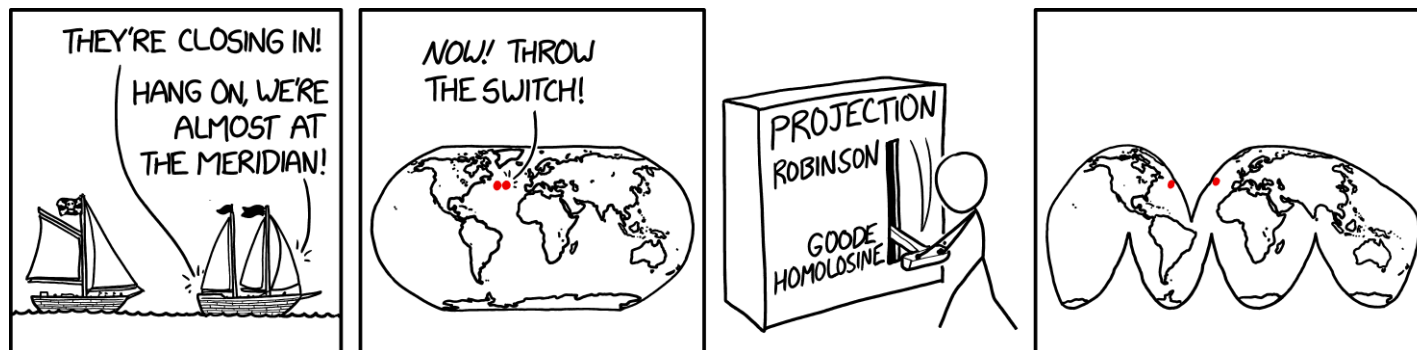


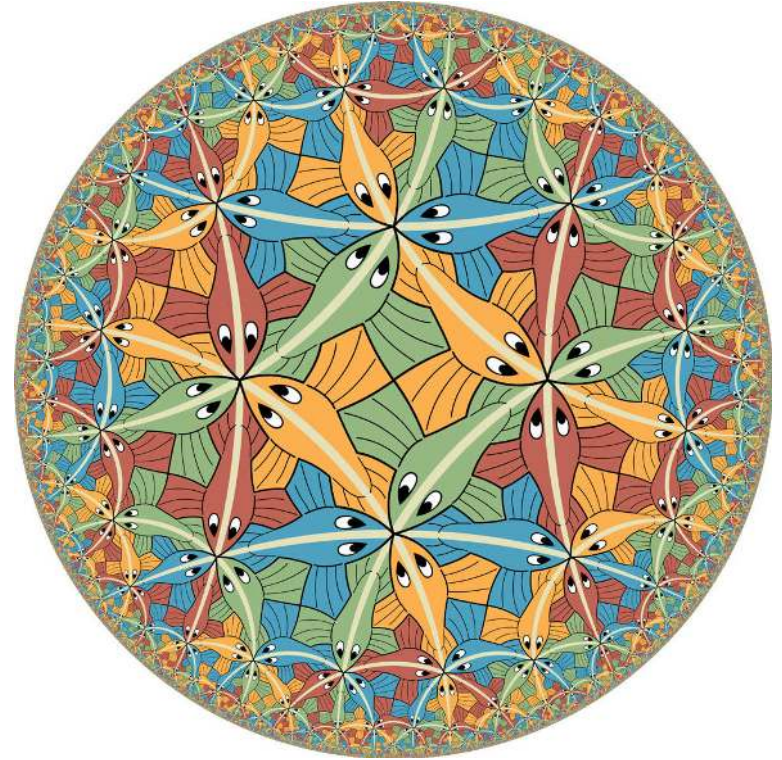
# Projection cartographique de la pseudosphère sur le plan

Gaspar Daguet, n°= 21528



Sea Chase - Xkcd

- 1) Introduction et problématique
- 2) La pseudosphère
- 3) La projection
- 4) Projection des droites



Cercle Limite III — M. C. Escher



# 1) Introduction et problématique





# 1) Introduction et problématique

Gaspar Daguet, n°=21528



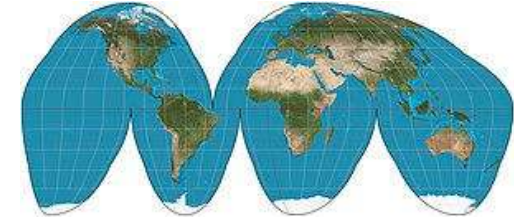
Cahill-Keyes :  
1975



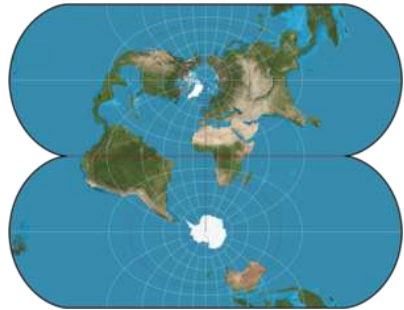
Rétro-azimutale  
de Craig : 1909



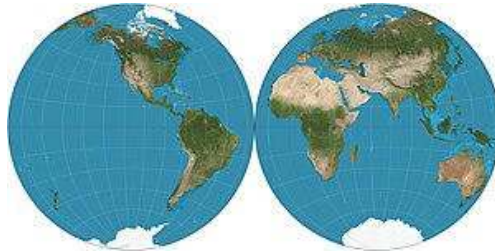
Équirectangulaire :  
120



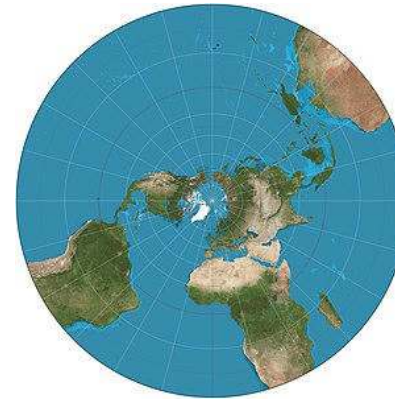
Goode : 1923



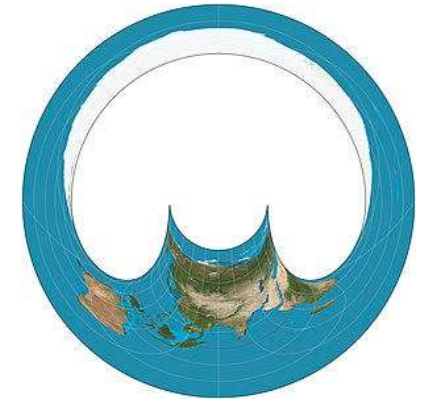
Transverse  
Universelle de  
Mercator : 1822



Globulaire de  
Nicolosi : 1000



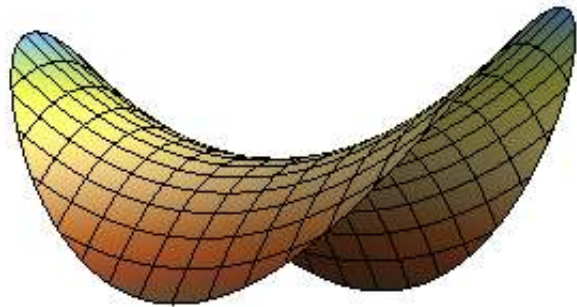
Stéréographique :  
200 av J.C.



Rétro-azimutale  
de Hammer :  
1910

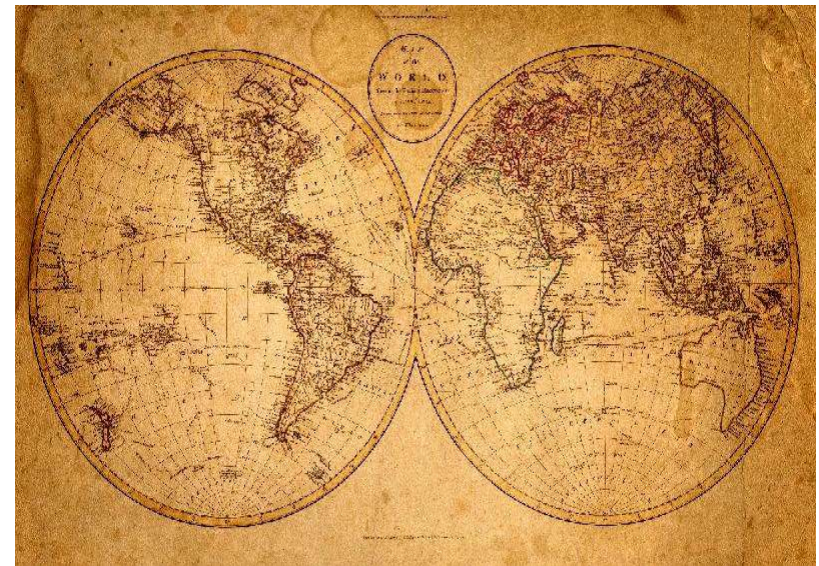
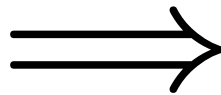
# Problématique :

Comment projeter une surface hyperbolique sur le plan ?



