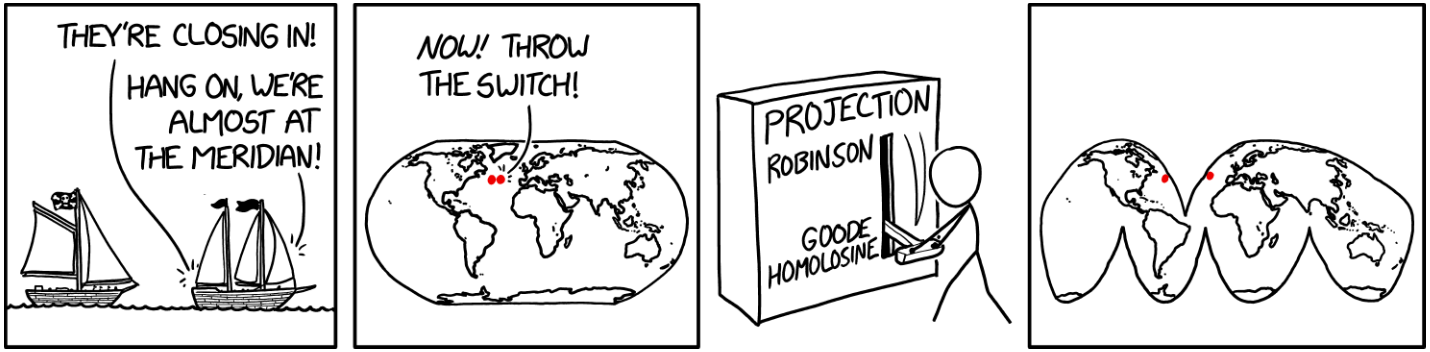
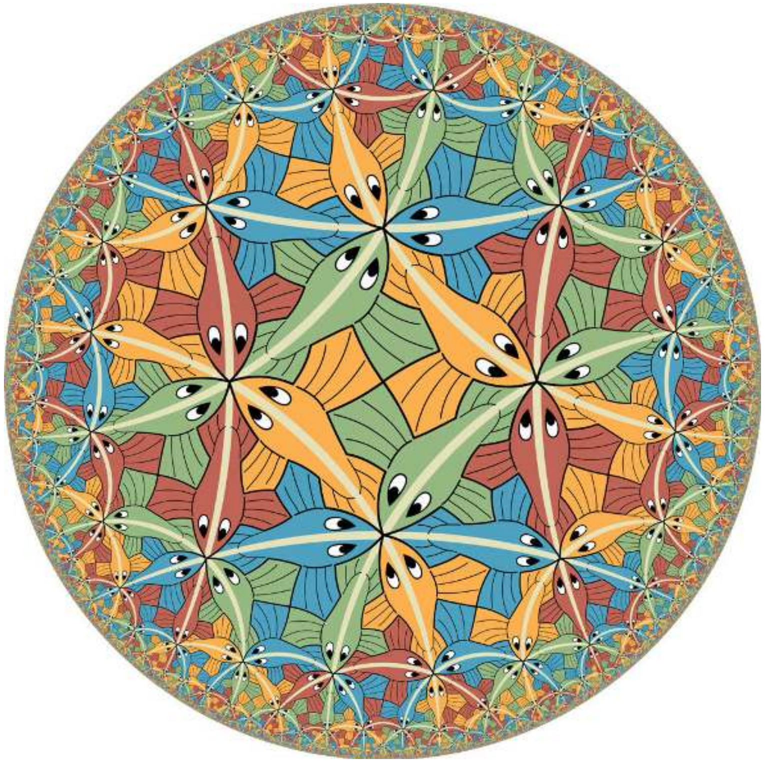
Projection cartographique de la pseudosphère sur le plan

Gaspar Daguet, n°= 21528



Sea Chase - Xkcd

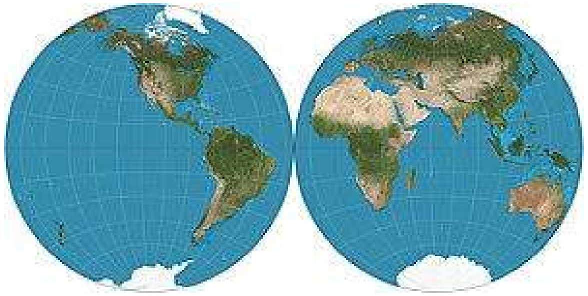
Table des matières



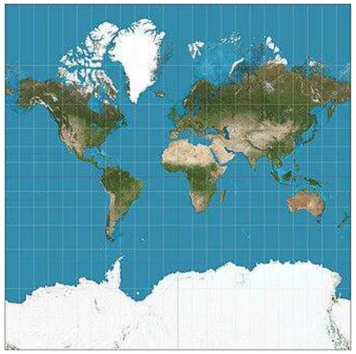
Cercle Limite III — M.C. Escher

1) Introduction et problématique

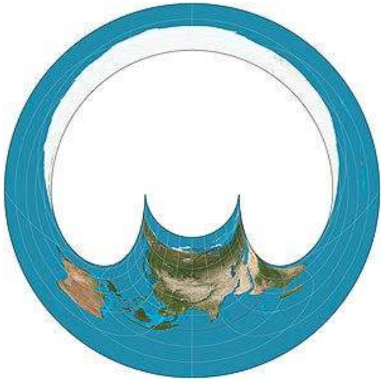
Stéréographique : ~200 av J.C. conforme



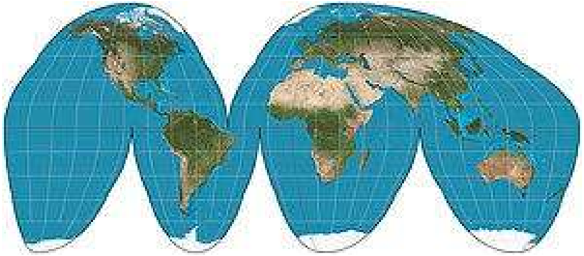
Globulaire de Nicolosi : ~1000 compromise



Mercator : 1569 conforme



Rétro-azimutale de Hammer : 1910 équivalente

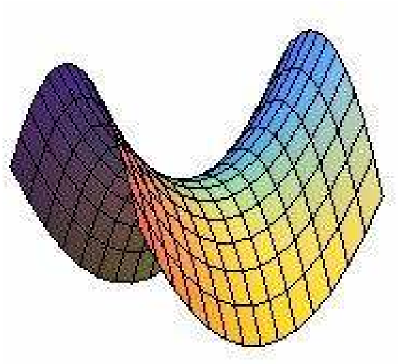


Goode : 1923 équivalente

Cahill-Keyes : 1975 compromis

Problématique :

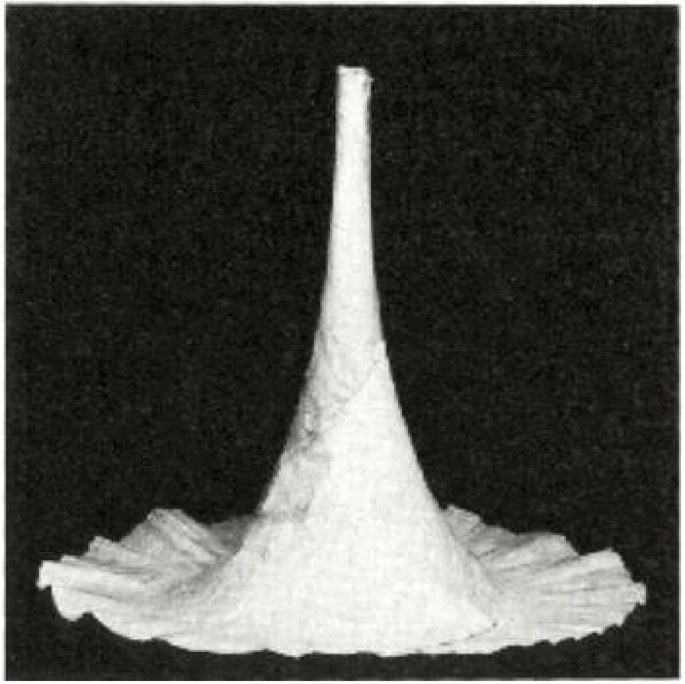
Comment projeter une surface hyperbolique sur le plan ?



