

Gaspar Daguet  
 Julien Thillard  
 Louwen Fricout  
 Albin Chaboissier

# Une généralisation de la suite de Fibonacci

## Contents

1. Introduction .....	1
2. Définition .....	1
3. Exemple de suite générée .....	3
4. Écriture fonctionnelle des suites .....	4
5. Sur les limites de quotients des $(F_n^{(p)})_{n=1}^{\infty}$ .....	8
6. Étude préliminaire de $\sum_{i_1=0}^{n-1} \sum_{i_2=0}^{i_1-1} \dots \sum_{i_k=0}^{i_{k-1}-1} 1$ .....	11
7. Comportement de $(F_n^{(p)})$ sur $\mathbb{N}$ .....	13
8. Dessin créé par $(F_n^{(p)})$ modulo 2 .....	15
9. Propriétés diverses des suites $(F_n^{(p)})$ .....	16
References .....	17

## 1. Introduction

La suite de Fibonacci a tout d'abord été étudiée en Inde via un problème de combinatoire dans des sortes de poèmes au V<sup>e</sup> siècle avant J.-C. par Pingala propriété 0 notamment. Puis, elle a été étudiée en Italie par le célèbre Léonard de Pise, plus connu sous le nom de Fibonacci, dans un problème sur la taille d'une population de lapins apparue dans son ouvrage *Liber abaci* propriété 0 en 1202.

Cette suite aura toujours créé un certain engouement, et donc énormément de généralisations ont été créées comme les suites de Lucas propriété 0.

Mais parmi toutes ces généralisations, beaucoup sont laissées de côté, et nous allons nous intéresser à l'une d'entre elles.

## 2. Définition

Comme beaucoup le savent la suite de Fibonacci est construite de manière récurrente en sommant les deux termes précédent et en prenant  $F_0 = 1$  et  $F_1 = 1$  (ou parfois  $F_0 = 0$  et  $F_1 = 1$ ), i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n := \begin{cases} F_0 = F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n \geq 2 \end{cases}$$

Pour généraliser cette suite nous n'allons pas sommer les deux termes précédents, mais le terme précédent et un terme se trouvant  $p$  termes plus loin de ce premier terme et pour ce faire nous avons besoin que les  $p + 1$  premiers termes valent 1, i.e.

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, F_n^{(p)} := \begin{cases} F_j^{(p)} = 1, \text{ si } 0 \leq j \leq p \\ F_{n+p+1}^{(p)} = F_{n+p}^{(p)} + F_n^{(p)} \text{ si } n > p \end{cases}$$

On nomme  $p$  comme étant l'ordre de la suite engendré et  $(F_n^{(p)})_{n \in \mathbb{N}}$  la suite engendrée pour un certain entier  $p$

### **Proposition 1: Définition par récurrence équivalente**

Nous pouvons considérer la définition suivante comme équivalente à la définition précédente :

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, T_n^{(p)} = \begin{cases} T_j^{(p)} = 0, & \text{si } 0 \leq j < p \\ T_n^{(p)} = 1, & \text{si } n = p \\ T_{n+p+1}^{(p)} = T_{n+p}^{(p)} + T_n^{(p)}, & \text{si } n > p \end{cases}$$

Ce qui revient à décaler les termes de la suite de  $p$  rangs.

#### **Preuve:**

Il est évident que les deux définitions sont équivalentes moyennant un décalage de  $p$  car les  $p - 1$  premiers termes de la seconde définition valent 0 et le  $p$ -ième vaut 1

Donc on a bien que  $\forall n \geq p, T_{n-p}^{(p)} = F_n^{(p)}$

**Q.E.D.**

Ainsi on peut déjà généraliser les suites pour les termes négatifs de  $-1$  à  $-p$  avec

$$\forall n \in \llbracket -p; -1 \rrbracket, F_n^{(p)} = T_{n-p}^{(p)} = 0$$

### 3. Exemple de suite générée

**Pour  $p = 0$ :**

Par la définition:

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n^{(0)} = \begin{cases} F_0^{(0)} = 1 \\ F_{n+1} = F_n + F_n = 2F_n \end{cases}$$

On retombe sur un suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1, donc

$$F_n^{(0)} = 2^n$$

**Pour  $p = 1$**

On retombe par construction sur la suite de Fibonacci, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n^{(1)} = \begin{cases} F_0 = F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

ou par la formule de Binet  $F_n^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} - \varphi'^{n+1})$  avec  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  et  $\varphi' = -\frac{1}{\varphi}$

**Pour  $p = 2$**

Par la définition:

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n^{(2)} = \begin{cases} F_0 = F_1 = F_2 = 1 \\ F_{n+3} = F_{n+2} + F_n \end{cases}$$

Ainsi on tombe sur la suite des vaches de Narayana propriété 0

D'expression fonctionnelle  $F_n^{(2)} = \frac{\lambda^{n+2}}{(\lambda-\nu)(\lambda-\mu)} + \frac{\mu^{n+2}}{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)} + \frac{\nu^{n+2}}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}$  avec  $\lambda, \mu$  et  $\nu$  les racines complexes du polynôme:  $x^3 - x^2 - 1$

