1 Équation des géodésiques

Soit le lagrangiens suivant :

$$\mathcal{L}(x^\alpha, \dot{x}^\alpha) = \left[g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu\right]^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

avec $\dot{x}^\alpha = \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}s}$
Ainsi on n'a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} &= \frac{1}{2}\left[g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu\right]^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu\right) \\ \begin{array}{c}\text{car } \dot{x}^\mu \text{ et } \dot{x}^\nu \\ \text{sont constant} \\ \text{face à } x^\alpha \rightarrow\end{array} &= \frac{1}{2}\left[g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu\right]^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \\ &= \frac{1}{2}\left[g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu\right]^{-\frac{1}{2}} g_{\mu\nu,\alpha}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \end{aligned} \tag{2}$$

où on note : $g_{\mu\nu,\alpha} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}$
Et

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} &= \frac{1}{2}\left[g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu\right]^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\alpha}\left(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu\right) = \frac{1}{2}\left[g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu\right]^{-\frac{1}{2}} g_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial \dot{x}^\alpha}\left(\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu\right]^{-\frac{1}{2}} g_{\mu\nu}\left(\dot{x}^\nu \underbrace{\frac{\partial}{\partial \dot{x}^\alpha}\left(\dot{x}^\mu\right)}_{=\delta^\mu_\alpha} + \dot{x}^\mu \underbrace{\frac{\partial}{\partial \dot{x}^\alpha}\left(\dot{x}^\nu\right)}_{=\delta^\nu_\alpha}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu\right]^{-\frac{1}{2}} g_{\mu\nu}\left(\dot{x}^\nu \delta^\mu_\alpha + \underbrace{\dot{x}^\mu \delta^\nu_\alpha}_{=\dot{x}^\nu \delta^\mu_\alpha \text{ car } \mu \text{ et } \nu \text{ sont muets}}\right) \\ &= \frac{1}{\cancel{2}}\left[g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu\right]^{-\frac{1}{2}} g_{\mu\nu} \cdot \cancel{2}\dot{x}^\nu \delta^\mu_\alpha \\ &= \left[g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu\right]^{-\frac{1}{2}} g_{\alpha\nu}\dot{x}^\nu \end{aligned} \tag{3}$$

Ainsi par les équations d'Euleur-La Grange, on obtient l'équation suivante :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\left[g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu\right]^{-\frac{1}{2}} g_{\alpha\nu}\dot{x}^\nu\right) = \frac{1}{2}\left[g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu\right]^{-\frac{1}{2}} g_{\mu\nu,\alpha}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \tag{4}$$

En posant :

$$\begin{gathered} \mathrm{d}\lambda = \left[g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu\right]^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}s \\ \text{Donc } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} = \left[g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu\right]^{-\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \end{gathered} \tag{5}$$

Ainsi, en réécrivant l'équation précédente :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\left[g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu\right]^{-\frac{1}{2}} g_{\alpha\nu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}x^\nu\right) = \frac{1}{2}\left[g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu\right]^{-\frac{1}{2}} g_{\mu\nu,\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}x^\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}x^\nu \tag{6}$$

$$
\begin{aligned}
\text{donc } [g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu]^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\cancel{[g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu]^{-\frac{1}{2}}}g_{\alpha\nu}\cancel{[g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu]^{\frac{1}{2}}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}x^\nu\right) &= \frac{1}{2}[g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu]^{-\frac{1}{2}}[g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu]g_{\mu\nu,\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}x^\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}x^\nu \\
\text{donc } \cancel{[g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu]^{\frac{1}{2}}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(g_{\alpha\nu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}x^\nu\right) &= \frac{1}{2}\cancel{[g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu]^{\frac{1}{2}}}g_{\mu\nu,\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}x^\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}x^\nu \\
\text{donc } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(g_{\alpha\nu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}x^\nu\right) &= \frac{1}{2}g_{\mu\nu,\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}x^\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}x^\nu
\end{aligned} \tag{6}
$$

Si on écrit l'action par rapport à s, on a :

$$
S_1 = \int \left[g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}x^\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}x^\nu\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}s \tag{7}
$$

Alors en opérant le changement de variable S_1 devient :

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \int \cancel{[g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu]^{\frac{1}{2}}}\left[g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}x^\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}x^\nu\right]^{\frac{1}{2}}\cancel{[g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu]^{-\frac{1}{2}}}\mathrm{d}\lambda \\
&= \int \left[g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}x^\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}x^\nu\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\lambda
\end{aligned} \tag{8}
$$

