Gaspar Daguet

Maths : DM ᚢᚷ

Il est important avant de commencer lire ce DM
d'avoir bien compris le tableau et les exemples suivants

symbole usuel	symbole du DM	prononciation
0	ᚠ	fé
1	ᚢ	ur
2	ᚦ	tur
3	ᚨ	an
4	ᚱ	rai
5	ᚲ	kau
6	ᚷ	gèb
7	ᚹ	wun
8	ᚻ	hag
9	ᚾ	nau
10	ᛃ	je
11	ᛇ	ei
$=$	ᛝ	ing/i ng
$+$	ᛏ	ti
$-$	ᛉ	al
$\times$	ᛞ	dag
$\div$	ᛚ	lag
$\in$	ᛊ	so
$\forall$	ᛈ	per
$\exists$	ᛒ	ber
$\exists!$	!ᛒ	\
$>$	ᛗ	man
$<$	ᛖ	e
$\geq$	ᛗᛝ	maning
$\leq$	ᛖᛝ	ehwing
$\neq$	ᛜ	naing
$\subset$	ᚭ	suz
$\supset$	ᚮ	zus

ᚷᚹ ᛏ ᚲᚲ ᛝ ᚢᚠᚠ ce qui est équivalant à $79 + 65 = 144$

$$e^{\text{ɘ}} \underset{\text{ɘ} \to \text{ᚠ}}{\text{ᛝ}} \text{ᚢ} \;\text{ᛏ}\; \text{ɘ} \;\text{ᛏ}\; \frac{\text{ɘ}^{\text{ᚦ}}}{\text{ᚦ}!} \;\text{ᛏ}\; \cdots \;\text{ᛏ}\; \frac{\text{ɘ}^{\text{ᛡ}}}{\text{ᛡ}!} \;\text{ᛏ}\; o\left(\text{ɘ}^{\text{ᛡ}}\right)$$

est équivalant à

$$e^{x} \underset{x \to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{x!} + o(x^n)$$

Problème ᚦ : nombres algébrique et extensions de corps

Partie I. extensions de corps

N=° ᚢ. Premiers exemples a.

il est évident que $\mathbb{R}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ et de plus $\mathbb{C}$ est de dimension finis, donc $\mathbb{C}$ est une extention finie de $\mathbb{R}$

de plus soit ᛯ ᛊ $\mathbb{C}$ alors

$$ᛈ ᛄ, ᛒ ᛊ \mathbb{R}, ᛯ ᛟ ᛄ ᛏ i\ ᛒ \Leftrightarrow ᛯ ᛊ \mathrm{Vect}(ᚢ, i)$$

Ainsi comme ᚢ et i ne sont pas colinéaire dans $\mathbb{R}$, $\mathrm{Vect}(ᚢ, i)$ forme une base de $\mathbb{C}$
Ainsi $[\mathbb{C} : \mathbb{R}]$ ᛟ ᚦ

soit ᛥ un sous-corps qui contient $\mathbb{R}$
comme $[\mathbb{R} : \mathbb{R}]$ ᛟ ᚢ et que l'on vient de prouver que $[\mathbb{C} : \mathbb{R}]$ ᛟ ᚦ
il apparait donc comme condition que, ᚢ ᛖᛟ $[$ᛥ $: \mathbb{R}]$ ᛖᛟ ᚦ
Ainsi $[$ᛥ $: \mathbb{R}]$ ᛟ ᚢ ou $[$ᛥ $: \mathbb{R}]$ ᛟ ᚦ
Et ansi ᛥ ᛟ $\mathbb{R}$ ou ᛥ ᛟ $\mathbb{C}$

b.