**Pour  $p$  quelconque :**

p \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768
1	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987
2	1	1	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60	88	129	189
3	1	1	1	1	2	3	4	5	7	10	14	19	26	36	50	69
4	1	1	1	1	1	2	3	4	5	6	8	11	15	20	26	34
5	1	1	1	1	1	1	2	3	4	5	6	7	9	12	16	21
6	1	1	1	1	1	1	1	2	3	4	5	6	7	8	10	13
7	1	1	1	1	1	1	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	3	4	5	6	7	8
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	3	4	5	6	7

A voir

**Si  $p \rightarrow +\infty$**

Par la définition, les  $p + 1$  premiers termes valent 1, donc on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n^{(+\infty)} = 1$$

## 4. Écriture fonctionnelle des suites

**Proposition 2: Expression fonctionnelle de  $(F_n^{(p)})_{n \in \mathbb{N}}$**

Soit  $R_1, R_2, \dots, R_{p+1}$  les racines complexes du polynôme  $x^{p+1} - x^p - 1$

Alors

$$F_n^{(p)} = \sum_{i=1}^{p+1} \frac{R_i^{n+p}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p+1} (R_i - R_j)}$$

**Preuve:**

Pour démontrer cette proposition nous utiliserons la seconde définition de la suite, qui décale les termes de la suites avec  $p$  zéros [def].

Le théorème d'Alembert-Gauss nous assure que le polynôme caractéristique  $x^{p+1} - x^p - 1$  possède  $p + 1$  racines complexes, notées:  $R_1, R_2, \dots, R_{p+1}$

Ainsi nous avons que  $(R_i)_{1 \leq i \leq p+1}$  forme une base des suites linéaires  $u$  respectant cette relation de récurrence:  $u_{n+p+1} = u_{n+p} + u_n$  propriété 0, il faut donc trouver l'écriture de  $F_n^{(p)}$  dans cette base.

Donc nous avons que  $F_{n-p}^{(p)} = \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i R_i^n$  avec  $\lambda_i$  des constantes qu'il reste à déterminer.

Pour cela, nous posons le système suivant grâce aux  $p$  premiers termes qui sont définis :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_{p+1} = F_0^{(p)} = 0 \\ \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 + \lambda_3 R_3 + \dots + \lambda_{p+1} R_{p+1} = F_1^{(p)} = 0 \\ \lambda_1 R_1^2 + \lambda_2 R_2^2 + \lambda_3 R_3^2 + \dots + \lambda_{p+1} R_{p+1}^2 = F_2^{(p)} = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \lambda_1 R_1^{p+1} + \lambda_2 R_2^{p+1} + \lambda_3 R_3^{p+1} + \dots + \lambda_{p+1} R_{p+1}^{p+1} = F_p^{(p)} = 1 \end{cases}$$

Ce qui est équivalent au système suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ R_1 & R_2 & R_3 & \dots & R_{p+1} \\ R_1^2 & R_2^2 & R_3^2 & \dots & R_{p+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1^{p+1} & R_2^{p+1} & R_3^{p+1} & \dots & R_{p+1}^{p+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \vdots \\ \lambda_{p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

On reconnaît la transposée d'une matrice de Vandermonde carré d'ordre  $p + 1$  dont les coefficients sont deux à deux distincts. Cette matrice est donc inversible, notons A cette matrice et  $\Lambda$  la matrice composée des coefficients que l'on cherche. On a alors :

$$\Lambda = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi ce produit indique que l'on ne s'intéresse qu'à la dernière colonne de  $A^{-1}$ .

De plus, on sait que le  $i$ -ème coefficient de la dernière ligne de l'inverse d'une matrice de Vandermonde propriété 0 (colonne ici, car on a la transposée) est égale à :

$$\frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p+1} (R_i - R_j)}$$

Donc

$$\forall i \in \llbracket 1; p+1 \rrbracket, \lambda_i = \frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p+1} (R_i - R_j)}$$

Ainsi en remplaçant les  $\lambda_i$  dans  $\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i R_i^n$ , on trouve bien:

$$F_{n-p}^{(p)} = \sum_{i=1}^{p+1} \frac{R_i^n}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p+1} (R_i - R_j)}$$

Ainsi en revenant à la définition :

$$F_n^{(p)} = \sum_{i=1}^{p+1} \frac{R_i^{n+p}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p+1} (R_i - R_j)}$$

Q.E.D.

### Proposition 3: Expression fonctionnelle via le triangle de Pascal

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, F_n^{(p)} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor + 1} \binom{n-pk}{k}$$

#### Preuve:

On souhaite montrer par récurrence sur  $n$  et à  $p$  fixé la proposition écrite ci-dessus

$$\text{Posons } P(n) : F_n^{(p)} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor + 1} \binom{n-pk}{k}$$

*Initialisation* : Pour  $n \leq p$ , on a

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor + 1} \binom{n-pk}{k} = \sum_{k=0}^1 \binom{n-pk}{k} = \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} + \underbrace{\binom{n-p}{1}}_{n-p \leq 0 \text{ donc } 0} = 1$$

*Hérédité* : Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(k)$  soit vraie.

$$\begin{aligned}
F_{n+1}^{(p)} &= F_{n-p}^{(p)} + F_n^{(p)} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-p}{p+1} \rfloor + 1} \binom{n-p-pk}{k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor + 1} \binom{n-pk}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-p}{p+1} \rfloor + 2} \binom{n-p-p(k-1)}{k-1} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor + 1} \binom{n-pk}{k}
\end{aligned}$$