Donc comme S_1 est invariante par la transformation $s \longrightarrow \lambda$ et que celle-ci est un diféomorphisme, on a alors :

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(g_{\alpha\nu}\dot{x}^\nu) = \frac{1}{2}g_{\mu\nu,\alpha}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu \tag{9}
$$

Donc en calculant le terme de gauche :

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{\mathrm{d}s}(g_{\alpha\nu}\dot{x}^\nu) &= \dot{x}^\nu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}g_{\alpha\nu} + g_{\alpha\nu}\ddot{x}^\nu \\
&= g_{\alpha\nu}\ddot{x}^\nu + \dot{x}^\nu\underbrace{\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial\mu}}_{=g_{\alpha\nu,\mu}}\underbrace{\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}}_{=\dot{x}^\mu} \\
&= g_{\alpha\nu}\ddot{x}^\nu + g_{\alpha\nu,\mu}\dot{x}^\nu\dot{x}^\mu
\end{aligned} \tag{10}
$$

Ainsi :

$$
\begin{aligned}
\underbrace{g^{\alpha\beta}g_{\alpha\nu}}_{=\delta^\beta_\nu}\ddot{x}^\nu &= \frac{1}{2}g_{\mu\nu,\alpha}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu - g_{\alpha\nu,\mu}\dot{x}^\nu\dot{x}^\mu \\
\text{Donc } \ddot{x}^\beta &= \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\mu\nu,\alpha} - 2g_{\alpha\nu,\mu})\dot{x}^\nu\dot{x}^\mu \\
\text{Donc } \ddot{x}^\beta &= \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\mu\nu,\alpha} - g_{\alpha\nu,\mu} - g_{\alpha\mu,\nu})\dot{x}^\nu\dot{x}^\mu
\end{aligned} \tag{11}
$$

En introduisant les symboles de Christoffel $\Gamma^\beta_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\beta\alpha}(g_{\mu\alpha,\nu} + g_{\nu\alpha,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha})$ on a :

$$
\begin{aligned}
\ddot{x}^\beta &= -\Gamma^\beta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu \\
\text{Soit } \ddot{x}^\beta + \Gamma^\beta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu &= 0
\end{aligned} \tag{12}
$$

2 Commuteur des Co-dérivés covariante

On définit les dérivés covariantes par :

$$\nabla_\mu v^\nu = \partial_\mu v^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\rho} v^\rho \tag{13}$$

Ainsi, soit v^ρ un vecteur :

$$\begin{aligned}
[\nabla_\mu; \nabla_\nu] v^\rho &= \nabla_\mu(\nabla_\nu v^\rho) - \nabla_\nu(\nabla_\mu v^\rho) \\
&= \nabla_\mu(\partial_\nu v^\rho + \Gamma^\rho_{\nu\alpha} v^\alpha) - \nabla_\nu(\partial_\mu v^\rho + \Gamma^\rho_{\mu\alpha} v^\alpha) \\
&= \partial_\mu(\partial_\nu v^\rho + \Gamma^\rho_{\nu\alpha} v^\alpha) + \Gamma^\rho_{\mu\beta}(\partial_\nu v^\beta + \Gamma^\beta_{\nu\alpha} v^\alpha) - \partial_\nu(\partial_\mu v^\rho + \Gamma^\rho_{\mu\alpha} v^\alpha) - \Gamma^\rho_{\nu\beta}(\partial_\mu v^\beta + \Gamma^\beta_{\mu\alpha} v^\alpha) \\
&= \cancel{\partial_{\nu\mu} v^\rho} + \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\alpha} v^\alpha + \Gamma^\rho_{\mu\beta} \partial_\nu v^\beta + \Gamma^\rho_{\mu\beta} \Gamma^\beta_{\nu\alpha} v^\alpha - \cancel{\partial_{\mu\nu} v^\rho} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\alpha} v^\alpha - \Gamma^\rho_{\nu\beta} \partial_\mu v^\beta - \Gamma^\rho_{\nu\beta} \Gamma^\beta_{\mu\alpha} v^\alpha \\
&= \left(\Gamma^\rho_{\mu\beta} \Gamma^\beta_{\nu\alpha} - \Gamma^\rho_{\nu\beta} \Gamma^\beta_{\mu\alpha} + \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\alpha} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\alpha}\right) v^\alpha + \underbrace{\Gamma^\rho_{\mu\beta} \partial_\nu v^\beta - \Gamma^\rho_{\nu\beta} \partial_\mu v^\beta}_{=0}
\end{aligned} \tag{14}$$

