

Physique

Table des Matières

Physique	1
I. Attention, achtung !	2
II. Incertitude	2
III. Optique Géométrique:	3
IV. Optique Ondulatoire	5
V. L'Électronisme:	11
VI. Mécaniques	21
VII. Énergie	30
VIII. Signaux	34
IX. Thermodynamie	38
X. Chimie	56
XI. Cinétique	58
XII. Électromagnétisme	61
XIII. Mécaniques quantique	71
XIV. Truc et astuce	76

I. Attention, achtung !

dans tout ce document les opérateur gradient, divergence et rotationnel sont noté avec la notation nabla, voir Trucs et Astuce - Nabla pour plus d'information

Ainsi les opérateurs deviennes :

$\overrightarrow{\text{grad}}f$

\leftrightarrow

$\vec{\nabla}f$

$\text{div } \vec{A}$

\leftrightarrow

$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$

$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}$

\leftrightarrow

$\vec{\nabla} \wedge \vec{A}$

II. Incertitude

1. Méthode statistique:

2
2. Méthode probabiliste:

2
3. Calcul sur les incertitudes:

2

1. Méthode statistique :

- \bar{x} = moyenne
- $u(x)$ = l'écart type

2. Méthode probabiliste :

- \bar{x} = moyenne
- $u(x) = \frac{\text{précision}}{\sqrt{3}}$

3. Calcul sur les incertitudes :

Relation	$Z = X + Y$	$Z = X - Y$	$Z = X \times Y$	$Z = \frac{X}{Y}$
Incertitude	$u(z) = \sqrt{u(x)^2 + u(y)^2}$		$\frac{u(z)}{ z } = \sqrt{\left(\frac{u(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{u(y)}{y}\right)^2}$	

III. Optique Géométrique :

1. réfraction	3
2. Longueur d'onde dans un milieu	3
3. Snell — Descartes	3
4. Formulaire de Gauss	3
5. Relation de Conjugaison et du Grandissement	4
6. PR & PP	4
7. Grossissement dans une lunette astronomique:	4

1. réfraction

$$n = \frac{c}{v}$$

- n = indice de réfraction
- c = célérité de la lumière $m.s^{-1}$
- v = célérité dans le milieu $m.s^{-1}$

2. Longueur d'onde dans un milieu

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$$

- n = indice de réfraction
- λ = longueur d'onde dans le milieu
- λ_0 = longueur d'onde dans le vide

3. Snell — Descartes

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2)$$

- n_i = indice de réfraction du milieu i
- θ_i = angle du rayon lumineux

4. Formulaire de Gauss

- rayons peu incliné par rapport à l'axe optique
- rayons proche de l'axe optique

5. Relation de Conjugaison et du Grandissement

	Relation de conjugaison	Formule du grandissement
Descartes (origine au centre)	$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$	$\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$
Newton (origine au foyer)	$\overline{F'A'} \times \overline{FA} = f'^2$	$\gamma = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} = \frac{f'}{\overline{FA}}$

6. PR & PP

- **PP**: Punctum Remotum, le point le plus éloigné perçus net par l’œil
- **PR**: Punctum Proximum, le point le plus proche perçus net par l’œil

7. Grossissement dans une lunette astronomique :

$$G = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{f'_1}{f'_2}$$

- G = le grossissement
- β (resp. α) = l’angle entre le rayon sortant (resp. entrant) et l’axe optique
- f'_1 (resp. f'_2) = la focale le la lentille 1 (resp. 2)

IV. Optique Ondulatoire

1. Rayon lumineux	5
2. Chemin optique	5
3. Surface d'onde	6
Théorème de Malus	6
4. Réflexion	6
5. Cas des trains d'ondes	6
6. Détecteur	6
7. Cohérence	6
8. Formule de Fresnel	6
9. Division du front d'onde	7
10. Division du paquet d'onde	7
11. Ordre d'interférences	7
Définition	7
Conséquence	7
Intuition	7
12. Contraste	7
13. Interféromètre de Michelson	7
Description du dispositif	8
Schéma équivalent	8
Lame d'air	10
Coin d'air	10
Spectre cannelé	10

1. Rayon lumineux

Un rayon lumineux est donné par la ligne champs du vecteur de Poyting

Leur marche est donné par l'optique géométrique

et de plus pour un même rayon lumineux :

$$\text{au point } S : s(S, t) = s_0(S) \cos(\omega t - \varphi(S))$$

$$\text{au point } M : s(M, t) = s_0(M) \cos(\omega t - \varphi(M))$$

Or le paquet met $t_{SM} = \frac{SM}{c}$ pour aller de S à M , d'où : $\varphi(M) = \varphi(S) + \omega t_{SM}$

Remarque : Si l'indice de réfraction est variable, $t_{SM} = \int_S^M \frac{n(l)}{c} dl$

2. Chemin optique

$$L_{SM} = \int_S^M n(l) dl$$

avec :

- L_{SM} = le chemin optique
- $n(l)$ = l'indice de réfraction

Remarque : Ainsi $t_{SM} = \frac{L_{SM}}{c}$

3. Surface d'onde

Une surface d'onde Σ est l'ensemble des points tel que L_{SM} est constant

Théorème de Malus

Les surfaces d'ondes Σ sont toujours perpendiculaire au chemin optique

4. Réflexion

Dans le cas d'une réflexion (sur un conducteur parfait) on ajoute un déphasage π au champs électrique ce qui revient à augmenter L_{SM} de $\frac{\lambda_0}{2}$

5. Cas des trains d'ondes

Dans le cas de train d'onde de temps caractérise τ_c , on a :

$$\tau \sim \frac{1}{\Delta\nu} \text{ avec } \Delta\nu \text{ largeur fréquentielle}$$

$$\text{Or } \Delta\nu = c \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) = c \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2}$$

Sauf que $c\tau = l_c$ longueur caractéristique

$$\text{D'où : } l_c = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}$$

6. Détecteur

Un Détecteur est sensible à $I = k \langle s^2 \rangle_\tau$ avec k une constante (putain), et τ le temps caractéristique

7. Cohérence

On dit que deux ondes sont cohérente lorsque

- Même plusation
 - Même source
 - Même polarisation
- } Même train d'onde

8. Formule de Fresnel

$$s_{\text{tot}}(M, t) = s_1(M, t) + s_2(M, t)$$

Ce qui donne pour l'intensité :

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2\sqrt{I_1(M)I_2(M)} \cos(\varphi)$$

avec $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta$, et $\delta = L_{SM}^{(2)} - L_{SM}^{(1)}$

Remarque : Pour $I_0 = I_1 = I_2$ on a : $I = 2I_0(1 + \cos(\varphi))$

9. Division du front d'onde

C'est quand on force deux ondes cohérentes à se rencontrer

Illustré par les fentes de Young

10. Division du paquet d'onde

C'est quand on force une même onde à interférer avec elle-même, par exemple grâce à un miroir semi-transparent

Illustré par un Michelson

11. Ordre d'interférences

Définition

$$p = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\delta}{\lambda_0}$$

avec :

- p = l'ordre d'interférences
- φ = la différence de phase
- δ = la différence de marche
- λ_0 = la longueur d'onde

Conséquence

Si $p \in \mathbb{N}$ alors il y a un maximum d'intensité et des interférences constructives

Si $p \in \frac{1}{2} + \mathbb{N}$ alors il y a un minimum d'intensité et des interférences destructives

Intuition

L'ordre d'interférence est le nombre de longueur d'onde de différence de marche entre deux rayons lumineux

12. Contraste

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

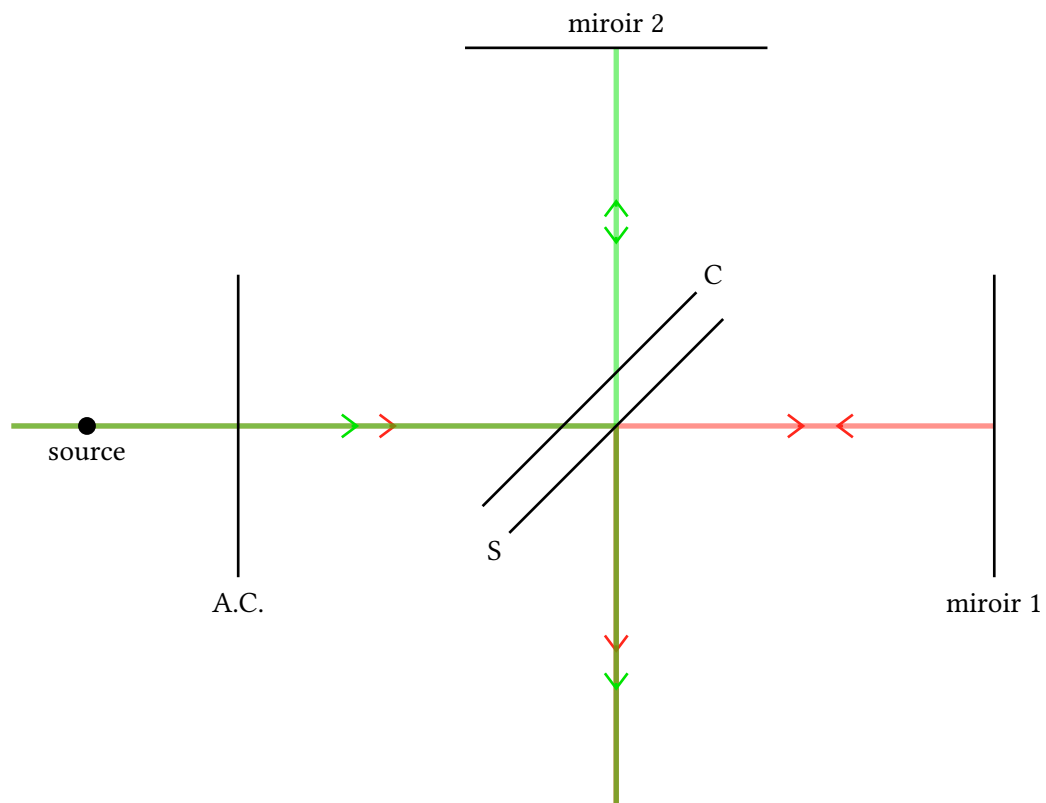
- C = le contraste
- I_{\max} = l'intensité maximale
- I_{\min} = l'intensité minimale

Remarque Si $I = \alpha I_0 (1 + f(x) \cos(\varphi))$, alors $C = f(x)$

13. Interféromètre de Michelson

L'interféromètre de Michelson est un dispositif de mesure basé sur l'interférence de deux ondes lumineuses par division du paquet d'onde

Description du dispositif



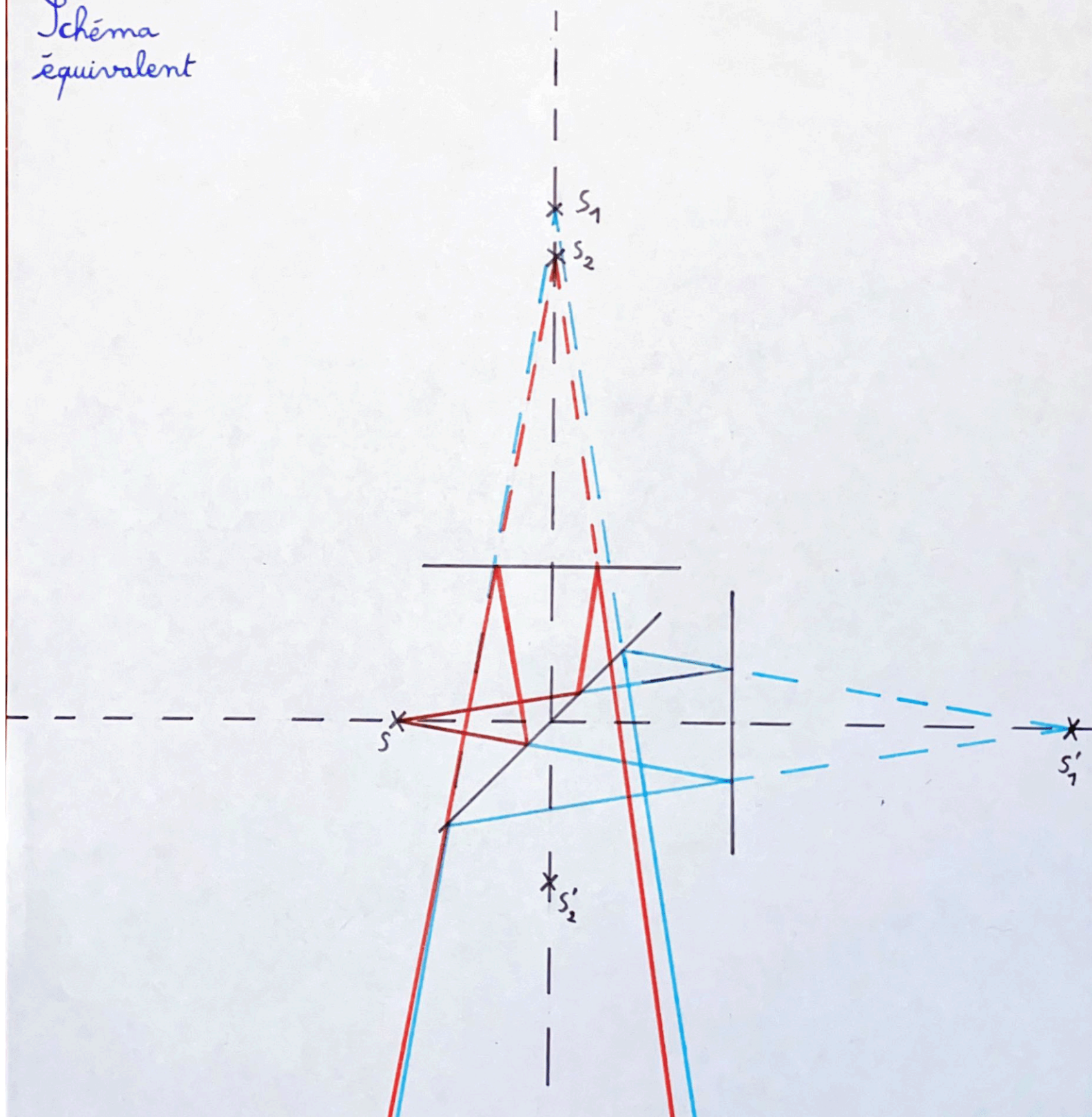
avec:

- A.C. = verre anticalorique
- S = le miroir semi-transparent
- C = la compensatrice

Schéma équivalent

Le schéma équivalent est une variante du schéma réel, où l'on retire la séparatrice en appliquant une superposition des miroir 1 et 2 i.e. refaire le schéma en une seule ligne, ce qui donne :

Schéma
équivalent



Lame d'air

Le montage en lame d'air consiste à déplacer latéralement le miroir 1

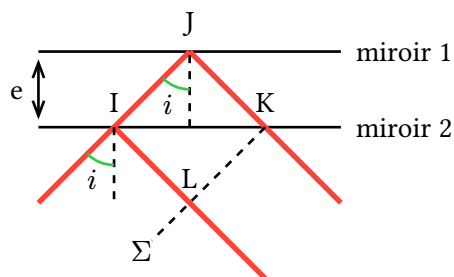
Dans ces conditions, on a : $L_{LM}^{(1)} = L_{KM}^{(2)}$ donc $\delta = 2IJ - IL$

Or

$$\cos(i) = \frac{e}{IJ}$$

$$\sin(i) = \frac{IL}{IK}$$

$$\tan(i) = \frac{IK}{2e}$$



Donc $\delta = 2e \cos(i)$

Comme δ est constant a i fixé, on obtient des cercles concentrique

Coin d'air

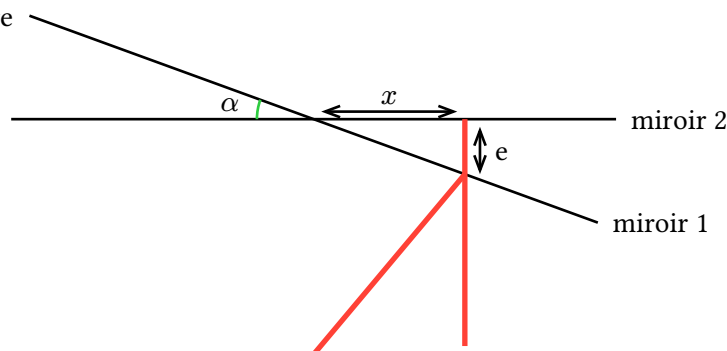
Le montage en coin d'air consiste a tourné le miroir 1 autour de sont centre

Dans ces conditions, on a : $\delta = 2BH = 2x \tan(\alpha)$

Comme δ est constant a BH fixé,

on obtient des franges réctiligne

Qand δ varie de λ , x varie de i (l'interfrange), i.e. $i = \frac{\lambda}{2\alpha}$



