{ donc } 0} = 1$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \in [\![0, n]\!], P(k)$ soit vraie.

$$\begin{aligned}
F_{n+1}^{(p)} &= F_{n-p}^{(p)} + F_n^{(p)} \\
&= \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 1} \binom{n-p-pk}{k} + \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{p+1} \right\rfloor + 1} \binom{n-pk}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2} \binom{n-p-p(k-1)}{k-1} + \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{p+1} \right\rfloor + 1} \binom{n-pk}{k}
\end{aligned}$$

Or $\binom{n}{-1} = 0$ donc on peut décaler l'indice de la première somme à $k = 0$:

$$F_{n+1}^{(p)} = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2} \binom{n-pk}{k-1} + \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{p+1} \right\rfloor + 1} \binom{n-pk}{k}$$

On peut alors essayer de regrouper les deux sommes :

$\left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2 = \left\lfloor \frac{n+p+2}{p+1} \right\rfloor$ et $\left\lfloor \frac{n}{p+1} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{n+p+1}{p+1} \right\rfloor$ donc $\left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2 \geq \left\lfloor \frac{n}{p+1} \right\rfloor + 1$
Et

$$\left(\left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2\right) - \left(\left\lfloor \frac{n}{p+1} \right\rfloor + 1\right) \leq \frac{1}{p+1} \leq 1$$

Donc il n'y a qu'un terme à rajouter à $\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{p+1} \right\rfloor + 1} \binom{n-pk}{k}$ pour la rentrer dans la seconde somme

Pour celà souhaite donc montrer que $\left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2 > n - p\left(\left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2\right)$: on a

$$\begin{aligned}
\frac{n-p}{p+1} - 1 < \left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor &\Leftrightarrow (p+1)\left(\left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2\right) > n - p + (p+1) \\
&\Leftrightarrow -(p+1)\left(\left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2\right) < -n - 1 \\
&\Leftrightarrow n - (p+1)\left(\left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2\right) < -1 \\
&\Leftrightarrow n - p\left(\left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2\right) < -1 + \left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2 \\
&\Leftrightarrow n - p\left(\left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2\right) < \left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2
\end{aligned}$$

Donc $\binom{n - p\left(\left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2\right)}{\left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2} = 0$, ce qui permet d'utiliser $\left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2$ comme indice commun aux deux sommes, qu'on peut donc regrouper :

$$\begin{aligned}
F_{n+1}^{(p)} &= \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2} \left(\binom{n-pk}{k-1} + \binom{n-pk}{k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-p}{p+1} + 1 \right\rfloor + 1} \binom{(n+1)-pk}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n+1}{p+1} \right\rfloor + 1} \binom{(n+1)-pk}{k}
\end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Par le principe de récurrence p-ième, $P(n) : F_n^{(p)} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor + 1} \binom{n-pk}{k}$

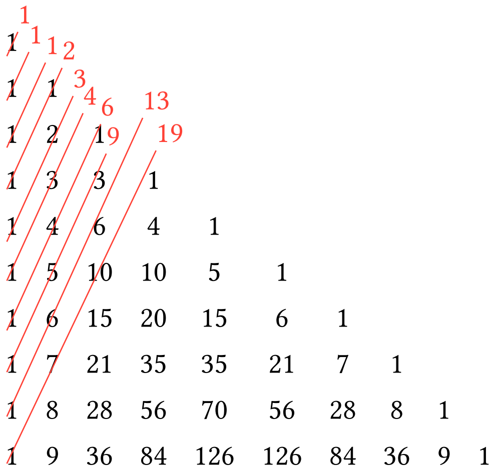
Q.E.D.

N.B: pour $p = 1$ et $p = 0$, on retombe bien sur des résultats connues a savoir:

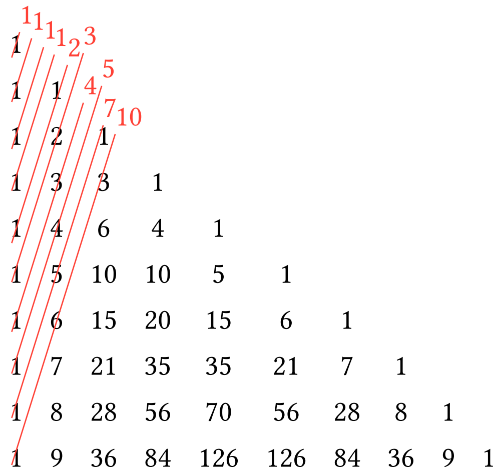
$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n^{(1)} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \binom{n-k}{k}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} = 2^n = F_n^{(0)}$$

Pour $p = 2$



Pour $p = 3$



On retrouve, comme pour Fibonacci, le faite que revient à sommer les valeurs du triangle de Pascale avec une diagonale qui est de plus en plus penché en fonction de p pour retrouver les termes de la suite d'ordre p, exemple ci-dessus

5. Sur les limites de quotients des $\left(F_n^{(p)}\right)$

Le ratio de deux termes successifs de la suite de Fibonacci a toujours été porteur de mystère et d'ésotérisme, néanmoins il en reste intéressant de s'y intéresser.
C'est pourquoi nous allons voir les propriétés de deux généralisation de la limite de quotient.

1ère généralisation:
Pour cette première généralisation, nous ne généraliserons par réellement le quotient, i.e. que nous allons nous intéresser à:

$$\forall p \in \mathbb{N}, \text{ᚠ}_p = \lim_{n \to +\infty} \frac{F_{n+1}^{(p)}}{F_n^{(p)}}$$

Nous notrons ce quotiens par ᚠ_p, que nous appellerons le p-ième nombre périodique, et nous ferons une bijection entre les 118 élément du tableau périodique des éléments et les 118 premier nombre périodique. Ainsi 2 est le nombre de l'hydrogène; $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre de l'hélium et ainsi de suite.

