

Gaspar Daguet  
 Julien Thillard  
 Louwen Fricout  
 Albin Chaboissier

# Changement du temps de gestation des lapins de Fibonacci

## Table des Matières

1. Introduction .....	2
2. Définition .....	2
3. Exemple de suite générée .....	3
4. Écriture fonctionnelle des suites .....	4
5. Sur les limites de quotients des $(F_n^{(p)})$ .....	8
6. Propriétés diverses des suites $(F_n^{(p)})$ .....	11
7. Étude préliminaire de $\sum_{i_1=0}^{n-1} \sum_{i_2=0}^{i_1-1} \cdots \sum_{i_k=0}^{i_{k-1}-1} 1$ .....	13
8. Comportement à de $(F_n^{(p)})$ sur $\mathbb{N}$ .....	17
9. Dessin créé par $(F_n^{(p)})$ modulo 2 .....	22
10. Étude de $F$ .....	23
Références .....	23

## 1. Introduction

La suite de Fibonacci a tout d'abord été étudiée en Inde via un problème de combinatoire dans des sortes de poèmes au V<sup>e</sup> siècle avant J.-C. par Pingala [1] notamment. Puis, elle a été étudiée en Italie par le célèbre Léonard de Pise, plus connu sous le nom de Fibonacci, dans un problème sur la taille d'une population de lapins apparu dans son ouvrage *Liber abaci* [2] en 1202.

Cette suite aura toujours créé un certain engouement, et donc énormément de généralisation ont été créées comme les suites de Lucas [3].

Mais parmi toutes ces généralisations, beaucoup sont laissées de côté, et nous allons nous intéresser à l'une d'entre elles.

## 2. Définition

Comme beaucoup le savent la suite de Fibonacci est construite de manière récurrente en sommant les deux termes précédents et en prenant  $F_0 = 1$  et  $F_1 = 1$  (ou parfois  $F_0 = 0$  et  $F_1 = 1$ ), i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n := \begin{cases} F_0 = F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n \geq 2 \end{cases}$$

Pour généraliser cette suite nous n'allons pas sommer les deux termes précédents, mais le terme précédent et un terme se trouvant  $p$  terme plus loin de ce premier terme et pour ce faire nous avons besoin que les  $p + 1$  premiers termes valent 1, i.e.

### Définition 1:

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, F_n^{(p)} := \begin{cases} F_j^{(p)} = 1, \text{ si } 0 \leq j \leq p \\ F_{n+p+1}^{(p)} = F_{n+p}^{(p)} + F_n^{(p)} \text{ si } n > p \end{cases}$$

On nomme  $p$  comme étant l'ordre de la suite engendré et  $\left(F_n^{(p)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite engendré pour un certain entier  $p$

### Définition 2: Relation de Récurrence Équivalente

Nous pouvons considérer la définition suivante comme équivalente à la définition précédente :

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, T_n^{(p)} = \begin{cases} T_j^{(p)} = 0, \text{ si } 0 \leq j < p \\ T_n^{(p)} = 1, \text{ si } n = p \\ T_{n+p+1}^{(p)} = T_{n+p}^{(p)} + T_n^{(p)} \text{ si } n > p \end{cases}$$

Ce qui revient à décaler les termes de la suite de  $p$  rangs.

### Preuve:

Il est évident que les deux définitions sont équivalentes moyennant un décalage de  $p$  car les  $p - 1$  premiers termes de la seconde définitions valent 0 et le  $p$ -ième vaut 1

Donc on a bien que  $\forall n \geq p, T_{n-p}^{(p)} = F_n^{(p)}$

**Q.E.D.**

Ainsi on peut déjà généraliser les suites pour les termes négatifs de  $-1$  à  $-p$  avec

$$\forall n \in \llbracket -p; -1 \rrbracket, F_n^{(p)} = T_{n-p}^{(p)} = 0$$

### 3. Exemple de suite générée

**Pour  $p = 0$ :**

Par la définition:

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n^{(0)} = \begin{cases} F_0^{(0)} = 1 \\ F_{n+1} = F_n + F_n = 2F_n \end{cases}$$

On retombe sur une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1, donc

$$F_n^{(0)} = 2^n$$

**Pour  $p = 1$**

On retombe par construction sur la suite de Fibonacci, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n^{(1)} = \begin{cases} F_0 = F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

ou par la formule de Binet  $F_n^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} - \varphi'^{n+1})$  avec  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  et  $\varphi' = -\frac{1}{\varphi}$

**Pour  $p = 2$**

Par la définition:

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n^{(2)} = \begin{cases} F_0 = F_1 = F_2 = 1 \\ F_{n+3} = F_{n+2} + F_n \end{cases}$$

Ainsi on tombe sur la suite des vaches de Narayana [4]

D'expression fonctionnelle  $F_n^{(2)} = \frac{\lambda^{n+2}}{(\lambda-\nu)(\lambda-\mu)} + \frac{\mu^{n+2}}{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)} + \frac{\nu^{n+2}}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}$  avec  $\lambda, \mu$  et  $\nu$  les racines complexes du polynôme:  $x^3 - x^2 - 1$

**Pour quelques valeurs de  $p$ :**

p \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768
1	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987
2	1	1	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60	88	129	189
3	1	1	1	1	2	3	4	5	7	10	14	19	26	36	50	69
4	1	1	1	1	1	2	3	4	5	6	8	11	15	20	26	34
5	1	1	1	1	1	1	2	3	4	5	6	7	9	12	16	21
6	1	1	1	1	1	1	1	2	3	4	5	6	7	8	10	13
7	1	1	1	1	1	1	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	3	4	5	6	7	8
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	3	4	5	6	7

**Si  $p \rightarrow +\infty$**

Par la définition, les  $p + 1$  premiers termes valent 1, donc on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n^{(+\infty)} = 1$$

## 4. Écriture fonctionnelle des suites

**Proposition 1: Expression fonctionnelle de  $(F_n^{(p)})_{n \in \mathbb{N}}$**

Soit  $R_1, R_2, \dots, R_{p+1}$  les racines complexes du polynôme  $x^{p+1} - x^p - 1$

Alors

$$F_n^{(p)} = \sum_{i=1}^{p+1} \frac{R_i^{n+p}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p+1} (R_i - R_j)}$$

**Preuve:**

Pour démontrer cette proposition nous utiliserons la seconde définition de la suite, qui décale les termes de la suite avec  $p$  zéros <sup>[def]</sup>.

Le théorème d'Alembert-Gauss nous assure que le polynôme caractéristique  $x^{p+1} - x^p - 1$  possède  $p + 1$  racines complexes, notées:  $R_1, R_2, \dots, R_{p+1}$

Ainsi nous avons que  $(R_i)_{1 \leq i \leq p+1}$  forme une base des suites linéaires  $u$  respectant cette relation de récurrence:  $u_{n+p+1} = u_{n+p} + u_n$  [5], il faut donc trouver l'écriture de  $F_n^{(p)}$  dans cette base.

Donc nous avons que  $F_n^{(p)} = \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i R_i^n$  avec  $\lambda_i$  des constantes qu'il reste à déterminer.

