

Maths : DM 16

Exercice 1: endomorphisme laissant stables toutes les droites

N°2.

Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$

alors $u(x) \in \text{Vect}(x)$ car $\text{Vect}(x)$ est stable par u

Donc $\exists! \lambda, u(x) = \lambda x$

N°3. a.

Si (x, y) est liée, alors $\exists \beta \in \mathbb{K}, x = \beta y$

Supposon $\beta = 0$

alors $x = \beta y = 0$ ce qui est absurde car $x \in E \setminus \{0\}$

Donc $\beta \neq 0$

Ainsi $u(x) = u(\beta y)$ donc $\lambda_x x = \beta \lambda_y y$

Donc $\lambda_x \underbrace{\beta y}_{\neq 0} = \lambda_y \underbrace{\beta y}_{\neq 0}$

Donc $\lambda_x = \lambda_y$

b.

Calculons $u(x + y)$ de deux manières différentes

$$u(x + y) = \lambda_{x+y}(x + y) = \lambda_{x+y}x + \lambda_{x+y}y$$

et

$$u(x + y) = u(x) + u(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$$

Or comme (x, y) est libre, il vient que $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$

Donc $\lambda_x = \lambda_y$

N°4.

Les points précédents nous montre que $\forall x, y \in E \setminus \{0\}, \exists! \lambda \in \mathbb{K}, u(x) = \lambda x$ et $u(y) = \lambda y$

Donc $\forall x \in E \setminus \{0\}, \exists! \lambda \in \mathbb{K}, u(x) = \lambda x$

Or comme $u(0) = 0 = \lambda \times 0$

Donc $\forall x \in E, \exists! \lambda \in \mathbb{K}, u(x) = \lambda x$, autrement dit, u est une homothétie

Exercice 2bis: endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ colinéaires à la trace

Pour montrer que $\varphi \in \text{Vect}(\text{tr}) \Leftrightarrow \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \varphi(AB) = \varphi(BA)$

On va procéder par double implication

- (\Rightarrow) Supposons que $\varphi \in \text{Vect}(\text{tr})$

alors $\exists \beta \in \mathbb{C}, \varphi = \beta \text{tr}$

Donc soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

alors $\varphi(AB) = \beta \text{tr}(AB) = \beta \text{tr}(BA) = \varphi(BA)$

Donc $\varphi \in \text{Vect}(\text{tr}) \Rightarrow \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \varphi(AB) = \varphi(BA)$

- (\Leftarrow) Supposons que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \varphi(AB) = \varphi(BA)$

Exercice 3: composée de deux projecteurs qui commutent

- Prouvons d'abord que $p \circ q$ est un projecteur

alors

$$\begin{aligned}(p \circ q) \circ (p \circ q) &= p \circ q \circ p \circ q = p \circ q \circ q \circ p \\ &= p \circ q \circ p = p \circ p \circ q \\ &= p \circ q\end{aligned}$$

Et soient $x, y \in E$ et soit $\beta \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}(p \circ q)(\beta x + y) &= p(q(\beta x + y)) = p(\beta q(x) + q(y)) \\ &= \beta p(q(x)) + p(q(y)) = \beta(p \circ q)(x) + (p \circ q)(y)\end{aligned}$$

Ainsi $p \circ q$ est un projecteur

- Prouvons maintenant par double inclusion que $\text{Ker}(p \circ q) = \text{Ker } p + \text{Ker } q$

1. d'abord soit $x \in \text{Ker } p + \text{Ker } q$, alors $\exists x_p, x_q \in \text{Ker } p \times \text{Ker } q, x = x_p + x_q$

$$\text{Alors } (p \circ q)(x) = (p \circ q)(x_p + x_q) = p\left(q(x_p) + \underbrace{q(x_q)}_{=0}\right) = q(p(x_p)) = q(0) = 0$$

Donc $x \in \text{Ker}(p \circ q)$

Donc $\text{Ker } p + \text{Ker } q \subset \text{Ker}(p \circ q)$

2. De plus soit $x \in \text{Ker}(p \circ q)$

- Enfin prouvons également par double inclusion que $\text{Im}(p \circ q) = \text{Im } p \cap \text{Im } q$

1. Soit $x \in \text{Im}(p \circ q)$ alors $\exists y \in E, x = p(q(y))$, soit un telle y

donc $x \in \text{Im } p$

et $x = p(q(y)) = q(p(y)) \in \text{Im } q$

Donc $x \in \text{Im } p \cap \text{Im } q$

Donc $\text{Im}(p \circ q) \subset \text{Im } p \cap \text{Im } q$

2. Soit $x \in \text{Im } p \cap \text{Im } q$ alors $x \in \text{Im } p$ et $x \in \text{Im } q$

Donc $\exists y, y' \in E, x = p(y)$ et $x = q(y')$