Gaspar Daguet

Maths : DM ᚢᚷ

Il est important avant de commencer lire ce DM
d'avoir bien compris le tableau et les exemples suivants

symbole usuel	symbole du DM	prononciation
0	ᚠ	fé
1	ᚢ	ur
2	ᚦ	tur
3	ᚨ	an
4	ᚱ	rai
5	ᚲ	kau
6	ᚷ	gèb
7	ᚹ	wun
8	ᚺ	hag
9	ᚾ	nau
10	ᛃ	je
11	ᛇ	ei
$=$	ᛝ	ing/i ng
$+$	ᛏ	ti
$-$	ᛉ	al
$\times$	ᛞ	dag
$\div$	ᛚ	lag
$\in$	ᛊ	so
$\forall$	ᛈ	per
$\exists$	ᛒ	ber
$\exists!$	!ᛒ	\
$>$	ᛗ	man
$<$	ᛖ	e
$\geq$	ᛗᛝ	maning
$\leq$	ᛖᛝ	ehwing
$\neq$	ᛜ	naing
$\subset$	ᚭ	suz
$\supset$	ᚮ	zus

ᚷᚹ ᛏ ᚲᚲ ᛝ ᚢᚠᚠ ce qui est équivalant à $79 + 65 = 144$

$$e^{ɜ} \underset{ɜ \to ᚠ}{ᛝ} ᚢ ᛏ ɜ ᛏ \frac{ɜ^{ᚦ}}{ᚦ!} ᛏ \cdots ᛏ \frac{ɜ^{ᛥ}}{ᛥ!} ᛏ o(ɜ^{ᛥ})$$

est équivalant à

$$e^{x} \underset{x \to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{x!} + o(x^n)$$

Problème ᚦ : nombres algébrique et extensions de corps

Partie I. extensions de corps

N=° ᚢ. Premiers exemples a.

il est évident que $\mathbb{R}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ et de plus $\mathbb{C}$ est de dimension finis, donc $\mathbb{C}$ est une extention finie de $\mathbb{R}$

de plus soit ᛩ ᛊ $\mathbb{C}$ alors

$$ᛒ ᛃ, ᛥ ᛊ \mathbb{R}, ᛩ ᛝ ᛃ ᛏ i\ ᛥ \Leftrightarrow ᛩ ᛊ \mathrm{Vect}(ᚢ, i)$$

Ainsi comme ᚢ et i ne sont pas colinéaire dans $\mathbb{R}$, $\mathrm{Vect}(ᚢ, i)$ forme une base de $\mathbb{C}$
Ainsi $[\mathbb{C} : \mathbb{R}]$ ᛝ ᚦ

soit ᛯ un sous-corps qui contient $\mathbb{R}$
comme $[\mathbb{R} : \mathbb{R}]$ ᛝ ᚢ et que l'on vient de prouver que $[\mathbb{C} : \mathbb{R}]$ ᛝ ᚦ
il apparait donc comme condition que, ᚢ ᛖᛝ $[$ᛯ $: \mathbb{R}]$ ᛖᛝ ᚦ
Ainsi $[$ᛯ $: \mathbb{R}]$ ᛝ ᚢ ou $[$ᛯ $: \mathbb{R}]$ ᛝ ᚦ
Et ansi ᛯ ᛝ $\mathbb{R}$ ou ᛯ ᛝ $\mathbb{C}$

b.