Or  $\binom{n}{-1} = 0$  donc on peut décaler l'indice de la première somme à  $k = 0$  :

$$F_{n+1}^{(p)} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-p}{p+1} \rfloor + 2} \binom{n-pk}{k-1} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor + 1} \binom{n-pk}{k}$$

On peut alors essayer de regrouper les deux sommes :

$$\left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2 = \left\lfloor \frac{n+p+2}{p+1} \right\rfloor \text{ et } \left\lfloor \frac{n}{p+1} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{n+p+1}{p+1} \right\rfloor \text{ donc } \left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2 \geq \left\lfloor \frac{n}{p+1} \right\rfloor + 1$$

Et

$$\left( \left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2 \right) - \left( \left\lfloor \frac{n}{p+1} \right\rfloor + 1 \right) \leq \frac{1}{p+1} \leq 1$$

Donc il n'y a qu'un terme à rajouter à  $\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor + 1} \binom{n-pk}{k}$  pour la rentrer dans la seconde somme

Pour cela souhaite donc montrer que  $\left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2 > n - p \left( \left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2 \right)$  : on a

$$\begin{aligned}
\frac{n-p}{p+1} - 1 &< \left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor \Leftrightarrow (p+1) \left( \left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2 \right) > n - p + (p+1) \\
&\Leftrightarrow -(p+1) \left( \left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2 \right) < -n - 1 \\
&\Leftrightarrow n - (p+1) \left( \left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2 \right) < -1 \\
&\Leftrightarrow n - p \left( \left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2 \right) < -1 + \left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2 \\
&\Leftrightarrow n - p \left( \left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2 \right) < \left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2
\end{aligned}$$

Donc  $\binom{n-p \left( \left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2 \right)}{\left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2} = 0$ , ce qui permet d'utiliser  $\left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor + 2$  comme indice commun aux deux sommes, qu'on peut donc regrouper :

$$\begin{aligned}
F_{n+1}^{(p)} &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-p}{p+1} \rfloor + 2} \left( \binom{n-pk}{k-1} + \binom{n-pk}{k} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-p}{p+1} \rfloor + 1} \binom{(n+1)-pk}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n+1}{p+1} \rfloor + 1} \binom{(n+1)-pk}{k}
\end{aligned}$$

Donc  $P(n + 1)$  est vraie.

Par le principe de récurrence p-ième,  $P(n) : F_n^{(p)} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor + 1} \binom{n - pk}{k}$

Q.E.D.

**N.B:** pour  $p = 1$  et  $p = 0$ , on retombe bien sur des résultats connues a savoir:

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n^{(1)} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \binom{n - k}{k}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} = 2^n = F_n^{(0)}$$

Pour $p = 2$							Pour $p = 3$						
$\binom{1}{1} \binom{1}{1} \binom{1}{2}$							$\binom{1}{1} \binom{1}{1} \binom{1}{2} \binom{3}{3}$						
$\binom{1}{1}$	$\binom{1}{2}$	$\binom{1}{3}$	$\binom{3}{4}$	$\binom{6}{6}$	$\binom{19}{19}$	$\binom{13}{19}$	$\binom{1}{1}$	$\binom{1}{2}$	$\binom{1}{3}$	$\binom{3}{3}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{7}{4}$	$\binom{10}{5}$
$\binom{1}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{1}$			$\binom{1}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$	$\binom{1}{1}$	$\binom{4}{6}$	$\binom{4}{4}$	$\binom{1}{1}$
$\binom{1}{1}$	$\binom{5}{5}$	$\binom{10}{10}$	$\binom{10}{10}$	$\binom{5}{5}$	$\binom{1}{1}$		$\binom{1}{1}$	$\binom{5}{5}$	$\binom{10}{10}$	$\binom{10}{10}$	$\binom{5}{5}$	$\binom{1}{1}$	
$\binom{1}{1}$	$\binom{6}{6}$	$\binom{15}{15}$	$\binom{20}{20}$	$\binom{15}{15}$	$\binom{6}{6}$	$\binom{1}{1}$	$\binom{1}{1}$	$\binom{6}{6}$	$\binom{15}{15}$	$\binom{20}{20}$	$\binom{15}{15}$	$\binom{6}{6}$	$\binom{1}{1}$
$\binom{1}{1}$	$\binom{7}{7}$	$\binom{21}{21}$	$\binom{35}{35}$	$\binom{35}{35}$	$\binom{21}{21}$	$\binom{7}{7}$	$\binom{1}{1}$	$\binom{1}{1}$	$\binom{7}{7}$	$\binom{21}{21}$	$\binom{35}{35}$	$\binom{35}{35}$	$\binom{21}{21}$
$\binom{1}{1}$	$\binom{8}{8}$	$\binom{28}{28}$	$\binom{56}{56}$	$\binom{70}{70}$	$\binom{56}{56}$	$\binom{28}{28}$	$\binom{8}{8}$	$\binom{1}{1}$	$\binom{1}{1}$	$\binom{8}{8}$	$\binom{28}{28}$	$\binom{56}{56}$	$\binom{70}{70}$
$\binom{1}{1}$	$\binom{9}{9}$	$\binom{36}{36}$	$\binom{84}{84}$	$\binom{126}{126}$	$\binom{126}{126}$	$\binom{84}{84}$	$\binom{36}{36}$	$\binom{9}{9}$	$\binom{1}{1}$	$\binom{9}{9}$	$\binom{36}{36}$	$\binom{84}{84}$	$\binom{126}{126}$

On retrouve, comme pour Fibonacci, le fait que revient à sommer les valeurs du triangle de Pascale avec une diagonale qui est de plus en plus penchée en fonction de  $p$  pour retrouver les termes de la suite d'ordre  $p$ , exemple ci-dessus

## 5. Sur les limites de quotients des $(F_n^{(p)})$

Le ratio de deux termes successifs de la suite de Fibonacci a toujours été porteur de mystère et d'ésotérisme, néanmoins il en reste intéressant de s'y intéresser.

