

# TITRE

## 1. Introduction

La suite de Fibonacci a tout d'abord été étudiée en Inde via un problème de combinatoire dans des sortes de poèmes au V<sup>e</sup> siècle avant J.-C. par Pingala [1]. Puis, elle a été étudiée en Italie par le célèbre Léonard de Pise, plus connu sous le nom de Fibonacci, dans un problème sur la taille d'une population de lapins apparu dans son ouvrage *Liber abbaci* [2] en 1202.

Cette suite aura toujours créé un engouement, et donc énormément de généralisations ont été créées comme les suites de Lucas [3].

Mais parmi toutes ces généralisations, beaucoup sont laissées de côté, et nous allons nous intéresser à l'une d'entre elles.

## 2. Définition

Comme beaucoup le savent la suite de fibonacci est construite de manière récurrente en sommant les deux termes précédent et en prenant  $F_0 = 1$  et  $F_1 = 1$  (ou parfois  $F_0 = 0$  et  $F_1 = 1$ ), i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n := \begin{cases} F_0 = F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n \geq 2 \end{cases}$$

Pour généraliser cette suite nous n'allons pas sommer les deux termes précédents, mais le terme précédent et un terme se trouvant  $p$  terme plus loin de ce premier terme et pour ce faire nous avons besoin que les  $p$  premiers termes valent 1, i.e.

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, F_n^{(p)} := \begin{cases} F_j^{(p)} = 1, \text{ si } 0 \leq j \leq p \\ F_{n+p+1}^{(p)} = F_{n+p}^{(p)} + F_n^{(p)} \text{ si } n > p \end{cases}$$

On nomme  $p$  comme étant l'ordre de la suite engendré et  $(F_n^{(p)})_{n \in \mathbb{N}}$  la suite engendré pour un certain entier  $p$

### Proposition 1: Définition par récurrence équivalente

Nous pouvons considérer la définition suivante comme équivalente à la définition précédente :

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, F_{n-p}^{(p)} = \begin{cases} F_j^{(p)} = 0, \text{ si } 0 \leq j < p \\ F_n^{(p)} = 1, \text{ si } n = p \\ F_{n+p+1}^{(p)} = F_{n+p}^{(p)} + F_n^{(p)} \text{ si } n > p \end{cases}$$

Ce qui revient à décaler les termes de la suite de  $p$  rangs.

#### Preuve:

Il est évident que les deux définitions sont équivalentes moyennant un décalage car les  $p - 1$  premiers termes de la seconde définitions valent 0 et le  $p$ -ième vaut 1

**Q.E.D.**

### 3. Exemple de suite générée

**Pour  $p = 0$ :**

Par la définition:

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n^{(0)} = \begin{cases} F_0^{(0)} = 1 \\ F_{n+1} = F_n + F_n = 2F_n \end{cases}$$

On retombe sur une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1, donc

$$F_n^{(0)} = 2^n$$

**Pour  $p = 1$**

On retombe par construction sur la suite de Fibonacci, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n^{(1)} = \begin{cases} F_0 = F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

ou par la formule de binet  $F_n^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} - \varphi'^{n+1})$  avec  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  et  $\varphi' = -\frac{1}{\varphi}$

**Pour  $p = 2$**

Par la définition:

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n^{(2)} = \begin{cases} F_0 = F_1 = F_2 = 1 \\ F_{n+3} = F_{n+2} + F_n \end{cases}$$

Ainsi on tombe sur la suite des vaches de Narayana [4]

D'expression fonctionnelle  $F_n^{(2)} = \frac{\lambda^{n+2}}{(\lambda-\nu)(\lambda-\mu)} + \frac{\mu^{n+2}}{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)} + \frac{\nu^{n+2}}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}$  avec  $\lambda, \mu$  et  $\nu$  les racines complexes du polynôme:  $x^3 - x^2 - 1$

## A voir

**Si  $p \rightarrow +\infty$**

Par la définition, les  $p$  premiers termes valent 1, donc on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n^{(+\infty)} = 1$$

### 4. Écriture fonctionnelle des suites

**Proposition 2: Expression fonctionnelle de  $(F_n^{(p)})_{n \in \mathbb{N}}$**

Soit  $R_1, R_2, \dots, R_{p+1}$  les racines complexes du polynôme  $x^{p+1} - x^p - 1$

Alors

$$F_n^{(p)} = \sum_{i=1}^{p+1} \frac{R_i^{n+p}}{\prod_{j=1, j \neq i}^{p+1} R_i - R_j}$$

### Preuve:

Pour démontrer cette proposition nous utiliserons la seconde définition qui décale les termes de la suites avec  $p$  zéros <sup>[def]</sup>.