Soit ᛄ ᛊ $\mathbb{Q}(\sqrt{ᚦ})$, alors ᛒ ᛒ, ᛯ ᛊ $\mathbb{Q}$, ᛄ ᛟ ᛒ ᛏ ᛯ $\sqrt{ᚦ}$, alors prenons ᛯ ᛟ ᚴ
ainsi ᛄ ᛟ ᛒ ᛊ $\mathbb{Q}$, donc $\mathbb{Q}$ ᚽ $\mathbb{Q}(\sqrt{ᚦ})$ et comme $\mathbb{Q}$ est un corps
de $\mathbb{Q}(\sqrt{ᚦ})$
de plus, soit ᛄ ᛊ $\mathbb{Q}(\sqrt{ᚦ})$ alors ᛒ ᛒ, ᛯ ᛊ $\mathbb{Q}$, ᛄ ᛟ ᛒ ᛏ ᛒ $\sqrt{ᚦ}$, soit un telle ᛯ, ᛒ
donc ᛄ ᛟ ᛯ ᛏ ᛒ $\sqrt{ᚦ}$ ᛊ $\mathrm{Vect}(ᚢ, \sqrt{ᚦ})$
et supposons par l'absurde ᛒ ᛄ, ᛒ ᛊ $\mathbb{Q}$ᛞ$\mathbb{Q}^*$, ᛄ ᛏ ᛒ $\sqrt{ᚦ}$ ᛟ ᚴ
alors $\frac{ᛄ}{ᛒ}$ ᛟ ᛉ $\sqrt{ᚦ}$ ce qui est absurde car $\frac{ᛄ}{ᛒ}$ ᛊ $\mathbb{Q}$, donc ᛄ ᛟ ᛒ ᛟ ᚴ
Ainsi $(ᚢ, \sqrt{ᚦ})$ est une base de $\mathbb{Q}(\sqrt{ᚦ})$
Donc $[\mathbb{Q}(\sqrt{ᚦ}) : \mathbb{Q}]$ ᛟ ᚦ

c. i.

Soit P ᛊ $\mathbb{Q}[X]$ tel que $P(\sqrt[ᚨ]{ᚦ})$ ᛟ ᚴ
prenons la divisions euclidienne de $X^{ᚨ}$ ᛉ ᚦ par P
ce qui nous donne $X^{ᚨ}$ ᛉ ᚦ ᛟ PQ ᛏ R avec Q ᛊ $\mathbb{Q}_{ᚢ}[X]$ et R ᛊ $\mathbb{Q}[X]$ tel que $\deg \mathrm{R}$ ᛖ ᚦ
En évaluant notre expression précédente en $\sqrt[ᚨ]{ᚦ}$ on obtient :

$$\left(\sqrt[ᚨ]{ᚦ}\right)^{ᚨ} ᛉ ᚦ ᛟ ᚴ ᛟ \underbrace{\mathrm{P}\left(\sqrt[ᚨ]{ᚦ}\right)}_{ᛟ ᚴ} ᛏ \mathrm{R}$$

donc R ᛟ ᚴ et donc $\deg \mathrm{R}$ ᛟ ᚴ
ainsi P divise $\mathrm{X}^{ᚨ}$ ᛉ ᚦ

Ainsi Comme P divise $X^{ᚨ}$ ᛉ ᚦ et que $\deg \mathrm{P}$ ᛟ ᚦ,
alors P et $X^{ᚨ}$ ᛉ ᚦ possède deux racines en commun dont $\sqrt[ᚨ]{ᚦ}$
et comme $X^{ᚨ}$ ᛉ ᚦ ᛟ $\left(X ᛉ \sqrt[ᚨ]{ᚦ}\right)\left(X ᛉ \sqrt[ᚨ]{ᚦ} e^{i\frac{\pi}{ᚨ}}\right)\left(X ᛉ \sqrt[ᚨ]{ᚦ} e^{i\frac{ᚦ\pi}{ᚨ}}\right)$ donc P à en plus une racine complexe
or un polynôme dans $\mathbb{R}$ qui possède une racine complexe possède sont conjugée

ce qui n'est pas le cas pour P donc P$\notin \mathbb{Q}[X]$ ce qui est absurde

Donc $\nexists P \in \mathbb{Q}[X], P\left(\sqrt[3]{2}\right) = 0$

ii.

Par un résonnement annaloge à la question 1 .b on montre que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)$,

De plus soit $x \in \mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)$ alors soient $a, b, c \in \mathbb{Q}, x = a + b\ \sqrt[3]{2} + c\ \left(\sqrt[3]{2}\right)^2$

donc $x \in \mathrm{Vect}\left(1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}^2\right)$

donc $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)$ est une extensions finis et $\left[Q\left(\sqrt[3]{2}\right) : \mathbb{Q}\right] = 3$

d.

