Gaspar Daguet

Physique : DM4

I.A Mouvements d'une planète sous l'action d'un astre attracteur

N=° 1.

Pour que A soit considéré comme fixe, if faut $m_a > m_p$
Et

$$\vec{F} = -\ \mathscr{G}\frac{m_a m_p}{r^2}\widehat{u_r}$$

N=° 2.

Le système admet comme plan symetrie : tous les plans passant par O et M
De plus comme on est a symetrie sphérique, il y a invariance par rotation suivant θ et φ
Ainsi le champ de gravitation induit par A s'écrit :

$$\vec{E} = E(r)\widehat{u_r}$$

Donc en appliquant l'analogie du théorème d'Gauss pour la garvitation :

$$\oiint \vec{G}.\overrightarrow{dS} = -4\pi\ \mathscr{G}M_{\text{int}}$$

Or ici $M_{\text{int}} = m_a$ et $\oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = 4\pi r^2 E(r)$
D'où : $\vec{E} = -\ \mathscr{G}\frac{m_a}{r^2}\widehat{u_r}$ Ainsi :

$$\vec{F} = m_p\vec{E} = -\mathscr{G}\frac{m_a m_p}{r^2}\widehat{u_r}$$

N=° 3.

Non car la force exercé sur le point le plus proche et le point le plus éloigné de l'astre A, n'est pas la même, if faudrait donc faire l'intégrale du champ sur tout P pour avoir la valeur moyenne de la force.

N=° 4.

On a par le théorème cinétique :

$$\frac{\partial\ \vec{L}}{\partial t} = \vec{r}\wedge\vec{F}$$

$$\text{Or }\ \vec{L}\ = \vec{r}\wedge\vec{p} = \begin{vmatrix}\text{r}\\0\\0\end{vmatrix}\wedge m\begin{vmatrix}0\\\text{r}\ \dot{\theta}\\0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0\\0\\\text{r}\ \dot{\theta}^2\end{vmatrix}$$

et

$$\vec{r}\wedge\vec{F} = \begin{vmatrix}\text{r}\\0\\0\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}-\mathscr{G}\ \frac{m_a m_p}{r^2}\\0\\0\end{vmatrix} = \vec{0}$$

Donc $\overrightarrow{\mathscr{L}} = m_p C$ avec C un constante, qui est la constante des aire, et le mouvement est plan
Et on a particulièrement $r\dot{\theta}^2 = C$

N=° 5.

Par la seconde loi de Newton on a : $\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -\mathscr{G}\dfrac{m_a}{r^2}\widehat{u_r}$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{\dot{\theta}}\left|\begin{matrix} -\mathscr{G}\dfrac{m_a}{r^2} \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right.$$

Donc $\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}\theta} = -\mathscr{G}\dfrac{m_a}{r^2\dot{\theta}}\widehat{u_r}$
Donc

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}\theta} = \mathscr{G}\frac{m_a}{C}\widehat{u_\theta} + \mathscr{G}m_a\frac{\vec{e}}{C} = \mathscr{G}m_a\frac{\widehat{u_\theta} + \vec{e}}{C} = C\frac{\widehat{u_\theta} + \vec{e}}{p}$$

$$\text{avec } p = \frac{C^2}{\mathscr{G}m_a}$$

Comme $[\widehat{u_\theta}]$ est sans dimention et que l'on a $\widehat{u_\theta} + \vec{e}$, donc $\vec{e}$ est sans dimention
De plus comme $\vec{v} \in (Axy)$, alors $0 = \vec{v} \cdot \widehat{u_z} = \vec{e} \cdot \widehat{u_z}$, donc $\vec{e} \in (Axy)$

N=° 6.

On a $\vec{v} = \left|\begin{matrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} = \dfrac{C}{p}(\widehat{u_\theta} + \vec{e}) \\ 0 \end{matrix}\right.$ par la question précédente

or $\vec{e} = \left|\begin{matrix} e\sin(\theta) \\ e\cos(\theta) \\ 0 \end{matrix}\right.$, d'où $\vec{v} = \dfrac{C}{p}\left|\begin{matrix} e\sin(\theta) \\ 1 + e\cos(\theta) \\ 0 \end{matrix}\right.$,
Ainsi :

$$\dot{r} = \frac{C}{p}e\sin(\theta) \text{ et } r\dot{\theta} = \frac{C}{r} = \frac{C}{p}(1 + e\cos\theta)$$

D'où $r = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$
Et de plus comme $-e \leq e\cos\theta \leq e$, alors $\underbrace{1 - e}_{\neq 0 \text{ car } e<1} \leq 1 - e\cos\theta \leq 1 + e$
Donc $\dfrac{p}{1+e} \leq \dfrac{p}{1 + e\cos\theta} = r \leq \dfrac{p}{1-e}$
Donc le mouvement est bornée et la trajectoire est elipsoïdal

I.B Période du mouvement

N=° 7.