Le théorème d'Alembert-Gauss nous assure que le polynôme caractéristique  $x^{p+1} - x^p - 1$  possède  $p + 1$  racines complexes, notées:  $R_1, R_2, \dots, R_{p+1}$

Ainsi  $F_n^{(p+n)} = \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i R_i^n$  avec  $\lambda_i$  des constantes qu'il reste à déterminer.

Pour cela, nous posons le système suivant grâce aux  $p$  premiers termes qui sont définis :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_{p+1} = F_0^{(p)} = 0 \\ \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 + \lambda_3 R_3 + \dots + \lambda_{p+1} R_{p+1} = F_1^{(p)} = 0 \\ \lambda_1 R_1^2 + \lambda_2 R_2^2 + \lambda_3 R_3^2 + \dots + \lambda_{p+1} R_{p+1}^2 = F_2^{(p)} = 0 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \lambda_1 R_1^{p+1} + \lambda_2 R_2^{p+1} + \lambda_3 R_3^{p+1} + \dots + \lambda_{p+1} R_{p+1}^{p+1} = F_p^{(p)} = 1 \end{cases}$$

Ce qui est équivalent au système suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ R_1 & R_2 & R_3 & \dots & R_{p+1} \\ R_1^2 & R_2^2 & R_3^2 & \dots & R_{p+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1^{p+1} & R_2^{p+1} & R_3^{p+1} & \dots & R_{p+1}^{p+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \vdots \\ \lambda_{p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

On reconnaît la transposé d'une matrice de Vandermonde carré d'ordre  $p + 1$  dont les coefficient sont deux à deux distincts. Cette matrice est donc inversible, notons  $A$  cette matrice et  $\Lambda$  la matrice composée des coefficients que l'on cherche. On a alors :

$$\Lambda = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi ce produit indique que l'on ne s'intéresse qu'à la dernière colonne de  $A^{-1}$ .

De plus l'on sais que le  $i$ -ème coefficient de la dernière ligne d'une matrice de Vandermonde [5] (colonne ici, car on a la transposée) est égale à :

$$\frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p+1} R_i - R_j}$$

Donc

$$\forall i \in \llbracket 1; p+1 \rrbracket, \lambda_i = \frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p+1} R_i - R_j}$$

Ainsi en remplaçant les  $\lambda_i$  dans  $\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i R_i^n$ , on trouve bien:

$$F_{n-p}^{(p)} = \sum_{i=1}^{p+1} \frac{R_i^n}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p+1} R_i - R_j}$$

Ainsi en revenant à la définition de base :

$$F_n^{(p)} = \sum_{i=1}^{p+1} \frac{R_i^{n+p}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p+1} R_i - R_j}$$

**Q.E.D.**

**Proposition 3: Expression fonctionnelle via le triangle de Pascale**

## 5. Sur les limites de quotients des $(F_n^{(p)})$

Le ratio de deux termes successif de la suite de Fibonacci a toujours été porteur de mystère et d'isotérisme, néanmoins il en reste intéressant de s'y intéresser.

C'est pourquoi nous allons voir les propriétés de deux généralisation de la limite de quotient.

