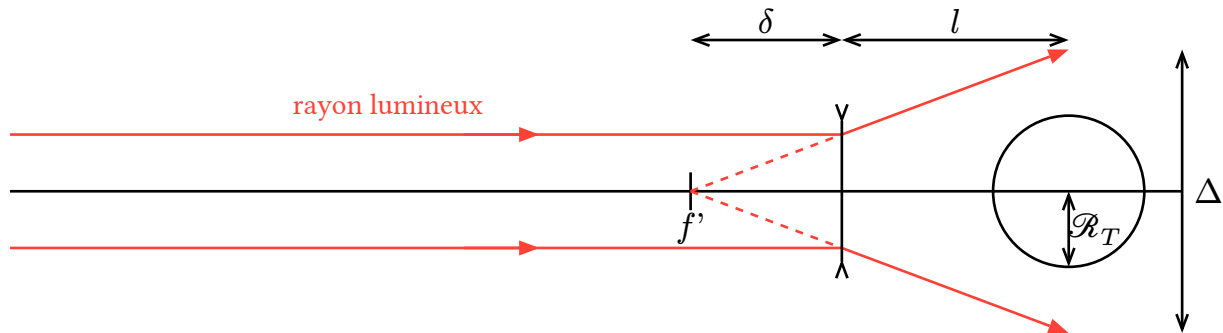


Physique : DM6

Installer un écran solaire dans l'espace

Partie I. A – Préliminaires

N° 1.



Ici on cherche δ pour le quel $R_T = \mu\Delta$, de plus par le théorème de Thalès on a $\frac{\delta}{l} = 2\frac{R_T}{\Delta}$ avec ici $2R_T$ la longueur de la lentille.

Ainsi la distance focale de la lentille est : $\delta = 2l\mu = 2 \times 0,018 \times 1,5 \cdot 10^9 = 54 \cdot 10^3 km$

N° 2.

Tout d'abord les symétries et les invariances du champ $\vec{\mathcal{G}}$, nous permettent de déduire que le champ $\vec{\mathcal{G}}$ est radial.

Pour $r > R_T$, le théorème de Gauss sur une sphère de rayon r , nous donne :

$$-4\pi GM = \oiint_{\mathcal{S}} \vec{\mathcal{G}}(r) \cdot d\vec{S} = \mathcal{G}(r)4\pi r^2$$

Ainsi on a :

$$\vec{\mathcal{G}}(r) = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r$$

De plus comme $\vec{\mathcal{G}} = -\frac{\partial V}{\partial t}\vec{u}_r$, donc $V = G\frac{M}{r}$

N° 3.

Par la 3^{ième} loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

Or $T = \frac{2\pi}{\omega}$, d'où :

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$$

Partie I.B – Les points de Lagrange

N° 4.

A.F.L.

N° 5.

Pour vérifier que l'équation (I.1) est symétrique par rapport à l'axe (Ax), on remplace y par $-y$, ainsi :

$$\begin{cases} -\frac{a(x-(1-a)D)}{((x-(1-a)D)^2+(-y)^2)^{3/2}} - \frac{(1-a)(x+aD)}{((x+aD)^2+(-y)^2)^{3/2}} + \frac{x}{D^3} = 0 \\ -\frac{a(-y)}{((x-(1-a)D)^2+(-y)^2)^{3/2}} - \frac{(1-a)(-y)}{((x+aD)^2+(-y)^2)^{3/2}} + \frac{-y}{D^3} = 0 \end{cases}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{cases} -\frac{a(x-(1-a)D)}{((x-(1-a)D)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{(1-a)(x+aD)}{((x+aD)^2+y^2)^{3/2}} + \frac{x}{D^3} = 0 \\ -\frac{ay}{((x-(1-a)D)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{(1-a)y}{((x+aD)^2+y^2)^{3/2}} + \frac{y}{D^3} = 0 \end{cases}$$

Partie I.C – Dynamique des flyers au voisinage de L_1

Partie I.C 1) – Position de L_1

N° 7.

