

Maths : DM 10

N°1.

soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$v_p(x^n - y^n) = v_p\left((x - y) \sum_{k=0}^{n-1} (x^{n-1-k} y^k)\right) = v_p(x - y) + v_p\left(\sum_{k=0}^{n-1} (x^{n-1-k} y^k)\right)$$

Or par l'énoncé $p \mid x - y$ donc $x \equiv y[p]$

$$\text{Ainsi } \sum_{k=0}^{n-1} (x^{n-1-k} y^k) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} (x^{n-1-k} y^k) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} (x^{n-1}) \equiv x^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} 1 \equiv nx^{n-1} [p]$$

Donc comme p premier à n et à x , il l'est aussi à x^{n-1} alors $p \nmid nx^{n-1}$

$$\text{Ainsi: } v_p\left(\sum_{k=0}^{n-1} (x^{n-1-k} y^k)\right) = 0$$

$$v_p(x^n - y^n) = v_p(x - y) + v_p\left(\sum_{k=0}^{n-1} (x^{n-1-k} y^k)\right) = v_p(x - y)$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, n \wedge p = 1 \Rightarrow v_p(x^n - y^n) = v_p(x - y)$$

N°2. a

On a 2 premier à x et à y , il sont donc tous les deux impairs

Or la somme de deux impairs est paire donc $2 \mid x + y$

Supposons par l'absurde que $4 \mid x + y$

Donc comme $4 \mid x - y$ alors $4 \mid x + y + x - y = 2x$

Donc $2 \mid x$, absurde !

Donc $4 = 2^2 \nmid x + y$ et $2 = 2^1 \mid x + y$

Ainsi $v_2(x + y) = 1$

Donc:

$$v_2(x^2 - y^2) = v_2(x - y) + v_2(x + y) = v_2(x - y) + 1$$

b.

Soit la propriété $P(n) : v_2(x^n - y^n) = v_2(x - y) + v_2(n)$

On a, $v_2(x - y) = v_2(x - y) + v_2(1)$

Donc pour $n = 1$ la propriété est vérifiée

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, P(k)$

- Si $n + 1$ est impair

alors $n + 1 \wedge 2 = 1$ et donc $v_2(n + 1) = 0$ et par la question 1

$$v_2(x^{n+1} - y^{n+1}) = v_2(x - y) = v_2(x - y) + v_2(n + 1)$$

- Si $n + 1$ est pair alors, $\exists k \in \mathbb{N}^*, n + 1 = 2k$

Soit un tel k alors $v_2(x^n - y^n) = v_2((x^k)^2 - (y^k)^2)$

Donc par la question 2.a

$$v_2((x^k)^2 - (y^k)^2) = v_2(x^k - y^k) + 1$$

Or $k < n$, donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence, ainsi

$$v_2(x^k - y^k) + 1 = v_2(x - y) + v_2(k) + 1$$

Or $v_2(2) = 1$, donc

$$\begin{aligned} v_2(x - y) + v_2(k) + 1 &= v_2(x - y) + v_2(k) + v_2(2) = v_2(x - y) + v_2(2k) \\ &= v_2(x - y) + v_2(n + 1) \end{aligned}$$

Ainsi dans les deux cas on a bien: $v_2(x^{n+1} - y^{n+1}) = v_2(x - y) + v_2(n + 1)$

Donc par le principe de récurrence forte $v_2(x^n - y^n) = v_2(x - y) + v_2(n)$

N°3. a.

Soit $k \in \llbracket 1; p - 1 \rrbracket$ et k impair

$$x^k = (y + (x - y))^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} y^i (x - y)^{k-i} = y^k + k(x - y)y^{k-1} + \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k}{i} y^i (x - y)^{k-i}$$

Or $0 \leq i \leq k - 2 \Leftrightarrow k - i \geq 2$ et comme $p \mid x - y$, donc $(x - y)^{k-i} \equiv 0[p^2]$

Donc $\sum_{i=0}^{k-2} \binom{k}{i} y^i (x - y)^{k-i} \equiv 0[p^2]$

Ainsi

$$x^k \equiv y^k + k(x - y)y^{k-1} + \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k}{i} y^i (x - y)^{k-i} \equiv y^k + k(x - y)y^{k-1} [p^2]$$

On a donc bien $x^k \equiv y^k + k(x - y)y^{k-1} [p^2]$

b.

$$\sum_{k=0}^{p-1} x^k y^{p-1-k} = y^{p-1} + \sum_{k=1}^{p-1} x^k y^{p-1-k}$$

D'après la question précédente et comme $k \in \llbracket 1 \rrbracket$

$$\begin{aligned} y^{p-1} + \sum_{k=1}^{p-1} x^k y^{p-1-k} &\equiv y^{p-1} + \sum_{k=1}^{p-1} y^{p-1} + \sum_{k=1}^{p-1} k(x-y)y^{p-2} \\ &\equiv py^{p-1} + (x-y)y^{p-2} \frac{p(p-1)}{2} \equiv py^{p-1} [p^2] \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \sum_{k=0}^{p-1} x^k y^{p-1-k} \equiv py^{p-1} [p^2]$$