Devoir maison 19

Vous traiterez au choix l'un des deux problèmes suivants, le second étant plus difficile que le premier.

▸ Problème 1 : formule de Taylor-Lagrange et méthode de Newton

Partie I. Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2.

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un segment $[a,b]$, et soit $c \in]a,b[$.

1. Soit $x \in]a,b[$ fixé différent de c. Pour $\lambda \in \mathbf{R}$, on définit une fonction ψ sur $[a,b]$ par

$$\psi : t \mapsto f(t) - f(c) - (t-c)f'(c) - \lambda(t-c)^2.$$

   a. Justifier que ψ est deux fois dérivable sur $]a,b[$, et pour $t \in]a,b[$, calculer $\psi'(t)$ et $\psi''(t)$.

   b. Déterminer la valeur à donner à λ pour que $\psi(x) = \psi(c)$.

   c. En appliquant deux fois le théorème de Rolle, justifier qu'il existe θ_x compris strictement entre c et x tel que

$$f(x) = f(c) + (x-c)f'(c) + \frac{(x-c)^2}{2} f''(\theta_x).$$

Partie II. Méthode de Newton

Dans cette partie, $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$, telle que :

- f est convexe
- $\forall x \in [a,b],\ f'(x) < 0$
- $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$.

2. Justifier qu'il existe un unique $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$.
3. Soit $u \in [a,b]$. Donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en u, et déterminer, en fonction de u, l'absicsse de son point d'intersection avec l'axe des abscisses.

Dans la suite, on note $g : \left| \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} \end{array} \right.$.

Soit $x_0 \in]a,b[$ tel que $f(x_0) > 0$, et soit $(x_n)_{\in \mathbf{N}}$ la suite dont le premier terme est x_0 et telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_{n+1} = g(x_n)$.

4. Prouver que la suite (x_n) est croissante et majorée par c.
5. Montrer que (x_n) converge vers c.
6. Justifier que $m = \min\limits_{t \in [a,b]} |f'(t)|$ et $M = \max\limits_{t \in [a,b]} |f''(t)|$ sont bien définis et strictement positifs.
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ tel que $x_n \neq c$, il existe θ_n strictement compris entre c et x_n tel que

$$f(x_n) = (x_n - c)f'(x_n) - \frac{(x_n-c)^2}{2} f''(\theta_n).$$

8. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|x_{n+1} - c| \leqslant \dfrac{M}{2m}(x_n - c)^2$.
9. Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $|x_{n_0} - c| \leqslant \dfrac{m}{M}$ et prouver alors que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$|x_n - c| \leqslant \frac{2m}{M} \frac{1}{2^{2^{n-n_0}}}.$$

10. Montrer alors que pour tout $q \in]0,1[$, $|x_n - c| \underset{n \to +\infty}{=} o(q^n)$.
    Autrement dit, (x_n) converge vers c plus vite que toute suite géométrique. Donc très rapidement !

▸ Problème 2 : une caractérisation des fonctions polynomiales

1. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$. Montrer que f est polynomiale si et seulement si

$$\exists n \in \mathbf{N},\ \forall x \in \mathbf{R},\ f^{(n)}(x) = 0.$$

Le but de ce devoir est de prouver un théorème relativement récent, prouvé en 1954 par les deux mathématiciens catalans Ferran Sunyer i Balaguer et Ernest Corominas i Vigneaux, dont l'énoncé est le suivant :

$$\boxed{\text{Soit } f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \text{ une fonction de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ telle que : } \forall x \in \mathbf{R},\ \exists n \in \mathbf{N},\ f^{(n)}(x) = 0. \text{ Alors } f \text{ est polynomiale.}}$$

Vous aurez compris que la différence avec la question 1 est dans l'ordre des quantificateurs, et que le n peut ici dépendre de x.

▸ Dans toute la suite, on considère f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un segment $[a,b]$, avec $a < b$, et telle que $\forall x \in [a,b],\ \exists n \in \mathbf{N},\ f^{(n)}(x) = 0$.
▸ Pour $k \in \mathbf{N}$, on note alors $\mathscr{Z}_k = \left\{x \in [a,b] \mid f^{(k)}(x) = 0\right\}$ et on note $\mathscr{U}_k = [a,b] \setminus \mathscr{Z}_k$.
▸ Dans tout le sujet, vous pourrez utiliser librement le fait qu'un intervalle I est ouvert si et seulement si pour tout $x \in I$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset I$.

