

Maths : DM 18

Problème 1: formule de Taylor-Lagrange et méthode de Newton

Partie I. Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2.

N°1. a.

On a bien ψ deux fois dérivable sur $]a; b[$ car f est \mathcal{C}^2

De plus

$$\psi'(t) = f'(t) - f'(c) - 2\lambda(t - c)$$

Et

$$\psi''(t) = f''(t) - 2\lambda$$

b.

On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]a, b[, \psi(x) = \psi(c)$

De plus $\psi(c) = f(c) - f(c) - (c - c)f'(c) - \lambda(c - c)^2 = 0$

Ainsi soit $x \in]a, b[$, alors

$$\psi(x) = \psi(c) \Leftrightarrow f(x) - f(c) - (x - c)f'(c) - \lambda(x - c)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda(x - c)^2 = f(x) - f(c) - (x - c)f'(c)$$

$$\lambda = \frac{f(x) - f(c) - (x - c)f'(c)}{(x - c)^2}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\hspace{10cm}}$$

c.

Ainsi avec le bon λ on a $\psi(c) = \psi(x)$ et comme ψ est continue sur $[c; x]$

car somme est produit de fonction continue

Donc en utilisant une première fois le théorème de Rolle sur $[c; x]$

On a qu'il existe $c_x \in]c; x[, \psi'(c_x) = 0$

Et comme $\psi'(c) = f'(c) - f'(c) - 2\lambda(c - c) = 0$

On peut réappliquer le théorème de Rolle, Ainsi on obtiens:

$$\exists \theta_x \in]c; x[, \psi''(\theta_x) = 0$$

Donc soit un tel $\theta_x \in]c; x[$

$$\psi''(\theta_x) = 0 \Leftrightarrow f''(\theta_x) - 2\lambda = 0$$

Ainsi comme $\lambda = \frac{f(x) - f(c) - (x - c)f'(c)}{(x - c)^2}$

$$f''(\theta_x) = 2\lambda = 2 \frac{f(x) - f(c) - (x - c)f'(c)}{(x - c)^2} \Leftrightarrow \frac{(x - c)^2}{2} f''(\theta_x) = f(x) - f(c) - (x - c)f'(c)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = f(c) + (x - c)f'(c) + \frac{(x - c)^2}{2} f''(\theta_x)$$

Partie II. Méthode de Newton

N°2.

Le point deux nous informe que f est strictement décroissante sur $[a; b]$

et comme $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$

Ainsi par le théorème de la bijection $\exists! c \in]a; b[, f(c) = 0$

N°3.

L'équation de la tangente à \mathcal{C}_f en u est $\forall x \in [a; b], \Delta_u(x) = f(u) + f'(u)(x - u)$

Et coupe l'axe des abscisse en $x = u - \frac{f(u)}{f'(u)}$

N°4.

$$x_{n+1} - x_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} > 0 \text{ car } \forall x \in [a; b], f'(x) < 0$$

Donc (x_n) est croissante

Et prouvons que (x_n) est majorée par c par récurrence simple

Prouvons d'abord que g est croissante

Pour ça, on a

$$\forall x \in [a; b], g'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{\underbrace{f'(x)^2}_{\geq 0}}$$

et comme f est convexe, on a $\forall x \in [a; b], f''(x) \geq 0$

Ainsi sur $[a, c]$, f est positive et donc g est croissante sur $[a, c]$

- **Initialisation:**

On a: $f(x_0) > 0 = f(c)$ donc $f(x_0) > f(c)$ et par décroissance de f sur $[a; b]$, on a $x_0 < c$

- **Hérédité:** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n < c$, alors

$$x_n \leq c$$

$$\Leftrightarrow g(x_n) \leq g(c) \text{ car } g \text{ est croissante sur } [a, c]$$

$$\Leftrightarrow x_{n+1} \leq c - \underbrace{\frac{f(c)}{f'(c)}}_{=0} = c$$

Ainsi par principe de récurrence (x_n) est majorée par c

N°5.

Comme x_n est croissante et majoré, alors

par le théorème de la limite monotone (x_n) converge

De plus par la théorème du point fixe (x_n) converge vers le point fixe de g

Ainsi soit $l \in [a, b]$ $g(l) = l \Leftrightarrow l - \frac{f(l)}{f'(l)} = l \Leftrightarrow f(l) = 0 \Leftrightarrow l = c$ car c est l'unique nombre tel que $f(c) = 0$

Ainsi (x_n) converge vers c

N°6.

A faire

N°7.

A faire

N=8.