Ainsi par cette appelation il y a deux nombres d'or, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et ᚠ_{79}, ainsi nous nous référerons par rapport au nombre périodique pour tout le reste de l'article

Regardons ce que cela donne pour certains p:

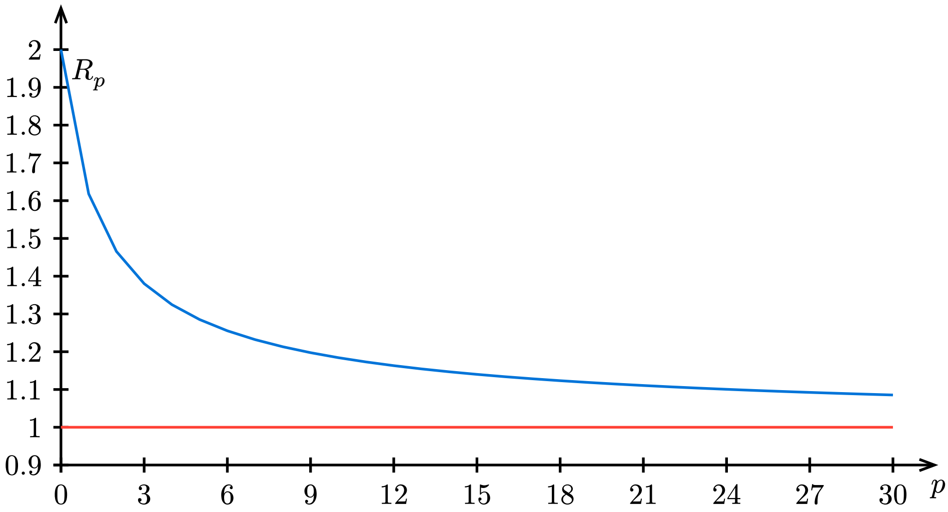
Pour $p = 0$
On sais que $\forall n \in \mathbb{N}, F_n^{(0)} = 2^n$
Ainsi

$$\frac{F_{n+1}^{(0)}}{F_n^{(0)}} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 2$$

Pour $p = 1$
Il est connue que la limite du quotient la suite de Fibonacci tend vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Pour p >1

Au delà 1, il devient difficile de calculer algébriquement le quotient, nous pouvons donc les calculer informatiquement jusqu'à $p = 30$:

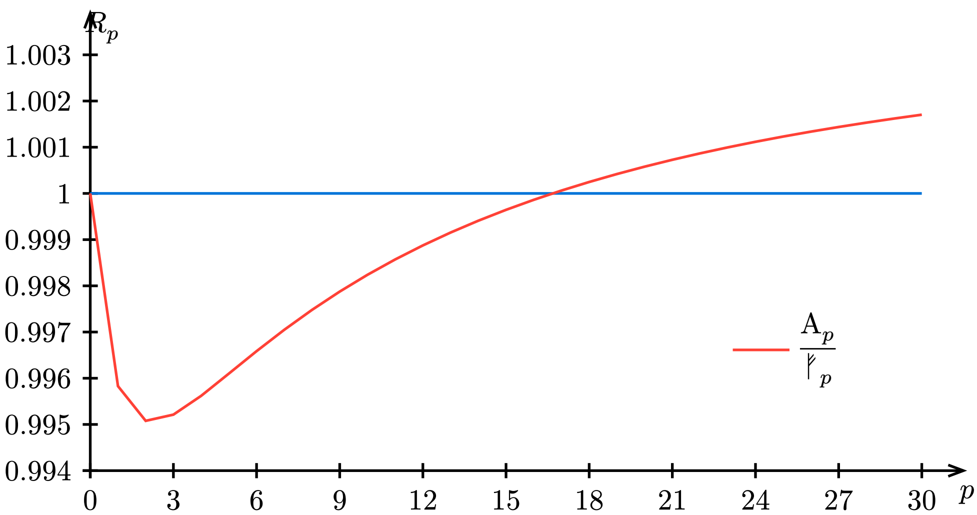


On remarque clairement que le quotient tend vers 1.

On peut définir empiriquement l'approximation suivante à partir de cette courbe :

$$\mathrm{A}_p = 1 + \frac{1}{(1+p)^k} \text{ avec } k \approx 0,710083$$

Dont voici le rapport avec ᚠ$_p$ représentative :



p	ᚠ$_p$	A_p
0	2	2
1	1,618033989	1.611
2	1,465571232	1.458
3	1,380277569	1.374
4	1,324717957	1.319
5	1,285199033	1.28
6	1,255422871	1.251
7	1,232054631	1.228
8	1,213149723	1.21
9	1,197491434	1.195
10	1,184276322	1.182
11	1,172950750	1.171
12	1,163119791	1.162
13	1,154493551	1.154
14	1,146854042	1.146
15	1,140033937	1.14
16	1,133902490	1.134
17	1,128355940	1.128
18	1,123310806	1.124
19	1,118699108	1.119
20	1,114464880	1.115
21	1,110561598	1.111
22	1,106950245	1.108
23	1,103597835	1.105
24	1,100476279	1.102
25	1,097561494	1.099
26	1,094832708	1.096
27	1,092271899	1.094
28	1,089863353	1.092
29	1,087593296	1.089
30	1,085449605	1.087

Le nombre périodique noté ᚠ_p peut s'écrire avec une sorte de fraction continue :

$$\text{ᚠ}_p = 1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\left(1+\frac{1}{\dots}\right)^p}\right)^p}$$

2ième généralisation

Pour mieux coller à la définition on peut au lieux de faire la limite du quotient entre deux termes successif, on peut faire la limite du quotient entre deux termes séparé par $p - 1$ termes noté Q_p, i.e.:

$$\forall p \in \mathbb{N}, Q_p = \lim_{n \to +\infty} \frac{F_{n+p}^{(p)}}{F_n^{(p)}}$$

Regardons également ce que cela donne pour certaine valeur de p

Pour $p = 0$

On a: $\forall n \in \mathbb{N}, F_n^{(0)} = 2^n$

Ainsi:

$$\frac{F_n^{(0)}}{F_n^{(0)}} = 1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1 = Q_0$$

Pour $p = 1$

Dans ce cas on retombe sur le même quotient étudier plus haut donc:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{F_{n+1}^{(1)}}{F_n^{(1)}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = Q_1$$

Pour p > 1

De même que pour la 1er généralisation, on a calculé le quotient jusqu'à $p = 30$ compilé également en un tableau:

p	quotient
0	1,0000
1	1,6180
2	2,1479
3	2,6297
4	3,0796
5	3,5063
6	3,9151
7	4,3093
8	4,6915
9	5,0635
10	5,4266
11	5,7820
12	6,1305
13	6,4728
14	6,8095
15	7,1411
16	7,4681
17	7,7908
18	8,1096
19	8,4247
20	8,7363
21	9,0447
22	9,3501
23	9,6527
24	9,9526
25	10,2499
26	10,5449
27	10,8375
28	11,1280
29	11,4164
30	11,7028

Proposition 3:

Rappelle: on note ᚠ_p le ratio de la première généralisation et Q_p celle de la deuxième alors on a:

$$\forall p \in \mathbb{N}, \left(\text{ᚠ}_p\right)^p = Q_p$$

Preuve:
Soit $p \in \mathbb{N}$

$$\frac{F_{n+p}^{(p)}}{F_n^{(p)}} = \prod_{k=n}^{n+p} \frac{F_{k+1}^{(p)}}{F_k^{(p)}}$$

En passant à la limite dans l'égalité et comme le quotient de deux termes successif tend vers ᚠ_p, on obtient:

$$Q_p = \prod_{k=n}^{n+p} \text{ᚠ}_p = \prod_{k=0}^{p} \text{ᚠ}_p = (\text{ᚠ}_p)^p$$

Q.E.D.