### 1<sup>ère</sup> généralisation:

Pour cette première généralisation, nous ne généraliserons par réellement le quotient, i.e. que nous allons nous intéresser à:

$$\forall p \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_n^{p+1}}{F_n^{(p)}}$$

Regardons ce que cela donne pour certains  $p$ :

#### Pour $p = 0$

On sait que  $\forall n \in \mathbb{N}, F_n^{(0)} = 2^n$

Ainsi

$$\frac{F_{n+1}^{(0)}}{F_n^{(0)}} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$$

#### Pour $p = 1$

Il est connue que la limite du quotient la suite de Fibonacci tend vers  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

#### Pour $p \rightarrow +\infty$

On a définie pour  $p \rightarrow +\infty$ ,

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n^{(+\infty)} = 1$$

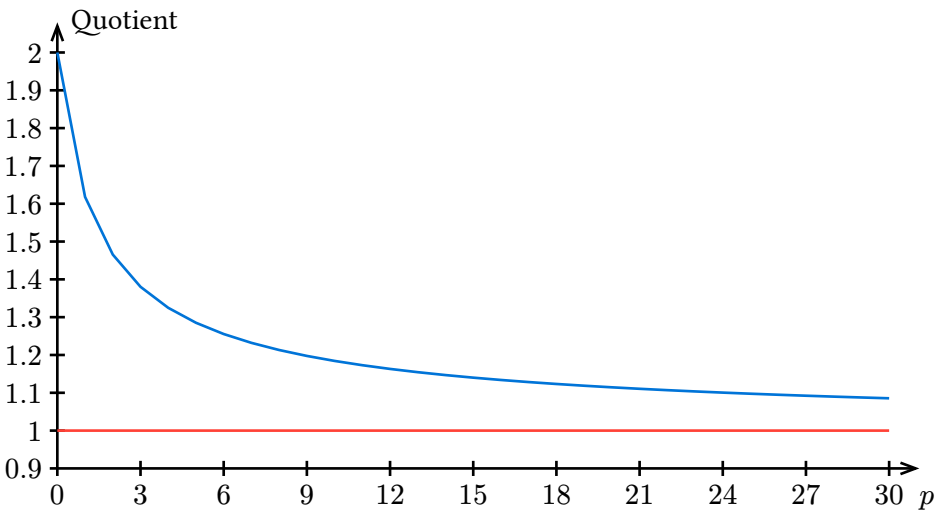
Donc

$$\frac{F_{n+1}^{(+\infty)}}{F_n^{(+\infty)}} = \frac{1}{1} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

**Pour p >1**

Au dela 1, il deviens difficile de calculer algébriquement le quotient, nous avons donc calculer informatiquement jusqu'à  $p = 30$  en voici le tableau:

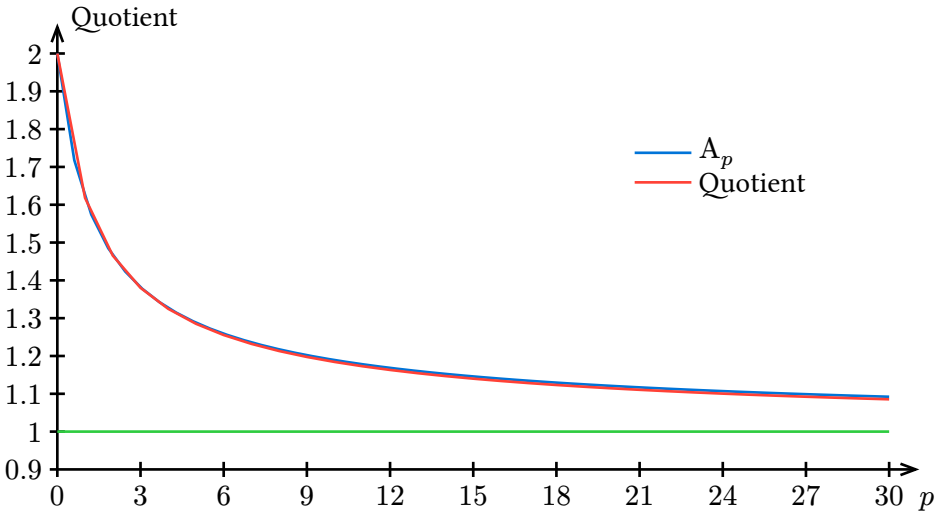
Ainsi on peut traduire le tableau en un graphique



