Gaspar Daguet

DM n°4
Exercice 2: Particule dans une chambre à bulles

Pour toute la suite de l'exercice, on sa place dans un référentiel terrestre supposé galiléen

N=°1.

On a:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{vmatrix} \text{ et } \vec{B} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{vmatrix}$$

Ainsi:

$$F_m = q\vec{v} \wedge \vec{B} = qB \begin{vmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{vmatrix}$$

Alors par la seconde loi de Newton:

$$m \begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{vmatrix} = qB \begin{vmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{vmatrix} = \frac{qB}{m} \begin{vmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{vmatrix} = \omega \begin{vmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{vmatrix}$$

Donc $\begin{cases} \ddot{x} = \omega \dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega \dot{x} \end{cases}$

N.B. Le mouvement selon $\ddot{z}$ est nul donc on a $\dot{z} = 0$ (selon les conditions initials) donc le mouvement se fais dans un plan et donc on ne le prend plus en compte pour la suite des calcules

N=°2.

Selon la question précédente:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \omega \dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega \dot{x} \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} \int_0^t \ddot{x} \,\mathrm{d}t = \omega \int_0^t \dot{y} \\ \int_0^t \ddot{y} \,\mathrm{d}t = -\omega \int_0^t \dot{x} \end{cases} = \begin{cases} \dot{x} = \omega y \\ \dot{y} = -\omega x + v_0 \end{cases}$$

Ainsi en remplaçant $\dot{x}$ et $\dot{y}$ dans la première équation on trouve:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega^2 x + \frac{v_0}{\omega} \omega^2 \\ \ddot{y} = -\omega^2 y \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{cases} x(t) = A_x \cos(\omega t) + B_x \sin(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \\ y(t) = A_y \cos(\omega t) - B_y \sin(\omega t) \end{cases}$$

Grâce aux conditions initiales on trouve $A_x = -\frac{v_0}{\omega}$; $B_x = 0$; $A_y = 0$ et $B_y = -\frac{v_0}{\omega}$, ainsi :

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{v_0}{\omega} \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \\ y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) \end{cases}$$