Paraboloïde hyperbolique
(une chips)

$\Longrightarrow$

une carte



2) La pseudosphère

2) La pseudosphère

$$P : \begin{cases} [0;2\pi] \times \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & \begin{pmatrix} \frac{\cos(u)}{\mathrm{ch}(v)} \\ \frac{\sin(u)}{\mathrm{ch}(v)} \\ v - \mathrm{th}(v) \end{pmatrix} \end{cases}$$

On note $\dfrac{\partial P}{\partial u} = P_u$

L'application Normale :

$$N : [0; 2\pi] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$p \longmapsto \frac{P_u(p) \wedge P_v(p)}{\|P_u(p) \wedge P_v(p)\|}$$

$$E(p) = \|P_u\|^2$$

$$F(p) = < P_u \mid P_v >$$

$$G(p) = \|P_v\|^2$$

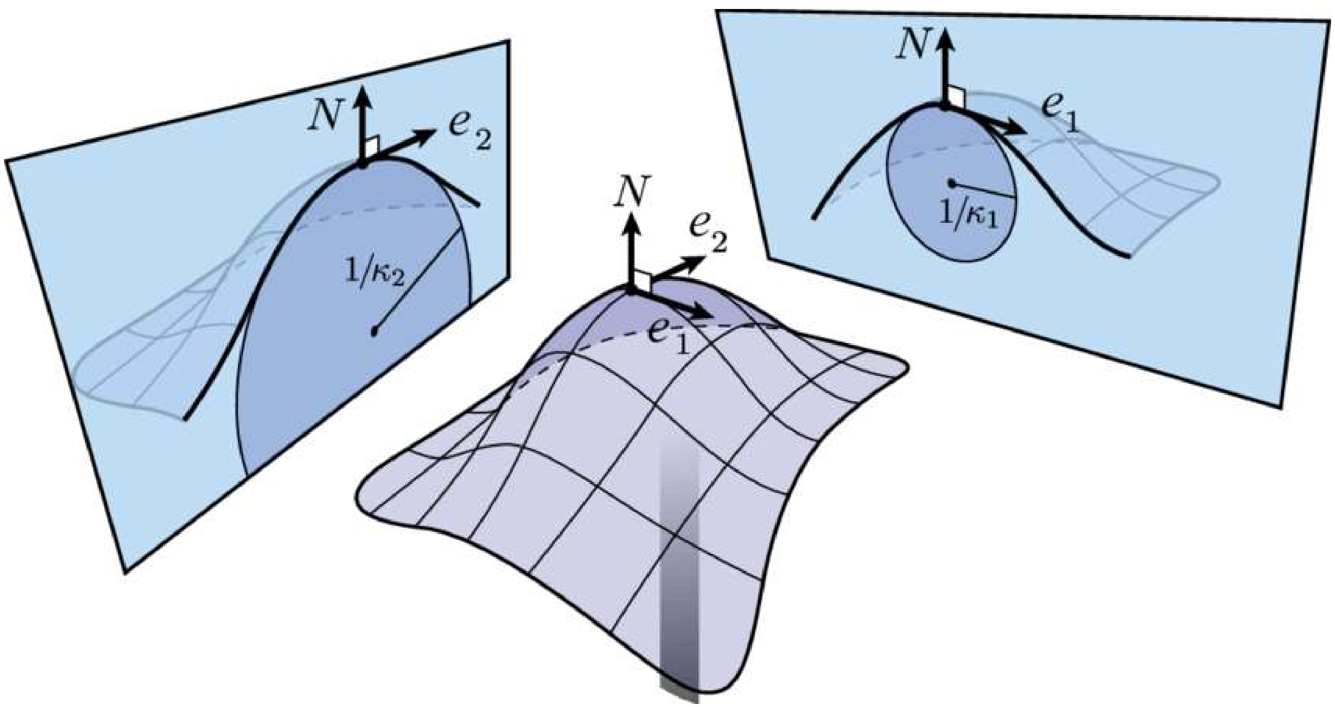
$$\mathscr{L}(p) = < P_{uu} \mid N >$$

$$\mathscr{M}(p) = < P_{uv} \mid N >$$

$$\mathscr{N}(p) = < P_{vv} \mid N >$$

La courbure en $p \in [0; 2\pi] \times \mathbb{R}_+$

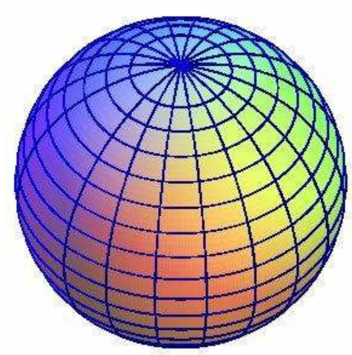
$$K(p) = \frac{\mathscr{L}(p)\mathscr{N}(p) - \mathscr{M}(p)^2}{E(p)G(p) - F(p)^2}$$



source : Localisation d'objets 3D industriels à l'aide d'un algorithme de SLAM contraint au modèle

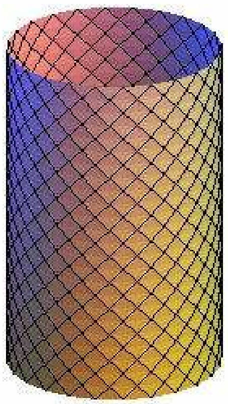
Sphérique : $K > 0$

Sphère : $K = \frac{1}{R}$



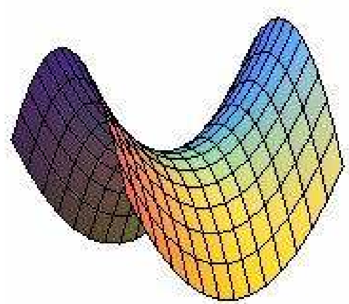
Plane : $K = 0$

Cylindre, Plan



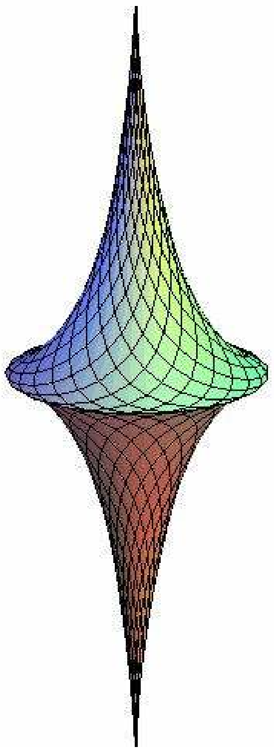
Hyperbolique:

$K < 0$



Pseudosphère :

$K = -\frac{1}{R}$



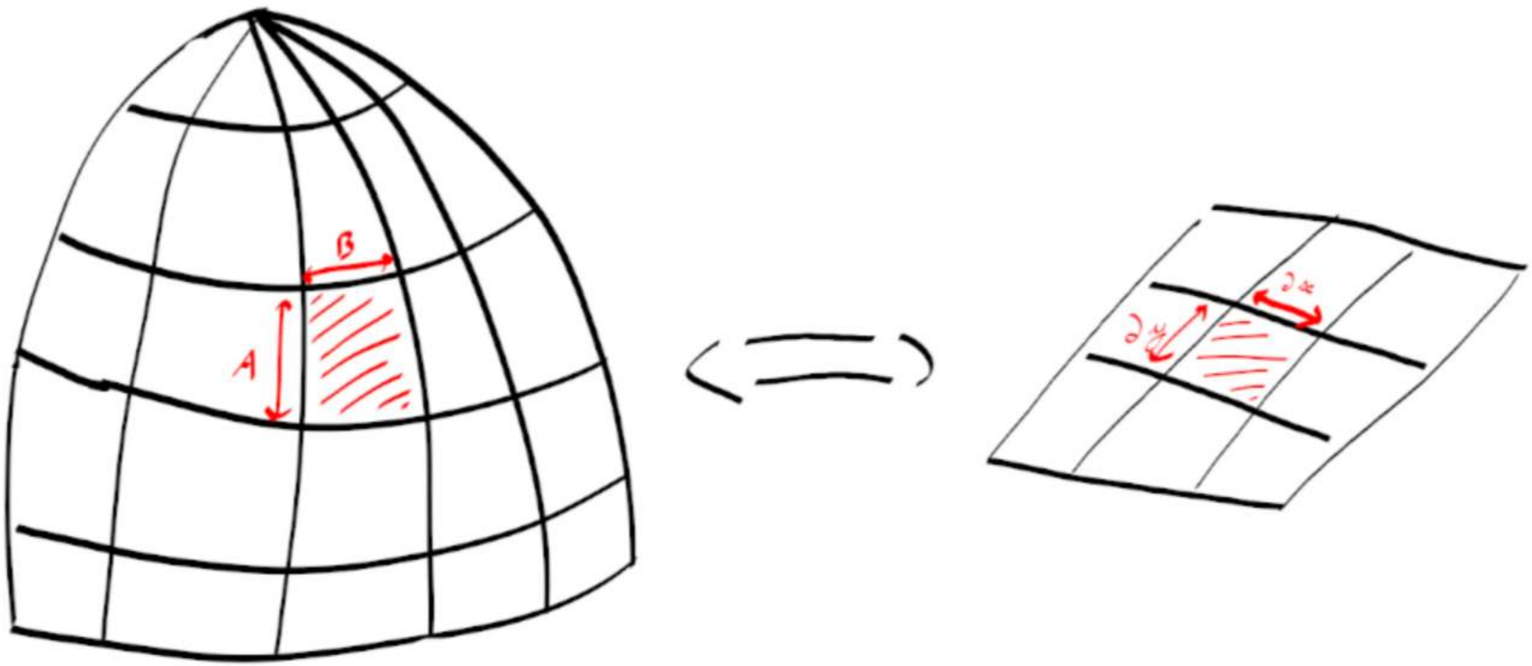
Paraboloïde hyperbolique

$$K = -\frac{4a^2b^2}{\left(4\left(\frac{b^2}{a^2}x^2+\frac{a^2}{b^2}y^2\right)+a^2b^2\right)} < 0$$