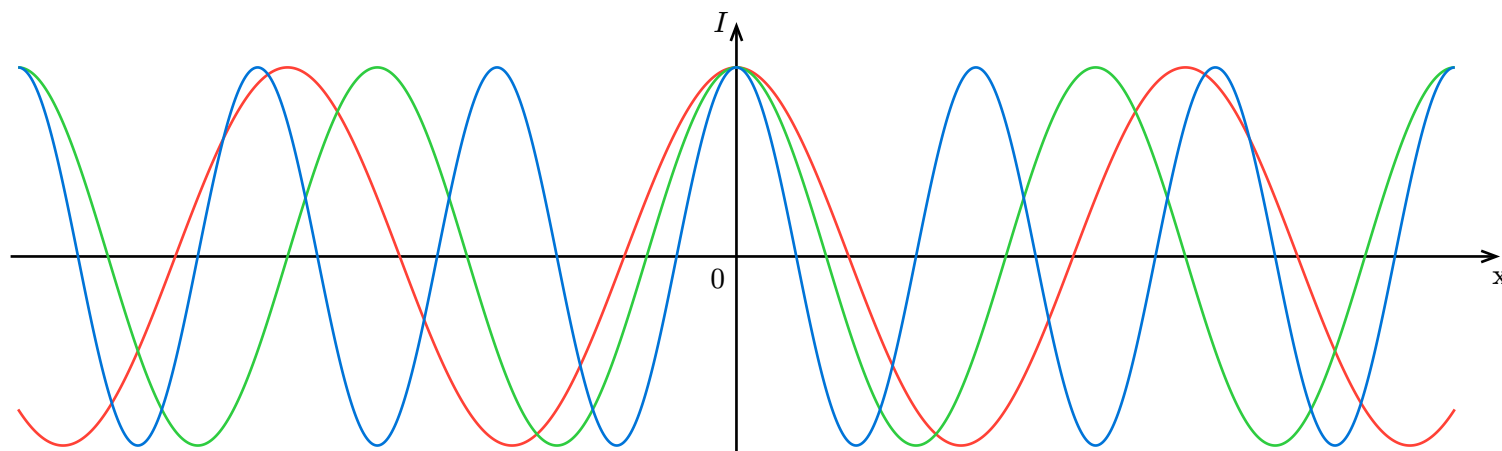
Spectre cannelé

Si on place de la lumière blanche dans un interféromètre de Michelson, chaque longueurs d'ondes qui compose de la lumière étant

non cohérente, alors chaque longueur d'onde interféreras avec elle même mais sur des distance différente

on obtient alors un soit des anneau concentrique coloré dans le cas d'une lame d'air,

soit des franges réctiligne coloré dans le cas d'un coin d'air



V. L'Électronisme :

1. Les formules à la con :	11
2. Circuit linéaire du 1 ^{er} ordre :	12
Méthode de résolution :	12
Méthode : Bilan de Puissance	12
Oscilateur Non Harmonique :	13
3. Régime sinusoïdale forcé :	13
notation complexe :	13
4. Impédance :	14
5. Impédance d'un dipole :	14
6. Lois de Kirchhoff :	14
7. Pont complexe :	15
8. valeur moyenne/efficace :	15
9. Développement en série de Fourier :	15
10. Filtrage :	16
type de filtre :	16
Fonction de transfert :	16
diagramme de Bode :	16
Bande passante et pulsation de coupure :	16
pulsation de résonance :	17
fonction de transfert canonique :	17
les diagramme de bodes associer :	18
11. Porte logique	20

1. Les formules à la con :

Nom	Formule	Variable
	$i = \frac{dq}{dt}$	<ul style="list-style-type: none"> • i = intensité • q = la charge
Lois des Nœuds	$\sum \varepsilon_k i_k = 0$	<ul style="list-style-type: none"> • i_k = intensité • $\varepsilon_k = +1 / -1$
Lois des Mailles	$\sum \varepsilon_k u_k = 0$	<ul style="list-style-type: none"> • u_k = la tension • $\varepsilon_k = +1 / -1$

Nom	Formule	Variable
Lois d'Ohm	$u_R = Ri$	<ul style="list-style-type: none"> • u_R = tension sur une résistance • R = la résistance • i = l'intensité
	$i = C \frac{du_C}{dt}$	<ul style="list-style-type: none"> • i = l'intensité • C = la capacité • u_C = la tension sur un condensateur
	$u_L = L \frac{di}{dt}$	<ul style="list-style-type: none"> • i = l'intensité • L = l'inductance • u_L = la tension sur une bobine
Pont Diviseur-Tension	$u_k = u \frac{R_k}{\sum R_i}$	<ul style="list-style-type: none"> • u = une tension • R = une résistance
Pont Diviseur-Courant	$i_k = \frac{\frac{1}{R_k}}{\sum \frac{1}{R_i}}$	<ul style="list-style-type: none"> • i = une intensité • R = une résistance

2. Circuit linéaire du 1^{er} ordre :

Méthode de résolution :

- Trouver les conditions initiales (les $u(0^+)$, $q(0^+)$, etc, grâce aux $u(0^-)$, $q(0^-)$, etc)
- Étudier le régime permanent ($t \rightarrow +\infty$)
- Écrire l'équation à l'aide d'une loi des Mailles / loi des nœuds, sous la forme $\frac{ds}{dt} + \frac{s}{\tau} = \frac{s(\infty)}{\tau}$
- Résoudre l'équa diff

Méthode : Bilan de Puissance

- reprendre la loi des mailles, la multipliée par i
- interpréter les termes
- intégrer sur le temps de 0 à $+\infty$

Oscilateur Non Harmonique :

- Forme Générale des Équa Diff:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 s(\infty)$$

Posons $r_{1,2}$ les racines du polynôme caractéristique

1. Régime pseudo-périodique $Q > \frac{1}{2}$ & $\Delta < 0$:

- $s_h(t) = e^{\Re(r)}(A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t))$ avec $\Omega = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} = \Im(r)$
- pseudo-période: $T = \frac{2\pi}{\Omega}$
- l'amortissement $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$
- Décrément logarithmique $\delta = \ln\left(\frac{A(t)}{A(t+T)}\right)$, où $A(t)$ = l'amplitude

2. Régime peu amorti $Q \gg 1$:

- pseudo-période $T = \frac{2\pi}{\Omega} \approx T_0$
- Nombre d'oscillations $N \approx \frac{4\tau}{T} \approx 1,3Q$

3. Régime apériodique:

- $s_h(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$
- $\tau_2 = -\frac{1}{r_2} \approx \frac{1}{\omega_0 Q}$ en système très amorti $Q \ll 1$

4. Régime Critique:

- $s_h(t) = (At + B)e^{rt}$
- $r = -\omega_0$ et $\tau = \frac{1}{\omega_0}$

3. Régime sinusoïdale forcé :

Dans le cas du régime sinusoïdale forcé, toutes les grandeurs sont de la forme :

$$s(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

avec:

- X_m = l'amplitude
- ω = la pulsation
- φ = le déphasage

notation complexe :

$$\underline{s}(t) = X_m e^{j\omega t} e^{j\varphi} = \underline{X_m} e^{j\omega t}$$

avec:

- $\underline{s}(t)$ = la notation complexe
- $\underline{X_m} = X_m e^{j\varphi}$ = l'amplitude complexe

- Avantage :
 1. dérivation : $\frac{ds}{dt} = j\omega s$
 2. integration : $\int s dt = \frac{s}{j\omega} + K$
 3. déphasage : $\varphi_{2/1} = \arg\left(\frac{s_2}{s_1}\right)$

4. Impédance :

$$\underline{Z} = \frac{u}{i}$$

avec :

- \underline{Z} = l'impédance
 - u = la tension
 - i = l'intensité
- Admittance : $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$

5. Impédance d'un dipole :

	Résistance	Condensateur	Bobine
Impédance complexe	$\underline{Z} = R$	$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C}$	$\underline{Z} = j\omega L$
Impédance	$Z = R$	$Z = \frac{1}{\omega C}$	$Z = \omega L$
Admittance complexe	$\underline{Y} = \frac{1}{R}$	$\underline{Y} = j\omega C$	$\underline{Y} = \frac{1}{j\omega L}$
$\omega \longrightarrow 0$	$Z \longrightarrow R$	$Z \longrightarrow +\infty$ interrupteur ouvert	$Z \longrightarrow 0$ fils
$\omega \longrightarrow +\infty$	$Z \longrightarrow R$	$Z \longrightarrow 0$ fils	$Z \longrightarrow +\infty$ interrupteur ouvert

6. Lois de Kirchhoff :

- Loi des nœuds :

$$\sum \varepsilon_k i_k = 0$$
- Loi des mailles :

$$\sum \varepsilon_k u_k = 0$$

7. Pont complexe :

- Pont Diviseur-Courant :

$$\underline{i_k} = i \frac{1/R_k}{\sum 1/R_i}$$

- Pont Diviseur-Tension :

$$\underline{u_k} = u \frac{R_k}{\sum R_i}$$

8. valeur moyenne/efficace :

- Valeur moyenne :

$$\langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt$$

- Valeur efficace :

$$S_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T X^2(t) dt}$$

- Mesures au multimètre :

Mode	Grandeur mesurée	Pour $u(t) = U_0 + U_m \cos(\omega t + \varphi)$
DC	Valeur moyenne	U_0
AC	Valeur efficace de la partie variable du signal	$\frac{U_m}{\sqrt{2}}$
AC + DC	Valeur efficace de tout le signal	$\sqrt{U_0^2 + \frac{U_m^2}{2}}$

9. Développement en série de Fourier :

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \cos(2\pi n f_n t + \varphi_n))$$

avec :

- A_0 = la composante continue
- A_n = l'amplitude de la composante sinusoïdale
- f_n = la fréquence de l'harmonique de rang n , (la fréquence fondamentale est $f_1 = \frac{1}{T}$)
- φ_n = le déphasage de l'harmonique de rang n

10. Filtrage :

type de filtre :

- Passe-bas : seul les signaux de basse fréquence passe
- Passe-haut : seul les signaux de haute fréquence passe
- Passe-bande : seul les signaux de fréquence dans une bande donnée passe
- Coupe-bande : seul les signaux de fréquence hors d'une bande donnée passe

Fonction de transfert :

$$\underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}}$$

avec :

- \underline{H} = la fonction de transfert
- $\underline{u_s}$ = la tension de sortie
- $\underline{u_e}$ = la tension d'entrée

1. le module de la fonction de transfert est le gain : $G = |\underline{H}|$

2. l'argument de H est la phase : $\phi = \arg(\underline{H})$

- On admet que toute fonction de transfert peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{\underline{N}}{\underline{D}}$$

avec : N et D deux polynôme premier entre eux,

alors on appelle l'ordre du filtre le degré de D

diagramme de Bode :

- en Gain : $G_{\text{db}} = 20 \log(G)$
- en Phase : $\varphi = \arg(\underline{H})$

Attention : ces diagrammes sont en échelle logarithmique

Bande passante et pulsation de coupure :

- Bande passante : c'est la bande de fréquence pour laquelle le gain est supérieur à -3 dB :

$$G > \frac{G_{\text{max}}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow G_{\text{dB, max}} > G_{\text{dB}} - 3 \text{ dB}$$

On définit ainsi la pulsation de coupure :

$$G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow G_{\text{dB, max}}(\omega_c) = G_{\text{dB}} - 3 \text{ dB}$$

pulsation de résonance :

c'est la pulsation pour la quel les filtres du second ordre on leur maximum s'il existe

Dans le cas des filtre du second ordre, il y a résonance si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

fonction de transfert canonique :

Type	Fonction de transfert	Gain - cas au limites		Phase - cas au limites	pulsation caractérisique
Passe-bas 1er ordre	$H = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$	$\omega \rightarrow +\infty$	$\sim 20 \log\left(\frac{\omega}{H_0 \omega_0}\right)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\omega_c = \pm \omega_0$
		$\omega \rightarrow 0$	$\sim -20 \log(H_0)$	0	
Passe-haut 1er ordre	$H = \frac{H_0 \times j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{H_0}{1 - j\frac{\omega_0}{\omega}}$	$\omega \rightarrow +\infty$	$\sim -20 \log(H_0)$	0	$\omega_c = \pm \omega_0$
		$\omega \rightarrow 0$	$\sim -20 \log\left(H_0 \frac{\omega}{\omega_0}\right)$	$\frac{\pi}{2}$	
Passe-bande 2eme ordre	$H = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$	$\omega \rightarrow +\infty$	$\sim 20 \log\left(\frac{Q}{H_0} \frac{\omega}{\omega_0}\right)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\omega_c = \frac{\omega_0}{2Q} \left(1 \pm \sqrt{1 + 4Q^2}\right)$ $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$
		$\omega \rightarrow 0$	$\sim -20 \log\left(\frac{H_0}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}\right)$	$\frac{\pi}{2}$	
Passe-haut 2eme ordre	$H = \frac{H_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}$	$\omega \rightarrow +\infty$	$\sim 40 \log\left(\sqrt{H_0} \frac{\omega}{\omega_0}\right)$	π	$\omega_c = \pm \omega_0$ $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$
		$\omega \rightarrow 0$	$\sim -20 \log(H_0)$	0	
Passe-bas 2eme ordre	$H = \frac{H_0}{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - \frac{j}{Q} \frac{\omega_0}{\omega}}$	$\omega \rightarrow +\infty$	$\sim -20 \log(H_0)$	0	$\omega_c = \pm \omega_0$ $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$
		$\omega \rightarrow 0$	$40 \log\left(\sqrt{H_0} \frac{\omega}{\omega_0}\right)$	$-\pi$	

les diagramme de bodes associer :

Sur l'axe des abscisse est représenté seulement la puissance de

- Passe-bas :

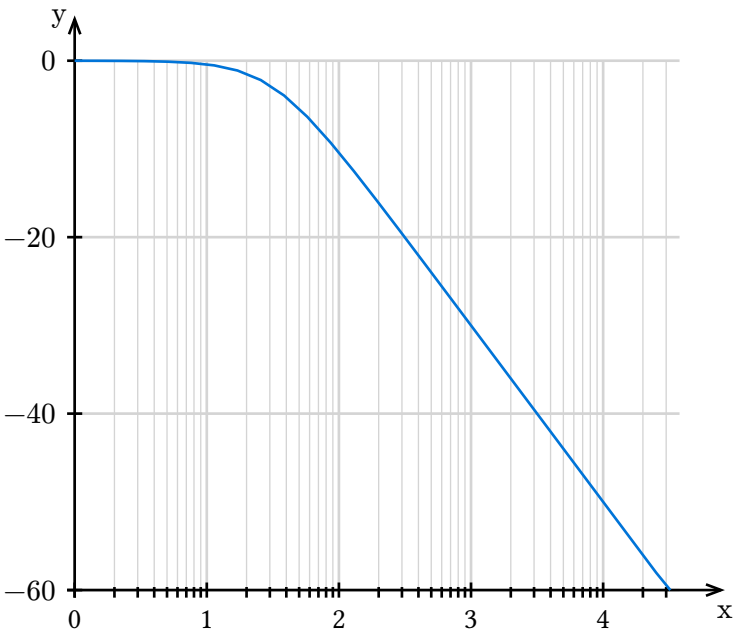


Fig. 1. – Gain

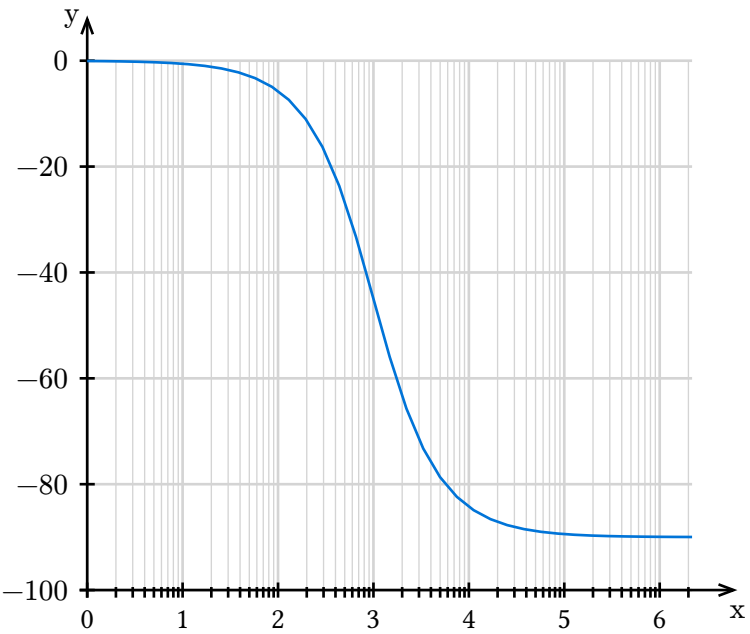


Fig. 2. – Phase

Passe-haut :

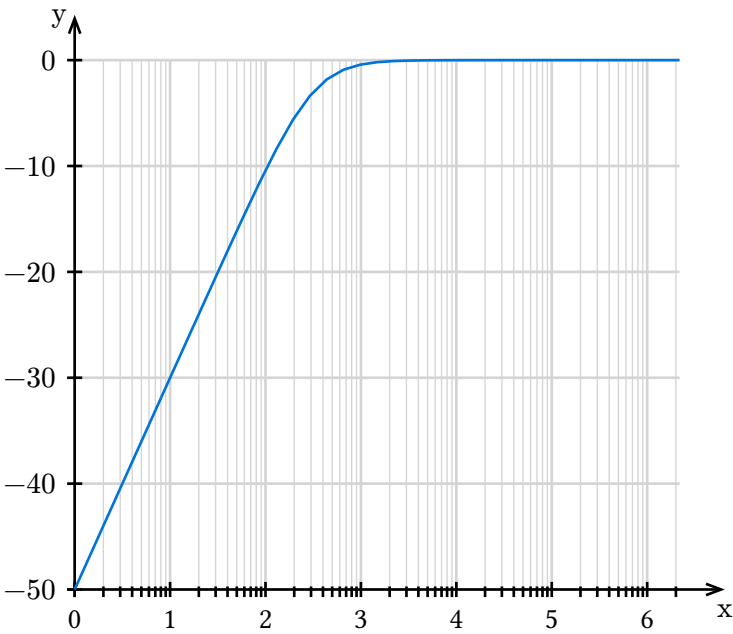


Fig. 3. – Gain

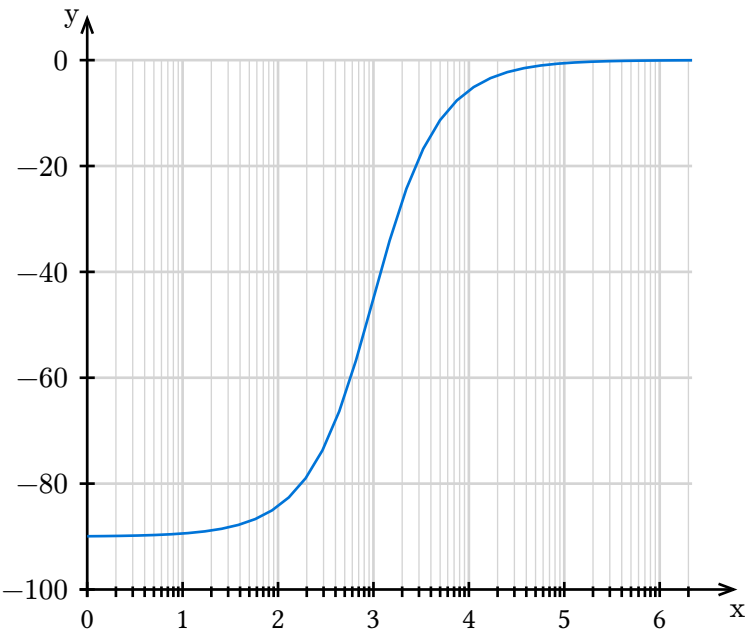


Fig. 4. – Phase

Passe-bande :

