Gaspar Daguet

Maths : DM ᚢᚷ

Il est important avant de commencer lire ce DM
d'avoir bien compris le tableau et les exemples suivants

symbole usuel	symbole du DM	prononciation
0	ᚠ	fé
1	ᚢ	ur
2	ᚦ	tur
3	ᚨ	an
4	ᚱ	rai
5	ᚲ	kau
6	ᚷ	gèb
7	ᚹ	wun
8	ᚺ	hag
9	ᚾ	nau
10	ᛃ	je
11	ᛇ	ei
$=$	ᛝ	ing/i ng
$+$	ᛏ	ti
$-$	ᛉ	al
$\times$	ᛞ	dag
$\div$	ᛚ	lag
$\in$	ᛊ	so
$\forall$	ᛈ	per
$\exists$	ᛒ	ber
$\exists!$	!ᛒ	\
$>$	ᛗ	man
$<$	ᛖ	e
$\geq$	ᛗᛝ	maning
$\leq$	ᛖᛝ	ehwing
$\neq$	ᛜ	naing
$\subset$	ᚫ	suz
$\supset$	ᛆ	zus

ᚷᚹ ᛏ ᚲᚲ ᛝ ᚢᚠᚠ ce qui est équivalant à $79 + 65 = 144$

$$e^{ց} \underset{ց \to ᚠ}{ᛝ} ᚢ ᛏ ց ᛏ \frac{ց^{ᚦ}}{ᚦ!} ᛏ \cdots ᛏ \frac{ց^{日}}{日!} ᛏ o\left(ց^{日}\right)$$

est équivalant à

$$e^x \underset{x \to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{x!} + o(x^n)$$

Problème 2 : nombres algébrique et extensions de corps

Partie I. extensions de corps

N=° 1. Premiers exemples a.

il est évident que $\mathbb{R}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ et de plus $\mathbb{C}$ est de dimension finis,
donc $\mathbb{C}$ est une extention finie de $\mathbb{R}$

de plus soit $z \in \mathbb{C}$ alors

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, z = x + i\,y \Leftrightarrow z \in \mathrm{Vect}(1, i)$$

Ainsi comme 1 et i ne sont pas colinéaire dans $\mathbb{R}$, $\mathrm{Vect}(1, i)$ forme une base de $\mathbb{C}$
Ainsi $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$

soit K un sous-corps qui contient $\mathbb{R}$
comme $[\mathbb{R} : \mathbb{R}] = 1$ et que l'on vient de prouver que $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$
il apparait donc comme condition que, $1 \leq [K : \mathbb{R}] \leq 2$
Ainsi $[K : \mathbb{R}] = 1$ ou $[K : \mathbb{R}] = 2$
Et ansi $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$

b.

Soit $x \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$, alors $\exists y, z \in \mathbb{Q}, x = y + z\;\sqrt{2}$, alors prenons $z = 0$
ainsi $x = y \in \mathbb{Q}$, donc $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ et comme $\mathbb{Q}$ est un corps
de $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$
de plus, soit $x \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ alors $\exists y, z \in \mathbb{Q}, x = \exists + y\;\sqrt{2}$, soit un telle z, y
donc $x = z + y\;\sqrt{2} \in \mathrm{Vect}\left(1, \sqrt{2}\right)$
et supposons par l'absurde $\exists x, y \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^*, x + y\;\sqrt{2} = 0$
alors $\frac{x}{y} = -\sqrt{2}$ ce qui est absurde car $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$, donc $x = y = 0$
Ainsi $\left(1, \sqrt{2}\right)$ est une base de $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$
Donc $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) : \mathbb{Q}\right] = 2$

c. i.