Soit ᛃ ᛊ $\mathbb{Q}(\sqrt{ᚦ})$, alors ᛒ ᛥ, ᛩ ᛊ $\mathbb{Q}$, ᛃ ᛝ ᛥ ᛏ ᛩ $\sqrt{ᚦ}$, alors prenons ᛩ ᛝ ᚴ
ainsi ᛃ ᛝ ᛥ ᛊ $\mathbb{Q}$, donc $\mathbb{Q}$ ᚽ $\mathbb{Q}(\sqrt{ᚦ})$ et comme $\mathbb{Q}$ est un corps
de $\mathbb{Q}(\sqrt{ᚦ})$
de plus, soit ᛃ ᛊ $\mathbb{Q}(\sqrt{ᚦ})$ alors ᛒ ᛥ, ᛩ ᛊ $\mathbb{Q}$, ᛃ ᛝ ᛒ ᛏ ᛥ $\sqrt{ᚦ}$, soit un telle ᛩ, ᛥ
donc ᛃ ᛝ ᛩ ᛏ ᛥ $\sqrt{ᚦ}$ ᛊ $\mathrm{Vect}(ᚢ, \sqrt{ᚦ})$
et supposons par l'absurde ᛒ ᛃ, ᛥ ᛊ $\mathbb{Q}$ ᛞ $\mathbb{Q}^*$, ᛃ ᛏ ᛥ $\sqrt{ᚦ}$ ᛝ ᚴ
alors $\frac{ᛃ}{ᛥ}$ ᛝ ᛉ $\sqrt{ᚦ}$ ce qui est absurde car $\frac{ᛃ}{ᛥ}$ ᛊ $\mathbb{Q}$, donc ᛃ ᛝ ᛥ ᛝ ᚴ
Ainsi $(ᚢ, \sqrt{ᚦ})$ est une base de $\mathbb{Q}(\sqrt{ᚦ})$
Donc $[\mathbb{Q}(\sqrt{ᚦ}) : \mathbb{Q}]$ ᛝ ᚦ

c. i.

Soit P ᛊ $\mathbb{Q}[X]$ tel que $P(\sqrt[ᚨ]{ᚦ})$ ᛝ ᚴ
prenons la divisions euclidienne de $X^{ᚨ}$ ᛉ ᚦ par P
ce qui nous donne $X^{ᚨ}$ ᛉ ᚦ ᛝ PQ ᛏ R avec Q ᛊ $\mathbb{Q}_{ᚢ}[X]$ et R ᛊ $\mathbb{Q}[X]$ tel que deg R ᛖ ᚦ
En évaluant notre expression précédente en $\sqrt[ᚨ]{ᚦ}$ on obtient :

$$\left(\sqrt[ᚨ]{ᚦ}\right)^{ᚨ} ᛉ ᚦ ᛝ ᚴ ᛝ \underbrace{\mathrm{P}\left(\sqrt[ᚨ]{ᚦ}\right)}_{ᛝ ᚴ} ᛏ \mathrm{R}$$

donc R ᛝ ᚴ et donc deg R ᛝ ᚴ
ainsi P divise $X^{ᚨ}$ ᛉ ᚦ

Ainsi Comme P divise $X^{ᚨ}$ ᛉ ᚦ et que deg P ᛝ ᚦ,
alors P et $X^{ᚨ}$ ᛉ ᚦ possède deux racines en commun dont $\sqrt[ᚨ]{ᚦ}$
et comme $X^{ᚨ}$ ᛉ ᚦ ᛝ $(X$ ᛉ $\sqrt[ᚨ]{ᚦ})(X$ ᛉ $\sqrt[ᚨ]{ᚦ}e^{i\frac{\pi}{ᚨ}})(X$ ᛉ $\sqrt[ᚨ]{ᚦ}e^{i\frac{ᚦ\pi}{ᚨ}})$ donc P à en plus une racine complexe
or un polynôme dans $\mathbb{R}$ qui possède une racine complexe possède sont conjugée

ce qui n'est pas le cas pour P donc P$\notin\mathbb{Q}[X]$ ce qui est absurde

Donc $\nexists P \in \mathbb{Q}[X], P\left(\sqrt[3]{2}\right) = 0$

ii.

Par un résonnement annaloge à la question 1 .b on montre que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)$,

De plus soit $x \in \mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)$ alors soient $a, b, c \in \mathbb{Q}, x = a + b\ \sqrt[3]{2} + c\ \left(\sqrt[3]{2}\right)^2$

donc $x \in \operatorname{Vect}\left(1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}^2\right)$

donc $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)$ est une extensions finis et $\left[Q\left(\sqrt[3]{2}\right) : \mathbb{Q}\right] = 3$

d.

