1 Équation des géodésiques

Soit, le lagrangien suivant :

$$\mathcal{L}(x^\alpha, \dot{x}^\alpha) = \left[g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\right]^{\frac{1}{2}} \tag{1.1}$$

avec $\dot{x}^\alpha = \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}s}$
Ainsi on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} &= \frac{1}{2}\left[g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\right]^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\right)\\ &= \frac{1}{2}\left[g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\right]^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\\ &= \frac{1}{2}\left[g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\right]^{-\frac{1}{2}}g_{\mu\nu,\alpha}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\end{aligned} \tag{1.2}$$

où on note : $g_{\mu\nu,\alpha} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}$
Et

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} &= \frac{1}{2}\left[g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\right]^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial \dot{x}^\alpha}\left(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\right) = \frac{1}{2}\left[g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\right]^{-\frac{1}{2}}g_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial \dot{x}^\alpha}\left(\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\right)\\ &= \frac{1}{2}\left[g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\right]^{-\frac{1}{2}}g_{\mu\nu}\left(\dot{x}^\nu\underbrace{\frac{\partial}{\partial \dot{x}^\alpha}\left(\dot{x}^\mu\right)}_{=\delta^\mu_\alpha} + \dot{x}^\mu\underbrace{\frac{\partial}{\partial \dot{x}^\alpha}\left(\dot{x}^\nu\right)}_{=\delta^\nu_\alpha}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left[g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\right]^{-\frac{1}{2}}g_{\mu\nu}\left(\dot{x}^\nu\delta^\mu_\alpha + \underbrace{\dot{x}^\mu\delta^\nu_\alpha}_{=\dot{x}^\nu\delta^\mu_\alpha \text{ car } \mu \text{ et } \nu \text{ sont muets}}\right)\\ &= \frac{1}{\cancel{2}}\left[g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\right]^{-\frac{1}{2}}g_{\mu\nu}\cdot\cancel{2}\dot{x}^\nu\delta^\mu_\alpha\\ &= \left[g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\right]^{-\frac{1}{2}}g_{\alpha\nu}\dot{x}^\nu\end{aligned} \tag{1.3}$$

Ainsi par les équations d'Euleur-La Grange, on obtient l'équation suivante :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\left[g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\right]^{-\frac{1}{2}}g_{\alpha\nu}\dot{x}^\nu\right) = \frac{1}{2}\left[g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\right]^{-\frac{1}{2}}g_{\mu\nu,\alpha}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu \tag{1.4}$$

En posant :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\lambda &= \left[g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}s\\ \text{Donc } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} &= \left[g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\right]^{-\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\end{aligned} \tag{1.5}$$

Ainsi, en réécrivant l'équation précédente :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\left[g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\right]^{-\frac{1}{2}}g_{\alpha\nu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}x^\nu\right) &= \frac{1}{2}\left[g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\right]^{-\frac{1}{2}}g_{\mu\nu,\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}x^\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}x^\nu\\ \text{donc } \left[g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\right]^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\cancel{\left[g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\right]^{-\frac{1}{2}}}g_{\alpha\nu}\cancel{\left[g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\right]^{\frac{1}{2}}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}x^\nu\right) &= \frac{1}{2}\left[g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\right]^{-\frac{1}{2}}\left[g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\right]g_{\mu\nu,\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}x^\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}x^\nu\end{aligned} \tag{1.6}$$

$$
\begin{aligned}
\text{donc } \cancel{\left[g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}\right]^{\frac{1}{2}}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(g_{\alpha\nu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}x^{\nu}\right) &= \frac{1}{2}\cancel{\left[g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}\right]^{\frac{1}{2}}} g_{\mu\nu,\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}x^{\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}x^{\nu} \\
\text{donc } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(g_{\alpha\nu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}x^{\nu}\right) &= \frac{1}{2}g_{\mu\nu,\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}x^{\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}x^{\nu}
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

Si on écrit l'action par rapport à s, on a :

$$
S_1 = \int \left[g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}x^{\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}x^{\nu}\right]^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}s
\tag{1.7}
$$

