Gaspar Daguet

Maths : DM ᚢᚷ

Il est important avant de commencer lire ce DM
d'avoir bien compris le tableau et les exemples suivants

symbole usuel	symbole du DM	prononciation
0	ᚠ	fé
1	ᚢ	ur
2	ᚦ	tur
3	ᚨ	an
4	ᚱ	rai
5	ᚲ	kau
6	ᚷ	gèb
7	ᚹ	wun
8	ᚺ	hag
9	ᚾ	nau
10	ᛃ	je
11	ᛇ	ei
$=$	ᛝ	ing/i ng
$+$	ᛏ	ti
$-$	ᛉ	al
$\times$	ᛞ	dag
$\div$	ᛚ	lag
$\in$	ᛊ	so
$\forall$	ᛈ	per
$\exists$	ᛒ	ber
$\exists!$	!ᛒ	\
$>$	ᛗ	man
$<$	ᛖ	e
$\geq$	ᛗᛝ	maning
$\leq$	ᛖᛝ	ehwing
$\neq$	ᛜ	naing
$\subset$	ᚫ	suz
$\supset$	ᚬ	zus

ᚷᚹ ᛏ ᚲᚲ ᛝ ᚢᚠᚠ ce qui est équivalant à $79 + 65 = 144$

$$e^{ɋ} \underset{ɋ \to ᚠ}{ᛝ} ᚢ ᛏ ɋ ᛏ \frac{ɋ^{ᚦ}}{ᚦ!} ᛏ \cdots ᛏ \frac{ɋ^{ᛥ}}{ᛥ!} ᛏ o\left(ɋ^{ᛥ}\right)$$

est équivalant à

$$e^x \underset{x \to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{x!} + o(x^n)$$

Problème ᚦ : nombres algébrique et extensions de corps

Partie I. extensions de corps

N=° ᚢ. Premiers exemples a.

il est évident que ℝ est un sous-corps de ℂ et de plus ℂ est de dimension finis,
donc ℂ est une extention finie de ℝ

de plus soit ᛋ ᛊ ℂ alors

$$\text{ᛈ ᛃ, ᛔ ᛊ } \mathbb{R}\text{, ᛋ ᛟ ᛃ ᛏ } i \text{ ᛔ} \Leftrightarrow \text{ ᛋ ᛊ Vect(ᚢ, } i\text{)}$$

Ainsi comme ᚢ et i ne sont pas colinéaire dans ℝ, Vect(ᚢ, i) forme une base de ℂ
Ainsi [ℂ : ℝ] ᛟ ᚦ

soit ᛯ un sous-corps qui contient ℝ
comme [ℝ : ℝ] ᛟ ᚢ et que l'on vient de prouver que [ℂ : ℝ] ᛟ ᚦ
il apparait donc comme condition que, ᚢ ᛖᛟ [ᛯ : ℝ] ᛖᛟ ᚦ
Ainsi [ᛯ : ℝ] ᛟ ᚢ ou [ᛯ : ℝ] ᛟ ᚦ
Et ansi ᛯ ᛟ ℝ ou ᛯ ᛟ ℂ

b.

Soit ᛃ ᛊ ℚ(√ᚦ), alors ᛒ ᛔ, ᛋ ᛊ ℚ, ᛃ ᛟ ᛔ ᛏ ᛋ √ᚦ, alors prenons ᛋ ᛟ ᚠ
ainsi ᛃ ᛟ ᛔ ᛊ ℚ, donc ℚ ᚼ ℚ(√ᚦ) et comme ℚ est un corps
de ℚ(√ᚦ)
de plus, soit ᛃ ᛊ ℚ(√ᚦ) alors ᛒ ᛔ, ᛋ ᛊ ℚ, ᛃ ᛟ ᛒ ᛏ ᛔ √ᚦ, soit un telle ᛋ, ᛔ
donc ᛃ ᛟ ᛋ ᛏ ᛔ √ᚦ ᛊ Vect(ᚢ, √ᚦ)
et supposons par l'absurde ᛒ ᛃ, ᛔ ᛊ ℚ ᛞ ℚ*, ᛃ ᛏ ᛔ √ᚦ ᛟ ᚠ
alors $\frac{\text{ᛃ}}{\text{ᛔ}}$ ᛟ ᛉ √ᚦ ce qui est absurde car $\frac{\text{ᛃ}}{\text{ᛔ}}$ ᛊ ℚ, donc ᛃ ᛟ ᛔ ᛟ ᚠ
Ainsi (ᚢ, √ᚦ) est une base de ℚ(√ᚦ)
Donc [ℚ(√ᚦ) : ℚ] ᛟ ᚦ

c. i.

