

# Maths : DM 21

## Problème 2 : une construction rigoureuse des fonctions trigonométriques

**N° 1.**

Soit  $z \in \mathbb{C}$  et  $N \in \mathbb{N}$  alors

$$\sum_{n=0}^N \left| \frac{z^n}{n!} \right| = \sum_{n=0}^N \frac{|z|^n}{n!} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} e^{|z|}$$

Donc  $\sum \frac{z^n}{n!}$  converge absolument

### Partie I. Un théorème de dérivation terme à terme

**N° 2.**

Soit  $z \in \mathbb{Z}$ , alors

$$\frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = |z| o\left(\frac{r^{n+1}}{r^n}\right) = |z| o(r) = o(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1$$

Donc la série de terme générale  $a_n z^n$  converge absolument

**N° 3.**

Soit  $r, r' \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $0 < r' < r$ , alors  $\frac{r'}{r} < 1$

Donc  $n\left(\frac{r'}{r}\right)^n = n o\left(\frac{1}{n}\right) = o(1)$

Donc  $\frac{r'^n}{r^n \frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et donc  $r'^n = o\left(\frac{r^n}{n}\right)$

Et comme  $a_n = o(r'^n) = o\left(\frac{r^n}{n}\right)$

Donc  $na_n = o(r^n)$

**N° 4.**

Comme  $\forall r \in \mathbb{R}_+^*, na_n = o(r^n)$ , alors par la question 2.  $\forall z \in \mathbb{C}$ ,  $\sum_{n \geq 0} na_n z^n$  converge absolument

Donc en particulier pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $N \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\sum_{n=1}^N na_n x^{n-1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^N na_n x^n \text{ converge absolument}$$

De plus pour  $N \in \mathbb{N}$ :

$$\sum_{n=1}^N |n(n-1)a_n x^{n-2}| \leq \sum_{n=1}^N |n^2 a_n x^{n-2}| - \sum_{n=1}^N |na_n x^{n-2}|$$

On a montré juste avant que  $\sum_{n=1}^N |na_n x^{n-2}|$  converge absolument

Et comme  $\forall r \in \mathbb{R}_+^*, na_n = o(r^n)$ , alors par la série précédente

$\sum_{n=1}^N |n(na_n)x^{n-2}|$  converge absolument  
Ainsi  $\sum_{n=1}^N n(n-1)a_n x^{n-2}$  converge absolument

---

**N° 5. a.**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $h \in ]-1; 1[$ , alors

Soit  $f : x \mapsto (x+h)^n$ , donc  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = n(x+h)^{n-1}$  et  $x_0 - h \leq |x_0| + 1$

Alors par l'inégalité de Taylor-Lagrange avec  $a = x_0 - h$  et  $b = x_0$ :

$$|f(x_0) - f(x_0 - h) - f'(x_0 - h)h| \leq \frac{h^2}{2} n(n-1)(|x_0| + 1)^{n-2}$$

$$\Leftrightarrow |(x_0 + h)^n - x_0^n - hnx_0^{n-1}| \leq \frac{h^2}{2} n(n-1)(|x_0| + 1)^{n-2}$$

**b.**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |(x_0 + h)^n - x_0^n - hnx_0^{n-1}| \leq \left| f(x_0 + h) - f(x_0) - h \sum_{n=0}^{+\infty} na_n x_0^{n-1} \right| \leq \frac{h^2}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)(|x_0| + 1)^{n-2}$$

$$\Leftrightarrow \left| f(x_0 + h) - f(x_0) - h \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x_0^{n-1} \right| \leq \frac{h^2}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)(|x_0| + 1)^{n-2}$$

**c.**

Pour  $h \neq 0$ , alors par la question précédente

$$\frac{\left| f(x_0 + h) - f(x_0) - h \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x_0^{n-1} \right|}{|h|} \leq \frac{h^2}{2|h|} \sum_{n=2}^{+\infty} |a_n| n(n-1)(|x_0| + 1)^{n-2}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \left| \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(x_0)} - \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x_0^{n-1} \right| \leq \underbrace{\frac{|h|}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} |a_n| n(n-1)(|x_0| + 1)^{n-2}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0}$$

Donc par théorème des gendarmes  $f'(x_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x_0^{n-1}$

**N° 6. a.**

On a pour spécialement pour tout  $n, k \in \mathbb{N}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+2) \times (n-k+1)}{k!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$$

Soit  $r, r' \in \mathbb{R}_+^*$ , tel que  $0 < r < r'$

donc  $n^k \left(\frac{r'}{r}\right)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n^k o\left(\frac{1}{n^k}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1)$

Donc  $r'^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{r^n}{n^k}\right)$  Donc  $n^k a_n = o(r^n)$