Alors en oprérant le changement de variable S_1 devient :

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \int \cancel{\left[g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}\right]^{\frac{1}{2}}}\left[g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}x^{\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}x^{\nu}\right]^{\frac{1}{2}}\cancel{\left[g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}\right]^{-\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}\lambda \\
&= \int \left[g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}x^{\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}x^{\nu}\right]^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}\lambda
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

Donc comme S_1 est invariante par la transformation $s \longrightarrow \lambda$ et que celle-ci est un diféomorphisme, on a alors :

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(g_{\alpha\nu}\dot{x}^{\nu}) = \frac{1}{2}g_{\mu\nu,\alpha}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}
\tag{1.9}
$$

Donc en calculant le terme de gauche :

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{\mathrm{d}s}(g_{\alpha\nu}\dot{x}^{\nu}) &= \dot{x}^{\nu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}g_{\alpha\nu} + g_{\alpha\nu}\ddot{x}^{\nu} \\
&= g_{\alpha\nu}\ddot{x}^{\nu} + \dot{x}^{\nu}\underbrace{\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial\mu}}_{=g_{\alpha\nu,\mu}}\underbrace{\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}s}}_{=\dot{x}^{\mu}} \\
&= g_{\alpha\nu}\ddot{x}^{\nu} + g_{\alpha\nu,\mu}\dot{x}^{\nu}\dot{x}^{\mu}
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

Ainsi :

$$
\begin{aligned}
\underbrace{g^{\alpha\beta}g_{\alpha\nu}}_{=\delta^{\beta}_{\nu}}\ddot{x}^{\nu} &= \frac{1}{2}g_{\mu\nu,\alpha}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} - g_{\alpha\nu,\mu}\dot{x}^{\nu}\dot{x}^{\mu} \\
\text{Donc } \ddot{x}^{\beta} &= \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\mu\nu,\alpha} - 2g_{\alpha\nu,\mu})\dot{x}^{\nu}\dot{x}^{\mu} \\
\text{Donc } \ddot{x}^{\beta} &= \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\mu\nu,\alpha} - g_{\alpha\nu,\mu} - g_{\alpha\mu,\nu})\dot{x}^{\nu}\dot{x}^{\mu}
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

En introduisant les symboles de Christoffel $\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\beta\alpha}\left(g_{\mu\alpha,\nu} + g_{\nu\alpha,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha}\right)$ on a :

$$
\begin{aligned}
\ddot{x}^{\beta} &= -\Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} \\
\text{Soit } \ddot{x}^{\beta} + \Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} &= 0
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

2 Commuteur des Co-dérivés covariante

On définit les dérivés covariantes par :

$$\nabla_\mu v^\nu = \partial_\mu v^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\rho} v^\rho \tag{2.1}$$

Ainsi, soit v^ρ un vecteur :

$$\begin{aligned}
[\nabla_\mu ; \nabla_\nu] v^\rho &= \nabla_\mu(\nabla_\nu v^\rho) - \nabla_\nu(\nabla_\mu v^\rho) \\
&= \nabla_\mu(\partial_\nu v^\rho + \Gamma^\rho_{\nu\alpha} v^\alpha) - \nabla_\nu(\partial_\mu v^\rho + \Gamma^\rho_{\mu\alpha} v^\alpha) \\
&= \partial_\mu(\partial_\nu v^\rho + \Gamma^\rho_{\nu\alpha} v^\alpha) + \Gamma^\rho_{\mu\beta}(\partial_\nu v^\beta + \Gamma^\beta_{\nu\alpha} v^\alpha) - \partial_\nu(\partial_\mu v^\rho + \Gamma^\rho_{\mu\alpha} v^\alpha) - \Gamma^\rho_{\nu\beta}(\partial_\mu v^\beta + \Gamma^\beta_{\mu\alpha} v^\alpha) \\
&= \cancel{\partial_{\nu\mu} v^\rho} + \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\alpha} v^\alpha + \Gamma^\rho_{\mu\beta}\partial_\nu v^\beta + \Gamma^\rho_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha} v^\alpha - \cancel{\partial_{\mu\nu} v^\rho} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\alpha} v^\alpha - \Gamma^\rho_{\nu\beta}\partial_\mu v^\beta - \Gamma^\rho_{\nu\beta}\Gamma^\beta_{\mu\alpha} v^\alpha \\
&= \left(\Gamma^\rho_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha} - \Gamma^\rho_{\nu\beta}\Gamma^\beta_{\mu\alpha} + \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\alpha} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\alpha}\right) v^\alpha + \underbrace{\Gamma^\rho_{\mu\beta}\partial_\nu v^\beta - \Gamma^\rho_{\nu\beta}\partial_\mu v^\beta}_{=0}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Ainsi, on reconnait le tenseur de Riemann définis par : $R^\sigma_{\mu\nu\kappa} = \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\kappa} - \partial_\kappa \Gamma^\sigma_{\mu\nu} + \Gamma^\sigma_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\kappa} - \Gamma^\sigma_{\kappa\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$
Donc on obtient la relation suivante :

