

Maths : DM 10

Partie I. Le théorème de Cesàro

N°1. a.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}$ alors par la définition de limite:

$$\underline{\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}}$$

b.

Soient $n_0, n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq n_0$ alors

$$|\sigma_n| = \left| \frac{\sum_{k=1}^n u_k}{n} \right| = \left| \frac{\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k}{n} + \frac{\sum_{k=n_0}^n u_k}{n} \right| \leq \left| \frac{\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k}{n} \right| + \left| \frac{\sum_{k=n_0}^n u_k}{n} \right| \leq \frac{\sum_{k=1}^{n_0-1} |u_k|}{n} + \frac{\sum_{k=n_0}^n |u_k|}{n}$$

Ainsi on a bien:

$$\underline{\forall n \geq n_0, |\sigma_n| \leq \frac{|u_1| + |u_2| + \dots + |u_{n_0-1}|}{n} + \frac{|u_{n_0}| + \dots + |u_n|}{n}}$$

c.

Comme $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0-1} u_k$ est une somme finis alors:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0-1} |u_k| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc par la définition de limite:

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_1, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0-1} |u_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

De plus:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^n |u_k| \leq \frac{1}{n} \sum_{n_0}^n \frac{\varepsilon}{2} = \frac{n - n_0 + 1}{2} \varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Poson $N = \max(n_1, n_0)$ alors :

$$\forall n \geq N, |\sigma_n| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0-1} |u_k| + \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^n |u_k| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

Donc $\sigma_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

N°2.

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$ et σ_n la suite des moyennes de Césàro associée à (u_n) alors :
la suite $(u_n - l)$ tend vers 0

Donc selon le résultat précédent: $\sigma_n - l \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Donc : $\sigma_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$

N°3.

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n$

Cette suite n'admet pas de limite

Or la suite des moyennes de Césàro associée à (u_n) :

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k = \frac{(-1)^n - 1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc σ_n converge vers 0

Ce qui contredit la réciproque

N°4.

Soit $A \in \mathbb{R}$ alors:

$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \geq 2A$ alors

Soit un tel n_0 et

Soit (σ_n) la suite des moyennes de Césàro de (u_n) , alors pour $n \geq n_0$:

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0-1} (u_k) + \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^n (u_k) \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0-1} (u_k) + 2A \frac{n - n_0 + 1}{n}$$

Comme $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0-1} (u_k)$ tend vers 0 (cf: première question) alors à partir qu'un certain rang n_1 :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0-1} (u_k) \geq -\frac{A}{5}$$

Et $2 \frac{n - n_0 + 1}{n}$ tend vers 2 donc à partir d'un certain rang n_2 : $2 \frac{n - n_0 + 1}{n} \geq \frac{9}{5}$

Poson $N = \max(n_0, n_1, n_2)$

Alors pour tout $n \geq N$:

$$\sigma_n \geq -\frac{A}{5} + \frac{9}{5}A \geq \frac{8}{5}A \geq A$$

Donc σ_n diverge vers $+\infty$

N°5.

Supposons que (σ_n) converge vers l et que (u_n) est croissante alors:

A faire

Partie II. Quelques applications

N°6. Le lemme de l'escalier

Soit $n \in \mathbb{N}$

Poson $\forall n \geq 2, v_n = a_n - a_{n-1}$

Selons le lemme de Césàro on a:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=2}^n v_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$$

Or $\frac{1}{n} \sum_{k=2}^n v_k = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n a_k - a_{k-1} = \frac{a_n - a_1}{n}$ Or $-\frac{a_1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Donc il existe un rang n_0 tel que:

$$\forall n \geq n_0, \left| \frac{a_n}{n} - \frac{a_1}{n} - a \right| \leq \left| \frac{a_n}{n} - a \right| + \left| \frac{a_1}{n} \right| \leq \left| \frac{a_n}{n} - a \right| + |a_1| \leq 2|a_1| + |a|$$

ce qui est équivalent à: $\forall n \geq n_0, \left| \frac{a_n}{n} - a \right| < |a_1| + |a|$

Poson alors $\varepsilon = |a_1| + |a| > 0$

Donc $\forall n \geq n_0, \left| \frac{a_n}{n} - a \right| < \varepsilon$

Autrement dit $\frac{a_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$

N°7. a.