Soit P $\in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P\left(\sqrt[3]{2}\right) = 0$
prenons la divisions euclidienne de $X^3 - 2$ par P
ce qui nous donne $X^3 - 2 = \mathrm{PQ} + R$ avec $\mathrm{Q} \in \mathbb{Q}_1[X]$ et $\mathrm{R} \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $\deg \mathrm{R} < 2$
En évaluant notre expression précédente en $\sqrt[3]{2}$ on obtient :

$$\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 - 2 = 0 = \underbrace{\mathrm{P}\left(\sqrt[3]{2}\right)}_{=0} + \mathrm{R}$$

donc $\mathrm{R} = 0$ et donc $\deg \mathrm{R} = 0$
ainsi P divise $\mathrm{X}^3 - 2$

Ainsi Comme P divise $X^3 - 2$ et que $\deg \mathrm{P} = 2$,
alors P et $X^3 - 2$ possède deux racines en commun dont $\sqrt[3]{2}$
et comme $X^3 - 2 = \left(X - \sqrt[3]{2}\right)\left(X - \sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X - \sqrt[3]{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)$ donc P à en plus une racine complexe
or un polynôme dans $\mathbb{R}$ qui possède une racine complexe possède sont conjugée

ce qui n'est pas le cas pour P donc $P \notin \mathbb{Q}[X]$ ce qui est absurde
Donc $\nexists P \in \mathbb{Q}[X], P\left(\sqrt[3]{2}\right) = 0$

i.

Par un résonnement annaloge à la question 1 .b on montre que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)$,
De plus soit $x \in \mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)$ alors soient $a, b, c \in \mathbb{Q}, x = a + b \sqrt[3]{2} + c \left(\sqrt[3]{2}\right)^2$
donc $x \in \mathrm{Vect}\left(1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}^2\right)$
donc $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)$ est une extensions finis et $\left[Q\left(\sqrt[3]{2}\right) : \mathbb{Q}\right] = 3$

d.

Soient $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{Q}$ tels que $\sum_{c=1}^{n} a_c \ln(p_c) = 0$,
alors

$$\ln\left(\prod_{c=1}^{n} p_c^{a_c}\right) = 0 \text{ Donc } \prod_{c=1}^{n} p_c^{a_c} = 1$$

Or comme $\forall c \in [\![1;n]\!], a_c \in \mathbb{Q}$ donc $\exists d, b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{N}, \forall c \in [\![1;n]\!], a_c = \frac{b_c}{d}$. Ainsi

$$\left(\prod_{c=1}^{n} p_c^{b_c}\right)^{\frac{1}{d}} = 1 \Leftrightarrow \prod_{c=1}^{n} p_c^{b_c} = 1$$

Or comme $\forall c \in [\![1;n]\!], p_c^{b_c} \in \mathbb{N}$ Donc $p_1^{c_1} = \cdots = p_n^{c_n} = 1$ Donc $c_1 = \cdots = c_n = 0$
Et donc $a_1 = \cdots = a_n = 0$
Ainsi $(\ln(p_1), \cdots, \ln(p_n))$ est libre
Et donc la dimmension de $\mathbb{R}$ n'est pas finis, donc $\mathbb{R}$ n'est pas une extention finis de $\mathbb{Q}$

N°2.

soit $x \in \mathbf{L}$, alors $\exists! a_1, \cdots, a_n \in \mathbf{K}$ tel que, $x = \sum_{b=1}^{n} \alpha_b a_b$

Or on a $\forall b \in [\![1, n]\!], \exists! c_1, \cdots, c_p \in k, a_b = \sum_{d=1}^{p} \beta_d c_d$

Ainsi $\exists! a_1, \cdots, a_n \in \mathbf{K} \in k, \exists! c_1, \cdots, c_p \in k, x = \sum_{\substack{1 \leq b \leq n \\ 1 \leq d \leq p}} \alpha_b \beta_d a_b c_d$

Donc x s'écrit d'une manière unique comme des élément de k,
donc la famille $(\alpha_i \beta_j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une base de du k-espace vectoriel $\mathbf{L}$
De plus la famille $(\alpha_i \beta_j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ comporte exactement np éléments
Donc $\mathbf{L}$ est une extensions finis de k et $[\mathbf{L} : k] = [\mathbf{L} : \mathbf{K}][\mathbf{K} : k]$

Partie II. Éléments algébriques

N=°ᚨ.

