Gaspar Daguet

Maths : DM 10

N=°1.

soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$v_p(x^n - y^n) = v_p\left((x-y)\sum_{k=0}^{n-1}(x^{n-1-k}y^k)\right) = v_p(x-y) + v_p\left(\sum_{k=0}^{n-1}(x^{n-1-k}y^k)\right)$$

Or par l'énoncé $p \mid x - y$ donc $x \equiv y[p]$

Ainsi $\sum_{k=0}^{n-1}(x^{n-1-k}x^k) \equiv \sum_{k=0}^{n-1}(x^{n-1-k}y^k) \equiv \sum_{k=0}^{n-1}(x^{n-1}) \equiv x^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}1 \equiv nx^{n-1}[p]$

Donc comme p premier à n et à x, il l'est aussi à x^{n-1} alors $p \nmid nx^{n-1}$

Ainsi: $v_p\left(\sum_{k=0}^{n-1}(x^{n-1-k}y^k)\right) = 0$

$$v_p(x^n - y^n) = v_p(x-y) + v_p\left(\sum_{k=0}^{n-1}(x^{n-1-k}y^k)\right) = v_p(x-y)$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \wedge p = 1 \Rightarrow v_p(x^n - y^n) = v_p(x-y)$

N=°2. a

On a 2 premier à x et à y, il sont donc tout les deux impair

Or la somme de deux impairs est pair donc $2 \mid x + y$

Supposons par l'absurde que $4 \mid x + y$

Donc comme $4 \mid x - y$ alors $4 \mid x + y + x - y = 2x$

Donc $2 \mid x$, absurde !

Donc $4 = 2^2 \nmid x + y$ et $2 = 2^1 \mid x + y$

Ainsi $v_p(x+y) = 1$

Donc:

$$v_2(x^2 - y^2) = v_2(x-y) + v_2(x+y) = v_p(x-y) + 1$$

b.

Soit la propriété $P(n) : v_2(x^n - y^n) = v_2(x-y) + v_2(n)$

On a, $v_2(x-y) = v_2(x-y) + v_p(1)$

Donc pour $n = 1$ la propriété est vérifié

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall k \in [\![1; n]\!], P(k)$

- Si $n+1$ est impair

  alors $n+1 \wedge 2 = 1$ et donc $v_2(n+1) = 0$ et par la question 1

$$v_2(x^{n+1} - y^{n+1}) = v_2(x-y) = v_2(x-y) + v_2(n+1)$$

- Si $n+1$ est pair alors, $\exists k \in \mathbb{N}^*, n+1 = 2k$

  Soit un tel k alors $v_2(x^n - y^n) = v_2\left(\left(x^k\right)^2 - \left(y^k\right)^2\right)$
  Donc par la question 2.a

$$v_2\left(\left(x^k\right)^2 - \left(y^k\right)^2\right) = v_2(x^k - y^k) + 1$$

  Or $k < n$, donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence, ainsi

$$v_2(x^k - y^k) + 1 = v_2(x-y) + v_2(k) + 1$$

  Or $v_2(2) = 1$, donc

$$\begin{aligned} v_2(x-y) + v_2(k) + 1 = v_2(x-y) + v_2(k) + v_2(2) = v_2(x-y) + v_2(2k) \\ = v_2(x-y) + v_2(n+1) \end{aligned}$$

  Ainsi dans les deux cas on a bien: $v_2(x^{n+1} - y^{n+1}) = v_2(x-y) + v_2(n+1)$
  Donc par le principe de récurrence forte $v_2(x^n - y^n) = v_2(x-y) + v_2(n)$

N=°3. a.