Soient $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{Q}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \ln(p_i) = 0$,

alors

$$\ln\left(\prod_{i=1}^{n} p_i^{a_i}\right) = 0 \text{ Donc } \prod_{i=1}^{n} p_i^{a_i} = 1$$

Or comme $\forall i \in [\![1;n]\!], a_i \in \mathbb{Q}$ donc $\exists q, b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{N}, \forall i \in [\![1;n]\!], a_i = \frac{b_i}{q}$. Ainsi

$$\left(\prod_{i=1}^{n} p_i^{b_i}\right)^{\frac{1}{q}} = 1 \Leftrightarrow \prod_{i=1}^{n} p_i^{b_i} = 1$$

Or comme $\forall i \in [\![1;n]\!], p_i^{b_i} \in \mathbb{N}$ Donc $p_1^{b_1} = \cdots = p_n^{b_n} = 1$ Donc $b_1 = \cdots = b_n = 0$

Et donc $a_1 = \cdots = a_n = 0$

Ainsi $(\ln(p_1), \cdots, \ln(p_n))$ est libre

Et donc la dimmension de $\mathbb{R}$ n'est pas finis, donc $\mathbb{R}$ n'est pas une extention finis de $\mathbb{Q}$

N°2.

soit $x \in \mathbf{L}$, alors $\exists! \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbf{K}$ tel que, $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i$

Or on a $\forall i \in [\![1, n]\!], \exists! \mu_1, \cdots, \mu_p \in k, \lambda_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \beta_j \mu_j$

Ainsi $\exists! \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbf{K} \in k, \exists! \mu_1, \cdots, \mu_p \in k, x = \displaystyle\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \alpha_i \beta_j \lambda_i \mu_j$

Donc x s'écrit d'une manière unique comme des élément de k,

donc la famille $(\alpha_i \beta_j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une base de du k-espace vectoriel $\mathbf{L}$

De plus la famille $(\alpha_i \beta_j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ comporte exactement np éléments

Donc $\mathbf{L}$ est une extensions finis de k et $[\mathbf{L} : k] = [\mathbf{L} : \mathbf{K}][\mathbf{K} : k]$

Partie II. Éléments algébriques

N=° ᚨ.

pour montrer que $\mathbb{K}[\alpha]$ ᛝ $\{P(\alpha), P$ ᛊ $\mathbb{K}[X]\}$,
on montre que $\{P(\alpha), P$ ᛊ $\mathbb{K}[X]\}$ ᛝ $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(\alpha^n, n$ ᛊ $\mathbb{N})$
pour cela,

$$ᛤ\ ᛊ\ \{P(\alpha), P\ ᛊ\ \mathbb{K}[X]\} \Leftrightarrow ᛒ\ ᛇ_{ᚠ}, \cdots, ᛇ_n\ ᛊ\ \mathbb{K}\ \ ᛤ\ ᛝ \sum_{ᚻ\ ᛝ\ ᚠ}^{n} ᛇ_{ᚻ} \alpha^{ᚻ}\ ᛊ\ \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(\alpha^n, n\ ᛊ\ \mathbb{N})\ ᛝ\ \mathbb{K}[\alpha]$$

Donc $\{P(\alpha), P$ ᛊ $\mathbb{K}[X]\}$ ᛝ $\mathbb{K}[\alpha]$

soient ᚻ, ᛇ ᛊ $\mathbb{K}[\alpha]$, alors ᛒ P, Q ᛊ $\mathbb{K}[X]$, $P(\alpha)$ ᛝ ᚻ et $Q(\alpha)$ ᛝ ᛇ, alors:
- ᚠ ᛊ $\mathbb{K}[\alpha]$
- ᚻ ᛉ ᛇ ᛝ $P(\alpha)$ ᛉ $Q(\alpha)$ ᛝ $(P$ ᛉ $Q)(\alpha)$ et P ᛉ Q ᛊ $\mathbb{K}[X]$
- ᚻ ᛞ ᛇ ᛝ $P(\alpha)$ ᛞ $Q(\alpha)$ ᛝ $(P$ ᛞ $Q)(\alpha)$ et PQ ᛊ $\mathbb{K}[X]$

Donc $\mathbb{K}[\alpha]$ est un sous-anneau de $\mathbb{L}$

Et $\mathrm{Vect}(\alpha^n, n$ ᛊ $\mathbb{N})$ est le plus petit ensemble stable par ᛏ et ᛞ,
ce qui fais de luis le plus petit sous-anneau contanant α et $\mathbb{K}$

N=° ᚱ.