Soient $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{Q}$ tels que $\displaystyle\sum_{c=1}^{n} a_c \ln(p_c) = 0$,

alors

$$\ln\left(\prod_{c=1}^{n} p_c^{a_c}\right) = 0 \text{ Donc } \prod_{c=1}^{n} p_c^{a_c} = 1$$

Or comme $\forall c \in [\![1;n]\!], a_c \in \mathbb{Q}$ donc $\exists d, b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{N}, \forall c \in [\![1;n]\!], a_c = \frac{b_c}{d}$. Ainsi

$$\left(\prod_{c=1}^{n} p_c^{b_c}\right)^{\frac{1}{d}} = 1 \Leftrightarrow \prod_{c=1}^{n} p_c^{b_c} = 1$$

Or comme $\forall c \in [\![1;n]\!], p_c^{b_c} \in \mathbb{N}$ Donc $p_1^{c_1} = \cdots = p_n^{c_n} = 1$ Donc $c_1 = \cdots = c_n = 0$

Et donc $a_1 = \cdots = a_n = 0$

Ainsi $(\ln(p_1), \cdots, \ln(p_n))$ est libre

Et donc la dimmension de $\mathbb{R}$ n'est pas finis, donc $\mathbb{R}$ n'est pas une extention finis de $\mathbb{Q}$

N°2.

soit $x \in \mathbf{L}$, alors $\exists! a_1, \cdots, a_n \in \mathbf{K}$ tel que, $x = \displaystyle\sum_{b=1}^{n} \alpha_b a_b$

Or on a $\forall b \in [\![1, n]\!], \exists! c_1, \cdots, c_p \in k, a_b = \displaystyle\sum_{d=1}^{p} \beta_d c_d$

Ainsi $\exists! a_1, \cdots, a_n \in \mathbf{K} \in k, \exists! c_1, \cdots, c_p \in k, x = \displaystyle\sum_{\substack{1 \leq b \leq n \\ 1 \leq d \leq p}} \alpha_b \beta_d a_b c_d$

Donc x s'écrit d'une manière unique comme des élément de k,

donc la famille $\left(\alpha_i \beta_j\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une base de du k-espace vectoriel $\mathbf{L}$

De plus la famille $\left(\alpha_i \beta_j\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ comporte exactement np éléments

Donc $\mathbf{L}$ est une extensions finis de k et $[\mathbf{L} : k] = [\mathbf{L} : \mathbf{K}][\mathbf{K} : k]$

Partie II. Éléments algébriques

N° 3.

pour montrer que $\mathbb{K}[\alpha] = \{P(\alpha), P \in \mathbb{K}[X]\}$,
on montre que $\{P(\alpha), P \in \mathbb{K}[X]\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(\alpha^n, n \in \mathbb{N})$
pour cela,

$$c \in \{P(\alpha), P \in \mathbb{K}[X]\} \Leftrightarrow \exists\, b_0, \cdots, b_n \in \mathbb{K} \;\; c = \sum_{a=0}^{n} b_a \alpha^a \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(\alpha^n, n \in \mathbb{N}) = \mathbb{K}[\alpha]$$

Donc $\{P(\alpha), P \in \mathbb{K}[X]\} = \mathbb{K}[\alpha]$

soient $a, b \in \mathbb{K}[\alpha]$, alors $\exists\, P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $P(\alpha) = a$ et $Q(\alpha) = b$, alors:

- $0 \in \mathbb{K}[\alpha]$
- $a - b = P(\alpha) - Q(\alpha) = (P - Q)(\alpha)$ et $P - Q \in \mathbb{K}[X]$
- $a \times b = P(\alpha) \times Q(\alpha) = (P \times Q)(\alpha)$ et $PQ \in \mathbb{K}[X]$

Donc $\mathbb{K}[\alpha]$ est un sous-anneau de $\mathbb{L}$

Et $\mathrm{Vect}(\alpha^n, n \in \mathbb{N})$ est le plus petit ensemble stable par $+$ et $\times$,
ce qui fais de luis le plus petit sous-anneau contanant α et $\mathbb{K}$

N° 4.

procédons par double inclusion pour prouver que α est algébrique sur $\mathbb{K}$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(1, \alpha, \cdots, \alpha^n)$ soit une famille liée
($\Rightarrow$) Supposons que α est algébrique sur $\mathbb{K}$, alors

$$\exists\, c \in \mathbb{K}[X], c(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}, \exists\, a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{K}, c(\alpha) = \sum_{b=0}^{n} a_b \alpha^b = 0$$

$$\text{Donc } -\sum_{b=1}^{n} a_b \alpha^b = a_0$$

Donc $(1, \alpha, \cdots, \alpha^n)$ est liée

($\Leftarrow$) Supposons que $(1, \alpha, \cdots, \alpha^n)$ soit liée, alors:

$$\exists\, a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{K}, \exists\, k \in \mathbb{N}, d\, \alpha^k = \sum_{\substack{b=0 \\ b \neq k}}^{n} a_b \alpha^b$$

$$\text{Donc } \sum_{\substack{b=0 \\ b \neq k}}^{n} a_b \alpha^b - d\, \alpha^k = 0$$

en posant $-d = a_k$, on obtient

$$\sum_{\substack{b=0 \\ b \neq k}}^{n} a_b \alpha^b - d\, \alpha^k = \sum_{b=0}^{n} a_b \alpha^b = 0$$

