Gaspar Daguet

Maths : DM ᚢᚷ

Il est important avant de commencer lire ce DM
d'avoir bien compris le tableau et les exemples suivants

symbole usuel	symbole du DM	prononciation
0	ᚠ	fé
1	ᚢ	ur
2	ᚦ	tur
3	ᚨ	an
4	ᚱ	rai
5	ᚲ	kau
6	ᚷ	gèb
7	ᚹ	wun
8	ᚺ	hag
9	ᚾ	nau
10	ᛃ	je
11	ᛇ	ei
$=$	ᛝ	ing/i ng
$+$	ᛏ	ti
$-$	ᛉ	al
$\times$	ᛞ	dag
$\div$	ᛚ	lag
$\in$	ᛊ	so
$\forall$	ᛈ	per
$\exists$	ᛒ	ber
$\exists!$	!ᛒ	\
$>$	ᛗ	man
$<$	ᛖ	e
$\geq$	ᛗᛝ	maning
$\leq$	ᛖᛝ	ehwing
$\neq$	ᛜ	naing
$\subset$	ᚬ	suz
$\supset$	ᚭ	zus

ᚷᚹ ᛏ ᚲᚲ ᛝ ᚢᚠᚠ ce qui est équivalant à $79 + 65 = 144$

$$e^{ᛩ} \underset{ᛩ \to ᚠ}{ᛝ} ᚢ ᛏ ᛩ ᛏ \frac{ᛩ^{ᚦ}}{ᚦ!} ᛏ \cdots ᛏ \frac{ᛩ^{ᛠ}}{ᛠ!} ᛏ o\left(ᛩ^{ᛠ}\right)$$

est équivalant à

$$e^x \underset{x \to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{x!} + o(x^n)$$

Problème ᚦ : nombres algébrique et extensions de corps

Partie I. extensions de corps

N=° ᚢ. Premiers exemples a.

il est évident que ℝ est un sous-corps de ℂ et de plus ℂ est de dimension finis,
donc ℂ est une extention finie de ℝ

de plus soit ᚼ ᛊ ℂ alors

$$ᛈᛃ, ᚺ ᛊ \mathbb{R}, ᚼ ᛝ ᛃ ᛏ i\, ᚺ \Leftrightarrow ᚼ ᛊ \mathrm{Vect}(ᚢ, i)$$

Ainsi comme ᚢ et i ne sont pas colinéaire dans ℝ, Vect(ᚢ, i) forme une base de ℂ
Ainsi [ℂ : ℝ] ᛝ ᚦ

soit ᛥ un sous-corps qui contient ℝ
comme [ℝ : ℝ] ᛝ ᚢ et que l'on vient de prouver que [ℂ : ℝ] ᛝ ᚦ
il apparait donc comme condition que, ᚢ ᛖᛝ [ᛥ : ℝ] ᛖᛝ ᚦ
Ainsi [ᛥ : ℝ] ᛝ ᚢ ou [ᛥ : ℝ] ᛝ ᚦ
Et ansi ᛥ ᛝ ℝ ou ᛥ ᛝ ℂ

b.