procédons par double inclusion pour prouver que α est algébrique sur $\mathbb{K}$ si et seulement si il existe n ᛊ $\mathbb{N}$ tel que $(1, \alpha, \cdots, \alpha^n)$ soit une famille liée
$(\Rightarrow)$ Supposons que α est algébrique sur $\mathbb{K}$, alors

$$ᛒ\ ᛤ\ ᛊ\ \mathbb{K}[X], ᛤ(\alpha)\ ᛝ\ ᚠ \Leftrightarrow ᛒ\ n\ ᛊ\ \mathbb{N}, ᛒ\ ᚻ_{ᚠ}, \cdots, ᚻ_n\ ᛊ\ \mathbb{K}, ᛤ(\alpha)\ ᛝ \sum_{ᛇ\ ᛝ\ ᚠ}^{n} ᚻ_{ᛇ} \alpha^{ᛇ}\ ᛝ\ ᚠ$$

$$\text{Donc } ᛉ \sum_{ᛇ\ ᛝ\ ᚢ}^{n} ᚻ_{ᛇ} \alpha^{ᛇ}\ ᛝ\ ᚻ_{ᚠ}$$

Donc $(1, \alpha, \cdots, \alpha^n)$ est liée

$(\Leftarrow)$ Supposons que $(1, \alpha, \cdots, \alpha^n)$ soit liée, alors:

$$ᛒ\ ᚻ_{ᚠ}, \cdots, ᚻ_n\ ᛊ\ \mathbb{K}, ᛒ\ ᛣ\ ᛊ\ \mathbb{N}, ᛡ\ \alpha^{ᛣ}\ ᛝ \sum_{\substack{ᛇ\ ᛝ\ ᚠ \\ ᛇ\ \diamond\ ᛣ}}^{n} ᚻ_{ᛇ} \alpha^{ᛇ}$$

$$\text{Donc } \sum_{\substack{ᛇ\ ᛝ\ ᚠ \\ ᛇ\ \diamond\ ᛣ}}^{n} ᚻ_{ᛇ} \alpha^{ᛇ}\ ᛉ\ ᛡ\ \alpha^{ᛣ}\ ᛝ\ ᚠ$$

en posant ᛉ ᛡ ᛝ $ᚻ_{ᛣ}$, on obtient

$$\sum_{\substack{ᛇ\ ᛝ\ ᚠ \\ ᛇ\ \diamond\ ᛣ}}^{n} ᚻ_{ᛇ} \alpha^{ᛇ}\ ᛉ\ ᛡ\ \alpha^{ᛣ}\ ᛝ \sum_{ᛇ\ ᛝ\ ᚠ}^{n} ᚻ_{ᛇ} \alpha^{ᛇ}\ ᛝ\ ᚠ$$

Or $\sum_{ᛇ\ ᛝ\ ᚠ}^{n} ᚻ_{ᛇ} \alpha^{ᛇ}$ ᛊ $\mathbb{R}[X]$
Donc α est algébrique

Par le principe de double inclusion

α est algébrique si et seulement si il existe n ᛊ $\mathbb{N}$ tel que $(1, \alpha, \cdots, \alpha^n)$ est liée

N=° ᚲ.

Soit ᛃ ᛊ $\mathbb{L}$, alors ᛃ est algébrique de degré ᚢ sur $\mathbb{K}$ si et seulement si (ᚢ, ᛃ) est liée

si et seulement si il existe ᛒ ᛊ $\mathbb{K}$, ᛃ ᛟ ᛒ ᛞ ᚢ ᛟ ᛒ si et seulement si ᛃ ᛊ $\mathbb{K}$

Donc on a bien (ᚢ, ᛃ) liée $\Leftrightarrow$ ᛃ ᛊ $\mathbb{K}$

N=° ᚷ.

Supposons que $\mathbb{L}$ est une extention finie de $\mathbb{K}$ et soit ᛃ ᛊ $\mathbb{L}$

alors ᛃ est algébrique sur $\mathbb{K}$ si:

$$a$$

N=° ᚹ. a.

On sait par la définitions que $(1, \alpha, \cdots, \alpha^{d\text{ ᛉ ᚢ}})$ est libre

Et Vect(α^n, n ᛊ $\mathbb{N}$) ᛟ Vect(α^n, n ᛊ ⟦ᚢ; d ᛉ ᚢ⟧)

Ainsi Vect(α^n, n ᛊ ⟦ᚢ; d ᛉ ᚢ⟧) est une base de $\mathbb{K}[\alpha]$

b.