$$[\nabla_\mu ; \nabla_\nu] v^\rho = R^\rho_{\alpha\mu\nu} v^\alpha \tag{2.3}$$

3 Dérivé covariante

On se place dans un système de coordonnée ξ^α, et on s'intérèse à un changement de coordonée vers x^α
Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
0 = \frac{\mathrm{d}^2 \xi^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\mathrm{d}\xi^\alpha}{\mathrm{d}\tau}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\right) \\
&= \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\rho}\frac{\mathrm{d}^2 x^\rho}{\mathrm{d}\tau^2} + \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Ainsi comme $\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \times \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\beta} = \delta^\alpha_\beta$, en multipliant des deux cotés :

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\mathrm{d}^2 x^\rho}{\mathrm{d}\tau^2} + \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \\
&= \frac{\mathrm{d}^2 x^\rho}{\mathrm{d}\tau^2} + \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

En posant : $\left\{{}_\mu{}^\lambda{}_\nu\right\} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\beta}\frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$, on obtient finalement :

$$0 = \frac{\mathrm{d}^2 x^\rho}{\mathrm{d}\tau^2} + \left\{{}_\mu{}^\rho{}_\nu\right\}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau} \tag{3.3}$$

En réécrivant le produit scalaire dans les coordonnées x^α à:

$$\eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}\xi^\mu\,\mathrm{d}\xi^\nu = \underbrace{\eta_{\mu\nu}\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\beta}}_{=g_{\alpha\beta}}\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta \tag{3.4}$$

Donc :

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\beta} \tag{3.5}$$

alors en dérivant :

$$\begin{aligned}
g_{\alpha\beta,\lambda} = \partial_\lambda g_{\alpha\beta} &= \eta_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left(\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\beta} \right) \\
&= \underbrace{\eta_{\mu\nu} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha}}_{= g_{\alpha\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\nu}} \frac{\partial^2 \xi^\nu}{\partial x^\beta \partial x^\lambda} + \underbrace{\eta_{\mu\nu} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\beta}}_{= g_{\beta\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\mu}} \frac{\partial^2 \xi^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\lambda} \\
&= g_{\alpha\mu} \underbrace{\frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\nu} \frac{\partial^2 \xi^\nu}{\partial x^\beta \partial x^\lambda}}_{= \{{}_{\beta}{}^{\mu}{}_{\lambda}\}} + g_{\beta\nu} \underbrace{\frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\lambda}}_{= \{{}_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\lambda}\}} \\
&= \{{}_{\beta}{}^{\mu}{}_{\lambda}\} g_{\mu\alpha} + \{{}_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\lambda}\} g_{\nu\beta}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Donc en sommant pour difféante dérivé :