Soit ᛃ ᛊ $\mathbb{Q}(\sqrt{ᚦ})$, alors ᛒ ᚺ, ᚼ ᛊ ℚ, ᛃ ᛝ ᚺ ᛏ ᚼ $\sqrt{ᚦ}$, alors prenons ᚼ ᛝ ᚹ
ainsi ᛃ ᛝ ᚺ ᛊ ℚ, donc ℚ ᚨ $\mathbb{Q}(\sqrt{ᚦ})$ et comme ℚ est un corps
de $\mathbb{Q}(\sqrt{ᚦ})$
de plus, soit ᛃ ᛊ $\mathbb{Q}(\sqrt{ᚦ})$ alors ᛒ ᚺ, ᚼ ᛊ ℚ, ᛃ ᛝ ᛒ ᛏ ᚺ $\sqrt{ᚦ}$, soit un telle ᚼ, ᚺ
donc ᛃ ᛝ ᚼ ᛏ ᚺ $\sqrt{ᚦ}$ ᛊ Vect$(ᚢ, \sqrt{ᚦ})$
et supposons par l'absurde ᛒ ᛃ, ᚺ ᛊ ℚ ᛞ $\mathbb{Q}^*$, ᛃ ᛏ ᚺ $\sqrt{ᚦ}$ ᛝ ᚹ
alors $\frac{ᛃ}{ᚺ}$ ᛝ ᛉ $\sqrt{ᚦ}$ ce qui est absurde car $\frac{ᛃ}{ᚺ}$ ᛊ ℚ, donc ᛃ ᛝ ᚺ ᛝ ᚹ
Ainsi $(ᚢ, \sqrt{ᚦ})$ est une base de $\mathbb{Q}(\sqrt{ᚦ})$
Donc $[\mathbb{Q}(\sqrt{ᚦ}) : \mathbb{Q}]$ ᛝ ᚦ

c. i.

Soit P ᛊ ℚ[X] tel que $P(\sqrt[ᚠ]{ᚦ})$ ᛝ ᚹ
prenons la divisions euclidienne de $X^{ᚠ}$ ᛉ ᚦ par P
ce qui nous donne $X^{ᚠ}$ ᛉ ᚦ ᛝ PQ ᛏ R avec Q ᛊ $\mathbb{Q}_{ᚢ}[X]$ et R ᛊ ℚ[X] tel que deg R ᛖ ᚦ
En évaluant notre expression précédente en $\sqrt[ᚠ]{ᚦ}$ on obtient :

$$\left(\sqrt[ᚠ]{ᚦ}\right)^{ᚠ} ᛉ ᚦ ᛝ ᚹ ᛝ \underbrace{\mathrm{P}\left(\sqrt[ᚠ]{ᚦ}\right)}_{ᛝ ᚹ} ᛏ \mathrm{R}$$

donc R ᛝ ᚹ et donc deg R ᛝ ᚹ
ainsi P divise X^{ᚠ} ᛉ ᚦ

Ainsi Comme P divise $X^{ᚠ}$ ᛉ ᚦ et que deg P ᛝ ᚦ,
alors P et $X^{ᚠ}$ ᛉ ᚦ possède deux racines en commun dont $\sqrt[ᚠ]{ᚦ}$
et comme $X^{ᚠ}$ ᛉ ᚦ ᛝ $\left(X ᛉ \sqrt[ᚠ]{ᚦ}\right)\left(X ᛉ \sqrt[ᚠ]{ᚦ}e^{i\frac{\pi}{ᚠ}}\right)\left(X ᛉ \sqrt[ᚠ]{ᚦ}e^{i\frac{ᚦ\pi}{ᚠ}}\right)$ donc P à en plus une racine complexe
or un polynôme dans ℝ qui possède une racine complexe possède sont conjugée

ce qui n'est pas le cas pour P donc P$\notin\mathbb{Q}[X]$ ce qui est absurde

Donc $\nexists P\in\mathbb{Q}[X], P\left(\sqrt[3]{2}\right)=0$

ii.

Par un résonnement annaloge à la question 1 .b on montre que $\mathbb{Q}\subset\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)$,

De plus soit $x\in\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)$ alors soient $a, i, j\in\mathbb{Q}, x=a+i\ \sqrt[3]{2}+j\ \left(\sqrt[3]{2}\right)^2$

donc $x\in\mathrm{Vect}\left(1,\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{2}^2\right)$

donc $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)$ est une extensions finis et $\left[Q\left(\sqrt[3]{2}\right):\mathbb{Q}\right]=3$

d.