$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$$

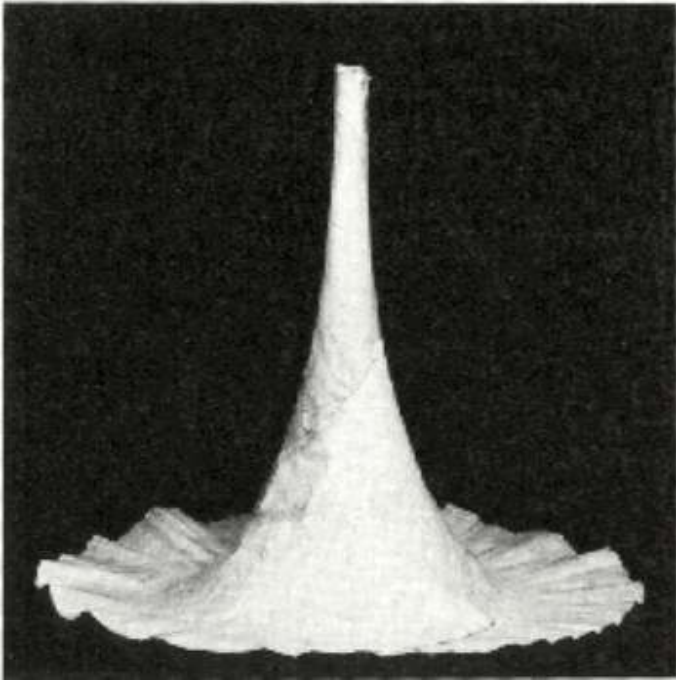
une chips



une carte







## 2) La pseudosphère



$$P : \begin{cases} [0; 2\pi] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{\cos(u)}{\operatorname{ch}(v)} \\ \frac{\sin(u)}{\operatorname{ch}(v)} \\ v - \operatorname{th}(v) \end{pmatrix} \end{cases}$$



On note  $\frac{\partial P}{\partial u} = P_u$

$$E(p) = \|P_u\|^2$$

$$F(p) = \langle P_u \mid P_v \rangle$$

$$G(p) = \|P_v\|^2$$

L'application Normale :

$$N : [0; 2\pi] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$p \longmapsto \frac{P_u(p) \wedge P_v(p)}{\|P_u(p) \wedge P_v(p)\|}$$

$$\mathcal{L}(p) = \langle P_{uu} \mid N \rangle$$

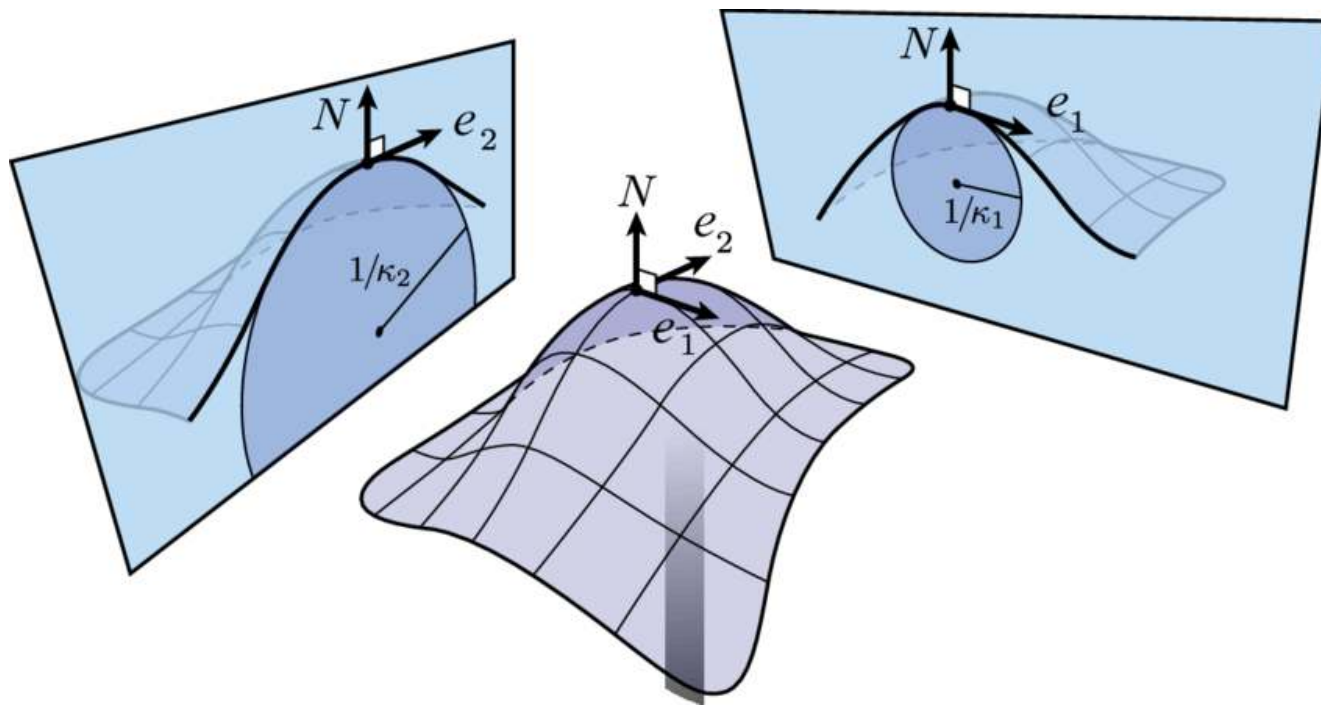
$$\mathcal{M}(p) = \langle P_{uv} \mid N \rangle$$

$$\mathcal{N}(p) = \langle P_{vv} \mid N \rangle$$



La courbure en  $p \in [0; 2\pi] \times \mathbb{R}_+$

$$K(p) = \frac{\mathcal{L}(p)\mathcal{M}(p) - \mathcal{M}(p)^2}{E(p)G(p) - F(p)^2}$$

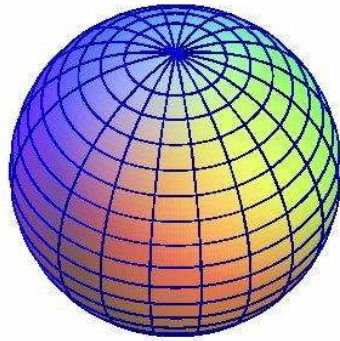


source: Localisation d'objets 3D industriels à l'aide d'un algorithme de SLAM contraint au modèle