source : https://mathcurve.com

3) La projection

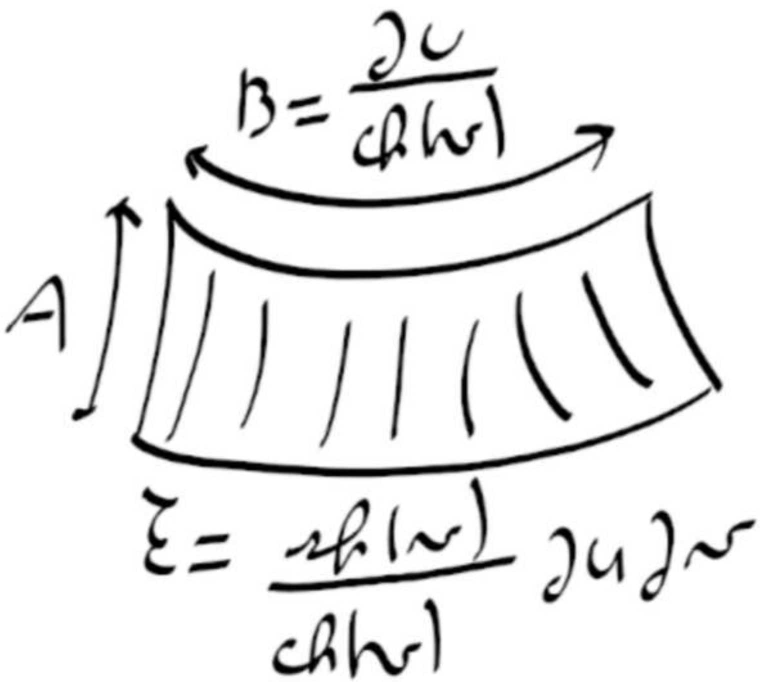
Idée de la projection de Mercator :



$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{A}{B}$$

Surface élémentaire :

$$\mathcal{E} = \|P_u \wedge P_v\| \partial u \partial v$$



Pour la pseudosphère :

$$\mathcal{E} = \frac{\mathrm{sh}(v)}{\mathrm{ch}^2(v)} \partial u \partial v$$

Or :

$$B = \frac{\partial u}{\mathrm{ch}(v)}$$

Donc :

$$\frac{A}{B} = \frac{\mathcal{E}}{B^2} = \frac{\mathrm{sh}(v)\partial v}{\partial u}$$

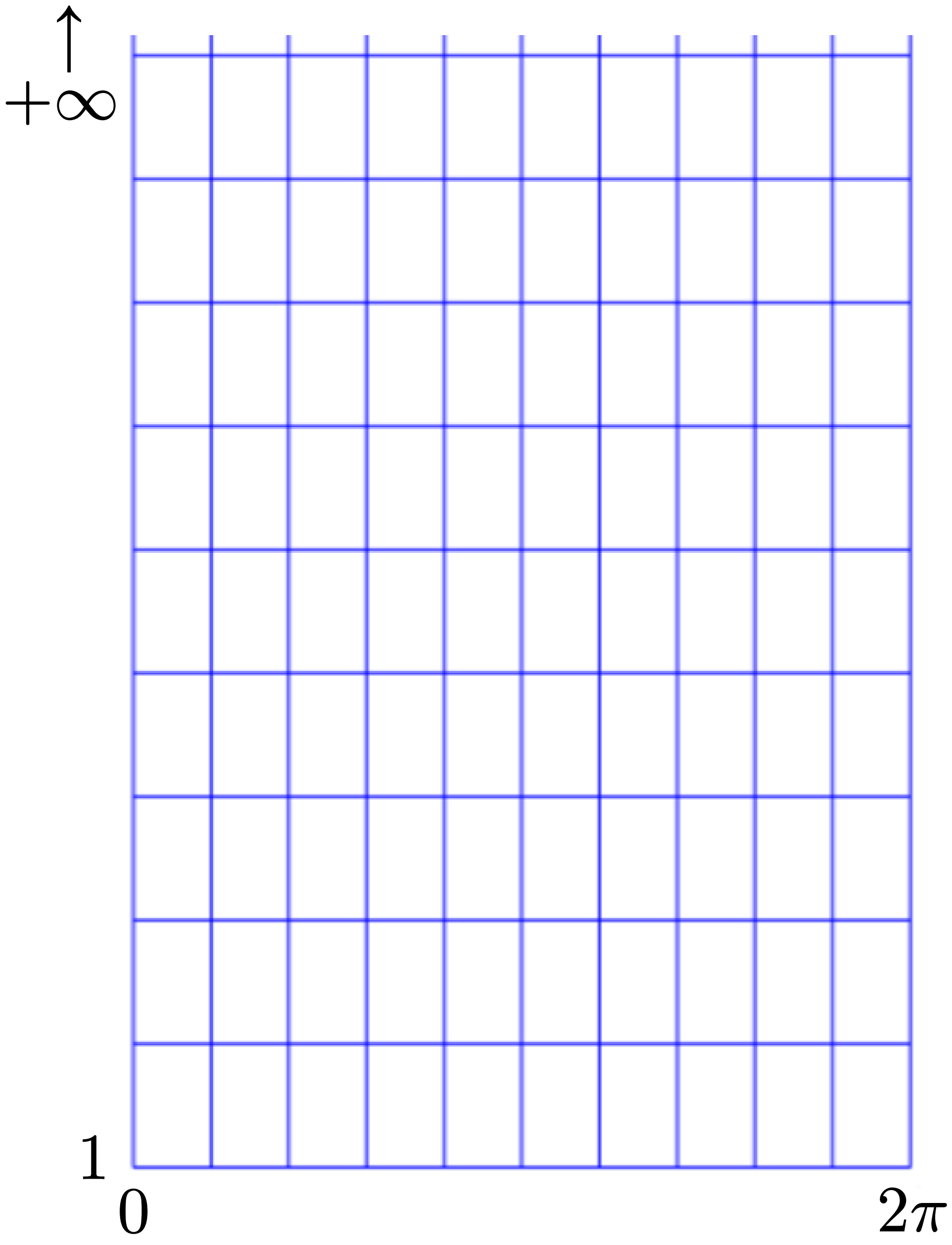
La projection :

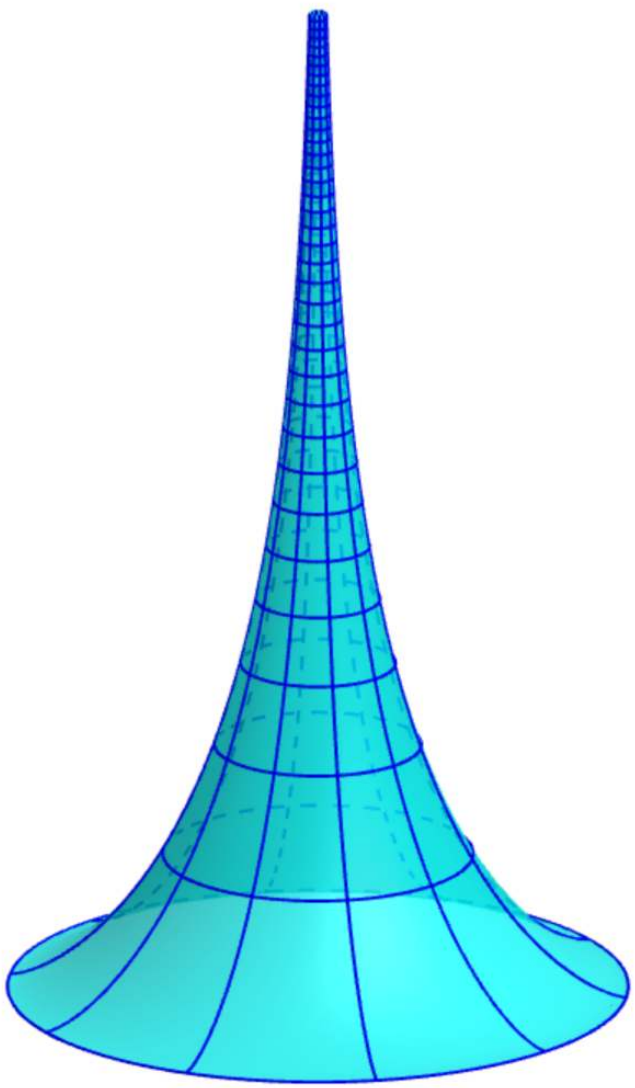
$$C : \begin{cases} [0;2\pi] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ p = (u,v) \longmapsto \begin{pmatrix} u \\ \mathrm{ch}(v) \end{pmatrix} \end{cases}$$