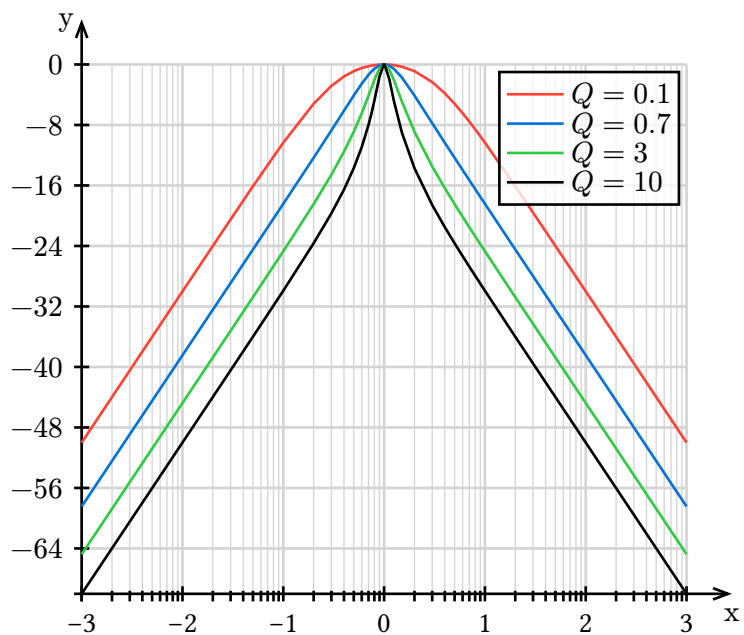


Fig. 5. – Gain

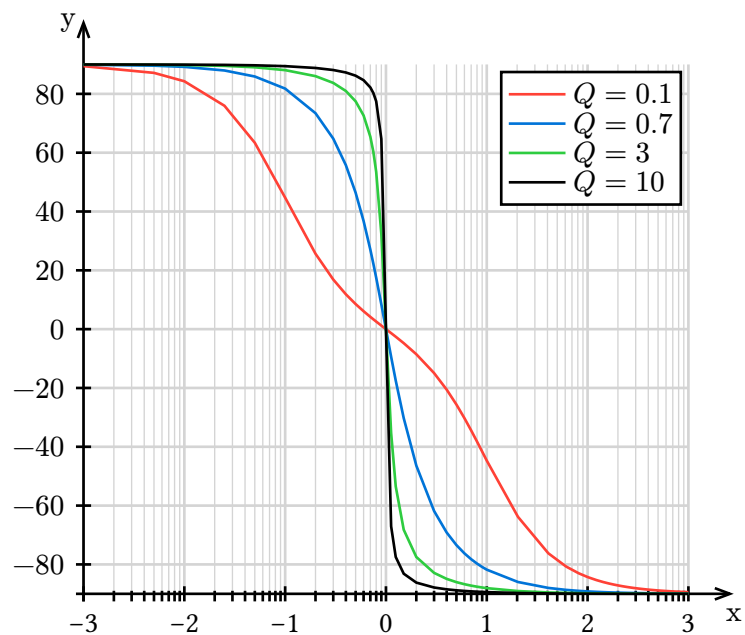


Fig. 6. – Phase

Passe-haut, 2^{ème} ordre :

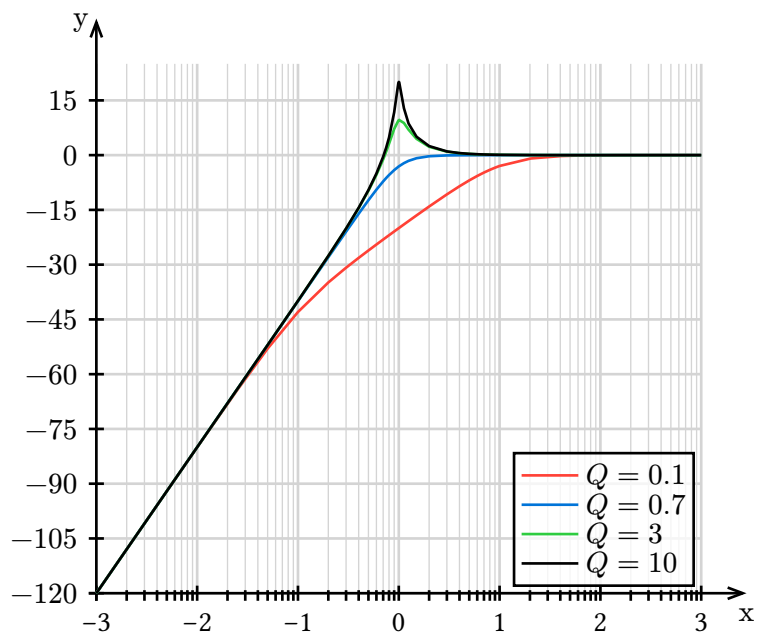


Fig. 7. – Gain

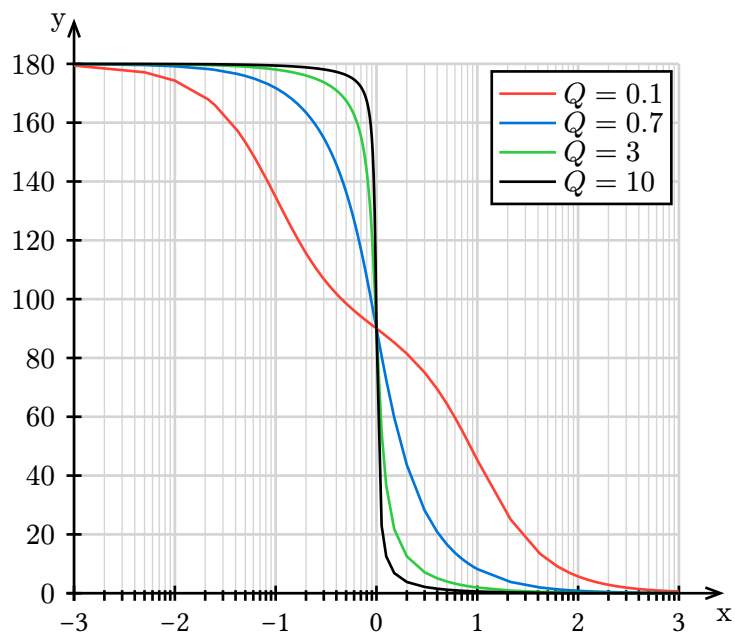


Fig. 8. – Phase

Passe-ba, 2^{ème} ordre :

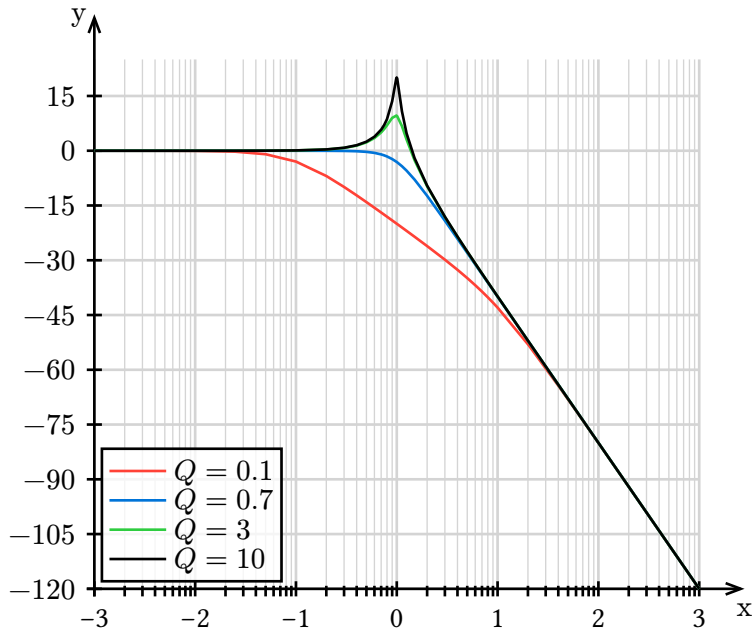


Fig. 9. – Gain

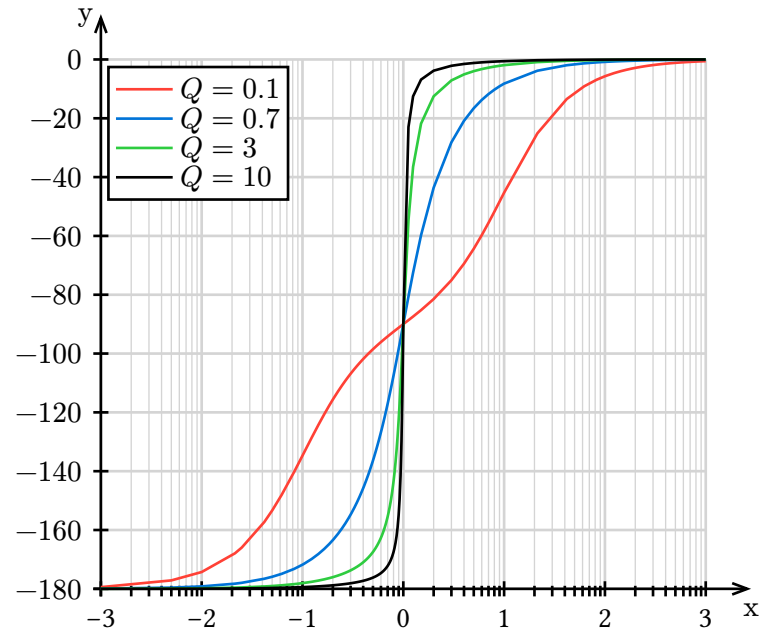


Fig. 10. – Phase

11. Porte logique

Opérateur	équation logique	symbole AFNOR	symbole ASGS	table de vérité	schéma à contact															
OUI	$S = a$			<table><tr><td>a</td><td>S</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr></table>	a	S	0	0	1	1										
a	S																			
0	0																			
1	1																			
NON	$S = \bar{a}$			<table><tr><td>a</td><td>S</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr></table>	a	S	0	1	1	0										
a	S																			
0	1																			
1	0																			
OU	$S = a + b$			<table><tr><td>a</td><td>b</td><td>S</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	a	b	S	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	
a	b	S																		
0	0	0																		
0	1	1																		
1	0	1																		
1	1	1																		
ET	$S = a.b$			<table><tr><td>a</td><td>b</td><td>S</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	a	b	S	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	
a	b	S																		
0	0	0																		
0	1	0																		
1	0	0																		
1	1	1																		
INHIBITION	$S = \bar{a}.b$			<table><tr><td>a</td><td>b</td><td>S</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	a	b	S	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	
a	b	S																		
0	0	0																		
0	1	1																		
1	0	0																		
1	1	0																		
NAND (NON ET)	$S = \overline{a.b} = \bar{a} + \bar{b}$			<table><tr><td>a</td><td>b</td><td>S</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	a	b	S	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	
a	b	S																		
0	0	1																		
0	1	1																		
1	0	1																		
1	1	0																		
NOR (NON OU)	$S = \overline{a + b} = \bar{a}.\bar{b}$			<table><tr><td>a</td><td>b</td><td>S</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	a	b	S	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	
a	b	S																		
0	0	1																		
0	1	0																		
1	0	0																		
1	1	0																		
OU EXCLUSIF	$S = a \oplus b$			<table><tr><td>a</td><td>b</td><td>S</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	a	b	S	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	
a	b	S																		
0	0	0																		
0	1	1																		
1	0	1																		
1	1	0																		
IDENTITE	$S = \overline{a \oplus b}$			<table><tr><td>a</td><td>b</td><td>S</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	a	b	S	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	
a	b	S																		
0	0	1																		
0	1	0																		
1	0	0																		
1	1	1																		

VI. Mécaniques

1. Loi de Hook	22
2. Force centrale:	22
3. Force Newtonienne:	22
4. Force de Gravitation:	22
5. Loi de Coulomb:	22
6. Force de frottement fluide:	23
7. Poussée d'Archimède:	23
8. Lois de Newton	23
9. Force de Lorentz	23
10. Force de Laplace	23
11. champ électrique dans un condensateur	23
12. Champs magnétique	24
Champs caractéristique	24
Bobines de Helmholtz	24
Moment magnétique	24
13. Rails de Laplace	25
14. Spire rectangulaire en rotation	25
15. Lois de Kepler	25
1 ^{er} lois	25
2 ^{eme} lois: Lois des aires	26
3 ^{eme} lois	26
16. Satellite Géostationnaire	26
17. Vitesse remarquable dans un champs de gravitation	26
Vitesse en orbite basse	26
Vitesse de l'ibération	27
18. Vecteur rotation	27
19. Loi de Coulomb pour le frottement	27
Cas de non glissement	27
Cas de glissement	27
20. Référentiel non galiléen	27
Loi de composition des vitesses	28
Loi de composition des accélérations	28

Accélération de Coriolis	28
Cas de la translation:	28
Cas de la rotation uniforme autour d'un axe fixe	28
Pseudo-force d'inertie d'entraînement	29
Pseudo-force d'inertie de Coriolis	29

1. Loi de Hook

$$\overrightarrow{F_{\text{el}}} = -k(l(t) - l_0)\vec{u}$$

- k = konstante de raideur
- l_0 = longueur dans le vide du ressort

2. Force centrale :

Une force centrale est une force constamment dirigé vers un centre O , et si le centre O est le centre du repère sphérique et/ou cylindrique, alors on peut la metre sous la forme: $\vec{f} = f\vec{u}_r$

3. Force Newtonienne :

Toute force centrale consevative qui s'exprime sous la forme :

$$\vec{f} = -\frac{k}{r^2}\vec{u}_r$$

Sont des forces Newtonienne

De plus, sont énergie potentielle est: $E_p = -\frac{k}{r} + C$

4. Force de Gravitation :

$$\overrightarrow{F_{A/B}} = -G\frac{m_A m_B}{d^2}\vec{u}_r$$

- G = la constante de Gravitation
- m = la masse de l'astre considéré
- d = la distance entre A et B

5. Loi de Coulomb :

$$\overrightarrow{F_{A/B}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{r^2} \vec{u}_r$$

- ϵ_0 = permittivité du vide
- q = la charge du corps considéré
- r = la distance entre A et B

6. Force de frottement fluide :

$$\vec{f} = -k_1 \vec{v} \text{ à faible vitesse}$$

$$\vec{f} = -k_2 v \vec{v} \text{ vitesse élever}$$

- $k_{1,2}$ = des coefficients

7. Poussée d'Archimède :

$$\vec{\Pi}_A = -m\vec{g}$$

$$\vec{\Pi}_A = -\rho V \vec{g}$$

- m = masse du fluide d'éplacée
- g = l'accélération de pesanteur
- ρ = masse volumique du fluide
- V = Volume du fluide d'éplacé

8. Lois de Newton

1. Principe d'inertie: Dans un référentiel galiléen, tout corps isolé est soit en mouvement rectiligne uniforme, soit immobile
2. $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$
3. Principe d'aciton-réaciton: $\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A}$

9. Force de Lorentz

$$\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

- q = la charge
- \vec{E} = champ électrique
- \vec{v} = la vitesse de la particule
- \vec{B} = le champ magnétique

10. Force de Laplace

$$\vec{F}_{\mathcal{L}} = \int_{P \in \widehat{MN}} I d\vec{l}_P \wedge \vec{B}_{\text{ext}}(P)$$

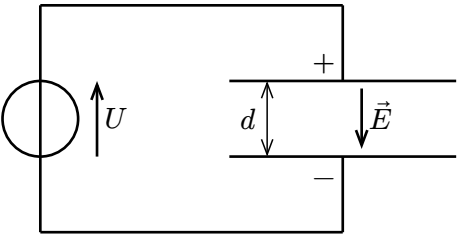
avec:

- \widehat{MN} = le fil conducteur
- I = l'intensité
- \vec{B}_{ext} = le champs magnétique extérieur

11. champ électrique dans un condensateur

$$E = \frac{U}{d}$$

- d = la distance entre les plaques
- U = la tension entre les plaques



12. Champs magnétique

Champs caractéristique

Ici :

- $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$
- i = l'intensité du courant
- l = la longueur de la bobine
- N = Le nombre de spire
- r = rayon de la bobine/spire

Où	champ produit
Fils infini	$\frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{u}_\theta$
Spire circulaire	proche de l'axe $\frac{\mu_0 i}{2r} \vec{u}_z$
	loin de l'axe $\frac{\mu_0 i}{2} \frac{r^2}{z^3} \vec{u}_z$
Solénoïde	à l'intérieur : $\frac{\mu_0 N i}{l} \vec{u}_z$
	à l'extérieur : 0
Bobine plate	proche de l'axe : $\frac{\mu_0 N i}{2r} \vec{u}_z$

La bobine plate ($l \ll r$) est comme une spire juste N fois plus forte, donc sufie de multipliée par N le cas de la spire

Bobines de Helmholtz

C'est un dispositif composé de deux bobines concentrique de même rayon R et de même nombre de spire N espacé d'une distance L , tel que $R \ll L$,

Ce dispositif permet de créé un champs uniforme entre les deux bobines

Moment magnétique

Pour une spire

$$\vec{m} = I \vec{S}$$

avec :

- \vec{m} = le moment magnétique
- I = l'intensité du courant
- \vec{S} = le vecteur surface