Pour cela, nous posons le système suivant grâce aux  $p$  premiers termes qui sont définis :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_{p+1} = F_0^{(p)} = 0 \\ \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 + \lambda_3 R_3 + \dots + \lambda_{p+1} R_{p+1} = F_1^{(p)} = 0 \\ \lambda_1 R_1^2 + \lambda_2 R_2^2 + \lambda_3 R_3^2 + \dots + \lambda_{p+1} R_{p+1}^2 = F_2^{(p)} = 0 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \lambda_1 R_1^{p+1} + \lambda_2 R_2^{p+1} + \lambda_3 R_3^{p+1} + \dots + \lambda_{p+1} R_{p+1}^{p+1} = F_p^{(p)} = 1 \end{cases}$$

Ce qui est équivalent à l'équation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ R_1 & R_2 & R_3 & \dots & R_{p+1} \\ R_1^2 & R_2^2 & R_3^2 & \dots & R_{p+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1^{p+1} & R_2^{p+1} & R_3^{p+1} & \dots & R_{p+1}^{p+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \vdots \\ \lambda_{p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

On reconnaît la transposée d'une matrice de Vandermonde d'ordre  $p + 1$  dont les coefficients sont deux à deux distincts, dont la preuve est laissée au lecteur. Cette matrice est donc inversible, notons  $A$  cette matrice et  $\Lambda$  la matrice composée des coefficients que l'on cherche. On a alors :

$$\Lambda = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi ce produit indique que l'on ne s'intéresse qu'à la dernière colonne de  $A^{-1}$ .  
De plus, on sait que le  $i$ -ème coefficient de la dernière ligne de l'inverse d'une matrice de Vandermonde [6] (colonne ici, car on a la transposée) est égale à :

$$\frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p+1} (R_i - R_j)}$$

Donc

$$\forall i \in \llbracket 1; p+1 \rrbracket, \lambda_i = \frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p+1} (R_i - R_j)}$$

Ainsi en remplaçant les  $\lambda_i$  dans  $\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i R_i^n$ , on trouve bien:

$$F_{n-p}^{(p)} = \sum_{i=1}^{p+1} \frac{R_i^n}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p+1} (R_i - R_j)}$$

Ainsi en revenant à la définition :

$$F_n^{(p)} = \sum_{i=1}^{p+1} \frac{R_i^{n+p}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p+1} (R_i - R_j)}$$

**Q.E.D.**

### Proposition 2: Expression fonctionnelle via le triangle de Pascal

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, F_n^{(p)} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor + 1} \binom{n-pk}{k}$$

#### Preuve:

On souhaite montrer par récurrence sur  $n$  et à  $p$  fixé la proposition écrite ci-dessus

Posons  $P(n) : F_n^{(p)} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor + 1} \binom{n-pk}{k}$

*Initialisation* : Pour  $n \leq p$ , on a

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor + 1} \binom{n-pk}{k} = \sum_{k=0}^1 \binom{n-pk}{k} = \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} + \underbrace{\binom{n-p}{1}}_{n-p \leq 0 \text{ donc } 0} = 1$$

*Hérédité* : Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(k)$  soit vraie.

$$\begin{aligned}
F_{n+1}^{(p)} &= F_{n-p}^{(p)} + F_n^{(p)} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-p}{p+1} \rfloor + 1} \binom{n-p-pk}{k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor + 1} \binom{n-pk}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-p}{p+1} \rfloor + 2} \binom{n-p-p(k-1)}{k-1} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor + 1} \binom{n-pk}{k}
\end{aligned}$$

Or  $\binom{n}{-1} = 0$  donc on peut décaler l'indice de la première somme à  $k = 0$  :

$$F_{n+1}^{(p)} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-p}{p+1} \rfloor + 2} \binom{n-pk}{k-1} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor + 1} \binom{n-pk}{k}$$

On peut alors essayer de regrouper les deux sommes :

$$\lfloor \frac{n-p}{p+1} \rfloor + 2 = \lfloor \frac{n+p+2}{p+1} \rfloor \text{ et } \lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{n+p+1}{p+1} \rfloor \text{ donc } \lfloor \frac{n-p}{p+1} \rfloor + 2 \geq \lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor + 1$$

Et

$$\left( \left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2 \right) - \left( \left\lfloor \frac{n}{p+1} \right\rfloor + 1 \right) \leq \frac{1}{p+1} \leq 1$$

Donc il n'y a qu'un terme à rajouter à  $\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor + 1} \binom{n-pk}{k}$  pour la rentrer dans la seconde somme

Pour cela souhaite donc montrer que  $\lfloor \frac{n-p}{p+1} \rfloor + 2 > n - p \left( \lfloor \frac{n-p}{p+1} \rfloor + 2 \right)$  : on a

$$\begin{aligned}
\frac{n-p}{p+1} - 1 &< \left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor \Leftrightarrow (p+1) \left( \left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2 \right) > n - p + (p+1) \\
&\Leftrightarrow -(p+1) \left( \left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2 \right) < -n - 1 \\
&\Leftrightarrow n - (p+1) \left( \left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2 \right) < -1 \\
&\Leftrightarrow n - p \left( \left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2 \right) < -1 + \left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2 \\
&\Leftrightarrow n - p \left( \left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2 \right) < \left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2
\end{aligned}$$

Donc  $\binom{n-p \left( \left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2 \right)}{\left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2} = 0$ , ce qui permet d'utiliser  $\lfloor \frac{n-p}{p+1} \rfloor + 2$  comme indice commun aux deux sommes, qu'on peut donc regrouper :

$$\begin{aligned}
F_{n+1}^{(p)} &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-p}{p+1} \rfloor + 2} \left( \binom{n-pk}{k-1} + \binom{n-pk}{k} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-p}{p+1} \rfloor + 1} \binom{(n+1)-pk}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n+1}{p+1} \rfloor + 1} \binom{(n+1)-pk}{k}
\end{aligned}$$

Donc  $P(n+1)$  est vraie.

Par le principe de récurrence p-ième,  $P(n) : F_n^{(p)} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor + 1} \binom{n-pk}{k}$

**Q.E.D.**

**N.B:** pour  $p = 1$  et  $p = 0$ , on retombe bien sur des résultats connus a savoir:

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n^{(1)} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \binom{n-k}{k}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} = 2^n = F_n^{(0)}$$

1										
1	1									
1	1	2								
1	3	3	1							
1	4	6	4	1						
1	5	10	10	5	1					
1	6	15	20	15	6	1				
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1		
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	

1									
1	1								
1	1	1							
1	2	1							
1	3	3	1						
1	4	6	4	1					
1	5	10	10	5	1				
1	6	15	20	15	6	1			
1	7	21	35	35	21	7	1		
1	8	28	56	70	56	28	8	1	
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

## 5. Sur les limites de quotients des $(F_n^{(p)})$

C'est pourquoi nous allons voir les propriétés de deux généralisation de la limite de quotient.

Pour cette première généralisation, nous ne généraliserons par réellement le quotient, i.e. que nous allons nous intéresser à:

Nous notrons ce quotiens par  $\mathbb{N}_p$ , que nous appellerons le  $p$ -ième nombre périodique, et nous ferons une bijection entre les 118 élément du tableau périodique des éléments et les 118 premier nombre périodique. Ainsi 2 est le nombre de l'hydrogène;  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  est le nombre de l'hélium et ainsi de suite.