6. Propriétés diverses des suites $(F_n^{(p)})$

Proposition 4: Formule du jump

$$\forall p, n, n' \in \mathbb{N}, F_{n+n'}^{(p)} = F_n^{(p)} F_{n'}^{(p)} + \sum_{k=1}^{p} F_{n-k}^{(p)} F_{n'+k-p-1}^{(p)}$$

(NB: on admet que, $\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in [\![-p, -1]\!], F_n^{(p)} = 0$, ce qui est cohérent avec les généralisation au négatifs de chaque suite, et la formule de récurrence. On peut d'ailleurs noter que cette formule (et sa preuve) restent valides dans cette généralisation aux n négatifs)

Preuve:
Il est plus simple, pour l'objet de la preuve, de considérer la formule équivalente suivante:

$$\forall p, i \in \mathbb{N}, \forall j \in [\![0, i]\!], F_i^{(p)} = F_{i-j}^{(p)} F_j^{(p)} + \sum_{k=1}^{p} F_{i-j-k}^{(p)} F_{j+k-p-1}^{(p)}$$

(C'est la formule précédente en prenant $i = n + n'$ et $j = n'$)

Prouvons la proposition pour tout p et i par récurrence sur j

Soit $p, i \in \mathbb{N}$

Initialisation: $j = 0$

$$F_{i-0}^{(p)} F_0^{(p)} + \sum_{k=1}^{p} F_{i-0-k}^{(p)} F_{0+k-p-1}^{(p)} = F_i^{(p)} \times 1 + \sum_{k=1}^{p} F_{i-k}^{(p)} \times 0 = F_i^{(p)}$$

Récurrence: supposons que $\exists j \in \mathbb{N}, F_i^{(p)} = F_{i-j}^{(p)} F_j^{(p)} + \sum_{k=1}^{p} F_{i-j-k}^{(p)} F_{j+k-p-1}^{(p)}$ et posons un tel j. On a alors:

$$\begin{aligned}
F_i^{(p)} &= F_{i-j}^{(p)} F_j^{(p)} + \sum_{k=1}^{p} F_{i-j-k}^{(p)} F_{j+k-p-1}^{(p)} \\
&= \left(F_{i-j-1}^{(p)} + F_{i-j-p}^{(p)}\right) F_j^{(p)} + \sum_{k=0}^{p-1} F_{i-j-k-1}^{(p)} F_{j+k+1-p-1}^{(p)} \\
&= F_{i-j-1}^{(p)} F_j^{(p)} + \underbrace{F_{i-j-p}^{(p)} F_{j+p+1-p-1}^{(p)}}_{\text{peut rentrer comme terme p dans la somme}} + \sum_{k=1}^{p-1} F_{i-j-k-1}^{(p)} F_{j+k+1-p-1}^{(p)} + \underbrace{F_{i-j-1}^{(p)} F_{j-p}^{(p)}}_{\text{terme k=0 de la somme}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= F^{(p)}_{i-j-1}\left(F^{(p)}_{j} + F^{(p)}_{j-p}\right) + \sum_{k=1}^{p} F^{(p)}_{i-j-k-1} F^{(p)}_{j+k+1-p-1} \\
&= F^{(p)}_{i-(j+1)} F^{(p)}_{j+1} + \sum_{k=1}^{p} F^{(p)}_{i-(j+1)-k} F^{(p)}_{(j+1)+k-p-1}
\end{aligned}
$$

On a alors prouvé que la formule est valable pour $j + 1$, donc, par récurrence sur j (et comme cela est vrai pour tout i et pour tout p):

$$
\forall p, i \in \mathbb{N}, \forall j \in [\![0, i]\!], F^{(p)}_{i} = F^{(p)}_{i-j} F^{(p)}_{j} + \sum_{k=1}^{p} F^{(p)}_{i-j-k} F^{(p)}_{j+k-p-1}
$$

Q.E.D.

Application

Cette formule, lorsque bien utilisée, permet de calculer en complexitée tempoerelle $O(p^2 * \log(n))$ le terme n de la suite $F(p)$, en ne manipulant que des entiers, et sans connaiscance préalable de la suite (par exemple les racines du polynôme caractéristique) (voir algo_jump.c)

Proposition 5: Écriture Matricielle

On définis $\forall n, p \in \mathbb{N}, f^{(p)}_{n} = \begin{pmatrix} F^{(p)}_{n} \\ F^{(p)}_{n+1} \\ \vdots \\ F^{(p)}_{n+p} \end{pmatrix}$, alors :

$$
\forall n, p \in \mathbb{N}, f^{(p)}_{n+1} = \Lambda^{n} f^{(p)}_{0}
$$

$$
\text{avec } f^{(p)}_{0} = \begin{pmatrix} F^{(p)}_{0} \\ F^{(p)}_{1} \\ \vdots \\ F^{(p)}_{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & & \mathrm{id}_{p} & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Preuve:
La relation de récurrence induit la relation suivante :

$$
\forall p, n \in \mathbb{N}, f^{(p)}_{n+1} = \Lambda f^{(p)}_{n}
$$

avec Λ la matrice compagnons du polynôme caractéristique de la suite, donné plus haut, alors :

$$
\forall n, p \in \mathbb{N}, f^{(p)}_{n+1} = \Lambda f^{(p)}_{n} = \Lambda^{2} f^{(p)}_{n-1} = \cdots = \Lambda^{n} f^{(p)}_{0}
$$

Q.E.D.