Soient $a_1,\cdots,a_n\in\mathbb{Q}$ tels que $\sum_{j=1}^{n}a_j\ln(p_j)=0$,

alors

$$\ln\left(\prod_{j=1}^{n}p_j^{a_j}\right)=0\text{ donc }\prod_{j=1}^{n}p_j^{a_j}=1$$

Or comme $\forall j\in[\![1;n]\!], a_j\in\mathbb{Q}$ donc $\exists l, i_1,\cdots,i_n\in\mathbb{N},\forall j\in[\![1;n]\!], a_j=\frac{i_j}{l}$. Ainsi

$$\left(\prod_{j=1}^{n}p_j^{i_j}\right)^{\frac{1}{l}}=1\Leftrightarrow\prod_{j=1}^{n}p_j^{i_j}=1$$

Or comme $\forall j\in[\![1;n]\!], p_j^{i_j}\in\mathbb{N}$ donc $p_1^{j_1}=\cdots=p_n^{j_n}=1$ donc $j_1=\cdots=j_n=0$

Et donc $a_1=\cdots=a_n=0$

Ainsi $(\ln(p_1),\cdots,\ln(p_n))$ est libre

Et donc la dimmension de $\mathbb{R}$ n'est pas finis, donc $\mathbb{R}$ n'est pas une extention finis de $\mathbb{Q}$

N=° 2.

soit $x\in\mathbf{L}$, alors $\exists!a_1,\cdots,a_n\in\mathbf{K}$ tel que, $x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_i$

Or on a $\forall i\in[\![1,n]\!],\exists!j_1,\cdots,j_p\in k, a_i=\sum_{l=1}^{p}\beta_l j_l$

Ainsi $\exists!a_1,\cdots,a_n\in\mathbf{K}\in k,\exists!j_1,\cdots,j_p\in k, x=\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq l\leq p}}\alpha_i\beta_l a_i j_l$

Donc x s'écrit d'une manière unique comme des élément de k,

donc la famille $\left(\alpha_i\beta_j\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ est une base de du k-espace vectoriel $\mathbf{L}$

De plus la famille $\left(\alpha_i\beta_j\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ comporte exactement np éléments

Donc $\mathbf{L}$ est une extensions finis de k et $[\mathbf{L}:k]=[\mathbf{L}:\mathbf{K}][\mathbf{K}:k]$

Partie II. Éléments algébriques

N=° ᛚ.

pour montrer que $\mathbb{K}[\alpha] ᛝ \{P(\alpha), P ᛊ \mathbb{K}[X]\}$,
on montre que $\{P(\alpha), P ᛊ \mathbb{K}[X]\} ᛝ \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(\alpha^n, n ᛊ \mathbb{N})$
pour cela,

$$ᛘ ᛊ \{P(\alpha), P ᛊ \mathbb{K}[X]\} \Leftrightarrow ᛒ ᛇ_{ᚹ}, \cdots, ᛇ_n ᛊ \mathbb{K}\ ᛘ ᛝ \sum_{ᛩ ᛝ ᚹ}^{n} ᛇ_{ᛩ} \alpha^{ᛩ} ᛊ \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(\alpha^n, n ᛊ \mathbb{N}) ᛝ \mathbb{K}[\alpha]$$

Donc $\{P(\alpha), P ᛊ \mathbb{K}[X]\} ᛝ \mathbb{K}[\alpha]$

soient $ᛩ, ᛇ ᛊ \mathbb{K}[\alpha]$, alors $ᛒ P, Q ᛊ \mathbb{K}[X]$, $P(\alpha) ᛝ ᛩ$ et $Q(\alpha) ᛝ ᛇ$, alors:

- $ᚹ ᛊ \mathbb{K}[\alpha]$
- $ᛩ ᛉ ᛇ ᛝ P(\alpha) ᛉ Q(\alpha) ᛝ (P ᛉ Q)(\alpha)$ et $P ᛉ Q ᛊ \mathbb{K}[X]$
- $ᛩ ᛞ ᛇ ᛝ P(\alpha) ᛞ Q(\alpha) ᛝ (P ᛞ Q)(\alpha)$ et $PQ ᛊ \mathbb{K}[X]$

