Gaspar Daguet

Maths : DM ᚢᚷ

Il est important avant de commencer lire ce DM
d'avoir bien compris le tableau et les exemples suivants

symbole usuel	symbole du DM	prononciation
0	ᚠ	fé
1	ᚢ	ur
2	ᚦ	tur
3	ᚨ	an
4	ᚱ	rai
5	ᚲ	kau
6	ᚷ	gèb
7	ᚹ	wun
8	ᚺ	hag
9	ᚾ	nau
10	ᛃ	je
11	ᛇ	ei
$=$	ᛝ	ing/i ng
$+$	ᛏ	ti
$-$	ᛉ	al
$\times$	ᛞ	dag
$\div$	ᛚ	lag
$\in$	ᛊ	so
$\forall$	ᛈ	per
$\exists$	ᛒ	ber
$>$	ᛗ	man
$<$	ᛖ	e
$\geq$	ᛗᛝ	maning
$\leq$	ᛖᛝ	ehwing
$\neq$	ᛜ	naing
$\subset$	ᚫ	suz
$\supset$	ᛅ	zus

ᚷᚹ ᛏ ᚲᚲ ᛝ ᚢᚠᚠ ce qui est équivalant à $79 + 65 = 144$

$$e^{ϑ} \underset{ϑ \to ᚠ}{ᛝ} ᚢ ᛏ ϑ ᛏ \frac{ϑ^{ᚦ}}{ᚦ!} ᛏ \cdots ᛏ \frac{ϑ^{日}}{日!} ᛏ o\left(ϑ^{日}\right)$$

est équivalant à

$$e^x \underset{x \to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{x!} + o(x^n)$$

Problème ᚦ : nombres algébrique et extensions de corps

Partie I. extensions de corps

N=°ᚢ. Premiers exemples a.

il est évidant que $\mathbb{R}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ et de plus $\mathbb{C}$ est de dimension finis, donc $\mathbb{C}$ est une extention finie de $\mathbb{R}$

de plus soit ᛪ ᛍ $\mathbb{C}$ alors

$$\text{ᛈ ᛃ, ᛔ ᛍ } \mathbb{R}\text{, ᛪ ᛝ ᛃ ᛏ } i \text{ ᛔ} \Leftrightarrow \text{ ᛪ ᛍ Vect(ᚢ, } i\text{)}$$

Ainsi comme ᚢ et i ne sont pas colinéaire dans $\mathbb{R}$, Vect(ᚢ, i) forme une base de $\mathbb{C}$
Ainsi [$\mathbb{C}$: $\mathbb{R}$] ᛝ ᚦ

soit ᛯ un sous-corps qui contient $\mathbb{R}$
comme [$\mathbb{R}$: $\mathbb{R}$] ᛝ ᚢ et que l'on vient de prouver que [$\mathbb{C}$: $\mathbb{R}$] ᛝ ᚦ
il apparait donc comme condition que, ᚢ ᛖᛝ [ᛯ : $\mathbb{R}$] ᛖᛝ ᚦ
Ainsi [ᛯ : $\mathbb{R}$] ᛝ ᚢ ou [ᛯ : $\mathbb{R}$] ᛝ ᚦ
Et ansi ᛯ ᛝ $\mathbb{R}$ ou ᛯ ᛝ $\mathbb{C}$

b.