Dans le cas de plusieurs spire

$$\vec{m} = IN\vec{S}$$

avec N le nombre de spire

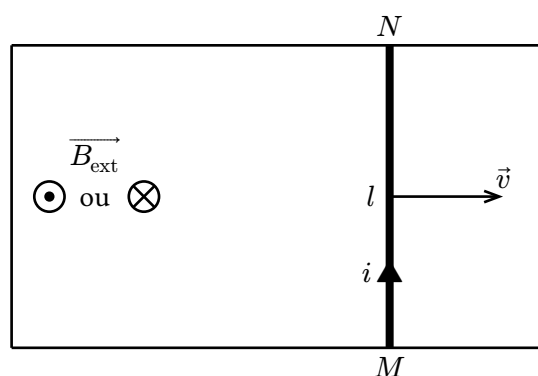
Pour un aimant permanent

$$\|\vec{m}\| = \text{volume de l'aimant} \times \text{aimantation volumique}$$

De plus on a :

$$\vec{B} \propto \vec{m}$$

13. Rails de Laplace



• **Résultante :**

$$\vec{F}_{\mathcal{L}} = i \overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{B}_{\text{ext}}$$

• **Puissance:**

$$\vec{P}_{\mathcal{L}} = (i \overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{B}_{\text{ext}}) \cdot \vec{v}$$

14. Spire rectangulaire en rotation

Dans une spire carré en rotation autour de l'axe O_z

• **Moment:**

$$\vec{\Gamma}_{\mathcal{L}} = \vec{m} \wedge \overrightarrow{B}_{\text{ext}} = i\vec{S} \wedge \overrightarrow{B}_{\text{ext}}$$

• **Puissance:**

$$\vec{P}_{\mathcal{L}} = \vec{\Gamma}_{\mathcal{L}} \times \omega$$

15. Lois de Kepler

1^{er} lois

Tout astre suit une orbite elliptique, dont le soleil est un des foyers

2^{eme} lois : Lois des aires

Les aires \mathcal{A} balayées par la ligne astre-soleil durant un même Δt , sont égaux :

$$\frac{d \mathcal{A}}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{C}{2}$$

où $C = r^2 \dot{\theta}$ est la constante des aires

3^{eme} lois

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G} M}$$

avec :

- T = La période de révolution
- a = Le demi grand axe
- \mathcal{G} = La constante de gravitation
- M = La masse de l'astre attracteur

16. Satellite Géostationnaire

C'est un satellite (naturelle ou non), qui reste au-dessus du même point de la surface de l'astre attracteur, en ce cas :

$$r = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$$

avec :

- r = le rayon de l'orbite géostationnaire
- G = la constante de gravitation
- M = la masse de l'astre attracteur
- T = la période de rotation de l'astre attracteur

17. Vitesse remarquable dans un champs de gravitation

Vitesse en orbite basse

$$v_b = \sqrt{\frac{GM}{\mathcal{R}}}$$

avec :

- v_b = la vitesse en orbite basse
- G = la constante de gravitation
- M = la masse de l'astre attracteur
- \mathcal{R} = le rayon de l'astre attracteur

Vitesse de l'ibération

$$v_l = \sqrt{\frac{2GM}{\mathcal{R}}}$$

avec :

- v_l = vitesse de l'ibération
- G = constante de gravitation
- M = la masse de l'astre attracteur
- \mathcal{R} = Le rayon de l'astre attracteur

18. Vecteur rotation

$$\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AB}$$

avec :

- $\vec{\Omega}$ = le vecteur rotation
- \overrightarrow{AB} = le vecteur position

19. Loi de Coulomb pour le frottement

Cas de non glissement

$$\|\overrightarrow{R_T}\| \leq \mu_s \|\overrightarrow{R_N}\|$$

avec :

- $\overrightarrow{R_T}$ = la réaction tangentiel
- $\overrightarrow{R_N}$ = la réaction normal
- μ_s = le coefficient de frottement statique

Cas de glissement

$$\|\overrightarrow{R_T}\| = \mu_d \|\overrightarrow{R_N}\|$$

avec :

- $\overrightarrow{R_T}$ = la réaction tangentiel
- $\overrightarrow{R_N}$ = la réaction normal
- μ_d = le coefficient de frottement dynamique

Remarque : $\mu_s \geq \mu_d$ et dans le cas de glissement $\overrightarrow{R_T}$ est opposé à \vec{v}_g

De plus on passe du cas de non glissement au cas de glissement si $\|\overrightarrow{R_T}\| = \mu_s \|\overrightarrow{R_N}\|$

20. Référentiel non galiléen

On travaille avec $R_0 = (O_0, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ comme référentiel absolu

Et $R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ comme référentiel relatif

Loi de composition des vitesses

$$\vec{v}(M)_{R_0} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_0O}}{dt} \right)_{R_0} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} + \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

avec :

- $\vec{v}(M)_{R_0}$ = la vitesse dans le référentiel R_0
- $\left(\frac{d\overrightarrow{O_0O}}{dt} \right)_{R_0}$ = la vitesse du référentiel R par rapport à R_0
- $\vec{\Omega}$ = le vecteur rotation

Loi de composition des accélérations

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_c + \vec{a}_e$$

avec :

- \vec{a}_a = l'accélération absolue
- \vec{a}_r = l'accélération relative
- \vec{a}_c = l'accélération de Coriolis
- \vec{a}_e = l'accélération d'entraînement

Accélération de Coriolis

$$\vec{a}_c = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$$

avec :

- \vec{a}_c = l'accélération de Coriolis
- $\vec{\Omega}$ = le vecteur rotation
- \vec{v}_r = la vitesse relative

Cas de la translation :

On a :

$$\vec{a}_c = 0$$

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{O_0O}}{dt^2}$$

$$\text{Donc } \vec{a}_a = \vec{a}_r + \frac{d^2\overrightarrow{O_0O}}{dt^2}$$

Cas de la rotation uniforme autour d'un axe fixe

On considère une rotation ω constante, et la distance de l'axe de rotation $\vec{\Delta} = \vec{u}_z$ au point M constante égale à R

$$\vec{a}_a = -R\omega^2 \vec{u}_r$$

$$\vec{a}_e = -\omega^2 \overrightarrow{HM}$$

$$\vec{\Omega} = \omega \vec{u}_z$$

$$\text{Donc } -R\omega \vec{u}_r = \vec{a}_r - \omega^2 \overrightarrow{HM} + \omega \vec{u}_z \wedge \vec{v}_r$$

Pseudo-force d'inertie d'entrainement

$$\vec{f}_e = -m\vec{a}_e$$

avec :

- \vec{f}_e = pseudo-force d'inertie d'entrainement
- m = la masse
- \vec{a}_e = l'accélération d'entrainement

Pseudo-force d'inertie de Coriolis

$$\vec{f}_c = -m\vec{a}_c = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$$

avec :

- \vec{f}_c = pseudo-force d'inertie de Coriolis
- m = la masse
- \vec{a}_c = l'accélération d'entrainement

Remarque : la pseudo-force de Coriolis ne travaille pas, en effet $-2m(\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r) \cdot \vec{v}_r = 0$

VII. Énergie

1. Travail élémentaire:	30
2. Travail	30
3. Puissance	31
4. Théorème de la puissance cinétique	31
5. Théorème de l'énergie cinétique	31
6. Énergie Potentielle	31
7. Énergie mécanique	31
8. Théorème de la puissance mécanique	31
9. Équilibre	31
Équilibre stable	31
Équilibre instable	31
10. les Énergies	32
11. Énergies potentielles effectives	32
12. Puissance et travail des actions mécaniques extérieures sur un solide	32
Puissance	32
Travail	33
13. Théorème de la puissance cinétique	33
14. Théorème de l'énergie cinétique	33
15. Énergie emmagasinée par une bobine	33

1. Travail élémentaire :

$$\delta W_R(\vec{f}) = \vec{f} \cdot d\vec{OM}$$

- \vec{f} : une force
- $d\vec{OM}$: un chemin élémentaire

2. Travail

$$W_{A \rightarrow B} = \int_{M \in AB} \delta(\vec{f}) = \int_{M \in AB} \vec{f} \cdot d\vec{OM}$$

3. Puissance

$$\mathcal{P}_{/R}(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \overrightarrow{v_{M/R}}$$

$$\mathcal{P}_{/R}(\vec{f}) dt = \delta W_{/R}(\vec{f})$$

4. Théorème de la puissance cinétique

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{f}_i) = \sum \vec{f}_i \cdot \vec{v}$$

5. Théorème de l'énergie cinétique

$$\Delta E_c = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{f}_i)$$

Au niveau infinitésimal :

$$dE_c = \sum \delta W(\vec{f}_i) = \sum \vec{f}_i \cdot d\overrightarrow{OM}$$

6. Énergie Potentiel

$$\Delta_{AB} E_p = -W_{AB}(\overrightarrow{f_C})$$

- \vec{f}_c : une force non conservative

7. Énergie mécanique

$$E_m = E_c + E_p$$

8. Théorème de la puissance mécanique

$$\frac{dE_m}{dt} = \sum \mathcal{P}(\overrightarrow{f_{NC}})$$

- E_m : L'énergie mécanique
- $\overrightarrow{f_{NC}}$: une force non conservative

9. Équilibre

Il y a équilibre en P lors que $\sum \vec{f}_i = \vec{0} \iff \overrightarrow{\text{grad}}(E_p(P)) = \vec{0}$

Équilibre stable

On dit que l'équilibre est stable si pour une légère perturbation il revient à cette position P ou si

$$\left(\frac{d^2 E_p}{dq_i^2} \right)_P > 0$$

avec q_i les coordonnées généraliser, i.e. $q_1 = x$, $q_2 = y$ et $q_3 = z$ en cartésien ou $q_1 = r$, $q_2 = \theta$ et $q_3 = z$ en cylindrique

Équilibre instable

On dit que l'équilibre est instable si pour une légère perturbation il s'éloigne de cette position P ou si

$$\left(\frac{d^2 E_p}{dq_i^2} \right)_P < 0$$

10. les Énergies

Nom	Formule
cinétique	$\frac{1}{2}mv^2$
cinétique du solide	$\sum_i \frac{1}{2}m_i \ \vec{v}_i\ ^2$
translation	$\frac{1}{2}m\ \vec{v}\ ^2$
rotation	$\frac{1}{2}J_{\Delta}\omega^2$
Potentielles	
Pesanteur	mgz
Gravitationnelle	$-G \frac{m \times m_A}{r}$
Élastique	$\frac{1}{2}k(l - l_0)^2$
Électrostatique	$q(-\vec{E} \cdot \overrightarrow{OM})$
Force centrale	$-\frac{k}{r}$
Mécaniques	
Gravitationnelle	$-\mathcal{G} \frac{mm_O}{2r_O}$

11. Énergies potentielles effectives

Dans le cas d'une force centrale l'énergie mécanique peut se mettre sous cette forme :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p, \text{eff}}(r)$$

- dans le cas de la force de Gravitation $E_{p, \text{eff}} = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + E_p(r)$, avec C la constante des aires, et $E_p(r)$ l'énergie potentielles de gravitation

12. Puissance et travail des actions mécanique extérieur sur un solide

Puissance

$$\mathcal{P}^{\text{ext}} = \mathcal{M}_{\Delta}^{\text{ext}} \times \omega$$

avec :

- $\mathcal{M}_{\Delta}^{\text{ext}}$ = les moment extérieurs

- \mathcal{P}^{ext} = la puissance des actions mecaniques exterieurs
- ω = la vitesse de rotation du solide

Travail

$$W_{A \rightarrow B}^{\text{ext}} = \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{P}^{\text{ext}} dt = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \mathcal{M}_{\Delta}^{\text{ext}} d\theta$$

avec :

- $\mathcal{M}_{\Delta}^{\text{ext}}$ = les moment exterieurs
- \mathcal{P}^{ext} = la puissance des actions mecaniques exterieurs
- $W_{A \rightarrow B}^{\text{ext}}$ le travaille des actions mecaniques exterieurs entre $A(t_A, \theta_A)$ et $B(t_B, \theta_B)$

13. Théorème de la puissance cinétique

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum \mathcal{P}^{\text{ext}} = \sum \mathcal{M}_{\Delta}^{\text{ext}} \times \omega$$

avec :

- E_c = L'énergie cinétique
- \mathcal{P}^{ext} = la puissance des actions mecaniques exterieurs
- $\mathcal{M}_{\Delta}^{\text{ext}}$ = le moment des actions mecaniques exterieurs
- ω = la vitesse de rotation du solide

14. Théorème de l'énergie cinétique

Entre les instant t_A et t_B :

$$\Delta_{t_A \rightarrow t_B} E_c = \sum W_{t_A \rightarrow t_B}^{\text{ext}}$$

avec :

- $\Delta_{t_A \rightarrow t_B} E_c$ = la variation d'énergie cinétique entre les deux instants
- $W_{t_A \rightarrow t_B}^{\text{ext}}$ = le travaille des actions mecaniques exterieurs entre les deux instants

15. Énergie emmagasinée par une bobine

$$E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L i^2$$

avec :

- L = l'inductance de la bobine
- i = l'intensité du courant qui parcourt la bobine

VIII. Signaux

1. Signaux unidirectionelle	34
Représentation temporelle	34
Représentation spatiale	34
2. Onde progressive sinusoïdale	34
Définition	34
caractéristique	35
Méthode : calcul du déphasage	35
3. Diffraction	35
Formule de la diffraction :	35
Interférences constructive, destructive et différence de marche .	36
conditions d'interférences constructive/destructive :	36
4. Fente de Young	36

1. Signaux unidirectionelle

Représentation temporelle

$$s(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

En particulier

$$s(x, t) = s\left(0, t - \frac{x}{c}\right)$$

Représentation spatiale

$$s(x, t) = F(x - ct)$$

En particulier

$$s(x, t) = s(x - ct, 0)$$

2. Onde progressive sinusoïdale

Définition

$$s(x, t) = A \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi\right) = A \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

avec :

- A = l'amplitude
- ω = la pulsation
- c = la célérité
- φ = un déphasage
- $k = \frac{\omega}{c}$ = la pulsation spatiale

caractéristique

caractéristique temporelle	caractéristique spacial
période temporelle T en s	longueur d'onde (période spacial) λ en m
fréquence temporelle $f = \frac{1}{T}$ en Hz	
pulsation temporelle $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ en $\text{rad} \cdot s^{-1}$	pulsation spacial $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ en $\text{rad} \cdot m^{-1}$

Méthode : calcul du déphasage

1. Mesurer la période T
2. déterminer si s_2 est en avance sur s_1 ou non :
 - si s_2 est en avance alors $\Delta\varphi_{2/1} > 0$
 - $\Delta\varphi_{2/1} < 0$ sinon

3. Mesurer le retard Δt

4. Déterminer la formule suivante : $|\Delta\varphi_{2/1}| = \frac{2\pi\Delta t}{T}$

- Démo :

Soit $s_1(t) = S_m \cos(\omega t - \frac{\omega}{c}x_1)$ et $s_2(t) = S_m \cos(\omega t - \frac{\omega}{c}x_2)$ deux mesures du même signal en l'abscisse x_1 et x_2 , ainsi

$\varphi_1 = -\frac{\omega}{c}x_1$ et $\varphi_2 = -\frac{\omega}{c}x_2$, donc :

$$\Delta\varphi_{2/1} = \varphi_2 - \varphi_1 = -\omega \underbrace{\frac{x_2 - x_1}{c}}_{=\Delta t} = -\omega\Delta t = -\frac{2\pi\Delta t}{T}$$

5. Calculer $\Delta\varphi_{2/1}$

3. Diffraction

Formule de la diffraction :

- Dans le cas d'une OPDM

$$\sin(\theta) = \frac{\lambda}{a}$$

avec :

- θ = valeur de l'angle de diffraction pour la première extinction
- λ = longueur d'onde
- a = taille de l'ouverture

Interférences constructive, destructive et différence de marche

1. Interférences constructive :

Quand l'amplitude des deux ondes est en phase (est maximale)

2. Interférences destructive :

Quand l'amplitude des deux ondes est en opposition de phase (est minimale)

3. Différence de marche :

La différence de marche est la différence de distance parcourue par les deux ondes,

$$\text{noté } \delta(M) = d_2(M) - d_1(M)$$

4. Relation entre déphasage et différence de marche :

$$\varphi_{2/1}(M) = -\frac{2\pi}{\lambda} \delta_{2/1}(M)$$

conditions d'interférences constructive/destructive :

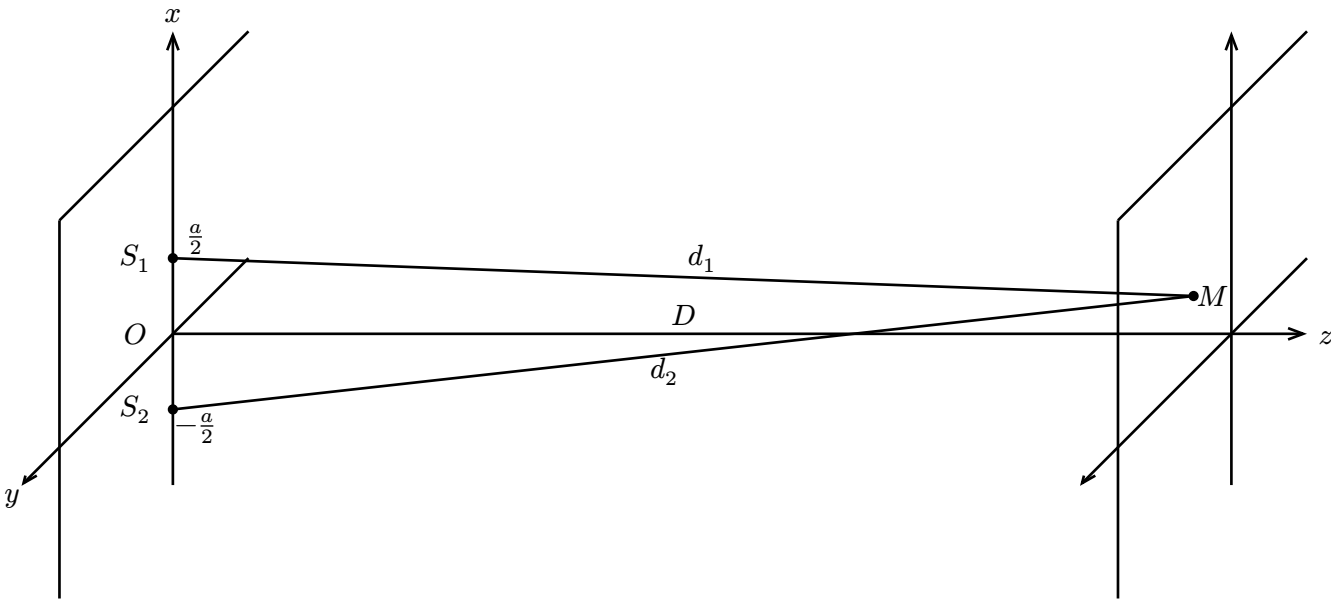
- Constructive :

$$\Delta\varphi_{2/1}(M) = 2n\pi \Leftrightarrow \delta_{2/1}(M) = n\lambda \text{ avec } n \in \mathbb{Z}$$