Donc $\mathbb{K}[\alpha]$ est un sous-anneau de $\mathbb{L}$

Et $\mathrm{Vect}(\alpha^n, n ᛊ \mathbb{N})$ est le plus petit ensemble stable par ᛏ et ᛞ,
ce qui fais de luis le plus petit sous-anneau contanant α et $\mathbb{K}$

N=° ᚱ.

procédons par double inclusion pour prouver que α est algébrique sur $\mathbb{K}$ si et seulement si il existe $n ᛊ \mathbb{N}$ tel que $(1, \alpha, \cdots, \alpha^n)$ soit une famille liée
($\Rightarrow$) Supposons que α est algébrique sur $\mathbb{K}$, alors

$$ᛒ ᛘ ᛊ \mathbb{K}[X], ᛘ(\alpha) ᛝ ᚹ \Leftrightarrow ᛒ n ᛊ \mathbb{N}, ᛒ ᛩ_{ᚹ}, \cdots, ᛩ_n ᛊ \mathbb{K}, ᛘ(\alpha) ᛝ \sum_{ᛇ ᛝ ᚹ}^{n} ᛩ_{ᛇ} \alpha^{ᛇ} ᛝ ᚹ$$

$$\text{donc } ᛉ \sum_{ᛇ ᛝ ᚢ}^{n} ᛩ_{ᛇ} \alpha^{ᛇ} ᛝ ᛩ_{ᚹ}$$

$$\text{donc } (1, \alpha, \cdots, \alpha^n) \text{ est liée}$$

($\Leftarrow$) Supposons que $(1, \alpha, \cdots, \alpha^n)$ soit liée, alors:

$$ᛒ ᛩ_{ᚹ}, \cdots, ᛩ_n ᛊ \mathbb{K}, ᛒ ᛣ ᛊ \mathbb{N}, ᚼ\ \alpha^{ᛣ} ᛝ \sum_{\substack{ᛇ ᛝ ᚹ \\ ᛇ \circ ᛣ}}^{n} ᛩ_{ᛇ} \alpha^{ᛇ}$$

$$\text{donc } \sum_{\substack{ᛇ ᛝ ᚹ \\ ᛇ \circ ᛣ}}^{n} ᛩ_{ᛇ} \alpha^{ᛇ} ᛉ ᚼ\ \alpha^{ᛣ} ᛝ ᚹ$$

en posant $ᛉ ᚼ ᛝ ᛩ_{ᛣ}$, on obtient

$$\sum_{\substack{ᛇ ᛝ ᚹ \\ ᛇ \circ ᛣ}}^{n} ᛩ_{ᛇ} \alpha^{ᛇ} ᛉ ᚼ\ \alpha^{ᛣ} ᛝ \sum_{ᛇ ᛝ ᚹ}^{n} ᛩ_{ᛇ} \alpha^{ᛇ} ᛝ ᚹ$$

Or $\sum_{ᛇ ᛝ ᚹ}^{n} ᛩ_{ᛇ} \alpha^{ᛇ} ᛊ \mathbb{R}[X]$
Donc α est algébrique

Par le principe de double inclusion

α est algébrique si et seulement si il existe n ⌇ $\mathbb{N}$ tel que $(1, \alpha, \cdots, \alpha^n)$ est liée

N=° ᚲ.

Soit ɜ ⌇ $\mathbb{L}$, alors ɜ est algébrique de degré ᚢ sur $\mathbb{K}$ si et seulement si (ᚢ, ɜ) est liée

si et seulement si il existe ᛒ ⌇ $\mathbb{K}$, ɜ ⨳ ᛒ ᛞ ᚢ ⨳ ᛒ si et seulement si ɜ ⌇ $\mathbb{K}$

Donc on a bien (ᚢ, ɜ) liée ⇔ ɜ ⌇ $\mathbb{K}$

N=° ᚷ.