pour montrer que $\mathbb{K}[\alpha]$ ᛝ $\{P(\alpha), P$ ᚲ $\mathbb{K}[X]\}$,
on montre que $\{P(\alpha), P$ ᚲ $\mathbb{K}[X]\}$ ᛝ $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(\alpha^n, n$ ᚲ $\mathbb{N})$
pour cela,

$$ᛯ ᚲ \{P(\alpha), P ᚲ \mathbb{K}[X]\} \Leftrightarrow ᛒ\, ᛈ_{ᚠ}, \cdots, ᛈ_n ᚲ \mathbb{K}\ ᛯ ᛝ \sum_{ᛥ ᛝ ᚠ}^{n} ᛈ_{ᛥ} \alpha^{ᛥ} ᚲ \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(\alpha^n, n ᚲ \mathbb{N}) ᛝ \mathbb{K}[\alpha]$$

Donc $\{P(\alpha), P$ ᚲ $\mathbb{K}[X]\}$ ᛝ $\mathbb{K}[\alpha]$

soient ᛥ, ᛈ ᚲ $\mathbb{K}[\alpha]$, alors ᛒ P, Q ᚲ $\mathbb{K}[X]$, $P(\alpha)$ ᛝ ᛥ et $Q(\alpha)$ ᛝ ᛈ, alors:

- ᚠ ᚲ $\mathbb{K}[\alpha]$
- ᛥ ᛉ ᛈ ᛝ $P(\alpha)$ ᛉ $Q(\alpha)$ ᛝ $(P$ ᛉ $Q)(\alpha)$ et P ᛉ Q ᚲ $\mathbb{K}[X]$
- ᛥ ᛞ ᛈ ᛝ $P(\alpha)$ ᛞ $Q(\alpha)$ ᛝ $(P$ ᛞ $Q)(\alpha)$ et PQ ᚲ $\mathbb{K}[X]$

Donc $\mathbb{K}[\alpha]$ est un sous-anneau de $\mathbb{L}$

Et $\mathrm{Vect}(\alpha^n, n$ ᚲ $\mathbb{N})$ est le plus petit ensemble stable par ᛏ et ᛞ,
ce qui fais de luis le plus petit sous-anneau contanant α et $\mathbb{K}$

N=°ᚱ.

procédons par double inclusion pour prouver que α est algébrique sur $\mathbb{K}$ si et seulement si il existe n ᚲ $\mathbb{N}$ tel que $(1, \alpha, \cdots, \alpha^n)$ soit une famille liée
$(\Rightarrow)$ Supposons que α est algébrique sur $\mathbb{K}$, alors

$$ᛒ\, ᛯ ᚲ \mathbb{K}[X], ᛯ(\alpha) ᛝ ᚠ \Leftrightarrow ᛒ\, n ᚲ \mathbb{N}, ᛒ\, ᛥ_{ᚠ}, \cdots, ᛥ_n ᚲ \mathbb{K}, ᛯ(\alpha) ᛝ \sum_{ᛈ ᛝ ᚠ}^{n} ᛥ_{ᛈ} \alpha^{ᛈ} ᛝ ᚠ$$

$$\text{Donc } ᛉ \sum_{ᛈ ᛝ ᚢ}^{n} ᛥ_{ᛈ} \alpha^{ᛈ} ᛝ ᛥ_{ᚠ}$$

Donc $(1, \alpha, \cdots, \alpha^n)$ est liée

$(\Leftarrow)$ Supposons que $(1, \alpha, \cdots, \alpha^n)$ soit liée, alors:

$$ᛒ\, ᛥ_{ᚠ}, \cdots, ᛥ_n ᚲ \mathbb{K}, ᛒ\, ᛎ ᚲ \mathbb{N}, ᚼ\ \alpha^{ᛎ} ᛝ \sum_{\substack{ᛈ ᛝ ᚠ \\ ᛈ ᛜ ᛎ}}^{n} ᛥ_{ᛈ} \alpha^{ᛈ}$$

$$\text{Donc } \sum_{\substack{ᛈ ᛝ ᚠ \\ ᛈ ᛜ ᛎ}}^{n} ᛥ_{ᛈ} \alpha^{ᛈ} ᛉ ᚼ\ \alpha^{ᛎ} ᛝ ᚠ$$

