DEVOIR MAISON 12

▸ Problème : théorème LTE (Lifting the exponent)

Soit p un nombre premier, et soient x, y deux entiers relatifs, premiers à p avec $|x| \neq |y|$.

1. On suppose que p divise $x-y$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ premier à p, $v_p\left(x^n - y^n\right) = v_p(x-y)$.
2. Dans cette question, on suppose que $p = 2$, et que $4 \mid x - y$.
   a. Montrer que $v_2\left(x^2 - y^2\right) = v_2(x-y) + 1$.
   b. Prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $v_2\left(x^n - y^n\right) = v_2(x-y) + v_2(n)$.
3. On suppose à présent que p est impair, et que $p \mid x - y$.
   a. Prouver que pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, $x^k \equiv y^k + k(x-y)y^{k-1} \ [p^2]$.
   b. En déduire que $\sum_{k=0}^{p-1} x^k y^{p-1-k} \equiv p y^{p-1} \ [p^2]$, puis que $v_p\left(x^p - y^p\right) = v_p(x-y) + 1$.
   c. Prouver alors que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $v_p\left(x^n - y^n\right) = v_p(x-y) + v_p(n)$.
4. Application : soit $k \in \mathbf{N}^*$ fixé. Trouver tous les $n \in \mathbf{N}$ tels que $3^k \mid 2^n - 1$.
   Indication : distinguer le cas n pair du cas n impair.