Gaspar Daguet

Physique : DM1

Un modèle simplifié de génératrice linéaire : le rail de Laplace

Présentation du système

Par la règle de la main droite, on a que le champs magnétique va renfoncer la force déjà présente mais celle-ci va être de plus en plus petite, donc notre tige métalique devrais accélérer de plus en plus jusqu'à atteindre une vitesse maximal.

On a :

$$\vec{F_l} = i\overrightarrow{MN} \wedge \vec{B} = i \begin{vmatrix} 0 \\ l \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B_e \end{vmatrix} = ilB_e\overrightarrow{u_x}$$

Étude temporelle

Calculons d'abord le flux magnétique :

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint \vec{B}\overrightarrow{dS} \text{ Or comme } \overrightarrow{dS} = dS\vec{u_z} \text{ et } \vec{B} = B\vec{u_z} \\ &= \iint BdS = B \iint dS = BLx \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\underline{e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -BL\dot{x}}$$

Par la loi des mailles : $e = Ri$ (i)

Par la seconde lois de Newton, ici projeté sur u_x car u_x est la seul com»osante, donc :
$\ddot{x} = \sum \frac{F_{\text{ext}}}{m} = \frac{F_l}{m} + \frac{F}{m} = i\frac{LB}{m} + \frac{F}{m}$ (ii)

Par (i), $i = -\frac{BL}{R}\dot{x}$
en réinjectant dans (ii)

$$\ddot{x} + \frac{B^2L^2}{mR}\dot{x} = \frac{F}{m} \quad (iii)$$

Par (iii), on sait que $[\ddot{x}] = \left[\frac{B^2L^2}{mR}\dot{x}\right]$
D'où

$$\left[\frac{mR}{B^2L^2}\right] = \left[\frac{\dot{x}}{\ddot{x}}\right] = m \cdot s^{-2} \cdot m^{-1} \cdot s = s^{-1}$$

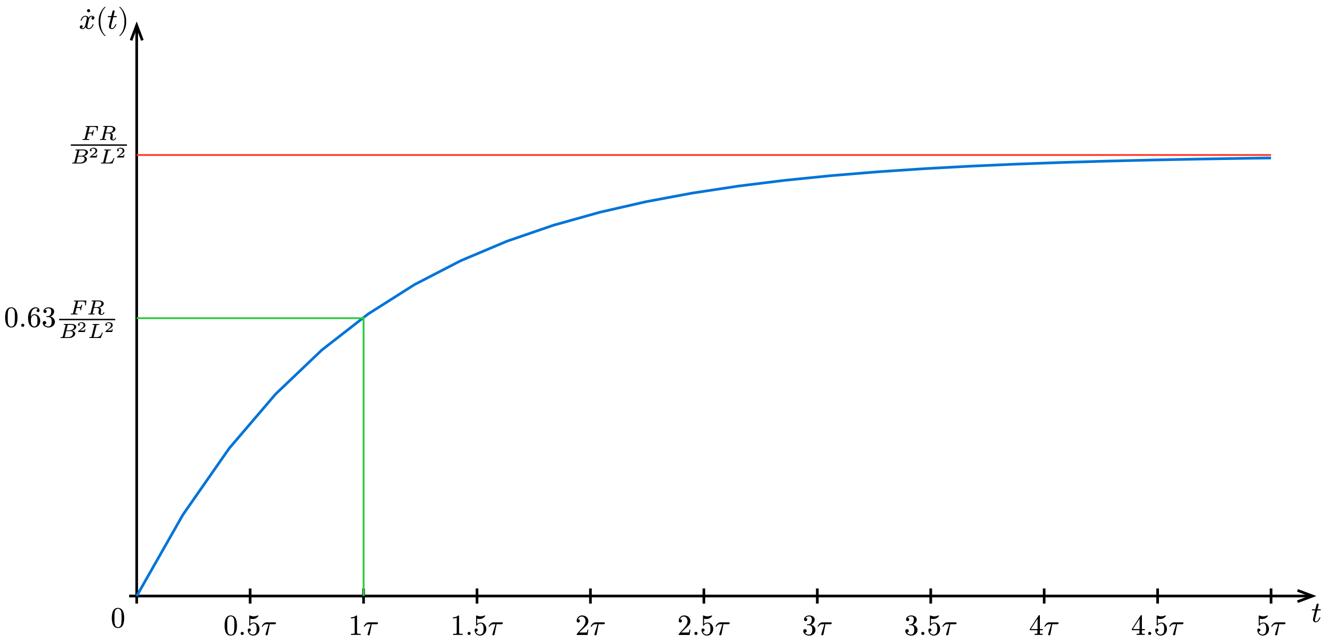
Donc $\left[\frac{mR}{B^2L^2}\right] = s^{-1}$

En résolvant (iii), on trouve : On poseras $\tau = \frac{mR}{B^2L^2}$

$$\dot{x} = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{FR}{B^2L^2}$$

Or on sait que pour $t = 0, \dot{x} = 0$, d'où $K = -\frac{FR}{B^2L^2}$ D'où :

$$\dot{x}(t) = \frac{FR}{B^2L^2}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$



Bilan de puissance

On a :

$$\mathcal{P}_l\left(\vec{F}_l\right) = \vec{F}_l \cdot \vec{v} = iLB\dot{x}$$

Ainsi $\mathcal{P}_l\left(\vec{F}_l\right) = iLB\dot{x}$

Par effet joule on a : $\mathcal{P}_J = Ri^2$, or par la question 7 : $i = -\frac{BL}{R}\dot{x} \Leftrightarrow R = -\frac{BL}{i}\dot{x}$, d'où :

$$\mathcal{P}_J = \mathrm{R}\ i^2 = -\ \mathrm{B\ L\ i}\ \dot{x} = -\ \mathcal{P}_l$$

On a donc que la puissance gagnée par la force de Laplace est dissipée par effet joule

On a : $\mathcal{P}_{\mathrm{op}} = \mathcal{P}\left(\vec{F}\right) = \vec{F} \cdot \vec{v} = F\dot{x}$

En multipliant (iii) par $\dot{x}$, on trouve :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) + \frac{B^2L^2}{R}\dot{x}^2 = F\dot{x} \text{ Or } R = -\frac{BL}{i}\dot{x}$$

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right)}_{\text{puissance gagnée par l'énergie cinétique}} - \underbrace{BLi\dot{x}}_{\text{puissance dissipée par effet joule}} = \underbrace{F\dot{x}}_{\text{puissance fournie par l'opérateur}}$$