Mq :

$$H_k(n) = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{i_1} \cdots \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} 1 \Longleftrightarrow H_k(n) = \sum_{i=1}^{n} H_{k-1}(i) \& H_0(n) = 1 \text{ ça c'est bon !} \qquad (0)$$

$$H_k(n) = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (n+i) \Leftrightarrow H_{k+1}(n) = \frac{n+k}{k+1} H_k(n) \qquad (1)$$

$$H_k(n) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i^k n^i \text{ avec } \begin{cases} \alpha_0^k = \delta_0^k \\ \forall i > 0, \alpha_i^k = \sum_{j=i}^{k} \binom{j}{i} \frac{\alpha_{j-1}^{k-1}}{j} B_{j-i} \end{cases} \qquad (2) \text{ Fait}$$

$$H_k(1) = 1 \quad \& \quad \underbrace{H_k(0) = \delta_k^0}_{\text{facile}}$$

avec (B_i) les nombres de Bernoulli, avec la convention $B_1 = \frac{1}{2}$

Preuve de $(0) \Rightarrow (2)$:

- Pour $k = 0$:

Soit $n \in \mathbb{N}$, $H_0(n) = 1$ et $\sum_{i=0}^{0} \alpha_i^0 n^i = \underbrace{\alpha_0^0}_{=1} n^0 = 1$

- Pour $k \in \mathbb{N}^*$:

montrons par récurance que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, H_k(n) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i^k n^i$

– Initialisation : Soit $n \in \mathbb{N}$

$H_1(n) = n$ et $\sum_{i=0}^{1} \alpha_i^1 n^i = \underbrace{\alpha_0^1}_{=0} + \alpha_1^1 n$

Or

$$\alpha_1^1 = \sum_{i=1}^{1} \underbrace{\binom{1}{1} \frac{\alpha_0^0}{1} B_0}_{=1} = 1$$

Donc $H_1(n) = \sum_{i=0}^{1} \alpha_i^1 n^i$

– Hérédité :

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tq $H_k(n) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i^k n^i$

$$\begin{aligned}
H_{k+1}(n) = \sum_{i=1}^{n} H_k(i) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{k} \alpha_j^k i^j = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j^k \sum_{i=1}^{n} i^j \\
&= \sum_{j=0}^{k} \frac{\alpha_j^k}{j+1} \sum_{i=0}^{j} \binom{j+1}{i} B_i n^{j-i+1} \\
&= \sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{j} \binom{j+1}{i} \frac{\alpha_j^k}{j+1} B_i n^{j-i+1} \\
&= \sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{j} \binom{j+1}{j-i} \frac{\alpha_j^k}{j+1} B_{j-i} n^{i+1} \text{ avec } i\text{'} = j - i \\
&= \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=i}^{k} \binom{j+1}{j-i} \frac{\alpha_j^k}{j+1} B_{j-i} n^{i+1} \\
&= \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=i}^{k} \binom{j+1}{i+1} \frac{\alpha_j^k}{j+1} B_{j-i} n^{i+1} \\
&= \sum_{i=1}^{k+1}\sum_{j=i-1}^{k} \binom{j+1}{i} \frac{\alpha_j^k}{j+1} B_{j+1-i} n^{i} \\
&= \sum_{i=1}^{k+1}\underbrace{\sum_{j=i}^{k+1} \binom{j}{i} \frac{\alpha_{j-1}^k}{j} B_{j-i}}_{=\alpha_i^{k+1}} n^{i} = \sum_{i=0}^{k+1} \alpha_i^{k+1} n^i
\end{aligned}$$

Par le principe de récurance simple et la petite disjonction de cas : $\forall k, n \in \mathbb{N}, H_k(n) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i^k n^i$

Preuve de $(2) \Rightarrow (0)$:

Il suffie de « remonter » la preuve précédente, sans faire de récurance et de calculer H_0

Propriété sur $\left(\alpha_i^k\right)$:

- $\forall k \in \mathbb{N}^*, \alpha_1^k = \frac{1}{k}$ (1)
- $\forall i \in \mathbb{N}, \alpha_i^i = \frac{1}{i!}$ (2)

preuve :

$$\text{Comme pour } \forall p \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in [\![kp, (k+1)p]\!], F_n^{(p)} = P_k^p(n)$$

$$\text{avec } P_k^{(p)} = \sum_{i=0}^{k-1} P_{k-1}^{(p)}((i+1)p) S_{k-1-i}(X - kp) + S_k(X - kp)$$

Donc

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, F_n^{(p)} = P_{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor}^{(p)}(n)$$

alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{p \longrightarrow 0^+} P_{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor}^{(p)}(n) = \lim_{p \longrightarrow 0^+} F_n^{(p)} = F_n^{(0)} = 2^n \quad ?$$