Ainsi  $a_n \binom{n}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(r^n)$

**b.**

Prouvons par récurrence  $P(k) : f$  est  $\mathcal{C}^k$  et  $\forall x \in \mathbb{R} f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} k! \binom{n}{k} a_n x^{n-k}$

• **Initialisation :**

Pour  $k = 0$  :

On a prouvé à la question précédente que  $f$  est dérivable, donc  $f$  de classe  $\mathcal{C}$

et  $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(0)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 0! \binom{n}{0} a_n x^{n-0} = \sum_{n=0}^{+\infty} 0! \binom{n}{0} a_n x^{n-0} = f(x)$

• **Hérédité :**

Soit  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $P(k)$  soit vérifiée

Soit  $x \in \mathbb{R}$ , alors

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= (f^{(k)})'(x) = \sum_{n=k+1}^{+\infty} k!(n-k) \binom{n}{k} a_n x^{n-k-1} \\ &= \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{k+1}{k+1} k!(n-k) \frac{n!}{k!(n-k)!} a_n x^{n-(k+1)} \\ &= \sum_{n=k+1}^{+\infty} (k+1)! \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} a_n x^{n-(k+1)} = \sum_{n=k+1}^{+\infty} (k+1)! \binom{n}{k+1} a_n x^{n-(k+1)} \end{aligned}$$

Ainsi par principe de récurrence simple  $P(k)$  est vraie pour tout  $k \in \mathbb{N}$

Donc comme  $f$  est dérivable autemps de fois que l'on veut elle est  $\mathcal{C}^{+\infty}$

## Partie II. produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes

**N° 7. a.**

Soit  $n \in \mathbb{N}$

$$C_n = \sum_{k=0}^n c_k = \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{0 \leq p, q \leq k \\ p+q=k}} a_p b_q = \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{0 \leq p, q \leq n \\ p+q=k}} a_p b_q = \sum_{\substack{0 \leq p, q \leq n \\ p+q=n}} a_p b_q$$

$$\text{De plus } C_n = \sum_{\substack{0 \leq p, q \leq n \\ p+q=n}} a_p b_q \leq \sum_{0 \leq p, q \leq n} a_p b_q = A_n B_n$$

Car la somme  $C_n$  comporte moins de terms à sommer car on viens sommer sur les même indices que  $A_n B_n$  mais avec une condition en plus sur les indices

**b.**

$C_n \geq 0$  car somme de de termes positifs, Ainsi  $0 \leq C_n \leq A_n B_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} AB$

Donc par téhorème des gendarmes  $C$  converge

**c.**

Soit  $n \in \mathbb{N}$

Donc  $A_n B_n \leq C_{2n}$

Donc pour  $n$  paire,  $A_{\frac{n}{2}} B_{\frac{n}{2}} \leq C_n$ , prenons donc  $n$  paire pour la fin de cette exercice

Ainsi par la question 7.a.  $\underbrace{A_{\frac{n}{2}} B_{\frac{n}{2}}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} AB} \leq C_n \leq \underbrace{A_n B_n}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} AB}$

Donc par le théorème des gendarmes  $C_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} AB$

**N° 8. a.**

**b.**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,

D'après la question précédente on a :  $0 \leq \sum_{k=0}^n |c_k| \leq \left( \sum_{n=0}^{+\infty} |a_k| \right) \left( \sum_{k=0}^{+\infty} |b_k| \right)$

Or comme  $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_k|$  et  $\sum_{k=0}^{+\infty} |b_k|$  converge car  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  sont absolument convergentes

Donc par théorème des gendarmes  $\sum c_n$  converge absolument

**N° 9.**

Soit  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ ,

Comme  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$  vaut  $e^a$ , de même pour  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b^n}{n!} = e^b$ ,

Alors par tout ce qui a été fait avant  $\left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b^n}{n!} \right)$  converge et vaut:

$$\begin{aligned} e^a e^b &= \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} \frac{b^{n-k}}{n-k!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a+b)^n}{n!} = e^{a+b} \end{aligned}$$

**Q.E.D.**

### Partie III. Fonctions trigonométriques

N° 10.

Soit  $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} &= \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (it)^n}{n!}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!} \overbrace{(1 + (-1)^n)}^{=0 \text{ si } n \text{ impaire}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ paire}}}^{+\infty} 2i^n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} i^{2n} \frac{t^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} = c(t) \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} &= \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (it)^n}{n!}}{2i} = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!} \overbrace{(1 - (-1)^n)}^{=0 \text{ si } n \text{ paire}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ impaire}}}^{+\infty} 2i^{n-1} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} i^{2n+1} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} = s(t) \end{aligned}$$

**Q.E.D.**

N° 11.

Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} s(a)c(b) + c(a)s(b) &= \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i} \frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2} + \frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2} \frac{e^{ib} - e^{-ib}}{2i} \\ &= \frac{1}{4i} (e^{ia+ib} + \cancel{e^{ia-ib}} - \cancel{e^{ib-ia}} - e^{-ia-ib} + e^{ia+ib} - \cancel{e^{ia-ib}} + \cancel{e^{ib-ia}} - e^{-ia-ib}) \\ &= \frac{1}{4i} (2e^{i(a+b)} - 2e^{-i(a+b)}) = \frac{e^{ia+b} - e^{-ia+b}}{2i} = s(a+b) \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} c(a)c(b) - s(a)s(b) &= \frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2} \frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2} - \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i} \frac{e^{ib} - e^{-ib}}{2i} \\ &= \frac{1}{4} (e^{i(a+b)} + \cancel{e^{i(a-b)}} + \cancel{e^{i(b-a)}} + e^{-i(a+b)} + e^{i(a+b)} - \cancel{e^{i(a-b)}} - \cancel{e^{i(b-a)}} + e^{-i(a+b)}) \\ &= \frac{1}{4} (2e^{i(a+b)} + 2e^{-i(a+b)}) = \frac{e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)}}{2} = c(a+b) \end{aligned}$$

**Q.E.D.**

N° 12.

Comme on l'a justifié dans la partie I, on a que  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{C}, x \mapsto e^{ax}$  est dérivable, de dérivée:

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a^n \frac{(x)^{n-1}}{(n-1)!} = a \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ax)^n}{n!} = ae^{ax}$$

Soit  $t \in \mathbb{R}$

$$s'(t) = \frac{ie^{it} + ie^{-it}}{2i} = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = c(t)$$

Et

$$c'(t) = \frac{ie^{it} - ie^{-it}}{2} = -\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = -s(t)$$

**Q.E.D.**

**N° 13.**

Soit  $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} c(t)^2 + s(t)^2 &= \left( \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^2 + \left( \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} (\cancel{e^{2it}} + 2 + \cancel{e^{-2it}} - \cancel{e^{2it}} + 2 - \cancel{e^{-2it}}) = \frac{4}{4} = 1 \end{aligned}$$

Donc  $c(t)^2 + s(t)^2 = 1$

**Q.E.D.**

Ainsi  $c(t)^2 = 1 - s(t)^2 \leq 1$

Donc  $|c(t)| \leq 1$

De même pour  $s(t)$

$s(t)^2 = 1 - c(t)^2 \leq 1$

Donc  $|s(t)| \leq 1$

Ainsi  $s$  et  $c$  sont bornée entre  $[-1; 1]$

**N° 14. a.**

On a prouvé à la question 12. que  $s' = c$

Or  $c(0) = \frac{e^0 + e^0}{2} = \frac{2}{2} = 1 > 0$

et comme on a supposé que  $c$  ne s'annule pas, alors  $\forall x \in \mathbb{R}, c(x) \geq 0$

Ainsi  $s' = c \geq 0$

Donc  $s$  est strictement croissante

**Q.E.D.**

**b.**

On a  $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = -s(x) + s(1)$ , Comme  $-s$  est strictement décroissante

alors pour  $x \in ]1, +\infty[, g'(x) = -s(x) + s(1) < 0$

Donc  $g$  est décroissante sur  $]1, +\infty[$

**Q.E.D.**

**c.**

Soit  $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = c(x) + xs(1) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \text{ car } c(x) \text{ bornée}$$

Ce qui est Absurde car  $g$  décroissante

Donc  $c(x)$  s'annule au moins une fois

**N=° 15.**

**N=° 16. a.**

Soit  $x \in [0, \frac{p}{2}]$

alors on vient de prouver que  $c(x) \neq 0$  comme  $c(0) = 1$

Alors  $\forall t \in [0, \frac{p}{2}], c(t) \geq 0$

Donc comme  $s'(x) = c(x) \geq 0$ , Donc  $s$  est croissante sur  $[0, \frac{p}{2}]$

De plus  $s(0) = 0$  et  $s(\frac{p}{2})^2 = 1 - c(\frac{p}{2})^2 = 1(i)$

Mais comme  $s$  est croissante sur  $[0; \frac{p}{2}]$ , et que  $s(0) = 0$ , alors  $s(\frac{p}{2}) \geq 0$ , Donc par (i),  $s(\frac{p}{2}) = 1$

Ainsi

$x$	0	$\frac{p}{2}$
Signe de $s'$	+	
Variation de $s$		

On vient de prouvé que  $s$  était croissante et comme  $c' = -s \leq 0$ , donc  $c$  est décroissante de plus  $c(0) = 1$  et  $c(\frac{p}{2}) = 0$  par définition de  $p$