Dont on voit clairement que le qotient tend vers 1  
à partir de cette courbe on peut définir  
l'aproximation suivante:

$$A_p = 1 + \frac{1}{(1 + p)^{\log_2(\varphi)}} \text{ avec } \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Dont voici la courbe représentative :



p	quotient
0	2
1	1,618033989
2	1,465571232
3	1,380277569
4	1,324717957
5	1,285199033
6	1,255422871
7	1,232054631
8	1,213149723
9	1,197491434
10	1,184276322
11	1,172950750
12	1,163119791
13	1,154493551
14	1,146854042
15	1,140033937
16	1,133902490
17	1,128355940
18	1,123310806
19	1,118699108
20	1,114464880
21	1,110561598
22	1,106950245
23	1,103597835
24	1,100476279
25	1,097561494
26	1,094832708
27	1,092271899
28	1,089863353
29	1,087593296
30	1,085449605

**Conjecture:**

le quotient noté  $R_p$  peut s'écrire avec une sorte de fraction continue:

$$R_p = 1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{(1+\frac{1}{\dots})^p}\right)^p}$$

**2<sup>ème</sup> généralisation**

Pour mieux coller à la définition on peut au lieu de faire la limite du quotient entre deux termes successif, on peut faire la limite du quotient entre deux termes séparé par  $p - 1$  termes noté  $Q_p$ , i.e.:

$$\forall p \in \mathbb{N}, Q_p = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+p}^{(p)}}{F_n^{(p)}}$$

Regardons également ce que cela donne pour certaine valeur de  $p$

**Pour  $p = 0$** 

On a:  $\forall n \in \mathbb{N}, F_n^{(0)} = 2^n$

Ainsi:

$$\frac{F_n^{(0)}}{F_n^{(0)}} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 = Q_0$$

**Pour  $p = 1$** 

Dans ce cas on retombe sur le même quotient étudié plus haut donc:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}^{(1)}}{F_n^{(1)}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = Q_1$$

**Pour  $p \rightarrow +\infty$** 

On a:  $\forall n \in \mathbb{N}, F_n^{(+\infty)} = 1$

Ainsi:

$$\frac{F_n^{(+\infty)}}{F_n^{(+\infty)}} = \frac{1}{1} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 = Q_{+\infty}$$

**Pour  $p > 1$** 

De même que pour la 1<sup>er</sup> généralisation, on a calculé le quotient jusqu'à  $p = 30$  compilé également en un tableau:

$p$	quotient
0	1,0000
1	1,6180
2	2,6180
3	4,2361
4	6,8541
5	11,0902
6	17,9443
7	29,0344
8	46,9787
9	76,0132

10	122,9919
11	199,0050
12	321,9969
13	521,0019
14	842,9988
15	1 364,0007
16	2 206,9995
17	3 571,0003
18	5 777,9998
19	9 349,0001
20	15 126,9999

21	24 476,0000
22	39 603,0000
23	64 079,0000
24	103 682,0000
25	167 761,0000
26	271 443,0000
27	439 204,0000
28	710 647,0000
29	1 149 851,0000
30	1 860 498,0000

**Conjecture:**

On remarque par le tableau ci-dessus que:

$$\forall p \in \mathbb{N}, Q_p = \varphi^n \text{ avec } \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

**6. Comportement de  $(F_n^{(p)})$  sur  $\mathbb{N}$** **Proposition 4:**

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \llbracket 0; p \rrbracket, F_n^{(p)} = 1$$

**Preuve:**

Ceci est immédiat via la définition

**Proposition 5:**

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \llbracket p + 1; 2p + 1 \rrbracket, F_n^{(p)} = 1 + n - p$$

i.e. que pour  $n$  compris entre  $p$  et  $2p$ ,  $F_n^{(p)}$  se comporte comme une suite arithmétique de raison 1 et de premier termes  $1 - p$

**Preuve:**

Soient  $p \in \mathbb{N}$  et  $n \in \llbracket p + 1; 2p + 1 \rrbracket$

Alors comme  $n > p$  on peut appliquer la formule de récurrence,

Ainsi:

$$F_n^{(p)} = F_{n-1}^{(p)} + F_{n-p-1}^{(p)}$$

Or  $p + 1 \leq n \leq 2p + 1$  donc  $0 \leq n - p - 1 \leq p$  donc  $F_{n-p-1}^{(p)} = 1$

