

Def: Pour un corps \mathbb{K} commutatif où l'exponentiation est définie et pour \mathbb{L} un sous corps de \mathbb{K} , on définit pour $n \in \mathbb{N}$:

$$(\mathbb{K}, \mathbb{L})_n[X] = \left\{ \sum_{k=0}^n \alpha_k X^{\beta_k}, \forall i > n, \alpha_i = 0, (\alpha_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, (\beta_n) \in \mathbb{L}^{\mathbb{N}} \right\}$$

Def: Pour $P, Q \in (\mathbb{K}, \mathbb{L})_n[X]$, avec $P = \sum_{i=0}^n \alpha_i X^{\beta_i}$ et $Q = \sum_{i=0}^n a_i X^{\beta_i}$

- Si \mathbb{L} possède un ordre totale, alors on appelle $\deg P = \max_{k \in \mathbb{N}} \{\beta_k, \alpha_k \neq 0\}$
- on appelle magnitude, et note $\text{mag} P = \text{card}_{k \in \mathbb{K}} \{\alpha_k, \alpha_k \neq 0\}$
- $P = Q$ ssi $\{(\alpha_n, \beta_n), n \in \mathbb{N}\} = \{(a_n, \beta_n), n \in \mathbb{N}\}$
- $\forall \lambda \in \mathbb{L}, \lambda P = \sum_n \lambda \alpha_n X^{\beta_n}$
- $((\mathbb{K}, \mathbb{L}), +, *)$ est un anneau sans diviseur de zéro

Def: On dit qu'un polynôme $P \in (\mathbb{K}, \mathbb{L})_n[X]$, de magnitude m , est condensé ssi $\forall i \in \llbracket 0; m \rrbracket, \alpha_i \neq 0$

Théorème 1: Pour tout polynôme $P = \sum_{i=0}^n \alpha_i X^{\beta_i}$ de magnitude m , il existe un unique polynôme condensé \tilde{P} , tel que $P = \tilde{P}$

Preuve:

Soit $\varphi \in \mathfrak{S}$ tq $\forall i \in \llbracket 0; m \rrbracket, \alpha_{\varphi(i)} \neq 0$,

Posons $\tilde{P} = \sum_{i=0}^n \alpha_{\varphi(i)} X^{\beta_{\varphi(i)}}$

Alors nous avons bien $\{(\alpha_n, \beta_n), n \in \mathbb{N}\} = \{(\alpha_{\varphi(i)}, \beta_{\varphi(i)}), i \in \mathbb{N}\}$ car un ensemble est invariant par permutation, donc $P = \tilde{P}$

De plus \tilde{P} est bien condensé par définition de φ **Q.E.D.**

Def: On définit la dérivé d'un polynôme $P \in (\mathbb{K}, \mathbb{L})_n[X]$ par:

$$P' = \sum_{i=0}^n \alpha_i \beta_i X^{\beta_i-1}$$

Prop: Soit $P, Q \in (\mathbb{K}, \mathbb{L})_n[X]$, alors pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

- $\deg P' = \deg P - 1$
- $\deg PQ = \deg P + \deg Q$
- $\deg P \circ Q = \deg P \times \deg Q$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \deg \lambda P = \deg P$
- $\deg(P + Q) = \max(\deg P, \deg Q)$
- $\text{mag} P' = \text{mag} P - \text{card}\{\beta_k = 0\} + \text{card}(\{\alpha_k = 0\} \cap \{\beta_k = 0\})$, de plus si P est condensé:
 $\text{mag} P' = \text{mag} P - \text{card}_{i \in \llbracket 0, \text{mag} P \rrbracket} \{\beta_i = 0\}$
- $\text{mag} P + Q = \text{mag} P + \text{mag} Q - \text{card}\{\beta_i = b_i, i \in \llbracket 0; n \rrbracket\}$
- $\text{mag} PQ = \min(\text{mag} P, \text{mag} Q)$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \text{mag} \lambda P = \text{mag} P$
- $\text{mag} P \circ Q = ?$