Regardons ce que cela donne pour certains  $p$ :

On sais que  $\forall n \in \mathbb{N}, F_n^{(0)} = 2^n$

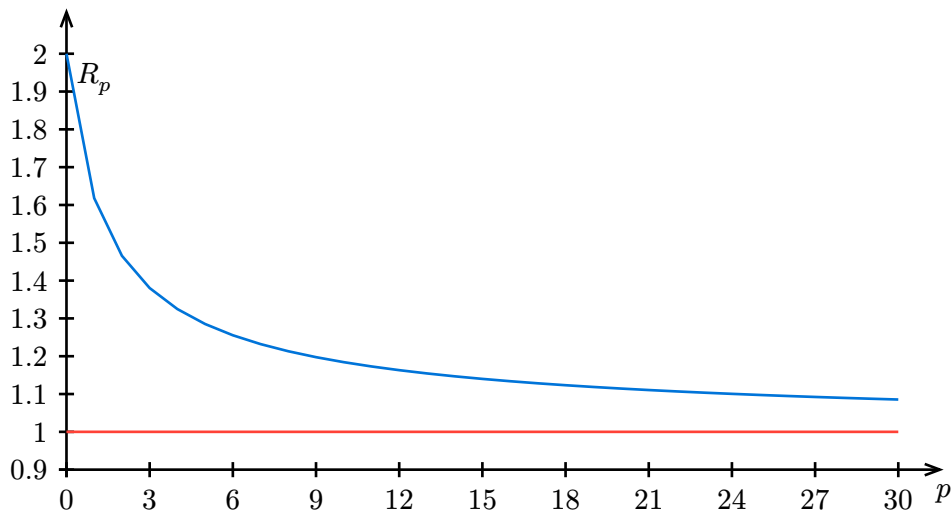
$$\frac{F_{n+1}^{(0)}}{F_n^{(0)}} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$$

Il est connue que la limite du quotient la suite de Fibonacci tend vers  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$



### Pour $p > 1$

Au delà 1, il devient difficile de calculer algébriquement le quotient, nous pouvons donc les calculer informatiquement jusqu'à  $p = 30$  :

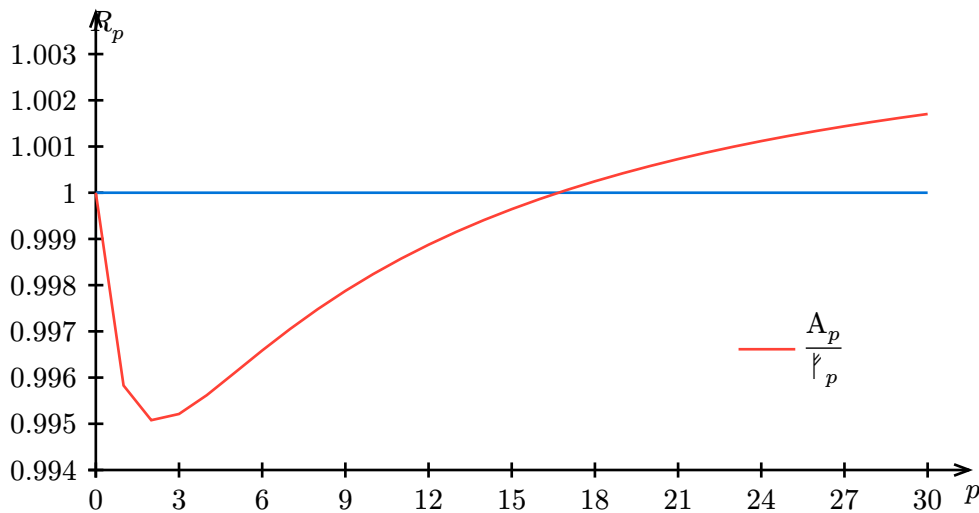


On remarque clairement que le quotient tend vers 1.

On peut définir empiriquement l'approximation suivante à partir de cette courbe :

$$A_p = 1 + \frac{1}{(1+p)^k} \text{ avec } k \approx 0,710083$$

Dont voici le rapport avec  $\ell_p$  représentative :



$p$	$\ell_p$	$A_p$
0	2	2
1	1,618033989	1.611
2	1,465571232	1.458
3	1,380277569	1.374
4	1,324717957	1.319
5	1,285199033	1.28
6	1,255422871	1.251
7	1,232054631	1.228
8	1,213149723	1.21
9	1,197491434	1.195
10	1,184276322	1.182
11	1,172950750	1.171
12	1,163119791	1.162
13	1,154493551	1.154
14	1,146854042	1.146
15	1,140033937	1.14
16	1,133902490	1.134
17	1,128355940	1.128
18	1,123310806	1.124
19	1,118699108	1.119
20	1,114464880	1.115
21	1,110561598	1.111
22	1,106950245	1.108
23	1,103597835	1.105
24	1,100476279	1.102
25	1,097561494	1.099
26	1,094832708	1.096
27	1,092271899	1.094
28	1,089863353	1.092
29	1,087593296	1.089
30	1,085449605	1.087

Le nombre périodique noté  $\mathbb{P}_p$  peut s'écrire avec une sorte de fraction continue :

$$\mathbb{P}_p = 1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{(1+\frac{1}{\dots})^p}\right)^p}$$

## 2<sup>ème</sup> généralisation

Pour mieux coller à la définition on peut au lieu de faire la limite du quotient entre deux termes successif, on peut faire la limite du quotient entre deux termes séparé par  $p - 1$  termes noté  $Q_p$ , i.e.:

$$\forall p \in \mathbb{N}, Q_p = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+p}^{(p)}}{F_n^{(p)}}$$

Regardons également ce que cela donne pour certaine valeur de  $p$

### Pour $p = 0$

On a:  $\forall n \in \mathbb{N}, F_n^{(0)} = 2^n$

Ainsi:

$$\frac{F_n^{(0)}}{F_n^{(0)}} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 = Q_0$$

### Pour $p = 1$

Dans ce cas on retombe sur le même quotient étudié plus haut donc:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}^{(1)}}{F_n^{(1)}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = Q_1$$

### Pour $p > 1$

De même que pour la 1<sup>er</sup> généralisation, on a calculé le quotient jusqu'à  $p = 30$  compilé également en un tableau:

$p$	quotient
0	1,0000
1	1,6180
2	2,1479
3	2,6297
4	3,0796
5	3,5063
6	3,9151
7	4,3093
8	4,6915
9	5,0635
10	5,4266

11	5,7820
12	6,1305
13	6,4728
14	6,8095
15	7,1411
16	7,4681
17	7,7908
18	8,1096
19	8,4247
20	8,7363

21	9,0447
22	9,3501
23	9,6527
24	9,9526
25	10,2499
26	10,5449
27	10,8375
28	11,1280
29	11,4164
30	11,7028

### Proposition 3:

Rappelle: on note  $\mathbb{P}_p$  le ratio de la première généralisation et  $Q_p$  celle de la deuxième alors on a:

$$\forall p \in \mathbb{N}, (\mathbb{P}_p)^p = Q_p$$

**Preuve:**

Soit  $p \in \mathbb{N}$

$$\frac{F_{n+p}^{(p)}}{F_n^{(p)}} = \prod_{k=n}^{n+p} \frac{F_{k+1}^{(p)}}{F_k^{(p)}}$$

En passant à la limite dans l'égalité et comme le quotient de deux termes successif tend vers  $\ell_p$ , on obtient:

$$Q_p = \prod_{k=n}^{n+p} \ell_p = \prod_{k=0}^p \ell_p = (\ell_p)^p$$

**Q.E.D.**

## 6. Propriétés diverses des suites $(F_n^{(p)})$

**Proposition 4: Formule du jump**

$$\forall p, n, n' \in \mathbb{N}, F_{n+n'}^{(p)} = F_n^{(p)} F_{n'}^{(p)} + \sum_{k=1}^p F_{n-k}^{(p)} F_{n'+k-p-1}^{(p)}$$

(NB: on admet que,  $\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \llbracket -p, -1 \rrbracket, F_n^{(p)} = 0$ , ce qui est cohérent avec les généralisation au négatifs de chaque suite, et la formule de récurrence. On peut d'ailleurs noter que cette formule (et sa preuve) restent valides dans cette généralisation aux  $n$  négatifs)

**Preuve:**

Il est plus simple, pour l'objet de la preuve, de considérer la formule équivalente suivante:

$$\forall p, i \in \mathbb{N}, \forall j \in \llbracket 0, i \rrbracket, F_i^{(p)} = F_{i-j}^{(p)} F_j^{(p)} + \sum_{k=1}^p F_{i-j-k}^{(p)} F_{j+k-p-1}^{(p)}$$