Donc:

$$F_n^{(p)} = F_{n-1}^{(p)} + 1$$

Donc  $(F_n^{(p)})_{p+1 \leq n \leq 2p+1}$  est suite arithmétique de raison 1

et de premier termes  $F_{p+1}^{(p)} = F_p^{(p)} + F_0^{(p)} = 2$

Donc

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall \llbracket p + 1; 2p + 1 \rrbracket, F_n^{(p)} = 1 + n - p$$

**Q.E.D.**

**Conjecture:**

soit  $k \in \mathbb{N}$ , les termes modulo 2 de  $F_{kp+1}^{(p)}$  à  $F_{(k+1)p}^{(p)}$  forme un paterne

Note: Ceci à déjà été démontré dans les cas particuliers pour  $k = 0$  et  $k = 1$



## 7. Dessin créé par $\left(F_n^{(p)}\right)$ modulo 2

Si l'on prend sur une feuille à carreaux et que l'on mets dans la case d'indice  $n, p$ , le termes  $F_n^{(p)}$  modulo 2, et que l'on colorise la dite case en noir ou en blanc si sa valeur est 1 ou 0, comme ci-dessous:

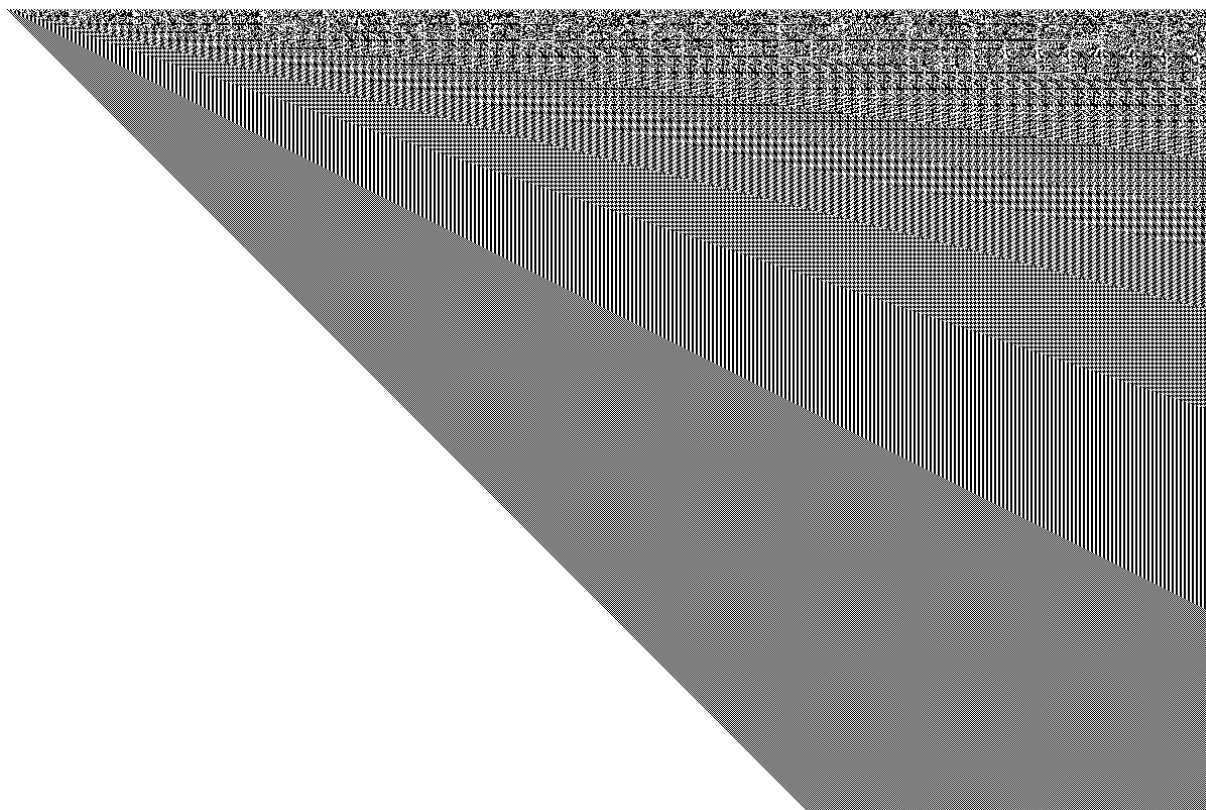


Figure 1: dessin réalisé pour un nombre petit de cases

On remarque en premier lieux que des motif apparaisse entre les droites d'équations :  $y = -\frac{x}{n}$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$