$$\begin{aligned}
g_{\alpha\beta,\lambda} + g_{\lambda\beta,\alpha} - g_{\alpha\lambda,\beta} = {} & \{{}_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\lambda}\} g_{\mu\beta} + \cancel{\{{}_{\beta}{}^{\nu}{}_{\lambda}\} g_{\nu\alpha}} \\
& + \cancel{\{{}_{\beta}{}^{\mu}{}_{\alpha}\} g_{\mu\lambda}} + \{{}_{\lambda}{}^{\nu}{}_{\alpha}\} g_{\nu\beta} \\
& - \cancel{\{{}_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\beta}\} g_{\mu\lambda}} - \cancel{\{{}_{\lambda}{}^{\nu}{}_{\beta}\} g_{\nu\alpha}} \\
& = \{{}_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\lambda}\} g_{\mu\beta} + \{{}_{\lambda}{}^{\nu}{}_{\alpha}\} g_{\nu\beta} = 2 \{{}_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\lambda}\} g_{\mu\beta}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\Gamma^\gamma_{\alpha\lambda} &= \frac{1}{2} g^{\gamma\beta} (g_{\alpha\beta,\lambda} + g_{\lambda\beta,\alpha} - g_{\alpha\lambda,\beta}) = \frac{1}{2} g^{\gamma\beta} \times 2 \{{}_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\lambda}\} g_{\mu\beta} \\
&= \{{}_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\lambda}\} \delta^\gamma_\mu = \{{}_{\alpha}{}^{\gamma}{}_{\lambda}\}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

On trouve que : $\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \{{}_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\beta}\}$, et pas concéquant : $\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\nu} \frac{\partial^2 \xi^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$

3.1 Transformation de $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
{\Gamma^\lambda_{\mu\nu}}' = \{{}_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu}\}' &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial \xi^\beta} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \\
&= \frac{\partial x^k}{\partial \xi^\beta} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^k} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\gamma \partial x^\alpha} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu} \\
&= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^k} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu} \underbrace{\frac{\partial x^k}{\partial \xi^\beta} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\gamma \partial x^\alpha}}_{= \{{}_{\gamma}{}^{k}{}_{\alpha}\}} \\
&= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^k} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu} \{{}_{\gamma}{}^{k}{}_{\alpha}\} ?
\end{aligned} \tag{3.1.1}$$

A.F.L.

4 Solution de Schwarzschild

4.1 Équation sur $R_{\mu\nu}$

On se place dans un espace de dimension n

D'après l'équation de Einstein :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu} \tag{4.1.1}$$

On recherche une solution pour un espace vide, statique et à symétrie sphérique donc $T_{\mu\nu} = 0$, ainsi l'équation devient :

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R &= 0 \\
\text{donc } g^{\mu\nu}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R\right) &= 0 \\
\text{donc } \underbrace{g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}}_{=R} - \frac{1}{2} \underbrace{g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}}_{=\delta^\mu_\mu = n} &= 0 \\
\text{donc } R\left(1 - \frac{1}{2} n\right) &= 0 \\
\text{donc } R(2 - n) &= 0
\end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Ainsi on a deux cas particulier :

- Soit $n = 2$, dans ce cas la gravité est topologique
- Soit $R = 0$

Or on recherche une solution pour un espace à 4 dimension (espace-temps), ainsi $R = 0$

En injectant dans l'équation d'Einstein :

$$\begin{gathered}
R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \underbrace{R}_{=0} = 0 \\
\text{Donc } R_{\mu\nu} = 0
\end{gathered} \tag{4.1.3}$$

4.2 Écriture de la métrique dans un espace isotropique statique

On sait que dans un espace isotropique, la métrique doit ressembler à :

$$\mathrm{d}s^2 = A(r,t)\,\mathrm{d}t^2 - B(r,t)\,\mathrm{d}t(\vec{x} \cdot \mathrm{d}\vec{x}) - C(r,t)(\vec{x} \cdot \mathrm{d}\vec{x})^2 - D(r,t)\,\mathrm{d}\vec{x}^2 \tag{4.2.1}$$

En opérant le changement de variables en coordonnées sphérique :

$$\begin{aligned}
x^1 &= r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\
x^2 &= r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\
x^3 &= r \cos(\theta)
\end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Dans ce cas on a :

$$\vec{x} \cdot \vec{x} = r^2, \qquad \vec{x} \cdot \vec{x} = r\,\mathrm{d}r, \qquad \mathrm{d}\vec{x} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\theta^2 + r^2 \sin(\theta)^2\,\mathrm{d}\varphi^2 \tag{4.2.3}$$