Soit P ᛊ ℚ[X] tel que P(∛ᚦ) ᛟ ᚠ
prenons la divisions euclidienne de X^ᚨ ᛉ ᚦ par P
ce qui nous donne X^ᚨ ᛉ ᚦ ᛟ PQ ᛏ R avec Q ᛊ ℚ_ᚢ[X] et R ᛊ ℚ[X] tel que deg R ᛖ ᚦ
En évaluant notre expression précédente en ∛ᚦ on obtient :

$$\text{(∛ᚦ)}^{\text{ᚨ}} \text{ ᛉ ᚦ ᛟ ᚠ ᛟ } \underbrace{\text{P(∛ᚦ)}}_{\text{ᛟ ᚠ}} \text{ ᛏ R}$$

donc R ᛟ ᚠ et donc deg R ᛟ ᚠ
ainsi P divise X^ᚨ ᛉ ᚦ

Ainsi Comme P divise X^ᚨ ᛉ ᚦ et que deg P ᛟ ᚦ,
alors P et X^ᚨ ᛉ ᚦ possède deux racines en commun dont ∛ᚦ
et comme X^ᚨ ᛉ ᚦ ᛟ (X ᛉ ∛ᚦ)(X ᛉ ∛ᚦ $e^{i\frac{\pi}{ᚨ}}$)(X ᛉ ∛ᚦ $e^{i\frac{ᚦ\pi}{ᚨ}}$) donc P à en plus une racine complexe
or un polynôme dans ℝ qui possède une racine complexe possède sont conjugée

ce qui n'est pas le cas pour P donc $P \notin \mathbb{Q}[X]$ ce qui est absurde

Donc $\nexists P \in \mathbb{Q}[X], P\left(\sqrt[3]{2}\right) = 0$

ii.

Par un résonnement annaloge à la question 1 .b on montre que $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)$,
De plus soit $x \in \mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)$ alors soient $a, b, c \in \mathbb{Q}, x = a + b\ \sqrt[3]{2} + c\ \left(\sqrt[3]{2}\right)^2$
donc $x \in \mathrm{Vect}\left(1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}^2\right)$
donc $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)$ est une extensions finis et $\left[Q\left(\sqrt[3]{2}\right) : \mathbb{Q}\right] = 3$

d.

Soient $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{Q}$ tels que $\sum_{c=1}^{n} a_c \ln(p_c) = 0$,
alors

$$\ln\left(\prod_{c=1}^{n} p_c^{a_c}\right) = 0 \text{ Donc } \prod_{c=1}^{n} p_c^{a_c} = 1$$

Or comme $\forall c \in [\![1; n]\!], a_c \in \mathbb{Q}$ donc $\exists d, b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{N}, \forall c \in [\![1; n]\!], a_c = \frac{b_c}{d}$. Ainsi

$$\left(\prod_{c=1}^{n} p_c^{b_c}\right)^{\frac{1}{d}} = 1 \Leftrightarrow \prod_{c=1}^{n} p_c^{b_c} = 1$$

Or comme $\forall c \in [\![1; n]\!], p_c^{b_c} \in \mathbb{N}$ Donc $p_1^{c_1} = \cdots = p_n^{c_n} = 1$ Donc $c_1 = \cdots = c_n = 0$
Et donc $a_1 = \cdots = a_n = 0$
Ainsi $(\ln(p_1), \cdots, \ln(p_n))$ est libre
Et donc la dimmension de $\mathbb{R}$ n'est pas finis, donc $\mathbb{R}$ n'est pas une extention finis de $\mathbb{Q}$

N=°3.

soit $x \in \mathbf{L}$, alors $\exists!\ a_1, \cdots, a_n \in \mathbf{K}$ tel que, $x = \sum_{b=1}^{n} \alpha_b a_b$

Or on a $\forall b \in [\![1, n]\!], \exists!\ c_1, \cdots, c_p \in k, a_b = \sum_{d=1}^{p} \beta_d c_d$