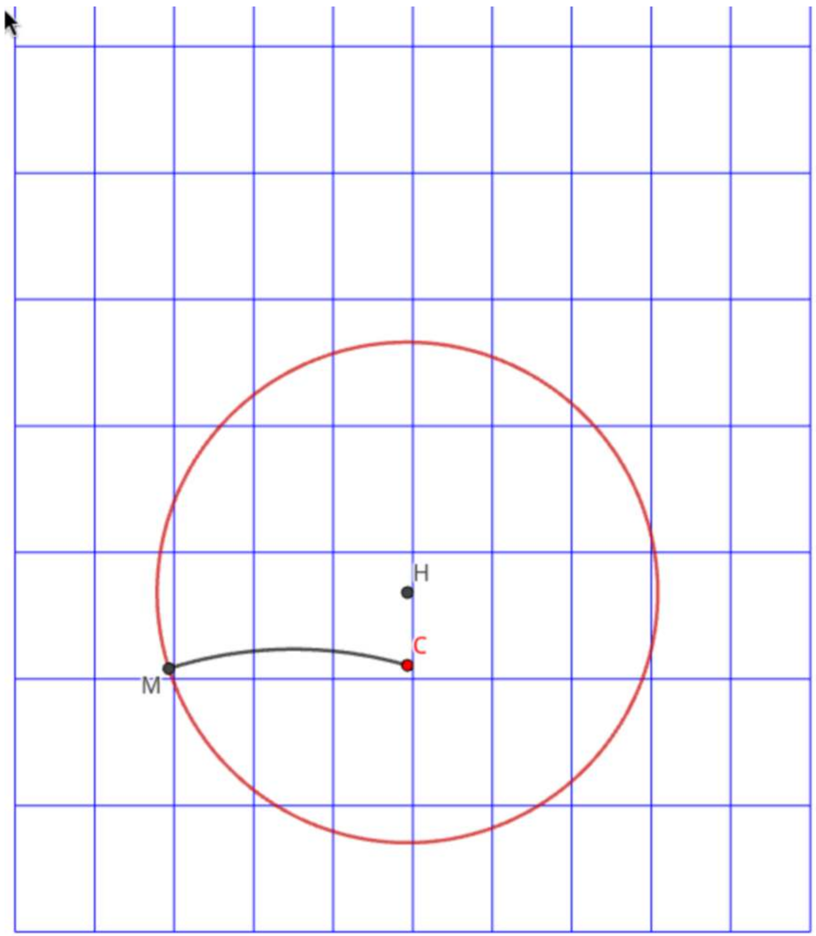
Celle de Mercator :

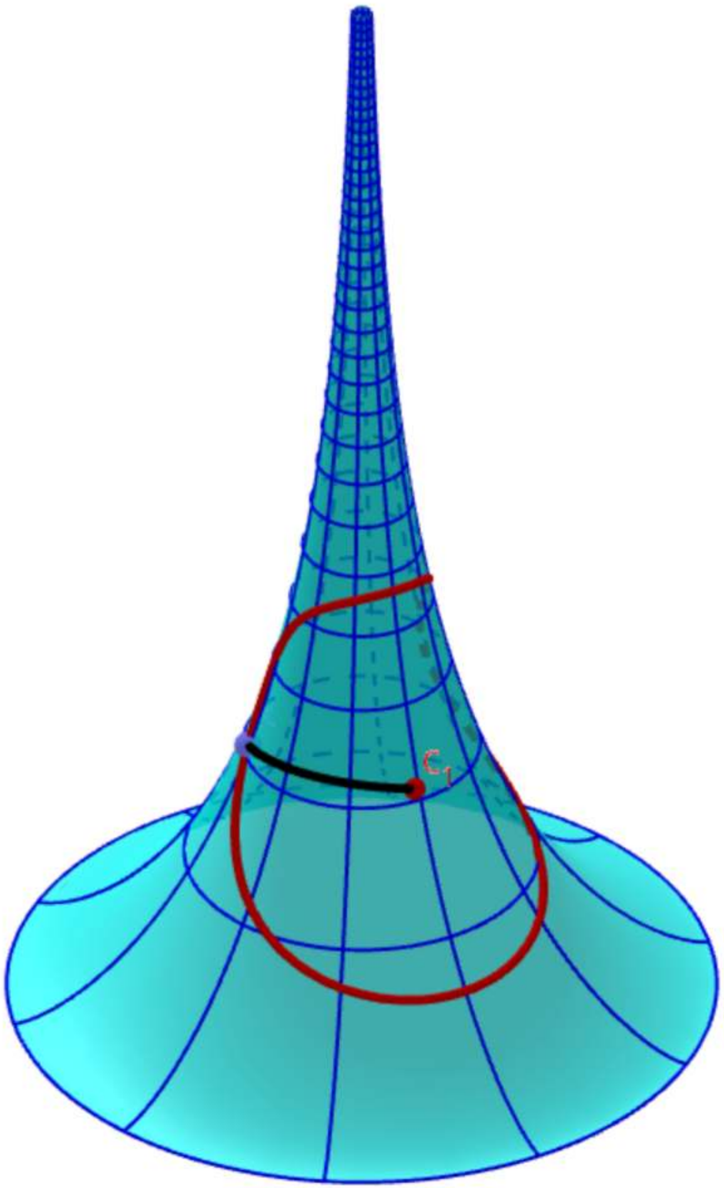
$$M : \begin{cases} [0;2\pi] \times [-\pi;\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ p = (u,v) \longmapsto \begin{pmatrix} u \\ \ln(\tan(\frac{v}{2}+\frac{\pi}{4})) \end{pmatrix} \end{cases}$$

3) La projection









Cercle sur la pseudosphère, avec un de ses rayons

4) Projection des droites

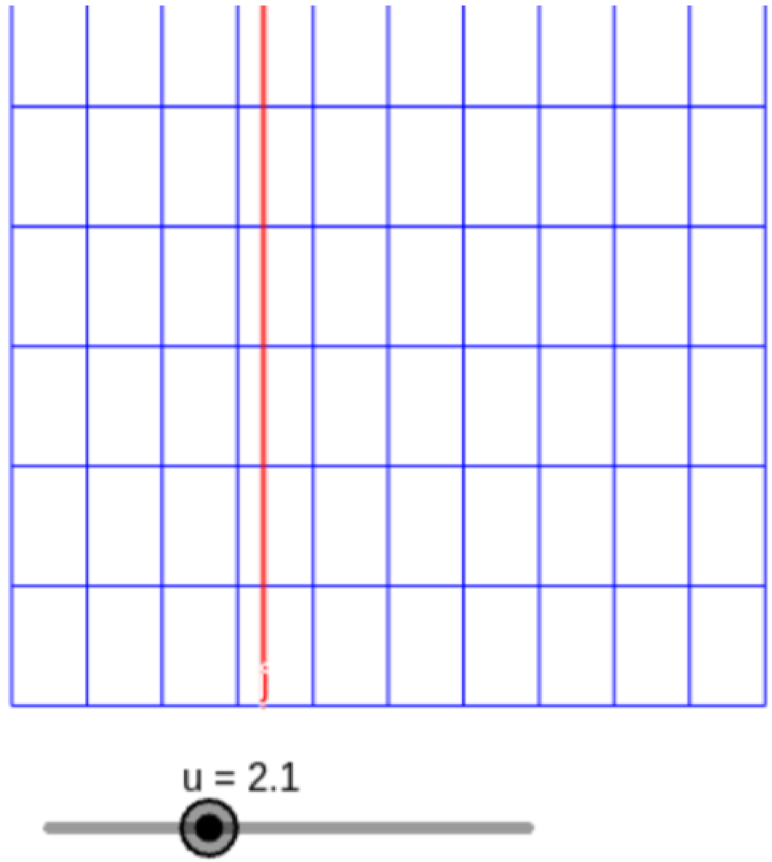
4) Projection des droites

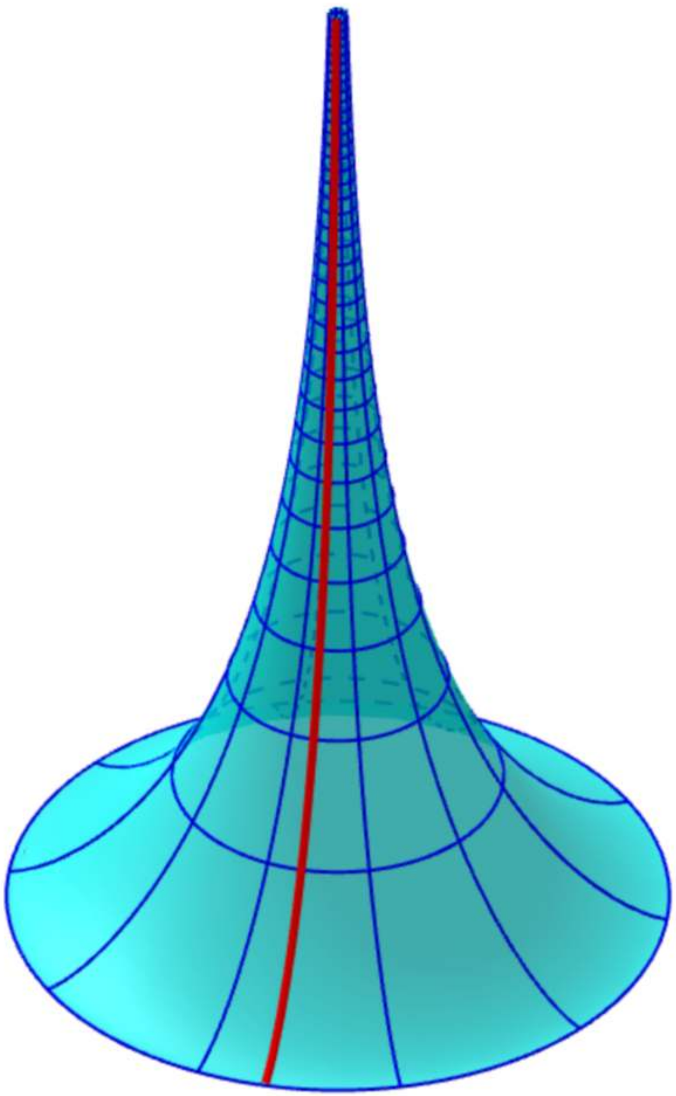
Équation des droites (géodésique) :

