Gaspar Daguet

Maths : DM 16

Exercice 1: endomorphisme laissant stables toutes les droites

N=°2.

Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$
alors $u(x) \in \mathrm{Vect}(x)$ car $\mathrm{Vect}(x)$ est stable par u
Donc $\exists ! \lambda, u(x) = \lambda x$

N=°3. a.

Si (x, y) est liée, alors $\exists \beta \in \mathbb{K}, x = \beta y$
Supposon $\beta = 0$
alors $x = \beta y = 0$ ce qui est absurde car $x \in E \setminus \{0\}$
Donc $\beta \neq 0$
Ainsi $u(x) = u(\beta y)$ donc $\lambda_x x = \beta \lambda_y y$
Donc $\lambda_x \underbrace{\beta y}_{\neq 0} = \lambda_y \underbrace{\beta y}_{\neq 0}$
Donc $\lambda_x = \lambda_y$

b.

Calculons $u(x + y)$ de deux manières différentes

$$u(x + y) = \lambda_{x+y}(x + y) = \lambda_{x+y} x + \lambda_{x+y} y$$

et

$$u(x + y) = u(x) + u(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$$

Or comme (x, y) est libre, il vient que $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$
Donc $\lambda_x = \lambda_y$

N=°4.

Les points précédents nous montre que $\forall x, y \in E \setminus \{0\}, \exists ! \lambda \in \mathbb{K}, u(x) = \lambda x$ et $u(y) = \lambda y$
Donc $\forall x \in E \setminus \{0\}, \exists ! \lambda \in \mathbb{K}, u(x) = \lambda x$
Or comme $u(0) = 0 = \lambda \times 0$
Donc $\forall x \in E, \exists ! \lambda \in \mathbb{K}, u(x) = \lambda x$, autrement dit, u est une homothétie

Exercice 2bis: endomorphisme de $\mathcal{M}_{n(\mathbb{C})}$ colinéaires à la trace

Pour montrer que $\varphi \in \operatorname{Vect}(\operatorname{tr}) \Leftrightarrow \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \varphi(AB) = \varphi(BA)$
On va procéder par double implication

- ($\Rightarrow$) Supposons que $\varphi \in \operatorname{Vect}(\operatorname{tr})$

alors $\exists 6 \in \mathbb{C}, \varphi = 6 \operatorname{tr}$
Donc soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
alors $\varphi(AB) = 6 \operatorname{tr}(AB) = 6 \operatorname{tr}(BA) = \varphi(BA)$
Donc $\varphi \in \operatorname{Vect}(\operatorname{tr}) \Rightarrow \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \varphi(AB) = \varphi(BA)$

- ($\Leftarrow$) Supposons que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \varphi(AB) = \varphi(BA)$

Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$, alors $M = \sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{i,j} E_{i,j}$ avec $\forall i, j \in [\![1; n]\!] m_{i,j} \in \mathbb{C}$
Ainsi

$$\varphi(M) = \varphi\left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{i,j} E_{i,j}\right) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{i,j} \varphi(E_{i,j})$$

Or $\forall i, j, l, k \in [\![1, n]\!], E_{i,j} E_{l,k} = \delta_{j,l} E_{i,k}$
Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{i,j} \varphi(E_{i,j}) &= \sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{i,j} \varphi(\delta_{1,1} E_{i,j}) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{i,j} \varphi(E_{i,1} E_{1,j}) \\
&= \sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{i,j} \varphi(E_{1,j} E_{i,1}) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{i,j} \varphi(\delta_{i,j} E_{1,1}) \\
&= \underbrace{\sum_{1 \leq i < j \leq n} m_{i,j} \varphi(\delta_{i,j} E_{i,j})}_{=0, \text{ car } i \neq j} + \sum_{k=1}^{n} m_{k,k} \varphi(\delta_{1,1} E_{1,1}) \\
&= \varphi(E_{1,1}) \sum_{k=1}^{n} m_{k,k} = \varphi(E_{1,1}) \operatorname{tr}(M)
\end{aligned}$$

Donc $\varphi(M) = \lambda \operatorname{tr}(M)$ avec $\lambda = \varphi(E_{1,1})$
Donc $\varphi \in \operatorname{Vect}(\operatorname{tr})$