Supposons que β ᛜ ᚠ, alors prouvons que f_β est linéaire et bijective

- linéarité:

Soient ᛒ ᛊ $\mathbb{K}$, ᛃ, ᚼ ᛊ $\mathbb{K}[\alpha]$, f_β(ᛒ ᛃ ᛏ ᚼ) ᛟ β ᛒ ᛃ ᛏ β ᚼ ᛟ ᛒ f_β(ᛃ) ᛏ f_β(ᚼ) donc f_β ets linéaire

- bijectivité:

soit ᛃ ᛊ $\mathbb{K}[\alpha]$, f_β(ᛃ) ᛟ ᚠ

alors β ᛃ ᛟ ᚠ donc ᛃ ᛟ ᚠ car β ᛜ ᚠ

donc Ker(f_β) ᛟ {ᚠ}. Donc f_β est injéctive

Et soient ᛃ, ᚼ ᛊ $\mathbb{K}[\alpha]$, f_β(ᛃ) ᛟ ᚼ

alors ᛃ ᛟ $\frac{\text{ᚼ}}{\beta}$ car β ᛜ ᚠ, et donc f_β est surjective

et comme f_β va de $\mathbb{K}[\alpha]$ dans $\mathbb{K}[\alpha]$

f_β est un automorphisme

c.

On a: $\mathbb{K}$ ᚽ $\mathbb{K}[\alpha]$, donc $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}[\alpha]$

De plus comme $(1, \alpha, \cdots, \alpha^{d\text{ ᛉ ᚢ}})$ est une base de $\mathbb{K}[\alpha]$ qui comporte d élément

Ainsi $\mathbb{K}[\alpha]$ est une extensions finie de $\mathbb{K}$, avec $[\mathbb{K}[\alpha] : \mathbb{K}]$ ᛟ d

d.

Il est évidant que $\mathbb{Q}(\sqrt[\text{ᚠ}]{\text{ᚦ}})$ ᚽ $\mathbb{C}$, et commme $\mathbb{Q}$ est un sous groupe et que $\sqrt[\text{ᚠ}]{\text{ᚦ}}$ ᛊ $\mathbb{C}$,

alors par les questions précédente:

$\mathbb{Q}(\sqrt[\text{ᚠ}]{\text{ᚦ}})$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$

N=° ᚺ.

i) $\Rightarrow$ ii) est évidant car $\mathbb{K}[\alpha]$ est un corps et donc stable par ᛞ

ii) $\Rightarrow$ iii) Supposons que $\alpha^{-1} \subset \mathbb{K}[\alpha]$, alors
$\exists P \subset \mathbb{K}[X], P(\alpha) = \alpha^{-1}$, soit P un telle polynôme, alors:

$$\begin{aligned} P(\alpha) = \alpha^{-1} &\Leftrightarrow \alpha\ P(\alpha) = \alpha\alpha^{-1} = 1 \\ &\Leftrightarrow \alpha\ P(\alpha) - \alpha = 0 \end{aligned}$$

Posons $R = X\ P(X) - 1 \in \mathbb{K}[X]$, ainsi $R(\alpha) = 0$
Et donc α est constructible
iii) $\Rightarrow$ i) Supposons que α est algébrique sur $\mathbb{K}$, alors par la question 7.
$\mathbb{K}[\alpha]$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$

Ainsi par un raisonnement cyclique,
on a bien que $\mathbb{K}[\alpha]$ est un sous-corps de $\mathbb{L} \Leftrightarrow \alpha^{-1} \in \mathbb{K}[\alpha] \Leftrightarrow \alpha$ est algébrique sur $\mathbb{K}$

Partie III. Polynômes minimal d'un élément algébrique

N=° 9.

Si I_α na possède pas une polynôme de degré q,
alors soit $P \in I_\alpha$ de degré q, alors soit a sont coefficient dominant
alors le polynome $\frac{P}{a}$ est de degrés q et sont coefficient dominant vaut 1
De plus $\frac{P}{a}(\alpha) = \frac{P(\alpha)}{a} = \frac{0}{a} = 0$ Donc $\frac{P}{a} \in I_\alpha$
Donc I_α possède un polynôme unitaire de degrés q

Soient $P, Q \in I_\alpha$ deux polynômes unitaire de degrés q
Alors $\exists a_0, \cdots, a_{q-1}, b_0, \cdots, b_{q-1} \in \mathbb{K}, P = X^q + \sum_{k=0}^{q-1} a_k X^k$ et $Q = X^q + \sum_{k=0}^{q-1} b_k X^k$
Alors $P(\alpha) - Q(\alpha) = \sum_{k=0}^{q-1} a_k \alpha^k - \sum_{k=0}^{q-1} b_k \alpha^k = 0$
donc $\sum_{k=0}^{q-1} (a_k - b_k)\alpha^k$, et comme $\left(1, \alpha, \cdots, \alpha^{q-1}\right)$ est libre, on a: $\forall k \in [\![0 ; q-1]\!], a_k = b_k$
Ainsi on a bien $P = Q$
Donc il existe un unique polynome unitaire de degré q dans I_α

N=° 11.