Ainsi, on reconnait le tenseur de Riemann définis par : $R^\sigma_{\mu\nu\kappa} = \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\kappa} - \partial_\kappa \Gamma^\sigma_{\mu\nu} + \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\kappa} - \Gamma^\sigma_{\kappa\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\nu}$
Donc on obtient la relation suivante :

$$[\nabla_\mu; \nabla_\nu] v^\rho = R^\rho_{\alpha\mu\nu} v^\alpha \tag{15}$$

3 Dérivé covariante

On se place dans un système de coordonnée ξ^α, et on s'intérèse à un changement de coordonée vers x^α
Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
0 = \frac{\mathrm{d}^2 \xi^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\mathrm{d}\xi^\alpha}{\mathrm{d}\tau}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\right) \\
&= \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\mathrm{d}^2 x^\rho}{\mathrm{d}\tau^2} + \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}
\end{aligned} \tag{16}$$

Ainsi comme $\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \times \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\beta} = \delta^\alpha_\beta$, en multipliant des deux cotés :

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\mathrm{d}^2 x^\rho}{\mathrm{d}\tau^2} + \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \\
&= \frac{\mathrm{d}^2 x^\rho}{\mathrm{d}\tau^2} + \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}
\end{aligned} \tag{17}$$

En posant : $\left\{{}_\mu{}^\lambda{}_\nu\right\} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\beta} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$, on obtient finalement :

$$0 = \frac{\mathrm{d}^2 x^\rho}{\mathrm{d}\tau^2} + \left\{{}_\mu{}^\rho{}_\nu\right\} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau} \tag{18}$$

En réécrivant le produit scalaire dans les coordonnées x^α à:

$$\eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}\xi^\mu\,\mathrm{d}\xi^\nu = \underbrace{\eta_{\mu\nu}\frac{\partial\xi^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\xi^\nu}{\partial x^\beta}}_{=g_{\alpha\beta}}\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta \tag{19}$$

Donc :

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu}\frac{\partial\xi^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\xi^\nu}{\partial x^\beta} \tag{20}$$

alors en dérivant :

$$\begin{aligned}
g_{\alpha\beta,\lambda} = \partial_\lambda g_{\alpha\beta} &= \eta_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\frac{\partial\xi^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\xi^\nu}{\partial x^\beta}\right) \\
&= \underbrace{\eta_{\mu\nu}\frac{\partial\xi^\mu}{\partial x^\alpha}}_{=g_{\alpha\mu}\frac{\partial x^\mu}{\partial\xi^\nu}}\frac{\partial^2\xi^\nu}{\partial x^\beta\partial x^\lambda} + \underbrace{\eta_{\mu\nu}\frac{\partial\xi^\nu}{\partial x^\beta}}_{=g_{\beta\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial\xi^\mu}}\frac{\partial^2\xi^\mu}{\partial x^\alpha\partial x^\lambda} \\
&= g_{\alpha\mu}\underbrace{\frac{\partial x^\mu}{\partial\xi^\nu}\frac{\partial^2\xi^\nu}{\partial x^\beta\partial x^\lambda}}_{=\left\{{}_{\beta}{}^{\mu}{}_{\lambda}\right\}} + g_{\beta\nu}\underbrace{\frac{\partial x^\nu}{\partial\xi^\mu}\frac{\partial^2\xi^\mu}{\partial x^\alpha\partial x^\lambda}}_{=\left\{{}_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\lambda}\right\}} \\
&= \left\{{}_{\beta}{}^{\mu}{}_{\lambda}\right\}g_{\mu\alpha} + \left\{{}_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\lambda}\right\}g_{\nu\beta}
\end{aligned} \tag{21}$$

