Gaspar Daguet

# Maths : DM ᚢᚷ

Il est important avant de commencer lire ce DM
d’avoir bien compris le tableau et les exemples suivants

| symbole usuel | symbole du DM | prononciation |
|---|---|---|
| 0 | ᚠ | fé |
| 1 | ᚢ | ur |
| 2 | ᚦ | tur |
| 3 | ᚨ | an |
| 4 | ᚱ | rai |
| 5 | ᚲ | kau |
| 6 | ᚷ | gèb |
| 7 | ᚹ | wun |
| 8 | ᚺ | hag |
| 9 | ᚾ | nau |
| 10 | ᛃ | je |
| 11 | ᛇ | ei |
| $=$ | ᛝ | ing/i ng |
| $+$ | ᛏ | ti |
| $-$ | ᛉ | al |
| $\times$ | ᛞ | dag |
| $\div$ | ᛚ | lag |
| $\in$ | ᛊ | so |
| $\forall$ | ᛈ | per |
| $\exists$ | ᛒ | ber |
| $\exists!$ | !ᛒ | \ |
| $>$ | ᛗ | man |
| $<$ | ᛖ | e |
| $\geq$ | ᛗᛝ | maning |
| $\leq$ | ᛖᛝ | ehwing |
| $\neq$ | ᛜ | naing |
| $\subset$ | ᚭ | suz |
| $\supset$ | ᚭ | zus |

ᚷᚹ ᛏ ᚲᚲ ᛝ ᚢᚠᚠ ce qui est équivalant à $79 + 65 = 144$

$$e^{\text{ց}} \underset{\text{ց}\to\text{ᚠ}}{\text{ᛝ}} \text{ᚢ} \uparrow \text{ց} \uparrow \frac{\text{ց}^{\text{ᚦ}}}{\text{ᚦ}!} \uparrow \cdots \uparrow \frac{\text{ց}^{\text{𐌇}}}{\text{𐌇}!} \uparrow o\left(\text{ց}^{\text{𐌇}}\right)$$

est équivalant à

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{x!} + o(x^n)$$

# Problème ᚦ : nombres algébrique et extensions de corps

## Partie I. extensions de corps

**N=° ᚢ. Premiers exemples a.**

il est évident que $\mathbb{R}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ et de plus $\mathbb{C}$ est de dimension finis, donc $\mathbb{C}$ est une extention finie de $\mathbb{R}$

de plus soit ᛯ ᛊ $\mathbb{C}$ alors

$$ᛕ\, ᛄ, ᚺ ᛊ \mathbb{R}, ᛯ ᛝ ᛄ ᛏ i\, ᚺ \Leftrightarrow ᛯ ᛊ \mathrm{Vect}(ᚢ, i)$$

Ainsi comme ᚢ et $i$ ne sont pas colinéaire dans $\mathbb{R}$, $\mathrm{Vect}(ᚢ, i)$ forme une base de $\mathbb{C}$
Ainsi $[\mathbb{C} : \mathbb{R}]$ ᛝ ᚦ

soit ᛥ un sous-corps qui contient $\mathbb{R}$
comme $[\mathbb{R} : \mathbb{R}]$ ᛝ ᚢ et que l'on vient de prouver que $[\mathbb{C} : \mathbb{R}]$ ᛝ ᚦ
il apparait donc comme condition que, ᚢ ᛖᛝ [ᛥ : $\mathbb{R}$] ᛖᛝ ᚦ
Ainsi [ᛥ : $\mathbb{R}$] ᛝ ᚢ ou [ᛥ : $\mathbb{R}$] ᛝ ᚦ
Et ansi ᛥ ᛝ $\mathbb{R}$ ou ᛥ ᛝ $\mathbb{C}$

**b.**

Soit ᛄ ᛊ $\mathbb{Q}(\sqrt{ᚦ})$, alors ᛒ ᚺ, ᛯ ᛊ $\mathbb{Q}$, ᛄ ᛝ ᚺ ᛏ ᛯ $\sqrt{ᚦ}$, alors prenons ᛯ ᛝ ᚠ
ainsi ᛄ ᛝ ᚺ ᛊ $\mathbb{Q}$, donc $\mathbb{Q}$ ᛔ $\mathbb{Q}(\sqrt{ᚦ})$ et comme $\mathbb{Q}$ est un corps
de $\mathbb{Q}(\sqrt{ᚦ})$
de plus, soit ᛄ ᛊ $\mathbb{Q}(\sqrt{ᚦ})$ alors ᛒ ᚺ, ᛯ ᛊ $\mathbb{Q}$, ᛄ ᛝ ᛒ ᛏ ᚺ $\sqrt{ᚦ}$, soit un telle ᛯ, ᚺ
donc ᛄ ᛝ ᛯ ᛏ ᚺ $\sqrt{ᚦ}$ ᛊ $\mathrm{Vect}(ᚢ, \sqrt{ᚦ})$
et supposons par l'absurde ᛒ ᛄ, ᚺ ᛊ $\mathbb{Q}$ ᛞ $\mathbb{Q}^*$, ᛄ ᛏ ᚺ $\sqrt{ᚦ}$ ᛝ ᚠ
alors $\frac{ᛄ}{ᚺ}$ ᛝ ᛉ $\sqrt{ᚦ}$ ce qui est absurde car $\frac{ᛄ}{ᚺ}$ ᛊ $\mathbb{Q}$, donc ᛄ ᛝ ᚺ ᛝ ᚠ
Ainsi $(ᚢ, \sqrt{ᚦ})$ est une base de $\mathbb{Q}(\sqrt{ᚦ})$
Donc $[\mathbb{Q}(\sqrt{ᚦ}) : \mathbb{Q}]$ ᛝ ᚦ

