Gaspar Daguet

DM n°5

Chute d'une tartine beurrée

N=° 1.

On a dans la base $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$:

$$\vec{T} = \begin{vmatrix} -T \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \text{ et } \vec{N} = \begin{vmatrix} 0 \\ N \\ 0 \end{vmatrix}$$

Ainsi après changement dans la base R on trouve:

$$\vec{T} = \begin{vmatrix} -T\cos\theta \\ 0 \\ -T\sin\theta \end{vmatrix} \text{ et } \vec{N} = \begin{vmatrix} N\sin\theta \\ 0 \\ -N\cos\theta \end{vmatrix}$$

De plus, on a: $\vec{P} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{vmatrix}$

Et comme ce sont les seuls forces qui s'aplique au système {tartine}

On a par la seconde lois de Newton:

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\left(\vec{N} + \vec{T} + \vec{P}\right) = \begin{vmatrix} \frac{N}{m}\sin\theta \\ 0 \\ -\frac{N}{m}\cos\theta \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \frac{T}{m}\cos\theta \\ 0 \\ \frac{T}{m}\sin\theta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{N}{m}\sin\theta - \frac{T}{m}\cos\theta \\ 0 \\ -\frac{N}{m}\cos\theta - \frac{T}{m}\sin\theta + g \end{vmatrix}$$

N=° 2.

D'abord calculons le moment du poid:

$$\mathcal{M}_{O_y}\left(\vec{P}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{OG}} \wedge \vec{P}\right).\vec{u_y} = \left(\begin{vmatrix}\delta\cos\theta \\ 0 \\ \delta\sin\theta\end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix}0 \\ 0 \\ mg\end{vmatrix}\right).\vec{u_y} = -mg\delta\cos\theta$$

ainsi par le théorème du moment cinétique:

$$J_{O_y}\ddot{\theta} = \mathcal{M}_{O_y}\left(\vec{P}\right) = -mg\delta\cos\theta$$

$$\text{donc } \ddot{\theta} = -\frac{mg\delta}{J_{O_y}}\cos\theta$$

$$\text{donc } \dot{\theta}\ddot{\theta} = -\frac{mg\delta}{J_{O_y}}\dot{\theta}\cos\theta$$

$$\text{donc } \frac{\dot{\theta}^2}{2} = \omega^2 = \frac{mg\delta}{J_{O_y}}\sin\theta$$

$$\text{donc } \omega^2 = 2\frac{mg\delta}{m\left(\frac{a^2}{3}+\delta^2\right)}\sin\theta = \frac{g}{a}\frac{6\delta}{a+3\frac{\delta^2}{a}}\sin\theta = \frac{g}{a}\frac{6\frac{\delta}{a}}{1+3\frac{\delta^2}{a^2}}\sin\theta = \frac{g}{a}\frac{6\eta}{1+3\eta^2}\sin\theta$$

Donc on a bien $\underline{\omega^2 = \frac{g}{a}\frac{6\eta}{1+3\eta^2}\sin\theta}$

N=° 3.

On a $E_c = \frac{1}{2}J_{O_y}\omega^2$

Donc par le théorème de la puissance cinétique:

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}J_{O_y}\frac{\mathrm{d}\omega^2}{\mathrm{d}t} = -mg\cos\theta \times \dot{\theta}$$

donc en intégrant:

$$\omega^2 = 2\frac{mg}{J_{O_y}}\sin\theta$$

On est donc ramené au même calcule qu'a la question précédente, et donc on retombe bien sur le même résultat

N=° 4.

Comme on se réfère au centre barycentrique on a $\mathcal{M}_{G_y}\left(\vec{P}\right) = 0$

Ainsi par le théorème du moment cinétique: $J_{G_y}\ddot{\theta} = 0$

Donc $\dot{\theta} = \omega_0$ et donc $\underline{\theta(t) = \omega_0 t + \frac{\pi}{2}}$

N=° 5.

Il est évident que l'angle limite θ_1 vaut $\frac{3\pi}{2}$

N=° 6.

