Gaspar Daguet

Maths : DM ᚢᚷ

Il est important avant de commencer lire ce DM
d'avoir bien compris le tableau et les exemples suivants

symbole usuel	symbole du DM	prononciation
0	ᚠ	fé
1	ᚢ	ur
2	ᚦ	tur
3	ᚨ	an
4	ᚱ	rai
5	ᚲ	kau
6	ᚷ	gèb
7	ᚹ	wun
8	ᚺ	hag
9	ᚾ	nau
10	ᛃ	je
11	ᛇ	ei
$=$	ᛝ	ing/i ng
$+$	ᛏ	ti
$-$	ᛉ	al
$\times$	ᛞ	dag
$\div$	ᛚ	lag
$\in$	ᛊ	so
$\forall$	ᛈ	per
$\exists$	ᛒ	ber
$>$	ᛗ	man
$<$	ᛖ	e
$\geq$	ᛗᛝ	maning
$\leq$	ᛖᛝ	ehwing
$\neq$	ᛜ	naing
$\subset$	ᚭ	suz
$\supset$	ᛆ	zus

ᚷᚹ ᛏ ᚲᚲ ᛝ ᚢᚠᚠ ce qui est équivalant à $79 + 65 = 144$

$$e^{ϑ} \underset{ϑ \to ᚠ}{ᛝ} ᚢ ᛏ ϑ ᛏ \frac{ϑ^{ᚦ}}{ᚦ!} ᛏ \cdots ᛏ \frac{ϑ^{日}}{日!} ᛏ o\left(ϑ^{日}\right)$$

est équivalant à

$$e^x \underset{x \to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{x!} + o(x^n)$$

Problème 2 : nombres algébrique et extensions de corps

Partie I. extensions de corps

N=° 1. Premiers exemples a.

il est évident que $\mathbb{R}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ et de plus $\mathbb{C}$ est de dimension finis,
donc $\mathbb{C}$ est une extention finie de $\mathbb{R}$

de plus soit $z \in \mathbb{C}$ alors

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, z = a + i\,b \Leftrightarrow z \in \mathrm{Vect}(1, i)$$

Ainsi comme 1 et i ne sont pas colinéaire dans $\mathbb{R}$, $\mathrm{Vect}(1, i)$ forme une base de $\mathbb{C}$
Ainsi $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$

soit L un sous-corps qui contient $\mathbb{R}$
comme $[\mathbb{R} : \mathbb{R}] = 1$ et que l'on vient de prouver que $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$
il apparait donc comme condition que, $1 \leq [L : \mathbb{R}] \leq 2$
Ainsi $[L : \mathbb{R}] = 1$ ou $[L : \mathbb{R}] = 2$
Et ansi $L = \mathbb{R}$ ou $L = \mathbb{C}$

b.

Soit $a \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$, alors $\exists\, b, z \in \mathbb{Q}, a = b + z\ \sqrt{2}$, alors prenons $z = 0$
ainsi $a = b \in \mathbb{Q}$, donc $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ et comme $\mathbb{Q}$ est un corps
de $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$
de plus, soit $a \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ alors $\exists\, b, z \in \mathbb{Q}, a = \exists + b\ \sqrt{2}$, soit un telle z, b
donc $a = z + b\ \sqrt{2} \in \mathrm{Vect}\left(1, \sqrt{2}\right)$
et supposons par l'absurde $\exists\, a, b \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^*, a + b\ \sqrt{2} = 0$
alors $\frac{a}{b} = -\sqrt{2}$ ce qui est absurde car $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, donc $a = b = 0$
Ainsi $\left(1, \sqrt{2}\right)$ est une base de $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$
Donc $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) : \mathbb{Q}\right] = 2$

c. i.

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P\left(\sqrt[3]{2}\right) = 0$
prenons la divisions euclidienne de $X^3 - 2$ par P
ce qui nous donne $X^3 - 2 = \mathrm{PQ} + R$ avec $\mathrm{Q} \in \mathbb{Q}_1[X]$ et $\mathrm{R} \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $\deg \mathrm{R} < 2$
En évaluant notre expression précédente en $\sqrt[3]{2}$ on obtient :

$$\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 - 2 = 0 = \underbrace{\mathrm{P}\left(\sqrt[3]{2}\right)}_{=0} + \mathrm{R}$$

donc $\mathrm{R} = 0$ et donc $\deg \mathrm{R} = 0$
ainsi P divise $\mathrm{X}^3 - 2$

Ainsi Comme P divise $X^3 - 2$ et que $\deg \mathrm{P} = 2$,
alors P et $X^3 - 2$ possède deux racines en commun dont $\sqrt[3]{2}$
et comme $X^3 - 2 = \left(X - \sqrt[3]{2}\right)\left(X - \sqrt[3]{2} e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X - \sqrt[3]{2} e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)$ donc P à en plus une racine complexe
or un polynôme dans $\mathbb{R}$ qui possède une racine complexe possède sont conjugée

ce qui n'est pas le cas pour P donc P ᛍ̸ ℚ[X] ce qui est absurde

Donc ᛒ̸ P ᛍ ℚ[X], P(ᚠ√ᚦ) ᛝ ᚴ

i.

Par un résonnement annaloge à la question ᚢ .b on montre que ℚ ᚼ ℚ(ᚠ√ᚦ),

De plus soit ᛃ ᛍ ℚ(ᚠ√ᚦ) alors soient ᛒ, ᛘ, ᛉ ᛍ ℚ, ᛃ ᛝ ᛒ ↑ ᛘ ᚠ√ᚦ ↑ ᛉ (ᚠ√ᚦ)^ᚦ

donc ᛃ ᛍ Vect(ᚢ, ᚠ√ᚦ, ᚠ√ᚦ^ᚦ)

donc ℚ(ᚠ√ᚦ) est une extensions finis et [Q(ᚠ√ᚦ) : ℚ] ᛝ ᚠ

d.

N=° ᚦ.

Partie II. Éléments algébriques

N=° ᚠ.