

Groupes :
l'exercice de la semaine (à rendre rédigé mardi 10/09/2024)

On désigne par Q un groupe d'ordre 8 non commutatif de neutre e .
On suppose qu'il possède un unique élément d'ordre 2 noté e' .

1) Pourquoi Q n'est-il pas monogène ?

2) Montrer que les éléments de Q autres que e et e' sont d'ordre 4.

3) Soit $a \in Q$ et $a' = e'ae'$.

On suppose que $a' \neq a$.

a) Montrer que $e'a$ est d'ordre 4.

b) En déduire que $a'a$ est d'ordre 1 ou 2.

c) Conclure que e' commute avec tout élément de Q .

4) Soient j et k deux éléments de Q ne commutant pas. (Ils existent par hypothèse et sont différents de e et de e' qui eux commutent avec tous les éléments de Q). On pose $\ell = jk$

a) Montrer que $Q = \{e, j, k, \ell, e', je', ke', \ell e'\}$.

b) Montrer que $j^2 = k^2 = \ell^2 = e'$ et déterminer la table du groupe Q . *On détaillera seulement les points délicats du raisonnement*