On sait par la question précédente que

$$\dot{\theta} = \frac{C}{r^2} = \frac{C(1 + e\cos\theta)^2}{p^2} = \frac{\sqrt{\mathscr{G}m_a}}{p^{\frac{3}{2}}}(1 + e\cos\theta)^2$$

Or $\dot{\theta} = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$, d'où :

$$\mathrm{d}t = \frac{p^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mathscr{G}m_a}} \frac{\mathrm{d}\theta}{(1 + e\cos\theta)^2}$$

$$\text{Donc } T = \frac{p^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mathscr{G}m_a}} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{(1 + e\cos\theta)^2} = \frac{p^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mathscr{G}m_a}} \mathscr{I}$$

$$\text{avec } \mathscr{I} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{(1 + e\cos\theta)^2}$$

N=° 8.

Si $e = 0$, alors la trajectoire est circulaire, et

$$\mathscr{I} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 2\pi$$

$$\text{Donc } T = 2\pi \frac{p^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mathscr{G}m_a}}$$

$$\text{Donc } \frac{T^2}{p^3} = 4\frac{\pi^2}{\mathscr{G}m_a}$$

On retrouve ainsi la troisième lois de Kepler, *i.e.* :
le rapport du carré la période par le cube du demi grand axe est égale au rapport du le carré du périmètre du cercle unité par le produit de la constante de gravitation universel avec la masse de l'astre A attracteur

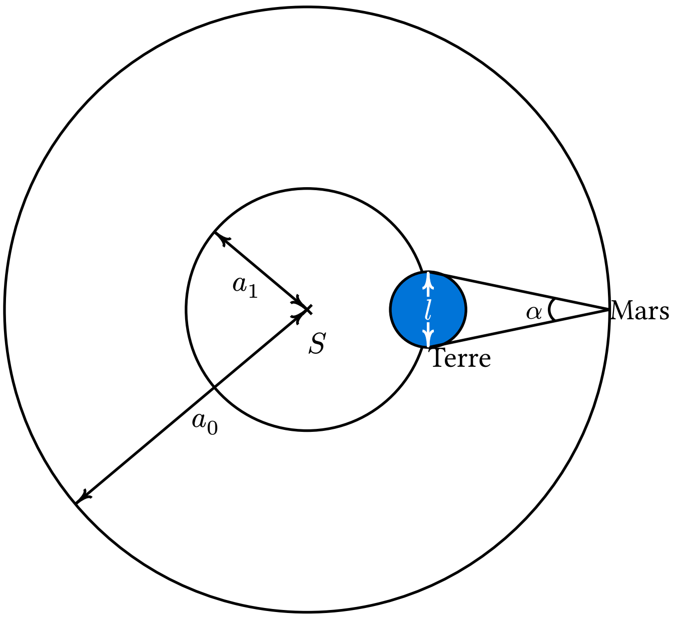
N=° 9.

```python
from math import cos, pi
from matplotlib.pyplot import show, plot

def I(x,N):
    res = 0
    for i in range(N):
        res += (1 / (1 + x  * cos(2 * pi * i / N))**2)
    return 2 * pi/N * res

precision = 10000
N = 10000

Y = [I(i/(2*N), precision) for i in range(N +1)]
X = [i/(2*N) for i in range(N+1)]

plot(X,Y)
show()
```

Avec N le nombre de points et precision la précisision de l'intégrale (ici calculé par la méthode de riemann)

I.C Mesure de l'unité astronomique

N=° 10.



N=° 11.

On a par des considératin géométrique : $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{l}{2(a_1 - a_0)}$, or $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \approx \frac{\alpha}{2}$

Donc $\alpha \approx \frac{l}{a_1 - a_0}$ donc $a_1 = a_0 + \frac{l}{\alpha}$

Et par la 3ième loi de Kepler : $\frac{T_0^2}{a_0^3} = \frac{T_1^2}{a_1^3}$

Donc

$$\frac{a_0}{T_0^{\frac{2}{3}}} = \frac{a_1}{T_1^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{T_1^{\frac{2}{3}}}\left(a_0 + \frac{l}{\alpha}\right)$$

$$\text{Donc } a_0\left(\frac{1}{T_0^{\frac{2}{3}}} - \frac{1}{T_1^{\frac{2}{3}}}\right) = \frac{l}{\alpha T_1^{\frac{2}{3}}}$$

$$\text{Donc } a_0 = \frac{l}{\alpha T_1^{\frac{2}{3}}}\frac{T_1^{\frac{2}{3}}T_0^{\frac{2}{3}}}{T_1^{\frac{2}{3}} - T_0^{\frac{2}{3}}} = \frac{l}{\alpha}\frac{1}{\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{\frac{2}{3}} - 1}$$

On trouve également pour que $a_0 = 1$ a.u. : $\dfrac{l}{a_0\alpha}\dfrac{1}{\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{\frac{2}{3}} - 1} = 1$

N=° 12.

