Gaspar Daguet

Maths : DM 21

Problème 2 : une construction rigoureuse des fonctions trigonométriques

N=° 1.

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $N \in \mathbb{N}$ alors

$$\sum_{n=0}^{N} \left| \frac{z^n}{n!} \right| = \sum_{n=0}^{N} \frac{|z|^n}{n!} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} e^{|z|}$$

Donc $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument

Partie I. Un théorème de dérivation terme à terme

N=° 2.

Soit $z \in \mathbb{Z}$, alors

$$\frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = |z| o\left(\frac{r^{n+1}}{r^n} \right) = |z| o(r) = o(1) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$$

Donc la série de terme générale $a_n z^n$ converge absolument

N=° 3.

Soit $r, r\text{'} \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $0 < r\text{'} < r$, alors $\frac{r\text{'}}{r} < 1$
Donc $n \left(\frac{r\text{'}}{r} \right)^n = n o\left(\frac{1}{n} \right) = o(1)$

Donc $\frac{r\text{'}^n}{r^n \frac{1}{n}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $r\text{'}^n = o\left(\frac{r^n}{n} \right)$
Et comme $a_n = o(r\text{'}^n) = o\left(\frac{r^n}{n} \right)$
Donc $n a_n = o(r^n)$

N=° 4.

Comme $\forall r \in \mathbb{R}_+^*, n a_n = o(r^n)$, alors par la question 2. $\forall z \in \mathbb{C}, \sum_{n \geq 0} n a_n z^n$ converge absolument

Donc en particulier pour $x \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{N} n a_n x^{n-1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{N} n a_n x^n \text{ converge absolument}$$

De plus pour $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^{N} \left| n(n-1) a_n x^{n-2} \right| \leq \sum_{n=1}^{N} \left| n^2 a_n x^{n-2} \right| - \sum_{n=1}^{N} \left| n a_n x^{n-2} \right|$$

On a montré juste avant que $\sum_{n=1}^{N} \left| n a_n x^{n-2} \right|$ converge absolument
Et comme $\forall r \in \mathbb{R}_+^*, n a_n = o(r^n)$, alors par la série précédente

$\sum_{n=1}^{N} \left|n(na_n)x^{n-2}\right|$ converge absolument

Ainsi $\sum_{n=1}^{N} n(n-1)a_n x^{n-2}$ converge absolument

N=° 5. a.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $h \in]-1;1[$, alors

Soit $f : x \mapsto (x+h)^n$, donc $\forall x \in \mathbb{R}, f\text{'}(x) = n(x+h)^{n-1}$ et $x_0 - h \leq |x_0| + 1$

Alors par l'inégalité de Taylor-Lagrange avec $a = x_0 - h$ et $b = x_0$:

$$|f(x_0) - f(x_0 - h) - f\text{'}(x_0 - h)| \leq \frac{h^2}{2} n(n-1)(|x_0|+1)^{n-2}$$

$$\Leftrightarrow \left|(x_0+h)^n - x_0^n - hnx_0^{n-1}\right| \leq \frac{h^2}{2} n(n-1)(|x_0|+1)^{n-2}$$

b.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left|(x_0+h)^n - x_0^n - hnx_0^{n-1}\right| \leq \left|f(x_0+h) - f(x_0) - h\sum_{n=0}^{+\infty} na_n x_0^{n-1}\right| \leq \frac{h^2}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)(|x_0|+1)^{n-2}$$

$$\Leftrightarrow \left|f(x_0+h) - f(x_0) - h\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x_0^{n-1}\right| \leq \frac{h^2}{2}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)(|x_0|+1)^{n-2}$$

c.

Pour $h \neq 0$, alors par la question précédente

$$\frac{\left|f(x_0+h) - f(x_0) - h\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x_0^{n-1}\right|}{|h|} \leq \frac{h^2}{2|h|}\sum_{n=2}^{+\infty} |a_n| n(n-1)(|x_0|+1)^{n-2}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \left|\underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'(x_0)} - \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x_0^{n-1}\right| \leq \underbrace{\frac{|h|}{2}\sum_{n=2}^{+\infty} |a_n| n(n-1)(|x_0|+1)^{n-2}}_{\underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0}$$

Donc par théorème des gendarmes $f'(x_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x_0^{n-1}$

N=° 6. a.