Supposons que $\mathbb{L}$ est une extention finie de $\mathbb{K}$ et soit ɜ ⌇ $\mathbb{L}$

alors ɜ est algébrique sur $\mathbb{K}$ si:

$$a$$

N=° ᚹ. a.

On sait par la définitions que $(1, \alpha, \cdots, \alpha^{d\,ᛉ\,ᚢ})$ est libre

Et $\mathrm{Vect}(\alpha^n, n$ ⌇ $\mathbb{N})$ ⨳ $\mathrm{Vect}(\alpha^n, n$ ⌇ ⟦ᚢ; d ᛉ ᚢ⟧)

Ainsi $\mathrm{Vect}(\alpha^n, n$ ⌇ ⟦ᚢ; d ᛉ ᚢ⟧) est une base de $\mathbb{K}[\alpha]$

b.

Supposons que β ∘ ᚹ, alors prouvons que f_β est linéaire et bijective

- linéarité:

Soient ᛒ ⌇ $\mathbb{K}$, ɜ, ᛡ ⌇ $\mathbb{K}[\alpha]$, f_β(ᛒ ɜ ᛐ ᛡ) ⨳ β ᛒ ɜ ᛐ β ᛡ ⨳ ᛒ f_β(ɜ) ᛐ f_β(ᛡ) donc f_β ets linéaire

- bijectivité:

soit ɜ ⌇ $\mathbb{K}[\alpha]$, f_β(ɜ) ⨳ ᚹ

alors β ɜ ⨳ ᚹ donc ɜ ⨳ ᚹ car β ∘ ᚹ

donc $\mathrm{Ker}(f_\beta)$ ⨳ {ᚹ}. donc f_β est injéctive

Et soient ɜ, ᛡ ⌇ $\mathbb{K}[\alpha]$, f_β(ɜ) ⨳ ᛡ

alors ɜ ⨳ $\frac{ᛡ}{\beta}$ car β ∘ ᚹ, et donc f_β est surjective

et comme f_β va de $\mathbb{K}[\alpha]$ dans $\mathbb{K}[\alpha]$

f_β est un automorphisme

c.

On a: $\mathbb{K}$ ⊧ $\mathbb{K}[\alpha]$, donc $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}[\alpha]$

De plus comme $(1, \alpha, \cdots, \alpha^{d\,ᛉ\,ᚢ})$ est une base de $\mathbb{K}[\alpha]$ qui comporte d élément

Ainsi $\mathbb{K}[\alpha]$ est une extensions finie de $\mathbb{K}$, avec $[\mathbb{K}[\alpha] : \mathbb{K}]$ ⨳ d

d.

Il est évident que $\mathbb{Q}$(∛ᚦ) ⊧ $\mathbb{C}$, et commme $\mathbb{Q}$ est un sous groupe et que ∛ᚦ ⌇ $\mathbb{C}$,

alors par les questions précédente:

$\mathbb{Q}$(∛ᚦ) est un sous-corps de $\mathbb{C}$

N=° ᚺ.

i) ⇒ ii) est évident car $\mathbb{K}[\alpha]$ est un corps et donc stable par ᛞ

ii) $\Rightarrow$ iii) Supposons que $\alpha^{-1} \in \mathbb{K}[\alpha]$, alors
$\exists P \in \mathbb{K}[X], P(\alpha) = \alpha^{-1}$, soit P un telle polynôme, alors:

$$P(\alpha) = \alpha^{-1} \Leftrightarrow \alpha\, P(\alpha) = \alpha\alpha^{-ᚦ} = 1$$
$$\Leftrightarrow \alpha\, P(\alpha) - \alpha = 0$$

Posons $Q = X\, P(X) - 1 \in \mathbb{K}[X]$, ainsi $Q(\alpha) = 0$
Et donc α est constructible
iii) $\Rightarrow$ i) Supposons que α est algébrique sur $\mathbb{K}$, alors par la question ᚹ.
$\mathbb{K}[\alpha]$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$

Ainsi par un raisonnement cyclique,
on a bien que $\mathbb{K}[\alpha]$ est un sous-corps de $\mathbb{L} \Leftrightarrow \alpha^{-1} \in \mathbb{K}[\alpha] \Leftrightarrow \alpha$ est algébrique sur $\mathbb{K}$

Partie III. Polynômes minimal d'un élément algébrique

N=° ᚾ.