en posant ᛉ ᚼ ᛝ $ᛥ_{ᛎ}$, on obtient

$$\sum_{\substack{ᛈ ᛝ ᚠ \\ ᛈ ᛜ ᛎ}}^{n} ᛥ_{ᛈ} \alpha^{ᛈ} ᛉ ᚼ\ \alpha^{ᛎ} ᛝ \sum_{ᛈ ᛝ ᚠ}^{n} ᛥ_{ᛈ} \alpha^{ᛈ} ᛝ ᚠ$$

Or $\sum_{ᛈ ᛝ ᚠ}^{n} ᛥ_{ᛈ} \alpha^{ᛈ}$ ᚲ $\mathbb{R}[X]$
Donc α est algébrique

Par le principe de double inclusion

α est algébrique si et seulement si il existe n ᛃ $\mathbb{N}$ tel que $(1, \alpha, \cdots, \alpha^n)$ est liée

N=° ᚲ.

Soit ᛇ ᛃ $\mathbb{L}$, alors ᛇ est algébrique de degré ᚢ sur $\mathbb{K}$ si et seulement si (ᚢ, ᛇ) est liée

si et seulement si il existe ᛒ ᛃ $\mathbb{K}$, ᛇ ᛟ ᛒ ᛞ ᚢ ᛟ ᛒ si et seulement si ᛇ ᛃ $\mathbb{K}$

Donc on a bien (ᚢ, ᛇ) liée ⇔ ᛇ ᛃ $\mathbb{K}$

N=° ᚷ.

Supposons que $\mathbb{L}$ est une extention finie de $\mathbb{K}$ et soit ᛇ ᛃ $\mathbb{L}$

alors ᛇ est algébrique sur $\mathbb{K}$ si:

$$a$$

N=° ᚹ. a.

On sait par la définitions que $\left(1, \alpha, \cdots, \alpha^{d \text{ ᛉ ᚢ}}\right)$ est libre

Et $\mathrm{Vect}(\alpha^n, n$ ᛃ $\mathbb{N})$ ᛟ $\mathrm{Vect}(\alpha^n, n$ ᛃ ⟦ᚢ; d ᛉ ᚢ⟧$)$

Ainsi $\mathrm{Vect}(\alpha^n, n$ ᛃ ⟦ᚢ; d ᛉ ᚢ⟧$)$ est une base de $\mathbb{K}[\alpha]$

b.

Supposons que β ᛜ ᚠ, alors prouvons que f_β est linéaire et bijective

- linéarité:

Soient ᛒ ᛃ $\mathbb{K}$, ᛇ, ᛡ ᛃ $\mathbb{K}[\alpha]$, $f_\beta($ᛒ ᛇ ᛏ ᛡ$)$ ᛟ β ᛒ ᛇ ᛏ β ᛡ ᛟ ᛒ $f_\beta($ᛇ$)$ ᛏ $f_\beta($ᛡ$)$ donc f_β ets linéaire

- bijectivité:

soit ᛇ ᛃ $\mathbb{K}[\alpha]$, $f_\beta($ᛇ$)$ ᛟ ᚠ

alors β ᛇ ᛟ ᚠ donc ᛇ ᛟ ᚠ car β ᛜ ᚠ

donc $\mathrm{Ker}(f_\beta)$ ᛟ {ᚠ}. Donc f_β est injéctive

Et soient ᛇ, ᛡ ᛃ $\mathbb{K}[\alpha]$, $f_\beta($ᛇ$)$ ᛟ ᛡ

alors ᛇ ᛟ $\frac{\text{ᛡ}}{\beta}$ car β ᛜ ᚠ, et donc f_β est surjective

et comme f_β va de $\mathbb{K}[\alpha]$ dans $\mathbb{K}[\alpha]$

f_β est un automorphisme

c.

a faire

d.