Proposition 6: Séries Génératrices

Les séries génératrices de $\left(F^{(p)}_{n}\right)$, noté σ_{p} et de rayon de convergence ρ_{p}, est donné par :

$$
\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \left[-\rho_{p}; \rho_{p}\right], \sigma_{p}(x) = \frac{1}{1 - x - x^{p+1}}
$$

De même, les séries génératrices de $\left(T^{(p)}_{n}\right)$, noté τ_{p} et de rayon de convergence ᚱ_{p}, est donné par :

$$
\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \left[-\text{ᚱ}_{p}; \text{ᚱ}_{p}\right], \tau_{p}(x) = \frac{x^{p}}{1 - x - x^{p+1}}
$$

Preuve:
Ici on ne s'occuperas que de la preuve pour $\left(F_n^{(p)}\right)$, la seconde est laissé au loisir du lecteur :
Ainsi, soit $p \in \mathbb{N}$, $\rho_p \in \overline{\mathbb{R}_+}$ et $x \in \left[-\rho_p ; \rho_p\right]$, alors :

$$\begin{aligned}
\sigma_p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n^{(p)} x^p &= \sum_{n=0}^{p} \underbrace{F_n^{(p)}}_{=1} x^n + \sum_{n=p+1}^{+\infty} F_n^{(p)} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{p} x^n + \sum_{n=p+1}^{+\infty} \left(F_{n-p-1}^{(p)} + F_{n-1}^{(p)}\right) x^n \\
&= \frac{1 - x^{p+1}}{1-x} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} F_n^{(p)} x^{n+p+1}}_{= x^{p+1} \sigma_p(x)} + \sum_{n=p}^{+\infty} F_n^{(p)} x^{n+1} \\
&= \frac{1 - x^{p+1}}{1-x} + x^{p+1} \sigma_p(x) + x \left(\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} F_n^{(p)} x^n}_{= \sigma_p(x)} - \sum_{n=0}^{p-1} \underbrace{F_n^{(p)}}_{=1} x^n \right) \\
&= \frac{1 - x^{p+1}}{1-x} + x^{p+1} \sigma_p(x) + x \sigma_p(x) - x \frac{1 - x^p}{1-x}
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\sigma_p(x)\left(1 - x - x^{p+1}\right) = \frac{1 - \cancel{x^{p+1}} - x + \cancel{x^{p+1}}}{1-x} = \frac{\cancel{1-x}}{\cancel{1-x}} = 1$$

Donc

$$\sigma_p(x) = \frac{1}{1 - x - x^{p+1}}$$

Q.E.D.

Remarque :
Pour $p \longrightarrow +\infty$, on a, pour $|x| < \min\left(1, \rho_p\right)$, $\sigma_p(x) \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$,
et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n^{(p)} \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 1$, ce qui colle avec la convention que $F_n^{(+\infty)} = 1$

7. Étude préliminaire de $\sum_{i_1=0}^{n-1} \sum_{i_2=0}^{i_1-1} \cdots \sum_{i_k=0}^{i_{k-1}-1} 1$

Pour les besoins de l'étude des $\left(F_n^{(p)}\right)$, nous avons besoins d'étudier et de battre un formule explicite de la somme suivante $\sum_{i_1=0}^{n-1} \sum_{i_2=0}^{i_1-1} \cdots \sum_{i_k=0}^{i_{k-1}-1} 1$
Pour celà nous définissons les polynômes suivant :

Définition 3: Temporaire :
On pose provisoirement avant de pouvoir y définir plus proprement :

$$\forall k, n \in \mathbb{N}, H_k(n) = \sum_{i_1=0}^{n-1} \sum_{i_2=0}^{i_1-1} \cdots \sum_{i_k=0}^{i_{k-1}-1} 1$$

En remarquant que $\sum_{i_2=0}^{i_1-1} \cdots \sum_{i_k=0}^{i_{k-1}-1} 1 = H_{k-1}(i)$
Nous avons que H_k suit la relation de récurrence suivante :

Proposition 7:

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, H_k(n) = \sum_{i=0}^{n-1} H_{k-1}(i)$$

avec $\forall n \in \mathbb{N}, H_0(n) = 1$

Proposition 8:

$$\forall k, n \in \mathbb{N}, H_k(n) = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (n - i)$$

Preuve:
Pour prouver la proposition précédente, nous nous appuirons sur les mathématiques des différence finis, notamment celle présente dans *Finite Calculus: A Tutorial for Solving Nasty Sums* de David Gleich propriété 0
En reprenant les notations de David Gleich, nous avons $\forall k, n \in \mathbb{N}, H_k(n) = \frac{1}{k!} n^{\underline{k}}$
Ainsi montrons par récurrence sur k la propriété précédente :

- **Initialisation :**

pour $k = 0$: $\forall n \in \mathbb{N}, H_0(n) = 1 = \frac{1}{0!} \prod_{i=0}^{-1} (n - i)$

- **Hérédité :** Soit $k \in \mathbb{N}$tel que$\forall n \in \mathbb{N}, H_k(n) = \frac{1}{k!} n^{\underline{k}}$, alors

soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} H_{k+1}(n) &= \sum_{i=0}^{n-1} H_k(i) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{k!} i^{\underline{k}} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-1} i^{\underline{k}} \end{aligned}$$

Or par théorème de l'analyse discrète : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} i^{\underline{k}} = \sum_{0}^{n} i^{\underline{k}} \delta i$ et $\displaystyle\sum_{0}^{n} i^{\underline{k}} \delta i = \frac{1}{k+1} n^{\underline{k+1}}$
Ainsi :

$$H_k(n) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-1} i^{\underline{k}} = \frac{1}{k!} \frac{1}{k+1} n^{\underline{k+1}} = \frac{1}{(k+1)!} n^{\underline{k+1}}$$

Donc par le principe de récurrence simple on a bien que :

$$\forall k, n \in \mathbb{N}, H_k(n) = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (n - i)$$

Nous définirons maintenant H_k par la propriété précédente car plus générale, ainsi :

Q.E.D.