C'est pourquoi nous allons voir les propriétés de deux généralisation de la limite de quotient.

### 1<sup>ère</sup> généralisation:

Pour cette première généralisation, nous ne généraliserons par réellement le quotient, i.e. que nous allons nous intéresser à:

$$\forall p \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}^{(p)}}{F_n^{(p)}}$$

Regardons ce que cela donne pour certains  $p$ :

Pour  $p = 0$

On sait que  $\forall n \in \mathbb{N}, F_n^{(0)} = 2^n$

Ainsi

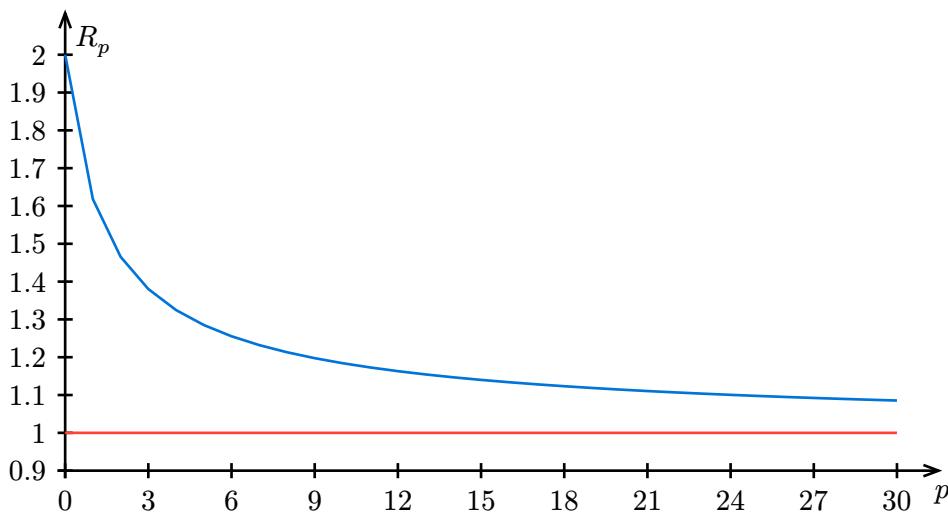
$$\frac{F_{n+1}^{(0)}}{F_n^{(0)}} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 2$$

Pour  $p = 1$

Il est connue que la limite du quotient la suite de Fibonacci tend vers  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

### Pour $p > 1$

Au delà 1, il devient difficile de calculer algébriquement le quotient, nous pouvons donc le calculer informatiquement jusqu'à  $p = 30$  :

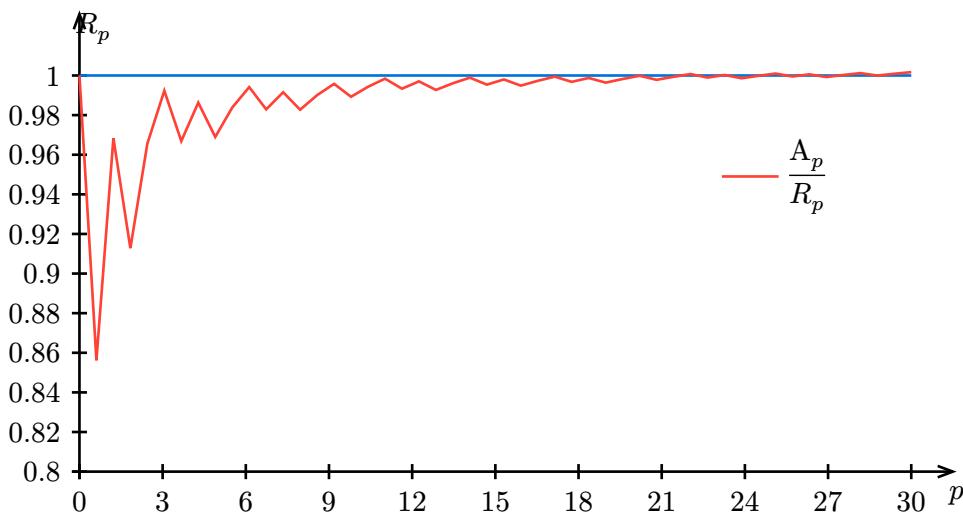


On remarque clairement que le quotient tend vers 1.