- Destructive :

$$\Delta\varphi_{2/1}(M) = (2n+1)\pi \Leftrightarrow \delta_{2/1}(M) = (2n+1)\frac{\lambda}{2} \text{ avec } n \in \mathbb{Z}$$

4. Fente de Young



$$d_1 = D\sqrt{1 + \frac{y^2}{D^2} + \frac{(x - \frac{a}{2})^2}{D^2}} \approx D + \frac{y^2 + (x - \frac{a}{2})^2}{2D} \approx D + \frac{y^2 + x^2 + \frac{a^2}{4} - ax}{2D}$$

$$d_2 = D\sqrt{1 + \frac{y^2}{D^2} + \frac{(x + \frac{a}{2})^2}{D^2}} \approx D + \frac{y^2 + (x + \frac{a}{2})^2}{2D} \approx D + \frac{y^2 + x^2 + \frac{a^2}{4} + ax}{2D}$$

Ainsi

$$\delta_{2/1}(M) = d_2(M) - d_1(M) \approx \frac{ax}{D}$$

1. Pour les interférences constructive :

$$\delta_{2/1}(M) = n\lambda \Leftrightarrow \frac{ax}{D} = n\lambda \Leftrightarrow x = n\lambda \frac{D}{a}$$

2. L'interfrange :

distance entre deux interférences constructive

$$i = \frac{\lambda D}{a}(n+1-1) = \frac{\lambda D}{a}$$

IX. Thermodynamie

1. Équilibre Thermodynamique	39
2. Pression	40
3. Modèle du gaz parfait	40
Hypothèse	40
Vitesse moyenne	40
4. Température cinétique:	41
5. Pression d'un gaz parfait:	41
6. Équation du gaz parfait:	41
7. Énergie interne:	41
8. Capacité thermique à volume constant:	41
9. Énergie interne d'un gaz parfait monoatomique:	42
10. Première loi de Joule:	42
11. L'énergie interne d'une phase condensée:	42
12. transformation thermodynamique:	42
13. Lois phénoménologiques de Newton:	42
14. Entalpie:	43
15. Capacité thermique à pression constante:	43
16. 2 ^e lois de Joule:	43
17. 1 ^{er} principe de la thermodynamique:	43
Formulation énergétique:	43
Formulation enthalpique:	44
18. transformation réversible	44
19. Entropie	44
20. 2 nd principe de la Thermodynamie	44
Énoncer	44
Cas d'un système isolé	45
Cas d'une transformation adiabatique réversible	45
Cas d'une transformation Monotherme	45
21. Variation d'entropie pour une phase condensée	45
22. Variation d'entropie d'un gaz parfait	45
23. Loi de Laplace	46
24. phase	47

25. Diagramme (P, T)	47
Définition	47
Point remarquable	47
26. Diagramme (P, V) ou Diagramme de Clapeyron	48
Définition	48
titre massique gaz/liquide	48
27. Théorème des moments	48
28. Enthalpie de transition de phase	48
29. Entropie de transition de phase	49
30. Machine thermique	49
Définition	49
Représentation	49
Théorème de Carnot	49
Cogénération	49
Rendement	49
Diagramme de Raveau	50
31. Transfert thermique	52
Modes de Transfert	52
Flux thermique	52
Loi de Fourier	52
Équation de la diffusion thermique	52
conditions au limites entre deux solides:	53
Loi phénoménologique de Newton:	53
Exemple classique: ailette de refroidissement	53
Étude en régime permanent	53
32. Corps opaque	54
33. Corps Noir	54
34. Loi de Stefan-Boltzmann	54
35. Loi de Wien	54
36. Loi de Plank:	55

1. Équilibre Thermodynamique

Un système est dit en équilibre thermodynamique macroscopique si:

- toutes ces grandeurs d'états sont constantes au cours du temps

- et il est isolé (*i.e.* il n'échange ni énergie, ni matière avec l'extérieur)

C'est à dire que le système est en équilibre thermodynamique si :

1. Équilibre thermique :

- La température est uniforme dans tout le système
- au niveau d'une paroi diatherme, la température est la même des deux côtés

2. Équilibre mécanique :

- La pression est uniforme dans tout le système
- aucun élément mobile ne bouge

3. Équilibre chimique :

- La concentration est uniforme dans tout le système
- les réactions chimiques sont à l'arrêt

4. aucun échange de matière ni d'énergie avec l'extérieur

2. Pression

$$P = \frac{F}{S}$$

avec :

- P = la pression
- F = la force exercée par le gaz sur la surface
- S = la surface

3. Modèle du gaz parfait

Hypothèse

- les particules sont ponctuelles
- les particules sont sans interactions entre elles

Vitesse moyenne

1. Vecteur vitesse moyenne :

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{v}_i$$

2. vitesse quadratique moyenne, noté u :

$$u = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2}$$

avec :

- N = le nombre de particules
- v_i = la vitesse de la particule i

- u = la vitesse quadratique moyenne

4. Température cinétique :

$$\mathcal{E}_{c,1} = \frac{3}{2}k_B T = \left\langle \frac{1}{2}mv^2 \right\rangle = \frac{1}{2}mu^2$$

avec :

- $\mathcal{E}_{c,1}$ = l'énergie cinétique moyenne par particule
- k_B = la constante de Boltzmann ($1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$)
- T = la température
- m = la masse de la particule
- u = la vitesse quadratique moyenne

5. Pression d'un gaz parfait :

$$P = \frac{1}{3}n^*mu^2$$

avec :

- P = la pression
- n^* = le nombre de particules par unité de volume
- m = la masse de la particule

6. Équation du gaz parfait :

$$PV = n \mathcal{R} T$$

avec :

- P = la pression
- V = le volume
- n = le nombre de mole
- \mathcal{R} = la constante des gaz parfait ($8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$)
- T = la température

7. Énergie interne :

$$U = \mathcal{E}_{c,\text{micro}} + \mathcal{E}_{p,\text{int}}$$

avec :

- $\mathcal{E}_{c,\text{micro}}$ = l'énergie cinétique microscopique
- $\mathcal{E}_{p,\text{int}}$ = l'énergies potentielles interactions

8. Capacité thermique à volume constant :

$$dU = C_V dT \Leftrightarrow C_V = \left(\frac{dU}{dT} \right)_V$$

avec :

- C_V = la capacité thermique à volume constant
- U = l'énergie interne
- T = la température

9. Énergie interne d'un gaz parfait monoatomique :

$$U_m = \frac{3}{2} \mathcal{R} T$$

et

$$C_{Vm} = \frac{3}{2} \mathcal{R}$$

avec :

- U_m = l'énergie interne molaire
- C_{Vm} = la capacité thermique molaire à volume constant
- T = la température
- \mathcal{R} = la constante des gaz parfait

10. Première loi de Joule :

- L'énergie interne molaire U_m d'un gaz parfait ne dépend que de la température :

$$U_m = U_m(T)$$

Ainsi l'énergie interne au cours d'une transformation est :

$$\Delta U_m = U_m(T_f) - U_m(T_i) = \int_{T_i}^{T_f} C_{Vm}(T) dT$$

11. L'énergie interne d'une phase condensée :

$$\Delta U_m = U_m(T_f) - U_m(T_i) = \int_{T_i}^{T_f} C_{Vm}(T) dT$$

12. transformation thermodynamique :

- Isobare : $P = cst$
- Isochore : $V = cst$
- Isotherme : $T = cst$
- Adiabatique : $Q = 0$
- Monobare : $P_{\text{ext}} = cst$
- Thermostat : $T_{\text{ext}} = cst$

13. Lois phénoménologiques de Newton :

$$\Phi_{s \rightarrow f} = h(T_s - T_f)S$$

avec :

- $\Phi_{s \rightarrow f}$ = le flux de chaleur

- h = le coefficient de conductivité thermique
- T_s = la température du solide
- T_f = la température du fluide
- S = la surface de contact

14. Entalpie :

$$H = U + PV$$

avec :

- H = l'enthalpie
- U = l'énergie interne
- P = la pression
- V = le volume

15. Capacité thermique à pression constante :

$$dH = C_P dT \Leftrightarrow C_P = \left(\frac{dH}{dT} \right)_P$$

avec :

- C_P = la capacité thermique à pression constante
- H = l'enthalpie
- T = la température

16. 2^e lois de Joule :

$$\Delta H_m = H_m(T_f) - H_m(T_i) = \int_{T_i}^{T_f} C_P(T) dT$$

avec :

- H_m = l'enthalpie molaire
- C_P = la capacité thermique molaire à pression constante
- T = la température

17. 1^{er} principe de la thermodynamique :

Formulation énergétique :

1. Cas Générale :

$$\Delta E_{\text{tot}} = W + Q$$

2. Pour un système au repos macroscopique

$$\Delta U = W + Q$$

avec :

- ΔU = la variation d'énergie interne

- W = le travail échangé
- Q = la chaleur échangée

Formulation enthalpique :

$$\Delta H = W' + Q$$

avec :

- ΔH = la variation d'enthalpie
- W' = le travail des forces extérieures
- Q = la chaleur échangée

18. transformation réversible

Une transformation est dite réversible si on peut la ramener dans son état initial

Pour qu'une transformation soit réversible, il faut que :

- elle soit infiniment lente
- à chaque étape de la transformation, elle doit être à l'équilibre avec le milieu extérieur
- les phénomènes dissipatifs sont négligeables (ex : frottement)

Si un des cas suivants apparaît, alors la transformation n'est plus réversible :

1. Des forces de frottements
2. Des phénomènes de diffusion, (ex : goutte d'encre dans de l'eau)
3. Des réactions chimiques
4. Le passage d'un courant électrique dans une résistance

19. Entropie

On définit pour tout système, une fonction d'état extensive notée S , telle que l'évolution d'un système isolé s'accompagne d'une augmentation d'Entropie

- Dans le cas non réversible : $S_{\text{finale}} > S_{\text{initial}}$
- Dans le cas réversible : $S_{\text{finale}} = S_{\text{initial}}$

20. 2nd principe de la Thermodynamie

Énoncer

Pour un système fermé :

$$\Delta S = S_{\text{éch}} + S_{\text{créée}}$$

avec :

- $S_{\text{éch}}$ = l'entropie échangée, lorsque le système est en contact avec un thermostat

$$S_{\text{éch}} = \sum_i \frac{Q_i}{T_i}$$

avec Q_i transfert thermique reçu par le thermostat T_i

- $S_{\text{créée}} =$ entropie créée :
 - $S_{\text{créée}} < 0$: transformation impossible
 - $S_{\text{créée}} = 0$: transformation réversible
 - $S_{\text{créée}} > 0$: transformation non réversible

Cas d'un système isolé

Dans le cas d'un système isolé $S_{\text{éch}} = 0$, donc $\Delta S = S_{\text{créée}} \geq 0$.

Ainsi dans un système isolé l'entropie ne fait qu'augmenter jusqu'à atteindre son maximum à l'équilibre thermodynamique

Cas d'une transformation adiabatique réversible

Dans ce cas $S_{\text{éch}} = 0$ car adiabatique et $S_{\text{créée}} = 0$ car réversible,

donc $\Delta S = 0$, ainsi la transformation est dite isentropique

Cas d'une transformation Monotherme

Dans ce cas le milieu extérieur est un thermostat de température $T_e = \text{cst}$, alors on a :

$$S_{\text{éch}} = \frac{Q}{T_e}$$

avec Q = le transfert thermique entre le système et l'extérieur

21. Variation d'entropie pour une phase condensée

- Écriture molaire :

$$S_m(T) = C_m \ln\left(\frac{T}{T_{\text{ref}}}\right) + S_{m, \text{ref}}$$

- Écriture massique :

$$s(t) = c \ln\left(\frac{T}{T_{\text{ref}}}\right) + s_{\text{ref}}$$

avec C_m (resp c) la capacité thermique molaire (resp massique)

- Variation d'entropie entre les deux états A et B :

$$\Delta S = nC_m \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) = mc \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right)$$

22. Variation d'entropie d'un gaz parfait

- Écriture molaire :

1. En fonction de T et V :

$$S_m(T, V) = \frac{\mathcal{R}}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{T}{T_{\text{ref}}}\right) + \mathcal{R} \ln\left(\frac{V}{V_{\text{ref}}}\right) + S_{m, \text{ref}}$$

2. En fonction de T et P :

$$S_m(T, P) = \frac{\mathcal{R}}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{T}{T_{\text{ref}}}\right) - \mathcal{R} \ln\left(\frac{P}{P_{\text{ref}}}\right) + S_{m, \text{ref}}$$

3. En fonction de P et V :

$$S_m(P, V) = \frac{\mathcal{R}}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{P}{P_{\text{ref}}}\right) + \frac{\mathcal{R}}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{V}{V_{\text{ref}}}\right) + S_{m, \text{ref}}$$

Avec $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{C_{P,m}}{C_{V,m}} = \frac{c_P}{c_V}$

• Écriture massique :

1. En fonction de T et V :

$$s(T, V) = \frac{\mathcal{R}}{M(\gamma - 1)} \ln\left(\frac{T}{T_{\text{ref}}}\right) + \frac{\mathcal{R}}{M} \ln\left(\frac{V}{V_{\text{ref}}}\right) + s_{\text{ref}}$$

2. En fonction de T et P :

$$s(T, P) = \frac{\mathcal{R}}{M(\gamma - 1)} \ln\left(\frac{T}{T_{\text{ref}}}\right) - \frac{\mathcal{R}}{M} \ln\left(\frac{P}{P_{\text{ref}}}\right) + s_{\text{ref}}$$

3. En fonction de P et V :

$$s(P, V) = \frac{\mathcal{R}}{M(\gamma - 1)} \ln\left(\frac{P}{P_{\text{ref}}}\right) + \frac{\mathcal{R}}{M(\gamma - 1)} \ln\left(\frac{V}{V_{\text{ref}}}\right) + s_{\text{ref}}$$

• Variation d'entropie :

1. En fonction de T et V :

$$\Delta S = nC_{V,m} \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) + n \mathcal{R} \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

2. En fonction de T et P :

$$\Delta S = nC_{P,m} \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) + n \mathcal{R} \ln\left(\frac{P_B}{P_A}\right)$$

3. En fonction de P et V :

$$\Delta S = nC_{V,m} \ln\left(\frac{P_B}{P_A}\right) + nC_{P,m} \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

23. Loi de Laplace

- dans un système fermé, constitué d'un gaz parfait
- subissant une transformation adiabatique réversible ou isentropique
- n'échangeant que un travail de pression

Alors :

$$P \times V^\gamma = cst$$

$$T \times V^{\gamma-1} = cst'$$

$$T^\gamma \times P^{1-\gamma} = cst''$$

24. phase

Une phase est quand les variable d'état intensive sont continue, suivant les conditions de pression et de température, un corps peut se présenté sous différente phase : solide, liquide, gazeux

25. Diagramme (P, T)

Définition

C'est un diagramme qui présente les différentes phases d'un corps pur, en fonction de la pression et la température

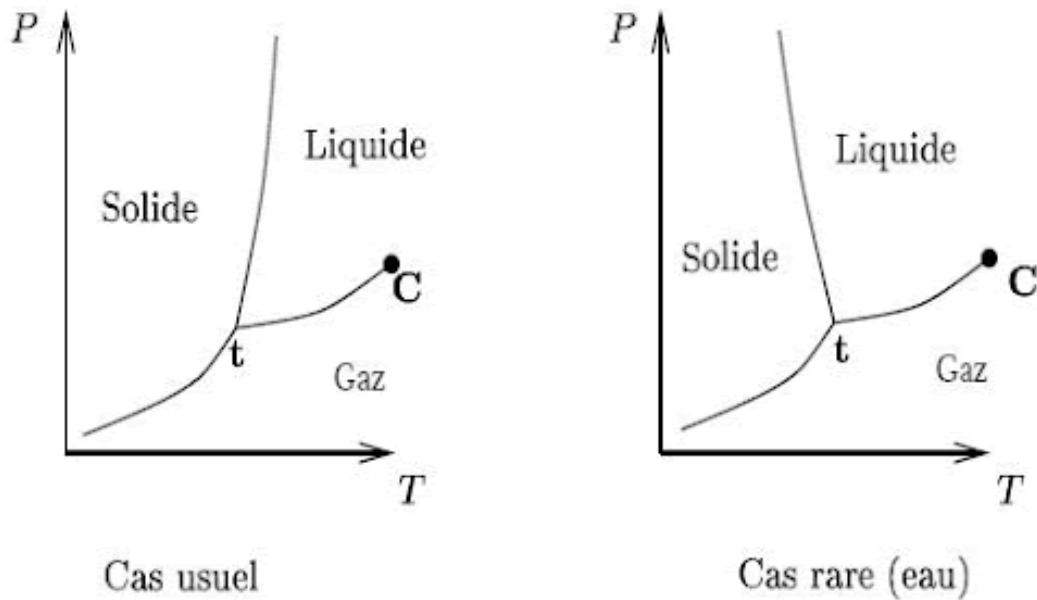


Fig. 12. – Diagramme (P, T) , cas usuel (à gauche) et cas rare (à droite)