Ainsi par double implication $\varphi \in \operatorname{Vect}(\operatorname{tr}) \Leftrightarrow \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \varphi(AB) = \varphi(BA)$

Exercice 3: composée de deux projecteurs qui commutent

- Prouvons d'abord que $p \circ q$ est un projecteur

  alors

  $$\begin{aligned}(p \circ q) \circ (p \circ q) &= p \circ q \circ p \circ q = p \circ q \circ q \circ p \\ &= p \circ q \circ p = p \circ p \circ q \\ &= p \circ q\end{aligned}$$

  Et soient $x, y \in E$ et soit $\beta \in \mathbb{R}$, alors

  $$\begin{aligned}(p \circ q)(\beta x + y) &= p(q(\beta x + y)) = p(\beta q(x) + q(y)) \\ &= \beta p(q(x)) + p(q(y)) = \beta(p \circ q)(x) + (p \circ q)(y)\end{aligned}$$

  Ainsi $p \circ q$ est un projecteur

- Prouvons maintenant par double incusion que $\mathrm{Ker}(p \circ q) = \mathrm{Ker}\ p + \mathrm{Ker}\ q$
  1. d'abord soit $x \in \mathrm{Ker}\ p + \mathrm{Ker}\ q$, alors $\exists x_p, x_q \in \mathrm{Ker}\ p \times \mathrm{Ker}\ q, x = x_p + x_q$

     Alors $(p \circ q)(x) = (p \circ q)(x_p + x_q) = p\left(q(x_p) + \underbrace{q(x_q)}_{=0}\right) = q(p(x_p)) = q(0) = 0$

     Donc $x \in \mathrm{Ker}(p \circ q)$
     Donc $\mathrm{Ker}\ p + \mathrm{Ker}\ q \subset \mathrm{Ker}(p \circ q)$

  2. De plus soit $x \in \mathrm{Ker}(p \circ q)$,
     alors $p(q(x)) = q(p(x)) = 0$ donc $p(x) \in \mathrm{Ker}\ q$
     Ainsi, $p(x - q(x)) = p(x) - p(q(x)) = p(x) \in \mathrm{Ker}\ q$
     Donc $x = (x - q(x)) + q(x)$ avec $x - q(x) \in \mathrm{Ker}\ q$ et $q(x) \in \mathrm{Ker}\ p$
     Donc $x \in \mathrm{Ker}\ p + \mathrm{Ker}\ q$
     Donc $\mathrm{Ker}(p \circ q) \subset \mathrm{Ker}\ p + \mathrm{Ker}\ q$

  Donc par le principe de double inclusion, $\mathrm{Ker}(p \circ q) = \mathrm{Ker}\ p + \mathrm{Ker}\ q$

- Enfin prouvons également par double inclusion que $\mathrm{Im}(p \circ q) = \mathrm{Im}\ p \cap \mathrm{Im}\ q$

  1. Soit $x \in \mathrm{Im}(p \circ q)$ alors $\exists y \in E, x = p(q(y))$, soit un tel y
     donc $x \in \mathrm{Im}\ p$
     et $x = p(q(x)) = q(p(x)) \in \mathrm{Im}\ q$
     Donc $x \in \mathrm{Im}\ p \cap \mathrm{Im}\ q$
     Donc $\mathrm{Im}(p \circ q) \subset \mathrm{Im}\ p \cap \mathrm{Im}\ q$

  2. Soit $x \in \mathrm{Im}\ p \cap \mathrm{Im}\ q$ alors $x \in \mathrm{Im}\ p$ et $x \in \mathrm{Im}\ q$
     Donc $x = p(x) = q(x)$
     il vient donc que $x = p(q(x))$
     Donc $x \in \mathrm{Im}(p \circ q)$
     Donc $\mathrm{Im}\ p \cap \mathrm{Im}\ q \subset \mathrm{Im}(p \circ q)$

  Ainsi par la principe de double inclusion $\mathrm{Im}(p \circ q) = \mathrm{Im}\ p \cap \mathrm{Im}\ q$