# Devoir maison 21

## ▸ Exercice : un calcul de l'intégrale de Gauss

Dans tout l'exercice, on note $f$ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x\left(1+\tan^2 t\right)}\, dt.$$

**1.** Justifier que $f$ est décroissante sur $\mathbf{R}$.

**2.** En encadrant la fonction tangente sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} O\left(e^{-x}\right)$.

**3.** Soit $A > 0$. Utiliser une formule de Taylor pour prouver que

$$\forall y \in [-A, A],\ 0 \leqslant e^y - 1 - y \leqslant e^A \frac{y^2}{2}.$$

**4.** Soit $a \in \mathbf{R}$. On note alors $g(a) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1+\tan^2 t\right) e^{-a\left(1+\tan^2 t\right)}\, dt$.

**a.** Montrer que

$$\forall h > 0,\ 0 \leqslant f(a+h) - f(a) + hg(a) \leqslant 2h^2 e^{2|h|} f(a).$$

**b.** En déduire que $f$ est dérivable en $a$ et que $f'(a) = -g(a)$.

**5.** Soit $h$ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $\forall x \in \mathbf{R},\ h(x) = f\left(x^2\right) + \left(\displaystyle\int_0^x e^{-u^2}\, du\right)^2$.

**a.** Justifier soigneusement que $h$ est dérivable sur $\mathbf{R}$

**b.** Prouver que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $h'(x) = 0$. *On pourra utiliser le changement de variable $u = x \tan t$.*

**c.** Justifier l'existence et calculer la valeur de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-u^2}\, du$.