- Méridiens : $g : t \mapsto P(u, t)$
- Autres droites :

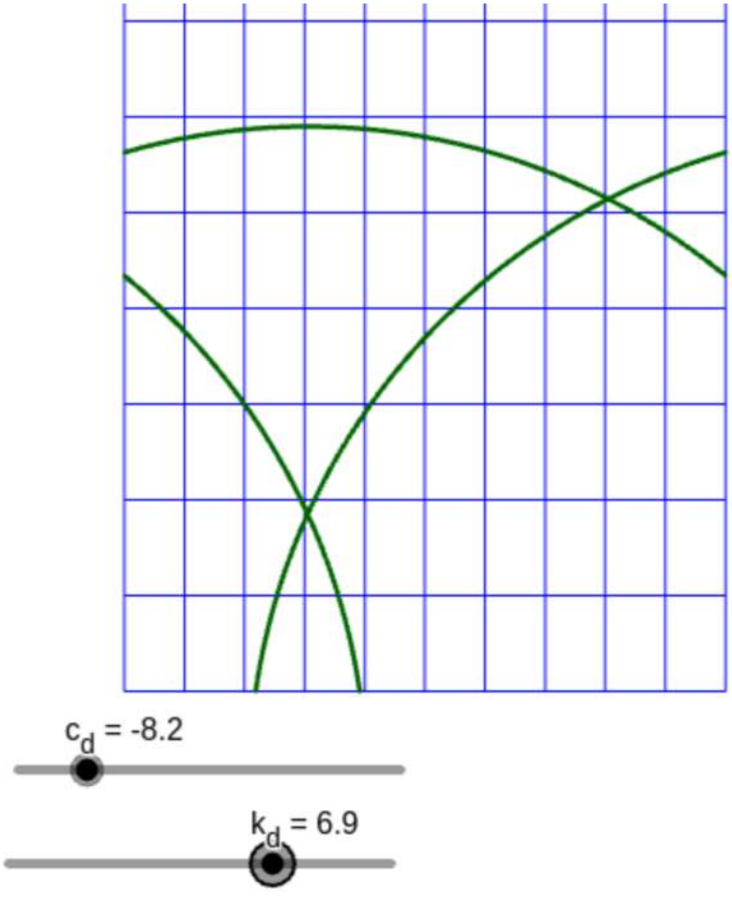
$$g : t \mapsto P\left(t, \operatorname{arcch}\left(\sqrt{k^2 - (t+c)^2}\right)\right)$$

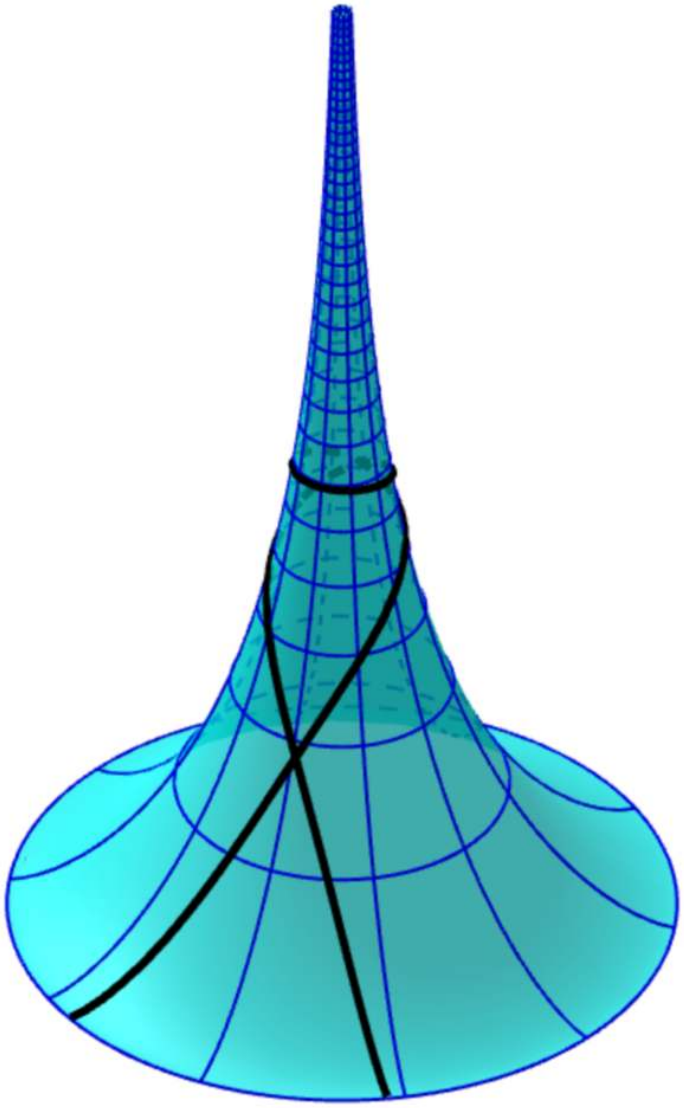
Méridiens :





Droites quelconques :





Sur les méridiens ($u_A = u_B$) :

Sur la pseudosphère :

$$d(A,B) = \ln\left(\frac{\mathrm{ch}(v_B)}{\mathrm{ch}(v_A)}\right)$$

Longueur d'arc :

$$d(A,B) = \int_{t_A}^{t_B} \|g'(t)\| \,\mathrm{d}t$$

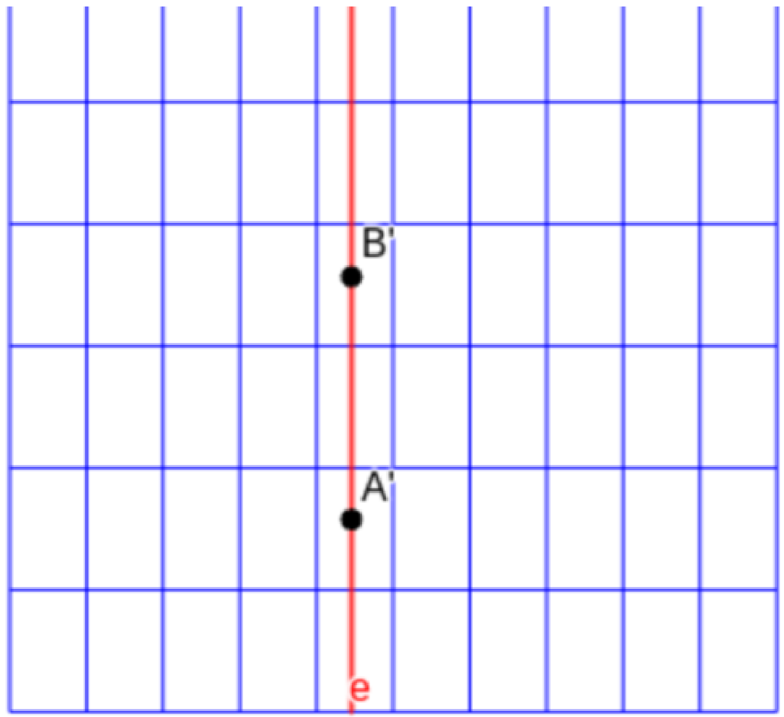
$$\neq$$

Sur la carte :

