Gaspar Daguet

Maths : DM 10

Partie I. Le théorème de Cesàro

0. a.

Par la définition de limite:

$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

b.

Soient $n_0, n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq n_0$ alors

$$|\sigma_n| = \left|\frac{\sum_{k=1}^{n} u_k}{n}\right| = \left|\frac{\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k}{n} + \frac{\sum_{k=n_0}^{n} u_k}{n}\right| \leq \left|\frac{\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k}{n}\right| + \left|\frac{\sum_{k=n_0}^{n} u_k}{n}\right| \leq \frac{\sum_{k=1}^{n_0-1} |u_k|}{n} + \frac{\sum_{k=n_0}^{n} |u_k|}{n}$$

Ainsi on a bien:

$\forall n \geq n_0, |\sigma_n| \leq \frac{|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_{n_0-1}|}{n} + \frac{|u_{n_0}| + \ldots + |u_n|}{n}$

c.

Comme $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k$ est une somme finis alors:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1} |u_k| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc par la définition de limite:

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_1, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1} |u_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

De plus:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n} |u_k| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{n - n_0 + 1}{2}\varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Poson $N = \max(n_1, n_0)$ alors :

$$\forall n \geq N, |\sigma_n| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1}|u_k| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n}|u_k| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

Donc $\sigma_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

1.

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ et σ_n la suite des moyennes de Césàro associée à (u_n) alors :
la suite $(u_n - l)$ tend vers 0
Donc selon le résulta précédent: $\sigma_n - l \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
Donc : $\sigma_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$

2.

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n$
Cette suite n'admet pas de limite
Or la suite des moyennes de Césàro associé à (u_n):

$$\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k = \frac{(-1)^n - 1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc σ_n converge vers 0
Ce qui contredit la réciproque

3.

Soit $A \in \mathbb{R}$ alors:
$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \geq 2A$ alors
Soit un tel n_0 et
Soit (σ_n) la suite des moyennes de Césàro de (u_n), alors pour $n \geq n_0$:

$$\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1}(u_k) + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n}(u_k) \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1}(u_k) + 2A\frac{n - n_0 + 1}{n}$$

Comme $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1}(u_k)$ tend vers 0 (cf: première question) alors à partir qu'un certain rang n_1:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1}(u_k) \geq -\frac{A}{5}$$

Et $2\frac{n-n_0+1}{n}$ tend vers 2 donc à partir d'un certain rang n_2: $2\frac{n-n_0+1}{n} \geq \frac{9}{5}$
Poson $N = \max(n_0, n_1, n_2)$

Alors pour tout $n \geq N$:

$$\sigma_n \geq -\frac{A}{5} + \frac{9}{5}A \geq \frac{8}{5}A \geq A$$

Donc σ_n diverge vers $+\infty$

4.

Supposons que (σ_n) converge vers l et

Supposons par l'absurde que (u_n) est divergante

Donc puisque u_n est croissante alors $u_n \longrightarrow +\infty$

Ainsi par la question 4, $\sigma_n \longrightarrow +\infty$ ce qui est absurde puisque σ_n converge

Ainsi u_n converge

Partie II. Quelques appliquations

5. Le lemme de l'escalier

Soit $n \in \mathbb{N}$

Poson $\forall n \geq 2, v_n = a_n - a_{n-1}$

Selons le lemme de Césàro on a:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$$

Or $\frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} v_k = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} a_k - a_{k-1} = \frac{a_n - a_1}{n}$ Or $-\frac{a_1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc il existe un rang n_0 tel que:

$$\forall n \geq n_0, \left|\frac{a_n}{n} - \frac{a_1}{n} - a\right| \leq \left|\frac{a_n}{n} - a\right| + \left|\frac{a_1}{n}\right| \leq \left|\frac{a_n}{n} - a\right| + |a_1| \leq 2|a_1| + |a|$$

ce qui est équivalant à: $\forall n \geq n_0, \left|\frac{a_n}{n} - a\right| < |a_1| + |a|$

Poson alors $\varepsilon = |a_1| + |a| > 0$

Donc $\forall n \geq n_0, \left|\frac{a_n}{n} - a\right| < \varepsilon$

Autrement dit $\frac{a_n}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$

6. a.