Prouvons tout d'abord que u_n converge

Comme $1 + u_n^2 > 0$ et $u_1 > 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$

Donc la suite est strictement positive et minorée par 0

Et on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{1 + u_n^2} - u_n = -\frac{u_n^3}{1 + u_n^2}$$

Or comme $u_n > 0$ et $1 + u_n^2 > 0$ alors $-\frac{u_n^3}{1 + u_n^2} < 0$

Donc la suite est décroissante

Ainsi comme la suite est minorée et décroissante alors par le théorème de la limite monotone, (u_n) converge vers l

Par passage à la limite et par unicité de la limite dans la définition

$$l = \frac{l}{1+l^2}$$

$$\text{donc } 1 + l^2 = 1$$

$$\text{donc } l^2 = 0$$

$$\text{donc } l = 0$$

$$\text{Ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

b.

v_n est bien défini car $u_n > 0$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{(1 + u_n^2)^2}{u_n^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1 + 2u_n^2 + u_n^4 - 1}{u_n^2} = 2 + \underbrace{\frac{u_n^2}{u_n^2}}_{\rightarrow 0} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$$

$$\text{Ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_{n+1} - v_n) = 2$$

c.

Par le lemme de l'escalier, on a: $\frac{v_n}{n} = \frac{1}{nu_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$

$$\text{Donc } \frac{1}{2nu_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

$$\text{Donc } 2nu_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

$$\text{Donc } u_n \sqrt{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$$

Exercice 2 : calcul des puissances d'une matrice 3×3

N°1. a.

Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Ainsi le système se réécrit:

$$\begin{cases} 3a + b - c = a \\ -a + b + c = b \\ a = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -b \\ b = b \\ a = -b \end{cases}$$

Ainsi l'ensemble des solution du système est: $\left\{ \begin{pmatrix} -b \\ b \\ -b \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R} \right\}$

Donc la matrice C_1 vaut: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b.

Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}$ et soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Ainsi le systeme se réécrit:

$$\begin{cases} 3a + b - c = 2a \\ -a + b + c = 2b \\ a = 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2b \\ b = b \\ a = -b \end{cases}$$

Ainsi l'ensemble des solution du système est: $\left\{ \begin{pmatrix} -2b \\ b \\ -b \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R} \right\}$

Donc la matrice C_3 vaut: $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c.

Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}$ et soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Ainsi le systeme se réécrit:

$$\begin{cases} 3a + b - c = \lambda a \\ -a + b + c = \lambda b \\ a = \lambda c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\lambda c + b - c = \lambda^2 c \\ -\lambda c + b + c = \lambda b \\ a = \lambda c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c(-\lambda^2 + 3\lambda - 2) = 0 \\ b = -c \\ a = \lambda c \end{cases}$$

la première ligne force $c = 0$ car les racines du polynome $-x^2 + 3x - 2$ sont 2 et 1
or λ est différent de 2 et de 1

Donc la seul solution du système est $X = 0$

Donc il n'y a pas de solution au système non nul

d.

Soit $C_2 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Ainsi le systeme se réécrit:

$$\begin{cases} 3a + b - c = 1 + a \\ -a + b + c = -1 + b \\ a = 1 + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1 - b \\ b = b \\ a = -b \end{cases}$$

Ainsi l'ensemble des solution du système est: $\left\{ \begin{pmatrix} -b \\ b \\ -1-b \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R} \right\}$

Donc la matrice C_2 vaut: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

N°2.

On a donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a.

$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est une telle matrice

En effet:

$$AP = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = PT$$

b.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \xleftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \\ \xleftrightarrow{L_3 \leftarrow L_1 - L_3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \xleftrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Donc P est inversible car tous les coefficients diagonaux sont non nul, alors:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \xleftrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3} \\ \xleftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Ainsi $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Deplus, on a $A = PTP^{-1}$

c.

On cherche à monter par récurrence simple que $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

• **Initialisation:**

Pour $n = 0$:

$$T^0 = \text{Id}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^0 \end{pmatrix}$$

Donc l'initialisation est vérifiée

• **Hérédité:**

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$, alors:

$$T^{n+1} = T^n T = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

Donc l'hérédité est vérifiée

Ainsi par la principe de récurrence simple $\forall n \in \mathbb{N}; T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

N°3.

On va prouver par récurrence simple la proposition suivante $P(n) : A^n = PT^n P^{-1}$

• **Initialisation:**

$$A^0 = \text{Id}_3 \text{ et } PT^0 P^{-1} = PP^{-1} = \text{Id}_3$$

Donc l'initialisation est vérifiée

• **Hérédité:**

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie

$$\text{On rappelle que } A = PT P^{-1} \quad A^{n+1} = A^n A = PT^n P^{-1} PT P^{-1} = PT^n T P^{-1} = PT^{n+1} P^{-1}$$

Donc l'hérédité est vérifiée

Ainsi par principe de récurrence $P(n)$ est vraie

Donc on a:

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PT^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2^{n+1} - 2 - n & -n \\ 1 - 2^n & 2 - 2^n + n & n \\ 2^n - 1 & 2^n - n - 1 & 1 - n \end{pmatrix}$$

$$\text{Ainsi } \forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2^{n+1} - 2 - n & -n \\ 1 - 2^n & 2 - 2^n + n & n \\ 2^n - 1 & 2^n - n - 1 & 1 - n \end{pmatrix}$$
