Gaspar Daguet

Maths : DM 18

Problème 1: formule de Taylor-Lagrange et méthode de Newton

Partie I. Formule de Taylor-Lagrange à l'odre 2.

N=°1. a.

On à bien ψ deux fois dérivable sur $]a; b[$ car f est $\mathscr{C}^2$
De plus

$$\psi'(t) = f'(t) - f'(c) - 2\lambda(t - c)$$

Et

$$\psi''(t) = f''(t) - 2\lambda$$

b.

On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]a, b[, \psi(x) = \psi(c)$
De plus $\psi(c) = f(c) - f(c) - (c - c)f'(c) - \lambda(c - c)^2 = 0$
Ainsi soit $x \in]a, b[$, alors

$$\begin{aligned}\psi(x) = \psi(c) &\Leftrightarrow f(x) - f(c) - (x - c)f'(c) - \lambda(x - c)^2 = 0\\ &\Leftrightarrow \lambda(x - c)^2 = f(x) - f(c) - (x - c)f'(c)\\ &\Leftrightarrow \underline{\lambda = \frac{f(x) - f(c) - (x - c)f'(c)}{(x - c)^2}}\end{aligned}$$

c.

Ainsi avec le bon λ on à $\psi(c) = \psi(x)$ et comme ψ est continue sur $[c; x]$
car somme est produit de fonction continue
Donc en utilisant un première fois le théorème de Rolle sur $[c; x]$
On a qu'il existe $c_x \in]c; x[, \psi'(c_x) = 0$
Et comme $\psi'(c) = f'(c) - f'(c) - 2\lambda(c - c) = 0$
On peut réapliquer le théorème de Rolle, Ainsi on obtiens:

$$\exists \theta_x \in]c; x[, \psi''(\theta_x) = 0$$

Donc soit un telle $\theta_x \in]c; x[$

$$\psi''(\theta_x) = 0 \Leftrightarrow f''(\theta_x) - 2\lambda = 0$$

Ainsi comme $\lambda = \frac{f(x)-f(c)-(x-c)f'(c)}{(x-c)^2}$

$$f''(\theta_x) = 2\lambda = 2\frac{f(x) - f(c) - (x - c)f'(c)}{(x - c)^2} \Leftrightarrow \frac{(x - c)^2}{2}f''(\theta_x) = f(x) - f(c) - (x - c)f'(c)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = f(c) + (x - c)f'(c) + \frac{(x - c)^2}{2}f''(\theta_x)$$

Partie II. Méthode de Newton

N=°2.

Le point deux nous informe que f est strictement décroisante sur $[a;b]$
et comme $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$
Ainsi par le théorème de la bijection $\exists! c \in]a;b[, f(c) = 0$

N=°3.

L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en u est $\forall x \in [a;b], \Delta_u(x) = f(u) + f'(u)(x-u)$
Et coupe l'axe des absice en $x = u - \frac{f'(u)}{f(u)}$

N=°4.

$x_{n+1} - x_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} > 0$ car $\forall x \in [a;b], f'(x) < 0$
Donc (x_n) est croissante
Et prouvons que (x_n) est majorée par c par récurance simple
Prouvons d'abord que g est croissante
Pour ça, on a

$$\forall x \in [a;b], g'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{\underbrace{f'(x)^2}_{\geq 0}}$$

et comme f est convexe, on a $\forall x \in [a,b], f''(x) \geq 0$
Ainsi sur $[a,c]$, f est positif et donc g est croissante sur $[a,c]$

- **Initialisation:**

  On a: $f(x_0) > 0 = f(c)$ donc $f(x_0) > f(c)$ et par décroissance de f sur $[a;b]$, on a $x_0 < c$
- **Hérédité:** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n < c$, alors

$$\begin{aligned} & x_n \leq c \\ & \Leftrightarrow g(x_n) \leq g(c) \text{ car } g \text{ est croissante sur} [a,c] \\ & \Leftrightarrow x_{n+1} \leq c - \underbrace{\frac{f(c)}{f'(c)}}_{=0} = c \end{aligned}$$

Ainsi par principe de récurance (x_n) est majorée par c

N=°5.

Comme x_n est croissante et majoré, alors
par le théorème de la limite monotone (x_n) converge
De plus par la théorème du point fixe (x_n) converge vers le point fixe de g
Ainsi soit $l \in [a,b]$ $g(l) = l \Leftrightarrow l - \frac{f(l)}{f'(l)} = l \Leftrightarrow f(l) = 0 \Leftrightarrow l = c$ car c est l'unique nombre tel que $f(c) = 0$
Ainsi (x_n) converge vers c

N=°6.

Comme f est $\mathscr{C}^2$, alors f' est continue sur $[a;b]$ est donc par le théorème des borne atteintes
f' admet un maximum qui, par hypothèse (2) de f, est strictement negative
Et donc $|f'|$ admet un minimum m qui est strictement positive

Comme f est $\mathscr{C}^2$, alors f'' est continue sur $[a;b]$ est donc par le théorème des borne atteintes et comme f est convexe, f'' est strictement positive, car f n'est pas affine
Ainsi $|f''|$ admet un maximum M strictement positif

N=°7.