Ainsi la métrique devient :

$$\mathrm{d}s^2 = A(t,r)\mathrm{d}t^2 - B(t,r) r\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r - C(t,r) r^2 \mathrm{d}r^2 - D(t,r)\mathrm{d}r^2 - D(t,r) r^2 \mathrm{d}^2\Omega \tag{4.2.4}$$

$$= A(t,r)\mathrm{d}t^2 - B'(t,r)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r - C'(r,t)\mathrm{d}r^2 - D'\mathrm{d}^2\Omega \tag{4.2.4}$$

avec $\mathrm{d}^2\Omega = \mathrm{d}\theta^2 + \sin(\theta)^2\,\mathrm{d}\varphi^2$ l'angle solide et $B' = Br$; $C' = Cr^2 + D$ et $D' = D$
On pose $\bar{r}^2 = D'$, alors :

$$\mathrm{d}s^2 = A(t,\bar{r})\mathrm{d}t^2 - B'(t,\bar{r})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\bar{r} - C'(t,\bar{r})\,\mathrm{d}\bar{r}^2 - \bar{r}^2\mathrm{d}^2\Omega \tag{4.2.5}$$

On pose également un nouveau temps : $\mathrm{d}\bar{t} = \Phi(t,\bar{r})\left[A(t,\bar{r})\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}B'(t,\bar{r})\,\mathrm{d}\bar{r}\right]$, donc

$$\begin{gathered}\mathrm{d}\bar{r}^2 = \Phi(t,\bar{r})\left[A^2\mathrm{d}t^2 + \frac{1}{4}B'^2\,\mathrm{d}\bar{r}^2 - AB'\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\bar{r}\right]\\ \text{Donc } A\mathrm{d}t^2 - B'\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\bar{r} = \frac{1}{A\Phi}\,\mathrm{d}\bar{t}^2 - \frac{B}{4A}\,\mathrm{d}\bar{r}^2\end{gathered} \tag{4.2.6}$$

la métrique devient :

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{1}{A\Phi}\,\mathrm{d}\bar{t}^2 - \left(\frac{B}{4A} + C'\right)\mathrm{d}\bar{r}^2 - \bar{r}^2\mathrm{d}^2\Omega \tag{4.2.7}$$

Ainsi en posant deux nouvelles fonctions $\bar{A} = \frac{1}{A\Phi}$ et $\bar{B} = \frac{B}{4A} + C'$, la métrique devient :

$$\mathrm{d}s^2 = \bar{A}(\bar{t},\bar{r})\,\mathrm{d}\bar{t}^2 - \bar{B}(\bar{t},\bar{r})\,\mathrm{d}\bar{r}^2 - \bar{r}^2\mathrm{d}^2\Omega \tag{4.2.8}$$

Comme à partir de maintenant l'on ne travaillera qu'avec les quantités avec une barre : $\bar{A}, \bar{B}, \bar{t}, \bar{r}$, on les renotera sans la barre, pour plus de claireté
De plus comme l'on imposse au système d'être statique, alors les grandeurs A et B sont indépendantes du temps
ainsi la métrique s'écrit finalement :

$$\mathrm{d}s^2 = A(r)\mathrm{d}t^2 - B(r)\mathrm{d}r^2 - r^2\mathrm{d}^2\Omega \tag{4.2.9}$$

4.3 Solution de Schwarzschild

D'après l'équation (4.1.3), $R_{\mu\nu} = 0$, or

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu\Gamma^\sigma_{\mu\sigma} - \partial_\sigma\Gamma^\sigma_{\mu\nu} + \Gamma^\rho_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\rho\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\rho\sigma} \tag{4.3.1}$$

Ainsi en calculant les symboles de Christoffel, on obtiendra des équations sur A et B

4.3.a Calcule des Christoffel

Pour calculer les symboles de Christoffel, on pourrait partir de la définition :