Définition 4:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, H_k(x) = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (x - i)$$

Donc nous remarquons que H_k est un polynôme de degré $\deg H_k = k$; de coefficient dominant $\frac{1}{k!}$ et ayant les entiers $[\![0; k-1]\!]$ comme racines pour $k > 0$

On s'intéressera également au polynôme suivant :

Définition 5: Temporaire

De même on définis provisoirement

$$\forall k, n \in \mathbb{N}, S_k(n) = \sum_{i_1=0}^{n} \sum_{i_2=0}^{i_1} \cdots \sum_{i_k=0}^{i_{k-1}} 1$$

De la même manière que pour H_k on peut en déduire la relation de récurrence suivante :

Proposition 9:

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, S_{k+1}(n) = \sum_{i=0}^{n} S_k(i)$$

avec $\forall n \in \mathbb{N}, S_0(n) = 1$

Proposition 10:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \geq k-1, S_k(n-k+1) = H_k(n)$$

Preuve:

Montrons la relation précédente par récurrence sur k :

- **Initialisation :**

On à bien que pour $k = 0$: $\forall n \geq -1, S_0(n+1) = 1 = H_0(n)$

- **Hérédité :** Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in k-1, S_k(n-k+1) = H_k(n)$, alors :

Soit $n \geq k-1$

$$\begin{aligned} S_{k+1}(n-k) &= \sum_{i=1}^{n-k} S_k(i) = \sum_{i=1}^{n-k} H_k(i+k-1) \\ &= \sum_{i=k}^{n-1} H_k(i) = \sum_{i=0}^{n-1} H_k(i) - \sum_{i=0}^{k-1} H_k(i) \\ &= H_{k+1}(n) - H_{k+1}(k) \end{aligned}$$

Or $k \in [\![0; k+1]\!]$ et est donc une racine de H_{k+1}, donc $H_{k+1}(k) = 0$, ainsi :

$$\forall n \geq k, S_{k+1}(n-(k+1)+1) = H_{k+1}(n)$$

Donc par principe de récurrence simple :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \geq k-1, S_k(n-k+1) = H_k(n)$$

Q.E.D.

Proposition 11:

$$\forall k, n \in \mathbb{N}, S_k(n) = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (n+i)$$

Preuve:
celle-ci est immédiate par propriété 8, en effet :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, S_k(x) = H_k(x+k-1) = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (x+k-1-i) = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (x+i)$$

Q.E.D.

De même on redéfinis S_k par cette proposition :

Définition 6:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, S_k = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (x+i)$$

Remarque :
la propriété 8 reste vrais sur $\mathbb{R}$, ce même avec la redéfinition, car l'on n'utilise aucune hypotèse sur les $n \in \mathbb{N}$

Proposition 12:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall N \in \mathbb{N}, H_k(n) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i^k n^i$$

avec

$$\forall k, i \in \mathbb{N}, \alpha_i^k = \begin{cases} \alpha_0^k = \delta_0^k \text{ si i } = 0 \\ \alpha_i^k = \sum_{j=i}^{k} \binom{j}{i} \frac{\alpha_{j-1}^{k-1}}{j} B_{j-i} \end{cases}$$

avec les (B_i) les nombre de bernouilli tel que $B_1 = \frac{1}{2}$

Preuve:
Montrons par récurrance sur k la propriété précédente :
- **Initialisation :**

pour $k = 0$: soit $n \in \mathbb{N}$, On à $H_0(n) = 1$ et $\sum_{i=0}^{0} \alpha_i^0 n^i = \underbrace{\alpha_0^0}_{=1} n^0 = 1$

On à donc bien que $\forall n \in \mathbb{N}, H_0(n) = \sum_{i=0}^{0} \alpha_i^0 n^i$

- **Hérédité :** Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, H_k(n) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i^k n^i$, alors

Soit $n \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} H_{k+1}(x) &= \sum_{i=1}^{n} H_k(i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{k} \alpha_j^k i^j = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j^k \sum_{i=1}^{n} i^j \\ &= \sum_{j=0}^{k} \frac{\alpha_j^k}{j+1} \sum_{i=0}^{j} \binom{j+1}{i} B_i n^{j-i+1} \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{j} \binom{j+1}{i} \frac{\alpha_j^k}{j+1} B_i n^{j-i+1}$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{j} \binom{j+1}{j-i} \frac{\alpha_j^k}{j+1} B_{j-i} n^{i+1} \text{ avec } i\text{'} = j - i$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=i}^{k} \binom{j+1}{j-i} \frac{\alpha_j^k}{j+1} B_{j-i} n^{i+1}$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=i}^{k} \binom{j+1}{i+1} \frac{\alpha_j^k}{j+1} B_{j-i} n^{i+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{j=i-1}^{k} \binom{j+1}{i} \frac{\alpha_j^k}{j+1} B_{j+1-i} n^{i}$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} \underbrace{\sum_{j=i}^{k+1} \binom{j}{i} \frac{\alpha_{j-1}^k}{j} B_{j-i}}_{=\alpha_i^{k+1}} n^{i} = \sum_{i=0}^{k+1} \alpha_i^{k+1} n^i$$

Ainsi par le principe de récurrance simple :

$$\forall k, n \in \mathbb{N}, H_k(n) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i^k n^i$$

Q.E.D.

8. Comportement de $(F_n^{(p)})$ sur $\mathbb{N}$

Proposition 13:

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in [\![0; p]\!], F_n^{(p)} = 1$$

Preuve:
Ceci est immédiat via la définition

Proposition 14:

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in [\![p; 2p+1]\!], F_n^{(p)} = 1 + n - p$$

i.e. que pour n compris entre p et $2p$, $F_n^{(p)}$ se comporte comme une suite arithmétique de raison 1 et de premier termes $1 - p$

Preuve:
Soient $p \in \mathbb{N}$ et $n \in [\![p+1; 2p+1]\!]$
Alors comme $n > p$ on peut appliquer la formule de récurrence,
Ainsi:

$$F_n^{(p)} = F_{n-1}^{(p)} + F_{n-p-1}^{(p)}$$

Or $p + 1 \leq n \leq 2p + 1$ donc $0 \leq n - p - 1 \leq p$ donc $F_{n-p-1}^{(p)} = 1$
Donc:

$$F_n^{(p)} = F_{n-1}^{(p)} + 1$$

Donc $\left(F_n^{(p)}\right)_{p+1\leq n\leq 2p+1}$ est suite arithmétique de raison 1
et de premier termes $F_{p+1}^{(n)} = F_p^{(p)} + F_0^{(p)} = 2$
Donc

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall [\![p+1; 2p+1]\!], F_n^{(p)} = 1 + n - p$$

De plus comme $F_p^{(p)} = 1 = 1 + p - p$, alors $F_p^{(p)}$ vérifie également la propriété, on peut donc l'inclure $n = p$ dans l'intervale.
Ainsi on à bien :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in [\![p; 2p+1]\!], F_n^{(p)} = 1 + n - p$$

Q.E.D.