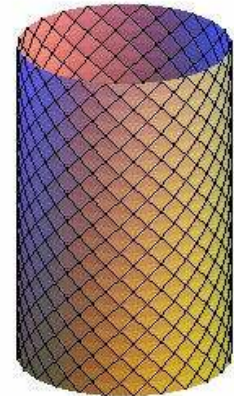
## 2) La pseudosphère

Gaspar Daguet, n°=21528

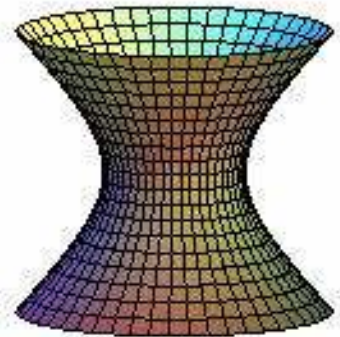
Sphérique:  $K > 0$



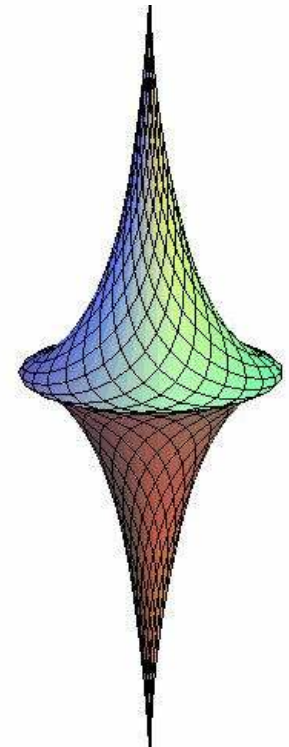
Plan:  $K = 0$



Hyperbolique:  
 $K < 0$



Pseudosphère:  
 $K = -1$



source: <https://mathcurve.com>

### 3) La projection

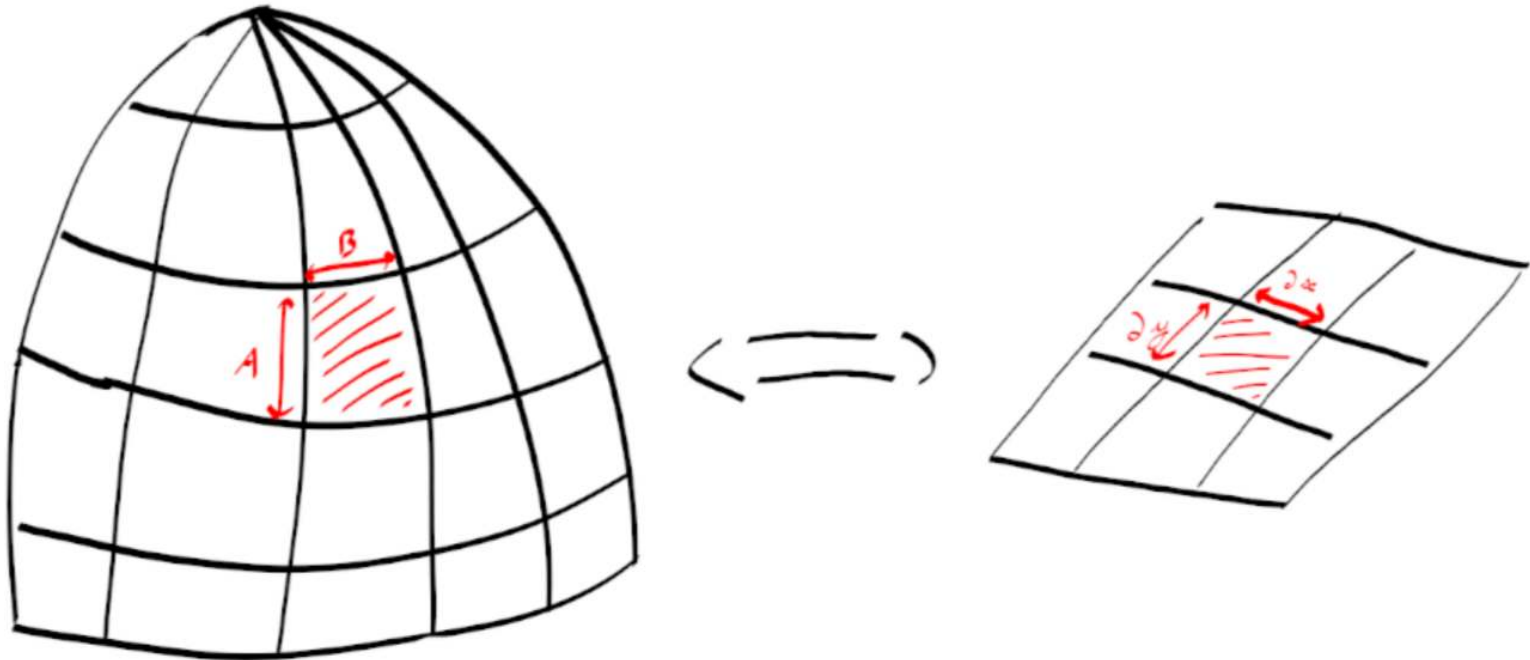




### 3) La projection

Gaspar Daguet, n°=21528

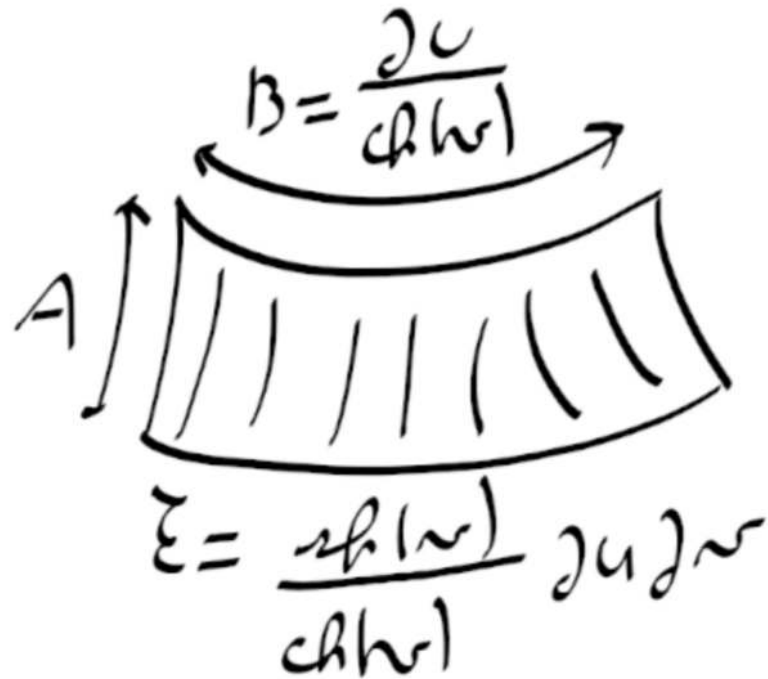
Idée de la projection de Mercator :



$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{A}{B}$$

Surface élémentaire :

$$\mathcal{E} = \|P_u \wedge P_v\| \partial u \partial v$$



Pour la pseudosphère :

$$\mathcal{E} = \frac{\text{sh}(v)}{\text{ch}^2(v)} \partial u \partial v$$

Or :

$$B = \frac{\partial u}{\text{ch}(v)}$$

Donc :

$$\frac{A}{B} = \frac{\mathcal{E}}{B^2} = \frac{\text{sh}(v) \partial v}{\partial u}$$

La projection :

$$C : \begin{cases} [0; 2\pi] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ p = (u, v) \longmapsto \begin{pmatrix} u \\ \text{ch}(v) \end{pmatrix} \end{cases}$$

Celle de Mercator :

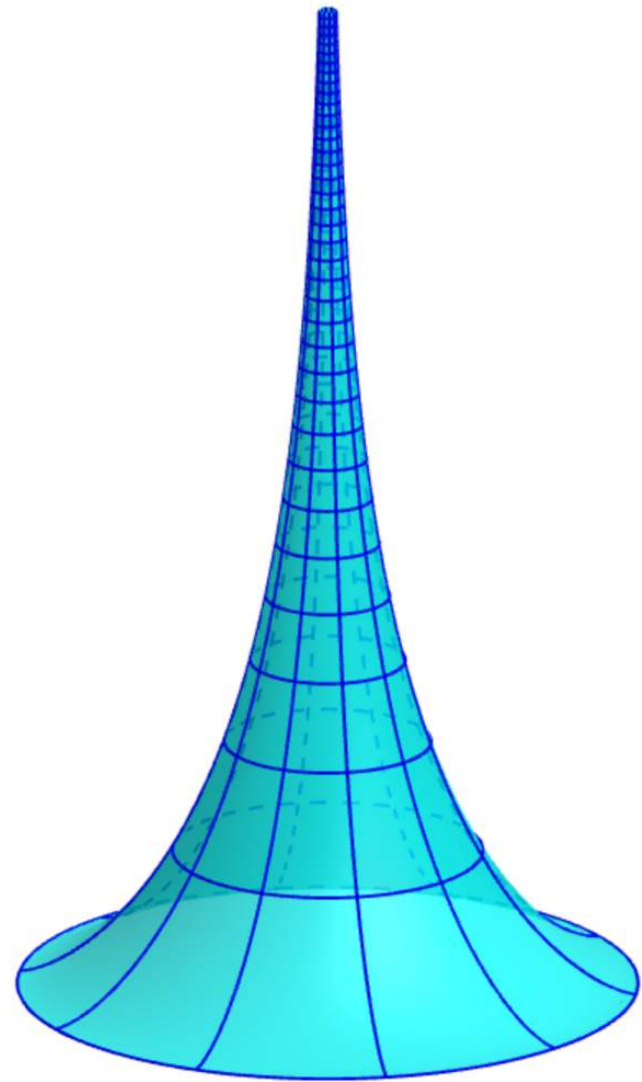
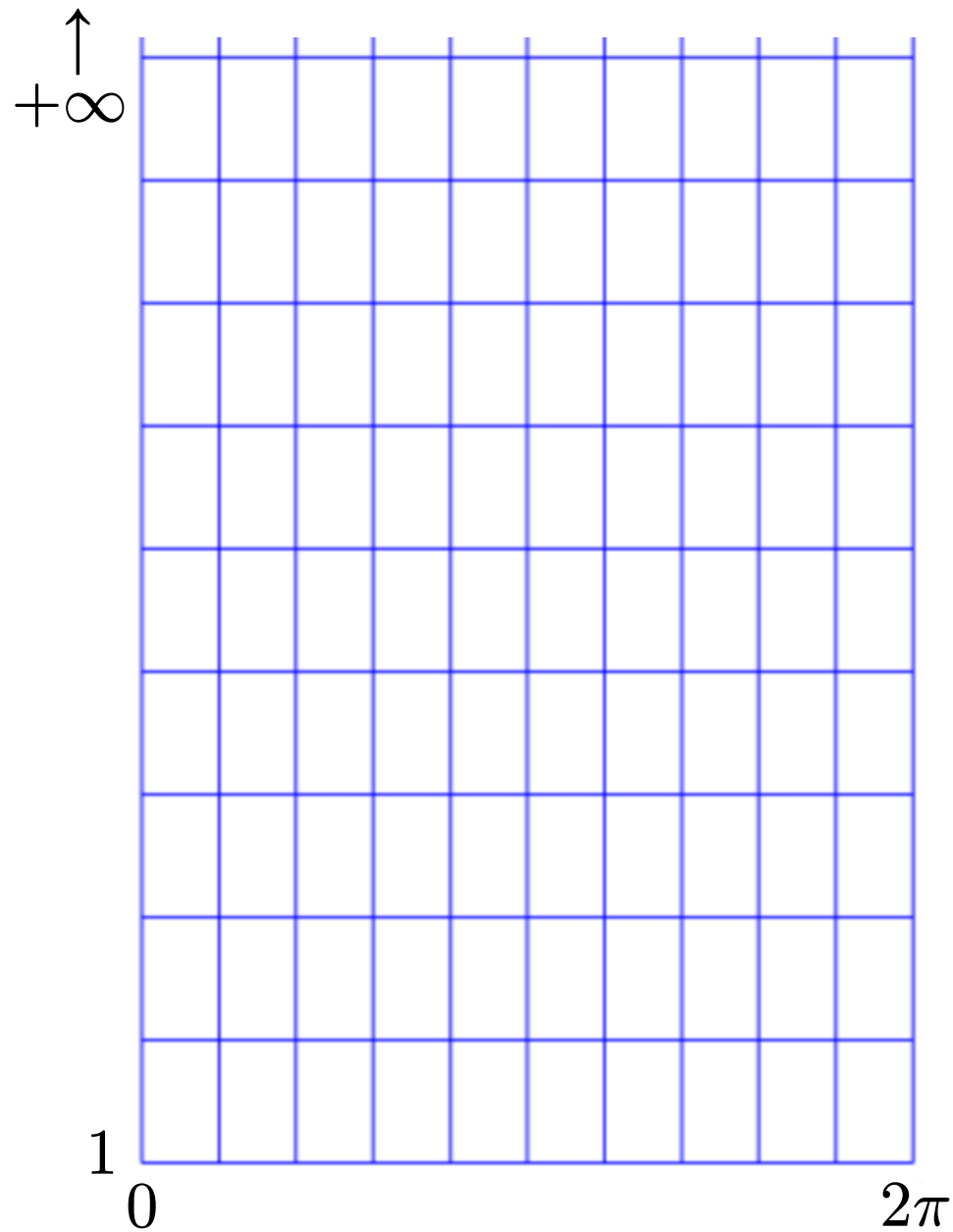
$$M : \begin{cases} [0; 2\pi] \times [-\pi; \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ p = (u, v) \longmapsto \begin{pmatrix} u \\ \ln(\tan(\frac{v}{2} + \frac{\pi}{4})) \end{pmatrix} \end{cases}$$





