

## DM n°5

### Chute d'une tartine beurrée

N°1.

On a dans la base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ :

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} -T \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ N \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi après changement dans la base  $R$  on trouve:

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} -T \cos \theta \\ 0 \\ -T \sin \theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{N} = \begin{pmatrix} N \sin \theta \\ 0 \\ -N \cos \theta \end{pmatrix}$$

De plus on a:  $\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix}$

Et comme ce sont les seules forces qui s'appliquent au système {tartine}

On a par la seconde loi de Newton:

$$\vec{a} = \frac{1}{m} (\vec{N} + \vec{T} + \vec{P}) = \begin{pmatrix} \frac{N}{m} \sin \theta \\ 0 \\ -\frac{N}{m} \cos \theta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{T}{m} \cos \theta \\ 0 \\ \frac{T}{m} \sin \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{N}{m} \sin \theta - \frac{T}{m} \cos \theta \\ 0 \\ -\frac{N}{m} \cos \theta - \frac{T}{m} \sin \theta + g \end{pmatrix}$$

N°2.

D'abord calculons le moment du poids:

$$\mathcal{M}_{O_y}(\vec{P}) = (\overrightarrow{OG} \wedge \vec{P}) \cdot \vec{u}_y = \left( \begin{pmatrix} \delta \cos \theta \\ 0 \\ \delta \sin \theta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix} \right) \cdot \vec{u}_y = -mg\delta \cos \theta$$

ainsi par le théorème du moment cinétique:

$$J_{O_y} \ddot{\theta} = \mathcal{M}_{O_y}(\vec{P}) = -mg\delta \cos \theta$$

$$\text{donc } \ddot{\theta} = -\frac{mg\delta}{J_{O_y}} \cos \theta$$

$$\text{donc } \dot{\theta} \ddot{\theta} = -\frac{mg\delta}{J_{O_y}} \dot{\theta} \cos \theta$$

$$\text{donc } \frac{\dot{\theta}^2}{2} = \omega^2 = \frac{mg\delta}{J_{O_y}} \sin \theta$$

$$\text{donc } \omega^2 = 2 \frac{mg\delta}{m\left(\frac{a^2}{3} + \delta^2\right)} \sin \theta = \frac{g}{a} \frac{6\delta}{a + 3\frac{\delta^2}{a}} \sin \theta = \frac{g}{a} \frac{6\frac{\delta}{a}}{1 + 3\frac{\delta^2}{a^2}} \sin \theta = \frac{g}{a} \frac{6\eta}{1 + 3\eta^2} \sin \theta$$

Donc on a bien  $\omega^2 = \frac{g}{a} \frac{6\eta}{1 + 3\eta^2} \sin \theta$

**N°3.**

On a  $E_c = \frac{1}{2} J_{O_y} \omega^2$

Donc par le théorème de la puissance cinétique:

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{1}{2} J_{O_y} \frac{d\omega^2}{dt} = -mg \cos \theta \times \dot{\theta}$$

donc en intégrant:

$$\omega^2 = 2 \frac{mg}{J_{O_y}} \sin \theta$$

On est donc ramené au même calcul qu'à la question précédente,  
et donc on retombe bien sur le même résultat

**N°4.**

Comme on se réfère au centre barycentrique on a  $\mathcal{M}_{G_y}(\vec{P}) = 0$

Ainsi par le théorème du moment cinétique:  $J_{G_y} \ddot{\theta} = 0$

Donc  $\dot{\theta} = \omega_0$  et donc  $\theta(t) = \omega_0 t + \frac{\pi}{2}$

**N°5.**

Il est évident que l'angle limite  $\theta_1$  vaut  $\frac{3\pi}{2}$

**N°6.**

Comme  $\eta \ll 1$ , alors on peut étudier la chute de la tartine comme dans une chute libre

Ainsi par la seconde lois de Newton:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} \text{ donc } \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ gt \end{pmatrix} \text{ et donc } \overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{g}{2}t^2 \end{pmatrix}$$