Donc en sommant pour difféante dérivé :

$$\begin{aligned}
g_{\alpha\beta,\lambda} + g_{\lambda\beta,\alpha} - g_{\alpha\lambda,\beta} = {} & \left\{{}_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\lambda}\right\}g_{\mu\beta} + \cancel{\left\{{}_{\beta}{}^{\nu}{}_{\lambda}\right\}g_{\nu\alpha}} \\
& + \cancel{\left\{{}_{\beta}{}^{\mu}{}_{\alpha}\right\}g_{\mu\lambda}} + \left\{{}_{\lambda}{}^{\nu}{}_{\alpha}\right\}g_{\nu\beta} \\
& - \cancel{\left\{{}_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\beta}\right\}g_{\mu\lambda}} - \cancel{\left\{{}_{\lambda}{}^{\nu}{}_{\beta}\right\}g_{\nu\alpha}} \\
& = \left\{{}_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\lambda}\right\}g_{\mu\beta} + \left\{{}_{\lambda}{}^{\nu}{}_{\alpha}\right\}g_{\nu\beta} = 2\left\{{}_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\lambda}\right\}g_{\mu\beta}
\end{aligned} \tag{22}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\Gamma^\gamma_{\alpha\lambda} &= \frac{1}{2}g^{\gamma\beta}\left(g_{\alpha\beta,\lambda} + g_{\lambda\beta,\alpha} - g_{\alpha\lambda,\beta}\right) = \frac{1}{2}g^{\gamma\beta} \times 2\left\{{}_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\lambda}\right\}g_{\mu\beta} \\
&= \left\{{}_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\lambda}\right\}\delta^\gamma_\mu = \left\{{}_{\alpha}{}^{\gamma}{}_{\lambda}\right\}
\end{aligned} \tag{23}$$

On trouve que : $\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \left\{{}_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\beta}\right\}$, et pas concéquant : $\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial\xi^\nu}\frac{\partial^2\xi^\nu}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}$

3.0.-.a Transformation de $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
{\Gamma^\lambda_{\mu\nu}}' = \left\{{}_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu}\right\}' &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial\xi^\beta}\frac{\partial^2\xi^\beta}{\partial x'^\mu\partial x'^\nu} \\
&= \frac{\partial x^k}{\partial\xi^\beta}\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^k}\frac{\partial^2\xi^\beta}{\partial x^\gamma\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu} \\
&= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^k}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu}\underbrace{\frac{\partial x^k}{\partial\xi^\beta}\frac{\partial^2\xi^\beta}{\partial x^\gamma\partial x^\alpha}}_{=\left\{{}_{\gamma}{}^{k}{}_{\alpha}\right\}} \\
&= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^k}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu}\left\{{}_{\gamma}{}^{k}{}_{\alpha}\right\}?
\end{aligned} \tag{24}$$

A.F.L.

4 Solution de Schwwarzschild

4.1 Équation sur $R_{\mu\nu}$

On se place dans un espace de dimension n

D'après l'équation de Einstein :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu} \tag{25}$$

On recherche une solution pour un espace vide, statique et à symétrie sphérique donc $T_{\mu\nu} = 0$, ainsi l'équation devient :

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R &= 0 \\ \text{donc } g^{\mu\nu}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R\right) &= 0 \\ \text{donc } \underbrace{g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}}_{=R} - \frac{1}{2} \underbrace{g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}}_{=\delta^{\mu}_{\mu}=n} &= 0 \\ \text{donc } R\left(1 - \frac{1}{2} n\right) &= 0 \\ \text{donc } R(2-n) &= 0 \end{aligned} \tag{26}$$

Ainsi on a deux cas particulier :

- Soit $n = 2$, dans ce cas la gravité est topologique
- Soit $R = 0$

Or on recherche une solution pour un espace à 4 dimension (espace-temps), ainsi $R = 0$

En injectant dans l'équation d'Einstein :

$$\begin{gathered} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \underbrace{R}_{=0} = 0 \\ \text{Donc } R_{\mu\nu} = 0 \end{gathered} \tag{27}$$

4.2 Écriture de la métrique dans un espace isotropique statique

On sait que dans un espace isotropique, la métrique doit ressembler à :

$$\mathrm{d}s^2 = A(r,t)\,\mathrm{d}t^2 - B(r,t)\,\mathrm{d}t(\vec{x} \cdot \mathrm{d}\vec{x}) - C(r,t)(\vec{x} \cdot \mathrm{d}\vec{x})^2 - D(r,t)\,\mathrm{d}\vec{x}^2 \tag{28}$$

En opérant le changement de variables en coordonnées sphérique :

$$\begin{aligned} x^1 &= r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ x^2 &= r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ x^3 &= r \cos(\theta) \end{aligned} \tag{29}$$

Dans ce cas on a :

$$\vec{x} \cdot \vec{x} = r^2, \qquad \vec{x} \cdot \vec{x} = r\,\mathrm{d}r, \qquad \mathrm{d}\vec{x} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\theta^2 + r^2 \sin(\theta)^2\,\mathrm{d}\varphi^2 \tag{30}$$