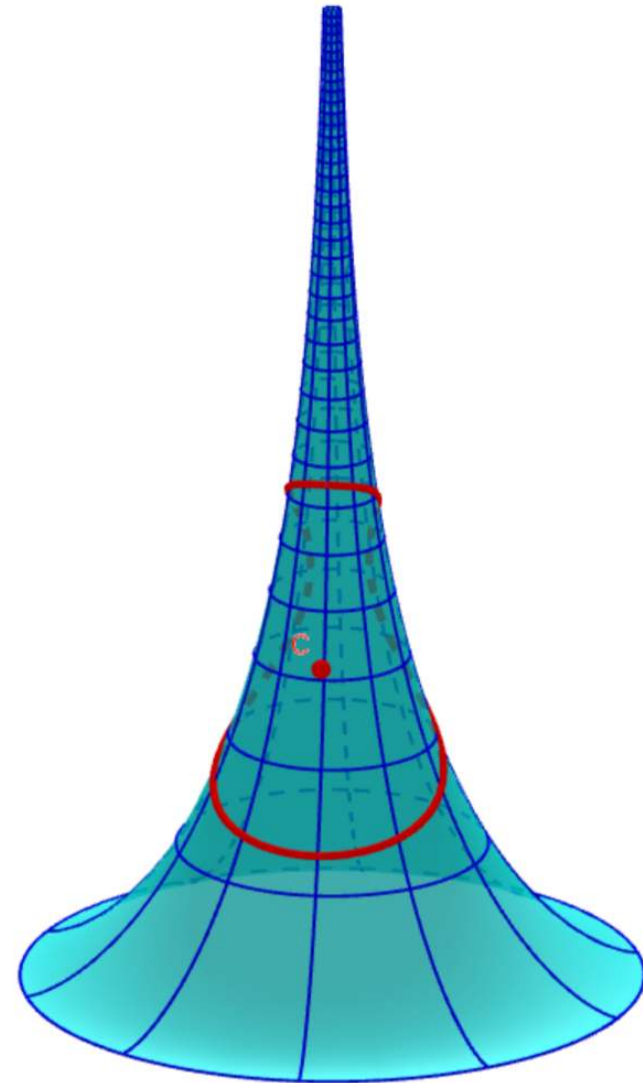
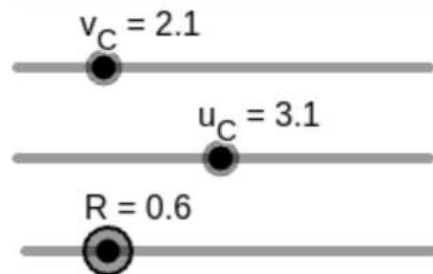
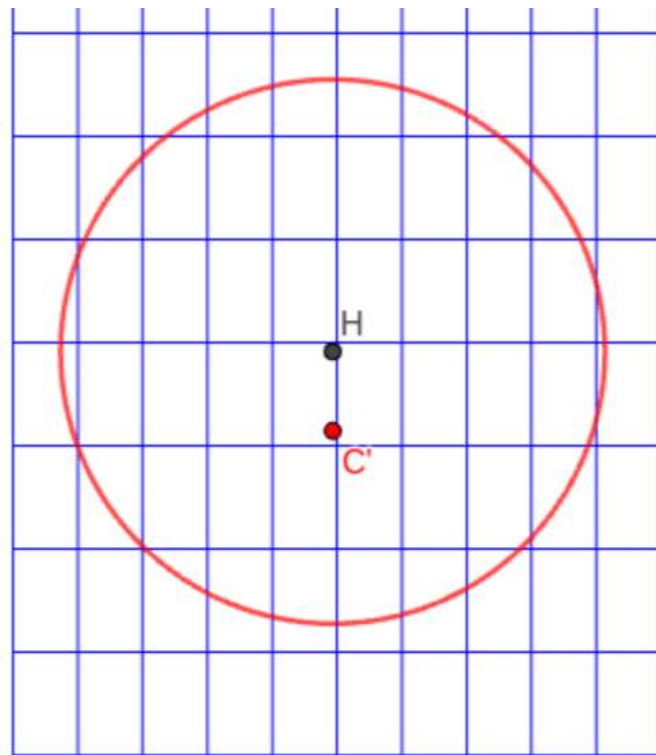
### 3) La projection

Gaspar Daguet, n°=21528



### 3) La projection

Gaspar Daguet, n°=21528



## 4) Projection des droites





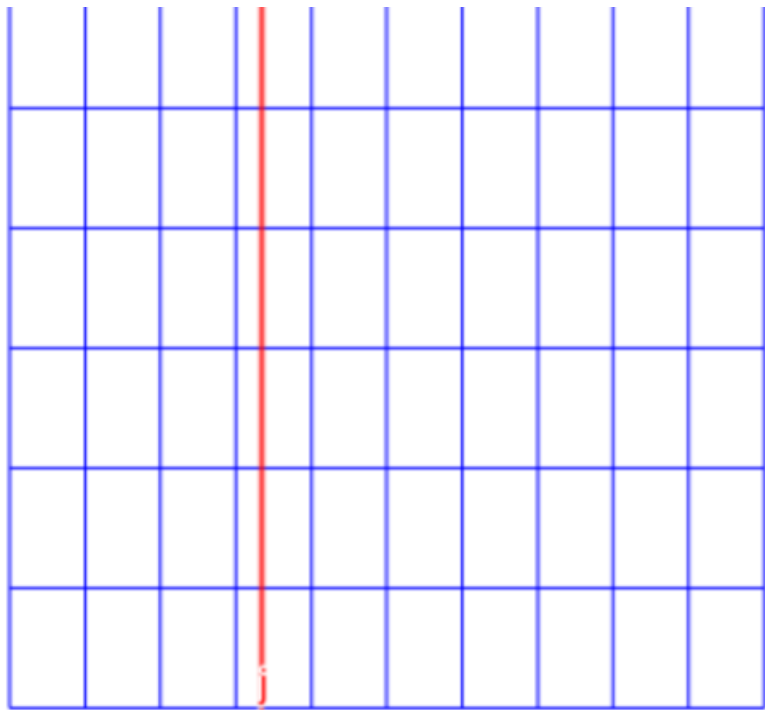
Équation des droites (géodésique):

- Méridiens:  $g : t \mapsto P(u, t)$
- Autres droites:

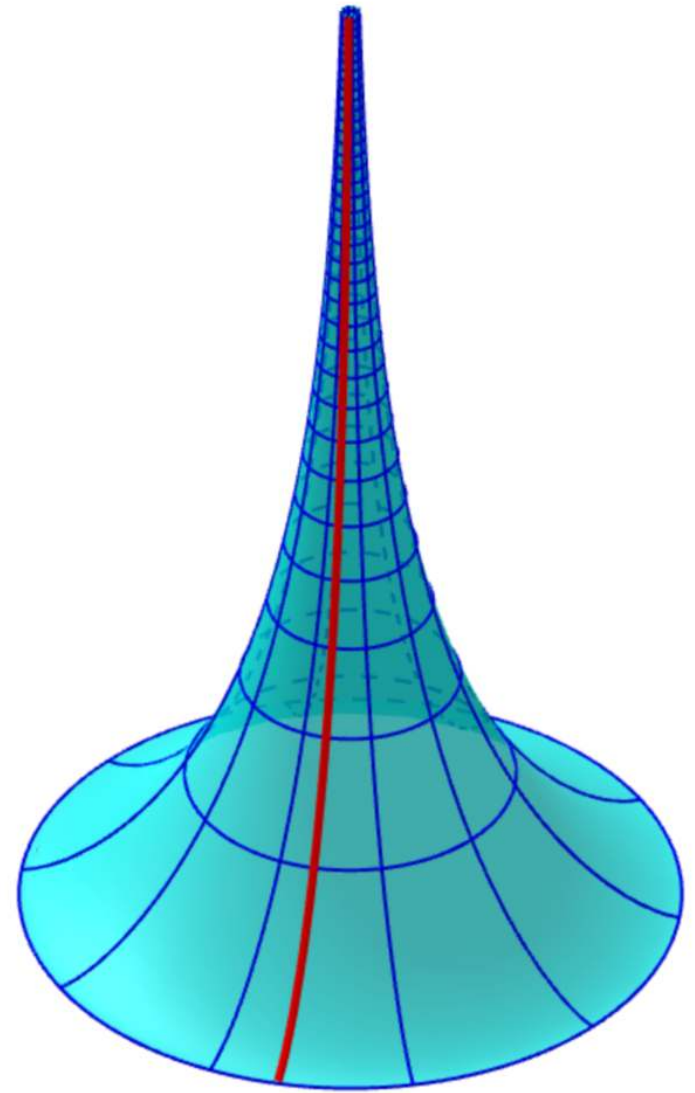
$$g : t \mapsto P\left(t, \operatorname{ch}\left(\sqrt{k^2 - (t + c)^2}\right)\right)$$



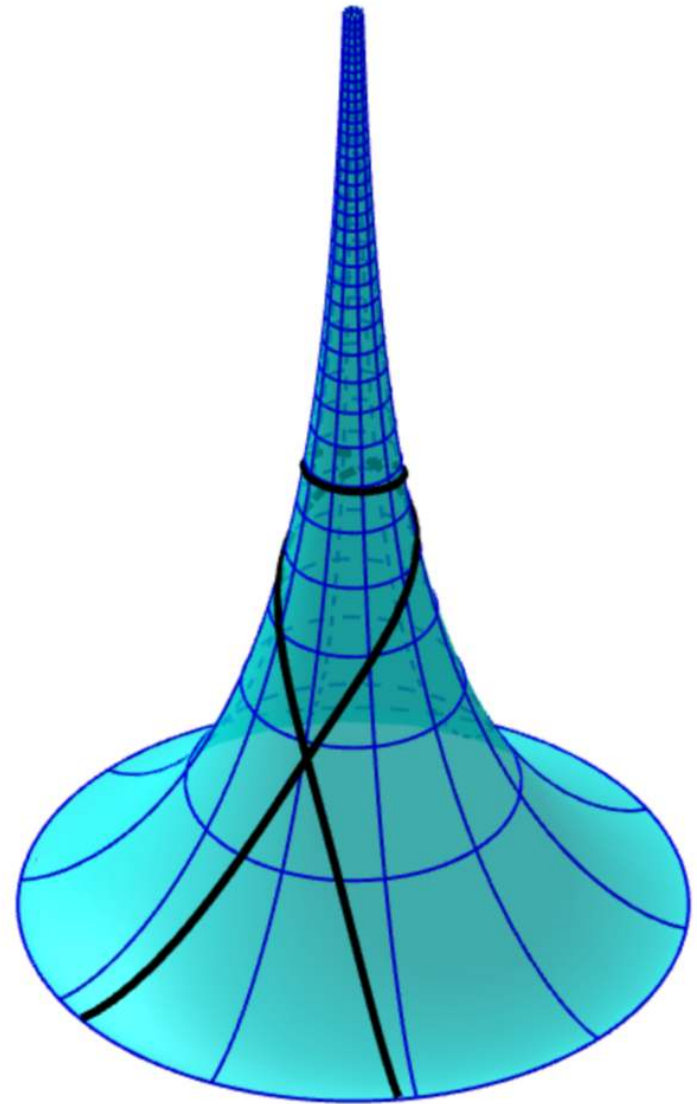
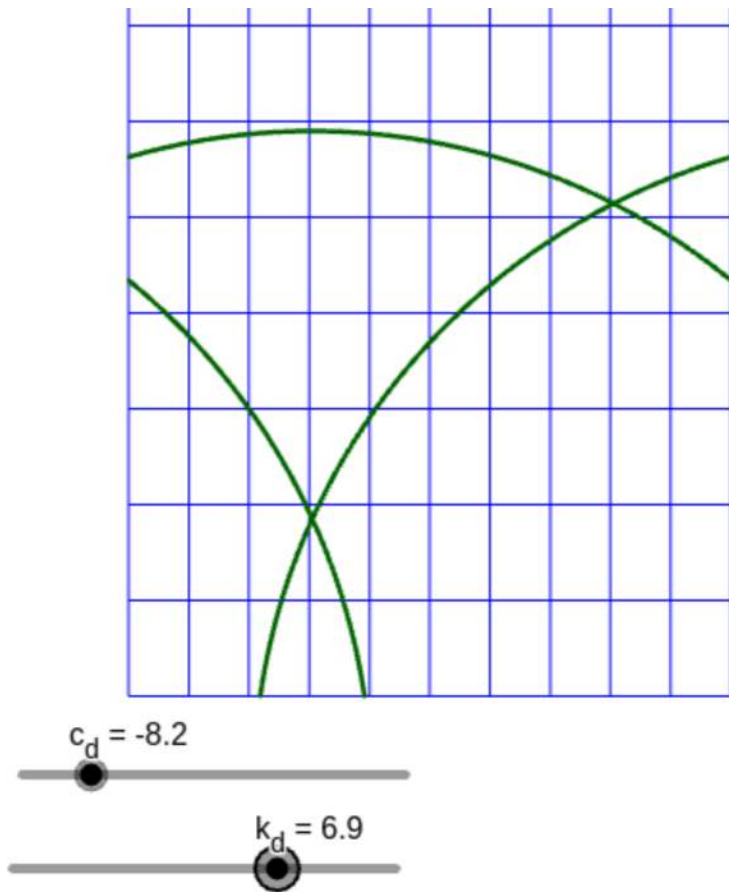
Méridiens:



$u = 2.1$



Droites quelconques:





Sur les méridiens ( $v_A = v_B$ ):

Sur la pseudosphère :

$$d(A, B) = \ln \left( \frac{\text{ch}(u_B)}{\text{ch}(u_A)} \right)$$

Longueur d'arc :

$$d(A, B) = \int_{t_A}^{t_B} \|g'(t)\| dt$$

$\neq$

Sur la carte:

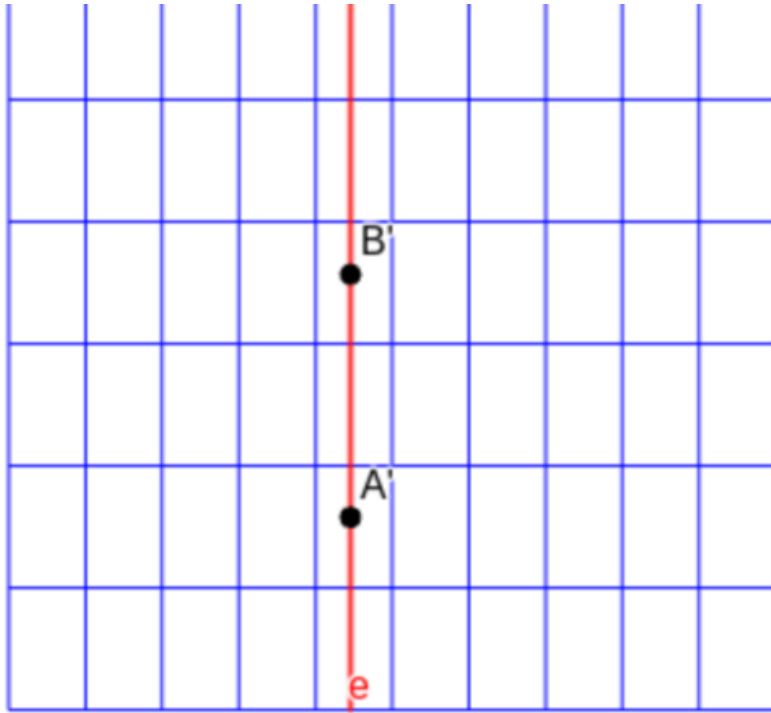
$$d(A, B) = \text{ch}(u_B) - \text{ch}(u_A)$$