Ainsi $\exists!\ a_1, \cdots, a_n \in \mathbf{K} \in k, \exists!\ c_1, \cdots, c_p \in k, x = \sum_{\substack{1 \leq b \leq n \\ 1 \leq d \leq p}} \alpha_b \beta_d a_b c_d$
Donc x s'écrit d'une manière unique comme des élément de k,
donc la famille $\left(\alpha_i \beta_j\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une base de du k-espace vectoriel $\mathbf{L}$
De plus la famille $\left(\alpha_i \beta_j\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ comporte exactement np éléments
Donc $\mathbf{L}$ est une extensions finis de k et $[\mathbf{L} : k] = [\mathbf{L} : \mathbf{K}][\mathbf{K} : k]$

Partie II. Éléments algébriques

N=° ᚨ.

pour montrer que $\mathbb{K}[\alpha]$ ᛟ $\{P(\alpha), P$ ᚲ $\mathbb{K}[X]\}$,
on montre que $\{P(\alpha), P$ ᚲ $\mathbb{K}[X]\}$ ᛟ $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(\alpha^n, n$ ᚲ $\mathbb{N})$
pour cela,

$$ᛤ \text{ ᚲ } \{P(\alpha), P \text{ ᚲ } \mathbb{K}[X]\} \Leftrightarrow \text{ᛒ } ᛩ_{ᚠ}, \cdots, ᛩ_n \text{ ᚲ } \mathbb{K} \text{ ᛤ ᛟ } \sum_{ᛥ ᛟ ᚠ}^{n} ᛩ_{ᛥ} \alpha^{ᛥ} \text{ ᚲ } \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(\alpha^n, n \text{ ᚲ } \mathbb{N}) \text{ ᛟ } \mathbb{K}[\alpha]$$

Donc $\{P(\alpha), P$ ᚲ $\mathbb{K}[X]\}$ ᛟ $\mathbb{K}[\alpha]$

soient ᛥ, ᛩ ᚲ $\mathbb{K}[\alpha]$, alors ᛒ P, Q ᚲ $\mathbb{K}[X]$, $P(\alpha)$ ᛟ ᛥ et $Q(\alpha)$ ᛟ ᛩ, alors:

- ᚠ ᚲ $\mathbb{K}[\alpha]$
- ᛥ ᛉ ᛩ ᛟ $P(\alpha)$ ᛉ $Q(\alpha)$ ᛟ $(P$ ᛉ $Q)(\alpha)$ et P ᛉ Q ᚲ $\mathbb{K}[X]$
- ᛥ ᛞ ᛩ ᛟ $P(\alpha)$ ᛞ $Q(\alpha)$ ᛟ $(P$ ᛞ $Q)(\alpha)$ et PQ ᚲ $\mathbb{K}[X]$

Donc $\mathbb{K}[\alpha]$ est un sous-anneau de $\mathbb{L}$

Et $\mathrm{Vect}(\alpha^n, n$ ᚲ $\mathbb{N})$ est le plus petit ensemble stable par ᛏ et ᛞ,
ce qui fais de luis le plus petit sous-anneau contanant α et $\mathbb{K}$

N=° ᚱ.

procédons par double inclusion pour prouver que α est algébrique sur $\mathbb{K}$ si et seulement si il existe n ᚲ $\mathbb{N}$ tel que $(1, \alpha, \cdots, \alpha^n)$ soit une famille liée
$(\Rightarrow)$ Supposons que α est algébrique sur $\mathbb{K}$, alors

$$\text{ᛒ ᛤ ᚲ } \mathbb{K}[X], ᛤ(\alpha) \text{ ᛟ ᚠ} \Leftrightarrow \text{ᛒ } n \text{ ᚲ } \mathbb{N}, \text{ᛒ } ᛥ_{ᚠ}, \cdots, ᛥ_n \text{ ᚲ } \mathbb{K}, ᛤ(\alpha) \text{ ᛟ } \sum_{ᛩ ᛟ ᚠ}^{n} ᛥ_{ᛩ} \alpha^{ᛩ} \text{ ᛟ ᚠ}$$

$$\text{Donc ᛉ} \sum_{ᛩ ᛟ ᚢ}^{n} ᛥ_{ᛩ} \alpha^{ᛩ} \text{ ᛟ } ᛥ_{ᚠ}$$

Donc $(1, \alpha, \cdots, \alpha^n)$ est liée

$(\Leftarrow)$ Supposons que $(1, \alpha, \cdots, \alpha^n)$ soit liée, alors:

$$\text{ᛒ } ᛥ_{ᚠ}, \cdots, ᛥ_n \text{ ᚲ } \mathbb{K}, \text{ᛒ ᛣ ᚲ } \mathbb{N}, \text{ᛡ } \alpha^{ᛣ} \text{ ᛟ } \sum_{\substack{ᛩ ᛟ ᚠ \\ ᛩ \diamond ᛣ}}^{n} ᛥ_{ᛩ} \alpha^{ᛩ}$$

$$\text{Donc } \sum_{\substack{ᛩ ᛟ ᚠ \\ ᛩ \diamond ᛣ}}^{n} ᛥ_{ᛩ} \alpha^{ᛩ} \text{ ᛉ ᛡ } \alpha^{ᛣ} \text{ ᛟ ᚠ}$$

en posant ᛉ ᛡ ᛟ $ᛥ_{ᛣ}$, on obtient

$$\sum_{\substack{ᛩ ᛟ ᚠ \\ ᛩ \diamond ᛣ}}^{n} ᛥ_{ᛩ} \alpha^{ᛩ} \text{ ᛉ ᛡ } \alpha^{ᛣ} \text{ ᛟ } \sum_{ᛩ ᛟ ᚠ}^{n} ᛥ_{ᛩ} \alpha^{ᛩ} \text{ ᛟ ᚠ}$$

Or $\sum_{ᛩ ᛟ ᚠ}^{n} ᛥ_{ᛩ} \alpha^{ᛩ}$ ᚲ $\mathbb{R}[X]$
Donc α est algébrique

Par le principe de double inclusion
α est algébrique si et seulement si il existe n ᛊ $\mathbb{N}$ tel que $(1, \alpha, \cdots, \alpha^n)$ est liée

N=° ᚲ.

Soit ᛃ ᛊ $\mathbb{L}$, alors ᛃ est algébrique de degré ᚢ sur $\mathbb{K}$ si et seulement si (ᚢ, ᛃ) est liée
si et seulement si il existe ᛒ ᛊ $\mathbb{K}$, ᛃ ᛝ ᛒ ᛞ ᚢ ᛝ ᛒ si et seulement si ᛃ ᛊ $\mathbb{K}$
Donc on a bien (ᚢ, ᛃ) liée $\Leftrightarrow$ ᛃ ᛊ $\mathbb{K}$

N=° ᚷ.

Supposons que $\mathbb{L}$ est une extention finie de $\mathbb{K}$ et soit ᛃ ᛊ $\mathbb{L}$
alors ᛃ est algébrique sur $\mathbb{K}$ si:

$$a$$

N=° ᚦ. a.

On sait par la définitions que $(1, \alpha, \cdots, \alpha^{d\,ᛉ\,ᚢ})$ est libre
Et Vect(α^n, n ᛊ $\mathbb{N}$) ᛝ Vect(α^n, n ᛊ ⟦ᚢ; d ᛉ ᚢ⟧)
Ainsi Vect(α^n, n ᛊ ⟦ᚢ; d ᛉ ᚢ⟧) est une base de $\mathbb{K}[\alpha]$

b.

Supposons que β ⋄ ᚠ, alors prouvons que f_β est linéaire et bijective

- linéarité:

Soient ᛒ ᛊ $\mathbb{K}$, ᛃ, ᛡ ᛊ $\mathbb{K}[\alpha]$, f_β(ᛒ ᛃ ᛏ ᛡ) ᛝ β ᛒ ᛃ ᛏ β ᛡ ᛝ ᛒ f_β(ᛃ) ᛏ f_β(ᛡ) donc f_β ets linéaire

- bijectivité:

soit ᛃ ᛊ $\mathbb{K}[\alpha]$, f_β(ᛃ) ᛝ ᚠ
alors β ᛃ ᛝ ᚠ donc ᛃ ᛝ ᚠ car β ⋄ ᚠ
donc Ker(f_β) ᛝ {ᚠ}. Donc f_β est injéctive
Et soient ᛃ, ᛡ ᛊ $\mathbb{K}[\alpha]$, f_β(ᛃ) ᛝ ᛡ
alors ᛃ ᛝ $\frac{ᛡ}{\beta}$ car β ⋄ ᚠ, et donc f_β est surjective
et comme f_β va de $\mathbb{K}[\alpha]$ dans $\mathbb{K}[\alpha]$
f_β est un automorphisme

c.