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\mu\rho}\left(g_{\alpha\rho,\beta} + g_{\beta\rho,\alpha} - g_{\alpha\beta,\rho}\right) \tag{4.3.2}$$

Cependant, ceci demande de calculer indépendament chaque coefficient, or en dimension 4 il y en a $4^3 = 64$, rendant les calcules longs et éreintant.
Or, il existe une méthode plus rapide pour les calculer, celle-ci ce base sur le faits que l'équation des géodésiques, l'équation (1.12), dépend directement des symboles de Christoffel.
Donc pour les calculer, on prend le lagrangien $\mathcal{L} = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$, que l'on insère dans les équations d'Euleur-La Grange, pour retomber sur l'équation des géodésiques.
Ici nous ne ferons que le calcule pour la variable r, le reste à été faits par un programme en MatLab (`cristofell.m`, présent dans le même dossier).
Ainsi, le lagrangien s'écrit : $\mathcal{L} = A(r)\dot{t}^2 - B(r)\dot{r}^2 - r^2\dot{\theta}^2 - r^2\sin(\theta)^2\dot{\varphi}^2$, alors on a :

$$\partial_{\dot{r}}\mathcal{L} = -2B(r)\dot{r}$$
$$\text{donc } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mathscr{s}}\partial_{\dot{r}}\mathcal{L} = -2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mathscr{s}}(\dot{r}B(r)) = -2\frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}\mathscr{s}}B - 2\dot{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\mathscr{s}}\frac{\mathrm{d}B(r)}{\mathrm{d}r} = -2\ddot{r}B - 2\dot{r}^2B'(r) \tag{4.3.3}$$

Où on note les dérivés par un point les dérivés par à $\mathscr{s}$ et $B'(r)$ et $A'(r)$ les dérivés par rapport à r. Nous avons également :

$$\partial_r\mathcal{L} = A'(r)\dot{t}^2 - B'(r)\dot{r}^2 - 2r\dot{\theta}^2 - 2r\sin(\theta)^2\dot{\varphi}^2 \tag{4.3.4}$$

Donc d'après les équations d'Euleur-La Grange :

$$-2\ddot{r}B(r) - 2\dot{r}^2B' = A'\dot{t}^2 - B'\dot{r}^2 - 2r\dot{\theta}^2 - 2r\sin(\theta)^2\dot{\varphi}^2 \tag{4.3.5}$$

$$\text{donc } \ddot{r} + \frac{A'}{2B}\dot{t}^2 + \frac{B'}{2B}\dot{r}^2 - \frac{r}{B}\dot{\theta}^2 - \frac{r\sin(\theta)^2}{B}\dot{\varphi}^2 \tag{4.3.6}$$

Or comme l'équation des géodésiques s'écrit : $\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = 0$, alors en identifiant avec l'équation (4.3.6), on trouve :

$$\Gamma^1_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{A'}{2B} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{B'}{2B} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{r}{B} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{r\sin(\theta)^2}{B} \end{pmatrix} \tag{4.3.7}$$

Donc après calcule, on touve que :

$$\Gamma^0_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{A'}{2A} & 0 & 0 \\ \frac{A'}{2A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.3.8}$$

$$\Gamma^2_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\theta)\cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{4.3.9}$$

$$\Gamma^3_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & 0 & \cot(\theta) \\ 0 & \frac{1}{r} & \cot(\theta) & 0 \end{pmatrix} \tag{4.3.10}$$

4.3.b Équation sur A et B

De la même manière les différent coefficient de $R_{\mu\nu}$ on été calculé par le même programme, ainsi on obtient comme seul coefficient non nul :

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{A'}{rB} + \frac{A''}{2B} - \frac{A'}{4B}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) \\ R_{11} &= \frac{B'}{rB} - \frac{A''}{2A} + \frac{A'}{4A}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) \end{aligned} \tag{4.3.11}$$

$$
\begin{aligned}
R_{22} &= \frac{rB'}{2B^2} - \frac{1}{B} - \frac{rA'}{2AB} + 1 \\
R_{33} &= \sin(\theta)^2 \left(\frac{rB'}{2B^2} - \frac{1}{B} - \frac{rA'}{2AB} + 1 \right)
\end{aligned}
\tag{4.3.11}
$$