Donc la projection n'est pas équivalente

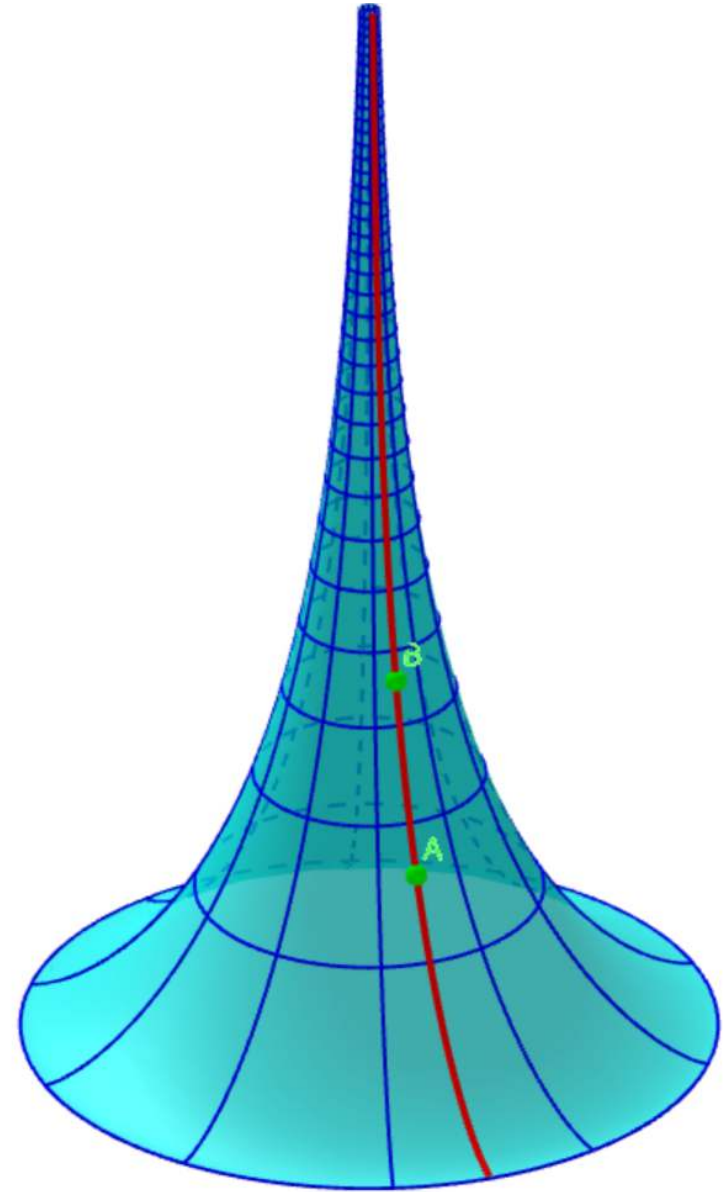


## 4) Projection des droites

Gaspar Daguet, n°=21528



$$d(A, B) = 1,99$$

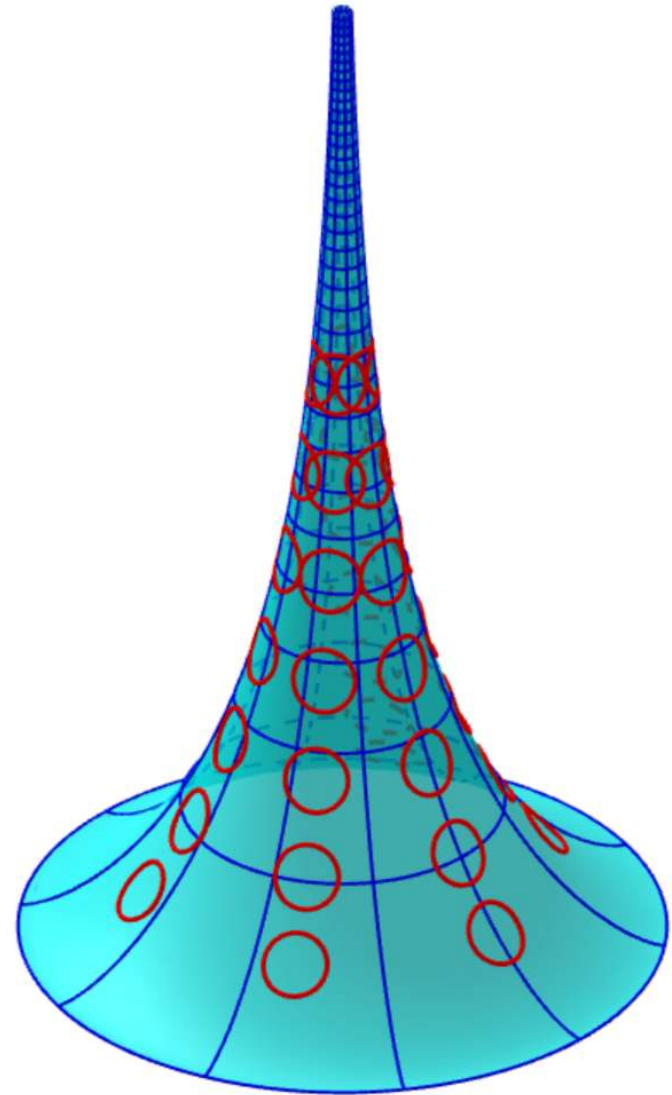
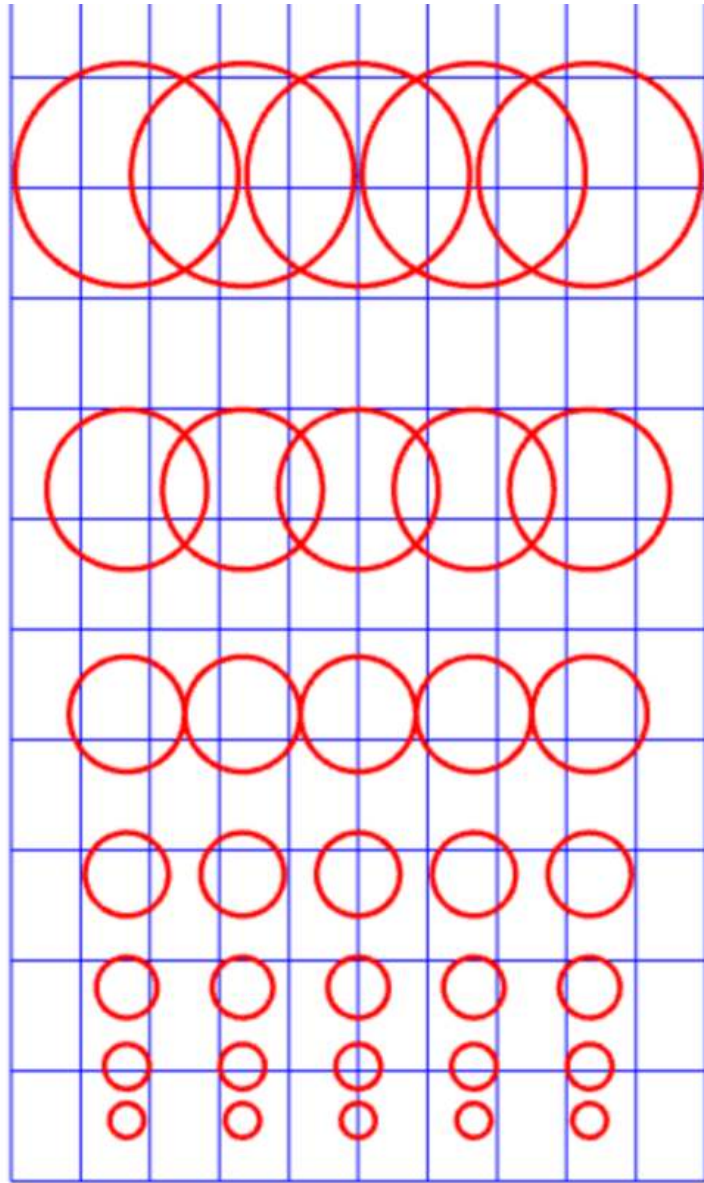