On cherche donc à savoir à quel date  $\tau$ ,  $\|\overrightarrow{OG}\| = h$ , ainsi:

$$\|\overrightarrow{OG}\| = \frac{g}{2}\tau^2 = h$$

$$\text{donc } \tau^2 = \frac{2h}{g}$$

$$\text{donc } \tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

On a donc bien  $\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

AN:  $\tau = \sqrt{\frac{2 \times 0,75}{9,81}} \approx 0.391\text{s} \approx 391 \text{ ms}$

Ce qui demande de très bon réflexe pour éviter le destin funeste de cette pauvre tartine

**N°7.**

Comme  $\eta \ll 1$ , On a  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{a} \frac{6\eta}{1+3\eta^2}} \approx \sqrt{\frac{6g\eta}{a}}$ ,

Ainsi en injectant  $\tau$  dans la formule de la question 4.

$$\theta(\tau) = \omega_0\tau + \frac{\pi}{2}$$

Mais comme on veut que  $\theta(\tau) \geq \theta_1 = \frac{3\pi}{2}$ , ainsi

$$\omega_0\tau + \frac{\pi}{2} \geq \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{donc } \omega_0\tau \geq \pi$$

$$\text{donc } \sqrt{\frac{6g\eta}{a}} \sqrt{\frac{2h}{g}} \geq \pi$$

$$\text{donc } 12\eta h \geq \pi^2 a$$

$$\text{donc } \eta \geq \frac{\pi^2 a}{12h}$$

Ainsi  $\eta_{\min} \approx \frac{\pi^2 a}{12h}$

AN:  $\eta_{\min} \approx \frac{\pi^2 \times 0,05}{12 \times 0,75} \approx 0.055$

Mais comme sur terre  $\eta \approx 0,02$ , on en déduit que le destin inévitable de notre tartine est de retombé sur sa face beurrée

**N°8.**

Comme on la vue à la question précédente  $\eta$  ne dépend que de  $h$  et  $a$  et non pas de  $g$

Donc en modifiant  $g$  on ne change pas le destin de notre tartine

N°9.

Cherchons tout d'abord la vitesse à la quel un corps touche le sol après une chute de hauteur  $h$

Comme notre tartine beurrée, ce corps mettrais  $\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}$  s avant de toucher le sol

De plus la seconde loi de Newton nous informe que la vitesse au cours de la chute est:  $v(t) = gt$

Donc il toucheras la sol à une vitesse  $v_{\text{sol}} = v(\tau) = \sqrt{2hg}$  (1)

Ainsi en prenant  $h$  comme la taille d'un être sur un astre quelconque,

on à particulièrement pour la terre, où un humain mesure environs  $h_o = 1,70\text{m}$ :  $v_h = \sqrt{2g_T h_o}$

avec  $g_T$  l'accélération de pesanteur sur terre

En supposant qu'un être sur un astre quelconque et constituer à peut près comme l'être humain

alors la vitesse  $v_h$  devrait être le même quel que soit l'astre

Ainsi en modifiant notre formule (1), on à  $h = \frac{v_h^2}{2g} = \frac{2g_T h_o}{2g} = \frac{g_T}{g} h_o$

Ainsi on trouve que la hauteur d'un être constitué comme l'homme sur un astre quelconque

est proportionel à la hauteur de l'être humain, avec un coefficient de  $\frac{g_T}{g}$ ,

avec  $g$  l'accélération de pesanteur pour l'astre considéré

AN:  $h_m \approx \frac{9,81}{3,7} \times 1,7 \approx 4.5\text{m}$

Ainsi la hauteur d'un martien semblable à l'homme serait d'environ 4m

En supposant qu'une table fais environs la moitié de la hauteur de l'être qui l'utilise

alors une table martienne à une hauteur d'environ 2,3m

Ainsi en recalculant  $\eta_{\text{min}}$  pour cette nouvelle hauteur de table on trouve:

AN:  $\eta_{\text{mars}} \approx \frac{\pi^2 \times 0,05}{12 \times 2,3} \approx 0.018 < 0,02$

Ainsi les martien ne sont pas affecté par ce destint qui accable la terre.