On a: $\mathbb{K}$ ᚽ $\mathbb{K}[\alpha]$, donc $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}[\alpha]$
De plus comme $(1, \alpha, \cdots, \alpha^{d\,ᛉ\,ᚢ})$ est une base de $\mathbb{K}[\alpha]$ qui comporte d élément
Ainsi $\mathbb{K}[\alpha]$ est une extensions finie de $\mathbb{K}$, avec $[\mathbb{K}[\alpha] : \mathbb{K}]$ ᛝ d

d.

Il est évident que $\mathbb{Q}$(ᚠ√ᚦ) ᚽ $\mathbb{C}$, et commme $\mathbb{Q}$ est un sous groupe et que ᚠ√ᚦ ᛊ $\mathbb{C}$,
alors par les questions précédente:
$\mathbb{Q}$(ᚠ√ᚦ) est un sous-corps de $\mathbb{C}$

N=° ᚺ.

i) $\Rightarrow$ ii) est évident car $\mathbb{K}[\alpha]$ est un corps et donc stable par ᛞ

ii) $\Rightarrow$ iii) Supposons que $\alpha^{-1} \subset \mathbb{K}[\alpha]$, alors
$\exists P \subset \mathbb{K}[X], P(\alpha) = \alpha^{-1}$, soit P un telle polynôme, alors:

$$\begin{aligned} P(\alpha) = \alpha^{-1} &\Leftrightarrow \alpha\ P(\alpha) = \alpha\alpha^{-ᚦ} = 1 \\ &\Leftrightarrow \alpha\ P(\alpha) - \alpha = 0 \end{aligned}$$

Posons $Q = X\ P(X) - 1 \in \mathbb{K}[X]$, ainsi $Q(\alpha) = 0$
Et donc α est constructible
iii) $\Rightarrow$ i) Supposons que α est algébrique sur $\mathbb{K}$, alors par la question ᚹ.
$\mathbb{K}[\alpha]$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$

Ainsi par un raisonnement cyclique,
on a bien que $\mathbb{K}[\alpha]$ est un sous-corps de $\mathbb{L} \Leftrightarrow \alpha^{-1} \in \mathbb{K}[\alpha] \Leftrightarrow \alpha$ est algébrique sur $\mathbb{K}$

Partie III. Polynômes minimal d'un élément algébrique

N=° ᚾ.

Si I_α na possède pas une polynôme de degré q,
alors soit $P \in I_\alpha$ de degré q, alors soit a sont coefficient dominant
alors le polynome $\frac{P}{a}$ est de degrés q et sont coefficient dominant vaut 1
De plus $\frac{P}{a}(\alpha) = \frac{P(\alpha)}{a} = \frac{0}{a} = 0$ Donc $\frac{P}{a} \in I_\alpha$
Donc I_α possède un polynôme unitaire de degrés q

Soient $P, Q \in I_\alpha$ deux polynômes unitaire de degrés q
Alors $\exists a_0, \cdots, a_{q-1}, b_0, \cdots, b_{q-1} \in \mathbb{K}, P = X^q + \sum_{k=0}^{q-1} a_k X^k$ et $Q = X^q + \sum_{k=0}^{q-1} b_k X^k$
Alors $P(\alpha) - Q(\alpha) = \sum_{k=0}^{q-1} a_k \alpha^k - \sum_{k=0}^{q-1} b_k \alpha^k = 0$
donc $\sum_{k=0}^{q-1} (a_k - b_k)\alpha^k$, et comme $\left(1, \alpha, \cdots, \alpha^{q-1}\right)$ est libre, on a: $\forall k \in [\![0; q-1]\!], a_k = b_k$
Ainsi on a bien $P = Q$
Donc il existe un unique polynome unitaire de degré q dans I_α

N=° ᛊ.