Partie I. Quelques résultats préparatoires

2. Soit $([a_n, b_n])_{n\in\mathbf{N}}$ une suite décroissante (au sens de l'inclusion) de segments non vides de $\mathbf{R}$. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$ (ce résultat est appelé le *théorème des segments emboîtés*).
3. Soient I, J deux intervalles ouverts de $[a,b]$ avec $I \cap J \neq \emptyset$. On suppose qu'il existe deux polynômes P et Q tels que $\forall x \in I,\ f(x) = P(x)$ et $\forall x \in J,\ f(x) = Q(x)$. Montrer que $P = Q$.
4. Soit $x \in]a,b[$. On suppose qu'il existe un intervalle ouvert $I \subset [a,b]$, contenant x, et tel que la restriction de f à I soit polynomiale.
   a. Montrer que la réunion J_x de tous les intervalles ouverts inclus dans $[a,b]$, contenant x, et sur lesquels f coïncide avec un polynôme est encore un intervalle ouvert inclus dans $[a,b]$, contenant x, et sur lequel f coïncide avec un polynôme. On note alors $\alpha = \inf J_x$ et $\beta = \sup J_x$, et on pose $I_x = [\alpha, \beta]$ (qui est donc l'adhérence de J_x).
   b. Montrer que sur I_x, f coïncide avec un polynôme.
   c. Montrer que si I est un intervalle inclus dans $[a,b]$, contenant x, et sur lequel f coïncide avec un polynôme, alors $I \subset I_x$.
5. Soit $k \in \mathbf{N}$. Montrer que pour tout $x \in \mathscr{U}_k$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[a,b] \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \mathscr{U}_k$.

Partie II. Preuve du théorème dans un cas particulier

Dans toute cette partie, on suppose que sur tout intervalle I inclus dans $\mathscr{U}_0$, il existe $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que pour tout $x \in I$, $f(x) = P(x)$.
On souhaite alors prouver que sous cette hypothèse, f est polynomiale sur $[a,b]$.
Le cas où $\mathscr{U}_0 = \emptyset$ (c'est-à-dire $\mathscr{Z}_0 = [a,b]$) est trivial, puisqu'alors f est la fonction nulle.
On supposera donc dans la suite $\mathscr{U}_0 \neq \emptyset$. Soit alors $x \in \mathscr{U}_0$, et soit $I_x = [\alpha, \beta]$ l'intervalle défini dans la question 4.

6. On suppose dans cette question que pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathscr{Z}_0 \cap (]\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon[\setminus \{\alpha\}) \neq \emptyset$.
   a. Montrer qu'il existe une suite (u_n) d'éléments de $\mathscr{Z}_0 \setminus \{\alpha\}$ telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$. En déduire que $f(\alpha) = 0$.
   b. En notant que $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} f'(\alpha)(x - u_n) + o(\alpha - u_n)$, prouver que $f'(\alpha) = 0$.

c. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $f^{(k)}(\alpha) = 0$.

d. En déduire que f est nulle sur $[\alpha, \beta]$ et aboutir à une contradiction.

7. Dans cette question, on suppose que $a < \alpha$.

a. Justifier qu'il existe $\alpha' \in]a, \alpha[$ tel que $]\alpha', \alpha[\subset \mathcal{U}_0$, et que la restriction de f à $]\alpha', \alpha[$ est polynomiale.

b. Montrer que f coïncide avec un polynôme sur $]\alpha', \beta]$ (on pourra utiliser une formule de Taylor), et aboutir à une contradiction.

La question précédente prouve donc que $\alpha = a$, et on prouverait de même que $\beta = b$, si bien que $I_x = [a, b]$, et donc f est polynomiale sur $[a, b]$.

Partie III. Fin de la preuve du théorème de Sunyer-Corominas

Dans cette partie, on raisonne par l'absurde et on suppose que f n'est pas polynomiale sur $[a, b]$.

8. Justifier qu'il existe un segment S_0 inclus dans $\mathcal{U}_0$, non vide et non réduit à un point, tel que $f_{|S_0}$ ne soit pas polynomiale.

9. En notant que f' satisfait aux mêmes hypothèses que f, montrer qu'il existe un segment S_1, inclus dans $S_0 \cap \mathcal{U}_1$ tel que $f'_{|S_1}$ ne soit pas polynomiale.

10. À l'aide du théorème des segments emboîtés, montrer que $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \mathcal{U}_n \neq \emptyset$ et terminer la preuve du théorème de Sunyer-Corominas, dont l'énoncé figure au début du sujet.