Gaspar Daguet

Maths : DM 10

N=°1.

soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$v_p(x^n - y^n) = v_p\left((x-y)\sum_{k=0}^{n-1}(x^{n-1-k}y^k)\right) = v_p(x-y) + v_p\left(\sum_{k=0}^{n-1}(x^{n-1-k}y^k)\right)$$

Or par l'énoncé $p \mid x - y$ donc $x \equiv y[p]$

Ainsi $\sum_{k=0}^{n-1}(x^{n-1-k}x^k) \equiv \sum_{k=0}^{n-1}(x^{n-1-k}y^k) \equiv \sum_{k=0}^{n-1}(x^{n-1}) \equiv x^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} 1 \equiv nx^{n-1}[p]$

Donc comme p premier à n et à x, il l'est aussi à x^{n-1} alors $p \nmid nx^{n-1}$

Ainsi: $v_p\left(\sum_{k=0}^{n-1}(x^{n-1-k}y^k)\right) = 0$

$$v_p(x^n - y^n) = v_p(x-y) + v_p\left(\sum_{k=0}^{n-1}(x^{n-1-k}y^k)\right) = v_p(x-y)$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \wedge p = 1 \Rightarrow v_p(x^n - y^n) = v_p(x-y)$

N=°2. a

On a 2 premier à x et à y, il sont donc tout les deux impair

Or la somme de deux impairs est pair donc $2 \mid x + y$

Supposons par l'absurde que $4 \mid x + y$

Donc comme $4 \mid x - y$ alors $4 \mid x + y + x - y = 2x$

Donc $2 \mid x$, absurde !

Donc $4 = 2^2 \nmid x + y$ et $2 = 2^1 \mid x + y$

Ainsi $v_p(x+y) = 1$

Donc:

$$v_2(x^2 - y^2) = v_2(x-y) + v_2(x+y) = v_p(x-y) + 1$$

b.

Soit la propriété $P(n) : v_2(x^n - y^n) = v_2(x-y) + v_2(n)$

On a, $v_2(x-y) = v_2(x-y) + v_p(1)$

Donc pour $n = 1$ la propriété est vérifié

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall k \in [\![1; n]\!], P(k)$

- Si $n+1$ est impair

  alors $n+1 \wedge 2 = 1$ et par la question 1

$$v_2(x^{n+1} - y^{n+1}) = v_2(x-y)$$

- Si n est pair alors, $\exists k \in \mathbb{N}^*, n = 2k$

  Soit un tel k alors $v_2(x^n - y^n) = v_2\left(\left(x^k\right)^2 - \left(y^k\right)^2\right)$

  Donc par la question 2.a

$$v_2\left(\left(x^k\right)^2 - \left(y^k\right)^2\right) = v_2\left(x^k - y^k\right) + 1$$

  Or $k < n$, donc on peut appliquer l'hypothèse de récurance, ainsi

$$v_2\left(x^k - y^k\right) + 1 = v_2(x-y) + v_2(k) + 1$$