Supposons par l'absurde que μ_α est réductible,
alors $\exists P, Q \in \mathbb{K}[X], \mu_\alpha = P\ Q$, soient de tels polynômes
Ainsi $\mu_\alpha(\alpha) = P(\alpha)\ Q(\alpha) = 0$ donc $P(\alpha) = 0$ ou $Q(\alpha) = 0$,
donc α est algébrique de degrés inférieur stricte à d, absurde !
Donc μ_α est irréductible

Soit $P \in I_\alpha$, alors $\exists Q \in \mathbb{K}[X], P = \mu_\alpha\ Q$ car $P(\alpha) = 0$, ainsi $I_\alpha \subset \{\mu_\alpha\ P, P \in \mathbb{K}[X]\}$
Et soit $\exists Q \in \mathbb{K}[X], P = \mu_\alpha\ Q$, alors $P(\alpha) = (\mu_\alpha\ Q)(\alpha) = \mu_\alpha(\alpha)\ Q(\alpha) = 0$,
donc $P \in I_\alpha$ et donc $\{\mu_\alpha\ Q, Q \in \mathbb{K}[X]\} \subset I_\alpha$
Ainsi par double inclusion $\{\mu_\alpha\ Q, Q \in \mathbb{K}[X]\} = I_\alpha$

N=° ᛇ.

étant donner que μ_α est le plus petit polynômes telle que $\mu_\alpha(\alpha)$ ᛝ ᚠ
alors $(1, \alpha, \cdots, \alpha^q)$ est la plus petite famille liée, donc le degrés de alpha vaut q est d, si bien que:
$\deg \mu_\alpha$ ᛝ d

N=° ᚢᚠ.

il est évident que le polynôme minimal est $X^{ᚨ}$ ᛉ ᚦ

N=° ᚢᚢ.

Posons ᛗ ᛝ ᛒ $X^{ᚱ}$ ↑ ツ $X^{ᚨ}$ ↑ ᚲ $X^{ᚦ}$ ↑ ᛃ X ↑ ᛭ ⋚ $\mathbb{Q}[X]$, avec ᛒ, ツ, ᚲ, ᛃ, ᛭ non tous nul
Alors cherchons ᛒ, ツ, ᚲ, ᛃ, ᛭ tel que ᛗ(α) ᛝ ᚠ
Ainsi

ᛗ(α) ᛝ ᛒ (√ᚦ ↑ √ᚨ)^{ᚱ} ↑ ツ (√ᚦ ↑ √ᚨ)^{ᚨ} ↑ ᚲ (√ᚦ ↑ √ᚨ)^{ᚦ} ↑ ᛃ (√ᚦ ↑ √ᚨ) ↑ ᛭

ᛝ ᚱᚢᛒ ↑ ᚢᚺᛒ √ᚷ ↑ ᛇツ √ᚦ ↑ ᚾツ √ᚨ ↑ <ᚲ ↑ ᚦᚲ √ᚷ ↑ ᛃ √ᚦ ↑ ᛃ √ᚨ ↑ ᛭

ᛝ (ᚢᚺᛒ ↑ ᚦᚲ)√ᚷ ↑ (ᚾツ ↑ ᛃ)√ᚨ ↑ (ᛇツ ↑ ᛃ)√ᚦ ↑ ᚱᚢᛒ ↑ <ᚲ ↑ ᛭ ᛝ ᚠ

Alors comme (1, √ᚦ, √ᚨ, √ᚷ) est libre, on obtient:

ᚢᚺᛒ ↑ ᚦᚲ ᛝ ᚠ	⇔	ツ ᛝ ᚠ	⇔	ツ ᛝ ᚠ
ᚾツ ↑ ᛃ ᛝ ᚠ		ᛃ ᛝ ᚠ		ᛃ ᛝ ᚠ
ᛇツ ↑ ᛃ ᛝ ᚠ		ᚲ ᛝ ᛉ ᛜᛒ		ᚲ ᛝ ᛉ ᛜᛒ
ᚱᚢᛒ ↑ <ᚲ ↑ ᛭ ᛝ ᚠ		ᚱᚢᛒ ↑ <ᚲ ↑ ᛭ ᛝ ᚠ		ᛒ ᛝ ᛭

Ainsi ᛗ ᛝ ᛭ $X^{ᚱ}$ ᛉ ᛜ᛭ $X^{ᚦ}$ ↑ ᛭, ainsi on prouve que α est algébrique
et que ᛗ est le polynôme minimal de α sur $\mathbb{Q}$ car sinon on aurais ᛒ ᛝ ᚠ

Partie IV. Nombres algébriques (sur $\mathbb{Q}$)

N=° ᚢᚦ. a.

