Gaspar Daguet

DM n°5

Exercice 2 : Chauffage d'un gaz par effet Joule

N=°1.

On a $R(T_0) = R_0 = \alpha T_0$
Donc $\alpha = \frac{R_0}{T_0}$
La loi donner dans l'énoncer nous informe que $R \propto T$, Donc si T double, R double

N=°2.

La transformation est isobare car le piston viendras équilibé le volume
pour que la pression reste constante

N=°3.

Par la loi des gaz parfaits, on a:

$$P_f V_f = RnT_f$$

N=°4.

On a le travaille éléctrique élémentaire qui vaut:

$$\delta W_{\text{èl}} = Ei \,\mathrm{d}t = \frac{E^2}{R(T)} \,\mathrm{d}t$$

Or ce travaille va se transformer en chaleur par effet joule pour le gaz donc on a: $\delta Q = \delta W_{\text{èl}}$
De plus comme la transformation est isobare et que C_{pm} est constant on a:

$$\mathrm{d}H = nC_{pm} \,\mathrm{d}T$$

Ainsi, comme la transformation est isobare,
on peut appliquer le premier principe de la termodynamie, ce qui nous donne

$$\mathrm{d}H = \delta Q$$

$$\text{Donc } nC_{pm}\,\mathrm{d}T = \frac{E^2}{R(T)}\,\mathrm{d}t$$

$$\text{Donc } \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{E^2}{nC_{pm}R(T)} = \frac{E^2}{C_p\alpha T}$$

$$\text{Donc } 2T\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}T^2}{\mathrm{d}t} = \frac{2E^2}{C_p\alpha}$$

$$\text{Donc } T^2 = \frac{2E^2}{C_p\alpha}(t_f - t_i) + C_1 = \frac{2E^2T_0}{C_pR_0}(t_f - t_i) + C_1$$

$$\text{Donc } T(t) = \sqrt{\frac{2T_0E^2}{C_pR_0}(t_f - t_i) + C_1}$$

Donc en prenant $t_i = 0$ à l'instant où on commance à faire chauffer le système

On obtient: $T(t) = \sqrt{\frac{2T_0E^2}{C_pR_0}t + C_1}$

Or $T(0) = T_0$

$$\text{donc } T_0 = \sqrt{C_1}$$

$$\text{donc } T_0^2 = C_1$$

Ainsi $T(t) = T_0\sqrt{\frac{2E^2}{C_pR_0T_0}t + 1}$

N=°5.

On a que: $T_f = T(\tau) = T_0\sqrt{\frac{2E^2}{C_pR_0T_0}\tau + 1}$

Exercice 3 : Circuit RLC parallèle

N=°1.

Si on applique un pont diviseur de tension pour trouver u_s, on trouve:

$$\underline{U_{sm}} = \underline{E_m}\frac{Z_{éq}}{Z_{éq} + R_0} = \underline{E_m}\frac{1}{1 + \frac{R_0}{Z_{éq}}}$$

avec

$$Z_{éq} = \frac{1}{\frac{1}{R_0} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}$$

Soit encore:

$$\underline{U_{sm}} = \frac{\frac{1}{2}\underline{E_m}}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{CL}}$ et $Q = \frac{R_0}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$
Ainsi:

$$U_{sm} = \left|\underline{U_{sm}}\right| = \frac{\frac{1}{2}E_m}{\left|1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right|} = \frac{\frac{1}{2}E_m}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

et

$$\phi = \arg\left(\underline{U_{sm}}\right) = \arg\left(\frac{\frac{1}{2}E_m}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}\right) = \underbrace{\arg\left(\frac{1}{2}E_m\right)}_{=0} - \arg\left(1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)$$

$$= -\arctan\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)$$

N=°2.

il est claire que U_{sm} est maximale quand $\omega = \omega_0$
Donc $f_r = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{CL}}$

AN: $f_r = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2{,}53.10^{-6} \times 10.10^{-3}}} = 1000.6\ \text{Hz}$

N=°3.

Comme $\frac{\pi}{4} > 0$ alors u_s est en avance
On cherche ω_c tel que $\frac{\frac{1}{2}E_m}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{U_{sm,\max}}{\sqrt{2}} = \frac{E_m}{2\sqrt{2}}$

$$\text{Donc } \left(\frac{\omega_c}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_c}\right)^2 = \frac{1}{Q^2}$$

$$\text{Donc } \omega_c^2 - \frac{\omega_0}{Q}\omega_c - \omega_0^2 = 0 \text{ ou } \omega_0^2 - \frac{\omega_0}{Q}\omega_c - \omega_c^2 = 0$$

$$\text{Donc } \omega_{c,1} = \frac{\omega_0}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1} \text{ ou } \omega_{c,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1}$$

Ainsi: $f_{c,1} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\omega_0}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1}\right)$ ou $f_{c,2} = \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{\omega_0}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1}\right)$

Deplus on a:

$$\frac{\pi}{4} = \Delta\varphi_{u_s,e} = \arg(U_{sm}) - \underbrace{\arg(e)}_{=0} = \phi = \arctan\left(Q\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)\right)$$

$$\text{Donc } Q\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right) = 1$$

$$\text{Donc } \frac{R_0}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} = Q = \frac{1}{\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{\frac{\omega_0}{2\pi f_{cl}} - \frac{2\pi f_{cl}}{\omega_0}}$$

$$\text{Ainsi } R_0 = \frac{2}{\frac{\omega_0}{2\pi f_{cl}} - \frac{2\pi f_{cl}}{\omega_0}}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

AN:

$$R_0 = 592.2\Omega$$

et

$$Q = 4.7$$

N=°4.

Ajouter un condensateur reviens à l'étude du système ci-dessus avec un condensateur de capacité $C + C'$

Donc on a $f_r' = \frac{1}{2\pi}\omega_r = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{(C'+C)L}}$ Donc $C' = \frac{1}{4\pi^2 L {f_r'}^2} - C$

AN: $C' = 1.43\mu F$