AN:

$$a = \frac{M_T}{M} = \frac{6 \cdot 10^{24}}{2 \cdot 10^{30} + 6 \cdot 10^{24}} \approx 3 \cdot 10^{-6}$$

De plus pour $a = 0$:

$$0 = \frac{1}{(D-\varepsilon)^2} - \frac{1}{D^2} + \frac{\varepsilon}{D^3} = \frac{D^3 - (D-\varepsilon)^3}{D^3(D-\varepsilon)^2}$$

$$\text{Donc } \cancel{D^3} - \cancel{D^3} + 3D^2\varepsilon - 3\varepsilon^2D + \varepsilon^3 = \varepsilon \underbrace{(\varepsilon^2 - 3D\varepsilon + 3D^2)}_{\Delta = -3D^2 < 0} = 0$$

Donc $\varepsilon = 0$, ainsi la terre et L_1 sont confondus, donc on ne peut pas prendre $a = 0$

N° 8.

Pour $\varepsilon \ll D$, alors

$$\frac{1-a}{D^2 \left(1 - \frac{\varepsilon}{D}\right)^2} - \frac{a}{\varepsilon^2} - \frac{1-a}{D^2} + \underbrace{\left(\frac{\varepsilon}{D^3}\right)}_{=0, \text{ car } \varepsilon \ll D} = 0$$

$$\frac{1-a}{D^2} \left(\cancel{1} + \frac{2\varepsilon}{D} \right) - \cancel{\frac{1-a}{D^2}} = \frac{a}{\varepsilon^2}$$

$$2\varepsilon \frac{1-a}{D^3} = \frac{a}{\varepsilon^2}$$

$$\frac{\varepsilon^3}{D^3} = \frac{a}{2(1-a)}$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \sqrt[3]{\frac{a}{2(1-a)}} \approx \sqrt[3]{\frac{a}{2}}$$

car $a \ll 1$

AN: $\frac{\varepsilon}{D} \approx \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 10^{-6}}{2}} \approx 1.1 \cdot 10^{-2}$

N° 9.

On peut lire sur la figure 2 que $\frac{\varepsilon}{D} \approx 1 \cdot 10^{-2}$

Ce qui est très proche de la valeur calculée précédemment

Partie I.C 2) – Dynamique des flyers au voisinage de L_1

N° 10.

$$\underbrace{\frac{d^2 u}{d\tau^2}}_{\substack{\text{viens de} \\ \text{la seconde loi de Newton}}} = \underbrace{4\pi \frac{dv}{d\tau}}_{\substack{\text{dû à} \\ \text{la force centrifuge}}} + \underbrace{\pi^2 \left(1 + \frac{2a}{\epsilon^2} + \frac{2(1-a)}{(1-\epsilon)^3} \right)}_{\substack{\text{dû à} \\ \text{l'influence gravitationnelle} \\ \text{des autres astres}}} u$$

N° 11.

Posons $\beta = 4\pi^2 \left(\frac{a}{\epsilon^3} + \frac{1-a}{(1-\epsilon)^3} \right)$, ainsi

$$\frac{d^2 w}{d\tau^2} + \beta w = 0$$

On reconnait une équation différentielle du second ordre homogène, dont le polynôme caractéristique $X^2 + \beta = 0$, a pour racine: $\pm i\sqrt{\beta}$.

Ainsi le mouvement du flyer suivant z est périodique, de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\beta}$

N° 12.

Le système (I.3) devient:

$$\begin{cases} \frac{du_p}{d\tau} = 4\pi v_p + 4\pi^2 A u \\ \frac{dv_p}{d\tau} = -4\pi u_p + 4\pi^2 B v \\ \frac{dw_p}{d\tau} = -4\pi^2 C w \end{cases}$$

N° 13.

A.F.L.