Supposons par l'absurde que μ_α est réductible,
alors $\exists P, Q \in \mathbb{K}[X], \mu_\alpha = P\ Q$, soient de tels polynômes
Ainsi $\mu_\alpha(\alpha) = P(\alpha)\ Q(\alpha) = 0$ donc $P(\alpha) = 0$ ou $Q(\alpha) = 0$,
donc α est algébrique de degrés inférieur stricte à d, absurde !
Donc μ_α est irréductible

Soit $P \in I_\alpha$, alors $\exists Q \in \mathbb{K}[X], P = \mu_\alpha\ Q$ car $P(\alpha) = 0$, ainsi $I_\alpha \subset \{\mu_\alpha\ P, P \in \mathbb{K}[X]\}$
Et soit $\exists Q \in \mathbb{K}[X], P = \mu_\alpha\ Q$, alors $P(\alpha) = (\mu_\alpha\ Q)(\alpha) = \mu_\alpha(\alpha)\ Q(\alpha) = 0$,
donc $P \in I_\alpha$ et donc $\{\mu_\alpha\ Q, Q \in \mathbb{K}[X]\} \subset I_\alpha$
Ainsi par double inclusion $\{\mu_\alpha\ Q, Q \in \mathbb{K}[X]\} = I_\alpha$

N=° ᛇ.

étant donner que μ_α est le plus petit polynômes telle que $\mu_\alpha(\alpha)$ ᛝ ᚠ
alors $(1, \alpha, \cdots, \alpha^q)$ est la plus petite famille liée, donc le degrés de alpha vaut q est d, si bien que:
deg μ_α ᛝ d

N=° ᚢᚠ.

il est évidant que le polynôme minimal est X^ᚨ ᛉ ᚦ

N=° ᚢᚢ.

Posons ᛗ ᛝ 日 X^ᚱ ↑ ツ X^ᚨ ↑ ᛣ X^ᚦ ↑ ϑ X ↑ ᚼ ᛕ $\mathbb{Q}[X]$, avec 日, ツ, ᛣ, ϑ, ᚼ non tous nul
Alors cherchons 日, ツ, ᛣ, ϑ, ᚼ tel que ᛗ(α) ᛝ ᚠ
Ainsi

ᛗ(α) ᛝ 日 (√ᚦ ↑ √ᚨ)^ᚱ ↑ ツ (√ᚦ ↑ √ᚨ)^ᚨ ↑ ᛣ (√ᚦ ↑ √ᚨ)^ᚦ ↑ ϑ (√ᚦ ↑ √ᚨ) ↑ ᚼ

ᛝ ᚱᚢ日 ↑ ᚢᚺ日 √ᚷ ↑ ᛇツ √ᚦ ↑ ᚾツ √ᚨ ↑ <ᛣ ↑ ᚦᛣ √ᚷ ↑ ϑ √ᚦ ↑ ϑ √ᚨ ↑ ᚼ

ᛝ (ᚢᚺ日 ↑ ᚦᛣ)√ᚷ ↑ (ᚾツ ↑ ϑ)√ᚨ ↑ (ᛇツ ↑ ϑ)√ᚦ ↑ ᚱᚢ日 ↑ <ᛣ ↑ ᚼ ᛝ ᚠ

Alors comme (1, √ᚦ, √ᚨ, √ᚷ) est libre, on obtient:

ᚢᚺ日 ↑ ᚦᛣ ᛝ ᚠ ᚾツ ↑ ϑ ᛝ ᚠ ᛇツ ↑ ϑ ᛝ ᚠ ᚱᚢ日 ↑ <ᛣ ↑ ᚼ ᛝ ᚠ	⇔	ツ ᛝ ᚠ ϑ ᛝ ᚠ ᛣ ᛝ ᛉ ᛜ日 ᚱᚢ日 ↑ <ᛣ ↑ ᚼ ᛝ ᚠ	⇔	ツ ᛝ ᚠ ϑ ᛝ ᚠ ᛣ ᛝ ᛉ ᛜ日 日 ᛝ ᚼ

