

# Maths : ES 1

## Groupe

N° 1.

Comme  $Q$  est non commutatif, alors  $Q$  est nécessairement non monogène

N° 2.

soient  $x \in Q$  tel que  $x \neq e \neq e'$ ,

On sait que  $o(x) \mid \text{Card } Q = 8$

Ainsi  $x = 1$  ou  $x = 2$  ou  $x = 4$  ou  $x = 8$

Or comme  $Q$  n'est pas monogène  $x \neq 8$

Si  $o(x) = 1$ , alors  $x = x^1 = e$ . Absurde, donc  $x \neq 1$

Et par unicité de  $e'$ ,  $o(x) \neq 2$

Ainsi  $o(x) = 4$

Q.E.D.

N° 3. a.

Comme  $a \in Q$  et  $e' \in Q$ , alors comme  $Q$  est un groupe, alors  $e'a \in Q$ ,

Or prouvons par contraposé que  $a \neq e$  et  $a \neq e'$ , Ainsi prouvons que  $a = e$  ou  $a = e' \Rightarrow a = e'ae'$

• supposons que  $a = e$ , alors :

$$e'ae' = (e')^2 = e = a$$

• supposons que  $a = e'$ , alors :

$$e'ae' = (e')^2 e' = e' = a$$

Donc par contraposé et par hypothèse de l'exercice,  $a \neq e$  et  $a \neq e'$

Et donc comme  $a \neq e$  donc  $e'a \neq e'$  et comme  $a \neq e'$  donc  $e'a \neq (e')^2 = e$

et donc d'après la question précédente  $o(e'a) = 4$

Q.E.D.

b.

$$(a'a)^2 = (e'ae'a)^2 = (e'a)^4 = e$$

Donc  $o(a'a) = 2$  ou  $o(a'a) = 1$

Q.E.D.

c.

• Si  $o(a'a) = 1$ , alors

$$a'a = e \text{ donc } e'ae'a \text{ donc } (e'a)^2 = e$$

donc  $o(e'a) = 2$  donc  $e'a = e'$  (par unicité) donc  $a = e$  Absurde !!

Donc  $o(a'a) \neq 1$

- Si  $o(a'a) = 2$ , alors par unicité de  $e'$

$$a'a = e' \text{ donc } e'ae'a = e'$$

$$\text{donc } ae'a = e \text{ donc } \begin{cases} ae' = a^{-1} \\ e'a = a^{-1} \end{cases}$$

$$\text{donc } ae' = e'a \text{ donc } a = e'ae' = a' \text{ Absurde !!}$$

Donc  $o(a'a) \neq 2$

Ce qui est en contradiction avec la sous-question précédente, et donc Absurde !!

$$\text{Donc } \nexists a \in Q, a \neq e'ae' \iff \forall a \in Q, a = e'ae'$$

Ce qui revient à dire que  $e'$  commute avec tout éléments de  $Q$

**Q.E.D.**

**N° 4. a.**

$$\text{Soit } \Omega = \{e, j, k, l, e', je', ke', le'\}$$

Comme  $\text{Card } Q = \text{Card } \Omega$ , alors il suffit de montrer que un des deux ensemble contient le second

On a que les éléments  $e, j, k$  et  $e' \in Q$ , et comme  $Q$  est un groupe

alors les éléments  $l = jk, je', ke'$  et  $le' \in Q$

$$\text{Ainsi } Q = \Omega$$

**Q.E.D.**

**b.**

Soit  $x \in \{j, k, l\}$ , comme  $o(j) = o(k) = o(l) = 4$ , alors  $o(x) = 4$

donc  $x^4 = e$  donc  $(x^2)^2 = e$  donc  $o(x^2) = 2$ , par unicité de  $e'$ ,  $x^2 = e'$

$$\text{Donc } j^2 = k^2 = l^2 = e'$$

**Q.E.D.**

*	e	j	k	l	e'	je'	ke'	le'
e	e	j	k	l	e'	je'	ke'	le'
j	j	e'	l	ke'	je'	e	le'	k
k	k	le'	e'	j	ke'	l	e	je'
l	l	k	je'	e'	le'	ke'	j	e
e'	e'	je'	ke'	le'	e	j	k	l
je'	je'	e	le'	k	j	e'	l	ke'
ke'	ke'	l	e	je'	k	le'	e'	j
le'	le'	ke'	j	e	l	k	je'	e'

- $lkj = jkkj = (e')^2 = e$  (i)
- par (i) :  $l^2kj = kje' = l \iff kj = le'$
- $jk = l \iff jkl = e' \iff kle' = je' \iff kl = j$
- $kl = j \iff klj = e' \iff lj = k$

le reste se trouve facilement en combinant les éléments déjà trouvés sur le tableau

**Q.E.D.**