

DM n°4

Exercice 2: Particule dans une chambre à bulles

Pour toute la suite de l'exercice, on se place dans un référentiel terrestre supposé galiléen

N°1.

On a:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \text{ et } \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$$

Ainsi:

$$F_m = q\vec{v} \wedge \vec{B} = qB \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alors par la seconde loi de Newton:

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = qB \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \frac{qB}{m} \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\begin{cases} \ddot{x} = \omega \dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega \dot{x} \end{cases}$

N.B. Le mouvement selon \ddot{z} est nul donc on a $\dot{z} = 0$ (selon les conditions initiales)
donc le mouvement se fait dans un plan et donc on ne le prend plus en compte
pour la suite des calculs

N°2.

Selon la question précédente:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \omega \dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega \dot{x} \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} \int_0^t \ddot{x} dt = \omega \int_0^t \dot{y} dt \\ \int_0^t \ddot{y} dt = -\omega \int_0^t \dot{x} dt \end{cases} = \begin{cases} \dot{x} = \omega y \\ \dot{y} = -\omega x + v_0 \end{cases}$$

Ainsi en remplaçant \dot{x} et \dot{y} dans la première équation on trouve:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega^2 x + \frac{v_0}{\omega} \omega^2 \\ \ddot{y} = -\omega^2 y \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{cases} x(t) = A_x \cos(\omega t) + B_x \sin(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \\ y(t) = A_y \cos(\omega t) - B_y \sin(\omega t) \end{cases}$$

Grâce aux conditions initiales on trouve $A_x = -\frac{v_0}{\omega}$; $B_x = 0$; $A_y = 0$ et $B_y = -\frac{v_0}{\omega}$, ainsi :

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{v_0}{\omega} \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \\ y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) \end{cases}$$