Si I_α na possède pas une polynôme de degré q,
alors soit $P \in I_\alpha$ de degré q, alors soit a sont coefficient dominant
alors le polynome $\frac{P}{a}$ est de degrés q et sont coefficient dominant vaut 1
De plus $\frac{P}{a}(\alpha) = \frac{P(\alpha)}{a} = \frac{0}{a} = 0$ donc $\frac{P}{a} \in I_\alpha$
Donc I_α possède un polynôme unitaire de degrés q

Soient $P, Q \in I_\alpha$ deux polynômes unitaire de degrés q
Alors $\exists a_0, \cdots, a_{q-1}, b_0, \cdots, b_{q-1} \in \mathbb{K}, P = X^q + \sum_{k=0}^{q-1} a_k X^k$ et $Q = X^q + \sum_{k=0}^{q-1} b_k X^k$
Alors $P(\alpha) - Q(\alpha) = \sum_{k=0}^{q-1} a_k \alpha^k - \sum_{k=0}^{q-1} b_k \alpha^k = 0$
donc $\sum_{k=0}^{q-1} (a_k - b_k)\alpha^k$, et comme $\left(1, \alpha, \cdots, \alpha^{q-1}\right)$ est libre, on a: $\forall k \in [\![0; q-1]\!], a_k = b_k$
Ainsi on a bien $P = Q$
Donc il existe un unique polynome unitaire de degré q dans I_α

N=° ᛃ.

Supposons par l'absurde que μ_α est réductible,
alors $\exists P, Q \in \mathbb{K}[X], \mu_\alpha = P\ Q$, soient de tels polynômes
Ainsi $\mu_\alpha(\alpha) = P(\alpha)\ Q(\alpha) = 0$ donc $P(\alpha) = 0$ ou $Q(\alpha) = 0$,
donc α est algébrique de degrés inférieur stricte à d, absurde !
Donc μ_α est irréductible

Soit $P \in I_\alpha$, alors $\exists Q \in \mathbb{K}[X], P = \mu_\alpha\ Q$ car $P(\alpha) = 0$, ainsi $I_\alpha \subset \{\mu_\alpha\ P, P \in \mathbb{K}[X]\}$
Et soit $\exists Q \in \mathbb{K}[X], P = \mu_\alpha\ Q$, alors $P(\alpha) = (\mu_\alpha\ Q)(\alpha) = \mu_\alpha(\alpha)\ Q(\alpha) = 0$,
donc $P \in I_\alpha$ et donc $\{\mu_\alpha\ Q, Q \in \mathbb{K}[X]\} \subset I_\alpha$
Ainsi par double inclusion $\{\mu_\alpha\ Q, Q \in \mathbb{K}[X]\} = I_\alpha$

N=° ᛇ.

étant donner que μ_α est le plus petit polynômes telle que $\mu_\alpha(\alpha)$ ᛞ ᚡ
alors $(1, \alpha, \cdots, \alpha^q)$ est la plus petite famille liée, donc le degrés de alpha vaut q est d, si bien que:
deg μ_α ᛞ d

N=° ᚢᚡ.

il est évident que le polynôme minimal est Xᚠ ᛉ ᚦ

N=° ᚢᚢ.

