Gaspar Daguet

Maths : DM 21

Problème 2 : une construction rigoureuse des fonctions trigonométriques

N=° 1.

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $N \in \mathbb{N}$ alors

$$\sum_{n=0}^{N} \left| \frac{z^n}{n!} \right| = \sum_{n=0}^{N} \frac{|z|^n}{n!} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} e^{|z|}$$

Donc $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument

Partie I. Un théorème de dérivation terme à terme

N=° 2.

Soit $z \in \mathbb{Z}$, alors

$$\frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = |z| o\left(\frac{r^{n+1}}{r^n}\right) = |z| o(r) = o(1) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$$

Donc la série de terme générale $a_n z^n$ converge absolument

N=° 3.

Soit $r, r' \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $0 < r' < r$, alors $\frac{r'}{r} < 1$
Donc $n\left(\frac{r'}{r}\right)^n = no\left(\frac{1}{n}\right) = o(1)$

Donc $\dfrac{r'^n}{r^n \frac{1}{n}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $r'^n = o\left(\frac{r^n}{n}\right)$
Et comme $a_n = o(r'^n) = o\left(\frac{r^n}{n}\right)$
Donc $na_n = o(r^n)$

N=° 4.

Comme $\forall r \in \mathbb{R}_+^*, na_n = o(r^n)$, alors par la question 2. $\forall z \in \mathbb{C}, \sum\limits_{n \geq 0} na_n z^n$ converge absolument

Donc en particulier pour $x \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^{N} na_n x^{n-1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{N} na_n x^n$ converge absolument