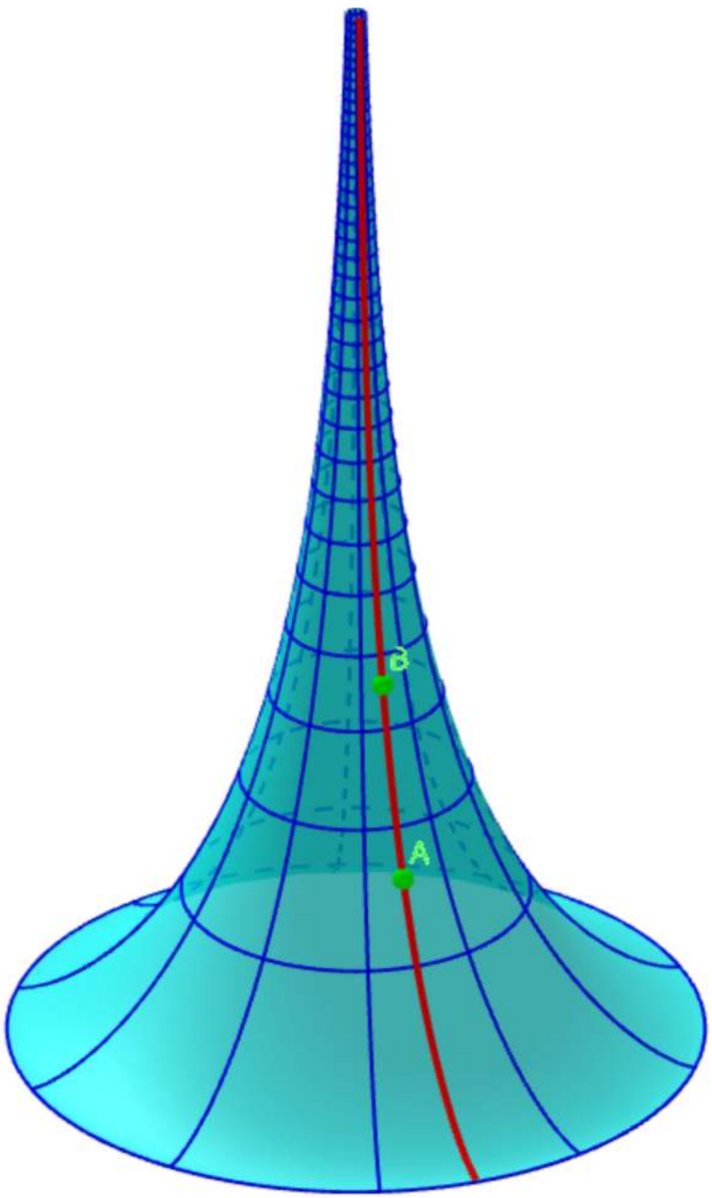
$$d(A,B) = \mathrm{ch}(v_B) - \mathrm{ch}(v_A)$$

Donc la projection n'est pas équivalente

4) Projection des droites

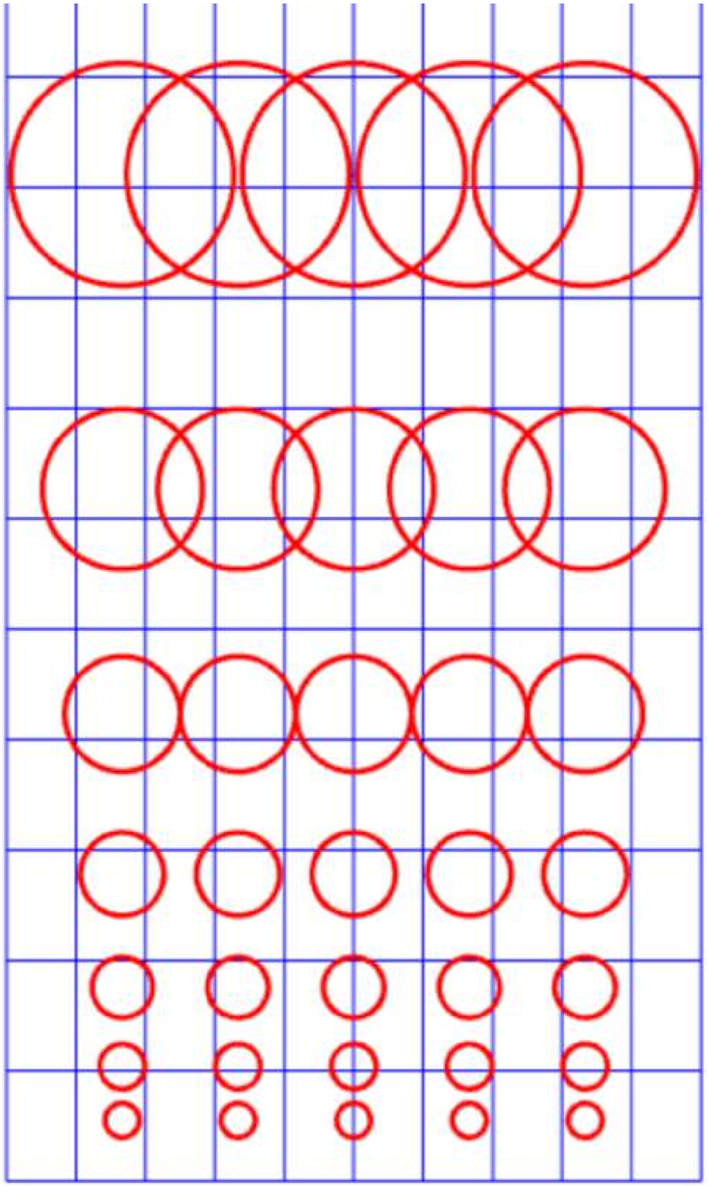


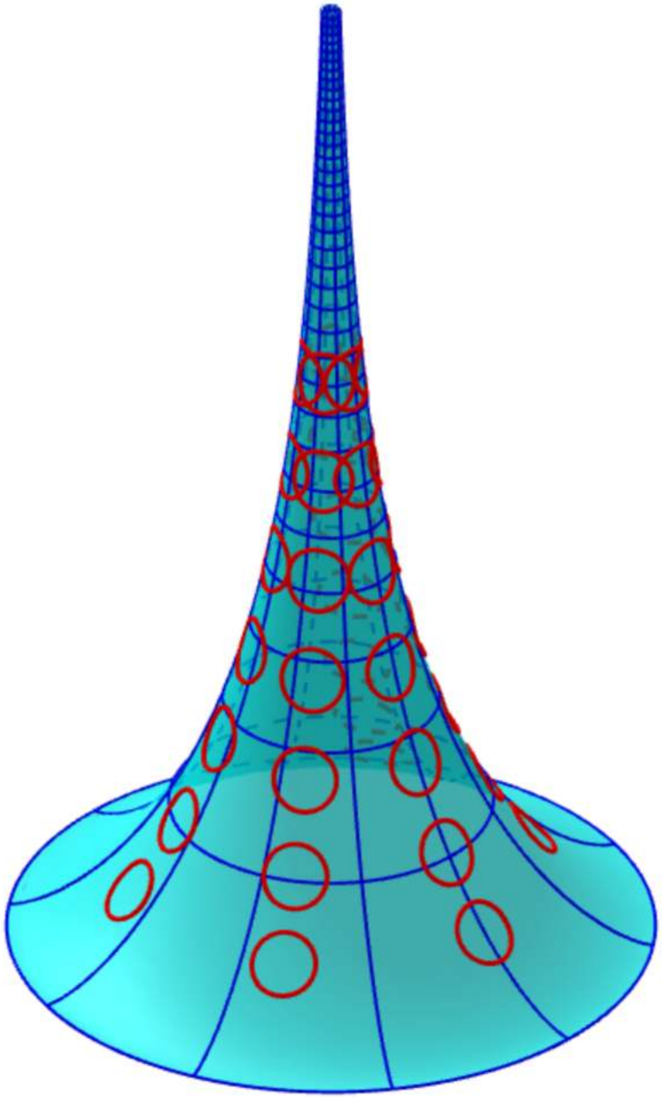
$$d(A, B) = 1,99$$



$$d(A, B) = 0,57$$

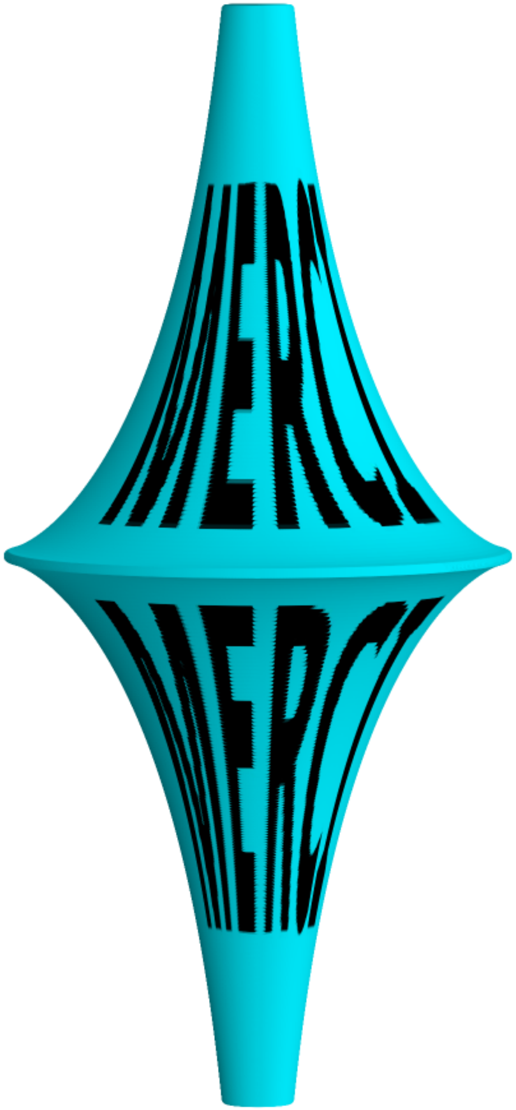
4) Projection des droites





Indicatrice de Tissot sur la pseudosphère

Merci de votre attention



Annexes

Annexes - Première forme fondamentale

La première forme fondamentale est l'écriture formelle du produit scalaire dans le plan tangent au point p de la surface S