Comme $\eta \ll 1$, alors on peut étudier la chute de la tartine comme dans une chute libre

Ainsi par la seconde lois de Newton:

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{vmatrix} \text{ donc } \vec{v} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ gt \end{vmatrix} \text{ et donc } \overrightarrow{\mathrm{OG}} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{g}{2}t^2 \end{vmatrix}$$

On cherche donc a savoir à quel date τ, $\|\overrightarrow{\mathrm{OG}}\| = h$, ainsi:

$$\|\overrightarrow{\mathrm{OG}}\| = \frac{g}{2}\tau^2 = h$$

$$\text{donc } \tau^2 = \frac{2h}{g}$$

$$\text{donc } \tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

On a donc bien $\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

AN: $\tau = \sqrt{\frac{2\times 0{,}75}{9{,}81}} \approx 0.391\mathrm{s} \approx 391$ ms

Ce qui demmande de très bon réflexe pour éviter le destin funeste de cette pauvre tartine

N=° 7.

Comme $\eta \ll 1$, On a $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{a}\frac{6\eta}{1+3\eta^2}} \approx \sqrt{\frac{6g\eta}{a}}$,

Ainsi en injectant τ dans la formule de la question 4.

$$\theta(\tau) = \omega_0\tau + \frac{\pi}{2}$$

Mais comme on veut que $\theta(\tau) \geq \theta_1 = \frac{3\pi}{2}$, ainsi

$$\omega_0\tau + \frac{\pi}{2} \geq \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{donc } \omega_0\tau \geq \pi$$

$$\text{donc } \sqrt{\frac{6g\eta}{a}}\sqrt{\frac{2h}{g}} \geq \pi$$

$$\text{donc } 12\eta h \geq \pi^2 a$$

$$\text{donc } \eta \geq \frac{\pi^2 a}{12h}$$

Ainsi $\eta_{\text{min}} \approx \dfrac{\pi^2 a}{12h}$

AN: $\eta_{\text{min}} \approx \frac{\pi^2 \times 0{,}05}{12 \times 0{,}75} \approx 0.055$

Mais comme sur terre $\eta \approx 0,02$, on en déduit que le destin inévitable de notre tartine est de retomber sur sa face beurrée

N=° 8.

Comme on l'a vu à la question précédente η ne dépant que de h et de a et non pas de g

Donc en modifiant g on ne change pas le destin de notre tartine

N=° 9.

Cherchons tout d'abord la vitesse à la quel un corps touche le sol après une chute de hauteur h

Comme notre tartine beurrée, ce corps metterait $\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}$s avant de toucher le sol

De plus, d'après la seconde loi de Newton, on a que la vitesse au cours de la chute est: $v(t) = gt$

Donc il touchera le sol à une vitesse $v_{\text{sol}} = v(\tau) = \sqrt{2hg}$ (1)

Ainsi en prenant h comme la taille d'un être sur un astre quelconque,

on à particulièrement pour la terre, où un humain mesure environs $h_o = 1,70m$: $v_h = \sqrt{2g_T h_o}$

avec g_T l'accélération de pensanteur sur terre

En supposant qu'un être sur un astre quelconque est constitué à peu près comme l'être humain

alors la vitesse v_h devrait être la même quelque soit l'astre

Ainsi en modifiant notre formule (1), on à $h = \frac{v_h^2}{2g} = \frac{2g_T h_o}{2g} = \frac{g_T}{g} h_o$

Ainsi on trouve que la hauteur d'un être constitué comme l'homme sur un astre quelconque

est proportionel à la hauteur de l'être humain, avec un cœficient de $\frac{g_T}{g}$,

avec g l'accélération de pensanteur pour l'astre considéré

AN: $h_m \approx \frac{9{,}81}{3{,}7} \times 1,7 \approx 4.5\text{m}$

Ainsi la hauteur d'un martien semblable à l'homme serait d'environs 4,5m

En supposant qu'une table fais environs la moitié de la hauteur de l'être qui l'utilise

alors une table martienne à une hauteur d'environs 2,3m

Ainsi en recalculant η_{min} pour cette nouvelle hauteur de table on trouve:

AN: $\eta_{\text{mars}} \approx \frac{\pi^2 \times 0{,}05}{12 \times 2{,}3} \approx 0.018$ < 0,02

Ainsi les martiens ne sont pas affectés par ce destin qui accable la terre.