On peut définir l'approximation suivante à partir de cette courbe :

$$A_p = 1 + \frac{1}{(1+p)^k} \text{ avec } k \approx 0,710083$$

Dont voici le rapport avec  $R_p$  :



### Conjecture:

Le quotient noté  $R_p$  peut s'écrire avec une sorte de fraction continue :

$$R_p = 1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\left(1 + \dots\right)^p}\right)^p}$$

### 2<sup>ième</sup> généralisation

Pour mieux coller à la définition on peut au lieu de faire la limite du quotient entre deux termes successifs, on peut faire la limite du quotient entre deux termes séparés par  $p - 1$  termes noté  $Q_p$ , i.e.:

$$\forall p \in \mathbb{N}, Q_p = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+p}^{(p)}}{F_n^{(p)}}$$

Regardons également ce que cela donne pour certaine valeur de  $p$

#### Pour $p = 0$

On a:  $\forall n \in \mathbb{N}, F_n^{(0)} = 2^n$

Ainsi:

$$\frac{F_n^{(0)}}{F_n^{(0)}} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 = Q_0$$

#### Pour $p = 1$

Dans ce cas on retombe sur le même quotient étudié plus haut donc:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}^{(1)}}{F_n^{(1)}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = Q_1$$

#### Pour $p > 1$

De même que pour la 1<sup>er</sup> généralisation, on a calculé le quotient jusqu'à  $p = 30$  compilé également en un tableau:

$p$	quotient
0	1,0000
1	1,6180
2	2,1479
3	2,6297
4	3,0796
5	3,5063
6	3,9151
7	4,3093
8	4,6915
9	5,0635
10	5,4266

11	5,7820
12	6,1305
13	6,4728
14	6,8095
15	7,1411
16	7,4681
17	7,7908
18	8,1096
19	8,4247
20	8,7363

21	9,0447
22	9,3501
23	9,6527
24	9,9526
25	10,2499
26	10,5449
27	10,8375
28	11,1280
29	11,4164
30	11,7028

### Proposition 4:

Rappelle: on note  $R_p$  le ratio de la première généralisation et  $Q_p$  celle de la deuxième alors on a:

$$\forall p \in \mathbb{N}, (R_p)^p = Q_p$$

**Preuve:**

Soit  $p \in \mathbb{N}$

$$\frac{F_{n+p}^{(p)}}{F_n^{(p)}} = \prod_{k=n}^{n+p} \frac{F_k^{(p)}}{F_k^{(p)}}$$

En passant à la limite dans l'égalité et comme le quotient de deux termes successifs tend vers  $R_p$ , on obtient:

$$Q_p = \prod_{k=n}^{n+p} R_p = \prod_{k=0}^p R_p = (R_p)^p$$

Q.E.D.

## 6. Étude préliminaire de $\sum_{i_1=0}^{n-1} \sum_{i_2=0}^{i_1-1} \dots \sum_{i_k=0}^{i_{k-1}-1} 1$

Pour les besoins de l'étude des  $(F_n^{(p)})$ , nous avons besoin d'étudier et de battre un formule explicite de la somme suivante  $\sum_{i_1=0}^{n-1} \sum_{i_2=0}^{i_1-1} \dots \sum_{i_k=0}^{i_{k-1}-1} 1$

Pour cela nous définissons les polynômes suivant:

- **Définition temporaire :**

$$\forall k, n \in \mathbb{N}, H_k(n) = \sum_{i_1=0}^{n-1} \sum_{i_2=0}^{i_1-1} \dots \sum_{i_k=0}^{i_{k-1}-1} 1$$

En remarquant que  $\sum_{i_2=0}^{i_1-1} \dots \sum_{i_k=0}^{i_{k-1}-1} 1 = H_{k-1}(i)$

Nous avons que  $H_k$  suit la relation de récurrence suivante :

### Proposition 5:

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, H_k(n) = \sum_{i=0}^{n-1} H_{k-1}(i)$$

avec  $\forall n \in \mathbb{N}, H_0(n) = 1$

### Proposition 6:

$$\forall k, n \in \mathbb{N}, H_k(n) = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (n-i)$$

**Preuve:**

Pour prouver la proposition précédente, nous nous appuierons sur les mathématiques des différences finies, notamment celle présente dans *Finite Calculus: A Tutorial for Solving Nasty Sums* de David Gleich propriété 0

En reprenant les notations de David Gleich, nous avons  $\forall k, n \in \mathbb{N}, H_k(n) = \frac{1}{k!} n^k$

Ainsi montrons par récurrence sur  $k$  la propriété précédente :

- **Initialisation :**

pour  $k = 0$ :  $\forall n \in \mathbb{N}, H_0(n) = 1 = \frac{1}{0!} \prod_{i=0}^{-1} (n-i)$

- **Héritage :** Soit  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, H_k(n) = \frac{1}{k!}n^k$ , alors

soit  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} H_{k+1}(n) &= \sum_{i=0}^{n-1} H_k(i) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{k!} i^k \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-1} i^k \end{aligned}$$

Or par théorème de l'analyse discrète :  $\sum_{i=0}^{n-1} i^k = \sum_0^n i^k \delta_i$  et  $\sum_0^n i^k \delta_i = \frac{1}{k+1} n^{k+1}$

Ainsi :

$$H_k(n) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-1} i^k = \frac{1}{k!} \frac{1}{k+1} n^{k+1} = \frac{1}{(k+1)!} n^{k+1}$$

Donc par le principe de récurrence simple on a bien que :

$$\forall k, n \in \mathbb{N}, H_k(n) = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (n - i)$$