Prouvons tout d'abord que u_n converge

Comme $1 + u_n^2 > 0$ et $u_1 > 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$

Donc la suite est strictement positve et minorée par 0

Et on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{1+u_n^2} - u_n = -\frac{u_n^3}{1+u_n^2}$$

Or comme $u_n > 0$ et $1 + u_n^2 > 0$ alors $-\frac{u_n^3}{1+u_n^2} < 0$

Donc la suite est décroisante

Ainsi comme la suite est minorée et décroisante alors par le théorème de la limite monotone, (u_n) converges vers l

Par passage à la limite et par unicité de la limite dans la définition

$l = \frac{l}{1+l^2}$

donc $1 + l^2 = 1$

donc $l^2 = 0$

donc $l = 0$

Ainsi $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$

b.

v_n est bien définis car $u_n > 0$

$$v_n + 1 - v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{\left(1+u_n^2\right)^2}{u_n^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1 + 2u_n^2 + u_n^4 - 1}{u_n^2} = 2 + \underbrace{u_n^2}_{\to 0} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 2$$

Ainsi $\lim_{n \to +\infty} (v_{n+1} - v_n) = 2$

c.

Par le lemme de l'escalier, on a: $\frac{v_n}{n} = \frac{1}{nu_n^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 2$

Donc $\frac{1}{2nu_n^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$

Donc $2nu_n^2 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$

Donc $u_n\sqrt{2n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 2$

Exercice 2 : calcul des puissances d'une matrice 3×3

0. a.

Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Ainsi le systeme se réécrit:

$$\begin{cases} 3a + b - c = a \\ -a + b + c = b \\ a = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -b \\ b = b \\ a = -b \end{cases}$$

Ainsi l'ensemble des solution du système est: $\left\{ \begin{pmatrix} -b \\ b \\ -b \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R} \right\}$

Donc la matrice C_1 vaut: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b.

Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}$ et soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Ainsi le systeme se réécrit:

$$\begin{cases} 3a + b - c = 2a \\ -a + b + c = 2b \\ a = 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2b \\ b = b \\ a = -b \end{cases}$$

Ainsi l'ensemble des solution du système est: $\left\{ \begin{pmatrix} -2b \\ b \\ -b \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R} \right\}$

Donc la matrice C_3 vaut: $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c.

Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}$ et soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Ainsi le systeme se réécrit:

$$\begin{cases} 3a + b - c = \lambda a \\ -a + b + c = \lambda b \\ a = \lambda c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\lambda c + b - c = \lambda^2 c \\ -\lambda c + b + c = \lambda b \\ a = \lambda c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c(-\lambda^2 + 3\lambda - 2) = 0 \\ b = -c \\ a = \lambda c \end{cases}$$

la première ligne force $c = 0$ car les racines du polynome $-x^2 + 3x - 2$ sont 2 et 1

or λ est différent de 2 et de 1

Donc la seul solution du système est $X = 0$

Donc il n'y a pas de solution au système non nul

d.

Soit $C_2 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Ainsi le systeme se réécrit:

$$\begin{cases} 3a + b - c = 1 + a \\ -a + b + c = -1 + b \\ a = 1 + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1 - b \\ b = b \\ a = -b \end{cases}$$

Ainsi l'ensemble des solution du système est: $\left\{ \begin{pmatrix} -b \\ b \\ -1-b \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R} \right\}$

Donc la matrice C_2 vaut: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

1.

On a donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a.

$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est une telle matrice

En effet:

$$AP = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = PT$$

b.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3}}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Donc P est inversible car tous les coefficients diagonaux sont non nul, alors:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3}}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Ainsi $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Deplus, on a $A = PTP^{-1}$

c.

On cherche à monter par récurance simple que $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

- **Initialisation:**

  Pour n = 0:

$$T^0 = \mathrm{Id}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^0 \end{pmatrix}$$

  Donc l'initialisation est vérifiée

- **Hérédité:**

  Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$, alors:

$$T^{n+1} = T^n T = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

  Donc l'hérédité est vérifiée

Ainsi par la principe de récurance simple $\forall n \in \mathbb{N}; T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

2.

On va prouver par récurance simple la proposition suivante $P(n) : A^n = PT^nP^{-1}$

- **Initialisation:**

  $A^0 = \mathrm{Id}_3$ et $PT^0P^{-1} = PP^{-1} = \mathrm{Id}_3$

  Donc l'initialisation est vérifiée

- **Hérédité:**

  Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie

  On rappelle que $A = PTP^{-1}$ $\quad A^{n+1} = A^nA = PT^nP^{-1}PTP^{-1} = PT^nTP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1}$

  Donc l'hérédité est vérifiée

  Ainsi par principe de récurance $P(n)$ est vraie

  Donc on a:

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PT^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^{n+1}-2-n & -n \\ 1-2^n & 2-2^n+n & n \\ 2^n-1 & 2^n-n-1 & 1-n \end{pmatrix}$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^{n+1}-2-n & -n \\ 1-2^n & 2-2^n+n & n \\ 2^n-1 & 2^n-n-1 & 1-n \end{pmatrix}$