Or le produit scalaire entre deux vecteur du plan tangent peut s'écrire comme la combinaison linéaire entre $P_u(p)$ et $P_v(p)$, donc le produit scalaire peut s'écrire :

$$I(aP_u + bP_v, cP_u + dP_v) =< aP_u + bP_v \mid cP_u + dP_v >$$

$$= ac\underbrace{(P_u)^2}_{=E} + (ad+bc)\underbrace{< P_u \mid P_v >}_{=F} + bd\underbrace{\|P_v\|^2}_{=G}$$

Ainsi sous forme matricielle pour les vecteur x et y du plan tangent :

$$I(x, y) = x^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} y$$

Dans le repère $\left(P_{u(p)}, P_{v(p)}, N(p)\right)$, on peut faire un dévelopement limité de la surface de la forme :

$$z = \underbrace{< P_{uu} \mid N >}_{= \mathscr{L}} \frac{x^2}{2} + \underbrace{< P_{uv} \mid N >}_{\mathscr{M}} + \underbrace{< P_{vv} \mid N >}_{= \mathscr{N}} \frac{y^2}{2}$$

Ainsi on définit la seconde forme fondamentale par :

$$\mathrm{II} = L \,\mathrm{d}x^2 + 2M \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y + N \,\mathrm{d}y^2$$

Et donc sous forme matricielle :

$$\mathrm{II} = \begin{pmatrix} \mathscr{L} & \mathscr{M} \\ \mathscr{M} & \mathscr{N} \end{pmatrix}$$

Annexes - Endomorphisme de Weingarten

L'endomorphisme de Weingarten (ou opérateur de forme) est définis par :

$$W = \mathrm{d}N$$

De plus, ses valeurs propres sont les courbures principales au point p,
et ses vecteurs propres sont la direction des courbures principales

Comme l'on définit la courbure de Gauss par le produit des valeurs propres,
alors le déterminant de l'endomorphisme de Weingarten est la courbure de Gauss

$$K(p) = \det(W)$$

Nous avons également que la seconde forme fondamentale est la forme quadratique associée à l'endomorphisme de Weingarten

Soit $\vec{x}, \vec{y}$ deux vecteurs du plan tangent au point p sur notre surface P tel que $\vec{y}$ soit un vecteur propre de W associé a la valeur propre λ
Ainsi la première forme fondamentale nous donne le produit scalaire entre ces deux vecteurs :

$$< \vec{x} \mid \vec{y} >= X^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} Y$$

Et comme la seconde forme fondamentale est la quadratique associé à l'endomorphisme de Weingarten :

$$< \vec{x} \mid W(\vec{y}) >= X^T \begin{pmatrix} \mathscr{L} & \mathscr{M} \\ \mathscr{M} & \mathscr{N} \end{pmatrix} Y$$

Donc comme $\vec{y}$ est vecteur propre :

$$X^T \begin{pmatrix} \mathscr{L} & \mathscr{M} \\ \mathscr{M} & \mathscr{N} \end{pmatrix} Y =< \vec{x} \mid W(\vec{y}) >= \lambda < \vec{x} \mid \vec{y} >= \lambda X^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} Y$$

Comme ceci est vrai pour tout $\vec{x}$, on a :

$$\begin{pmatrix} \mathscr{L} & \mathscr{M} \\ \mathscr{M} & \mathscr{N} \end{pmatrix} Y = \lambda \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} Y$$

Donc

$$\left(\begin{pmatrix} \mathscr{L} & \mathscr{M} \\ \mathscr{M} & \mathscr{N} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \right) Y = 0$$

Annexes - Démonstation courbure de Gauss

Gaspar Daguet, n°=21528

Donc $\begin{pmatrix} \mathscr{L} & \mathscr{M} \\ \mathscr{M} & \mathscr{N} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathscr{L} - \lambda E & \mathscr{M} - \lambda F \\ \mathscr{M} - \lambda F & \mathscr{N} - \lambda G \end{pmatrix}$ est non inversible

Et donc $\begin{vmatrix} \mathscr{L} - \lambda E & \mathscr{M} - \lambda F \\ \mathscr{M} - \lambda F & \mathscr{N} - \lambda G \end{vmatrix} = 0$

Soit $(EG - F^2)\lambda^2 + (E\ \mathscr{N} + G\ \mathscr{L} - 2\ \mathscr{M} F)\lambda + \mathscr{L}\mathscr{N} - \mathscr{M}^2 = 0$

Ainsi le terme $\frac{\mathscr{L}\mathscr{N} - \mathscr{M}^2}{EG - F^2}$ vaut le produit des valeurs propres et donc des courbures principales, donc :

$$K = \frac{\mathscr{L}\mathscr{N} - \mathscr{M}^2}{EG - F^2}$$

$S = \text{Surface}\left(\frac{\cos(u)}{\cosh(v)}, \frac{\sin(u)}{\cosh(v)}, v - \text{th}(v), u, 0, 2\pi, v, 0, 100\right)$

$= \begin{pmatrix} \frac{\cos(u)}{\cosh(v)} \\ \frac{\sin(u)}{\cosh(v)} \\ v - \text{th}(v) \end{pmatrix}$

$S_x(x, y) = \frac{\cos(x)}{\cosh(y)}$

$S_y(x, y) = \frac{\sin(x)}{\cosh(y)}$

$S_z(x, y) = y - \text{th}(y)$

$\text{Sur} = 1$

-5 … 5

$c = 1$

0 … 2

$h_n = 100$

1 … 100

$I1 = \text{Séquence}\left(\text{Courbe}\left(\frac{2\pi}{n} k, t, t, 1, c\, h_n + 1\right), k, 0, n\right)$

$= \left\{\left(\frac{2\pi}{10} \cdot 0, t\right), \left(\frac{2\pi}{10} \cdot 1, t\right), \left(\frac{2\pi}{10} \cdot 2, t\right), \left(\frac{2\pi}{10} \cdot 3, t\right), \left(\frac{2\pi}{10} \cdot 4, t\right), \left(\frac{2\pi}{10} \cdot 5, t\right), \left(\frac{2\pi}{10} \cdot 6, t\right), \left(\frac{2\pi}{10} \cdot 7, t\right), \left(\frac{2\pi}{10} \cdot 8, t\right), \left(\frac{2\pi}{10} \cdot 9, t\right), \left(\frac{2\pi}{10} \cdot 10, t\right)\right\}$

$I2 = \text{Séquence}(\text{Courbe}(S_x(t, \cosh^{-1}(c\,k + 1)), S_y(t, \cosh^{-1}(c\,k + 1)), S_z(t, \cosh^{-1}(c\,k + 1)), t, 0, 2\pi), k, 0, h_n - 1)$

$= \left\{\left(\frac{\cos(t)}{\cosh(\cosh^{-1}(1 \cdot 0 + 1))}, \frac{\sin(t)}{\cosh(\cosh^{-1}(1 \cdot 0 + 1))}, \cosh^{-1}(1 \cdot 0 + 1) - \text{th}(\cosh^{-1}(1 \cdot 0 + 1))\right), \left(\frac{\cos(t)}{\cosh(\cosh^{-1}(1 \cdot 1 + 1))}, \frac{\sin(t)}{\cosh(\cosh^{-1}(1 \cdot 1 + 1))}, \cosh^{-1}(1 \cdot 1 + 1) - \text{th}(\cosh^{-1}(1 \cdot 1 + 1))\right), \left(\frac{\cos(t)}{\cosh(\cosh^{-1}(1 \cdot 2 + 1))}, \cosh(\right.$

$I3 = \text{Séquence}\left(\text{Courbe}\left(S_x\left(\frac{2\pi}{n} k, \cosh^{-1}(t)\right), S_y\left(\frac{2\pi}{n} k, \cosh^{-1}(t)\right), S_z\left(\frac{2\pi}{n} k, \cosh^{-1}(t)\right), t, 1, h_n - 1\right), k, 0, n\right)$

Annexes - Projection

Donc on a :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{A}{B} = \frac{\mathrm{sh}(v)\partial v}{\partial u}$$

Ainsi en posant $x(u) = u \Leftrightarrow \frac{\partial x}{\partial u} = 1$,

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \mathrm{sh}(v)\underbrace{\frac{\partial x}{\partial u}}_{=1}$$