Ainsi la métrique devient :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= A(t,r)\mathrm{d}t^2 - B(t,r)r\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r - C(t,r)r^2\mathrm{d}r^2 - D(t,r)\mathrm{d}r^2 - D(t,r)r^2\mathrm{d}^2\Omega \\ &= A(t,r)\mathrm{d}t^2 - B'(t,r)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r - C'(r,t)\mathrm{d}r^2 - D'\mathrm{d}^2\Omega \end{aligned} \tag{31}$$

avec $\mathrm{d}^2\Omega = \mathrm{d}\theta^2 + \sin(\theta)^2\,\mathrm{d}\varphi^2$ l'angle solide et $B' = Br; \quad C' = Cr^2 + D$ et $D' = D$
On pose $\bar{r}^2 = D'$, alors :

$$\mathrm{d}s^2 = A(t,\bar{r})\mathrm{d}t^2 - B'(t,\bar{r})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\bar{r} - C'(t,\bar{r})\,\mathrm{d}\bar{r}^2 - \bar{r}^2\mathrm{d}^2\Omega \tag{32}$$

On pose également un nouveau temps : $\mathrm{d}\bar{t} = \Phi(t,\bar{r})\left[A(t,\bar{r})\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}B'(t,\bar{r})\,\mathrm{d}\bar{r}\right]$, donc

$$\begin{gathered} \mathrm{d}\bar{r}^2 = \Phi(t,\bar{r})\left[A^2\mathrm{d}t^2 + \frac{1}{4}B'^2\,\mathrm{d}\bar{r}^2 - AB'\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\bar{r}\right] \\ \text{Donc } A\mathrm{d}t^2 - B'\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\bar{r} = \frac{1}{A\Phi}\,\mathrm{d}\bar{t}^2 - \frac{B}{4A}\,\mathrm{d}\bar{r}^2 \end{gathered} \tag{33}$$

la métrique devient :

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{1}{A\Phi}\,\mathrm{d}\bar{t}^2 - \left(\frac{B}{4A} + C'\right)\mathrm{d}\bar{r}^2 - \bar{r}^2\mathrm{d}^2\Omega \tag{34}$$

Ainsi en posant deux nouvelles fonctions $\bar{A} = \frac{1}{A\Phi}$ et $\bar{B} = \frac{B}{4A} + C'$, la métrique devient :

$$\mathrm{d}s^2 = \bar{A}(\bar{t},\bar{r})\,\mathrm{d}\bar{t}^2 - \bar{B}(\bar{t},\bar{r})\,\mathrm{d}\bar{r}^2 - \bar{r}^2\mathrm{d}^2\Omega \tag{35}$$

Comme à partir de maintenant l'on ne travaillera qu'avec les quantités avec une barre : $\bar{A}, \bar{B}, \bar{t}, \bar{r}$, on les renotera sans la barre, pour plus de clairеté
De plus comme l'on imposse au système d'être statique, alors les grandeurs A et B sont indépendantes du temps
ainsi la métrique s'écrit finalement :

$$\mathrm{d}s^2 = A(r)\mathrm{d}t^2 - B(r)\mathrm{d}r^2 - r^2\mathrm{d}^2\Omega \tag{36}$$

4.3 Solution de Schwwarzschild

D'après l'équation 27, $R_{\mu\nu} = 0$, or

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu\Gamma^\sigma_{\mu\sigma} - \partial_\sigma\Gamma^\sigma_{\mu\nu} + \Gamma^\rho_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\rho\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\rho\sigma} \tag{37}$$

Ainsi en calculant les symboles de Christoffel, on obtiendra des équations sur A et B

4.3.a Calcule des Christoffel

Pour calculer les symboles de Christoffel, on pourrait partir de la définition :

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\mu\rho}\left(g_{\alpha\rho,\beta} + g_{\beta\rho,\alpha} - g_{\alpha\beta,\rho}\right) \tag{38}$$

Cependant, ceci demande de calculer indépendament chaque coefficient, or en dimension 4 il y en a $4^3 = 64$, rendant les calcules longs et éreintant.
Or, il existe une méthode plus rapide pour les calculer, celle-ci ce base sur le faits que l'équation des géodésiques, l'équation 12, dépend directement des symboles de Christoffel.
Donc pour les calculer, on prend le lagrangien $\mathcal{L} = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$, que l'on insère dans les équations d'Euleur-La Grange, pour retomber sur l'équation des géodésiques.
Ici nous ne ferons que le calcule pour la variable r, le reste à été faits par un programme en MatLab