On a: $\mathbb{K}$ ᚼ $\mathbb{K}[\alpha]$, donc $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}[\alpha]$

De plus comme $\left(1, \alpha, \cdots, \alpha^{d \text{ ᛉ ᚢ}}\right)$ est une base de $\mathbb{K}[\alpha]$ qui comporte d élément

Ainsi $\mathbb{K}[\alpha]$ est une extensions finie de $\mathbb{K}$, avec $[\mathbb{K}[\alpha] : \mathbb{K}]$ ᛟ d

e.

Il est évident que $\mathbb{Q}\left(\sqrt[\text{ᚦ}]{\text{ᚦ}}\right)$ ᚼ $\mathbb{C}$, et commme $\mathbb{Q}$ est un sous groupe et que $\sqrt[\text{ᚦ}]{\text{ᚦ}}$ ᛃ $\mathbb{C}$,

alors par les questions précédente:

$\mathbb{Q}\left(\sqrt[\text{ᚦ}]{\text{ᚦ}}\right)$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$

N=° ᚺ.

i) ⇒ ii) est évident car $\mathbb{K}[\alpha]$ est un corps et donc stable par ᛞ

ii) $\Rightarrow$ iii) Supposons que $\alpha^{ᛉᚢ}$ ᚨ $\mathbb{K}[\alpha]$, alors
ᛒ ᛈ ᚨ $\mathbb{K}[X]$, ᛈ(α) ᛟ $\alpha^{ᛉᚢ}$, soit ᛈ un telle polynôme, alors:

$$\text{ᛈ}(\alpha) \text{ ᛟ } \alpha^{\text{ᛉᚢ}} \Leftrightarrow \alpha \text{ ᛈ}(\alpha) \text{ ᛟ } \alpha\alpha^{\text{ᛉᚦ}} \text{ ᛟ ᚢ}$$
$$\Leftrightarrow \alpha \text{ ᛈ}(\alpha) \text{ ᛉ } \alpha \text{ ᛟ ᚠ}$$

Posons ᛥ ᛟ X ᛈ(X) ᛉ ᚢ ᛊ $\mathbb{K}[X]$, ainsi ᛥ(α) ᛟ 0
Et donc α est constructible
iii) $\Rightarrow$ i) Supposons que α est algébrique sur $\mathbb{K}$, alors par la question ᚹ.
$\mathbb{K}[\alpha]$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$

Ainsi par un raisonnement cyclique,
on a bien que $\mathbb{K}[\alpha]$ est un sous-corps de $\mathbb{L} \Leftrightarrow \alpha^{ᛉᚢ}$ ᛊ $\mathbb{K}[\alpha] \Leftrightarrow \alpha$ est algébrique sur $\mathbb{K}$

Partie III. Polynômes minimal d'un élément algébrique

N=° ᛅ.

Si I_α na possède pas une polynôme de degré q,
alors soit ᛈ ᛊ I_α de degré q, alors soit ᚻ sont coefficient dominant
alors le polynome $\frac{\text{ᛈ}}{\text{ᚻ}}$ est de degrés q et sont coefficient dominant vaut ᚢ
De plus $\frac{\text{ᛈ}}{\text{ᚻ}}(\alpha)$ ᛟ $\frac{\text{ᛈ}(\alpha)}{\text{ᚻ}}$ ᛟ $\frac{\text{ᚠ}}{\text{ᚻ}}$ ᛟ ᚠ Donc $\frac{\text{ᛈ}}{\text{ᚻ}}$ ᛊ I_α
Donc I_α possède un polynôme unitaire de degrés q