Point remarquable

- Pression de vapeur saturante : la pression d'équilibre liquide-gaz à la température T est appelée pression de vapeur saturante et est noté : $P_{\text{sat}}(T)$
- Point triple : c'est le point du diagramme (t sur la figure 7) où les trois phase peuvent coexister
- Point critique : c'est le point du diagramme (C sur la figure 7) à partir duquel il n'y a plus de distinction entre liquide et gaz

26. Diagramme (P, V) ou Diagramme de Clapeyron

Définition

Il représente les différentes phases (et zone diphasé), en fonction de la pression et du volume, il permet de connaître la proportion du corps dans chaque phase

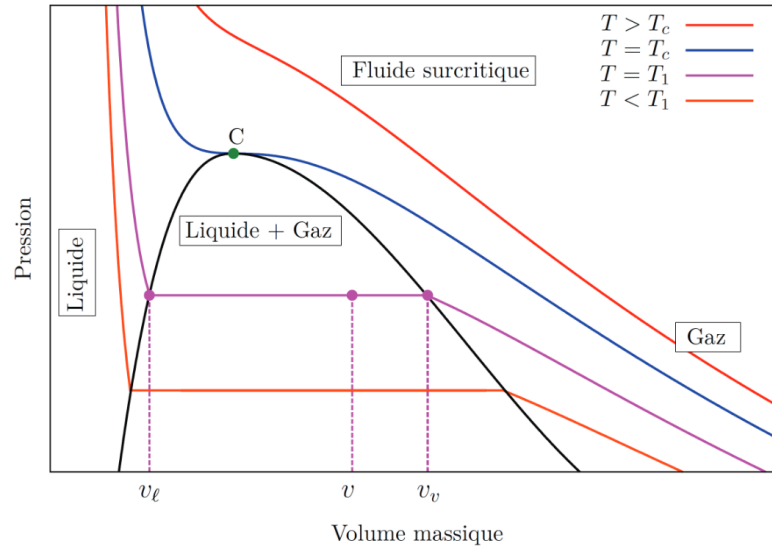


Fig. 13. – Diagramme de Clapeyron

titre massique gaz/liquide

Ces deux grandeurs représentent la proportion de gaz/liquide du corps pur pour une pression et un volume donnés

- Titre massique en gaz :

$$x_g = \frac{\text{masse du corps pur sous forme gazeuse}}{\text{masse totale du corps pur}} = \frac{m_g}{m}$$

- Titre massique en liquide :

$$x_l = \frac{\text{masse du corps pur sous forme liquide}}{\text{masse totale du corps pur}} = \frac{m_l}{m}$$

On a donc $x_g + x_l = 1$

27. Théorème des moments

À partir d'un diagramme de Clapeyron on peut déterminer le titre massique en gaz, par la formule suivante :

$$x_g = \frac{v - v_l}{v_g - v_l}$$

28. Enthalpie de transition de phase

Ça correspond au transfert thermique Q pour passer de la phase φ_1 à la phase φ_2 , noté et calculé par :

$$\Delta_{\varphi_1 \rightarrow \varphi_2} H_m(T) = H_{m, \varphi_2}(T) - H_{m, \varphi_1}(T)$$

ou sous forme massique

$$\Delta_{\varphi_1 \rightarrow \varphi_2} h(T) = h_{\varphi_2}(T) - h_{\varphi_1}(T)$$

29. Entropie de transition de phase

Exactement la même chose que l'enthalpie de transition de phase mais avec l'entropie

pour les formules remplace H par S

Liens avec l'enthalpie de transition de phase :

$$\Delta_{\varphi_1 \rightarrow \varphi_2} s(T) = \frac{\Delta_{\varphi_1 \rightarrow \varphi_2} h(T)}{T}$$

30. Machine thermique

Définition

C'est un dispositif dans le quel un fluide fait un cycle dans le but de réaliser une conversion d'énergie thermique en énergie mécanique ou réciproquement

Représentation

On représente une machine thermique par un diagramme, avec

- la machine au centre
- deux thermostat (un froid Q_F et un chaud Q_C) en indiquant le signe de l'échange thermique et en les reliant à la machine au centre
- le travail également en indiquant son signe et en le reliant à la machine

Théorème de Carnot

L'efficacité d'une machine thermique ditherme cyclique réversible est toujours inférieure à l'efficacité de Carnot (qui ne dépend que de la température des thermostat)

Cogénération

Cela consiste à utiliser la chaleur produite dans le cas d'un moteur, et donc rendre Q_C utile

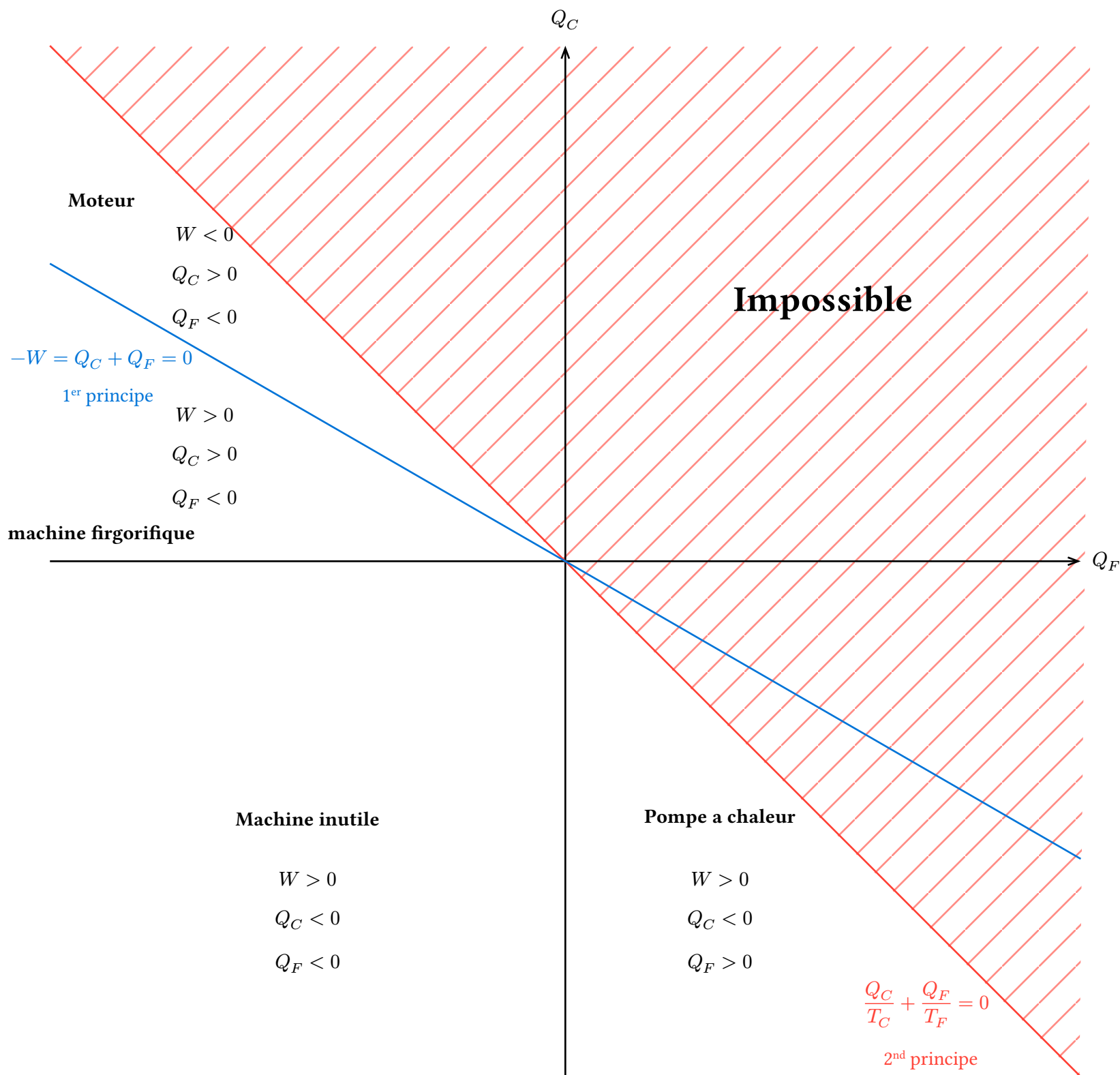
Rendement

$$\eta = \frac{\text{énergie échangée utile}}{\text{énergie échangée qui coûte}}$$

type de machine	Rendement	Rendement de Carnot (utile)
Moteur	$-\frac{W}{Q_C}$	$1 - \frac{T_F}{T_C}$
machine frigorifique	$\frac{Q_F}{W}$	$\frac{T_F}{T_C - T_F}$
pompe à chaleur	$-\frac{Q_C}{W}$	$\frac{T_C}{T_C - T_F}$
Cogénération	$\frac{ W_u + Q_u }{Q_C}$	

Diagramme de Raveau

On peut représenté les différentes type de machine en fonction de Q_C et Q_F dans un diagramme



31. Transfert thermique

Modes de Transfert

1. Rayonnement :

- Pas de support
- $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$

2. Convection :

- liée a un mouvement de fluide
- dommine dans les fluides

3. Conduction :

- transfert de proche en proche
- sans déplacement macroscopique de la matière

Flux thermique

flux thermique passant par une surface S :

$$\phi = \iint_S \vec{j}_{\text{th}} d\vec{S}$$

avec :

- ϕ = le flux thermique en W
- \vec{j} = le vecteur densité de flux thermique en $W \cdot m^{-2}$

Remarque : $\delta Q = \phi dt$

Loi de Fourier

$$\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \vec{\nabla} T$$

avec :

- λ = la conductivité thermique en $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
- T = la température
- \vec{j} = le vecteur densité de flux thermique

Équation de la diffusion thermique

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T$$

avec :

- ρ = la masse volumique en $kg \cdot m^{-3}$
- c = la capacité thermique massique en $J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$
- T = la température
- λ = la conductivité thermique en $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$

Remarque : $\rho c \frac{\delta T}{t_c} \sim \lambda \frac{\delta T}{L^2} \implies t_c \sim \frac{\rho c L^2}{\lambda} = \frac{L^2}{a}$ avec $a = \frac{\lambda}{\rho c}$

conditions aux limites entre deux solides :

La température étant continue on impose que au contact entre deux milieux solide 1 et 2 on a :

$$\begin{cases} T_1(P, t) = T_2(P, t) \\ \vec{j}_{th,1}(P, t) \cdot \vec{n}_{12} = \vec{j}_{th,2}(P, t) \cdot \vec{n}_{12} \end{cases}$$

N.B. : pour un contact entre un fluide et un solide voir loi phénoménologique de Newton

Loi phénoménologique de Newton :

$$\vec{j}_{th} = h(T(P, t) - T_f)$$

avec :

- h = le coefficient de conductivité thermique en $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$
- T = la température
- T_f = la température du fluide

Exemple classique : ailette de refroidissement

Par le 1^{er} principe de la thermodynamie, on a : $dU = \delta Q$

$$\text{Or } dU = \rho S dx c(T(x, t + dt) - T(x, t))$$

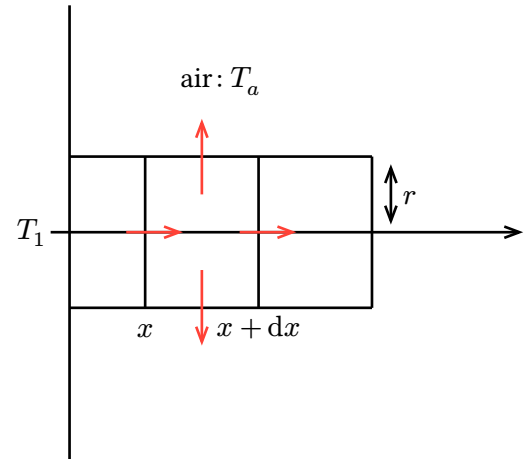
$$\text{Et } \delta Q = j_{th}(x, t) S dt - j_{th}(x + dx, t) S dt - h(T(x, t) - T_a) dt 2\pi r dx$$

D'où après simplification :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{2h}{r} (T(x, t) - T_a)$$

ensuite on en fait soit une simulation numérique

soit une étude en régime permanent



Étude en régime permanent

Ici on étudie le cas d'une tige en métal calorifugé sur les cotés de longueur L et dont les températures aux extrémités sont T_1 et T_2

Ainsi l'équation de la propagation de la chaleur s'écrit sous la forme :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \text{ mais le raisonnement se généralise très bien à d'autres cas}$$

En régime permanent on a : $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0$ d'où $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$

D'où $T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$ avec L la longueur

Donc $j_{th} = \frac{\lambda}{L} (T_1 - T_2)$ et donc $\phi = \frac{\lambda S}{L} (T_1 - T_2)$ avec S la section de la tige

On peut poser la résistance thermique $R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\phi}$

qui ici vaut $R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$

On remarque donc une analogie avec l'électronique :

thermo	électro
$\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \vec{\nabla} T$	$\vec{j} = \gamma \vec{\nabla} V$
ϕ	i
$T_A - T_B$	$u_A - u_B = u_{AB}$

Ainsi la résistance thermique est analogue à la résistance $R = \frac{L}{\gamma S}$

32. Corps opaque

Dans le cas d'un corps opaque on a :

$$\varphi_i = \varphi_r + \varphi_a$$

avec :

- φ_i = le flux incident
- φ_r = le flux réfléchi
- φ_a = le flux absorbé

On pose alors $\varphi_p = \varphi_r + \varphi_e$ le flux partant, avec φ_e le flux émis par le corps

Et $\varphi^R = \varphi_p - \varphi_i = \varphi_e - \varphi_a$

33. Corps Noir

Un corps noir est une entité qui absorbe toute les radiation et rayon lumineux (d'où le nom) et retransmet la totalité sous forme de chaleur

i.e. $\varphi_r = 0$ donc $\varphi_i = \varphi_a$ et $\varphi_p = \varphi_e$

34. Loi de Stefan-Boltzmann

$$\int_0^{+\infty} L_{\Omega, \nu}^{\circ} d\nu = \sigma T^4$$

avec :

- $\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2} = 5.67 \cdot 10^{-8}$ la constante de Stefan-Boltzmann

35. Loi de Wien

$$\lambda_{\text{max}} T = 2.9 \cdot 10^{-3}$$

avec :

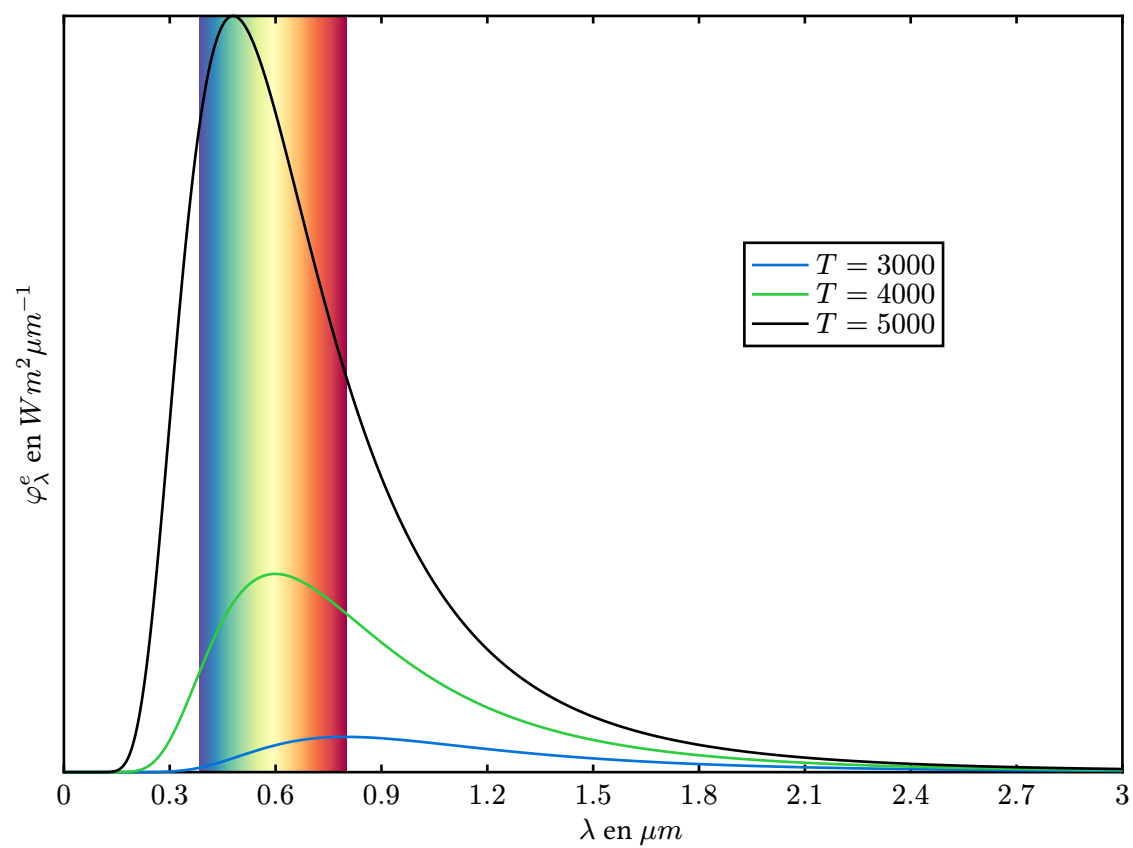
- λ_{max} = la longueur d'onde pour la quel le flux est maximal
- T = la température du corps noir

36. Loi de Planck :

$$\varphi_{\lambda}^e = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{k_B \lambda T}} - 1}$$

avec :

- λ = la longueur d'onde
- h = la constant de plank
- c = la célérité de la lumière dans le vide
- T = la température du corps noir
- k = la constante de Boltzmann