(`cristofell.m`, présent dans le même dossier).
Ainsi, le lagrangien s'écrit : $\mathcal{L} = A(r)\dot{t}^2 - B(r)\dot{r}^2 - r^2\dot{\theta}^2 - r^2\sin(\theta)^2\dot{\varphi}^2$, alors on a :

$$\begin{gathered} \partial_{\dot{r}}\mathcal{L} = -2B(r)\dot{r} \\ \text{donc } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\partial_{\dot{r}}\mathcal{L} = -2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\dot{r}B(r)) = -2\frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}s}B - 2\dot{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}B(r)}{\mathrm{d}r} = -2\ddot{r}B - 2\dot{r}^2B'(r) \end{gathered} \tag{39}$$

Où on note les dérivés par un point les dérivés par à s et $B'(r)$ et $A'(r)$ les dérivés par rapport à r.
Nous avons également :

$$\partial_r\mathcal{L} = A'(r)\dot{t}^2 - B'(r)\dot{r}^2 - 2r\dot{\theta}^2 - 2r\sin(\theta)^2\dot{\varphi}^2 \tag{40}$$

Donc d'après les équations d'Euleur-La Grange :

$$-2\ddot{r}B(r) - 2\dot{r}^2B' = A'\dot{t}^2 - B'\dot{r}^2 - 2r\dot{\theta}^2 - 2r\sin(\theta)^2\dot{\varphi}^2 \tag{41}$$

$$\text{donc } \ddot{r} + \frac{A'}{2B}\dot{t}^2 + \frac{B'}{2B}\dot{r}^2 - \frac{r}{B}\dot{\theta}^2 - \frac{r\sin(\theta)^2}{B}\dot{\varphi}^2 \tag{42}$$

Or comme l'équation des géodésiques s'écrit : $\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = 0$, alors en identifiant avec l'équation 42, on trouve :

$$\Gamma^1_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{A'}{2B} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{B'}{2B} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{r}{B} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{r\sin(\theta)^2}{B} \end{pmatrix} \tag{43}$$

Donc après calcule, on touve que :

$$\Gamma^0_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{A'}{2A} & 0 & 0 \\ \frac{A'}{2A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{44}$$

$$\Gamma^2_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\theta)\cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{45}$$

$$\Gamma^3_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & 0 & \cot(\theta) \\ 0 & \frac{1}{r} & \cot(\theta) & 0 \end{pmatrix} \tag{46}$$

4.3.b Équation sur A et B

De la même manière les différent coefficient de $R_{\mu\nu}$ on été calculé par le même programme, ainsi on obtient comme seul coefficient non nul :

$$R_{00} = \frac{A'}{rB} + \frac{A''}{2B} - \frac{A'}{4B}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) \tag{47}$$

$$
\begin{aligned}
R_{11} &= \frac{B'}{rB} - \frac{A''}{2A} + \frac{A'}{4A}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) \\
R_{22} &= \frac{rB'}{2B^2} - \frac{1}{B} - \frac{rA'}{2AB} + 1 \\
R_{33} &= \sin(\theta)^2\left(\frac{rB'}{2B^2} - \frac{1}{B} - \frac{rA'}{2AB} + 1\right)
\end{aligned}
\tag{47}
$$

Ainsi par l'équation 27, on obtient le système suivant :

$$
\begin{cases}
R_{00} = \frac{A'}{rB} + \frac{A''}{2B} - \frac{A'}{4B}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) = 0 \\
R_{11} = \frac{B'}{rB} - \frac{A''}{2A} + \frac{A'}{4A}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) = 0 \\
R_{22} = \frac{rB'}{2B^2} - \frac{1}{B} - \frac{rA'}{2AB} + 1 = 0 \\
R_{33} = \sin(\theta)^2\left(\frac{rB'}{2B^2} - \frac{1}{B} - \frac{rA'}{2AB} + 1\right) = 0
\end{cases}
\tag{48}
$$

On remarque que les deux dernières équations sont redontantes, donc le système ce réduit à :

$$
\begin{cases}
\frac{A'}{rB} + \frac{A''}{2B} - \frac{A'}{4B}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) = 0 \\
\frac{B'}{rB} - \frac{A''}{2A} + \frac{A'}{4A}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) = 0 \\
\frac{rB'}{2B^2} - \frac{1}{B} - \frac{rA'}{2AB} + 1 = 0
\end{cases}
\tag{49}
$$