

Physique : DM1

Un modèle simplifié de génératrice linéaire : le rail de Laplace

Partie I. Présentation du système

N° 1.

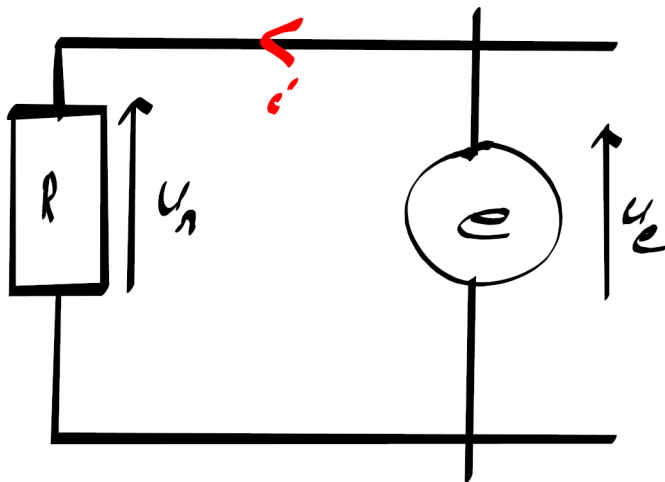
Par la règle de la main droite, on a que le champs magnétique va renfoncer la force déjà présente mais celle-ci va être de plus en plus petite, donc notre tige métallique devrais accélérer de plus en plus jusqu'à atteindre une vitesse maximal.

N° 2.

On a :

$$\vec{F}_l = i \overrightarrow{MN} \wedge \vec{B} = i \begin{vmatrix} 0 \\ l \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B_e \end{vmatrix} = ilB_e \vec{u}_x$$

N° 3.



Partie II. Étude temporelle

N° 4.

Calculons d'abord le flux magnétique :

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint \vec{B} d\vec{S} \text{ Or comme } d\vec{S} = dS \vec{u}_z \text{ et } \vec{B} = B \vec{u}_z \\ &= \iint B dS = B \iint dS = BLx \end{aligned}$$

Ainsi :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -BL\dot{x}$$

N° 5.

Par la loi des mailles : $e = Ri$ (i)

N° 6.

Par la seconde lois de Newton, ici projeté sur u_x car u_x est la seule comosante, donc :

$$\ddot{x} = \sum \frac{F_{\text{ext}}}{m} = \frac{F_l}{m} + \frac{F}{m} = i \frac{LB}{m} + \frac{F}{m} \text{ (ii)}$$

N° 7.

Par (i), $i = -\frac{BL}{R}\dot{x}$
en réinjectant dans (ii)

$$\ddot{x} + \frac{B^2 L^2}{mR} \dot{x} = \frac{F}{m} \text{ (iii)}$$

N° 8.

Par (iii), on sait que $[\ddot{x}] = \left[\frac{B^2 L^2}{mR} \dot{x} \right]$

D'où

$$\left[\frac{mR}{B^2 L^2} \right] = \left[\frac{\dot{x}}{\ddot{x}} \right] = m \cdot s^{-2} \cdot m^{-1} \cdot s = s^{-1}$$