De plus si l'on prend des valeurs de  $p$  et de  $n$  bien plus grande on obtient:

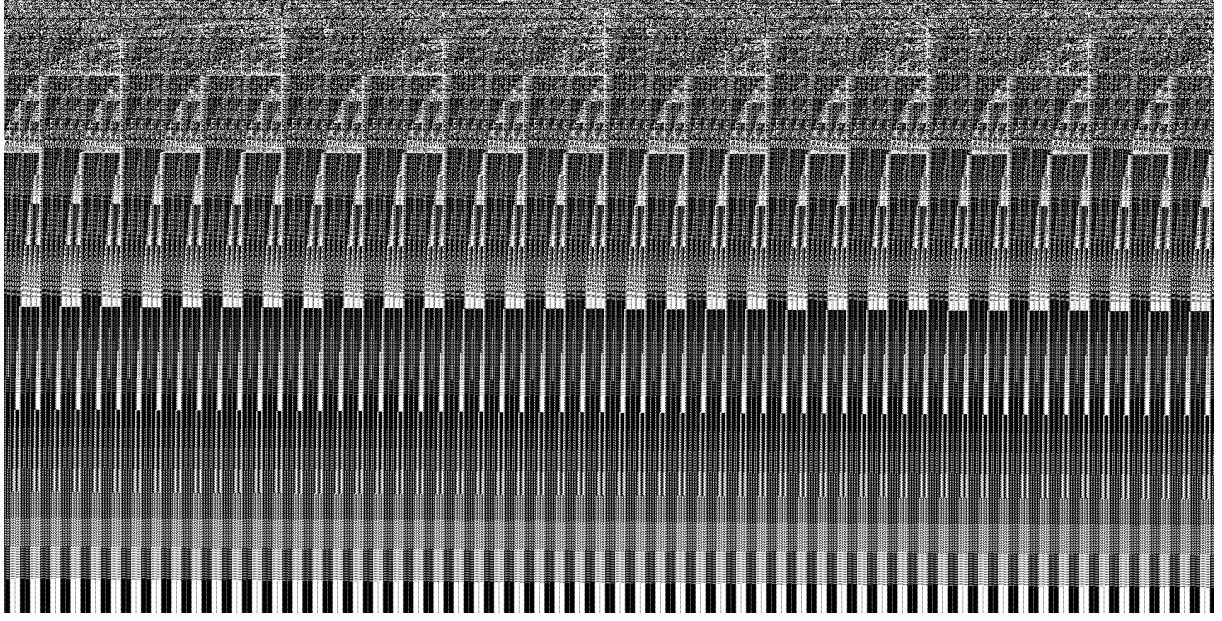


Figure 2: dessins réalisé pour des valeurs bien plus grande

On voit ici, un triangle de Sierpiński étiré de plus en plus vers le bas et arrondie vers des valeurs bien précises.

On peut supposer que le triangle apparait dû au liens entre les suites de Fibonacci d'ordre  $p$  et le triangle de Pascale qui fait apparaitre le triangle par une construction similaire.

## 8. Propriétés divers des suites (Fnp)

### Proposition 6: Formule du jump

$$\forall p, n, n' \in \mathbb{N}, F_{n+n'}^{(p)} = F_n^{(p)} F_{n'}^{(p)} + \sum_{k=1}^p F_{n-k}^{(p)} F_{n'+k-p-1}^{(p)}$$

(NB: on admet que,  $\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \llbracket -p, -1 \rrbracket, F_n^{(p)} = 0$ , ce qui est cohérent avec les généralisation au négatifs de chaque suite, et la formule de récurrence. On peut d'ailleurs noter que cette formule (et sa preuve) restent valides dans cette généralisation aux  $n$  négatifs)