Définition 7:

On définie les polynômes $P_k^{(p)} \in \mathbb{R}[X]$ par :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, P_k^{(p)}(x) = H_k(x - kp) + \sum_{i=0}^{k-1} P_i^{(p)}((i+1)p) H_{k-1-i}(x - kp)$$

Attention : ici la notation $P^{(p)}$ ne signifie pas la dérivé p-ième, mais est la dérivation logique pour indiquer le paramètre p des suites

Remarque : pour $k = 0$, $P_k^{(p)} = P_0^{(p)}$ est parfaitement définis, en effet
$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, P_0^{(p)}(x) = \underbrace{H_0(x)}_{=1} + \underbrace{\sum_{i=0}^{-1} P_i^{(p)}((i+1)p) H_{-1-i}(x)}_{=0} = 1$

Proposition 15:

$$\forall p, k, n \in \mathbb{N}, P_k^{(p)}(n) = \begin{cases} P_0^{(p)}(n) = 1 & \text{si } k = 0 \\ P_{k-1}^{(p)}(kp) + \sum_{i=1}^{n-kp} P_{k-1}(n - p - i) & \text{sinon} \end{cases}$$

Preuve:
pour $k = 0$: $\forall p, n \in \mathbb{N}, P_0^{(p)}(n) = \frac{1}{0!} \prod_{i=0}^{-1} (n - i) = 1$
pour $k > 0$:
Soit $p, n \in \mathbb{N}$, alors
Montrons par récurrence forte la relation de récurrance de le proposition précédente, ainsi :

- **Initialisation :**

$P_1^{(p)}(n) = \underbrace{H_1(n-p)}_{=n-p} + \underbrace{P_0^{(p)}(p) H_0(n-p)}_{=1} = n - p + 1$
Et
$\underbrace{P_0^{(p)}}_{=1}(p) + \sum_{i=1}^{n-p} \underbrace{P_0^{(p)}(n - p - i)}_{=1} = 1 + \sum_{i=1}^{n-p} 1 = 1 + n - p$

- **Hérédité :** Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\forall \kappa \leq k, P_\kappa^{(p)}(n) = P_{\kappa-1}^{(p)}(\kappa p) + \sum_{i=1}^{n-\kappa p} P_{\kappa-1}^{(p)}(n - p - i)$, alors :

$$\begin{aligned} P_{k+1}^{(p)}(n) &= H_{k+1}(n - (k+1)p) + \sum_{j=0}^{k} P_j^{(p)}((j+1)p) H_{k-j}(n - (k+1)p) \\ &= \sum_{i_1=0}^{n-(k+1)p-1} \cdots \sum_{i_{k+1}=0}^{i_k - 1} 1 + \sum_{j=0}^{k} P_{k-j}^{(p)}((k - j + 1)p) H_j(n - (k+1)p) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i_1=0}^{n-(k+1)p-1} \cdots \sum_{i_{k+1}=0}^{i_k-1} \underbrace{1}_{=P_0^{(p)}(i_{k+1})} + \sum_{j=0}^{k} P_{k-j}^{(p)}((k-j+1)p) \sum_{i_1=0}^{n-(k+1)p} \cdots \sum_{i_j=0}^{i_{j-1}-1} 1$$

$$= \sum_{i_1=0}^{n-(k+1)p-1} \cdots \sum_{i_{k+1}=0}^{i_k-1} P_0^{(p)}(i_{k+1}) + \sum_{j=0}^{k} \sum_{i_1=0}^{n-(k+1)p} \cdots \sum_{i_j=0}^{i_{j-1}-1} P_{k-j}^{(p)}((k-j+1)p)$$

$$= \sum_{i_1=0}^{n-(k+1)p-1} \cdots \sum_{i_k=0}^{i_{k-1}-1} \left(\underbrace{P_0^{(p)}(p) + \sum_{i_{k+1}=0}^{i_k-1} P_0^{(p)}(i_{k+1})}_{=P_1^{(p)}(i_k+p)} \right) + \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i_1=0}^{n-(k+1)p} \cdots \sum_{i_j=0}^{i_{j-1}-1} P_{k-j}^{(p)}((k-j+1)p)$$

$$= \sum_{i_1=0}^{n-(k+1)p-1} \cdots \sum_{i_k=0}^{i_{k-1}-1} \left(P_1^{(p)}(i_k+p) \right) + \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i_1=0}^{n-(k+1)p} \cdots \sum_{i_j=0}^{i_{j-1}-1} P_{k-j}^{(p)}((k-j+1)p)$$

$$= \sum_{i_1=0}^{n-(k+1)p-1} \cdots \sum_{i_{k-1}=0}^{i_{k-2}-1} \underbrace{(P_1^{(p)}(2p) + \sum_{i_k=0}^{i_{k-1}-1} \left(P_1^{(p)}(i_k+p) \right)}_{=P_2^{(p)}(i_{k-1}+2p)} + \sum_{j=0}^{k-2} \sum_{i_1=0}^{n-(k+1)p} \cdots \sum_{i_j=0}^{i_{j-1}-1} P_{k-j}^{(p)}((k-j+1)p)$$

$$= \sum_{i_1=0}^{n-(k+1)p-1} \cdots \sum_{i_{k-1}=0}^{i_{k-2}-1} P_2^{(p)}(i_{k-1}+2p) + \sum_{j=0}^{k-2} \sum_{i_1=0}^{n-(k+1)p} \cdots \sum_{i_j=0}^{i_{j-1}-1} P_{k-j}^{(p)}((k-j+1)p)$$