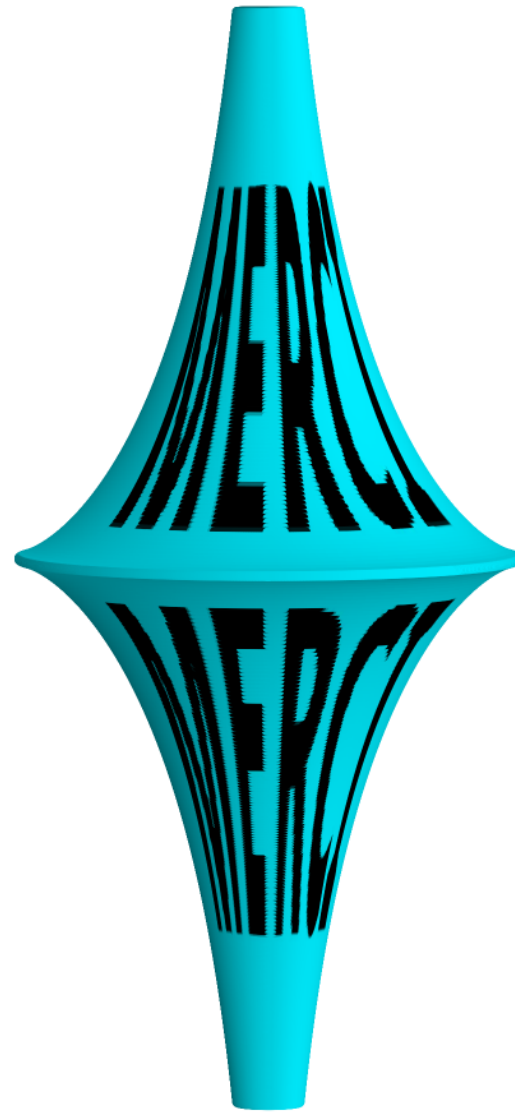
$$d(A, B) = 0,57$$



## 4) Projection des droites

Gaspar Daguet, n°=21528







# Annexes



La première forme fondamentale est l'écriture formelle du produit scalaire dans le plan tangent au point  $p$  de la surface  $S$

Or le produit scalaire entre deux vecteur du plan tangent peut s'écrire comme la combinaison linéaire entre  $P_u(p)$  et  $P_v(p)$ , donc le produit scalaire peut s'écrire :

$$\begin{aligned} I(aP_u + bP_v, cP_u + dP_v) &= \langle aP_u + bP_v \mid cP_u + dP_v \rangle \\ &= \underbrace{ac(P_u)^2}_{=E} + (ad + bc)\underbrace{\langle P_u \mid P_v \rangle}_{=F} + \underbrace{bd\|P_v\|^2}_{=G} \end{aligned}$$

Ainsi sous forme matricielle pour les vecteur  $x$  et  $y$  du plan tangent :

$$I(x, y) = x^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} y$$

Dans le repère  $(P_{u(p)}, P_{v(p)}, N(p))$ , on peut faire un développement limité de la surface de la forme :

$$z = \underbrace{\langle P_{uu} \mid N \rangle}_{=\mathcal{L}} \frac{x^2}{2} + \underbrace{\langle P_{uv} \mid N \rangle}_{=\mathcal{M}} + \underbrace{\langle P_{vv} \mid N \rangle}_{=\mathcal{N}} \frac{x^2}{2}$$

Ainsi on définit la seconde forme fondamentale par :

$$\text{II} = L \, dx^2 + 2M \, dx \, dy + N \, dy^2$$

Et donc sous forme matricielle :

$$\text{II} = \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix}$$



L'endomorphisme de Weingarten (ou opérateur de forme) est défini par :

$$W = dN$$

De plus, ses valeurs propres sont les courbures principales au point  $p$ ,  
et ses vecteurs propres sont la direction des courbures principales

Comme l'on définit la courbure de Gauss par le produit des valeurs  
propres,  
alors le déterminant de l'endomorphisme de Weingarten est la courbure  
de Gauss

$$K(p) = \det(W)$$

Nous avons également que la seconde forme fondamentale est la forme  
quadratique associée à l'endomorphisme de Weingarten





Soit  $\vec{x}, \vec{y}$  deux vecteurs du plan tangent au point  $p$  sur notre surface  $P$  tel que  $\vec{y}$  soit un vecteur propre de  $W$  associé à la valeur propre  $\lambda$   
Ainsi la première forme fondamentale nous donne le produit scalaire entre ces deux vecteurs :

$$\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = X^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} Y$$

Et comme la seconde forme fondamentale est la quadratique associé à l'endomorphisme de Weingarten :

$$\langle \vec{x} \mid W(\vec{y}) \rangle = X^T \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} Y$$



Donc comme  $\vec{y}$  est vecteur propre :

$$X^T \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} Y = \langle \vec{x} \mid W(\vec{y}) \rangle = \lambda \langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = \lambda X^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} Y$$

Comme ceci est vrai pour tout  $\vec{x}$ , on a :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} Y = \lambda \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} Y$$

Donc

$$\left( \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \right) Y = 0$$

Donc  $\begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{L} - \lambda E & \mathcal{M} - \lambda F \\ \mathcal{M} - \lambda F & \mathcal{N} - \lambda G \end{pmatrix}$  est non inversible

Et donc  $\begin{pmatrix} \mathcal{L} - \lambda E & \mathcal{M} - \lambda F \\ \mathcal{M} - \lambda F & \mathcal{N} - \lambda G \end{pmatrix} = 0$

Soit  $(EG - F^2)\lambda^2 + (E\mathcal{N} + G\mathcal{L} - 2\mathcal{M}F)\lambda + \mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2 = 0$

Ainsi le terme  $\frac{\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2}{EG - F^2}$  vaut le produit des valeurs propres et donc des courbures principales, donc :

$$K = \frac{\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2}{EG - F^2}$$



<input checked="" type="radio"/>	$S = \text{Surface}\left(\frac{\cos(u)}{\cosh(v)}, \frac{\sin(u)}{\cosh(v)}, v - \text{th}(v), u, 0, 2\pi, v, 0, 100\right)$ $= \begin{pmatrix} \frac{\cos(u)}{\cosh(v)} \\ \frac{\sin(u)}{\cosh(v)} \\ v - \text{th}(v) \end{pmatrix}$	...
<input type="radio"/>	$S_x(x, y) = \frac{\cos(x)}{\cosh(y)}$	...
<input type="radio"/>	$S_y(x, y) = \frac{\sin(x)}{\cosh(y)}$	...
<input type="radio"/>	$S_z(x, y) = y - \text{th}(y)$	...
<input type="radio"/>	$\text{Sur} = 1$	...
	<div> <div>-5</div> <div></div> <div>5</div> </div>	...
<input type="radio"/>	$c = 1$	...
	<div> <div>0</div> <div></div> <div>2</div> </div>	...
<input type="radio"/>	$h_n = 100$	...
	<div> <div>1</div> <div></div> <div>100</div> </div>	...
<input checked="" type="radio"/>	$I1 = \text{Séquence}\left(\text{Courbe}\left(\frac{2\pi}{n} k, t, 1, c h_n + 1\right), k, 0, n\right)$ $= \left\{ \left(\frac{2\pi}{10} \cdot 0, t\right), \left(\frac{2\pi}{10} \cdot 1, t\right), \left(\frac{2\pi}{10} \cdot 2, t\right), \left(\frac{2\pi}{10} \cdot 3, t\right), \left(\frac{2\pi}{10} \cdot 4, t\right), \left(\frac{2\pi}{10} \cdot 5, t\right), \left(\frac{2\pi}{10} \cdot 6, t\right), \left(\frac{2\pi}{10} \cdot 7, t\right), \left(\frac{2\pi}{10} \cdot 8, t\right), \left(\frac{2\pi}{10} \cdot 9, t\right), \left(\frac{2\pi}{10} \cdot 10, t\right) \right\}$	...
<input checked="" type="radio"/>	$I2 = \text{Séquence}(\text{Courbe}(S_x(t, \cosh^{-1}(c k + 1)), S_y(t, \cosh^{-1}(c k + 1)), S_z(t, \cosh^{-1}(c k + 1)), t, 0, 2\pi), k, 0, h_n - 1)$ $= \left\{ \left(\frac{\cos(t)}{\cosh(\cosh^{-1}(1 \cdot 0 + 1))}, \frac{\sin(t)}{\cosh(\cosh^{-1}(1 \cdot 0 + 1))}, \cosh^{-1}(1 \cdot 0 + 1) - \text{th}(\cosh^{-1}(1 \cdot 0 + 1))\right), \left(\frac{\cos(t)}{\cosh(\cosh^{-1}(1 \cdot 1 + 1))}, \frac{\sin(t)}{\cosh(\cosh^{-1}(1 \cdot 1 + 1))}, \cosh^{-1}(1 \cdot 1 + 1) - \text{th}(\cosh^{-1}(1 \cdot 1 + 1))\right), \left(\frac{\cos(t)}{\cosh(\cosh^{-1}(1 \cdot 2 + 1))}, \frac{\sin(t)}{\cosh(\cosh^{-1}(1 \cdot 2 + 1))}, \cosh^{-1}(1 \cdot 2 + 1) - \text{th}(\cosh^{-1}(1 \cdot 2 + 1))\right) \right\}$	...
<input checked="" type="radio"/>	$I3 = \text{Séquence}\left(\text{Courbe}\left(S_x\left(\frac{2\pi}{n} k, \cosh^{-1}(t)\right), S_y\left(\frac{2\pi}{n} k, \cosh^{-1}(t)\right), S_z\left(\frac{2\pi}{n} k, \cosh^{-1}(t)\right), t, 1, h_n - 1\right), k, 0, n\right)$	...