Soit $k \in [\![1; p-1]\!]$ et k impair

$$x^k = (y + (x-y))^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} y^i (x-y)^{k-i} = y^k + k(x-y)y^{k-1} + \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k}{i} y^i (x-y)^{k-i}$$

Or $0 \leq i \leq k-2 \Leftrightarrow k-i \geq 2$ et comme $p \mid x-y$, donc $(x-y)^{k-i} \equiv 0[p^2]$
Donc $\sum_{i=0}^{k-2} \binom{k}{i} y^i (x-y)^{k-i} \equiv 0[p^2]$
Ainsi

$$x^k \equiv y^k + k(x-y)y^{k-1} + \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k}{i} y^i (x-y)^{k-i} \equiv y^k + k(x-y)y^{k-1} [p^2]$$

On a donc bien $x^k \equiv y^k + k(x-y)y^{k-1} [p^2]$

b.

$$\sum_{k=0}^{p-1} x^k y^{p-1-k} = y^{p-1} + \sum_{k=1}^{p-1} x^k y^{p-1-k}$$

D'après la question précédente et comme $k \in [\![1; p-1]\!]$

$$y^{p-1} + \sum_{k=1}^{p-1} x^k y^{p-1-k} \equiv y^{p-1} + \sum_{k=1}^{p-1} y^{p-1} + \sum_{k=1}^{p-1} k(x-y)y^{p-2}$$

$$\equiv py^{p-1} + (x-y)y^{p-2}\frac{p(p-1)}{2} \equiv py^{p-1}[p^2]$$

Donc $\underline{\sum_{k=0}^{p-1} x^k y^{p-1-k} \equiv py^{p-1}[p^2] \equiv 0[p]}$

Ainsi $v_p\left(\sum_{k=0}^{p-1} x^k y^{p-1-k}\right) = 1$

Donc $\underline{v_p(x^p - y^p) = v_p(x-y) + v_p\left(\sum_{k=0}^{p-1} x^k y^{p-1-k}\right) = v_p(x-y) + 1}$

c.

Prouvons par récurrence forte que $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_p(x^n - y^n) = v_p(x-y) + v_p(n)$

pour $n = 1$, $v_p(x^1 - y^1) = v_p(x-y) + \underbrace{v_{p(1)}}_{=0}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall k \in [\![1; n]\!], v_p(x^k - y^k) = v_p(x-y) + v_p(\mathbb{K})$

- Si $p \nmid n+1$ alors $p \wedge n+1 = 1$

  Donc par la question 1:

$$v_p(x^p - y^p) = v_p(x-y) = v_p(x-y) + \underbrace{v_p(n+1)}_{=0}$$

- Si $p \mid n+1$ alors $\exists k \in \mathbb{N}, n+1 = kp$, ainsi

$$v_p(x^{n+1} - y^{n+1}) = v_p\left((x^k)^p - (y^k)^p\right)$$

Donc par la question précédente

$$v_p\left((x^k)^p - (y^k)^p\right) = v_p(x^k - y^k) + 1$$

Or $k < p$, donc par hypothèse de récurrence

$$v_p(x^k - y^k) + 1 = v_p(x-y) + v_p(k) + \underbrace{1}_{=v_p(p)} = v_p(x-y) + v_p(pk) = v_p(x-y) + v_p(n+1)$$

Ainsi dans les deux cas on a $v_p(x^{n+1} - y^{n+1}) = v_p(x-y) + v_p(n+1)$

Donc par le principe de récurence forte $v_p(x^n - y^n) = v_p(x-y) + v_p(n)$

N=°4.

- Si n est impaire, alors $\exists 6 \in \mathbb{N}, n = 26 + 1$ alors

$$2^n - 1 = 2^{26+1} - 1 = 2(2^2)^6 - 1$$

Or $2^2 \equiv 1[3]$ donc

$$2(2^2)^6 - 1 \equiv 2 - 1 \equiv 1[3]$$

Ainsi $3 \nmid 2^n - 1$ donc $\forall k \in \mathbb{N}^*, 3^k \nmid 2^n - 1$

- Si n est pair, alors $\exists 6 \in \mathbb{N}, n = 26$, donc on cherche n tel que $v_3(2^n - 1) \geq k$, alors

$$v_3(2^n - 1) = v_3(4^6 - 1)$$

Or $3 \mid 4 - 1$, donc par la question 3

$$v_3(4^6 - 1^6) = v_3(3) + v_3(6) = 1 + V_3(6) \geq k$$

donc $v_3(6) \geq k - 1$
Ainsi $3^k \mid 2^n - 1 \Leftrightarrow 2 \times 3^{k-1} \mid n$

Donc les n telles que $3^k \mid 2^n - 1$ sont les n divisible par $2 \times 3^{k-1}$