(C'est la formule précédente en prenant  $i = n + n'$  et  $j = n'$ )

Prouvons la proposition pour tout  $p$  et  $i$  par récurrence sur  $j$

Soit  $p, i \in \mathbb{N}$

Initialisation:  $j = 0$

$$F_{i-0}^{(p)} F_0^{(p)} + \sum_{k=1}^p F_{i-0-k}^{(p)} F_{0+k-p-1}^{(p)} = F_i^{(p)} \times 1 + \sum_{k=1}^p F_{i-k}^{(p)} \times 0 = F_i^{(p)}$$

Récurrence: supposons que  $\exists j \in \mathbb{N}, F_i^{(p)} = F_{i-j}^{(p)} F_j^{(p)} + \sum_{k=1}^p F_{i-j-k}^{(p)} F_{j+k-p-1}^{(p)}$  et posons un tel  $j$ . On a alors:

$$\begin{aligned} F_i^{(p)} &= F_{i-j}^{(p)} F_j^{(p)} + \sum_{k=1}^p F_{i-j-k}^{(p)} F_{j+k-p-1}^{(p)} \\ &= \left( F_{i-j-1}^{(p)} + F_{i-j-p}^{(p)} \right) F_j^{(p)} + \sum_{k=0}^{p-1} F_{i-j-k-1}^{(p)} F_{j+k+1-p-1}^{(p)} \\ &= F_{i-j-1}^{(p)} F_j^{(p)} + \underbrace{F_{i-j-p}^{(p)} F_{j+p+1-p-1}^{(p)}}_{\text{peut rentrer comme terme } p \text{ dans la somme}} + \sum_{k=1}^{p-1} F_{i-j-k-1}^{(p)} F_{j+k+1-p-1}^{(p)} + \underbrace{F_{i-j-1}^{(p)} F_{j-p}^{(p)}}_{\text{terme } k=0 \text{ de la somme}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= F_{i-j-1}^{(p)} \left( F_j^{(p)} + F_{j-p}^{(p)} \right) + \sum_{k=1}^p F_{i-j-k-1}^{(p)} F_{j+k+1-p-1}^{(p)} \\
&= F_{i-(j+1)}^{(p)} F_{j+1}^{(p)} + \sum_{k=1}^p F_{i-(j+1)-k}^{(p)} F_{(j+1)+k-p-1}^{(p)}
\end{aligned}$$

On a alors prouvé que la formule est valable pour  $j + 1$ , donc, par récurrence sur  $j$  (et comme cela est vrai pour tout  $i$  et pour tout  $p$ ):

$$\forall p, i \in \mathbb{N}, \forall j \in \llbracket 0, i \rrbracket, F_i^{(p)} = F_{i-j}^{(p)} F_j^{(p)} + \sum_{k=1}^p F_{i-j-k}^{(p)} F_{j+k-p-1}^{(p)}$$

**Q.E.D.**

### Application

Cette formule, lorsque bien utilisée, permet de calculer en complexité temporelle  $O(p^2 * \log(n))$  le terme  $n$  de la suite  $F(p)$ , en ne manipulant que des entiers, et sans connaissance préalable de la suite (par exemple les racines du polynôme caractéristique) (voir algo\_jump.c)

### Proposition 5: Écriture Matricielle

On définit  $\forall n, p \in \mathbb{N}, f_n^{(p)} = \begin{pmatrix} F_n^{(p)} \\ F_{n+1}^{(p)} \\ \vdots \\ F_{n+p}^{(p)} \end{pmatrix}$ , alors :

$$\begin{aligned}
&\forall n, p \in \mathbb{N}, f_{n+1}^{(p)} = \Lambda^n f_0^{(p)} \\
&\text{avec } f_0^{(p)} = \begin{pmatrix} F_0^{(p)} \\ F_1^{(p)} \\ \vdots \\ F_p^{(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \vdots & \text{id}_p & & \\ 0 & & & \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

### Preuve:

La relation de récurrence induit la relation suivante :

$$\forall p, n \in \mathbb{N}, f_{n+1}^{(p)} = \Lambda f_n^{(p)}$$

avec  $\Lambda$  la matrice compagnons du polynôme caractéristique de la suite, donné plus haut, alors :

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, f_{n+1}^{(p)} = \Lambda f_n^{(p)} = \Lambda^2 f_{n-1}^{(p)} = \dots = \Lambda^n f_0^{(p)}$$

**Q.E.D.**

### Proposition 6: Séries Génératrices

Les séries génératrices de  $(F_n^{(p)})$ , noté  $\sigma_p$  et de rayon de convergence  $\rho_p$ , est donné par :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in [-\rho_p; \rho_p], \sigma_p(x) = \frac{1}{1 - x - x^{p+1}}$$

De même, les séries génératrices de  $(T_n^{(p)})$ , noté  $\tau_p$  et de rayon de convergence  $\mathfrak{k}_p$ , est donné par :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in [-\mathfrak{k}_p; \mathfrak{k}_p], \tau_p(x) = \frac{x^p}{1 - x - x^{p+1}}$$

**Preuve:**

Ici on ne s'occupera que de la preuve pour  $(F_n^{(p)})$ , la seconde est laissée au loisir du lecteur :  
Ainsi, soit  $p \in \mathbb{N}, \rho_p \in \overline{\mathbb{R}_+}$  et  $x \in [-\rho_p; \rho_p]$ , alors :

$$\begin{aligned}
\sigma_p(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} F_n^{(p)} x^n = \sum_{n=0}^p \underbrace{F_n^{(p)}}_{=1} x^n + \sum_{n=p+1}^{+\infty} F_n^{(p)} x^n \\
&= \sum_{n=0}^p x^n + \sum_{n=p+1}^{+\infty} (F_{n-p-1}^{(p)} + F_{n-1}^{(p)}) x^n \\
&= \frac{1-x^{p+1}}{1-x} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} F_n^{(p)} x^{n+p+1}}_{=x^{p+1}\sigma_p(x)} + \sum_{n=p}^{+\infty} F_n^{(p)} x^{n+1} \\
&= \frac{1-x^{p+1}}{1-x} + x^{p+1}\sigma_p(x) + x \left( \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} F_n^{(p)} x^n}_{=\sigma_p(x)} - \sum_{n=0}^{p-1} \underbrace{F_n^{(p)}}_{=1} x^n \right) \\
&= \frac{1-x^{p+1}}{1-x} + x^{p+1}\sigma_p(x) + x\sigma_p(x) - x \frac{1-x^p}{1-x}
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\sigma_p(x)(1-x-x^{p+1}) = \frac{1-\cancel{x^{p+1}}-x+\cancel{x^{p+1}}}{1-x} = \frac{\cancel{1-x}}{\cancel{1-x}} = 1$$

Donc

$$\sigma_p(x) = \frac{1}{1-x-x^{p+1}}$$

**Q.E.D.**

**Remarque :**

Pour  $p \rightarrow +\infty$ , on a, pour  $|x| < \min(1, \rho_p)$ ,  $\sigma_p(x) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ ,

et donc  $\forall n \in \mathbb{N}, F_n^{(p)} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 1$ , ce qui colle avec la convention que  $F_n^{(+\infty)} = 1$

## 7. Étude préliminaire de $\sum_{i_1=0}^{n-1} \sum_{i_2=0}^{i_1-1} \cdots \sum_{i_k=0}^{i_{k-1}-1} 1$

Pour les besoins de l'étude des  $(F_n^{(p)})$ , nous avons besoins d'étudier et de battre une formule explicite de la somme suivante  $\sum_{i_1=0}^{n-1} \sum_{i_2=0}^{i_1-1} \cdots \sum_{i_k=0}^{i_{k-1}-1} 1$