Donc $\left[\frac{mR}{B^2 L^2} \right] = s^{-1}$

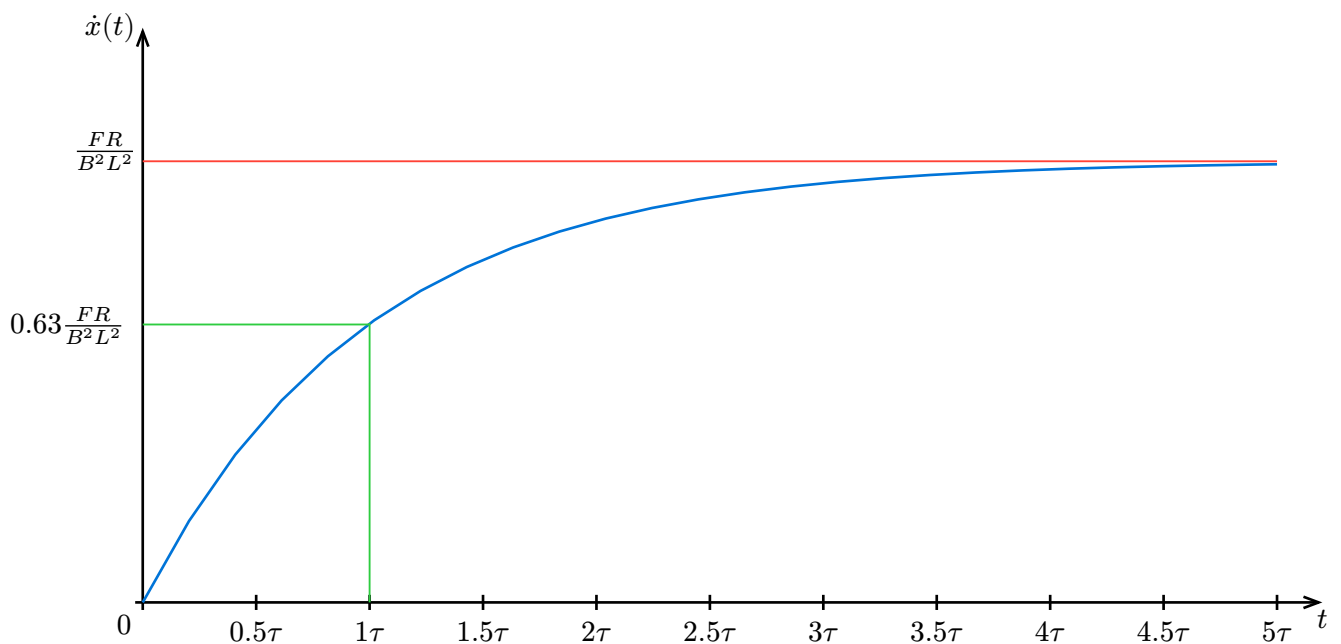
N° 9.

En résolvant (iii), on trouve : On poseras $\tau = \frac{mR}{B^2 L^2}$

$$\dot{x} = K e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{FR}{B^2 L^2}$$

Or on sait que pour $t = 0$, $\dot{x} = 0$, d'où $K = -\frac{FR}{B^2 L^2}$ D'où :

$$\dot{x}(t) = \frac{FR}{B^2 L^2} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$



Partie III. Bilan de puissance

N° 10.

On a :

$$\mathcal{P}_l(\vec{F}_l) = \vec{F}_l \cdot \vec{v} = iLB\dot{x}$$

Ainsi $\mathcal{P}_l(\vec{F}_l) = iLB\dot{x}$

N° 11.

Par effet joule on a : $\mathcal{P}_J = Ri^2$, or par la question 7 : $i = -\frac{BL}{R}\dot{x} \Leftrightarrow R = -\frac{BL}{i}\dot{x}$, d'où :

$$\mathcal{P}_J = R i^2 = - B L i \dot{x} = - \mathcal{P}_l$$

On a donc que la puissance gagnée par la force de Laplace est dissipée par effet joule

N° 12.

On a : $\mathcal{P}_{op} = \mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v} = F\dot{x}$

N° 13.

En multipliant (iii) par \dot{x} , on trouve :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right) + \frac{B^2 L^2}{R} \dot{x}^2 = F \dot{x} \quad \text{Or } R = -\frac{BL}{i} \dot{x}$$
$$\underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right)}_{\text{puissance gagnée par l'énergie cinétique}} - \underbrace{BLi\dot{x}}_{\text{puissance dissipée par effet joule}} = \underbrace{F\dot{x}}_{\text{puissance fournie par l'opérateur}}$$