Ainsi par l'équation (4.1.3), on obtient le système suivant :

$$
\begin{cases}
R_{00} = \frac{A'}{rB} + \frac{A''}{2B} - \frac{A'}{4B}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) = 0 \\
R_{11} = \frac{B'}{rB} - \frac{A''}{2A} + \frac{A'}{4A}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) = 0 \\
R_{22} = \frac{rB'}{2B^2} - \frac{1}{B} - \frac{rA'}{2AB} + 1 = 0 \\
R_{33} = \sin(\theta)^2\left(\frac{rB'}{2B^2} - \frac{1}{B} - \frac{rA'}{2AB} + 1\right) = 0
\end{cases}
\tag{4.3.12}
$$

On remarque que les deux dernières équations sont redontantes, donc le système ce réduit à :

$$
\begin{cases}
\frac{A'}{rB} + \frac{A''}{2B} - \frac{A'}{4B}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) = 0 \\
\frac{B'}{rB} - \frac{A''}{2A} + \frac{A'}{4A}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) = 0 \\
\frac{rB'}{2B^2} - \frac{1}{B} - \frac{rA'}{2AB} + 1 = 0
\end{cases}
\tag{4.3.13}
$$

Si on multiplie la première ligne avec $\frac{B}{A}$ puis que l'on la somme avec la seconde, on obtient :

$$
R_{00} \times \frac{B}{A} + R_{11} = \frac{A'}{rA} + \frac{B'}{rB} = 0 \tag{4.3.14}
$$

$$
\text{Donc } A'B + B'A = 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(AB) \tag{4.3.15}
$$

$$
\text{Donc } AB = \alpha \in \mathbb{R} \tag{4.3.16}
$$

Or, on veut que la métrique tende vers celle de minkovski (univers plat) à grande distance, i.e. $A(r) \underset{r \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ et $B(r) \underset{r \to +\infty}{\longrightarrow} 1$, donc :

$$
AB \underset{r \to +\infty}{\longrightarrow} \alpha = 1 \tag{4.3.17}
$$

donc $\alpha = 1$ et donc :

$$
B = \frac{1}{A} \tag{4.3.18}
$$

En métant sur le même dénominateur la première équation du système à l'équation (4.3.12) :

$$
\frac{4A'AB + 2A''ABr - A'^2Br - A'B'Ar}{4rAB^2} = 0 \tag{4.3.19}
$$

donc

$$
4A'AB + 2A''ABr - A'r \underbrace{\cancel{A'B + B'A}}_{\text{selon l'équation (4.3.15)}} = 0 \tag{4.3.20}
$$

alors :

$$
A'' + \frac{2}{r}A' = 0 \tag{4.3.21}
$$

on reconnait une équation du premier ordre par rapport à A', soit :

$$A' = Ke^{-2\ln(r)} = \frac{K}{r^2} \tag{4.3.22}$$

avec $K \in \mathbb{R}$
on trouve enfin que :

$$\begin{gathered} A(r) = C - \frac{K}{r} \\ \text{et } C \in \mathbb{R} \end{gathered} \tag{4.3.23}$$

Or comme $A \underset{r \to +\infty}{\longrightarrow} C = 1$ alors :

$$\begin{gathered} A(r) = 1 - \frac{K}{r} \\ \text{et} \\ B(r) = \frac{1}{A} = \left(1 - \frac{K}{r}\right)^{-1} \end{gathered} \tag{4.3.24}$$

De plus à la limite des champs faible, on a :

$$A(r) = 1 + 2\phi \tag{4.3.25}$$

avec $\phi = -\frac{GM}{r}$ le potentiel gravitationnel
Donc $K = 2GM = R_s$ avec R_s le rayon de Schwarzschild
On peut finalement écrire la métrique final :

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)\mathrm{d}t^2 - \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 - r^2\mathrm{d}^2\Omega \tag{4.3.26}$$