#### Preuve:

Il est plus simple, pour l'objet de la preuve, de considerer la formule équivalente suivante:

$$\forall p, i \in \mathbb{N}, \forall j \in \llbracket 0, i \rrbracket, F_i^{(p)} = F_{i-j}^{(p)} F_j^{(p)} + \sum_{k=1}^p F_{i-j-k}^{(p)} F_{j+k-p-1}^{(p)}$$

(C'est la formule précédente en prenant  $i = n + n'$  et  $j = n'$ )

Prouvons la proposition pour tout  $p$  et  $i$  par récurrence sur  $j$

Soit  $p, i \in \mathbb{N}$

Initialisation:  $j = 0$

$$F_{i-0}^{(p)} F_0^{(p)} + \sum_{k=1}^p F_{i-0-k}^{(p)} F_{0+k-p-1}^{(p)} = F_i^{(p)} \times 1 + \sum_{k=1}^p F_{i-k}^{(p)} \times 0 = F_i^{(p)}$$

Récurrence: supposons que  $\exists j \in \mathbb{N}$ ,  $F_i^{(p)} = F_{i-j}^{(p)} F_j^{(p)} + \sum_{k=1}^p F_{i-j-k}^{(p)} F_{j+k-p-1}^{(p)}$  et posons un tel  $j$ . On a alors:

$$\begin{aligned}
F_i^{(p)} &= F_{i-j}^{(p)} F_j^{(p)} + \sum_{k=1}^p F_{i-j-k}^{(p)} F_{j+k-p-1}^{(p)} \\
&= \left( F_{i-j-1}^{(p)} + F_{i-j-p}^{(p)} \right) F_j^{(p)} + \sum_{k=0}^{p-1} F_{i-j-k-1}^{(p)} F_{j+k+1-p-1}^{(p)} \\
&= F_{i-j-1}^{(p)} F_j^{(p)} + \underbrace{F_{i-j-p}^{(p)} F_{j+p+1-p-1}^{(p)}}_{\text{peut rentrer comme terme } p \text{ dans la somme}} + \sum_{k=1}^{p-1} F_{i-j-k-1}^{(p)} F_{j+k+1-p-1}^{(p)} + \underbrace{F_{i-j-1}^{(p)} F_{j-p}^{(p)}}_{\text{terme } k=0 \text{ de la somme}} \\
&= F_{i-j-1}^{(p)} \left( F_j^{(p)} + F_{j-p}^{(p)} \right) + \sum_{k=1}^p F_{i-j-k-1}^{(p)} F_{j+k+1-p-1}^{(p)} \\
&= F_{i-(j+1)}^{(p)} F_{j+1}^{(p)} + \sum_{k=1}^p F_{i-(j+1)-k}^{(p)} F_{(j+1)+k-p-1}^{(p)}
\end{aligned}$$

On a alors prouvé que la formule est valable pour  $j + 1$ , donc, par récurrence sur  $j$  (et comme cela est vrai pour tout  $i$  et pour tout  $p$ ):

$$\forall p, i \in \mathbb{N}, \forall j \in \llbracket 0, i \rrbracket, F_i^{(p)} = F_{i-j}^{(p)} F_j^{(p)} + \sum_{k=1}^p F_{i-j-k}^{(p)} F_{j+k-p-1}^{(p)}$$

**Q.E.D.**

## Application

Cette formule, lorsque bien utilisée, permet de calculer en temps  $O(p * \log(n))$  le terme  $n$  de la suite  $F(p)$ , en ne manipulant que des entiers, et sans connaissance préalable de la suite (par exemple les racines du polynôme caractéristique) (voir algo\_jump.c)

## References

1. Pingala. [https://fr.wikipedia.org/wiki/Pingala\\_\(math%C3%A9maticien\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Pingala_(math%C3%A9maticien))
2. Liber abbaci
3. Suite de Lucas. [https://fr.wikipedia.org/wiki/Suite\\_de\\_Lucas](https://fr.wikipedia.org/wiki/Suite_de_Lucas)
4. Suite des vaches de Narayana. <https://oeis.org/A000930>
5. The Inverse matrix of Vandermonde matrix. <http://www.vesnik.math.rs/vol/mv19303.pdf>