Soient ᛈ, ᛤ ᛊ I_α deux polynômes unitaire de degrés q
Alors ᛒ ᚻ$_{ᚠ}, \cdots,$ ᚻ$_{q ᛉ ᚢ}$, ᛄ$_{ᚠ}, \cdots,$ ᛄ$_{q ᛉ ᚢ}$ ᛊ $\mathbb{K}$, ᛈ ᛟ $X^q \uparrow \sum_{\text{ᛣ ᛟ ᚠ}}^{q \text{ ᛉ ᚢ}} \text{ᚻ}_{\text{ᛣ}} X^{\text{ᛣ}}$ et ᛤ ᛟ $X^q \uparrow \sum_{\text{ᛣ ᛟ ᚠ}}^{q \text{ ᛉ ᚢ}} \text{ᛄ}_{\text{ᛣ}} X^{\text{ᛣ}}$
Alors ᛈ(α) ᛉ ᛤ(α) ᛟ $\sum_{\text{ᛣ ᛟ ᚠ}}^{q \text{ ᛉ ᚢ}} \text{ᚻ}_{\text{ᛣ}} \alpha^{\text{ᛣ}}$ ᛉ $\sum_{\text{ᛣ ᛟ ᚠ}}^{q \text{ ᛉ ᚢ}} \text{ᛄ}_{\text{ᛣ}} \alpha^{\text{ᛣ}}$ ᛟ ᚠ
donc $\sum_{\text{ᛣ ᛟ ᚠ}}^{q \text{ ᛉ ᚢ}} (\text{ᚻ}_{\text{ᛣ}} \text{ ᛉ ᛄ}_{\text{ᛣ}})\alpha^{\text{ᛣ}}$, et comme $\left(1, \alpha, \cdots, \alpha^{q \text{ ᛉ ᚢ}}\right)$ est libre, on a: ᛕ ᛣ ᛊ $[\![$ᚠ$; q$ ᛉ ᚢ$]\!]$, ᚻ$_{ᛣ}$ ᛟ ᛄ$_{ᛣ}$
Ainsi on a bien ᛈ ᛟ ᛤ
Donc il existe un unique polynome unitaire de degré q dans I_α

N=° ᛜ.

Supposons par l'absurde que μ_α est réductible,
alors ᛒ ᛈ, ᛤ ᛊ $\mathbb{K}[X]$, μ_α ᛟ ᛈ ᛤ, soient de tels polynômes
Ainsi $\mu_\alpha(\alpha)$ ᛟ ᛈ(α) ᛤ(α) ᛟ ᚠ donc ᛈ(α) ᛟ ᚠ ou ᛤ(α) ᛟ ᚠ,
donc α est algébrique de degrés inférieur stricte à d, absurde !
Donc μ_α est irréductible

Soit ᛈ ᛊ I_α, alors ᛒ ᛤ ᛊ $\mathbb{K}[X]$, ᛈ ᛟ μ_α ᛤ car ᛈ(α) ᛟ ᚠ, ainsi I_α ᚨ $\{\mu_\alpha$ ᛈ, ᛈ ᛊ $\mathbb{K}[X]\}$
Et soit ᛒ ᛤ ᛊ $\mathbb{K}[X]$, ᛈ ᛟ μ_α ᛤ, alors ᛈ(α) ᛟ $(\mu_\alpha$ ᛤ$)(\alpha)$ ᛟ $\mu_\alpha(\alpha)$ ᛤ(α) ᛟ ᚠ,
donc ᛈ ᛊ I_α et donc $\{\mu_\alpha$ ᛤ, ᛤ ᛊ $\mathbb{K}[X]\}$ ᚨ I_α
Ainsi par double inclusion $\{\mu_\alpha$ ᛤ, ᛤ ᛊ $\mathbb{K}[X]\}$ ᛟ I_α

N=° ᛇ.

étant donner que μ_α est le plus petit polynômes telle que $\mu_\alpha(\alpha)$ ᛝ ᚠ
alors $(1, \alpha, \cdots, \alpha^q)$ est la plus petite famille liée, donc le degrés de alpha vaut q est d, si bien que:
deg μ_α ᛝ d

N=° ᚢᚠ.

il est évidant que le polynôme minimal est X^ᚨ ᛉ ᚦ

N=° ᚢᚢ.