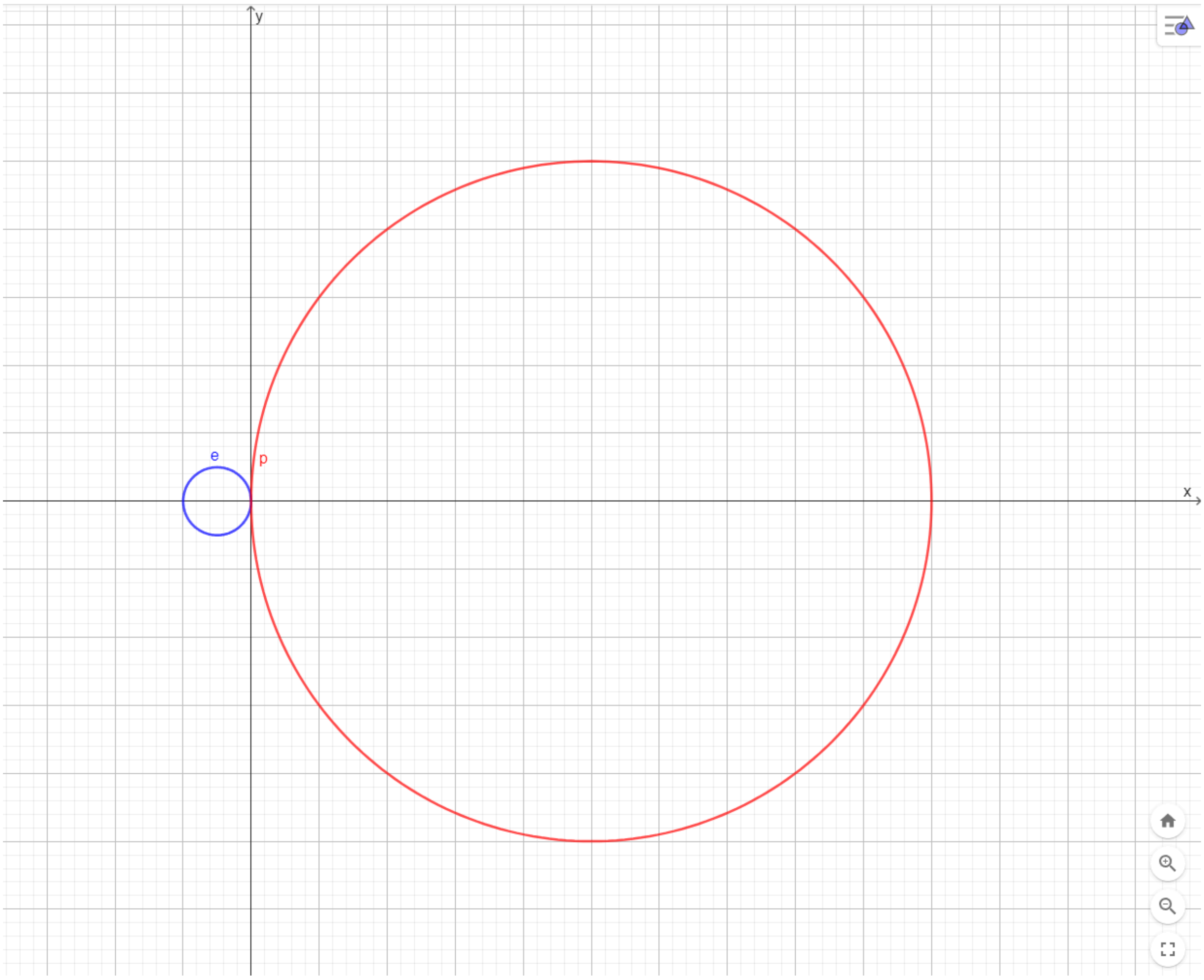

Figure 1: trajectoire d'un proton (rouge) et d'un éléctron (bleu) dans la chambre a bulle en négligeant les frottement

N=°3.

Par la seconde loi de Newton, on a:

$$m\left|\begin{matrix}\ddot{x}\\\ddot{y}\\\ddot{z}\end{matrix}\right. = qB\left|\begin{matrix}\dot{y}\\-\dot{x}\\0\end{matrix}\right. - \lambda\left|\begin{matrix}\dot{x}\\\dot{y}\\\dot{z}\end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{matrix}\ddot{x}\\\ddot{y}\\\ddot{z}\end{matrix}\right. = \frac{qB}{m}\left|\begin{matrix}\dot{y}\\-\dot{x}\\0\end{matrix}\right. - \frac{\lambda}{m}\left|\begin{matrix}\dot{x}\\\dot{y}\\\dot{z}\end{matrix}\right. = \omega\left|\begin{matrix}\dot{y}\\-\dot{x}\\0\end{matrix}\right. - \alpha\left|\begin{matrix}\dot{x}\\\dot{y}\\\dot{z}\end{matrix}\right.$$

On a donc $\ddot{z} = -\alpha\dot{z}$, donc en intégrant $\dot{z} = -\alpha z$ Or $\dot{z} = 0$ alors $-\alpha z = 0 \Leftrightarrow z = 0$ car $\alpha \neq 0$

Donc $z = 0$ et donc le mouvement se fais sur le plans (xOy)

Deplus:

$$\begin{cases}\ddot{x} = \omega\dot{y} - \alpha\dot{x}\\\ddot{y} = -\omega\dot{x} - \alpha\dot{y}\end{cases}$$

N=°4.

On a :

$$\ddot{u} = \ddot{x} + i\ddot{y} = \omega\dot{y} - \alpha\dot{x} - i\omega\dot{x} - i\alpha\dot{y} = \dot{x}(-\alpha - i\omega) + i\dot{y}(-\alpha - i\omega) = -(\alpha + i\omega)\dot{u}$$

Ainsi on retombe sur une équation différentiel du 1er ordre, on trouve donc:

$$\dot{u}(t) = iv_0e^{-(\alpha+i\omega)t}$$

Ainsi on trouve

$$u(t) = -\frac{iv_0}{\alpha + i\omega}e^{-(\alpha+i\omega)t} + \frac{iv_0}{\alpha^2 + \omega^2} = e^{-\alpha t}\left(-\frac{v_0\omega}{\alpha^2 + \omega^2} - \frac{\alpha v_0}{\alpha^2 + \omega^2}i\right)(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t) + \frac{v_0\omega}{\alpha^2 + \omega^2} + \frac{\alpha v_0}{\alpha^2 + \omega^2}i$$

On a donc:

$$\begin{cases}x(t) = \Re(u(t)) = -\frac{v_0}{\alpha^2+\omega^2}e^{-\alpha t}(\omega\cos(\omega t) + \alpha\sin(\omega t)) + \frac{v_0\omega}{\alpha^2+\omega^2}\\y(t) = \Im(u(t)) = \frac{v_0}{\alpha^2+\omega^2}e^{-\alpha t}(\omega\sin(\omega t) - \alpha\cos(\omega t)) + \frac{v_0\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\end{cases}$$

N=°5.

Comme $e^{-\alpha t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors on a:

$$P_\infty = \begin{cases}x(\infty) = \frac{v_0\omega}{\alpha^2+\omega^2}\\y(\infty) = \frac{v_0\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\end{cases}$$