Pour cela nous définissons les polynômes suivant :

**Définition 3: Temporaire :**

On pose provisoirement avant de pouvoir y définir plus proprement :

$$\forall k, n \in \mathbb{N}, H_k(n) = \sum_{i_1=0}^{n-1} \sum_{i_2=0}^{i_1-1} \cdots \sum_{i_k=0}^{i_{k-1}-1} 1$$

En remarquant que  $\sum_{i_2=0}^{i_1-1} \cdots \sum_{i_k=0}^{i_{k-1}-1} 1 = H_{k-1}(i_1)$

Nous avons que  $H_k$  suit la relation de récurrence suivante :

**Proposition 7:**

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, H_k(n) = \sum_{i=0}^{n-1} H_{k-1}(i)$$

avec  $\forall n \in \mathbb{N}, H_0(n) = 1$

**Proposition 8:**

$$\forall k, n \in \mathbb{N}, H_k(n) = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (n - i)$$

**Preuve:**

Pour prouver la proposition précédente, nous nous appuyons sur les mathématiques des différences finies, notamment celle présente dans *Finite Calculus: A Tutorial for Solving Nasty Sums* de David Gleich [7]

En reprenant les notations de David Gleich, nous avons  $\forall k, n \in \mathbb{N}, H_k(n) = \frac{1}{k!} n^{\underline{k}}$

Ainsi montrons par récurrence sur  $k$  la propriété précédente :

• **Initialisation :**

pour  $k = 0$  :  $\forall n \in \mathbb{N}, H_0(n) = 1 = \frac{1}{0!} \prod_{i=0}^{-1} (n - i)$

• **Hérédité :** Soit  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, H_k(n) = \frac{1}{k!} n^{\underline{k}}$ , alors

soit  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} H_{k+1}(n) &= \sum_{i=0}^{n-1} H_k(i) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{k!} i^{\underline{k}} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-1} i^{\underline{k}} \end{aligned}$$

Or par théorème de l'analyse discrète :  $\sum_{i=0}^{n-1} i^{\underline{k}} = \sum_{i=0}^n i^{\underline{k}} \delta i$  et  $\sum_{i=0}^n i^{\underline{k}} \delta i = \frac{1}{k+1} n^{\underline{k+1}}$

Ainsi :

$$H_k(n) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-1} i^{\underline{k}} = \frac{1}{k!} \frac{1}{k+1} n^{\underline{k+1}} = \frac{1}{(k+1)!} n^{\underline{k+1}}$$

Donc par le principe de récurrence simple on a bien que :

$$\forall k, n \in \mathbb{N}, H_k(n) = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (n - i)$$

Nous définirons maintenant  $H_k$  par la propriété précédente car plus générale, ainsi :

**Q.E.D.**

**Définition 4:**

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, H_k(x) = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (x - i)$$

Donc nous remarquons que  $H_k$  est un polynôme de degré  $\deg H_k = k$ ; de coefficient dominant  $\frac{1}{k!}$  et ayant les entiers  $\llbracket 0; k-1 \rrbracket$  comme racines pour  $k > 0$

On s'intéressera également au polynôme suivant :

**Définition 5: Temporaire**

De même on définis provisoirement

$$\forall k, n \in \mathbb{N}, S_k(n) = \sum_{i_1=0}^n \sum_{i_2=0}^{i_1} \dots \sum_{i_k=0}^{i_{k-1}} 1$$

De la même manière que pour  $H_k$  on peut en déduire la relation de récurrence suivante :

**Proposition 9:**

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, S_{k+1}(n) = \sum_{i=0}^n S_k(i)$$

avec  $\forall n \in \mathbb{N}, S_0(n) = 1$

**Proposition 10:**

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \geq k-1, S_k(n-k+1) = H_k(n)$$

**Preuve:**

Montrons la relation précédente par récurrence sur  $k$ :

• **Initialisation :**

On a bien que pour  $k = 0$ :  $\forall n \geq -1, S_0(n+1) = 1 = H_0(n)$

• **Hérédité :** Soit  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, S_k(n-k+1) = H_k(n)$ , alors :

Soit  $n \geq k-1$

$$\begin{aligned} S_{k+1}(n-k) &= \sum_{i=1}^{n-k} S_k(i) = \sum_{i=1}^{n-k} H_k(i+k-1) \\ &= \sum_{i=k}^{n-1} H_k(i) = \sum_{i=0}^{n-1} H_k(i) - \sum_{i=0}^{k-1} H_k(i) \\ &= H_{k+1}(n) - H_{k+1}(k) \end{aligned}$$

Or  $k \in \llbracket 0; k+1 \rrbracket$  et est donc une racine de  $H_{k+1}$ , donc  $H_{k+1}(k) = 0$ , ainsi :

$$\forall n \geq k, S_{k+1}(n - (k+1) + 1) = H_{k+1}(n)$$

Donc par principe de récurrence simple :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \geq k-1, S_k(n-k+1) = H_k(n)$$

**Q.E.D.**

**Proposition 11:**

$$\forall k, n \in \mathbb{N}, S_k(n) = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (n+i)$$

**Preuve:**

celle-ci est immédiate par la propriété 10, en effet :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, S_k(x) = H_k(x+k-1) = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (x+k-1-i) = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (x+i)$$

**Q.E.D.**

De même on redéfinit  $S_k$  par cette proposition :

**Définition 6:**

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, S_k = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (x+i)$$

**Remarque :**

la propriété 10 reste vraie sur  $\mathbb{R}$ , ce même avec la redéfinition, car l'on n'utilise aucune hypothèse sur les  $n \in \mathbb{N}$

**Proposition 12:**

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall N \in \mathbb{N}, S_k(n) = \sum_{i=0}^k \alpha_i^k n^i$$

avec

$$\forall k, i \in \mathbb{N}, \alpha_i^k = \begin{cases} \alpha_0^k = \delta_0^k & \text{si } i = 0 \\ \alpha_i^k = \sum_{j=i}^k \binom{j}{i} \frac{\alpha_{j-1}^{k-1}}{j} B_{j-i} \end{cases}$$

avec les  $(B_i)$  les nombre de bernouilli tel que  $B_1 = \frac{1}{2}$

**Preuve:**

Montrons par récurrence sur  $k$  la propriété précédente :

- **Initialisation :**

pour  $k = 0$  : soit  $n \in \mathbb{N}$ , On a  $S_0(n) = 1$  et  $\sum_{i=0}^0 \alpha_i^0 n^i = \underbrace{\alpha_0^0}_{=1} n^0 = 1$

On a donc bien que  $\forall n \in \mathbb{N}, S_0(n) = \sum_{i=0}^0 \alpha_i^0 n^i$

- **Hérédité :** Soit  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, S_k(n) = \sum_{i=0}^k \alpha_i^k n^i$ , alors

Soit  $n \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} S_{k+1}(x) &= \sum_{i=1}^n S_k(i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^k \alpha_j^k i^j = \sum_{j=0}^k \alpha_j^k \sum_{i=1}^n i^j \\ &= \sum_{j=0}^k \frac{\alpha_j^k}{j+1} \sum_{i=0}^j \binom{j+1}{i} B_i n^{j-i+1} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^j \binom{j+1}{i} \frac{\alpha_j^k}{j+1} B_i n^{j-i+1} \\
&= \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^j \binom{j+1}{j-i} \frac{\alpha_j^k}{j+1} B_{j-i} n^{i+1} \text{ avec } i' = j-i \\
&= \sum_{i=0}^k \sum_{j=i}^k \binom{j+1}{j-i} \frac{\alpha_j^k}{j+1} B_{j-i} n^{i+1} \\
&= \sum_{i=0}^k \sum_{j=i}^k \binom{j+1}{i+1} \frac{\alpha_j^k}{j+1} B_{j-i} n^{i+1} \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{j=i-1}^k \binom{j+1}{i} \frac{\alpha_j^k}{j+1} B_{j+1-i} n^i \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} \underbrace{\sum_{j=i}^{k+1} \binom{j}{i} \frac{\alpha_{j-1}^k}{j} B_{j-i} n^i}_{=\alpha_i^{k+1}} = \sum_{i=0}^{k+1} \alpha_i^{k+1} n^i
\end{aligned}$$