**c. i.**

Soit P ᛊ $\mathbb{Q}[X]$ tel que $P(\sqrt[ᚨ]{ᚦ})$ ᛝ ᚠ
prenons la divisions euclidienne de $X^{ᚨ}$ ᛉ ᚦ par P
ce qui nous donne $X^{ᚨ}$ ᛉ ᚦ ᛝ PQ ᛏ $R$ avec Q ᛊ $\mathbb{Q}_{ᚢ}[X]$ et R ᛊ $\mathbb{Q}[X]$ tel que deg R ᛖ ᚦ
En évaluant notre expression précédente en $\sqrt[ᚨ]{ᚦ}$ on obtient :

$$\left(\sqrt[ᚨ]{ᚦ}\right)^{ᚨ} ᛉ ᚦ ᛝ ᚠ ᛝ \underbrace{\mathrm{P}\left(\sqrt[ᚨ]{ᚦ}\right)}_{ᛝ ᚠ} ᛏ \mathrm{R}$$

donc R ᛝ ᚠ et donc deg R ᛝ ᚠ
ainsi P divise X$^{ᚨ}$ ᛉ ᚦ

Ainsi Comme P divise $X^{ᚨ}$ ᛉ ᚦ et que deg P ᛝ ᚦ,
alors P et $X^{ᚨ}$ ᛉ ᚦ possède deux racines en commun dont $\sqrt[ᚨ]{ᚦ}$
et comme $X^{ᚨ}$ ᛉ ᚦ ᛝ $\left(X ᛉ \sqrt[ᚨ]{ᚦ}\right)\left(X ᛉ \sqrt[ᚨ]{ᚦ} e^{i\frac{\pi}{ᚨ}}\right)\left(X ᛉ \sqrt[ᚨ]{ᚦ} e^{i\frac{ᚦ\pi}{ᚨ}}\right)$ donc P à en plus une racine complexe
or un polynôme dans $\mathbb{R}$ qui possède une racine complexe possède sont conjugée

ce qui n'est pas le cas pour P donc P$\notin \mathbb{Q}[X]$ ce qui est absurde

Donc $\nexists P \in \mathbb{Q}[X], P\left(\sqrt[3]{2}\right) = 0$

**i.**

Par un résonnement annaloge à la question 1 .b on montre que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)$,

De plus soit $x \in \mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)$ alors soient $a, b, c \in \mathbb{Q}, x = a + b\sqrt[3]{2} + c\left(\sqrt[3]{2}\right)^2$

donc $x \in \mathrm{Vect}\left(1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}^2\right)$

donc $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)$ est une extensions finis et $\left[Q\left(\sqrt[3]{2}\right) : \mathbb{Q}\right] = 3$

**d.**

Soient $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{Q}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} a_i \ln(p_i) = 0$,

alors

$$\ln\left(\prod_{i=1}^{n} p_i^{a_i}\right) = 0 \text{ Donc } \prod_{i=1}^{n} p_i^{a_i} = 1$$

Or comme $\forall i \in [\![1; n]\!], a_i \in \mathbb{Q}$ donc $\exists q, b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{N}, \forall i \in [\![1; n]\!], a_i = \frac{b_i}{q}$. Ainsi

$$\left(\prod_{i=1}^{n} p_i^{b_i}\right)^{\frac{1}{q}} = 1 \Leftrightarrow \prod_{i=1}^{n} p_i^{b_i} = 1$$

Or comme $\forall i \in [\![1; n]\!], p_i^{b_i} \in \mathbb{N}$ Donc $p_1^{b_1} = \cdots = p_n^{b_n} = 1$ Donc $b_1 = \cdots = b_n = 0$

Et donc $a_1 = \cdots = a_n = 0$

Ainsi $(\ln(p_1), \cdots, \ln(p_n))$ est libre

Et donc la dimmension de $\mathbb{R}$ n'est pas finis, donc $\mathbb{R}$ n'est pas une extention finis de $\mathbb{Q}$

**N°2.**

soit $x \in \mathbf{L}$, alors $\exists! e_1, \cdots, e_n \in \mathbf{K}$ tel que, $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$

Or on a $\forall i \in [\![1, n]\!], \exists! f_1, \cdots, f_p \in k, e_i = \sum_{j=1}^{p} \beta_j f_j$

Ainsi $\exists! e_1, \cdots, e_n \in \mathbf{K} \in k, \exists! f_1, \cdots, f_p \in k, x = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \alpha_i \beta_j e_i f_j$

Donc $x$ s'écrit d'une manière unique comme des élément de $k$,

donc la famille $(\alpha_i \beta_j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une base de du $k$-espace vectoriel $\mathbf{L}$

De plus la famille $(\alpha_i \beta_j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ comporte exactement $np$ éléments

Donc $[\mathbf{L} : k] = [\mathbf{L} : \mathbf{K}][\mathbf{K} : k]$

## Partie II. Éléments algébriques

**N°1.**

pour montrer que $\mathbb{K}[\alpha] = \{P(\alpha), P \in \mathbb{K}[X]\}$,

on montre que $\{P(\alpha), P \in \mathbb{K}[X]\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(\alpha^n, n \in \mathbb{N})$

pour cela,

$$x \in \{P(\alpha), P \in \mathbb{K}[X]\} \Leftrightarrow \exists\, \lambda_0, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K} \;\; x = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \alpha^k \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(\alpha^n, n \in \mathbb{N}) = \mathbb{K}[\alpha]$$

Donc $\{P(\alpha), P \in \mathbb{K}[X]\} = \mathbb{K}[\alpha]$

**N°2.**