Gaspar Daguet

Maths : DM 21

Problème 2 : une construction rigoureuse des fonctions trigonométriques

N=° 1.

Soit $z \in \mathbb{C}$, alors

$$\sum \left|\frac{z^n}{n!}\right| = \sum \frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|}$$

Donc $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument

Partie I.

N=° 2.

Soit $z \in \mathbb{Z}$, alors

$$\frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = |z| o\left(\frac{r^{n+1}}{r^n}\right) = |z| o(r) = o(1) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$$

Donc la série de terme générale $a_n z^n$ converge absolument

N=° 3.

Soit $r, r\text{'} \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $0 < r\text{'} < r$, alors $\frac{r\text{'}}{r} < 1$
Donc $n\left(\frac{r\text{'}}{r}\right)^n = no\left(\frac{1}{n}\right) = o(1)$

Donc $\frac{r\text{'}^n}{r^n \frac{1}{n}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $r\text{'}^n = o\left(\frac{r^n}{n}\right)$
Et comme $a_n = o(r\text{'}^n) = o\left(\frac{r^n}{n}\right)$
Donc $na_n = o(r^n)$

N=° 4.