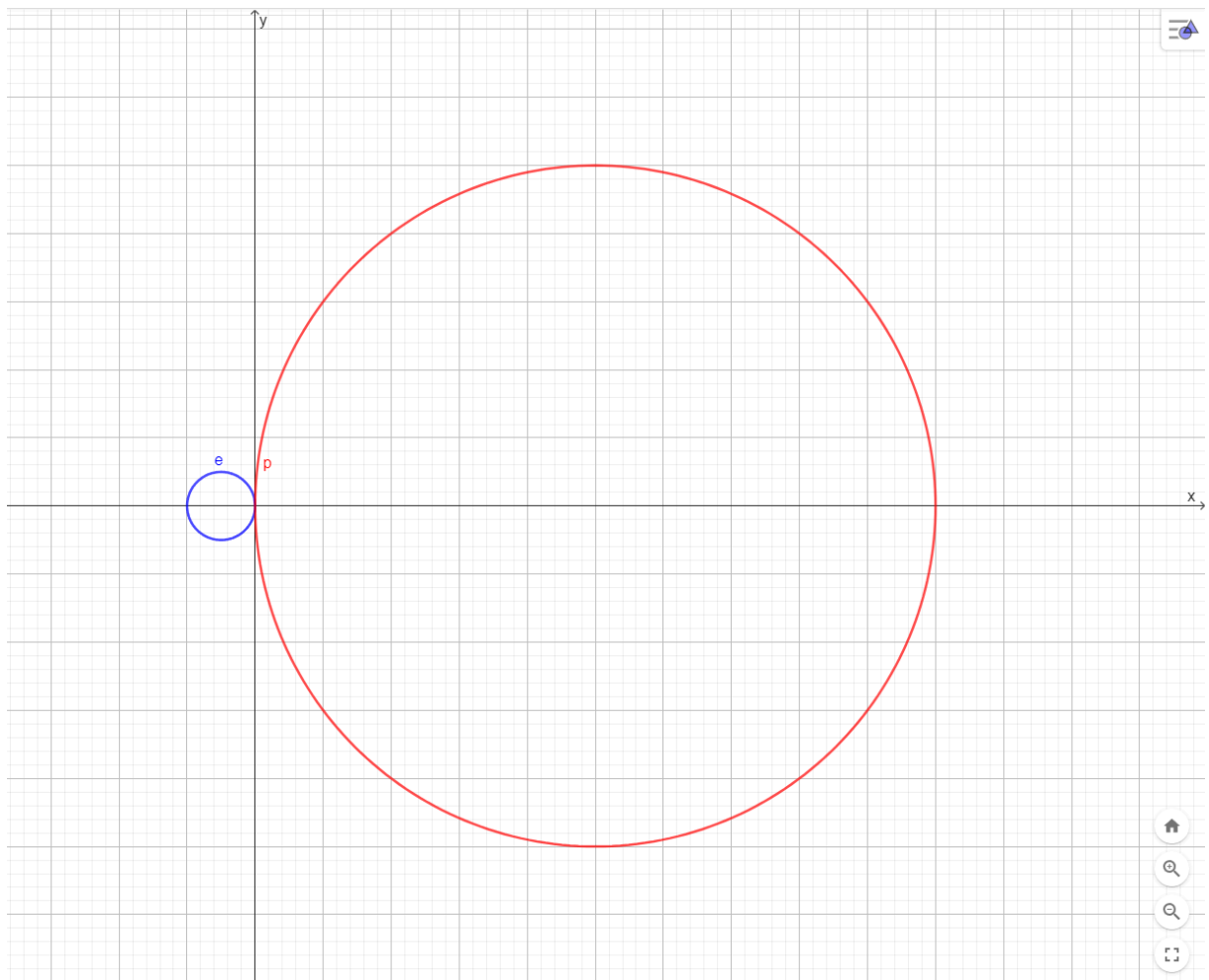


Figure 1: trajectoire d'un proton (rouge) et d'un électron (bleu) dans la chambre à bulle en négligeant les frottements

N°3.

Par la seconde loi de Newton, on a:

$$m \begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{vmatrix} = qB \begin{vmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} - \lambda \dot{y} \\ 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{vmatrix} = \frac{qB}{m} \begin{vmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} - \frac{\lambda}{m} \dot{y} \\ 0 \end{vmatrix} = \omega \begin{vmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} - \alpha \dot{y} \\ \dot{z} \end{vmatrix}$$

On a donc $\ddot{z} = -\alpha \dot{z}$, donc en intégrant $\dot{z} = -\alpha z$ Or $\dot{z} = 0$ alors $-\alpha z = 0 \Leftrightarrow z = 0$ car $\alpha \neq 0$

Donc $z = 0$ et donc le mouvement se fait sur le plans (xOy)

Deplus:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \omega \dot{y} - \alpha \dot{x} \\ \ddot{y} = -\omega \dot{x} - \alpha \dot{y} \end{cases}$$

N°4.

On a :

$$\ddot{u} = \ddot{x} + i\ddot{y} = \omega \dot{y} - \alpha \dot{x} - i\omega \dot{x} - i\alpha \dot{y} = \dot{x}(-\alpha - i\omega) + i\dot{y}(-\alpha - i\omega) = -(\alpha + i\omega)\dot{u}$$

Ainsi on retombe sur une équation différentiel du 1er ordre, on trouve donc:

$$\dot{u}(t) = iv_0 e^{-(\alpha + i\omega)t}$$

Ainsi on trouve

$$u(t) = -\frac{iv_0}{\alpha + i\omega} e^{-(\alpha + i\omega)t} + \frac{iv_0}{\alpha^2 + \omega^2} = e^{-\alpha t} \left(-\frac{v_0\omega}{\alpha^2 + \omega^2} - \frac{\alpha v_0}{\alpha^2 + \omega^2} i \right) (\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)) + \frac{v_0\omega}{\alpha^2 + \omega^2} + \frac{\alpha v_0}{\alpha^2 + \omega^2} i$$

On a donc:

$$\begin{cases} x(t) = \Re(u(t)) = -\frac{v_0}{\alpha^2 + \omega^2} e^{-\alpha t} (\omega \cos(\omega t) + \alpha \sin(\omega t)) + \frac{v_0\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \\ y(t) = \Im(u(t)) = \frac{v_0}{\alpha^2 + \omega^2} e^{-\alpha t} (\omega \sin(\omega t) - \alpha \cos(\omega t)) + \frac{v_0\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \end{cases}$$

N°5.

Comme $e^{-\alpha t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$, alors on a:

$$P_\infty = \begin{cases} x(\infty) = \frac{v_0\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \\ y(\infty) = \frac{v_0\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \end{cases}$$

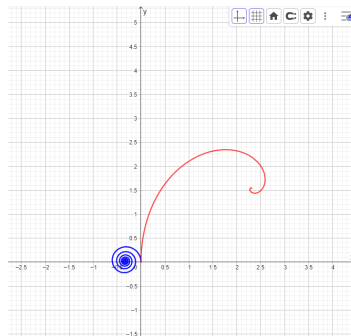


Figure 2: trajectoire d'un proton (rouge) et d'un électron (bleu) dans la chambre à bulle