Jean Valjean

Physique : DM17

Problème 1 : noyaux et images en dimension finie

Partie I. Généralités

N=° 1.

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathscr{K}\mathrm{er}(f^k)$, alors

$$f^k(f(x)) = f^{k+1}(x) = f\left(f^k(x)\right) = f(0) = 0$$

Donc $f(x) \in \mathscr{K}\mathrm{er}(f^k)$, et donc $\mathscr{K}\mathrm{er}(f^k)$ est stable par f

Soit $x \in \mathscr{I}\mathrm{m}(f^k)$, alors
$\exists y \in E, f^k(y) = x$ donc

$$f(x) = f\left(f^k(y)\right) = f^{k+1}(y) = f^k(f(y)) \in \mathscr{I}\mathrm{m}(f^k)$$

Donc $f(x) \in \mathscr{I}\mathrm{m}(f^k)$, et donc $\mathscr{I}\mathrm{m}(f^k)$ est stable par f

N=° 2.

Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que $\mathscr{I}\mathrm{m}(f^{k+1}) \subset \mathscr{I}\mathrm{m}(f^k)$ et que $\mathscr{K}\mathrm{er}(f^k) \subset \mathscr{K}\mathrm{er}(f^{k+1})$

- Initialisation :

Pour $\mathscr{K}\mathrm{er}$

Soit $x \in \mathscr{K}\mathrm{er}(f^0) = \mathscr{K}\mathrm{er}(\mathtt{Id}_E)$

alors $x = 0$ car $\mathtt{Id}_E$ est bijective

Or $x = 0 \in \mathscr{K}\mathrm{er}\ f$

Donc $\mathscr{K}\mathrm{er}(f^0) \subset \mathscr{K}\mathrm{er}\ f$

Pour $\mathscr{I}\mathrm{m}$

Soit $x \in \mathscr{I}\mathrm{m} f$

alors $x \in E = \mathscr{I}\mathrm{m}(\mathtt{Id}_E)$ car f endomorphisme

Donc $\mathscr{I}\mathrm{m} f \subset \mathscr{I}\mathrm{m}(f^0)$

- Hérédité :

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{I}\mathrm{m}(f^{k+1}) \subset \mathscr{I}\mathrm{m}(f^k)$ et $\mathscr{K}\mathrm{er}(f^k) \subset \mathscr{K}\mathrm{er}(f^{k+1})$

Pour $\mathscr{K}\mathrm{er}$

Soit $x \in \mathscr{K}\mathrm{er}(f^k)$

alors

$$f^{k+1}(x) = f\left(f^{k+1}(x)\right) = f(0) = 0$$

Donc $x \in \mathscr{K}\mathrm{er}(f^{k+1})$

Donc $\mathscr{K}\mathrm{er}(f^k) \subset \mathscr{K}\mathrm{er}(f^{k+1})$

Pour $\mathscr{I}\mathrm{m}$

Soit $x \in \mathscr{I}\mathrm{m}(f^{k+1})$

alors $\exists y \in E, f^{k+1}(y) = x$

$$\text{Donc } x = f^{k+1}(y) = f^k(f(y)) \in \mathscr{I}\mathrm{m}(f^k)$$

Donc $x \in \mathscr{I}\mathrm{m}(f^k)$

Donc $\mathscr{I}\mathrm{m}(f^{k+1}) \subset \mathscr{I}\mathrm{m}(f^k)$

Donc par le principe de récurrence, on a
$\mathscr{I}\mathrm{m}(f^{k+1}) \subset \mathscr{I}\mathrm{m}(f^k)$ et $\mathscr{K}\mathrm{er}(f^k) \subset \mathscr{K}\mathrm{er}(f^{k+1})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$

N=° 3.