Comme f est $\mathscr{C}^2$ et que $x_n, c \in]a;b[$
D'après la question 1. on obtient:

$$\underbrace{f(c)}_{=0} = f(x_n) + (c - x_n)f'(x_n) + \frac{(c-x_n)^2}{2} f''(\theta_n)$$

$$\Leftrightarrow f(x_n) = -(c - x_n)f'(x_n) - \frac{(c-x_n)^2}{2} f''(\theta_n)$$

$$\Leftrightarrow f(x_n) = (x_n - c)f'(x_n) - \frac{(c-x_n)^2}{2} f''(\theta_n)$$

On a donc bien $f(x_n) = (x_n - c)f'(x_n) - \frac{(c-x_n)^2}{2} f''(\theta_n)$

N=°8.

Transformont l'égalité de de la question précédente de sorte à obtenir ce que l'on cherche, ainsi:

$$f(x_n) = (x_n - c)f'(x_n) - \frac{(c-x_n)^2}{2} f''(\theta_n)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = -x_n + c + \frac{(c-x_n)^2}{2} \frac{f''(\theta_n)}{f'(x_n)}$$

$$\Leftrightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = c + \frac{(c-x_n)^2}{2} \frac{f''(\theta_n)}{f'(x_n)}$$

$$\Leftrightarrow |x_{n+1} - c| = \frac{(c-x_n)^2}{2} \frac{\overbrace{|f''(\theta_n)|}^{\leq M}}{\underbrace{|f'(x_n)|}_{\leq m}}$$

Ainsi $|x_{n+1}| \leq \frac{M}{2m}(x_n - c)^2$

N=°9.

comme $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} c$, alors par définition de limite:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \left|x_{n_0} - c\right| \leq \varepsilon$$

Ainsi en prenant $\varepsilon = \frac{m}{M}$, on a: $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \left|x_{n_0} - c\right| \leq \frac{m}{M}$

Prouvons par récurance que $\forall n \geq n_0, |x_n - c| \leq \frac{2m}{M} \frac{1}{2^{2^{n-n_0}}}$

- **Initialisation:**

Pour $n = n_0$, on a: $|x_n - c| \leq \frac{2m}{M} \frac{1}{2^{2^{n_0-n_0}}} = \frac{m}{M}$
ce qui à été prouvé au début de cette question
Donc l'initialisation est vérifié

- **Hérédité:**

  Soit $n \geq n_0$ tel que $|x_n - c| \leq \frac{2m}{M} \frac{1}{2^{2^{n-n_0}}}$, alors

$$|x_{n+1} - c| \leq \frac{M}{2m}(x_n - c)^2 \text{ par la question 8.}$$
$$\leq \frac{M}{2m}\left(\frac{2m}{M}\frac{1}{2^{2^{n-n_0}}}\right)^2$$
$$\leq \frac{2m}{M}\frac{1}{2^{2^{n-n_0+2}}} \leq \frac{2m}{M}\frac{1}{2^{2^{n+1-n_0}}}$$

  Ainsi l'hérédité est vérifié

  Donc par principe de récurance simple: $\forall n \geq n_0, |x_n - c| \leq \frac{2m}{M}\frac{1}{2^{2^{n-n_0}}}$

N=°10.

Soit $q \in]0;1[$

la question revient à prouver que $\frac{|x_n - c|}{q^n}$ converge vers 0

Ainsi, à partir d'un certins rang:

$$0 \leq \frac{|x_n - c|}{q^n} \leq \frac{2m}{M}\frac{1}{2^{2^{n-n_0}} q^n} \text{ par la question précédente}$$
$$\leq \frac{2m}{M}\exp(-\ln(2^{2^{n-n_0}} q^n))$$
$$\leq \frac{2m}{M}\exp(-2^{n-n_0}\ln(2) - n\ln(q))$$
$$\leq \frac{2m}{M}\exp\left(\overbrace{-2^{n-n_0}\left(\ln(2) + \underbrace{\frac{n}{2^{n-n_0}}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}\ln(q)\right)}^{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc par le théorème des Gendarme, $\frac{|x_n - c|}{q^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Ainsi, $|x_n - c| \underset{n\to+\infty}{=} o(q^n)$

Je vous met en plus un petit shéma intéractif via desmos fait par mes soins:

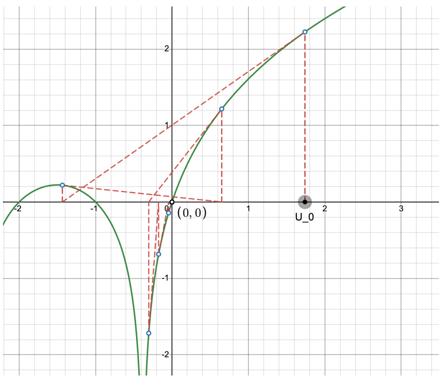

Figure 1: cliquer sur l'image pour avoir accès au site