AN : $\dfrac{7.10^3}{1,5.10^{11} \times 6,8.10^{-5}}\dfrac{1}{\left(\frac{687}{365}\right)^{\frac{3}{2}} - 1} \approx 1.33 > 1$

Donc la valeur est compatible a 33% près

II Structure et énergie des étoiles

II.A L'énergie gravitationnelle

N=° 13.

On a $W_g = -W\left(\vec{F}\right) < 0$ car la force est opposée au déplacement

N=° 14.

On a $\rho = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \dfrac{3M}{4\pi R^3}$

Et donc $m = \rho.\dfrac{4}{3}\pi r^3 = M\left(\dfrac{r}{R}\right)^3$

Et $\mathrm{d}m$ correspond à la masse de la sphère d'épaisseur $\mathrm{d}r$

Donc

$$\mathrm{d}m = \rho.\frac{4}{3}\pi(r + \mathrm{d}r)^3 - m = M\left(\frac{r}{R}\right)^3\left(1 + \frac{\mathrm{d}r}{r}\right)^3 - m$$

$$\mathrm{d}m = m\left(\cancel{1} + 3\frac{\mathrm{d}r}{r}\right) - \cancel{m} = 3m\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

N=° 15.

Comme $W = -W_g = -\Delta E_p$ donc $\mathrm{d}W_g = \mathrm{d}E_p$

$$\text{Or } \vec{F} = -\vec{\nabla}.E_p = \left|\begin{array}{l}\dfrac{\partial E_p}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial E_p}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial E_p}{\partial \varphi}\end{array}\right. = \left|\begin{array}{l}-\mathscr{G}\dfrac{m\,\mathrm{d}m}{r^2} \\ 0 \\ 0\end{array}\right.$$

Donc $E_p = \mathscr{G}\dfrac{m\,\mathrm{d}m}{r}$ Ainsi la variation de E_p entre r et $+\infty$ vaut : $\mathrm{d}E_p = -\mathscr{G}\dfrac{m\,\mathrm{d}m}{r}$

Donc $W_g = -\mathscr{G}\dfrac{m\,\mathrm{d}m}{r}$
Et donc

$$\mathrm{d}W_g = -3\mathscr{G}m^2\frac{\mathrm{d}r}{r} = -3M^2\left(\frac{r}{R}\right)^6\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = -3M^2\frac{r^4}{R^6}\,\mathrm{d}r$$

Et donc en intégrant :

$$W_g = -\frac{3}{5}\,\mathscr{G}M^2\frac{R^5}{R^6} = -\frac{3}{5}\,\mathscr{G}\frac{M^2}{R}$$

II.B Pression cinétique

N=° 16.

Sur ce volume il y a le poid et les forces de préssion qui s'exerce
Ainsi en prenand $z_1 = z$ et $z_2 = z + \mathrm{d}z$
Donc comme le système est à l'équilibre :

$$P(z)S - P(z+\mathrm{d}z)S - \rho(z)S\,\mathrm{d}zG(z) = 0$$

$$\text{Donc } \frac{\partial P}{\partial z} - \rho G = 0 \text{ Donc } \frac{\partial P}{\partial z} = \rho G$$

N=° 17.

Dans le modèle des gaz parfaits

N=° 18.

Par le théorème de Gauss, on obtient : $\vec{G} = -\,\mathscr{G}\rho\frac{4}{3}\pi r^3\widehat{u_r} = -\,\mathscr{G}M\dfrac{r}{R^3}$
par la question 16 :

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\rho\,\mathscr{G}M\frac{r}{R^3} = -\frac{3}{4\pi}\frac{\mathscr{G}M}{R^3}M\frac{r}{R^3} = -\frac{3}{4\pi}\frac{\mathscr{G}M^2}{R^6}r$$

$$\text{Donc } P(r) = -\frac{3}{8\pi}\frac{\mathscr{G}M^2}{R^6}r^2 + K \text{ avec K une constante}$$

On sait que $P(R) = 0$ donc $K = \dfrac{3}{8\pi}\dfrac{\mathscr{G}M^2}{R^6}R^2$,
D'où

$$P(r) = \frac{3}{8\pi}\frac{M^2}{R^6}(R^2 - r^2)$$

N=° 19.

Par la question précédente $P(r) = \dfrac{3}{8\pi}\dfrac{\mathscr{G}M^2}{R^6}(R^2 - r^2)$ et on a $\mathrm{d}V = 4\pi r^2\,\mathrm{d}r$
Donc

$$\mathrm{d}E_c = P\,\mathrm{d}V = \frac{9}{4}\frac{\mathscr{G}M^2}{R^6}(R^2 - r^2)r^2$$

$$\text{donc } E_c = \frac{9}{4}\frac{\mathscr{G}M^2}{R^6}\underbrace{\int_0^R (R^2 - r^2)r^2\,\mathrm{d}r}_{=\frac{2}{5}R^2} = \frac{3}{10}\frac{\mathscr{G}M^2}{R}$$

On retrouve W_g : $E_c = -\dfrac{W_g}{2}$ et donc que E_c et $|W_g|$ sont de même ordre de grandeur