Ainsi

$x$	0	$\frac{p}{2}$
Variation de $c$		

**b.**

Soit  $x \in \mathbb{R}$

$$c\left(x + \frac{p}{2}\right) = c(x) \underbrace{c\left(\frac{p}{2}\right)}_{=0} - s(x) \underbrace{s\left(\frac{p}{2}\right)}_{=1} = -s(x)$$

Et

$$s\left(x + \frac{p}{2}\right) = c(x) \underbrace{s\left(\frac{p}{2}\right)}_{=1} + s(x) \underbrace{c\left(\frac{p}{2}\right)}_{=0} = c(x)$$

Et

$$c(x + p) = c\left(\left(x + \frac{p}{2}\right) + \frac{p}{2}\right) = -s\left(x + \frac{p}{2}\right) = -c(x)$$

Et

$$s(x + p) = s\left(\left(x + \frac{p}{2}\right) + \frac{p}{2}\right) = c\left(x + \frac{p}{2}\right) = -s(x)$$

Et

$$c\left(x + \frac{3p}{2}\right) = c\left(\left(x + \frac{p}{2}\right) + p\right) = -c\left(x + \frac{p}{2}\right) = s(x)$$

Et

$$s\left(x + \frac{3p}{2}\right) = s\left(\left(x + \frac{p}{2}\right) + p\right) = -s\left(x + \frac{p}{2}\right) = -c(x)$$

$$\text{Donc } \forall x \in [0; 2p], \forall t \in [0; \frac{p}{2}], c(x) = \begin{cases} c(t) & \text{si } x \in [0; \frac{p}{2}] \\ -s(t) & \text{si } x \in [\frac{p}{2}; p] \\ -c(t) & \text{si } x \in [p; \frac{3p}{2}] \\ s(t) & \text{si } x \in [\frac{3p}{2}; 2p] \end{cases} \text{ et } s(x) = \begin{cases} s(t) & \text{si } x \in [0; \frac{p}{2}] \\ c(t) & \text{si } x \in [\frac{p}{2}; p] \\ -s(t) & \text{si } x \in [p; \frac{3p}{2}] \\ -c(t) & \text{si } x \in [\frac{3p}{2}; 2p] \end{cases}$$

Ainsi, à l'aide de la question précédente, on obtient les tableaux de variation suivant:

$x$	0	$\frac{p}{2}$	$p$	$\frac{3p}{2}$	$2p$
Variation de $s$	0	1	0	-1	0

Et

$x$	0	$\frac{p}{2}$	$p$	$\frac{3p}{2}$	$2p$
Variation de $c$	1	0	-1	0	1



Q.E.D.

c.

Soit  $x \in \mathbb{R}$  Avec ce qui a été fait à la question précédente on a:

$$c(x + 2p) = c((x + p) + p) = -c(x + p) = c(x)$$

Et

$$s(x + 2p) = s((x + p) + p) = -s(x + p) = s(x)$$

Donc  $s$  et  $c$  sont  $2p$ -perdioidiques

Prouvons que  $2p$  est leur plus petite période

Soit  $T \in \mathbb{R}$  tel que  $T$  soit la plus petite période de  $s$  et  $c$

Alors  $\exists n \in \mathbb{N}^*, 2p = nT$ , soit  $n \in \mathbb{N}^*$  un telle  $n$

$$\text{donc } T = \frac{2p}{n}$$

Supposons par l'absudre que  $n \neq 1$ , alors

- si  $n = 2$ ,

$$\text{on a: } \forall x \in \mathbb{R}, s\left(\frac{p}{2} + T\right) = s\left(\frac{p}{2} + \frac{2p}{2}\right) = s\left(\frac{p}{2} + p\right) = -s\left(\frac{p}{2}\right) = -1 \neq 1 = s\left(\frac{p}{2}\right)$$

$$\text{et } 1 = c(0) = c(0 + T) = c(p) = -1$$

Absurde !

- si  $n > 2$ ,

$$\text{alors } \frac{2p}{n} \in ]0; p[$$

Or par la question 16.b., on sais que  $\forall x \in ]0; p[, s(x) \neq 0$  et  $c(x) \neq 1$

$$\text{sauf que } s\left(\frac{2p}{n}\right) = s\left(0 + \frac{2p}{n}\right) = s(0 + T) = s(0) = 0 \text{ et } c\left(\frac{2p}{n}\right) = c(0 + T) = c(0) = 1$$

ce qui est Absurde

Donc  $n = 1$  et donc  $T = 2p$

Ainsi  $2p$  est la plus petite période de  $s$

**Q.E.D.**