Posons ᛥ ᛞ ᚻ Xᚱ ᛏ ᛊ Xᚠ ᛏ ᛨ Xᚦ ᛏ ᛩ X ᛏ ᚼ ᛍ $\mathbb{Q}[X]$, avec ᚻ, ᛊ, ᛨ, ᛩ, ᚼ non tous nul
Alors cherchons ᚻ, ᛊ, ᛨ, ᛩ, ᚼ tel que ᛥ(α) ᛞ ᚡ
Ainsi

ᛥ(α) ᛞ ᚻ (√ᚦ ᛏ √ᚠ)ᚱ ᛏ ᛊ (√ᚦ ᛏ √ᚠ)ᚠ ᛏ ᛨ (√ᚦ ᛏ √ᚠ)ᚦ ᛏ ᛩ (√ᚦ ᛏ √ᚠ) ᛏ ᚼ

ᛞ ᚱᚢᚻ ᛏ ᚢᚺᚻ √ᚷ ᛏ ᛇᛊ √ᚦ ᛏ ᚾᛊ √ᚠ ᛏ ‹ᛨ ᛏ ᚦᛨ √ᚷ ᛏ ᛩ √ᚦ ᛏ ᛩ √ᚠ ᛏ ᚼ

ᛞ (ᚢᚺᚻ ᛏ ᚦᛨ)√ᚷ ᛏ (ᚾᛊ ᛏ ᛩ)√ᚠ ᛏ (ᛇᛊ ᛏ ᛩ)√ᚦ ᛏ ᚱᚢᚻ ᛏ ‹ᛨ ᛏ ᚼ ᛞ ᚡ

Alors comme (1, √ᚦ, √ᚠ, √ᚷ) est libre, on obtient:

{ ᚢᚺᚻ ᛏ ᚦᛨ ᛞ ᚡ ; ᚾᛊ ᛏ ᛩ ᛞ ᚡ ; ᛇᛊ ᛏ ᛩ ᛞ ᚡ ; ᚱᚢᚻ ᛏ ‹ᛨ ᛏ ᚼ ᛞ ᚡ } ⇔ { ᛊ ᛞ ᚡ ; ᛩ ᛞ ᚡ ; ᛨ ᛞ ᛉ ᛌᚻ ; ᚱᚢᚻ ᛏ ‹ᛨ ᛏ ᚼ ᛞ ᚡ } ⇔ { ᛊ ᛞ ᚡ ; ᛩ ᛞ ᚡ ; ᛨ ᛞ ᛉ ᛌᚻ ; ᚻ ᛞ ᚼ }

Ainsi ᛥ ᛞ ᚼ Xᚱ ᛉ ᛌᚼ Xᚦ ᛏ ᚼ, ainsi on prouve que α est algébrique
et que ᛥ est le polynôme minimal de α sur $\mathbb{Q}$ car sinon on aurais ᚻ ᛞ ᚡ

Partie IV. Nombres algébriques (sur $\mathbb{Q}$)

N=° ᚢᚦ. a.

il est évident que $\mathbb{Q}[\alpha, \beta]$ est stable par ᛏ et ᛞ
et deplus, soit ᛩ, ᚼ, ᛨ ᛍ $\mathbb{Q}[\alpha, \beta]$ alors ᛒ ᚻ, ᛊ, ᚫ, ᚻ′, ᛊ′, ᚫ′, ᚻ′, ᛊ′, ᚫ′ ᛍ $\mathbb{Q}$, ᛩ ᛞ ᚻ ᛏ ᛊ α ᛏ ᚫ β
et ᚼ ᛞ ᚻ′ ᛏ ᛊ′α ᛏ ᚫ′β et ᛨ ᛞ ᚻ′ ᛏ ᛊ′α ᛏ ᚫ′β
alors

(ᚼ ᛏ ᛩ)ᛨ ᛞ (ᚻ ᛏ ᛊ α ᛏ ᚫ β ᛏ ᚻ′ ᛏ ᛊ′α ᛏ ᚫ′β)(ᚻ″ ᛏ ᛊ″α ᛏ ᚫ″β)