On a pour spécialement pour tout $n, k \in \mathbb{N}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+2) \times (n-k+1)}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$$

Soit $r, r' \in \mathbb{R}_+^*$, tel que $0 < r < r'$

donc $n^k \left(\frac{r'}{r}\right)^n \underset{n\to+\infty}{=} n^k o\left(\frac{1}{n^k}\right) \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$

Donc $r'^n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{r^n}{n^k}\right)$ Donc $n^k a_n = o(r^n)$

Ainsi $a_n \binom{n}{k} \underset{n\to+\infty}{=} o(r^n)$

b.

Prouvons par récurance $P(k)$: f est $\mathscr{C}^k$ et $\forall x \in \mathbb{R} f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} k!\binom{n}{k} a_n x^{n-k}$

- **Initialisation :**

Pour $k = 0$:
On a prouvé à la question précédente que f est dérivable, donc f de classe $\mathscr{C}$
et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(0)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 0!\binom{n}{0} a_n x^{n-0} = \sum_{n=0}^{+\infty} 0!\binom{n}{0} a_n x^{n-0} = f(x)$

- **Hérédité :**

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $P(k)$ soit vérifiée
Soit $x \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) = \left(f^{(k)}\right)'(x) = \sum_{n=k+1}^{+\infty} k!(n-k)\binom{n}{k} a_n x^{n-k-1} \\
&= \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{k+1}{k+1} k!(n-k)\frac{n!}{k!(n-k)!} a_n x^{n-(k+1)} \\
&= \sum_{n=k+1}^{+\infty} (k+1)!\frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} a_n x^{n-(k+1)} = \sum_{n=k+1}^{+\infty} (k+1)!\binom{n}{k+1} a_n x^{n-(k+1)}
\end{aligned}$$

Ainsi par principe de récurance simple $P(k)$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$
Donc comme f est dérivable autemps de fois que l'on veux elle est $\mathscr{C}^{+\infty}$

Partie II. produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes

N=° 7. a.

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{0 \le p,q \le k \\ p+q=k}} a_p b_q = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{0 \le p,q \le n \\ p+q=k}} a_p b_q = \sum_{\substack{0 \le p,q \le n \\ p+q=n}} a_p b_q$$

De plus $C_n = \sum_{\substack{0 \le p,q \le n \\ p+q=n}} a_p b_q \le \sum_{0 \le p,q \le n} a_p b_q = A_n B_n$
Car la somme C_n comporte moins de terms à sommer car on viens sommer sur les même indices que $A_n B_n$ mais avec une condition en plus sur les indices

b.

$C_n \ge 0$ car somme de de termes positifs, Ainsi $0 \le C_n \le A_n B_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} AB$
Donc par téhorème des gendarmes C converge

c.

Soit $n \in \mathbb{N}$

Donc $A_n B_n \le C_{2n}$
Donc pour n paire, $A_{\frac{n}{2}} B_{\frac{n}{2}} \le C_n$, prenons donc n paire pour la fin de cette exercice
Ainsi par la question 7.a. $\underbrace{A_{\frac{n}{2}} B_{\frac{n}{2}}}_{\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} AB} \le C_n \le \underbrace{A_n B_n}_{\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} AB}$
Donc par le théorème des gendarmes $C_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} AB$

N=° 8. a.

b.

Soit $n \in \mathbb{N}$,

D'après la question précédente on à : $0 \leq \sum_{k=0}^{n} |c_k| \leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |a_k|\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} |b_k|\right)$

Or comme $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_k|$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} |b_k|$ converge car $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes

Donc par théorème des gendarmes $\sum c_n$ converge absolument

N=° 9.

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$,

Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$ vaut e^a, de même pour $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b^n}{n!} = e^b$,

Alors par tout ce qui à étais fais avant $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b^n}{n!}\right)$ converge et vaut:

$$
\begin{aligned}
e^a e^b = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b^n}{n!}\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \frac{b^{n-k}}{n-k!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a+b)^k}{n!} = e^{a+b}
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

Partie III. Fonctions trigonométriques

N=° 10.

Soit $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(it)^n}{n!}+\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(it)^n}{n!}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(it)^n}{n!}\overbrace{(1+(-1)^n)}^{\substack{=0 \text{ si n impaire} \\ 2 \text{ sinon}}}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ paire}}}^{+\infty} 2i^n\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} i^{2n}\frac{t^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!} = c(t)$$

Et

$$\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(it)^n}{n!}-\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(it)^n}{n!}}{2i} = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(it)^n}{n!}\overbrace{(1-(-1)^n)}^{\substack{=0 \text{ si n paire} \\ 2 \text{ sinon}}}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ impaire}}}^{+\infty} 2i^{n-1}\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} i^{2n}\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} = s(t)$$

Q.E.D.