il est évident que $\mathbb{Q}[\alpha, \beta]$ est stable par ↑ et ᛞ
et deplus, soit ᛃ, ᛭, ᚲ ⋚ $\mathbb{Q}[\alpha, \beta]$ alors ᛔ ᛒ, ツ, ᛥ, ᛒ′, ツ′, ᛥ′, ᛒ′, ツ′, ᛥ′ ⋚ $\mathbb{Q}$, ᛃ ᛝ ᛒ ↑ ツ α ↑ ᛥ β
et ᛭ ᛝ ᛒ′ ↑ ツ′α ↑ ᛥ′β et ᚲ ᛝ ᛒ′ ↑ ツ′α ↑ ᛥ′β
alors

(᛭ ↑ ᛃ)ᚲ ᛝ (ᛒ ↑ ツ α ↑ ᛥ β ↑ ᛒ′ ↑ ツ′α ↑ ᛥ′β)(ᛒ″ ↑ ツ″α ↑ ᛥ″β)

ᛝ (ᛒ ↑ ツ α ↑ ᛥ β)(ᛒ″ ↑ ツ″α ↑ ᛥ″β) ↑ (ᛒ′ ↑ ツ′α ↑ ᛥ′β)(ᛒ″ ↑ ツ″α ↑ ᛥ″β)

ᛝ ᛭ ᚲ ↑ ᛃ ᚲ

De même ᚲ(ᛃ ↑ ᛭) ᛝ ᚲ ᛃ ↑ ᚲ ᛭
De plus par la question ᚹ $\mathbb{Q}[\alpha, \beta]$ est une extention finie de $\mathbb{Q}[\alpha]$
Or $\mathbb{Q}[\alpha]$ est une extensions finis de $\mathbb{Q}$
Donc $\mathbb{Q}[\alpha, \beta]$ est un corps et est une extention finie de $\mathbb{Q}$

b.

Pourvons d'abord que $\sqrt{ᚨ} \not{ᛊ} \mathbb{Q}\left(\sqrt{ᚦ}\right)$,

Pour cela cherchons $ᛒ, ᛘ ᛊ \mathbb{Q}, ᛒ ᛏ ᛘ \ \sqrt{ᚦ} ᛝ \sqrt{ᚨ}$, alors:

$$ᛒ^{ᚦ} ᛏ ᚦ ᛘ^{ᚦ} ᛏ ᚦ ᛒ \ ᛘ \ \sqrt{ᚦ} ᛝ ᚨ$$

$$\text{Donc} \begin{cases} ᚦ ᛒ \ ᛘ \ \sqrt{ᚦ} ᛝ ᚠ \\ ᛒ^{ᚦ} ᛏ ᚦ ᛘ^{ᚦ} ᛝ ᚨ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ᛒ ᛝ ᚠ \text{ ou } ᛘ ᛝ ᚠ \\ ᛒ^{ᚦ} ᛏ ᚦ ᛘ^{ᚦ} ᛝ ᚨ \end{cases}$$

Il est évident que $ᛘ ᛜ ᚠ$ car $ᛘ ᛊ \mathbb{Q}$ et $\sqrt{ᚨ} \not{ᛊ} \mathbb{Q}$ donc $ᛒ ᛝ ᚠ$

Ainsi $ᚦ ᛘ^{ᚦ} ᛝ ᚨ \Leftrightarrow ᛘ ᛝ \sqrt{\frac{ᚨ}{ᚦ}} \not{ᛊ} \mathbb{Q}$ absurde, donc $\sqrt{ᚨ} \not{ᛊ} \mathbb{Q}\left(\sqrt{ᚦ}\right)$

Et donc comme $\mathbb{Q}$ est un sous corps de $\mathbb{Q}\left(\sqrt{ᚦ}\right)$ et que $\mathbb{Q}\left(\sqrt{ᚦ}\right)$ est un sous corps de $\mathbb{Q}\left[\sqrt{ᚦ}, \sqrt{ᚨ}\right]$,

et comme $\left(1, \sqrt{ᚦ}\right)$ est une base du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}\left(\sqrt{ᚦ}\right)$

et que $\left(1, \sqrt{ᚨ}\right)$ est une base du $\mathbb{Q}\left(\sqrt{ᚦ}\right)$-espace vectoriel $\mathbb{Q}\left[\sqrt{ᚦ}, \sqrt{ᚨ}\right]$

Ainsi par la question ᚦ. $\left(1, \sqrt{ᚦ}, \sqrt{ᚨ}, \sqrt{ᚷ}\right)$ est une base du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}\left[\sqrt{ᚦ}, \sqrt{ᚨ}\right]$

Et donc $\mathbb{Q}\left[\sqrt{ᚦ}, \sqrt{ᚨ}\right] ᛝ \left\{ᛒ ᛏ ᛘ \ \sqrt{ᚦ} ᛏ ᚼ \ \sqrt{ᚨ} ᛏ ᛣ \ \sqrt{ᚷ}, ᛒ, ᛘ, ᚼ, ᛣ ᛊ \mathbb{Q}\right\}$

N=° ᚢᚨ.