Soit ᛃ ᛍ $\mathbb{Q}$(√ᚦ), alors ᛒ ᛔ, ᛪ ᛍ $\mathbb{Q}$, ᛃ ᛝ ᛔ ᛏ ᛪ √ᚦ, alors prenons ᛪ ᛝ ᚠ
ainsi ᛃ ᛝ ᛔ ᛍ $\mathbb{Q}$, donc $\mathbb{Q}$ ᚹ $\mathbb{Q}$(√ᚦ) et comme $\mathbb{Q}$ est stable par ᛏ et ᛞ
Ainsi $\mathbb{Q}$ est un sous-coprs de $\mathbb{Q}$(√ᚦ)
de plus, soit ᛃ ᛍ $\mathbb{Q}$(√ᚦ) alors ᛒ ᛔ, ᛪ ᛍ $\mathbb{Q}$, ᛃ ᛝ ᛒ ᛏ ᛔ √ᚦ, soit un telle ᛪ, ᛔ
donc ᛃ ᛝ ᛪ ᛏ ᛔ √ᚦ ᛍ Vect(ᚢ, √ᚦ) et comme ᚢ et ᚦ ne sont pas colinéaire dans $\mathbb{Q}$
alors (ᚢ, √ᚦ) est une base de $\mathbb{Q}$(√ᚦ)
Donc [$\mathbb{Q}$(√ᚦ) : $\mathbb{Q}$] ᛝ ᚦ

c. i.

Soit P ᛍ $\mathbb{Q}[X]$ tel que P(∛ᚦ) ᛝ ᚠ
prenons la divisions euclidienne de Xᚨ ᛉ ᚦ par P
ce qui nous donne Xᚨ ᛉ ᚦ ᛝ PQ ᛏ R avec Q ᛍ $\mathbb{Q}$ᚢ$[X]$ et R ᛍ $\mathbb{Q}[X]$ tel que deg R ᛖ ᚦ
En évaluant notre expression précédente en ∛ᚦ on obtient :

$$\text{(∛ᚦ)}^{\text{ᚨ}} \text{ ᛉ ᚦ ᛝ ᚠ ᛝ } \underbrace{\text{P(∛ᚦ)}}_{\text{ᛝ ᚠ}} \text{ ᛏ R}$$

donc R ᛝ ᚠ et donc deg R ᛝ ᚠ
ainsi P divise Xᚨ ᛉ ᚦ

Ainsi Comme P divise Xᚨ ᛉ ᚦ et que deg P ᛝ ᚦ,
alors P et Xᚨ ᛉ ᚦ possède deux racines en commun dont ∛ᚦ
et comme Xᚨ ᛉ ᚦ ᛝ (X ᛉ ∛ᚦ)(X ᛉ ∛ᚦ $e^{i\frac{\pi}{\text{ᚨ}}}$)($X$ ᛉ ∛ᚦ $e^{i\frac{\text{ᚦ}\pi}{\text{ᚨ}}}$) donc P à en plus une racine complexe
or un polynôme dans $\mathbb{R}$ qui possède une racine complexe possède sont conjugée
ce qui n'est pas le cas pour P donc P ∉ $\mathbb{Q}[X]$ ce qui est absurde
Donc ∄ P ᛍ $\mathbb{Q}[X]$, P(∛ᚦ) ᛝ ᚠ

ii.

Par un résonnement annaloge à la question ᚢ .b on montre que $\mathbb{Q}$ ᚴ $\mathbb{Q}\left(\sqrt[ᚨ]{ᚦ}\right)$,
De plus soit ᕤ ᛊ $\mathbb{Q}\left(\sqrt[ᚨ]{ᚦ}\right)$ alors soient ᛒ, ᛡ, ᛘ ᛊ $\mathbb{Q}$, ᕤ ᛟ ᛒ ↑ ᛡ $\sqrt[ᚨ]{ᚦ}$ ↑ ᛘ $\left(\sqrt[ᚨ]{ᚦ}\right)^{ᚦ}$
donc ᕤ ᛊ $\mathrm{Vect}\left(ᚢ, \sqrt[ᚨ]{ᚦ}, \sqrt[ᚨ]{ᚦ}^{ᚦ}\right)$
donc $\mathbb{Q}\left(\sqrt[ᚨ]{ᚦ}\right)$ est une extensions finis et $\left[Q\left(\sqrt[ᚨ]{ᚦ}\right) : \mathbb{Q}\right]$ ᛟ ᚨ

d.