N=° 11.

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

$$s(a)c(b)+c(a)s(b) = \frac{e^{ia}-e^{-ia}}{2i}\frac{e^{ib}+e^{-ib}}{2}+\frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2}\frac{e^{ib}-e^{-ib}}{2i}$$

$$= \frac{1}{4i}\left(e^{ia+ib}+\cancel{e^{ia-ib}}-\cancel{e^{ib-ia}}-e^{-ia-ib}+e^{ia+ib}-\cancel{e^{ia-ib}}+\cancel{e^{ib-ia}}-e^{-ia-ib}\right)$$

$$= \frac{1}{4i}\left(2e^{i(a+b)}-2e^{-i(a+b)}\right) = \frac{e^{ia+b}-e^{-ia+b}}{2i} = s(a+b)$$

Et

$$c(a)c(b)-s(a)s(b) = \frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2}\frac{e^{ib}+e^{-ib}}{2}-\frac{e^{ia}-e^{-ia}}{2i}\frac{e^{ib}-e^{-ib}}{2i}$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{i(a+b)}+\cancel{e^{i(a-b)}}+\cancel{e^{i(b-a)}}+e^{-i(a+b)}+e^{i(a+b)}-\cancel{e^{i(a-b)}}-\cancel{e^{i(b-a)}}+e^{-i(a+b)}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(2e^{i(a+b)}+2e^{-i(a+b)}\right) = \frac{e^{i(a+b)}+e^{-i(a+b)}}{2} = c(a+b)$$

Q.E.D.

N=° 12.

Comme on l'a justifié dans la partie I, on a que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{C}, x \mapsto e^{ax}$ est dérivable, de dérivée:

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a^n\frac{(x)^{n-1}}{(n-1)!} = a\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(ax)^n}{n!} = ae^{ax}$$

Soit $t \in \mathbb{R}$

$$s'(t) = \frac{ie^{it} + ie^{-it}}{2i} = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = c(t)$$

Et

$$c'(t) = \frac{ie^{it} - ie^{-it}}{2} = -\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = -s(t)$$

Q.E.D.

N=° 13.

Soit $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} c(t)^2 + s(t)^2 &= \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}(\cancel{e^{2it}} + 2 + \cancel{e^{-2it}} - \cancel{e^{2it}} + 2 - \cancel{e^{-2it}}) = \frac{4}{4} = 1 \end{aligned}$$

Donc $c(t)^2 + s(t)^2 = 1$

Q.E.D.

Ainsi $c(t)^2 = 1 - s(t)^2 \leq 1$
Donc $|c(t)| \leq 1$
De même pour $s(t)$
$s(t)^2 = 1 - c(t)^2 \leq 1$
Donc $|s(t)| \leq 1$
Ainsi s et c sont bornée entre $[-1; 1]$

N=° 14. a.

On a prouvé à la question 12. que $s' = c$
Or $c(0) = \frac{e^0+e^0}{2} = \frac{2}{2} = 1 > 0$
et comme on a supposé que c ne s'annulais pas, alors $\forall x \in \mathbb{R}, c(x) \geq 0$
Ainsi $s' = c \geq 0$
Donc s est strictement croissante

Q.E.D.

b.

On a $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = -s(x) + s(1)$, Comme $-s$ est strictement décroissante
alors pour $x \in]1, +\infty[, g'(x) = -s(x) + s(1) < 0$
Donc g est décroissante sur $]1, +\infty[$

Q.E.D.

c.

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = c(x) + xs(1) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ car } c(x) \text{ bornée}$$

Ce qui est Absurde car g décroissante

Donc $c(x)$ s'annule au moins une fois

N=° 15.

N=° 16. a.

Soit $x \in \left[0, \frac{p}{2}\right]$

alors on vient de prouver que $c(x) \neq 0$ comme $c(0) = 1$

Alors $\forall t \in \left[0, \frac{p}{2}\right], c(t) \geq 0$

Donc comme $s'(x) = c(x) \geq 0$, Donc s est croissante sur $\left[0, \frac{p}{2}\right]$

De plus $s(0) = 0$ et $s\left(\frac{p}{2}\right)^2 = 1 - c\left(\frac{p}{2}\right)^2 = 1(i)$

Mais comme s est croissante sur $\left[0; \frac{p}{2}\right]$, et que $s(0) = 0$,alors $s\left(\frac{p}{2}\right) \geq 0$, Donc par (i), $s\left(\frac{p}{2}\right) = 1$

Ainsi

x	0	$\frac{p}{2}$
Signe de s'	$+$	
Variation de s	0 $\nearrow$	1

On vient de prouvé que s étais croissante et comme $c' = -s \leq 0$, donc c est décroissante

de plus $c(0) = 1$ et $c\left(\frac{p}{2}\right) = 0$ par définition de p

Ainsi

x	0	$\frac{p}{2}$
Variation de c	1 $\searrow$	0

b.