ᛞ (ᚻ ᛏ ᛊ α ᛏ ᚫ β)(ᚻ″ ᛏ ᛊ″α ᛏ ᚫ″β) ᛏ (ᚻ′ ᛏ ᛊ′α ᛏ ᚫ′β)(ᚻ″ ᛏ ᛊ″α ᛏ ᚫ″β)

ᛞ ᚼ ᛨ ᛏ ᛩ ᛨ

De même ᛨ(ᛩ ᛏ ᚼ) ᛞ ᛨ ᛩ ᛏ ᛨ ᚼ
De plus par la question ᚹ $\mathbb{Q}[\alpha, \beta]$ est une extention finie de $\mathbb{Q}[\alpha]$
Or $\mathbb{Q}[\alpha]$ est une extensions finis de $\mathbb{Q}$
Donc $\mathbb{Q}[\alpha, \beta]$ est un corps et est une extention finie de $\mathbb{Q}$

b.

Pourvons d'abord que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$,

Pour cela cherchons $a, b \in \mathbb{Q}, a + b\ \sqrt{2} = \sqrt{3}$, alors:

$$a^2 + 2b^2 + 2ab\ \sqrt{2} = 3$$

$$\text{donc} \begin{cases} 2ab\ \sqrt{2} = 0 \\ a^2 + 2b^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ou } b = 0 \\ a^2 + 2b^2 = 3 \end{cases}$$

Il est évident que $b \neq 0$ car $b \in \mathbb{Q}$ et $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ donc $a = 0$

Ainsi $2b^2 = 3 \Leftrightarrow b = \sqrt{\frac{3}{2}} \notin \mathbb{Q}$ absurde, donc $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$

Et donc comme $\mathbb{Q}$ est un sous corps de $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ et que $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ est un sous corps de $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}, \sqrt{3}\right]$,

et comme $\left(1, \sqrt{2}\right)$ est une base du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$

et que $\left(1, \sqrt{3}\right)$ est une base du $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$-espace vectoriel $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}, \sqrt{3}\right]$

Ainsi par la question 2. $\left(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\right)$ est une base du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}, \sqrt{3}\right]$

Et donc $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}, \sqrt{3}\right] = \left\{a + b\ \sqrt{2} + c\ \sqrt{3} + d\ \sqrt{6}, a, b, c, d \in \mathbb{Q}\right\}$

N=° ∩ᚠ.

Soit $a, b \in \overline{\mathbb{Q}}$. Alors $\mathbb{Q}[a, b]$ est un corps,

et en particulier une extension finie de $\mathbb{Q}$.

Donc la somme,l'inverse et le produits sont stables dans $\mathbb{Q}[a, b]$,

et donc par la question 6. $\overline{\mathbb{Q}}$ est un corps, et est donc un sous-corps de $\mathbb{C}$

□ □ ᚠ ᚡ ᚢ ᚣ ᚤ ᚥ ᚦ ᚧ ᚨ ᚩ ᚪ ᚫ ᚬ ᚭ ᚮ ᚯ ᚰ ᚱ ᚲ ᚳ ᚴ ᚵ ᚶ
ᚷ ᚸ ᚹ ᚺ ᚻ ᚼ ᚽ ᚾ ᚿ ᛀ ᛁ ᛂ ᛃ ᛄ ᛅ ᛆ ᛇ ᛈ ᛉ ᛊ ᛋ ᛌ ᛍ ᛎ ᛏ
ᛐ ᛑ ᛒ ᛓ ᛔ ᛕ ᛖ ᛗ ᛘ ᛙ ᛚ ᛛ ᛜ ᛝ ᛞ ᛟ ᛠ ᛡ ᛢ ᛣ ᛤ ᛥ ᛦ ᛧ ᛨ
ᛩ ᛪ ᛫ ᛬ ᛭ ᛮ ᛯ ᛰ ᛱ ᛲ ᛳ ᛴ ᛵ ᛶ ᛷ ᛸ □ □ □ □ □ □ □ ᜀ ᜁ
ᜂ