Donc on a :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{A}{B} = \frac{\text{sh}(v)\partial v}{\partial u}$$

Ainsi en posant  $x(u) = u \Leftrightarrow \frac{\partial x}{\partial u} = 1$ ,

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \text{sh}(v) \underbrace{\frac{\partial x}{\partial u}}_{=1}$$

Donc

$$y(v) = \text{ch}(v)$$



$$E = \|P_u\|^2 = \frac{1}{\text{ch}(v)^2}$$

$$F = \langle P_u \mid P_v \rangle = \cos(u) \sin(u) \frac{\text{sh}(v)}{\text{ch}(v)^3} - \cos(u) \sin(u) \frac{\text{sh}(v)}{\text{ch}(v)^3} = 0$$

$$G = \|P_v\|^2 = \frac{\text{sh}(v)^2}{\text{ch}(v)^4} + \frac{\text{sh}(v)^4}{\text{ch}(v)^4} = \frac{\text{sh}(v)^2}{\text{ch}(v)^4} \underbrace{(1 + \text{sh}(v)^2)}_{=\text{ch}(v)^2} = \frac{\text{sh}(v)^2}{\text{ch}(v)^2}$$

$$P_u(u, v) = \begin{pmatrix} -\frac{\sin(u)}{\operatorname{ch}(v)} \\ \frac{\cos(u)}{\operatorname{ch}(v)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_v(u, v) = \begin{pmatrix} -\cos(u) \frac{\operatorname{sh}(v)}{\operatorname{ch}(v)^2} \\ -\sin(u) \frac{\operatorname{sh}(v)}{\operatorname{ch}(v)^2} \\ \operatorname{th}(v)^2 \end{pmatrix}$$

$$P_{uu}(u, v) = \begin{pmatrix} -\frac{\cos(u)}{\operatorname{ch}(v)} \\ -\frac{\sin(u)}{\operatorname{ch}(v)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{vv}(u, v) = \begin{pmatrix} \cos(u) \frac{2\operatorname{sh}(v)^2 - \operatorname{ch}(v)^2}{\operatorname{ch}(v)^3} \\ \sin(u) \frac{2\operatorname{sh}(v)^2 - \operatorname{ch}(v)^2}{\operatorname{ch}(v)^3} \\ 2 \frac{\operatorname{sh}(v)}{\operatorname{ch}(v)^3} \end{pmatrix}$$

$$P_{uv} = \begin{pmatrix} \sin(u) \frac{\operatorname{sh}(v)}{\operatorname{ch}(v)^2} \\ -\cos(u) \frac{\operatorname{sh}(v)}{\operatorname{ch}(v)^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$



Tout d'abord :

$$P_u \wedge P_v = \begin{pmatrix} \cos(u) \frac{\text{sh}(v)^2}{\text{ch}(v)^3} \\ \sin(u) \frac{\text{sh}(v)^2}{\text{ch}(v)^3} \\ \frac{\text{sh}(v)}{\text{ch}(v)^3} \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \|P_u \wedge P_v\| &= \sqrt{\frac{\text{sh}(v)^4}{\text{ch}(v)^6} + \frac{\text{sh}(v)^2}{\text{ch}(v)^6}} \\ &= \frac{\text{sh}(v)}{\text{ch}(v)^3} \underbrace{\sqrt{\text{sh}(v)^2 + 1}}_{=\text{ch}(v)} = \frac{\text{sh}(v)}{\text{ch}(v)^2} \end{aligned}$$

Donc :

$$N = \frac{P_u \wedge P_v}{\|P_u \wedge P_v\|} = \begin{pmatrix} \cos(u) \frac{\text{sh}(v)}{\text{ch}(v)} \\ \sin(u) \frac{\text{sh}(v)}{\text{ch}(v)} \\ \frac{1}{\text{ch}(v)} \end{pmatrix}$$





$$\mathcal{L} = \langle P_{uu} \mid N \rangle = -\frac{\text{sh}(v)}{\text{ch}(v)^2}$$

$$\mathcal{M} = \langle P_{uv} \mid N \rangle = \frac{\text{sh}(v)^2}{\text{ch}(v)^3} (\cos(u) \sin(u) - \cos(u) \sin(u)) = 0$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \langle P_{vv} \mid N \rangle = \frac{\text{sh}(v)}{\text{ch}(v)^4} (2\text{sh}(v)^2 - \text{ch}(v)^2 + 2) \\ &= \frac{\text{sh}(v)}{\text{ch}(v)^4} (2(\text{ch}(v)^2 - 1) - \text{ch}(v)^2 + 2) \\ &= \frac{\text{sh}(v)}{\text{ch}(v)^4} \text{ch}(v)^2 = \frac{\text{sh}(v)}{\text{ch}(v)^2} \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} K &= \frac{\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2}{EG - F^2} = -\frac{\operatorname{sh}(v)^2}{\operatorname{ch}(v)^4} \times \frac{1}{\frac{\operatorname{sh}(v)^2}{\operatorname{ch}(v)^4}} \\ &= -\frac{\operatorname{sh}(v)^2}{\operatorname{ch}(v)^4} \times \frac{\operatorname{ch}(v)^4}{\operatorname{sh}(v)^2} = -1 \end{aligned}$$

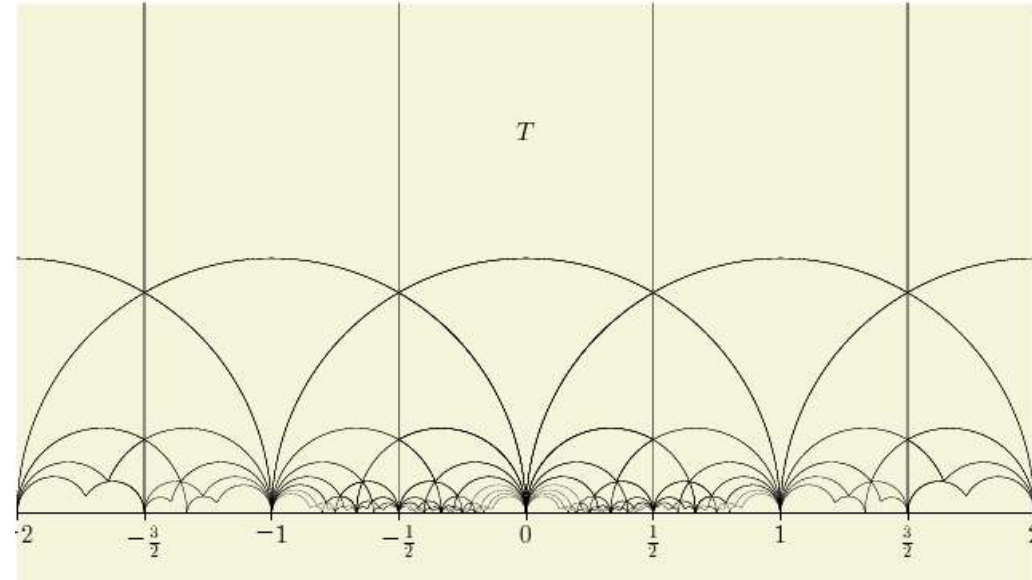
Le demi plan de Poincaré est un modèle de géométrie hyperbolique

Il est défini par :

$$\mathfrak{H}_2 = \{x + iy \in \mathbb{C}, y > 0\}$$

munis de la métrique :

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$



**NB:** Une métrique est une application  $g$  qui permet de définir le produit scalaire entre deux vecteurs, dans notre cas on note  $ds^2 = g_{ij} dx_i dx_j$  où  $g_{ij}$  sont les composante de la matrice associé et où  $ds^2$  est la longueur d'arc infinitésimal

Tout d'abord on peut définir la métrique sur notre surface par :

$$ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2$$

Sur notre surface, la métrique s'écrit :

$$ds^2 = \frac{du^2}{\text{ch}(v)^2} + \frac{\text{sh}(v)^2}{\text{ch}(v)^2} dv^2 = \frac{du^2 + \text{sh}(v)^2 dv^2}{\text{ch}(v)^2}$$

En appliquant notre projection sur la métrique :

$$\begin{cases} x = u \\ y = \text{ch}(v) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dx = du \\ dy = \text{sh}(v) dv \end{cases}$$

donc :

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