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$c\left(x+\frac{p}{2}\right) = c(x)\underbrace{c\left(\frac{p}{2}\right)}_{=0} - s(x)\underbrace{s\left(\frac{p}{2}\right)}_{=1} = -s(x)$$

Et

$$s\left(x+\frac{p}{2}\right) = c(x)\underbrace{s\left(\frac{p}{2}\right)}_{=1} + s(x)\underbrace{c\left(\frac{p}{2}\right)}_{=0} = c(x)$$

Et

$$c(x+p) = c\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)+\frac{p}{2}\right) = -s\left(x+\frac{p}{2}\right) = -c(x)$$

Et

$$s(x+p) = s\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)+\frac{p}{2}\right) = c\left(x+\frac{p}{2}\right) = -s(x)$$

Et

$$c\left(x+\frac{3p}{2}\right) = c\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)+p\right) = -c\left(x+\frac{p}{2}\right) = s(x)$$

Et

$$s\left(x+\frac{3p}{2}\right) = s\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)+p\right) = -s\left(x+\frac{p}{2}\right) = -c(x)$$

Donc $\forall x \in [0;2p], \forall t \in \left[0;\frac{p}{2}\right], c(x) = \begin{cases} c(t) \text{ si } x \in \left[0;\frac{p}{2}\right] \\ -s(t) \text{ si } x \in \left[\frac{p}{2};p\right] \\ -c(t) \text{ si } x \in \left[p;\frac{3p}{2}\right] \\ s(t) \text{ si } x \in \left[\frac{3p}{2},2p\right] \end{cases}$ et $s(x) = \begin{cases} s(t) \text{ si } x \in \left[0;\frac{p}{2}\right] \\ c(t) \text{ si } x \in \left[\frac{p}{2};p\right] \\ -s(t) \text{ si } x \in \left[p;\frac{3p}{2}\right] \\ -c(t) \text{ si } x \in \left[\frac{3p}{2},2p\right] \end{cases}$

Ainsi, à l'aide de la question précédente, on obtient les tableaux de variation suivant:

x	0	$\frac{p}{2}$	p	$\frac{3p}{2}$	$2p$
Variation de s	0	1	0	-1	0

Et

x	0	$\frac{p}{2}$	p	$\frac{3p}{2}$	$2p$
Variation de c	1	0	-1	0	1

Et

$$s(x+2p) = s((x+p)+p) = -s(x+p) = s(x)$$

Donc s et c sont $2p$–perdiodiques

Prouvons que $2p$ est leur plus petite période

Soit $T \in \mathbb{R}$ tel que T soit la plus petite période de s et c

Alors $\exists n \in \mathbb{N}^*, 2p = nT$, soit $n \in \mathbb{N}^*$ un telle n

donc $T = \frac{2p}{n}$

Supposons par l'absudre que $n \neq 1$, alors

- si $n = 2$,

on a: $\forall x \in \mathbb{R}, s\left(\frac{p}{2} + T\right) = s\left(\frac{p}{2} + \frac{2p}{2}\right) = s\left(\frac{p}{2} + p\right) = -s\left(\frac{p}{2}\right) = -1 \neq 1 = s\left(\frac{p}{2}\right)$

et $1 = c(0) = c(0+T) = c(p) = -1$

Absurde !

- si $n > 2$,

alors $\frac{2p}{n} \in]0; p[$

Or par la question 16.b., on sais que $\forall x \in]0; p[, s(x) \neq 0$ et $c(x) \neq 1$

sauf que $s\left(\frac{2p}{n}\right) = s\left(0 + \frac{2p}{n}\right) = s(0+T) = s(0) = 0$ et $c\left(\frac{2p}{n}\right) = c(0+T) = c(0) = 1$

ce qui est Absurde

Donc $n = 1$ et donc $T = 2p$

Ainsi $2p$ est la plus petite période de s

Q.E.D.