Gaspar Daguet

Maths : DM 21

Exercice: un calcul de l'intégrale de Gauss

N=° 1.

soient $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $y \geq x$, alors

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x(1+\tan^2 t)} \,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-y(1+\tan^2 t)} \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x(1+\tan^2 t)} - e^{-y(1+\tan^2 t)} \,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Mais, $-x \geq -y$ donc $e^{-x} \geq e^{-x}$, et pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], 1 + \tan^2 t \geq 0$
Donc $x \mapsto x^{1+\tan^2 t}$ est c roissante
donc $\left(e^{-x}\right)^{1+\tan^2 t} \geq \left(e^{-y}\right)^{1+\tan^2 t}$ donc $e^{-x(1+\tan^2 t)} - e^{-y(1+\tan^2 t)} \geq 0$
Ainsi par croissance de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x(1+\tan^2 t)} - e^{-y(1+\tan^2 t)} \,\mathrm{d}t \geq 0$
et donc $f(x) - f(y) \geq 0$ et donc $f(x) \geq f(y)$
Ainsi f est décroissante

N=° 2.

soit $x \in \mathbb{R}$, alors

$$\frac{f(x)}{e^{-x}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x(1+\tan^2 t)+x} \,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x\tan^2 t} \,\mathrm{d}t$$

Comme $\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right], 0 \leq \tan t \leq 1$, soit un telle t, alors
$0 \geq -x \tan^2 t \geq -x$ donc $e^0 = 1 \geq e^{-x\tan^2 t} \geq e^{-x}$
Et donc $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x} \,\mathrm{d}t \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x\tan^2 t} \,\mathrm{d}t \leq \frac{\pi}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}t$
Et comme:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x} \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} e^{-x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

On a donc que $\frac{f(x)}{e^{-x}}$ est bornée au voisinage de l'infinie
Et donc $f(x) \underset{x \to +\infty}{\overset{\longrightarrow}{=}} O(e^{-x})$

N=° 3.

soit $y \in [-A; A]$,et soit $f : y \mapsto e^y$ alors comme f est convexe car f'' est strictement positive
On a que f est supérieur à toute ses tangentes, en particulier à $y \mapsto y + 1$
Donc $e^y \geq y + 1$ donc $0 \leq e^y - y - 1$

On a $e^A \geq f''(y) = e^y \geq 0$, donc par l'inégalit de Taylor-Lagrange:

$$f(y) - 1 - y = |f(y) - f(0) - f'(0)y| \leq e^A \frac{y^2}{2}$$

N=° 4. a.

soit $h \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) + hg(a) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-(a+h)(1+\tan^2 t)} \,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-a(1+\tan^2 t)} \,\mathrm{d}t + h \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2 t) e^{-a(1+\tan^2 t)} \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-a(1+\tan^2 t)} \left(e^{-h(1+\tan^2 t)} - 1 + h(1+\tan^2 t) \right) \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Or par la question précédente pour tout $t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$:
$0 \leq e^{-h(1+\tan^2 t)} - 1 + h(1+\tan^2 t) \leq e^{\frac{\pi}{4}} \frac{h^2}{2} (1+\tan^2 t)^2$ avec $A = 2|h|$

$$\text{donc } 0 \leq e^{-a(1+\tan^2 t)} \left(e^{-h(1+\tan^2 t)} - 1 + h(1+\tan^2 t) \right) \leq e^{2|h|} \frac{h^2}{2} e^{-a(1+\tan^2 t)} (1+\tan^2 t)^2 \leq e^{\frac{\pi}{4}} 2h^2 e^{-a(1+\tan^2 t)}$$

$$\text{donc } 0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-a(1+\tan^2 t)} \left(e^{-h(1+\tan^2 t)} - 1 + h(1+\tan^2 t) \right) \mathrm{d}t \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{2|h|} 2h^2 e^{-a(1+\tan^2 t)} \,\mathrm{d}t$$

$$\text{donc } 0 \leq f(a+h) - f(a) + hg(a) \leq e^{2|h|} 2h^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{(-a(1+\tan^2 t))^2} \,\mathrm{d}t = e^{2|h|} 2h^2 f(a)$$

Ainsi $\underline{\forall h > 0, 0 \leq f(a+h) - f(a) + hg(a) \leq e^{2|h|} 2h^2 f(a)}$

b.

D'après la question précédente, pour tout $h > 0$:
$0 \leq f(a+h) - f(a) + hg(a) \leq e^{2|h|} 2h^2 f(a)$ soit $0 \leq \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + g(a) \leq \underbrace{e^{2|h|} 2h f(a)}_{\underset{h \to 0}{\longrightarrow}}$

Donc par le théorème des gendarmes $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + g(a) = 0$
Et donc $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = -g(a)$

N=° 5. a.

On vient de prouver que f étais dérivable et par le théorème fondamentale de l'analyse
$\int_0^x e^{-u^2} \,\mathrm{d}u$ est dérivable, de dérivé $x \mapsto e^{-x^2}$
Donc par somme et composition de fonction dérivable h est dérivable

b.

En possant $u = x \tan t$, on a $\mathrm{d}u = x(1+\tan^2 t) \,\mathrm{d}t$
donc $\int_0^x e^{-u^2} \,\mathrm{d}u = \int_0^{\arctan(\frac{x}{x}) = \frac{\pi}{4}} e^{-x^2 \tan^2 t} x (1+\tan^2 t) \,\mathrm{d}t$
soit $x \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} h'(x) &= -2xg(x^2) + 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} \,\mathrm{d}u \\ &= -2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(1+\tan^2 t) e^{-x^2(1+\tan^2 t)} \,\mathrm{d}t + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x^2(1+\tan^2 t)} (1+\tan^2 t) \,\mathrm{d}t = 0 \end{aligned}$$

Ainsi $\underline{\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = 0}$

c.

Par la question précédente $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = l \in \mathbb{R}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = l$
Deplus comme $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} O(e^{-x})$ et comme $e^{-x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc $l = \lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{f(x^2)}_{\to 0} + \left(\int_0^x e^{-u^2} \, \mathrm{d}u \right)^2 = \lim_{x \to +\infty} \left(\int_0^x e^{-u^2} \, \mathrm{d}u \right)^2$

donc $\lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-u^2} \, \mathrm{d}u = \sqrt{l}$

Et $l = h(0) = f(0) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$

Et donc $\lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-u^2} \, \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$