Donc

$$y(v) = \mathrm{ch}(v)$$

Annexes - Calculs des Dérivés

$$P_u(u,v) = \begin{pmatrix} -\frac{\sin(u)}{\operatorname{ch}(v)} \\ \frac{\cos(u)}{\operatorname{ch}(v)} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad P_v(u,v) = \begin{pmatrix} -\cos(u)\frac{\operatorname{sh}(v)}{\operatorname{ch}(v)^2} \\ -\sin(u)\frac{\operatorname{sh}(v)}{\operatorname{ch}(v)^2} \\ \operatorname{th}(v)^2 \end{pmatrix}$$

$$P_{uu}(u,v) = \begin{pmatrix} -\frac{\cos(u)}{\operatorname{ch}(v)} \\ -\frac{\sin(u)}{\operatorname{ch}(v)} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad P_{vv}(u,v) = \begin{pmatrix} \cos(u)\frac{2\operatorname{sh}(v)^2-\operatorname{ch}(v)^2}{\operatorname{ch}(v)^3} \\ \sin(u)\frac{2\operatorname{sh}(v)^2-\operatorname{ch}(v)^2}{\operatorname{ch}(v)^3} \\ 2\frac{\operatorname{sh}(v)}{\operatorname{ch}(v)^3} \end{pmatrix}$$

$$P_{uv} = \begin{pmatrix} \sin(u)\frac{\operatorname{sh}(v)}{\operatorname{ch}(v)^2} \\ -\cos(u)\frac{\operatorname{sh}(v)}{\operatorname{ch}(v)^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Annexes - Calculs

$$E = \|P_u\|^2 = \frac{1}{\mathrm{ch}(v)^2}$$

$$F = < P_u \mid P_v > = \cos(u)\sin(u)\frac{\mathrm{sh}(v)}{\mathrm{ch}(v)^3} - \cos(u)\sin(u)\frac{\mathrm{sh}(v)}{\mathrm{ch}(v)^3} = 0$$

$$G = \|P_v\|^2 = \frac{\mathrm{sh}(v)^2}{\mathrm{ch}(v)^4} + \frac{\mathrm{sh}(v)^4}{\mathrm{ch}(v)^4} = \frac{\mathrm{sh}(v)^2}{\mathrm{ch}(v)^4}\underbrace{(1+\mathrm{sh}(v)^2)}_{=\mathrm{ch}(v)^2} = \frac{\mathrm{sh}(v)^2}{\mathrm{ch}(v)^2}$$

Tout d'abord :

$$P_u \wedge P_v = \begin{pmatrix} \cos(u)\frac{\mathrm{sh}(v)^2}{\mathrm{ch}(v)^3} \\ \sin(u)\frac{\mathrm{sh}(v)^2}{\mathrm{ch}(v)^3} \\ \frac{\mathrm{sh}(v)}{\mathrm{ch}(v)^3} \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\|P_u \wedge P_v\| = \sqrt{\frac{\mathrm{sh}(v)^4}{\mathrm{ch}(v)^6} + \frac{\mathrm{sh}(v)^2}{\mathrm{ch}(v)^6}}$$

$$= \frac{\mathrm{sh}(v)}{\mathrm{ch}(v)^3}\underbrace{\sqrt{\mathrm{sh}(v)^2 + 1}}_{=\,\mathrm{ch}(v)} = \frac{\mathrm{sh}(v)}{\mathrm{ch}(v)^2}$$

Donc :

$$N = \frac{P_u \wedge P_v}{\|P_u \wedge P_v\|} = \begin{pmatrix} \cos(u)\frac{\mathrm{sh}(v)}{\mathrm{ch}(v)} \\ \sin(u)\frac{\mathrm{sh}(v)}{\mathrm{ch}(v)} \\ \frac{1}{\mathrm{ch}(v)} \end{pmatrix}$$

$$\mathscr{L} = < P_{uu} \mid N > = -\frac{\mathrm{sh}(v)}{\mathrm{ch}(v)^2}$$

$$\mathscr{M} = < P_{uv} \mid N > = \frac{\mathrm{sh}(v)^2}{\mathrm{ch}(v)^3}(\cos(u)\sin(u) - \cos(u)\sin(u)) = 0$$

$$\begin{aligned} \mathscr{N} = < P_{vv} \mid N > &= \frac{\mathrm{sh}(v)}{\mathrm{ch}(v)^4}(2\mathrm{sh}(v)^2 - \mathrm{ch}(v)^2 + 2) \\ &= \frac{\mathrm{sh}(v)}{\mathrm{ch}(v)^4}(2(\mathrm{ch}(v)^2 - 1) - \mathrm{ch}(v)^2 + 2) \\ &= \frac{\mathrm{sh}(v)}{\mathrm{ch}(v)^4}\mathrm{ch}(v)^2 = \frac{\mathrm{sh}(v)}{\mathrm{ch}(v)^2} \end{aligned}$$

On a :

$$K = \frac{\mathscr{L}\mathscr{N} - \mathscr{M}^2}{EG - F^2} = -\frac{\mathrm{sh}(v)^2}{\mathrm{ch}(v)^4} \times \frac{1}{\frac{\mathrm{sh}(v)^2}{\mathrm{ch}(v)^4}}$$

$$= -\frac{\mathrm{sh}(v)^2}{\mathrm{ch}(v)^4} \times \frac{\mathrm{ch}(v)^4}{\mathrm{sh}(v)^2} = -1$$

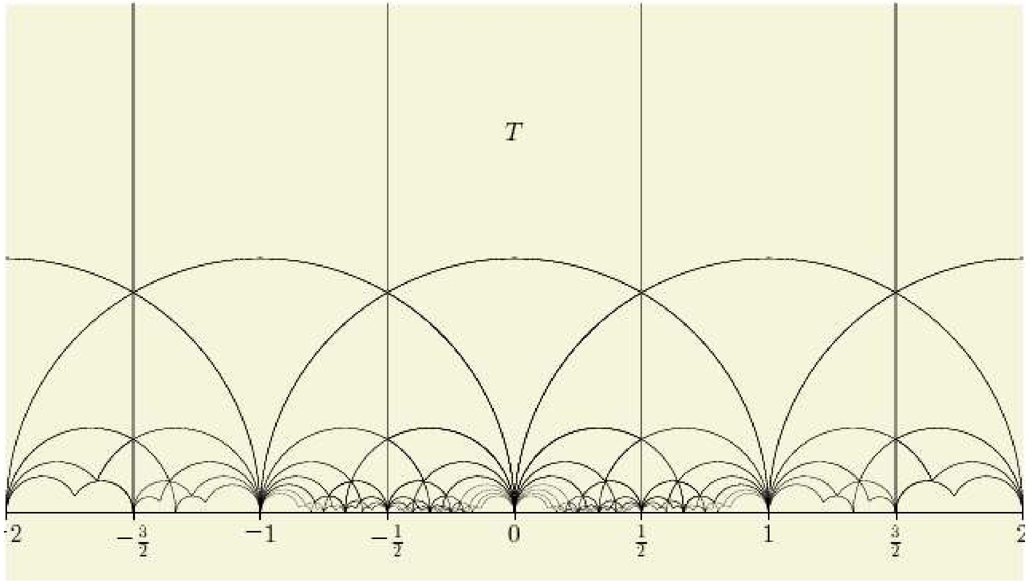
Annexes - Demi plan de Poincarré

Le demi plan de Poincarré est un modèle de géométrie hyperbolique
Il est définis par :

$$\mathfrak{H}_2 = \{x + iy \in \mathbb{C}, y > 0\}$$

munis de la métrique :

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}{y^2}$$



NB: Une métrique est une application g qui permet de définir le produit scalaire entre deux vecteurs, dans notre cas on note $\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_j$ où g_{ij} sont les composante de la matrice associé et où $\mathrm{d}s^2$ est la longueur d'arc infinitésimal

Tout d'abord on peut définir la métrique sur notre surface par :

$$\mathrm{d}s^2 = E\,\mathrm{d}x^2 + 2F\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + G\,\mathrm{d}y^2$$

Donc sur notre surface, la métrique s'écrit :

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{ch}(v)^2} + \frac{\mathrm{sh}(v)^2}{\mathrm{ch}(v)^2}\,\mathrm{d}v^2 = \frac{\mathrm{d}u^2 + \mathrm{sh}(v)^2\,\mathrm{d}v^2}{\mathrm{ch}(v)^2}$$

En appliquant notre projection sur la métrique :

$$\begin{cases} x = u \\ y = \mathrm{ch}(v) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{d}x = \mathrm{d}u \\ \mathrm{d}y = \mathrm{sh}(v)\,\mathrm{d}v \end{cases}$$

donc :

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}{y^2}$$

Annexe - code


```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

def dec(v):
    if v < 0:
        return -np.arccosh(1 - v)
    else:
        return np.arccosh(v + 1)

# Surface 3D (exemple : une sphère)
theta = np.linspace(0, 2 * np.pi, 500)
phi = np.linspace(-7, 7, 500)
for i in range(len(phi)):
    phi[i] = dec(phi[i])
print(phi)
theta, phi = np.meshgrid(theta, phi)
r = 1
x = r * np.cos(theta) / np.cosh(phi)
y = r * np.sin(theta) / np.cosh(phi)
z = phi - np.tanh(phi)

# Projection personnalisée (exemple : projection cylindrique)
image = plt.imread("/home/jvj/Telechargements/merci.jpg")
u = (theta - np.min(theta)) / (np.max(theta) - np.min(theta))  # Normalisation
v = (phi - np.min(phi)) / (np.max(phi) - np.min(phi))
image = image[::-1]
texture = image[
    (v * (image.shape[0] - 1)).astype(int), (u * (image.shape[1] - 1)).astype(int)
]
```

Annexe - code


```python
# Affichage
fig = plt.figure()
ax: Axes3D = fig.add_subplot(111, projection="3d")
ax.set_axis_off()
ax.view_init(elev=4, azim=-180, roll=0)
ax.set_xlim(-3, 3)
ax.set_ylim(-3, 3)
ax.plot_surface(x, y, z, facecolors=texture / 255.0, rstride=1, cstride=1)

plt.savefig("result.png", format="png", dpi=1000)
#plt.show()
```