Gaspar Daguet

Maths : DM 10

Partie I. Le théorème de Cesàro

N=°1. a.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}$ alors par la définition de limite:

$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

b.

Soient $n_0, n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq n_0$ alors

$$|\sigma_n| = \left|\frac{\sum_{k=1}^{n} u_k}{n}\right| = \left|\frac{\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k}{n} + \frac{\sum_{k=n_0}^{n} u_k}{n}\right| \leq \left|\frac{\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k}{n}\right| + \left|\frac{\sum_{k=n_0}^{n} u_k}{n}\right| \leq \frac{\sum_{k=1}^{n_0-1} |u_k|}{n} + \frac{\sum_{k=n_0}^{n} |u_k|}{n}$$

Ainsi on a bien:

$\forall n \geq n_0, |\sigma_n| \leq \frac{|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_{n_0-1}|}{n} + \frac{|u_{n_0}| + \ldots + |u_n|}{n}$

c.

Comme $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k$ est une somme finis alors:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1} |u_k| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc par la définition de limite:

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_1, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1} |u_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

De plus:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n} |u_k| \leq \frac{1}{n}\sum_{n_0}^{n} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{n - n_0 + 1}{2}\varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Poson $N = \max(n_1, n_0)$ alors :

$$\forall n \geq N, |\sigma_n| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1}|u_k| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n}|u_k| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

Donc $\sigma_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

N=°2.

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ et σ_n la suite des moyennes de Césàro associée à (u_n) alors :
la suite $(u_n - l)$ tend vers 0
Donc selon le résulta précédent: $\sigma_n - l \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
Donc : $\sigma_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$

N=°3.

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n$
Cette suite n'admet pas de limite
Or la suite des moyennes de Césàro associé à (u_n):

$$\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k = \frac{(-1)^n - 1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc σ_n converge vers 0
Ce qui contredit la réciproque

N=°4.

Soit $A \in \mathbb{R}$ alors:
$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \geq 2A$ alors
Soit un tel n_0 et
Soit (σ_n) la suite des moyennes de Césàro de (u_n), alors pour $n \geq n_0$:

$$\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1}(u_k) + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n}(u_k) \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1}(u_k) + 2A\frac{n-n_0+1}{n}$$

Comme $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1}(u_k)$ tend vers 0 (cf: première question) alors à partir qu'un certain rang n_1:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1}(u_k) \geq -\frac{A}{5}$$

Et $2\frac{n-n_0+1}{n}$ tend vers 2 donc à partir d'un certain rang n_2: $2\frac{n-n_0+1}{n} \geq \frac{9}{5}$
Poson $N = \max(n_0, n_1, n_2)$

Alors pour tout $n \geq N$:

$$\sigma_n \geq -\frac{A}{5} + \frac{9}{5}A \geq \frac{8}{5}A \geq A$$

Donc σ_n diverge vers $+\infty$

N=°5.

Le sens $\Longleftarrow$ à déjà été prouver il reste donc le sens $\Longrightarrow$ à prouvé

Supposons que (σ_n) converge vers l et que (u_n) est croissante alors:

A faire

Partie II. Quelques appliquations

N=°6. Le lemme de l'escalier

Soit $n \in \mathbb{N}$

Poson $\forall n \geq 2, v_n = a_n - a_{n-1}$

Selons le lemme de Césàro on a:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$$

Or $\frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} v_k = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} a_k - a_{k-1} = \frac{a_n - a_1}{n}$ Or $-\frac{a_1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc il existe un rang n_0 tel que:

$$\forall n \geq n_0, \left|\frac{a_n}{n} - \frac{a_1}{n} - a\right| \leq \left|\frac{a_n}{n} - a\right| + \left|\frac{a_1}{n}\right| \leq \left|\frac{a_n}{n} - a\right| + |a_1| \leq 2|a_1| + |a|$$

ce qui est équivalant à: $\forall n \geq n_0, \left|\frac{a_n}{n} - a\right| < |a_1| + |a|$

Poson alors $\varepsilon = |a_1| + |a| > 0$

Donc $\forall n \geq n_0, \left|\frac{a_n}{n} - a\right| < \varepsilon$

Autrement dit $\frac{a_n}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$

N=°7. a.

Prouvons tout d'abord que u_n converge

Comme $1 + u_n^2 > 0$ et $u_1 > 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$

Donc la suite est strictement positve et minorée par 0

Et on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{1+u_n^2} - u_n = -\frac{u_n^3}{1+u_n^2}$$

Or comme $u_n > 0$ et $1 + u_n^2 > 0$ alors $-\frac{u_n^3}{1+u_n^2} < 0$
Donc la suite est décroisante
Ainsi comme la suite est minorée et décroisante alors par le théorème de la limite monotone, (u_n) converges vers l

Par passage à la limite dans la définition
$l = \frac{l}{1+l^2}$
donc $1 + l^2 = 1$
donc $l^2 = 0$
donc $l = 0$
Ainsi $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

b.

v_n est bien définis car $u_n > 0$

$$v_n + 1 - v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{\left(1+u_n^2\right)^2}{u_n^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1+2u_n^2+u_n^4-1}{u_n^2} = 2 + \underbrace{u_n^2}_{\to 0} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} (v_{n+1} - v_n) = 2$

c.

Par le lemme de l'escalier, on a: $\frac{v_n}{n} = \frac{1}{nu_n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$
Donc $\frac{1}{2nu_n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$
Donc $2nu_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$
Donc $u_n\sqrt{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$

Exercice 2 : calcul des puissances d'une matrice 3×3

N=°1. a.