Nous définirons maintenant  $H_k$  par la propriété précédente car plus générale, ainsi :

- **Définition :**

$$\forall k \in \mathbb{N}, H_k = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (X - i)$$

Donc nous remarquons que  $H_k$  est un polynôme de degré  $\deg H_k = k$ ; de coefficient dominant  $\frac{1}{k!}$  et ayant les entiers  $\llbracket 0; k-1 \rrbracket$  comme racines pour  $k > 0$

On s'intéressera également au polynôme suivant :

- **Définition :**

$$\forall k, n \in \mathbb{N}, S_k(n) = \sum_{i_1=0}^n \sum_{i_2=0}^{i_1} \cdots \sum_{i_k=0}^{i_{k-1}} 1$$

De la même manière que pour  $H_k$  on peut en déduire la relation de récurrence suivante :

### **Proposition 7:**

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, S_{k+1}(n) = \sum_{i=0}^n S_k(i)$$

avec  $\forall n \in \mathbb{N}, S_0(n) = 1$

### **Proposition 8:**

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \geq k-1, S_k(n-k+1) = H_k(n)$$

#### **Preuve:**

Montrons la relation précédente par récurrence sur  $k$ :

- **Initialisation :**

On à bien que pour  $k = 0$ :  $\forall n \geq -1, S_0(n+1) = 1 = H_0(n)$

- **Hérité**: Soit  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \in k - 1, S_k(n - k + 1) = H_k(n)$ , alors:

Soit  $n \geq k - 1$

$$\begin{aligned} S_{k+1}(n - k) &= \sum_{i=1}^{n-k} S_k(i) = \sum_{i=1}^{n-k} H_k(i + k - 1) \\ &= \sum_{i=k}^{n-1} H_k(i) = \sum_{i=0}^{n-1} H_k(i) - \sum_{i=0}^{k-1} H_k(i) \\ &= H_{k+1}(n) - H_{k+1}(k) \end{aligned}$$

Or  $k \in \llbracket 0; k + 1 \rrbracket$  et est donc une racine de  $H_{k+1}$ , donc  $H_{k+1}(k) = 0$ , ainsi:

$$\forall n \geq k, S_{k+1}(n - (k + 1) + 1) = H_{k+1}(n)$$

Donc par principe de récurrence simple:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \geq k - 1, S_k(n - k + 1) = H_k(n)$$

### **Proposition 9:**

$$\forall k, n \in \mathbb{N}, S_k(n) = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (n + i)$$

De même on redéfinis  $S_k$  par cette proposition : **Définition :**

$$\forall k \in \mathbb{N}, S_k = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (X + i)$$

### **Preuve:**

celle-ci est immédiate par propriété 8, en effet:

$$\forall k, n \in \mathbb{N}, S_k(n) = H_k(n + k - 1) = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (n + k - 1 - i) = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (n + i)$$

## 7. Comportement de $(F_n^{(p)})$ sur $\mathbb{N}$

### **Proposition 10:**

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \llbracket 0; p \rrbracket, F_n^{(p)} = 1$$

### **Preuve:**

Ceci est immédiat via la définition

### **Proposition 11:**

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \llbracket p + 1; 2p + 1 \rrbracket, F_n^{(p)} = 1 + n - p$$

i.e. que pour  $n$  compris entre  $p$  et  $2p$ ,  $F_n^{(p)}$  se comporte comme une suite arithmétique de raison 1 et de premier termes  $1 - p$

**Preuve:**

Soient  $p \in \mathbb{N}$  et  $n \in \llbracket p+1; 2p+1 \rrbracket$

Alors comme  $n > p$  on peut appliquer la formule de récurrence,

Ainsi:

$$F_n^{(p)} = F_{n-1}^{(p)} + F_{n-p-1}^{(p)}$$

Or  $p+1 \leq n \leq 2p+1$  donc  $0 \leq n-p-1 \leq p$  donc  $F_{n-p-1}^{(p)} = 1$

Donc:

$$F_n^{(p)} = F_{n-1}^{(p)} + 1$$

Donc  $(F_n^{(p)})_{p+1 \leq n \leq 2p+1}$  est suite arithmétique de raison 1

et de premier termes  $F_{p+1}^{(p)} = F_p^{(p)} + F_0^{(p)} = 2$

Donc

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall \llbracket p+1; 2p+1 \rrbracket, F_n^{(p)} = 1 + n - p$$

**Q.E.D.**

**Conjecture:**

soit  $k \in \mathbb{N}$ , les termes modulo 2 de  $F_{kp+1}^{(p)}$  à  $F_{(k+1)p}^{(p)}$  forme un paterne

Note: Ceci à déjà été démontrer dans les cas particuliers pour  $k = 0$  et  $k = 1$

## 8. Dessin créé par $(F_n^{(p)})$ modulo 2

Si l'on prend sur une feuille à carreaux et que l'on mets dans la case d'indice  $n, p$ , le termes  $F_n^{(p)}$  modulo 2, et que l'on colorise la dite case en noir ou en blanc si sa valeur est 1 ou 0, comme ci-dessous:

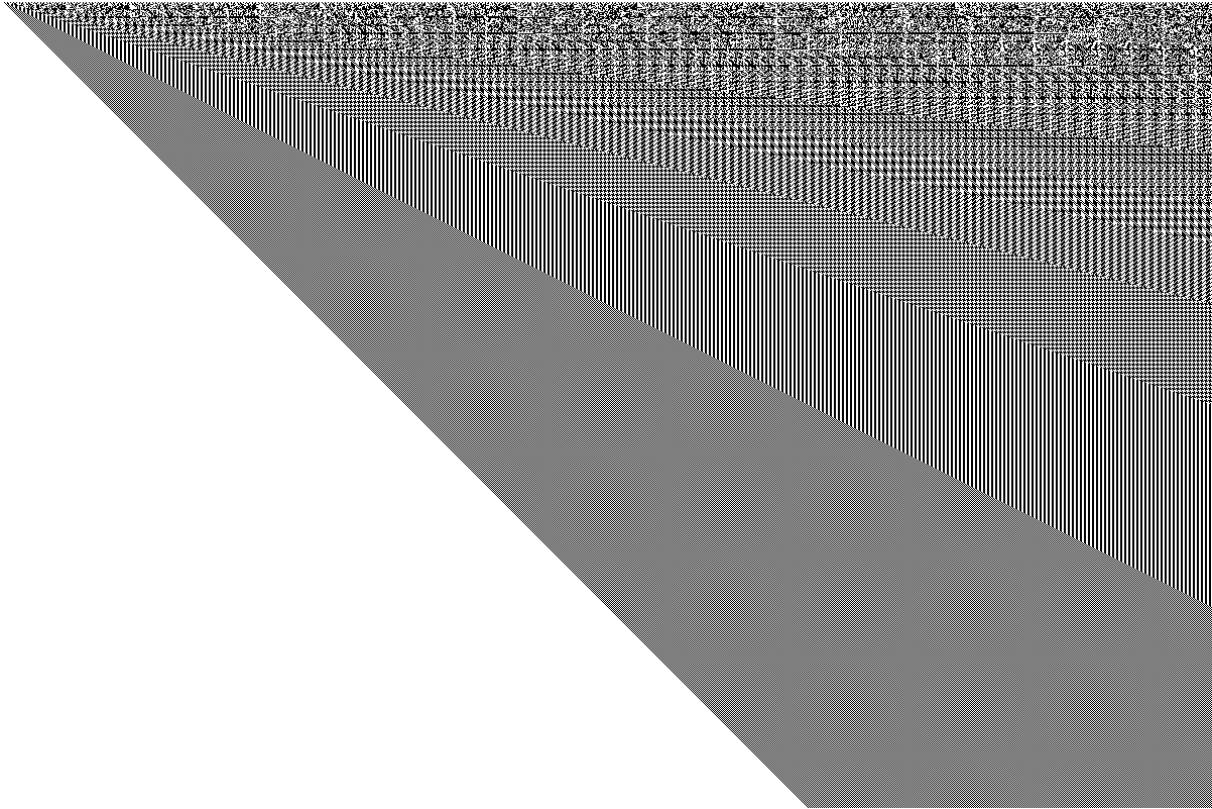


Figure 1: dessin réalisé pour un nombre petit de cases

On remarque en premier lieu que des motifs apparaissent entre les droites d'équations :  $y = -\frac{x}{n}$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ , ce qui revient à la conjecture précédente

De plus, si l'on prend de très grandes valeurs de  $p$  et de  $n$  on obtient :

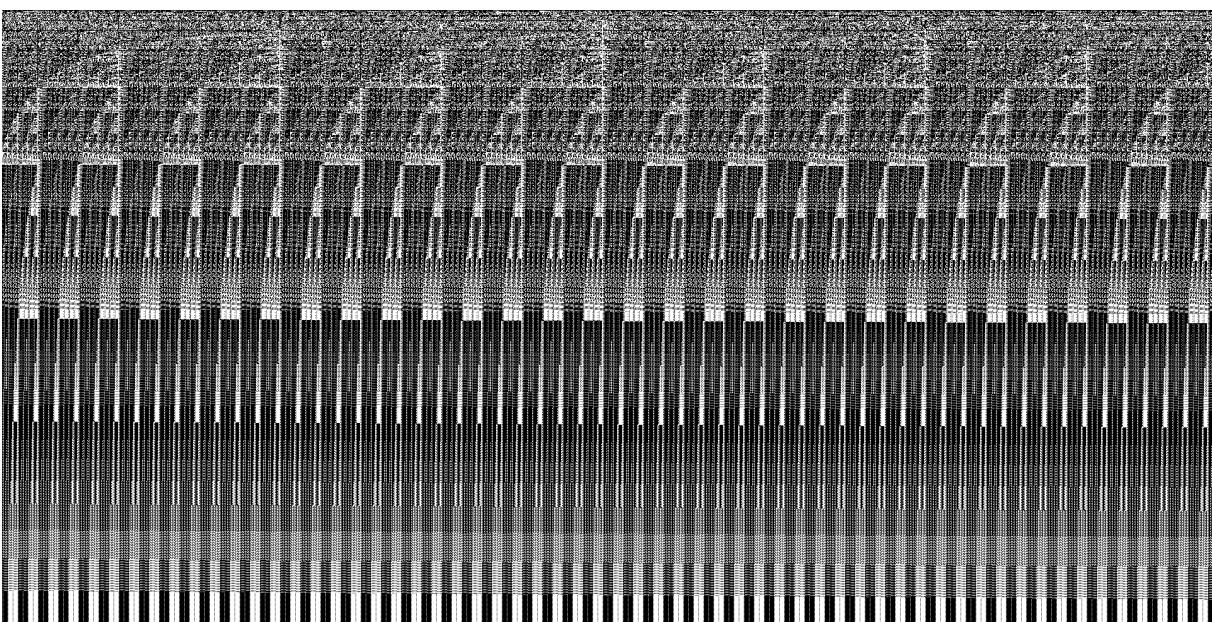


Figure 2: Motifs obtenus pour  $n \geq 10$  millions et  $p$  entre 0 et 10 mille

On voit ici, un triangle de Sierpiński étiré de plus en plus vers le bas et arrondie vers des valeurs bien précises.