Ainsi par le principe de récurrence simple :

$$\forall k, n \in \mathbb{N}, S_k(n) = \sum_{i=0}^k \alpha_i^k n^i$$

**Q.E.D.**

## 8. Comportement à de $(F_n^{(p)})$ sur $\mathbb{N}$

**Proposition 13:**

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \llbracket 0; p \rrbracket, F_n^{(p)} = 1$$

**Preuve:**

Ceci est immédiat via la définition

**Proposition 14:**

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \llbracket p; 2p+1 \rrbracket, F_n^{(p)} = 1 + n - p$$

i.e. que pour  $n$  compris entre  $p$  et  $2p$ ,  $F_n^{(p)}$  se comporte comme une suite arithmétique de raison 1 et de premier termes  $1 - p$

**Preuve:**

Soient  $p \in \mathbb{N}$  et  $n \in \llbracket p+1; 2p+1 \rrbracket$

Alors comme  $n > p$  on peut appliquer la formule de récurrence,

Ainsi:

$$F_n^{(p)} = F_{n-1}^{(p)} + F_{n-p-1}^{(p)}$$

Or  $p+1 \leq n \leq 2p+1$  donc  $0 \leq n-p-1 \leq p$  donc  $F_{n-p-1}^{(p)} = 1$

Donc:

$$F_n^{(p)} = F_{n-1}^{(p)} + 1$$

Donc  $\left(F_n^{(p)}\right)_{p+1 \leq n \leq 2p+1}$  est suite arithmétique de raison 1  
et de premier termes  $F_{p+1}^{(p)} = F_p^{(p)} + F_0^{(p)} = 2$   
Donc

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall \llbracket p+1; 2p+1 \rrbracket, F_n^{(p)} = 1 + n - p$$

De plus comme  $F_p^{(p)} = 1 = 1 + p - p$ , alors  $F_p^{(p)}$  vérifie également la propriété, on peut donc l'inclure  $n = p$  dans l'intervale.

Ainsi on a bien :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \llbracket p; 2p+1 \rrbracket, F_n^{(p)} = 1 + n - p$$

**Q.E.D.**

### Définition 7:

On définit les polynômes  $P_k^{(p)} \in \mathbb{R}[X]$  par :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, P_k^{(p)}(x) = H_k(x - kp) + \sum_{i=0}^{k-1} P_i^{(p)}((i+1)p) H_{k-1-i}(x - kp)$$

**Attention :** ici la notation  $P^{(p)}$  ne signifie pas la dérivé  $p$ -ième, mais est la dérivation logique pour indiquer le paramètre  $p$  des suites

**Remarque :** pour  $k = 0$ ,  $P_k^{(p)} = P_0^{(p)}$  est parfaitement définis, en effet  
 $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, P_0^{(p)}(x) = \underbrace{H_0(x)}_{=1} + \underbrace{\sum_{i=0}^{-1} P_i^{(p)}((i+1)p) H_{-1-i}(x)}_{=0} = 1$

### Proposition 15:

$$\forall p, k, n \in \mathbb{N}, P_k^{(p)}(n) = \begin{cases} P_0^{(p)}(n) = 1 & \text{si } k = 0 \\ P_{k-1}^{(p)}(kp) + \sum_{i=1}^{n-kp} P_{k-1}(n-p-i) & \text{sinon} \end{cases}$$

### Preuve:

pour  $k = 0$ :  $\forall p, n \in \mathbb{N}, P_0^{(p)}(n) = \frac{1}{0!} \prod_{i=0}^{-1} (n-i) = 1$

pour  $k > 0$ :

Soit  $p, n \in \mathbb{N}$ , alors

Montrons par récurrence forte la relation de récurrence de la proposition précédente, ainsi :

#### • Initialisation :

$$P_1^{(p)}(n) = \underbrace{H_1(n-p)}_{=n-p} + \underbrace{P_0^{(p)}(p) H_0(n-p)}_{=1} = n - p + 1$$

Et

$$\underbrace{P_0^{(p)}(p)}_{=1} + \sum_{i=1}^{n-p} \underbrace{P_0^{(p)}(n-p-i)}_{=1} = 1 + \sum_{i=1}^{n-p} 1 = 1 + n - p$$

• **Hérédité :** Soit  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall \kappa \leq k, P_\kappa^{(p)}(n) = P_{\kappa-1}^{(p)}(\kappa p) + \sum_{i=1}^{n-\kappa p} P_{\kappa-1}^{(p)}(n-p-i)$ , alors :