Soit $ᛒ, ᛘ ᛊ \overline{\mathbb{Q}}$. Alors $\mathbb{Q}[ᛒ, ᛘ]$ est un corps,

et en particulier une extension finie de $\mathbb{Q}$.

Donc la somme,l'inverse et le produits sont stables dans $\mathbb{Q}[ᛒ, ᛘ]$,

et donc par la question ᚷ. $\overline{\mathbb{Q}}$ est un corps, et est donc un sous-corps de $\mathbb{C}$

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y
Z a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t u v w x
y z *A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W*
X Y Z a b c d e f g ⍰ *i j k l m n o p q r s t u v*
w x y z ***A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U***
V W X Y Z a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t
u v w x y z ⍰ ⍰ ⍰ ⍰ ⍰ ⍰ ⍰ ⍰ ⍰ ⍰ ⍰ ⍰ ⍰ ⍰ ⍰ ⍰ ⍰ ⍰ ⍰
⍰ ⍰
⍰ ⍰
⍰ ⍰
⍰ ⍰
⍰ ⍰
⍰ ⍰ ⍰ ⍰ ⍰ ⍰ ⍰ ⍰ ⍰ ⍰ ⍰ ⍰ 𝔸 𝔹 ⍰ 𝔻 𝔼 𝔽 𝔾 ⍰ 𝕀 𝕁 𝕂 𝕃 𝕄
⍰ 𝕆 ℙ ⍰ ⍰ 𝕊 𝕋 𝕌 𝕍 𝕎 𝕏 𝕐 ⍰ 𝕒 𝕓 𝕔 𝕕 𝕖 𝕗 𝕘 𝕙 𝕚 𝕛 𝕜 𝕝
𝕞 𝕟 𝕠 𝕡 𝕢 𝕣 𝕤 𝕥 𝕦 𝕧 𝕨 𝕩 𝕪 𝕫 ⍰ ⍰ ⍰ ⍰ ⍰ ⍰ ⍰ ⍰ ⍰ ⍰ ⍰
⍰ ⍰
⍰ ⍰
⍰ ⍰
⍰ ⍰
⍰ ⍰
⍰ ⍰
⍰ ⍰
⍰ ⍰
⍰ ⍰
⍰ A
B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z
a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t u v w x y
z ı ȷ ⍰ ⍰ **Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ Ι Κ Λ Μ Ν Ξ Ο Π Ρ ϴ Σ Τ**
Υ Φ Χ Ψ Ω ∇ α β γ δ ε ζ η θ ι κ λ μ ν ξ ο π ρ ς σ
τ υ φ χ ψ ω ∂ ϵ ϑ ϰ ϕ ϱ ϖ *Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ Ι Κ Λ Μ*
Ν Ξ Ο Π Ρ ϴ Σ Τ Υ Φ Χ Ψ Ω ∇ α β γ δ ε ζ η θ ι κ λ
μ ν ξ ο π ρ ς σ τ υ φ χ ψ ω ∂ ϵ ϑ ϰ ϕ ϱ ϖ ***Α Β Γ Δ***
Ε Ζ Η Θ Ι Κ Λ Μ Ν Ξ Ο Π Ρ ϴ Σ Τ Υ Φ Χ Ψ Ω ∇ α β γ
δ ε ζ η θ ι κ λ μ ν ξ ο π ρ ς σ τ υ φ χ ψ ω ∂ ϵ ϑ
ϰ ϕ ϱ ϖ ⍰
⍰ ⍰
⍰ ⍰
⍰ ⍰
⍰ **Ϝ ϝ** ⍰ ⍰ **0**
1 2 3 4 5 6 7 8 9 ⍰ ⍰ ⍰ ⍰ ⍰ ⍰ ⍰ ⍰ ⍰ ⍰ ⍰ ⍰ ⍰ ⍰ ⍰ ⍰
⍰ ⍰