X. Chimie

1. Acide/Bases	56
Définitions	56
Cas de l'eau	56
pH	56
Constante d'acidité	56
Relation pK_a/pH	57

1. Acide/Bases

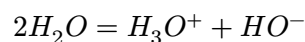
Définitions

Un acide est une espèce chimique capable de céder un proton H^+ : AH

Une base est une espèce chimique capable de capter un proton H^+ : A^- recte acide/base AH/A^- est un couple d'espèces chimiques qui peut se transformer l'une en l'autre par échange d'un proton rect amphotère : une espèce chimique qui peut se comporter comme un acide ou une base (Ex: H_2O)

Cas de l'eau

1. Autoprotolyse de l'eau :



2. Produit ionique de l'eau :

$$K_e = [H_3O^+][HO^-] = 10^{-14} \text{ à } 25^\circ\text{C}$$

pH

$$pH = -\log[H_3O^+]$$

- On définit aussi $pOH = -\log([HO^-])$
- Relation entre pH et pOH : $pH + pOH = pK_e = 14$ à 25°C

Constante d'acidité

Pour les acides :

$$K_a = [A^-] \frac{[H_3O^+]}{[AH]}$$

et

$$pK_a = -\log K_a$$

Pour les bases :

$$K_b = [AH] \frac{[HO^-]}{[A^-]}$$

et

$$pK_b = -\log K_b$$

- Relation entre K_a et K_b : $K_a K_b = K_e = 10^{-14}$

Relation pK_a/pH

$$pK_a = pH + \log \frac{[A^-]}{[AH]}$$

XI. Cinétique

1. Moment cinétique du point	58
2. Moment cinétique d'une force :	58
3. Bras de levier :	58
4. Théorème du moment cinétique	59
5. Moment d'inertie	59
6. Moment cinétique d'un solide	59
7. Moment du poids sur un solide	60
8. couple	60
9. Théorème du moment cinétique pour un solide	60

1. Moment cinétique du point

- par rapport a un point :

$$\overrightarrow{L_A(M/R)} = \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{p(M/R)} = \overrightarrow{AM} \wedge m\overrightarrow{v(M/R)}$$

- par rapport a un axe :

$$L_{\Delta}(M/R) = \overrightarrow{L_A(M/R)} \cdot \vec{u}_{\Delta}$$

2. Moment cinétique d'une force :

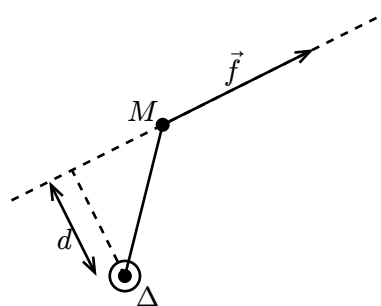
- par rapport a un point :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_A(\vec{f})} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}$$

- par rapport a un axe :

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{f}) = \overrightarrow{\mathcal{M}_A(\vec{f})} \cdot \vec{u}_{\Delta}$$

3. Bras de levier :



$$|\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{f})| = d \times \|\vec{f}\|$$

Le signe se détermine grâce à la règle de la main droite (dans le même sens : positif, négatif sinon)

4. Théorème du moment cinétique

- par rapport à un point :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{L_O(M/R)}}{dt}\right)_{/R} = \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{f}_i)$$

- par rapport à un axe :

$$\left(\frac{dL_\Delta(M/R)}{dt}\right)_{/R} = \sum_i \mathcal{M}_\Delta(\vec{f}_i)$$

5. Moment d’inertie

$$J_\Delta = \sum_i J_\Delta(M_i) = \sum_i (m_i r_i^2)$$

Solide	J_Δ
cylindre vide de rayon R	mR^2
cylindre plein de rayon R	$\frac{1}{2}mR^2$
sphère de rayon R	$\frac{2}{3}mR^2$
bouille de rayon R	$\frac{2}{5}mR^2$
barre (axe au centre) de longueur L	$\frac{1}{12}mL^2$
barre (axe à une extrémité) de longueur L	$\frac{1}{3}mL^2$
anneau de rayon R	mR^2
disque de rayon R	$\frac{1}{2}mR^2$

6. Moment cinétique d’un solide

$$L_\Delta(S/R) = \sum L_\Delta(M_i/R) = J_\Delta(S) \times \omega$$

avec :

- S = Le solide

- $M_i \in S$, la masse des point qui constitue le solide
- $\Delta = (O; \vec{u}_\Delta)$, l'axe de rotation
- $J_\Delta =$ dans le cas où l'axe de rotation est fixe, le moment d'inertie du solide par rapport a l'axe Δ

7. Moment du poids sur un solide

$$\vec{M}_O(\vec{P}) = \vec{OG} \wedge m\vec{g}$$

avec :

- OG = la distance du point O au barycentre G
- m = la masse du solide
- \vec{g} = l'accélération de la gravitation

8. couple

Un couple est l'ensemble des actions mécaniques de résultante nul et de moment non nul

9. Théorème du moment cinétique pour un solide

$$\frac{dL_\Delta(S)}{dt} = \sum \mathcal{M}_\Delta^{\text{ext}} \Leftrightarrow J_\Delta \frac{d\omega}{dt} = \sum \mathcal{M}_\Delta^{\text{ext}}$$

XII. Électromagnétisme

1. Induction magnétique	62
Loi de modératino de Lenz	62
Flux d'un champ magnétique	62
2. Loi de Faraday (1831)	63
3. Inductance propre	63
4. fem auto-induite	63
5. Inductance mutuelle	63
Cas de deux Solénoïde concentrique	63
6. Théorème de Gauss	64
Énoncer	64
Exemple: fil infini de rayon R	64
7. Théorème d'Ampère:	64
Énoncer	64
Exemple: fil infini de rayon R	64
8. Équation de Maxwell	65
9. Analogie avec le champs Gravitationnelle	65
10. Équation de propagation dans le vide	66
11. A.R.Q.S.	66
12. Dipôle Éléctrosatique	66
Définition	66
Potentiel électrosatique	66
Action d'un champs exterior	67
13. Dipôle magnétique	67
Définition	67
Aciton d'un champ exterior	67
14. Densité volumique de courant	67
15. Équation de conservation de la charge	67
16. Loi local d'Ohm	68
17. Aspect énergétique:	68
Équation de Poyting:	68
18. Polarisation	68
Définition	68
Polarisateur	68

Théorème de Malus	68
19. OPPM	68
Définition	68
Vitesse de phase et de groupe	68
20. Propagation dans un plasma dilué	69
Relation de structure	69
Relation de dispersion	69
Cas $\omega > \omega_p$	69
Cas $\omega < \omega_p$	69
21. Paquet d'onde	69
Définition	69
caractérise	69
interprétation	70
dans le cas de l'électromagnétisme	70
22. matériau conducteur	70
Équation de propagation	70
résolution	70

1. Induction magnétique

Phénomène d'apparition d'un courant dans un circuit fermé à l'approche d'un champ magnétique en mouvement

Loi de modératino de Lenz

Les effets produit par un phénomène d'induction s'opposent toujours aux causes qui leur ont donné naissance

pour faire plus simple : à l'approche d'un champ magnétique la bobine va en créé un de même norme mais de sens opposé pour annulé le champ initial

Flux d'un champ magnétique

Dans le cas où une spire de vecteur de surface \vec{S} est traversé par un champ magnétique \vec{B} , alors

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$$

De plus si le champ traverse N spire identique : $\Phi = N \vec{B} \cdot \vec{S}$

- Dans le cas générale le flux ce calcule avec une double intégrale :

$$\Phi = \iint_{M \in S} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}$$

On parle aussi de flux propre Φ_P , c'est le flux induit par le champs magnétique lui même induit par l'intensité du courant dans le circuit

2. Loi de Faraday (1831)

$$e_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

avec :

- e_{ind} = la fem induite
- Φ = le flux formé par le champ magnétique \vec{B}

Dans un circuit on représenteras la fem par un générateur, dont la flèche est dans le même sens que la flèche du courant induit d'intensité i qui oriente le circuit

3. Inductance propre

On appelle inductance propre le coefficient $L \geq 0$ entre le flux propre et l'intensité

$$\Phi_P = Li$$

4. fem auto-induite

tout circuit parcouru par un courant d'intensité i dépendant du temps, s'auto-gène avec un champ magnétique auto-induit

Dans ce cas :

$$e_P = -\frac{d\Phi_P}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

Note : On retrouve ici le phénomène de bobine dans un circuit

5. Inductance mutuelle

Dans le cas où deux circuits \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 sont proches, l'un va générer l'autre avec son champ magnétique auto-induit, dans ce cas on a :

$$\Phi_{k \rightarrow k'}(t) = M \times i_k(t)$$

avec :

- $\Phi_{k \rightarrow k'}$ = le flux généré par le circuit k sur k'
- $i_k(t)$ = l'intensité du courant dans le circuit k
- M = inductance mutuelle entre les deux circuits

Cas de deux Solénoïdes concentriques

$$M = \frac{N_1 N_2}{l} \mu_0 S$$

avec :

- M = l'inductance mutuelle
- N_i = le nombre de spires de la bobine i
- l = la longueur des bobines
- S = la section des bobines
- $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$

6. Théorème de Gauss

Énoncer

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

avec :

- \vec{E} = le champ électrique
- Q_{int} = la charge intérieure à la surface S
- $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ la permittivité du vide

Exemple : fil infini de rayon R

On sait que $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$ (Voir Invariance et Symétrie)

On a sur une longueur H du fil :

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2\pi r H E(r)$$

Or

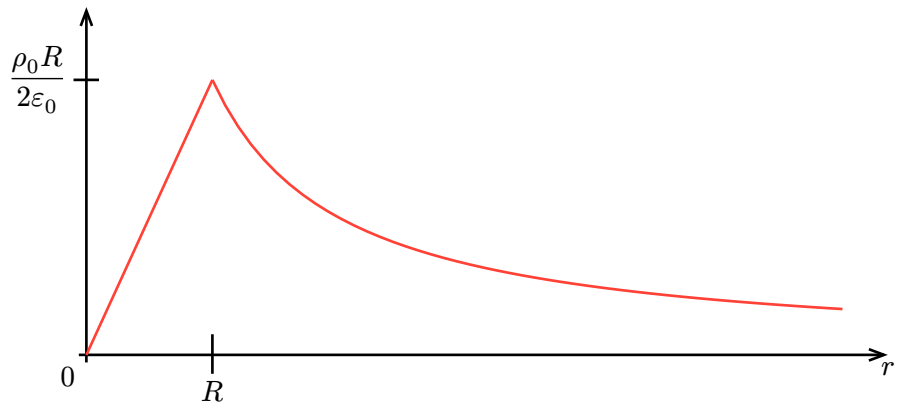
pour $R > r$: $Q_{\text{int}} = \rho_0 \pi R^2 H$

pour $R < r$: $Q_{\text{int}} = \rho_0 \pi r^2 H$

Donc par théorème de Gauss :

pour $R > r$: $E(r) = \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0 r}$

pour $R < r$: $E(r) = \frac{\rho}{2}\varepsilon_0 r$



7. Théorème d'Ampère :

Énoncer

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

avec :

- \vec{B} = le champ magnétique
- $I_{\text{enlacé}}$ = le courant enlacé par la courbe \mathcal{C}

Exemple : fil infini de rayon R

On sait par symétrie et invariance que $\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B(r)$$

Or

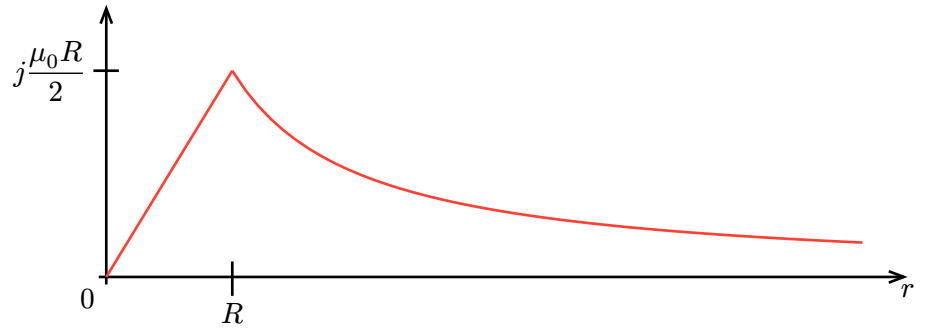
pour $R > r : I_{\text{enlacé}} = j\pi R^2$

pour $R < r : I_{\text{enlacé}} = j\pi r^2$

Donc par théorème de gauss :

pour $R > r : B(r) = j\frac{\mu_0 R^2}{2r}$

pour $R < r : B(r) = j\frac{\mu_0}{2}r$



8. Équation de Maxwell

$$\text{Gauss } \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\text{Flux } \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\text{Faraday } \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{Ampère } \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

avec :

- \vec{E} = le champ électrique
- \vec{B} = le champ magnétique
- ρ = la densité de charge
- \vec{j} = la densité de courant
- c = la célérité de la lumière dans le vide
- ε_0 = la permittivité du vide
- μ_0 = la perméabilité du vide

$$\text{N.B. } \varepsilon_0 \times \mu_0 \times c^2 = 1$$

9. Analogie avec le champs Gravitationnelle

Le Théorème de Gauss et la loi de Maxwell-Gauss peuvent se réécrire pour le champs Gravitationnelle en réalisant les équivalences suivantes :

Électrostatique	\longleftrightarrow	Gravitation
$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r$	\longleftrightarrow	$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r$
q	\longleftrightarrow	m
$\vec{F} = q\vec{E}$	\longleftrightarrow	$\vec{F} = q\vec{\mathcal{G}}$
$\frac{1}{4\pi \varepsilon_0}$	\longleftrightarrow	$-G$

Ainsi le Théorème de Gauss et la loi de Maxwell-Gauss deviennent :

- Théorème de Gauss : $\oint_S \mathcal{G} \cdot d\vec{S} = 4\pi G M_{\text{int}}$

- Maxwell-Gauss: $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{E}} = -4\pi G\rho$

10. Équation de propagation dans le vide

Dans le vide on a $\vec{j} = \rho = 0$, d'où

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

Après le calcul de $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})$ de deux manières différentes, on trouve :

$$\vec{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (\square \vec{E} = 0)$$

avec :

- $\vec{\Delta}$ = l'opérateur laplacien
- c = la célérité de la lumière dans le vide
- \vec{E} = le champ électrique
- \square = l'opérateur d'Alembertien ($\square = \vec{\Delta} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$)

on trouve de manière analogue $\square \vec{B} = \vec{\Delta} \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$

11. A.R.Q.S.

Approximation des régime quasi-stationnaire

i.e. que l'information du système met un temps très petit devant le temps caractérise du système,

ou que la longueur d'onde de l'onde électromagnétique est très grande devant les longueurs caractéristiques du système

Ainsi $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \approx 0$, donc $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

12. Dipôle Électrostatique

Définition

On appelle dipôle électrostatique un système constitué d'une charge $+q$ en P et $-q$ en N , dont on observe des effets à des distances grandes devant NP

On caractérise un tel dipôle par :

$$\vec{p} = q \overrightarrow{NP}$$

Potentiel électrostatique

$$V(M) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 NM} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 PM} = \frac{p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

avec :

- θ = l'angle formé par le vecteur \vec{p} et le vecteur \overrightarrow{OM} , avec O le barycentre électrostatique du dipôle

- r = la distance entre le point M et le barycentre électrostatique

Action d'un champ extérieur

Dans le cas où $\vec{E}_{\text{ext}} = \vec{E}_0$ uniforme, alors

- $E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0$
- la résultante des forces $\mathcal{R} = 0$
- Le moment $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}_0$

Dans le cas où \vec{E}_{ext} est quasi-uniforme :

- $E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0$
- la résultante des forces $\mathcal{R} \neq 0$
- Le moment $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}_0$

13. Dipôle magnétique

Définition

De manière analogue au dipôle électrique on définit un dipôle magnétique par

$$\vec{M} = i\vec{S}$$

avec :

- \vec{S} = le vecteur surface
- i = l'intensité du courant

Action d'un champ extérieur

On a :

- Le moment $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}_{\text{ext}}$
- $E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}_{\text{ext}}$

14. Densité volumique de courant

$$\vec{j} = \rho_m \vec{v}$$

avec :

- ρ_m = la densité volumique de charge mobile
- \vec{v} = la vitesse du courant

Remarque : le vecteur densité de courant est définie tel que $dq = \vec{j} \cdot d\vec{S} dt$

15. Équation de conservation de la charge

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

avec :

- ρ = la densité de charge
- \vec{j} = la densité de courant

Remarque : en régime permanent $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, donc $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$, et on en déduit la loi des nœuds (voir l'intuition derrière la divergence)

16. Loi local d'Ohm

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

avec :

- γ = la conductivité électrique
- \vec{j} = la densité de courant
- \vec{E} = le champ électrique

17. Aspect énergétique :

Équation de Poyting :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

avec :

- u = densité volumique énergétique = $\varepsilon_0 \frac{\vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}$
- $\vec{\Pi}$ = le vecteur de Poyting = $\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$
- $\vec{j} \cdot \vec{E}$ = énergie cédée à la matière

18. Polarisation

Définition

La polarisation d'une onde c'est la courbe décrite par \vec{E} quand vois arriver l'onde sur nous

Polarisateur

Un polarisateur filtre les ondes polarisées pour sortir que des ondes polarisées dans le sens du polarisateur

Théorème de Malus

A ne pas confondre avec l'autre Théorème de Malus en optique géométrique

Après le passage par un polarisateur suivants \vec{u}_p , l'intensité I_0 devient $I_0 \cos(\theta)$ avec θ l'angle entre la polarisation précédente et \vec{u}_p

19. OPPM

Définition

Une onde plane progressive monochrome est une onde de la forme $s(\vec{r}, t) = S_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$

Vitesse de phase et de groupe

1. Vitesse de phase

On définit la vitesse de phase par $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$,

cette vitesse représente la vitesse de la phase à l'origine de l'onde

ou encore la vitesse des oscillations de l'onde

Attention : cette vitesse n'a pas de sens physique car peut aller plus vite que la vitesse de la lumière dans le vide

1. Vitesse de Groupe

On définit la vitesse de groupe par $v_g = \frac{d\omega}{dk}$

Cette vitesse représente la vitesse réelle de l'onde,

20. Propagation dans un plasma dilué

Dans un plasma dilué on a $\rho = 0$, ainsi

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0\end{aligned}$$

Ainsi on trouve :

$$\square \vec{E} = \vec{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{d\vec{j}}{dt}$$

Relation de structure

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

Relation de dispersion

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

avec :

- ω_p = la fréquence de plasma

Cas $\omega > \omega_p$

On a $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \lim(\rightarrow, +\infty) \frac{\omega}{c}$

Donc à haute fréquence le plasma se comporte comme le vide

Cas $\omega < \omega_p$

On a $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} < 0$, donc soit $k = \pm i k'$ avec $k' = \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}}$

Si $k = i k'$ est impossible car l'onde divergerait

Si $k = -i k'$, on obtient une onde évanescente, $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-k'z} e^{i\omega t}$

21. Paquet d'onde

Définition

On définit un paquet d'onde par la transformée de Fourier, i.e.