$$\begin{aligned} P_{k+1}^{(p)}(n) &= H_{k+1}(n - (k+1)p) + \sum_{j=0}^k P_j^{(p)}((j+1)p) H_{k-j}(n - (k+1)p) \\ &= \sum_{i_1=0}^{n-(k+1)p-1} \dots \sum_{i_{k+1}=0}^{i_k-1} 1 + \sum_{j=0}^k P_{k-j}^{(p)}((k-j+1)p) H_j(n - (k+1)p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i_1=0}^{n-(k+1)p-1} \cdots \sum_{i_{k+1}=0}^{i_k-1} \underbrace{1}_{=P_0^{(p)}(i_{k+1})} + \sum_{j=0}^k P_{k-j}^{(p)}((k-j+1)p) \sum_{i_1=0}^{n-(k+1)p} \cdots \sum_{i_j=0}^{i_{j-1}-1} 1 \\
&= \sum_{i_1=0}^{n-(k+1)p-1} \cdots \sum_{i_{k+1}=0}^{i_k-1} P_0^{(p)}(i_{k+1}) + \sum_{j=0}^k \sum_{i_1=0}^{n-(k+1)p} \cdots \sum_{i_j=0}^{i_{j-1}-1} P_{k-j}^{(p)}((k-j+1)p) \\
&= \sum_{i_1=0}^{n-(k+1)p-1} \cdots \sum_{i_k=0}^{i_{k-1}-1} \left( \underbrace{P_0^{(p)}(p) + \sum_{i_{k+1}=0}^{i_k-1} P_0^{(p)}(i_{k+1})}_{=P_1^{(p)}(i_k+p)} \right) + \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i_1=0}^{n-(k+1)p} \cdots \sum_{i_j=0}^{i_{j-1}-1} P_{k-j}^{(p)}((k-j+1)p) \\
&= \sum_{i_1=0}^{n-(k+1)p-1} \cdots \sum_{i_k=0}^{i_{k-1}-1} \left( P_1^{(p)}(i_k+p) \right) + \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i_1=0}^{n-(k+1)p} \cdots \sum_{i_j=0}^{i_{j-1}-1} P_{k-j}^{(p)}((k-j+1)p) \\
&= \sum_{i_1=0}^{n-(k+1)p-1} \cdots \sum_{i_{k-1}=0}^{i_{k-2}-1} \underbrace{\left( P_1^{(p)}(2p) + \sum_{i_k=0}^{i_{k-1}-1} \left( P_1^{(p)}(i_k+p) \right) \right)}_{=P_2^{(p)}(i_{k-1}+2p)} + \sum_{j=0}^{k-2} \sum_{i_1=0}^{n-(k+1)p} \cdots \sum_{i_j=0}^{i_{j-1}-1} P_{k-j}^{(p)}((k-j+1)p) \\
&= \sum_{i_1=0}^{n-(k+1)p-1} \cdots \sum_{i_{k-1}=0}^{i_{k-2}-1} P_2^{(p)}(i_{k-1}+2p) + \sum_{j=0}^{k-2} \sum_{i_1=0}^{n-(k+1)p} \cdots \sum_{i_j=0}^{i_{j-1}-1} P_{k-j}^{(p)}((k-j+1)p) \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&= \sum_{i_1=0}^{n-(k+1)p-1} \sum_{i_2=0}^{i_1-1} \sum_{i_3=0}^{i_2-1} P_{k-2}^{(p)}(i_3 + (k-2)p) + \sum_{j=0}^2 \sum_{i_1=0}^{n-(k+1)p} \cdots \sum_{i_j=0}^{i_{j-1}-1} P_{k-j}^{(p)}((k-j+1)p) \\
&= \sum_{i_1=0}^{n-(k+1)p-1} \sum_{i_2=0}^{i_1-1} \left( \underbrace{P_{k-2}^{(p)}((k-1)p) + \sum_{i_3=0}^{i_2-1} P_{k-2}^{(p)}(i_3 + (k-2)p)}_{=P_{k-1}^{(p)}(i_2+(k-1)p)} \right) + \sum_{j=0}^1 \sum_{i_1=0}^{n-(k+1)p} \cdots \sum_{i_j=0}^{i_{j-1}-1} P_{k-j}^{(p)}((k-j+1)p) \\
&= \sum_{i_1=0}^{n-(k+1)p-1} \sum_{i_2=0}^{i_1-1} P_{k-1}^{(p)}(i_2 + (k-1)p) + \sum_{j=0}^1 \sum_{i_1=0}^{n-(k+1)p} \cdots \sum_{i_j=0}^{i_{j-1}-1} P_{k-j}^{(p)}((k-j+1)p) \\
&= \sum_{i_1=0}^{n-(k+1)p-1} \left( \underbrace{P_{k-1}^{(p)}(kp) + \sum_{i_2=0}^{i_1-1} P_{k-1}^{(p)}(i_2 + (k-1)p)}_{=P_k^{(p)}(i_1-kp)} \right) + \underbrace{\sum_{j=0}^0 \sum_{i_1=0}^{n-(k+1)p} \cdots \sum_{i_j=0}^{i_{j-1}-1} P_{k-j}^{(p)}((k-j+1)p)}_{=P_k^{(p)}((k+1)p)} \\
&= P_k^{(p)}((k+1)p) + \sum_{i=0}^{n-(k+1)p-1} P_k^{(p)}(i-kp) \\
&= P_k^{(p)}((k+1)p) + \sum_{i=0}^{n-(k+1)p-1} P_k^{(p)}(n-p-i-1)
\end{aligned}$$

$$= P_k^{(p)}((k+1)p) + \sum_{i=1}^{n-(k+1)p} P_k^{(p)}(n-p-i)$$

Ainsi par le principe de récurrence forte :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}^*, P_k^{(p)}(n) = P_{k-1}^{(p)}(kp) + \sum_{i=1}^{n-kp} P_{k-1}^{(p)}(n-p-i)$$

**Q.E.D.**

**Proposition 16:**

On peut généraliser les propositions 13 et 14 précédentes grâce au chapitre précédente :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \llbracket kp, (k+1)p \rrbracket, F_n^{(p)} = P_k^{(p)}(n)$$

**Preuve:**

Montrons la proposition précédente par récurrence simple sur  $k$  :

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ , alors

• **Initialisation :**

pour  $k = 0$ , soit  $n \in \llbracket 0, p \rrbracket$ , alors  $F_n^{(p)} = 1 = P_0^{(p)}(n)$

• **Hérédité :** Soit  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \in \llbracket kp, (k+1)p \rrbracket, F_n^{(p)} = P_k^{(p)}(n)$ , alors

Soit  $n \in \llbracket (k+1)p, (k+2)p \rrbracket$ ,

$$\begin{aligned} F_n^{(p)} &= F_{n-1}^{(p)} + F_{n-p-1}^{(p)} \\ &= F_{n-2}^{(p)} + F_{n-p-2}^{(p)} \\ &\quad : \text{En appliquant } n - (k+1)p \text{ fois la relation de récurrence} \\ &= F_{(k+1)p}^{(p)} + \sum_{i=1}^{n-kp} F_{n-p-i}^{(p)} \end{aligned}$$

Or  $1 \leq i \leq n - kp$  donc  $n - p - 1 \geq n - p - i \geq kp$  sauf que  $n \leq (k+2)p$  donc

$(k+1)p > (k+1)p - 1 \geq n - p - i \geq kp$

et donc  $n - p - i \in \llbracket kp, (k+1)p \rrbracket$  de même  $(k+1)p \in \llbracket kp, (k+1)p \rrbracket$

Ainsi  $F_{(k+1)p}^{(p)} = P_k^{(p)}((k+1)p)$  et  $\forall i \in \llbracket 1, n - kp \rrbracket, F_{n-p-i}^{(p)} = P_k^{(p)}(n - p - i)$

Donc

$$\begin{aligned} F_n^{(p)} &= F_{(k+1)p}^{(p)} + \sum_{i=1}^{n-kp} F_{n-p-i}^{(p)} = \underbrace{P_k^{(p)}((k+1)p) + \sum_{i=1}^{n-kp} P_k^{(p)}(n-p-i)}_{=P_{k+1}^{(p)}(n), \text{ propriété 15}} \\ &= P_{k+1}^{(p)}(n) \end{aligned}$$

Donc par le principe de récurrence simple :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \llbracket kp, (k+1)p \rrbracket, F_n^{(p)} = P_k^{(p)}(n)$$

**Q.E.D.**

**Proposition 17:**

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, F_n^{(p)} = P_{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor}^{(p)}(n)$$

**Preuve:**

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $k \in \mathbb{N}$

Selon la propriété 16, pour  $n \in \llbracket kp, (k+1)p \rrbracket$ ,  $F_n^{(p)} = P_k^{(p)}(n)$ ,

donc  $n \in \llbracket kp, (k+1)p - 1 \rrbracket$ ,  $F_n^{(p)} = P_k^{(p)}(n)$ ,

alors soit  $n \in \llbracket kp, (k+1)p - 1 \rrbracket$ , ainsi :

$$kp \leq n < (k+1)p \Leftrightarrow k \leq \frac{n}{p} < k+1 \Leftrightarrow k = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$$

Donc sur  $\llbracket kp, (k+1)p - 1 \rrbracket$ ,  $F_n^{(p)} = P_{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor}^{(p)}(n)$

Or pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\llbracket kp, (k+1)p - 1 \rrbracket$  forme une partition de  $\mathbb{N}$ , ainsi :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, F_n^{(p)} = P_{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor}^{(p)}(n)$$

**Q.E.D.**

**Remarque :**

Cette proposition nous permet de généraliser la suite pour des  $p$  réel positif, de même que l'on peut étendre leur domaine de définition sur  $\mathbb{R}_+$ , dont on en étudiera certaines de ces propriétés dans le chapitre 10

## 9. Dessin créé par $(F_n^{(p)})$ modulo 2

Si l'on prend sur une feuille à carreaux et que l'on mets dans la case d'indice  $n, p$ , le termes  $F_n^{(p)}$  modulo 2, et que l'on colorise la dite case en noir ou en blanc si sa valeur est 1 ou 0, comme ci-dessous:

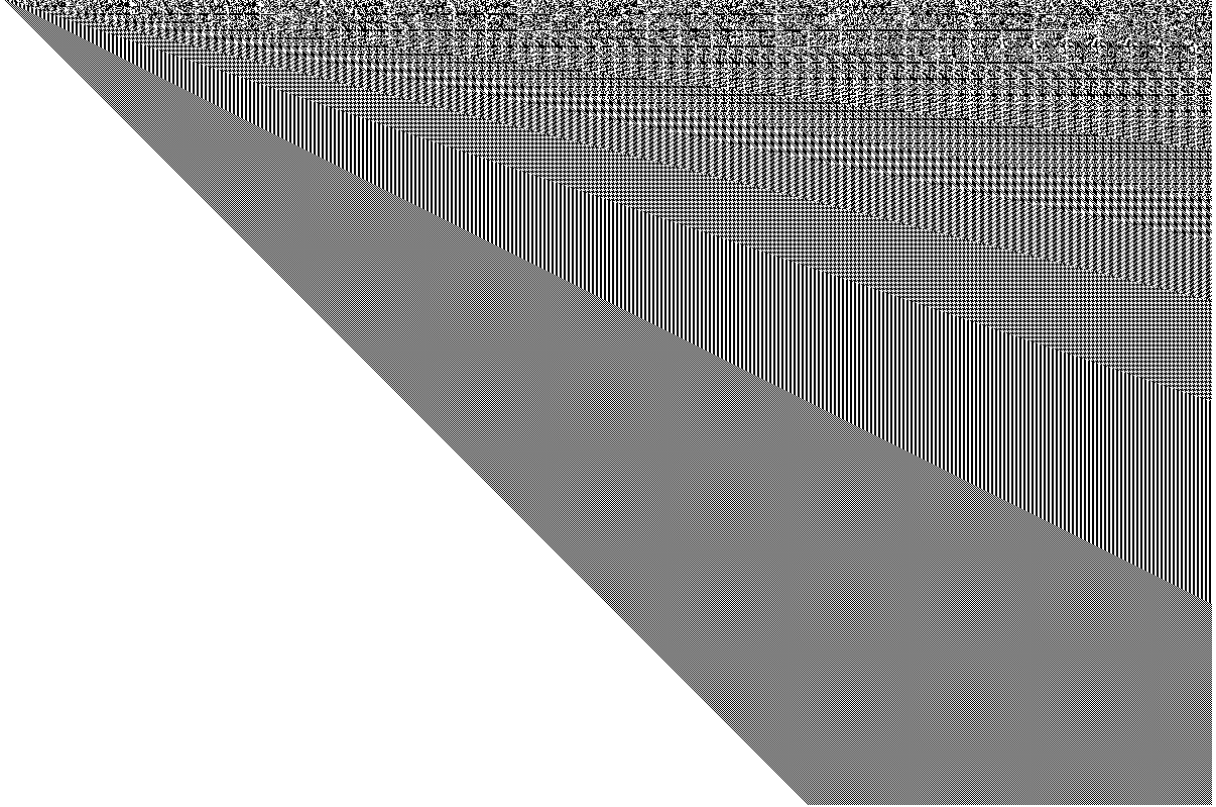


Figure 1: dessin réalisé pour un nombre petit de cases

On remarque en premier lieu que des motifs apparaissent entre les droites d'équations :  $y = -\frac{x}{n}$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ , ce qui s'explique par le fait que sur une portion chaque suites vaut un certain polynôme

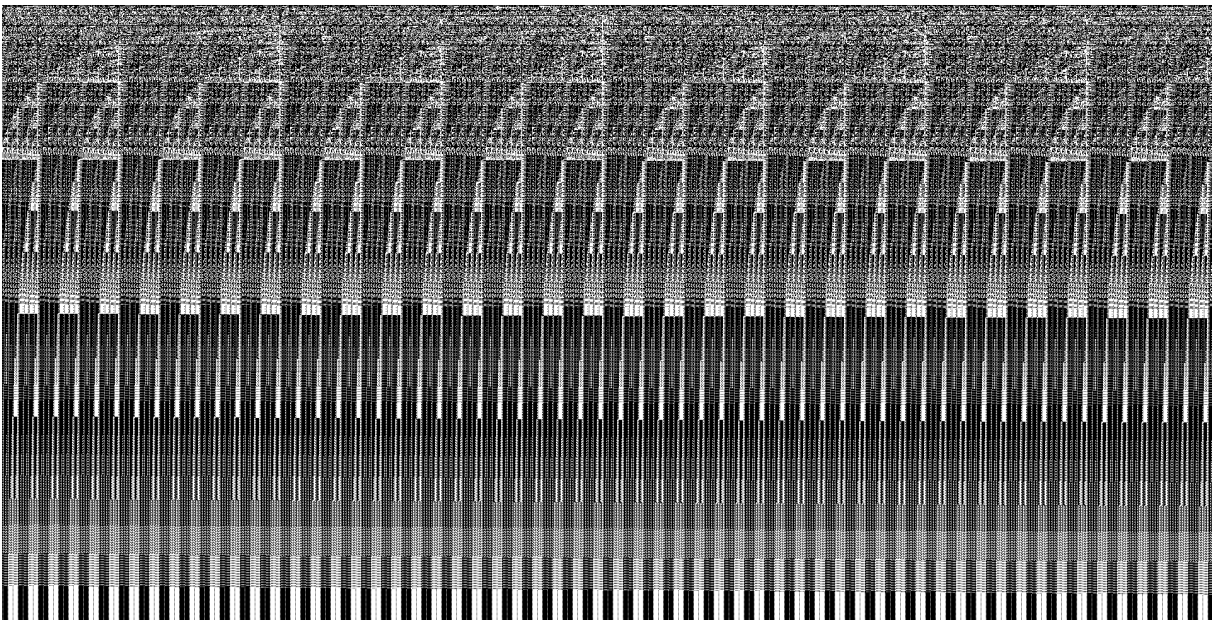


Figure 2: Motifs obtenus pour  $n \geq 10$  millions et  $p$  entre 0 et 10 mille

On voit ici, un triangle de Sierpiński étiré de plus en plus vers le bas et arrondi vers des valeurs bien précises.

On peut supposer que le triangle apparaît grâce aux liens entre les suites de Fibonacci d'ordre  $p$  et le triangle de Pascal, qui fait également apparaître cette fractale par construction similaire.

## 10. Étude de $F$

### Définition 8:

Nous définissons la généralisation pour  $p$  et  $n$  réel positif des  $(F_n^{(p)})$  par :

$$F : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ (p, x) \mapsto P_{\lfloor \frac{x}{p} \rfloor}^{(p)}(x) \end{cases}$$

Maintenant faut refaire des trucs mais pour la cas encore plus générale... yeeepieee

## Références

1. Pingala. [https://fr.wikipedia.org/wiki/Pingala\\_\(math%C3%A9maticien\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Pingala_(math%C3%A9maticien)).
2. Liber abbaci.
3. Suite de Lucas. [https://fr.wikipedia.org/wiki/Suite\\_de\\_Lucas](https://fr.wikipedia.org/wiki/Suite_de_Lucas).
4. Suite des vaches de Narayana. <https://oeis.org/A000930>.
5. Suite récurrente linéaire. [https://fr.wikipedia.org/wiki/Suite\\_r%C3%A9currente\\_lin%C3%A9aire](https://fr.wikipedia.org/wiki/Suite_r%C3%A9currente_lin%C3%A9aire).
6. The Inverse matrix of Vandermonde matrix. <http://www.vesnik.math.rs/vol/mv19303.pdf>.
7. Finite Calculus:A Tutorial for Solving Nasty Sums.