Ainsi ᛗ ᛝ ᚼ X^ᚱ ᛉ ᛜᚼ X^ᚦ ↑ ᚼ, ainsi on prouve que α est algébrique
et que ᛗ est le polynôme minimal de α sur $\mathbb{Q}$ car sinon on aurais 日 ᛝ ᚠ

Partie IV. Nombres algébriques (sur $\mathbb{Q}$)

N=° ᚢᚦ. a.

il est évidant que $\mathbb{Q}[\alpha, \beta]$ est stable par ↑ et ᛞ
et deplus, soit ϑ, ᚼ, ᛣ ᛕ $\mathbb{Q}[\alpha, \beta]$ alors ᛒ 日, ツ, 丰, 日′, ツ′, 丰′, 日′, ツ′, 丰′ ᛕ $\mathbb{Q}$, ϑ ᛝ 日 ↑ ツ α ↑ 丰 β
et ᚼ ᛝ 日′ ↑ ツ′α ↑ 丰′β et ᛣ ᛝ 日′ ↑ ツ′α ↑ 丰′β
alors

(ᚼ ↑ ϑ)ᛣ ᛝ (日 ↑ ツ α ↑ 丰 β ↑ 日′ ↑ ツ′α ↑ 丰′β)(日″ ↑ ツ″α ↑ 丰″β)

ᛝ (日 ↑ ツ α ↑ 丰 β)(日″ ↑ ツ″α ↑ 丰″β) ↑ (日′ ↑ ツ′α ↑ 丰′β)(日″ ↑ ツ″α ↑ 丰″β)

ᛝ ᚼ ᛣ ↑ ϑ ᛣ

De même ᛣ(ϑ ↑ ᚼ) ᛝ ᛣ ϑ ↑ ᛣ ᚼ
De plus par la question ᚹ $\mathbb{Q}[\alpha, \beta]$ est une extention finie de $\mathbb{Q}[\alpha]$
Or $\mathbb{Q}[\alpha]$ est une extensions finis de $\mathbb{Q}$
Donc $\mathbb{Q}[\alpha, \beta]$ est un corps et est une extention finie de $\mathbb{Q}$

b.

Pourvons d'abord que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$,

Pour cela cherchons $a, b \in \mathbb{Q}, a + b\ \sqrt{2} = \sqrt{3}$, alors:

$$a^2 + 2b^2 + 2a\ b\ \sqrt{2} = 3$$

$$\text{Donc} \begin{cases} 2a\ b\ \sqrt{2} = 0 \\ a^2 + 2b^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ ou } b = 0 \\ a^2 + 2b^2 = 3 \end{cases}$$

Il est évidant que $b \neq 0$ car $b \in \mathbb{Q}$ et $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ donc $a = 0$

Ainsi $2b^2 = 3 \Leftrightarrow b = \sqrt{\frac{3}{2}} \notin \mathbb{Q}$ absurde, donc $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$

Et donc comme $\mathbb{Q}$ est un sous corps de $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ et que $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ est un sous corps de $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}, \sqrt{3}\right]$,

et comme $\left(1, \sqrt{2}\right)$ est une base du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$

et que $\left(1, \sqrt{3}\right)$ est une base du $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$-espace vectoriel $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}, \sqrt{3}\right]$

Ainsi par la question 2. $\left(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\right)$ est une base du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}, \sqrt{3}\right]$

Et donc $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}, \sqrt{3}\right] = \left\{a + b\ \sqrt{2} + c\ \sqrt{3} + d\ \sqrt{6}, a, b, c, d \in \mathbb{Q}\right\}$

N=° 13.

Soit $a, b \in \overline{\mathbb{Q}}$. Alors $\mathbb{Q}[a, b]$ est un corps,

et en particulier une extension finie de $\mathbb{Q}$.

Donc la somme,l'inverse et le produits sont stables dans $\mathbb{Q}[a, b]$,

et donc par la question 6. $\overline{\mathbb{Q}}$ est un corps, et est donc un sous-corps de $\mathbb{C}$