$\vdots$

$\vdots$

$\vdots$

$$= \sum_{i_1=0}^{n-(k+1)p-1} \sum_{i_2=0}^{i_1-1} \sum_{i_3=0}^{i_2-1} P_{k-2}^{(p)}(i_3+(k-2)p) + \sum_{j=0}^{2} \sum_{i_1=0}^{n-(k+1)p} \cdots \sum_{i_j=0}^{i_{j-1}-1} P_{k-j}^{(p)}((k-j+1)p)$$

$$= \sum_{i_1=0}^{n-(k+1)p-1} \sum_{i_2=0}^{i_1-1} \left(\underbrace{P_{k-2}^{(p)}((k-1)p) + \sum_{i_3=0}^{i_2-1} P_{k-2}^{(p)}(i_3+(k-2)p)}_{=P_{k-1}^{(p)}(i_2+(k-1)p)} \right) + \sum_{j=0}^{1} \sum_{i_1=0}^{n-(k+1)p} \cdots \sum_{i_j=0}^{i_{j-1}-1} P_{k-j}^{(p)}((k-j+1)p)$$

$$= \sum_{i_1=0}^{n-(k+1)p-1} \sum_{i_2=0}^{i_1-1} P_{k-1}^{(p)}(i_2+(k-1)p) + \sum_{j=0}^{1} \sum_{i_1=0}^{n-(k+1)p} \cdots \sum_{i_j=0}^{i_{j-1}-1} P_{k-j}^{(p)}((k-j+1)p)$$

$$= \sum_{i_1=0}^{n-(k+1)p-1} \left(\underbrace{P_{k-1}^{(p)}(kp) + \sum_{i_2=0}^{i_1-1} P_{k-1}^{(p)}(i_2+(k-1)p)}_{=P_k^{(p)}(i_1-kp)} \right) + \underbrace{\sum_{j=0}^{0} \sum_{i_1=0}^{n-(k+1)p} \cdots \sum_{i_j=0}^{i_{j-1}-1} P_{k-j}^{(p)}((k-j+1)p)}_{=P_k^{(p)}((k+1)p)}$$

$$= P_k^{(p)}((k+1)p) + \sum_{i=0}^{n-(k+1)p-1} P_k^{(p)}(i-kp)$$

$$= P_k^{(p)}((k+1)p) + \sum_{i=0}^{n-(k+1)p-1} P_k^{(p)}(n-p-i-1)$$

$$= P_k^{(p)}((k+1)p) + \sum_{i=1}^{n-(k+1)p} P_k^{(p)}(n-p-i)$$

Ainsi par le principe de récurrance forte :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}^*, P_k^{(p)}(n) = P_{k-1}^{(p)}(kp) + \sum_{i=1}^{n-kp} P_{k-1}(n-p-i)$$

Q.E.D.

Proposition 16:
On peut généraliser les deux propositions précédentes grâce au chapitre précédente :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in [\![kp,(k+1)p]\!], F_n^{(p)} = P_k^{(p)}(n)$$

Preuve:
Montrons la proposition précédente par récurrence simple sur k :
Soit $p \in \mathbb{N}^*$,alors
- **Initialisation :**

pour $k=0$, soit $n \in [\![0,p]\!]$, alors $F_n^{(p)} = 1 = P_0^{(p)}(n)$

- **Hérédité :** Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in [\![kp;(k+1)p]\!], F_n^{(p)} = P_k^{(p)}(n)$, alors

Soit $n \in [\![(k+1)p;(k+2)p]\!]$,

$$\begin{aligned} F_n^{(p)} &= F_{n-1}^{(p)} + F_{n-p-1}^{(p)} \\ &= F_{n-2}^{(p)} + F_{n-p-2}^{(p)} \\ &\vdots \text{ En appliquant } n-(k+1)p \text{ fois la relation de récurrence} \\ &= F_{(k+1)p}^{(p)} + \sum_{i=1}^{n-kp} F_{n-p-i}^{(p)} \end{aligned}$$

Or $1 \leq i \leq n-kp$ donc $n-p-1 \geq n-p-i \geq kp$ sauf que $n \leq (k+2)p$ donc $(k+1)p > (k+1)p-1 \geq n-p-i \geq kp$
et donc $n-p-i \in [\![kp;(k+1)p]\!]$ de même $(k+1)p \in [\![kp;(k+1)p]\!]$
Ainsi $F_{(k+1)p}^{(p)} = P_k^{(p)}((k+1)p)$ et $\forall i \in [\![1;n-kp]\!], F_{n-p-i}^{(p)} = P_k^{(p)}(n-p-i)$
Donc

$$F_n^{(p)} = F_{(k+1)p}^{(p)} + \sum_{i=1}^{n-kp} F_{n-p-i}^{(p)} = \underbrace{P_k^{(p)}((k+1)p) + \sum_{i=1}^{n-kp} P_k^{(p)}(n-p-i)}_{=P_{k+1}^{(p)}(n), \text{ propriété 13}}$$

$$= P_{k+1}^{(p)}(n)3$$

Donc par le principe de récurrance simple :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in [\![kp;(k+1)p]\!], F_n^{(p)} = P_k^{(p)}(n)$$

Q.E.D.

Proposition 17:

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, F_n^{(p)} = P_{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor}^{(p)}(n)$$

Preuve:
Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$
Selon la propriété 14, pour $n \in [\![kp, (k+1)p]\!], F_n^{(p)} = P_k^{(p)}(n)$,
donc $n \in [\![kp, (k+1)p - 1]\!], F_n^{(p)} = P_k^{(p)}(n)$,
alors soit $n \in [\![kp, (k+1)p - 1]\!]$, ainsi :

$$kp \leq n < (k+1)p \Leftrightarrow k \leq \frac{n}{p} < k + 1 \Leftrightarrow k = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$$

Donc sur $[\![kp; (k+1)p - 1]\!], F_n^{(p)} = P_{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor}^{(p)}(n)$
Or pour $k \in \mathbb{N}, [\![kp; (k+1)p - 1]\!]$ forme une partition de $\mathbb{N}$, ainsi :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, F_n^{(p)} = P_{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor}^{(p)}(n)$$

Q.E.D.

Remarque :
Cette proposition nous permets de généralisé la suite pour des p réel positif, de même que l'on peut étendre leur domaine de définition sur $\mathbb{R}_+$, dont on en étudiras certaine de ces propriétés dans le chapitre suivant

9. Dessin créé par $\left(F_n^{(p)}\right)$ modulo 2

Si l'on prend sur une feuille à carreaux et que l'on mets dans la case d'indice n, p, le termes $F_n^{(p)}$ modulo 2, et que l'on colorise la dite case en noir ou en blanc si sa valeur est 1 ou 0, comme ci-dessous:

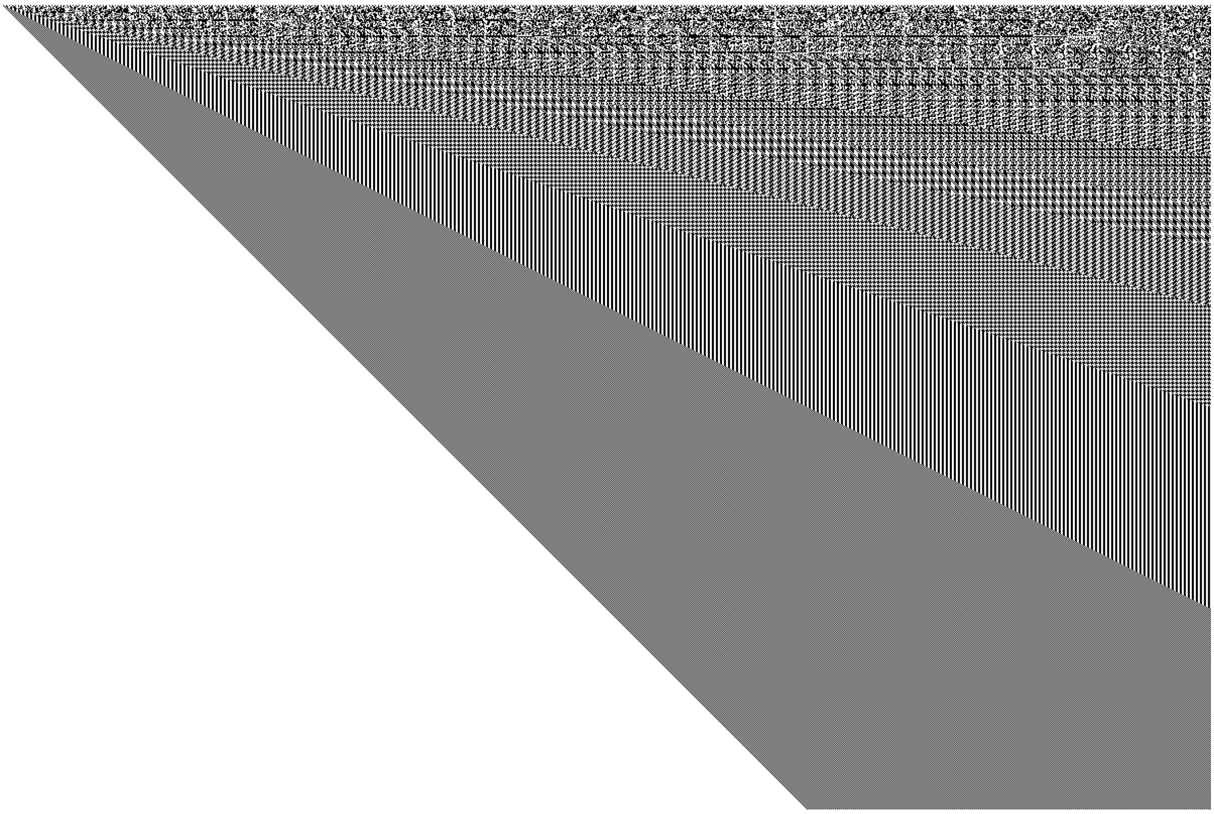


Figure 1: dessin réalisé pour un nombre petit de cases

On remarque en premier lieu que des motifs apparaissent entre les droites d'équations : $y = -\frac{x}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui s'explique par le fait que sur une portion chaque suites vaut un certain polynôme

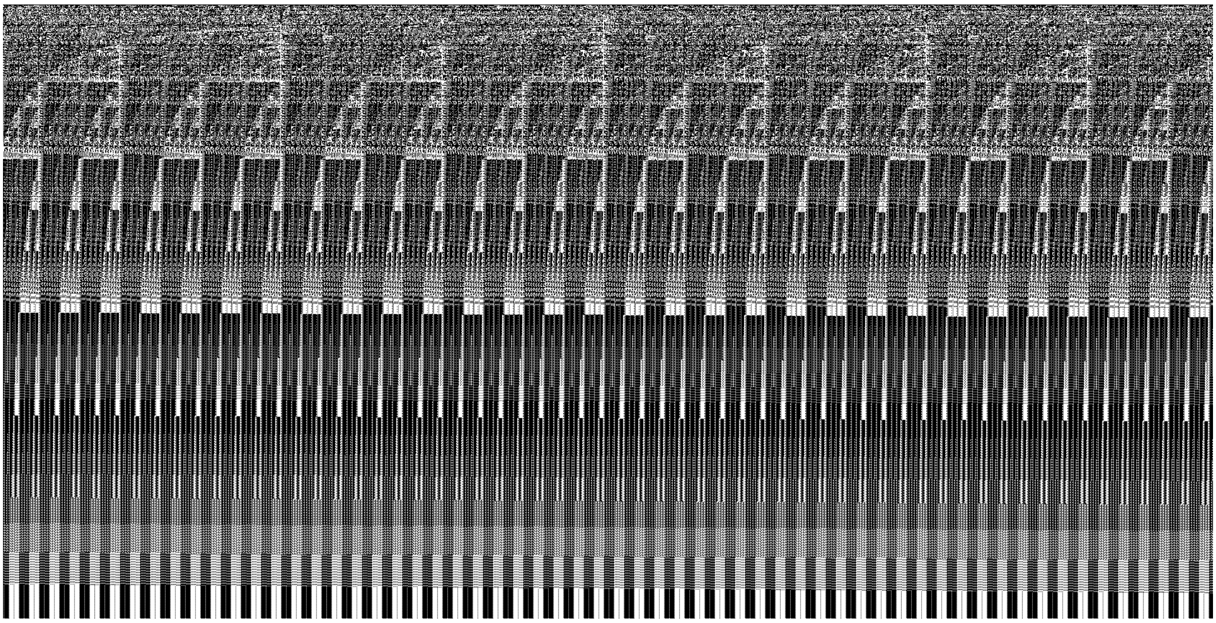


Figure 2: Motifs obtenus pour $n \geq 10$ millions et p entre 0 et 10 mille

On voit ici, un triangle de Sierpiński étiré de plus en plus vers le bas et arrondie vers des valeurs bien précises.
On peut supposer que le triangle apparaît grâce aux liens entre les suites de Fibonacci d'ordre p et le triangle de Pascal, qui fait également apparaître cette fractale par construction similaire.

10. Étude de F

Définition 8:

Nous définissons la généralisation pour p et n réel positif des $\left(F_n^{(p)}\right)$ par :

$$F : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ (p, x) \qquad \mapsto P_{\lfloor \frac{x}{p} \rfloor}^{(p)}(x) \end{cases}$$

References