Posons ᛤ ᛝ 日 X^ᚱ ↑ ツ X^ᚨ ↑ ᚣ X^ᚦ ↑ ɜ X ↑ ᛡ ᛍ $\mathbb{Q}[X]$, avec 日, ツ, ᚣ, ɜ, ᛡ non tous nul
Alors cherchons 日, ツ, ᚣ, ɜ, ᛡ tel que ᛤ(α) ᛝ ᚠ
Ainsi

ᛤ(α) ᛝ 日 (√ᚦ ↑ √ᚨ)^ᚱ ↑ ツ (√ᚦ ↑ √ᚨ)^ᚨ ↑ ᚣ (√ᚦ ↑ √ᚨ)^ᚦ ↑ ɜ (√ᚦ ↑ √ᚨ) ↑ ᛡ

ᛝ ᚱᚢ日 ↑ ᚢᚺ日 √ᚷ ↑ ᛇツ √ᚦ ↑ ᚾツ √ᚨ ↑ ᚲᚣ ↑ ᚦᚣ √ᚷ ↑ ɜ √ᚦ ↑ ɜ √ᚨ ↑ ᛡ

ᛝ (ᚢᚺ日 ↑ ᚦᚣ)√ᚷ ↑ (ᚾツ ↑ ɜ)√ᚨ ↑ (ᛇツ ↑ ɜ)√ᚦ ↑ ᚱᚢ日 ↑ ᚲᚣ ↑ ᛡ ᛝ ᚠ

Alors par identification des coefficient, on obtient:

{ ᚢᚺ日 ↑ ᚦᚣ ᛝ ᚠ ; ᚾツ ↑ ɜ ᛝ ᚠ ; ᛇツ ↑ ɜ ᛝ ᚠ ; ᚱᚢ日 ↑ ᚲᚣ ↑ ᛡ ᛝ ᚠ } $\Leftrightarrow$ { ツ ᛝ ᚠ ; ɜ ᛝ ᚠ ; ᚣ ᛝ ᛉ ᛃ日 ; ᚱᚢ日 ↑ ᚲᚣ ↑ ᛡ ᛝ ᚠ } $\Leftrightarrow$ { ツ ᛝ ᚠ ; ɜ ᛝ ᚠ ; ᚣ ᛝ ᛉ ᛃ日 ; 日 ᛝ ᛡ }

Ainsi ᛤ ᛝ ᛡ X^ᚱ ᛉ ᛃᛡ X^ᚦ ↑ ᛡ, ainsi on prouve que α est algébrique
et que ᛤ est le polynôme minimal de α sur $\mathbb{Q}$ car sinon on aurais 日 ᛝ ᚠ

Partie IV. Nombres algébriques (sur $\mathbb{Q}$)

N=° ᚢᚦ. a.

il est évidant que $\mathbb{Q}[\alpha, \beta]$ est stable par ↑ et ᛞ
et deplus, soit ɜ, ᛡ, ᚣ ᛍ $\mathbb{Q}[\alpha, \beta]$ alors ᛔ 日, ツ, 丰, 日$'$, ツ$'$, 丰$'$, 日$'$, ツ$'$, 丰$'$ ᛍ $\mathbb{Q}$, ɜ ᛝ 日 ↑ ツ α ↑ 丰 β
et ᛡ ᛝ 日$'$ ↑ ツ$'\alpha$ ↑ 丰$'\beta$ et ᚣ ᛝ 日$'$ ↑ ツ$'\alpha$ ↑ 丰$'\beta$
alors

(ᛡ ↑ ɜ)ᚣ ᛝ (日 ↑ ツ α ↑ 丰 β ↑ 日$'$ ↑ ツ$'\alpha$ ↑ 丰$'\beta$)(日$''$ ↑ ツ$''\alpha$ ↑ 丰$''\beta$)

ᛝ (日 ↑ ツ α ↑ 丰 β)(日$''$ ↑ ツ$''\alpha$ ↑ 丰$''\beta$) ↑ (日$'$ ↑ ツ$'\alpha$ ↑ 丰$'\beta$)(日$''$ ↑ ツ$''\alpha$ ↑ 丰$''\beta$)

ᛝ ᛡ ᚣ ↑ ɜ ᚣ

De même ᚣ(ɜ ↑ ᛡ) ᛝ ᚣ ɜ ↑ ᚣ ᛡ
Donc $\mathbb{Q}[\alpha, \beta]$ est un corps

b.