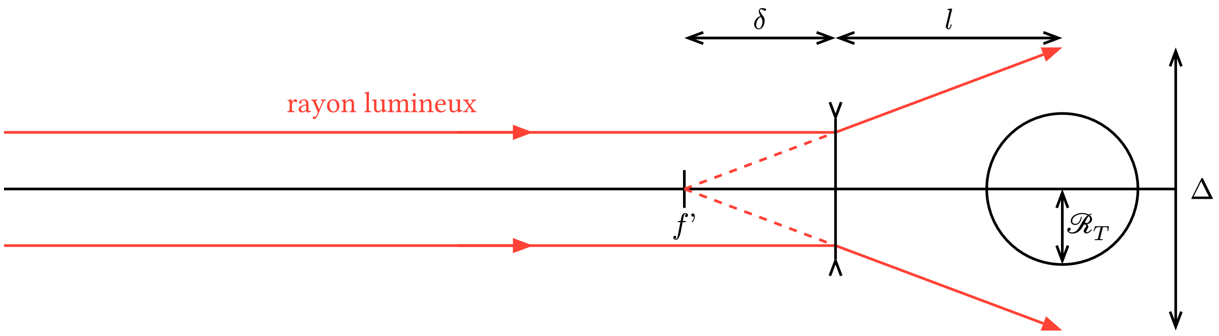
Gaspar Daguet

Physique : DM6

Installer un écran solaire dans l'espace

A — Préliminaires



Ici on cherche δ pour le quel $\mathscr{R}_T = \mu\Delta$, de plus par le théorme de Thalès on a $\frac{\delta}{l} = 2\frac{\mathscr{R}_T}{\Delta}$ avec ici $2\mathscr{R}_T$ la longueur de la lentille.
Ainsi la distance focale de la lentille est : $\delta = 2l\mu = 2 \times 0,018 \times 1,5 \cdot 10^9 = 54 \cdot 10^3 km$

Tout d'abord les symétries et les invariances du champ $\vec{\mathscr{G}}$, nous permettent de déduire que le champ $\vec{\mathscr{G}}$ est radial.
Pour $r > \mathscr{R}_T$, le théorème de Gauss sur une sphère de rayon r, nous donne :

$$-4\pi GM = \oiint_{\mathscr{S}} \vec{\mathscr{G}}(r) \cdot \overrightarrow{dS} = \mathscr{G}(r) 4\pi r^2$$

Ainsi on a :

$$\vec{\mathscr{G}}(r) = -G\frac{M}{r^2}\vec{u_r}$$

De plus comme $\vec{\mathscr{G}} = -\frac{\partial V}{\partial t}\vec{u_r}$, donc $V = G\frac{M}{r}$

Par la 3$^{\text{ième}}$ loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

Or $T = \frac{2\pi}{\omega}$, d'où :

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$$

Partie I.B — Les points de Lagrange

A.F.L.

Pour vérifier que l'équation (I.1) est symétrique par rapport à l'axe (Ax), on remplace y par $-y$, ainsi :

$$\begin{cases} -\frac{a(x-(1-a)D)}{((x-(1-a)D)^2+(-y)^2)^{3/2}} - \frac{(1-a)(x+aD)}{((x+aD)^2+(-y)^2)^{3/2}} + \frac{x}{D^3} = 0 \\ -\frac{a(-y)}{((x-(1-a)D)^2+(-y)^2)^{3/2}} - \frac{(1-a)(-y)}{((x+aD)^2+(-y)^2)^{3/2}} + \frac{-y}{D^3} = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} -\frac{a(x-(1-a)D)}{((x-(1-a)D)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{(1-a)(x+aD)}{((x+aD)^2+y^2)^{3/2}} + \frac{x}{D^3} = 0 \\ -\frac{ay}{((x-(1-a)D)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{(1-a)y}{((x+aD)^2+y^2)^{3/2}} + \frac{y}{D^3} = 0 \end{cases}$$

Partie I.C — Dynamique des flyers au voisinage de L_1

Partie I.C 1) — Position de L_1

AN :

$$a = \frac{M_T}{M} = \frac{6 \cdot 10^{24}}{2 \cdot 10^{30} + 6 \cdot 10^{24}}) \approx 3 \cdot 10^-6$$

De plus pour $a = 0$:

$$0 = \frac{1}{(D-\varepsilon)^2} - \frac{1}{D^2} + \frac{\varepsilon}{D^3} = \frac{D^3 - (D-\varepsilon)^3}{D^3(D-\varepsilon)^2}$$

$$\text{Donc } \cancel{D^3} - \cancel{D^3} + 3D^2\varepsilon - 3\varepsilon^2 D + \varepsilon^3 = \varepsilon\underbrace{(\varepsilon^2 - 3D\varepsilon + 3D^2)}_{\Delta=-3D^2<0} = 0$$

Donc $\varepsilon = 0$, ainsi la terre et L_1 sont confondus, donc on ne peut pas prendre $a = 0$

Pour $\varepsilon \ll D$, alors

$$\frac{1-a}{D^2(1-\frac{\varepsilon}{D})^2} - \frac{a}{\varepsilon^2} - \frac{1-a}{D^2} + \underbrace{\left(\frac{\varepsilon}{D^3}\right)}_{=0,\text{ car }\ \varepsilon \ll D} = 0$$

$$\frac{1-a}{D^2}\left(\cancel{1} + \frac{2\varepsilon}{D}\right) - \cancel{\frac{1-a}{D^2}} = \frac{a}{\varepsilon^2}$$

$$2\varepsilon\frac{1-a}{D^3} = \frac{a}{\varepsilon^2}$$

$$\frac{\varepsilon^3}{D^3} = \frac{a}{2(1-a)}$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \sqrt[3]{\frac{a}{2(1-a)}} \approx \sqrt[3]{\frac{a}{2}}$$

$$\text{car }\ a \ll 1$$

AN : $\frac{\varepsilon}{D} \approx \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 10^{-6}}{2}} \approx 1.1 \cdot 10^{-2}$

On peut lire sur la figure 2 que $\frac{\varepsilon}{D} \approx 1 \cdot 10^{-2}$
Ce qui est très proche de la valeur calculée précédemment

Partie I.C 2) — Dynamique des flyers au voisinage de L_1

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\tau^2}}_{\substack{\text{viens de} \\ \text{la seconde loi de Newton}}} = \underbrace{4\pi \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau}}_{\substack{\text{dû à} \\ \text{la force centrifuge}}} \underbrace{+ \pi^2 \left(1 + \frac{2a}{\epsilon^2} + \frac{2(1-a)}{(1-\epsilon)^3}\right) u}_{\substack{\text{dû à} \\ \text{l'influance gravitationelle} \\ \text{dus autres astres}}}$$

Posons $\beta = 4\pi^2 \left(\frac{a}{\epsilon^3} + \frac{1-a}{(1-\epsilon)^3}\right)$, ainsi

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\tau^2} + \beta w = 0$$

On reconais une équation différentielle du second ordre homogène, dont le polynome caractéristique $X^2 + \beta = 0$, a pour racine : $\pm i\sqrt{\beta}$.
Ainsi le mouvement du flayer suivant z est périodique, de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\beta}$

Le système (I.3) devient :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}u_p}{\mathrm{d}\tau} = 4\pi v_p + 4\pi^2 A u \\ \frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}\tau} = -4\pi u_p + 4\pi^2 B v \\ \frac{\mathrm{d}w_p}{\mathrm{d}\tau} = -4\pi^2 C w \end{cases}$$

A.F.L.