

Mq:

$$H_k(n) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^{i_1} \cdots \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} 1 \Leftrightarrow H_k(n) = \sum_{i=1}^n H_{k-1}(i) \& H_0(n) = 1 \text{ ça c'est bon !} \quad (0)$$

$$H_k(n) = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (n+i) \Leftrightarrow H_{k+1}(n) = \frac{n+k}{k+1} H_k(n) \quad (1)$$

$$H_k(n) = \sum_{i=0}^k \alpha_i^k n^i \text{ avec } \begin{cases} \alpha_0^k = \delta_0^k \\ \forall i > 0, \alpha_i^k = \sum_{j=i}^k \binom{j}{i} \frac{\alpha_{j-1}^{k-1}}{j} B_{j-i} \end{cases} \quad (2) \text{ Fait}$$

$$H_k(1) = 1 \quad \& \quad \underbrace{H_k(0) = \delta_k^0}_{\text{facile}}$$

avec (B_i) les nombres de Bernoulli, avec la convention $B_1 = \frac{1}{2}$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \llbracket kp, (k+1)p \rrbracket, F_n^{(p)} = H_k(n - kp) + F_{kp}^{(p)} \quad (3)$$

Preuve de (0) \Rightarrow (2):

- Pour $k = 0$:

Soit $n \in \mathbb{N}$, $H_0(n) = 1$ et $\sum_{i=0}^0 \alpha_i^0 n^i = \underbrace{\alpha_0^0}_{=1} n^0 = 1$

- Pour $k \in \mathbb{N}^*$:

montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, H_k(n) = \sum_{i=0}^k \alpha_i^k n^i$

– Initialisation: Soit $n \in \mathbb{N}$

$$H_1(n) = n \text{ et } \sum_{i=0}^1 \alpha_i^1 n^i = \underbrace{\alpha_0^1}_{=0} + \alpha_1^1 n$$

Or

$$\alpha_1^1 = \sum_{i=1}^1 \underbrace{\binom{1}{1} \frac{\alpha_0^0}{1} B_0}_{=1} = 1$$

$$\text{Donc } H_1(n) = \sum_{i=0}^1 \alpha_i^1 n^i$$

– Héritéité:

$$\text{Soit } k \in \mathbb{N}^* \text{ tq } H_k(n) = \sum_{i=0}^k \alpha_i^k n^i$$

$$\begin{aligned}
H_{k+1}(n) &= \sum_{i=1}^n H_k(i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^k \alpha_j^k i^j = \sum_{j=0}^k \alpha_j^k \sum_{i=1}^n i^j \\
&= \sum_{j=0}^k \frac{\alpha_j^k}{j+1} \sum_{i=0}^j \binom{j+1}{i} B_i n^{j-i+1} \\
&= \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^j \binom{j+1}{i} \frac{\alpha_j^k}{j+1} B_i n^{j-i+1} \\
&= \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^j \binom{j+1}{j-i} \frac{\alpha_j^k}{j+1} B_{j-i} n^{i+1} \text{ avec } i' = j - i \\
&= \sum_{i=0}^k \sum_{j=i}^k \binom{j+1}{j-i} \frac{\alpha_j^k}{j+1} B_{j-i} n^{i+1} \\
&= \sum_{i=0}^k \sum_{j=i}^k \binom{j+1}{i+1} \frac{\alpha_j^k}{j+1} B_{j-i} n^{i+1} \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{j=i-1}^k \binom{j+1}{i} \frac{\alpha_j^k}{j+1} B_{j+1-i} n^i \\
&= \underbrace{\sum_{i=1}^{k+1} \sum_{j=i}^{k+1} \binom{j}{i} \frac{\alpha_{j-1}^k}{j} B_{j-i} n^i}_{=\alpha_i^{k+1}} = \sum_{i=0}^{k+1} \alpha_i^{k+1} n^i
\end{aligned}$$

Par le principe de récurrence simple et la petite disjonction de cas: $\forall k, n \in \mathbb{N}, H_k(n) = \sum_{i=0}^k \alpha_i^k n^i$

Preuve de (2) \Rightarrow (0):

Il suffit de « remonter » la preuve précédente, sans faire de récurrence et de calculer H_0

Propriété sur (α_i^k) :

- $\forall k \in \mathbb{N}^*, \alpha_1^k = \frac{1}{k} (1)$
- $\forall i \in \mathbb{N}, \alpha_i^i = \frac{1}{k!} (2)$

preuve :