

DM n°5

Exercice 2 : Chauffage d'un gaz par effet Joule

N°1.

On a $R(T_0) = R_0 = \alpha T_0$

Donc $\alpha = \frac{R_0}{T_0}$

La loi donnée dans l'énoncé nous informe que $R \propto T$, Donc si T double, R double

N°2.

La transformation est isobare car le piston viendra équilibré le volume pour que la pression reste constante

N°3.

Par la loi des gaz parfaits, on a:

$$P_f V_f = R n T_f$$

N°4.

On a le travail électrique élémentaire qui vaut:

$$\delta W_{el} = E i dt = \frac{E^2}{R(T)} dt$$

Or ce travail va se transformer en chaleur par effet Joule pour le gaz donc on a: $\delta Q = \delta W_{el}$

De plus comme la transformation est isobare et que C_{pm} est constant on a:

$$\begin{aligned} dH &= n C_{pm} dT + P dV \\ &= n (C_{pm} + R) dT \end{aligned}$$

Ainsi, comme la transformation est isobare,

on peut appliquer le premier principe de la thermodynamie, ce qui nous donne

$$dH = \delta Q$$

$$\text{Donc } n(C_{pm} + R) dT = \frac{E^2}{R(T)} dt$$

$$\text{Donc } \frac{dT}{dt} = \frac{E^2}{n(C_{pm} + R)R(T)} = \frac{E^2}{n(C_{pm} + R)\alpha T}$$

$$\text{Donc } 2T \frac{dT}{dt} = \frac{dT^2}{dt} = \frac{2E^2}{n(C_{pm} + R)\alpha}$$

$$\text{Donc } T^2 = \frac{2E^2}{n(C_{pm} + R)\alpha} (t_f - t_i) + C_1 = \frac{2E^2 T_0}{n(C_{pm} + R)R_0} (t_f - t_i) + C_1$$

$$\text{Donc } T(t) = \sqrt{\frac{2T_0 E^2}{n(C_{pm} + R)R_0} (t_f - t_i) + C_1}$$

Donc en prenant $t_i = 0$ à l'instant où on commence à faire chauffer le système

$$\text{On obtient: } T(t) = \sqrt{\frac{2T_0 E^2}{n(C_{pm} + R)R_0} t + C_1}$$

$$\text{Or } T(0) = T_0$$

$$\text{donc } T_0 = \sqrt{C_1}$$

$$\text{donc } T_0^2 = C_1$$

$$\text{Ainsi } T(t) = T_0 \sqrt{\frac{2E^2}{n(C_{pm} + R)R_0 T_0} t + 1}$$

N°5.

$$\text{On a que: } T_f = T(\tau) = T_0 \sqrt{\frac{2E^2}{n(C_{pm} + R)R_0 T_0} \tau + 1}$$

Exercice 3 : Circuit RLC parallèle

N°1.

Si on applique un pont diviseur de tension pour trouver u_s , on trouve:

$$\frac{U_{sm}}{E_m} = \frac{E_m \frac{Z_{\acute{e}q}}{Z_{\acute{e}q} + R_0}}{E_m} = \frac{1}{1 + \frac{R_0}{Z_{\acute{e}q}}}$$

avec

$$Z_{\acute{e}q} = \frac{1}{\frac{1}{R_0} + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})}$$

Soit encore:

$$\underline{U}_{sm} = \frac{\frac{1}{2}E_m}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{CL}}$ et $Q = \frac{R_0}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$

Ainsi:

$$U_{sm} = |\underline{U}_{sm}| = \frac{\frac{1}{2}E_m}{\left|1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right|} = \frac{\frac{1}{2}E_m}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

et

$$\begin{aligned}\phi = \arg(\underline{U}_{sm}) &= \arg\left(\frac{\frac{1}{2}E_m}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}\right) = \underbrace{\arg\left(\frac{1}{2}E_m\right)}_{=0} - \arg\left(1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right) \\ &= -\arctan\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)\end{aligned}$$

N°2.

il est clair que U_{sm} est maximale quand $\omega = \omega_0$

Donc $f_r = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{CL}}$

AN: $f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2,53 \cdot 10^{-6} \times 10 \cdot 10^{-3}}} = 1000.6 \text{ Hz}$

N°3.

Comme $\frac{\pi}{4} > 0$ alors u_s est en avance

On cherche ω_c tel que $\frac{\frac{1}{2}E_m}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{U_{sm, \max}}{\sqrt{2}} = \frac{E_m}{2\sqrt{2}}$

Donc $\left(\frac{\omega_c}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_c}\right)^2 = \frac{1}{Q^2}$

Donc $\omega_c^2 - \frac{\omega_0}{Q}\omega_c - \omega_0^2 = 0$ ou $\omega_0^2 - \frac{\omega_0}{Q}\omega_c - \omega_c^2 = 0$

Donc $\omega_{c,1} = \frac{\omega_0}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1}$ ou $\omega_{c,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1}$

Ainsi: $f_{c,1} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\omega_0}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1}\right)$ ou $f_{c,2} = \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{\omega_0}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1}\right)$

Deplus on a:

$$\frac{\pi}{4} = \Delta\varphi_{u_s, e} = \arg(U_{sm}) - \underbrace{\arg(e)}_{=0} = \phi = \arctan\left(Q\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)\right)$$

$$\text{Donc } Q\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right) = 1$$

$$\text{Donc } \frac{R_0}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = Q = \frac{1}{\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{\frac{\omega_0}{2\pi f_{cl}} - \frac{2\pi f_{cl}}{\omega_0}}$$

$$\text{Ainsi } R_0 = \frac{2}{\frac{\omega_0}{2\pi f_{cl}} - \frac{2\pi f_{cl}}{\omega_0}} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

AN:

$$R_0 = 592.2\Omega$$

et

$$Q = 4.7$$

N°4.

Ajouter un condensateur reviens à l'étude du système ci-dessus avec un condensateur de capacité $C + C'$

$$\text{Donc on a } f'_r = \frac{1}{2\pi} \omega_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{(C'+C)L}} \text{ Donc } C' = \frac{1}{4\pi^2 L f_r'^2} - C$$

$$\text{AN: } C' = 1.43\mu F$$