Gaspar Daguet

Maths : ES 1

Groupe

N=° 1.

Comme Q est non commutatif, alors Q est nécessairement non monogène

N=° 2.

soient $x \in Q$ tel que $x \neq e \neq e'$,
On sait que $o(x) \mid \text{Card } Q = 8$
Ainsi $x = 1$ ou $x = 2$ ou $x = 4$ ou $x = 8$
Or comme Q n'est pas monogène $x \neq 8$
Si $o(x) = 1$, alors $x = x^1 = e$. Absurde, donc $x \neq 1$
Et par unicité de e', $o(x) \neq 2$
Ainsi $o(x) = 4$

Q.E.D.

N=° 3. a.

Comme $a \in Q$ et $e' \in Q$, alors comme Q est un groupe, alors $e'a \in Q$,
Or prouvons par contraposé que $a \neq e$ et $a \neq e'$, Ainsi prouvons que $a = e$ ou $a = e' \Rightarrow a = e'ae'$

- supposons que $a = e$, alors :

$$e'ae' = (e')^2 = e = a$$

- supposons que $a = e'$, alors :

$$e'ae' = (e')^2 e' = e' = a$$

Donc par contraposé et par hypotèse de l'exercice, $a \neq e$ et $a \neq e'$
Et donc comme $a \neq e$ donc $e'a \neq e'$ et comme $a \neq e'$ donc $e'a \neq (e')^2 = e$
et donc d'après la question précédente $o(e'a) = 4$

Q.E.D.

b.

$$(a'a)^2 = (e'ae'a)^2 = (e'a)^4 = e$$

Donc $o(a'a) = 2$ ou $o(a'a) = 1$

Q.E.D.

c.

- Si $o(a'a) = 1$, alors

$$a'a = e \text{ donc } e'ae'a \text{ donc } (e'a)^2 = e$$
$$\text{donc } o(e'a) = 2 \text{ donc } e'a = e' \text{ (par unicité) donc } a = e \text{ Absurde !!}$$

Donc $o(a'a) \neq 1$

- Si $o(a\text{'}a) = 2$, alors par unicité de e'

$$a\text{'}a = e\text{'} \text{ donc } e\text{'}ae\text{'}a = e\text{'}$$

$$\text{donc } ae\text{'}a = e \text{ donc } \begin{cases} ae\text{'} = a^{-1} \\ e\text{'}a = a^{-1} \end{cases}$$

$$\text{donc } ae\text{'} = e\text{'}a \text{ donc } a = e\text{'}ae\text{'} = a\text{'} \text{ Absurde !!}$$

Donc $o(a\text{'}a) \neq 2$

Ce qui est en contradiction avec la sous-question précédente, et donc Absurde !!
Donc $\nexists a \in Q, a \neq e\text{'}ae\text{'} \iff \forall a \in Q, a = e\text{'}ae\text{'}$
Ce qui reviens a dire que e' commute avec tout éléments de Q

Q.E.D.

N=° 4. a.

Soit $\mathfrak{Q} = \{e, j, k, l, e\text{'}, je\text{'}, ke\text{'}, le\text{'}\}$
Comme $\text{Card } Q = \text{Card } \mathfrak{Q}$, alors il suffis de montrer que un des deux ensemble contient le second
On a que les éléments e, j, k et $e\text{'} \in Q$, et comme Q est un groupe
alors les éléments $l = jk, je\text{'}, ke\text{'}$ et $le\text{'} \in Q$
Ainsi $Q = \mathfrak{Q}$

Q.E.D.

b.

Soit $x \in \{j, k, l\}$, comme $o(j) = o(k) = o(l) = 4$, alors $o(x) = 4$
donc $x^4 = e$ donc $(x^2)^2 = e$ donc $o(x^2) = 2$, par unicité de e', $x^2 = e$'
Donc $j^2 = k^2 = l^2 = e$'

Q.E.D.

$*$	e	j	k	l	e'	je'	ke'	le'
e	e	j	k	l	e'	je'	ke'	le'
j	j	e'	l	ke'	je'	e	le'	k
k	k	le'	e'	j	ke'	l	e	je'
l	l	k	je'	e'	le'	ke'	j	e
e'	e'	je'	ke'	le'	e	j	k	l
je'	je'	e	le'	k	j	e'	l	ke'
ke'	ke'	l	e	je'	k	le'	e'	j
le'	le'	ke'	j	e	l	k	je'	e'

- $lkj = jkkj = (e\text{'})^2 = e\ (i)$
- par (i) : $l^2kj = kje\text{'} = l \Leftrightarrow kj = le\text{'}$
- $jk = l \Leftrightarrow jkl = e\text{'} \Leftrightarrow kle\text{'} = je\text{'} \Leftrightarrow kl = j$
- $kl = j \Leftrightarrow klj = e\text{'} \Leftrightarrow lj = k$

le reste ce trouve facilement en combinant les éléments déjà trouvé sur le tableau

Q.E.D.