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \int_0^+ \omega g(\omega) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} d\omega \vec{u}_r$$

caractérise

Un paquet d'onde respecte les caractéristiques suivantes :

- $\omega_0 = 2\frac{\pi}{T_0}$
- $\delta\omega \sim \frac{1}{\delta t}$

- $k(\omega) \approx k(\omega_0) + (\omega - \omega_0) \frac{dk}{d\omega} = k_0 + \frac{\omega - \omega_0}{v_g}$

interpretation

Un paquet d'onde peut être vue comme une somme infinie d'OPPM légèrement différentes

en fait la transformée de Fourier peut être une base continue de fonction, avec ici les OPPM comme vecteurs de base

dans le cas de l'électromagnétisme

On a par la relation de dispersion $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} \iff \frac{\omega}{k} \frac{d\omega}{dk} = c^2 = v_\pi v_g$

Or $v_\pi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$, donc $v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$

22. matériau conducteur

Équation de propagation

Dans un matériau conducteur on peut considérer $\rho = 0$, donc par les équations de Maxwell :

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \gamma \mu_0 = \vec{\Delta} \vec{j} \text{ équation de diffusion}$$

résolution

On cherche une solution de la forme $\vec{j} = \underline{\vec{j}}_0 e^{-i\omega t} e^{-kx}$ et $\underline{k}^2 = -\gamma \mu_0 i \omega$

on trouve alors $\underline{k} = \pm \frac{1-i}{\delta}$, avec $\delta = \sqrt{\frac{2}{\gamma \mu_0 \omega}}$ l'épaisseur de peau

et ainsi

$$\vec{j} = \underline{\vec{j}}_0 e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta})} e^{-\frac{x}{\delta}} + \underline{\vec{j}}_1 e^{i(\omega t + \frac{x}{\delta})} e^{\frac{x}{\delta}}$$

XIII. Mécanique quantique

1. Relation de de Broglie	71
2. Relation de Plank-Einstein	71
3. Effet photoélectrique	72
4. Longueur d'onde de de Broglie	72
Définition	72
Interprétation	72
5. Fonction d'onde	72
6. Équation de Shrödinger	73
Définition	73
Interprétation des termes	73
7. Équation de Schrödinger indépendante du temps	73
8. Particule libre	73
9. Courant de probabilité	74
10. Inégalité de Heisenberg	74
11. Superposition d'état	74
12. Énergie de Confinement	74
13.	75

1. Relation de de Broglie

pour toute particule on peut lui associer une onde de matière, ainsi

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

avec :

- λ = la longueur d'onde de la particule
- h = la constante de plank
- $p = mv$ = la quantité de mouvement de la particule avec m sa masse et v sa vitesse

2. Relation de Plank-Einstein

Le rayonnement électromagnétique monochromatique est constitué de photon qui :

- sont de masse nulle
- se déplace à la vitesse de la lumière dans le vide
- d'énergie : $E = h\nu$, avec h la constante de plank et ν la fréquence du rayonnement
- de quantité de mouvement $p = \frac{h}{\lambda}$

3. Effet photoélectrique

C'est un phénomène dans lequel un matériau émet un des électrons (sous la forme d'un courant généralement) sous l'effet d'un rayonnement à haute fréquence

$$E_{c, \max} = h\nu - W_0$$

avec :

- $E_{c, \max}$ = l'énergie cinétique maximale de l'électrons
- ν = la fréquence de la lumière
- h = la constante de plank
- W_0 = un travail minimum à fournir pour arracher l'électrons, qui est propre au matériau

4. Longueur d'onde de de Broglie

Définition

$$\lambda_{\text{DB}} = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

avec :

- λ_{DB} = la longueur d'onde de de Broglie
- h = la constante de plank
- p = la quantité de mouvement de la particule
- m = la masse de la particule
- v = la vitesse de la particule

Interprétation

On peut y voir dans la quantité de mouvement p les caractéristique « classique » de la particule, que l'on vient comparer à la constante de plank h qui représente « l'échelle quantique »

Ainsi si cette comparaison entre « monde classique » et « monde quantique » est de l'ordre ou plus grande que l'échelle d'étude, alors le caractère ondulatoire de la particule sera manifeste. A contrario si cette comparaison est plus petite alors le caractère corpusculaire de la particule ne sera pas perceptible, et on pourra la traiter comme une particule classique

En résumé, si l est l'ordre de grandeur des longueurs caractéristiques de l'étude, alors :

Si $\lambda_{\text{DB}} \gtrsim l \iff$ Mécanique Quantique

Si $\lambda_{\text{DB}} < l \iff$ Mécanique Classique

5. Fonction d'onde

La fonction d'onde, noté $\Psi(M, t)$, associée à une particule est une fonction complexe qui décrit l'état de la particule au point M et à l'instant t

seul elle n'a aucun sens physique, mais pour une particule sans spin (ne venez pas me demander) son module au carré $|\Psi|^2$ représente la densité de probabilité, autrement dit $dP = |\Psi|^2 d\tau$ dans l'espace (en 1D, $dP = |\Psi|^2 dx$)

Ainsi on a comme conditions

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2 dx = 1$$

i.e. que la probabilité de trouver la particule dans l'espace est de 1

6. Équation de Shrödinger

Définition

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + V\Psi = i\hbar\frac{d\Psi}{dt}$$

avec :

- Ψ = la fonction d'onde
- m = la masse de la particule
- V = le l'énergie potentiel de la particule (ici appelé juste potentiel)
- \hbar = la constante de planck réduite

Remarque : On peut remarquer la ressemblance entre cette équation et l'équation de propagation de la chaleurs

Interprétation des termes

Tout d'abord chaque terme est homogène à une énergie, ainsi l'équation peut être interprétée comme la consenservation de l'énergie mécanique

Ainsi :

- $-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi$ peut être interprété comme l'énergie cinétique de la particule
 - $V\Psi$ peut être interprété comme l'énergie gagné par les forces appliquées à la particule,
- où comme l'énergie potentielle (bien que les deux visions sont équivalentes)
- $i\hbar\frac{d\Psi}{dt}$ Si quelqu'un à une bonne interprétation je suis preneur

7. Équation de Schrödinger indépendante du temps

Dans le cas d'un état stationnaire (i.e. $V(M, t) = V(M)$), l'équation de Schrödinger devient :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi + V\varphi = E\varphi$$

avec :

- φ tel que $\Psi(M, t) = \varphi(M)e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$
- E = l'énergie de la particule
- m = la masse de la particule

Remarque : On obtient cette équation en procédant à une séparation de variable de $\Psi(x, t) = \varphi(x)f(t)$

Et on trouve que $f(t) = e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$

De plus $|\Psi(x, t)|^2 = |\varphi(x)|^2$

8. Particule libre

Dans le cas de la particule libre on a $V = 0$, ainsi en résolvant l'équation de Schrödinger indépendante du temps on trouve que :

$$\varphi(x) = \underbrace{Ae^{ikx}}_{\text{particule progressant suivant } \vec{u}_x} + \underbrace{Be^{-ikx}}_{\text{particule progressant suivant } -\vec{u}_x}$$

avec $k = 2m\frac{E}{\hbar}$

Or dans le cas où seule des particules viennent de $-\infty$, alors $\Psi(x, t) = Ae^{ikx}$, ce qui donne $|\Psi|^2 = |A|^2$ ce qui ne respecte pas la condition de normalisation, il faut donc considérer un paquet d'onde $\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(k)e^{i(kx-\omega t)} dk$

On obtient alors que la vitesse de groupe $v_g = \frac{\hbar k}{m} =$ la vitesse de l'électronique

9. Courant de probabilité

On pose par analogie avec la densité de courant :

$$\vec{J} = \underbrace{|\Psi|^2}_{\leftrightarrow \rho_m} \underbrace{\frac{\hbar \vec{k}}{m}}_{\leftrightarrow \vec{v}}$$

avec :

- \vec{J} = le courant de probabilité
- Ψ = la fonction d'onde
- \hbar = la constante de Planck réduite
- \vec{k} = le vecteur d'onde de la particule
- m = la masse de la particule

10. Inégalité de Heisenberg

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \iff \Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2}$$

$$\Delta t \Delta E \geq \frac{\hbar}{2} \iff \Delta t \Delta \omega \geq \frac{1}{2}$$

avec :

- Δx = l'incertitude sur la position
- Δp = l'incertitude sur la quantité de mouvement
- Δk = l'incertitude sur le vecteur d'onde
- Δt = l'incertitude sur le temps
- ΔE = l'incertitude sur l'énergie
- $\Delta \omega$ = l'incertitude sur la pulsation

11. Superposition d'état

Comme l'équation de Schrödinger est linéaire, alors si Ψ_1 et Ψ_2 sont des solutions de l'équation, alors $\Psi = a\Psi_1 + b\Psi_2$ est aussi une solution de l'équation

12. Énergie de Confinement

Dans un espace de dimension a , on a donc $\Delta x \sim \frac{a}{2}$, Donc par l'inégalité de Heisenberg on a : $\Delta p \sim \frac{\hbar}{a}$

Ainsi :

$$E = \frac{(\Delta p)^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2ma^2}$$

13.

XIV. Truc et astuce

1. Constantes :	76
2. Vecteur surface	77
3. Symétrie	77
Plan de Symétrie	77
Plan de Anti-Symétrie	78
Utilité :	78
Exemple	78
4. Invariance	78
Principe de Curie :	78
Exemple	78
5. Théorème de Stokes	78
6. Théorème de Green-Ostrograski	78
7. Intuition sur la divergence et le rotationnel :	78
8. Nabla	79
9. Formulaire d'analyse vectorielle	79
Définition des opérateurs	79
Composition des opérateurs	80

1. Constantes :

Nom	symbole	Valeur	Origine
Électromagnétisme			
vitesse de la lumière dans le vide	c	$3 \cdot 10^8 m s^{-1}$	Par définition
Charge élémentaire	e	$1,6 \cdot 10^{-19} C$	Par définition
Perméabilité du vide	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} T m A^{-1}$	$\frac{2\alpha h}{e^2 c}$
Permittivité diélectrique du vide	ϵ_0	$8,85 \cdot 10^{-12} F m^{-1}$	$\frac{1}{\mu_0 c^2}$
Constante de Coulomb	k	$8,99 \cdot 10^9 N m^2 C^{-2}$	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$
Gravitation			
Constante gravitationnelle	G	$6,67 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$	Mesure
Accélération de pesanteur	g	$9,81 m s^{-2}$	Convention
Rayon de la terre	R_T	$6,4 \cdot 10^6 m$	Mesure
Masse de la terre	M_T	$5,97 \cdot 10^{24} kg$	Mesure
Rayon du Soleil	R_\odot	$6,96 \cdot 10^8 m$	Mesure

Nom	symbole	Valeur	Origine
Masse du Soleil	M_{\odot}	$1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	Mesure
Unité astronomique	$U.A.$	$1,5 \cdot 10^{11} m$	Distance terre soleil
Année lumière	al	$9,46 \cdot 10^{15} m$	$c \times 1 \text{ ans}$
Physico-Chimique			
Pression de l'atmosphère	atm	$1,01325 \cdot 10^5 \text{ Pa}$	Convention
Nombre d'Avogadro	N_A	$6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$	Définition de la mole
Constante des gaz parfait	R	$8,31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$	$k_B N_A$
Constante de Boltzmann	k ou k_B	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$	Par définition du Kelvin
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$	$\frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^2}$
Atomique et nucléaire			
Masse du Proton	m_p	$1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	Mesure
Masse du Neutron	m_n	$1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	Mesure
Masse de l'Electron	m_e	$9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$	Mesure et $\approx \frac{m_p}{2000}$
Unité de Planck			
Constante de Planck	h	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$	Par définition
Constante de Planck réduite	\hbar	$1,1 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$	$\frac{h}{2\pi}$
longueur de Planck	l_p	$1,6 \cdot 10^{-35} m$	$\sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$
Masse de Planck	m_p	$2,2 \cdot 10^{-8} \text{ kg}$	$\sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$
Temps de Planck	t_p	$5,4 \cdot 10^{-44} s$	$\sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}}$

2. Vecteur surface

On définit le Vecteur surface \vec{S} par :

- direction : orthogonal à la surface
- sens : donnée par la règle de la main droite la plus par du temps (mais reste très intuitif dans le sens choisir)
- norme : la surface S

3. Symétrie

Plan de Symétrie

Soit un plan \mathcal{P} et $M \in \mathcal{P}$, alors

- $\vec{E}(M) \in \mathcal{P}$
- soit $M' = \text{sym}_{\mathcal{P}}(M)$, alors $\vec{E}(M') = \text{sym}_{\mathcal{P}}(\vec{E}(M))$

Plan de Anti-Symétrie

Soit un plan Π et $M \in \Pi$, alors

- $\vec{E}(M) \perp \Pi$
- soit $M' = \text{sym}_{\Pi}(M)$, alors $\vec{E}(M') = -\text{sym}_{\Pi}(\vec{E}(M))$

Utilité :

Permet de retiré directement des composantes des vecteurs étudiés

Exemple

Dans un fils infini uniformément chargée, soit M un point de l'espace

alors tout les plans passant par (\vec{O}_z) sont des plans de symétrie

de même pour le plan perpendiculaire à \vec{O}_z passant par M Ainsi $\vec{E} = E_r \vec{u}_r + \cancel{E_{\theta} \vec{u}_{\theta}} + \cancel{E_z \vec{u}_z} = E_r \vec{u}_r$

4. Invariance

Principe de Curie :

Les symétries des causes se retrouvent dans les effets. Les effets peuvent avoir plus de symétries que les causes.

Exemple

On a déjà vue que dans le cas du fil infini uniformément chargée, on a $\vec{E}(r, \theta, z) = E_r(r, \theta, z) \vec{u}_r$

Donc Ici on a invariance par rotation autour de \vec{O}_z et par translation suivant u_z

Ainsi $\vec{E}(r, \theta, z) = \vec{E}(r)$

5. Théorème de Stokes

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{\mathcal{S}} (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \cdot d\vec{S}$$

avec :

- \vec{A} = un champ vectoriel

6. Théorème de Green-Ostrograski

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d\tau$$

avec :

- \vec{A} = un champ vectoriel

7. Intuition sur la divergence et le rotationnel :

La divergence noté div ou $\vec{\nabla} \cdot$ représente intuitivement « la quantité » de vecteur qui sort ou rentre d'un espace donné

Tandis que le rotationnel, noté rot ou $\vec{\nabla} \wedge$ représente intuitivement « la quantité » de vecteurs qui tournent autour d'un point donné.

Exemple :

Sur un aimant la divergence du champs magnétique est nul car les vecteurs du champs « sorte » du pôle nord et « rentre » au pôle sud.

Mais dans le cas de la gravitation le champs gravitationnelle semble comme sortir du centre de la planète, et donc la divergence est positif et serait négatif si celle-ci semblais rentrer dans la planète

Si un mobile bouge en translation le rotationnel est nul car aucun des vecteurs vitesses attachés en chaque points du mobile ne « tourne ».

Alors que si ce même mobile est en rotation par rapport à sont centre, alors le rotationnel serait tantôt positif ou négatif (règle de la main droite) car chaque un des vecteurs vitesses semble tourner autour de l'axe de rotation

8. Nabla

Le vecteur nabla est un opérateur différentiel qui permet de définir des opérations sur les champs scalaires et vectoriels, noté $\vec{\nabla}$

Et est définie dans \mathbb{R}^3 par : $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$, avec $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ une base de \mathbb{R}^3

Un des avantage de cette notation, et que dans le cas des coordonnées cartésien, calculer un opérateur vectoriel est équivalent a calculer le produit, produit scalaires, produit vectoriel entre la grandeur et le vecteur nabla

9. Formulaire d'analyse vectorielle

Définition des opérateurs

Opérateur	Cartésien	Cylindrique	Sphérique
$\vec{\nabla} f$	$\frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$	$\frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$	$\frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$
$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta}\frac{\partial(A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$
$\vec{\nabla} \wedge \vec{A}$	$\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{u}_x$ $+ \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{u}_y$ $+ \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{u}_z$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{u}_r$ $+ \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta$ $+ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{u}_z$	$\frac{1}{r \sin \theta}\left(\frac{\partial(A_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right)\vec{u}_r$ $+ \left(\frac{1}{r \sin \theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta$ $+ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{u}_\varphi$

Opérateur	Cartésien	Cylindrique	Sphérique
Δf	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$
$\vec{\Delta} \vec{A}$	$\Delta A_x \vec{u}_x + \Delta A_y \vec{u}_y + \Delta A_z \vec{u}_z$	$\left(\Delta A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \right) \vec{u}_r + \left(\Delta A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_\theta + (\Delta A_z) \vec{u}_z$	Voir ci-dessous

Le laplacien en coordonnées sphériques est donné par :

$$\vec{\Delta} \vec{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_r - 2 \frac{A_r}{r^2} - 2 \frac{A_\theta \cos \theta}{r^2 \sin \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \\ \Delta A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \\ \Delta A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

Composition des opérateurs

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\Delta} \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \Delta f$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} f) = 0$$