Gaspar Daguet

Maths : DM 14

Problème : polynômes de Tchebychev et théorème de Block-Thielman

Partie I. Polynômes de Tchebychev (de première espèce)

N=°1.

$$T_2 = 2XT_1 - T_0 = 2X \times X - 1 = 2X^2 - 1$$

$$T_3 = 2XT_2 - T_1 = 2X(2X^2 - 1) - X = 4X^3 - 3X$$

$$T_4 = 2XT_3 - T_2 = 2X(4X^3 - 3X) - 2X^2 + 1 = 8X^4 - 8X^2 + 1$$

Ainsi on trouve que: $T_2 = 2X^2 - 1, T_3 = 4X^3 - 3X$ et $T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$

N=°2.

Prouvons par une récurrence double que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \deg T_n = n$

- **Initialisation:**

Pour $n = 1$, $\deg T_1 = \deg X = 1 = n$ et $2^{1-1} = 1$ qui est bien le coefficent dominant

Pour $n = 2$, $\deg T_2 = \deg 2X^2 - 1 = 2 = n$ et $2^{2-1} = 2$ qui est bien le coefficent dominant

Donc l'Iiitialisation est vérifié

- **Hérédité:**

$$\begin{aligned} \deg T_{n+2} = \deg(2XT_{n+1} - T_n) &= \max(\deg(2X) + \deg(T_{n+1}), \deg(T_n)) \\ &= \max(1 + n + 1, n) = n + 2 \end{aligned}$$

Donc l'hérédité est vérifié

Donc par le principe de récurrence double et comme $\deg T_0 = \deg 1 = 0$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \deg T_n = n$

Soit $n \in \mathbb{N}$

alors on a: $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ Or on vient de montrer que le degré de T_{n+1} est plus grand que celuis de T_n

donc seul T_{n+1} contribue au coefficent dominant.

Ainsi en répétant cette opération, il vient que

$$T_{n+2} = \underbrace{2X(2X(2X(2X(\cdots(2X(X(1)))))))}_{n \text{ fois}} = 2^{n-1}X^n$$

Donc le coefficent dominant est 2^{n-1}

N=°3.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\cos((n+2)\theta) &= \cos((n+1)\theta + \theta)\\ &= \cos((n+1)\theta)\cos(\theta) - \sin((n+1)\theta)\sin(\theta)\end{aligned}$$

donc $\cos((n+1)\theta)\cos(\theta) - \cos((n+2)\theta) = \sin((n+1)\theta)\sin(\theta)$

et

$$\begin{aligned}\cos(n\theta) &= \cos((n+1)\theta - \theta)\\ &= \cos((n+1)\theta)\cos(\theta) + \sin((n+1)\theta)\sin(\theta)\end{aligned}$$

donc $\cos(n\theta) - \cos((n+1)\theta)\cos(\theta) = \sin((n+1)\theta)\sin(\theta)$

Ainsi $\cos((n+1)\theta)\cos(\theta) - \cos((n+2)\theta) = \cos(n\theta) - \cos((n+1)\theta)\cos(\theta)$

donc $\cos((n+2)\theta) = 2\cos((n+1)\theta)\cos(\theta) - \cos(n\theta)$

Prouvons par récurrence double que $\forall n \in \mathbb{N}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$

- **Initialisation:**

Pour $n = 0$, $T_0(\cos(\theta)) = 1 = \cos(0\theta)$

Pour $n = 1$, $T_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta) = \cos(\theta)(1 \times \theta)$ Donc l'Iitialisation est vérifié

- **Hérédité:**

$$\begin{aligned}T_{n+2}(\cos(\theta)) &= 2\cos(\theta)T_{n+1}(\cos(\theta)) - T_n(\cos(\theta))\\ &= 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) \quad = \cos((n+2)\theta)\end{aligned}$$

Donc l'hérédité est vérifié

Donc par le principe de récurrence double $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$

Ainsi Soit $\theta \in \mathbb{R}$

$$\cos(4\theta) = T_4(\cos(\theta)) = 8\cos^4(\theta) - 8\cos^2(\theta) + 1$$

N=°4.

On a, pour $\theta \in \mathbb{R}$

$$(T_n \circ T_m)(\cos(\theta)) = T_n(\cos(m\theta)) = \cos(nm\theta) = T_{mn}(\cos(\theta))$$

Or $\cos(\theta)$ est dans $[-1; 1]$

donc le polynôme $T_n \circ T_m - T_{mn}$ s'annule une infinité de fois sur $[-1; 1]$

donc $T_n \circ T_m - T_{mn} = 0$

Donc $T_n \circ T_m = T_{mn}$

Partie II. Le théorème de Block et Thielman

N=°5.

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$

Alors

$$X^n \circ X^m = (X^m)^n = X^{mn} = (X^n)^m = X^m \circ X^n$$

et

$$T_n \circ T_m = T_{nm} = T_{mn} = T_m \circ T_n$$

De plus

$$\deg X^n = n$$

et on a déjà montré que $\deg T_n = n$

Ainsi $(X^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont comutante

N=°6. a.

Soit $P \in \mathcal{C}_p$ et Soient $a, p \in \mathbb{R}$, le coefficent dominant de P

Alors P doit vérifier: $P \circ (X^2 + p) = (X^2 + 1) \circ P$

Or le coefficent dominant de $P \circ (X^2 + p)$ est a

et celuis de $(X^2 + 1) \circ P$ est a^2

Donc $a^2 = a \Leftrightarrow a = 1$ ou $a = 0$

Or si $a = 0$ alors a n'est pas le coefficent dominant de P,

ce qui est impossible par définition de a

Donc $a = 1$

b.

Supposons par l'absurde que $P_1 \neq P_2$

Tout d'abord on a,

$$P_1 \circ (X^2 + p) - P_2(X^2 + p) = (P_1 - P_2) \circ (X^2 + p)$$

De plus

$$\begin{aligned} P_1 \circ (X^2 + p) - P_2(X^2 + p) &= (X^2 + p) \circ P_1 - (X^2 + p) \circ P_2 \\ &= P_1^2 + p - P_2^2 - p = P_1^2 - P_2^2 \end{aligned}$$

Ainsi $(P_1 - P_2) \circ (X^2 + p) = P_1^2 - P_2^2$

Sauf que P_1 et P_2 sont tout deux unitaire par la question précédente

et de même degrés donc $\deg(P_1 - P_2) = 6 \in [\![1; n-1]\!]$

Ainsi:

$$\deg((P_1 - P_2) \circ (X^2 + p)) = \deg(P_1^2 - P_2^2) = \deg((P_1 + P_2)(P_1 - P_2))$$

Donc:

$$26 = n + 6$$

Donc:

$$6 = n$$

Ce qui est absurde, donc $P_1 = P_2$

c.

Si $\mathcal{C}_p$ contient un polynôme de degré 3, alors soit $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ un telle polynôme. Alors

$$\begin{aligned} P \circ (X^2 + p) &= (X^2 + p)^3 + a(X^2 + p)^2 + b(X^2 + p) + c \\ &= X^6 \end{aligned}$$