On peut supposer que le triangle apparaît grâce aux liens entre les suites de Fibonacci d'ordre  $p$  et le triangle de Pascal, qui fait également apparaître cette fractale par construction similaire.

## 9. Propriétés diverses des suites ( $F_n^{(p)}$ )

### Proposition 12: Formule du jump

$$\forall p, n, n' \in \mathbb{N}, F_{n+n'}^{(p)} = F_n^{(p)} F_{n'}^{(p)} + \sum_{k=1}^p F_{n-k}^{(p)} F_{n'+k-p-1}^{(p)}$$

(NB: on admet que,  $\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \llbracket -p, -1 \rrbracket, F_n^{(p)} = 0$ , ce qui est cohérent avec les généralisation au négatifs de chaque suite, et la formule de récurrence. On peut d'ailleurs noter que cette formule (et sa preuve) restent valides dans cette généralisation aux  $n$  négatifs)

#### Preuve:

Il est plus simple, pour l'objet de la preuve, de considérer la formule équivalente suivante:

$$\forall p, i \in \mathbb{N}, \forall j \in \llbracket 0, i \rrbracket, F_i^{(p)} = F_{i-j}^{(p)} F_j^{(p)} + \sum_{k=1}^p F_{i-j-k}^{(p)} F_{j+k-p-1}^{(p)}$$

(C'est la formule précédente en prenant  $i = n + n'$  et  $j = n'$ )

Prouvons la proposition pour tout  $p$  et  $i$  par récurrence sur  $j$

Soit  $p, i \in \mathbb{N}$

Initialisation:  $j = 0$

$$F_{i-0}^{(p)} F_0^{(p)} + \sum_{k=1}^p F_{i-0-k}^{(p)} F_{0+k-p-1}^{(p)} = F_i^{(p)} \times 1 + \sum_{k=1}^p F_{i-k}^{(p)} \times 0 = F_i^{(p)}$$

Récurrence: supposons que  $\exists j \in \mathbb{N}, F_i^{(p)} = F_{i-j}^{(p)} F_j^{(p)} + \sum_{k=1}^p F_{i-j-k}^{(p)} F_{j+k-p-1}^{(p)}$  et posons un tel  $j$ . On a alors:

$$\begin{aligned} F_i^{(p)} &= F_{i-j}^{(p)} F_j^{(p)} + \sum_{k=1}^p F_{i-j-k}^{(p)} F_{j+k-p-1}^{(p)} \\ &= \left( F_{i-j-1}^{(p)} + F_{i-j-p}^{(p)} \right) F_j^{(p)} + \sum_{k=0}^{p-1} F_{i-j-k-1}^{(p)} F_{j+k+1-p-1}^{(p)} \\ &= F_{i-j-1}^{(p)} F_j^{(p)} + \underbrace{F_{i-j-p}^{(p)} F_{j+p+1-p-1}^{(p)}}_{\text{peut rentrer comme terme } p \text{ dans la somme}} + \sum_{k=1}^{p-1} F_{i-j-k-1}^{(p)} F_{j+k+1-p-1}^{(p)} + \underbrace{F_{i-j-1}^{(p)} F_{j-p}^{(p)}}_{\text{terme } k=0 \text{ de la somme}} \\ &= F_{i-j-1}^{(p)} \left( F_j^{(p)} + F_{j-p}^{(p)} \right) + \sum_{k=1}^p F_{i-j-k-1}^{(p)} F_{j+k+1-p-1}^{(p)} \\ &= F_{i-(j+1)}^{(p)} F_{j+1}^{(p)} + \sum_{k=1}^p F_{i-(j+1)-k}^{(p)} F_{(j+1)+k-p-1}^{(p)} \end{aligned}$$

On a alors prouvé que la formule est valable pour  $j + 1$ , donc, par récurrence sur  $j$  (et comme cela est vrai pour tout  $i$  et pour tout  $p$ ):

$$\forall p, i \in \mathbb{N}, \forall j \in \llbracket 0, i \rrbracket, F_i^{(p)} = F_{i-j}^{(p)} F_j^{(p)} + \sum_{k=1}^p F_{i-j-k}^{(p)} F_{j+k-p-1}^{(p)}$$

Q.E.D.

## Application

Cette formule, lorsque bien utilisée, permet de calculer en complexité temporelle  $O(p^2 * \log(n))$  le terme  $n$  de la suite  $F(p)$ , en ne manipulant que des entiers, et sans connaissance préalable de la suite (par exemple les racines du polynôme caractéristique) (voir algo\_jump.c)

## References