Or $\sum_{b=0}^{n} a_b \alpha^b \in \mathbb{R}[X]$
Donc α est algébrique

Par le principe de double inclusion

α est algébrique si et seulement si il existe n ᛊ $\mathbb{N}$ tel que $(1, \alpha, \cdots, \alpha^n)$ est liée

N=° ᚲ.

Soit ᛃ ᛊ $\mathbb{L}$, alors ᛃ est algébrique de degré ᚢ sur $\mathbb{K}$ si et seulement si (ᚢ, ᛃ) est liée

si et seulement si il existe ᛒ ᛊ $\mathbb{K}$, ᛃ ᛝ ᛒ ᛞ ᚢ ᛝ ᛒ si et seulement si ᛃ ᛊ $\mathbb{K}$

Donc on a bien (ᚢ, ᛃ) liée $\Leftrightarrow$ ᛃ ᛊ $\mathbb{K}$

N=° ᚷ.

Supposons que $\mathbb{L}$ est une extention finie de $\mathbb{K}$ et soit ᛃ ᛊ $\mathbb{L}$

alors ᛃ est algébrique sur $\mathbb{K}$ si:

$$a$$

N=° ᚦ. a.

On sait par la définitions que $\left(1, \alpha, \cdots, \alpha^{d \text{ ᛉ ᚢ}}\right)$ est libre

Et $\mathrm{Vect}(\alpha^n, n$ ᛊ $\mathbb{N})$ ᛝ $\mathrm{Vect}(\alpha^n, n$ ᛊ ⟦ᚢ; d ᛉ ᚢ⟧)

Ainsi $\mathrm{Vect}(\alpha^n, n$ ᛊ ⟦ᚢ; d ᛉ ᚢ⟧) est une base de $\mathbb{K}[\alpha]$

b.

Supposons que β ◇ ᚠ, alors prouvons que f_β est linéaire et bijective

- linéarité:

Soient ᛒ ᛊ $\mathbb{K}$, ᛃ, ᛡ ᛊ $\mathbb{K}[\alpha]$, $f_\beta($ᛒ ᛃ ᛏ ᛡ$)$ ᛝ β ᛒ ᛃ ᛏ β ᛡ ᛝ ᛒ $f_\beta($ᛃ$)$ ᛏ $f_\beta($ᛡ$)$ donc f_β ets linéaire

- bijectivité:

soit ᛃ ᛊ $\mathbb{K}[\alpha]$, $f_\beta($ᛃ$)$ ᛝ ᚠ

alors β ᛃ ᛝ ᚠ donc ᛃ ᛝ ᚠ car β ◇ ᚠ

donc $\mathrm{Ker}(f_\beta)$ ᛝ {ᚠ}. Donc f_β est injéctive

Et soient ᛃ, ᛡ ᛊ $\mathbb{K}[\alpha]$, $f_\beta($ᛃ$)$ ᛝ ᛡ

alors ᛃ ᛝ $\frac{\text{ᛡ}}{\beta}$ car β ◇ ᚠ, et donc f_β est surjective

et comme f_β va de $\mathbb{K}[\alpha]$ dans $\mathbb{K}[\alpha]$

f_β est un automorphisme

d.

On a: $\mathbb{K}$ ᚽ $\mathbb{K}[\alpha]$, donc $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}[\alpha]$

De plus comme $\left(1, \alpha, \cdots, \alpha^{d \text{ ᛉ ᚢ}}\right)$ est une base de $\mathbb{K}[\alpha]$ qui comporte d élément

Ainsi $\mathbb{K}[\alpha]$ est une extensions finie de $\mathbb{K}$, avec $[\mathbb{K}[\alpha] : \mathbb{K}]$ ᛝ d

e.

Il est évident que $\mathbb{Q}\left(\sqrt[\text{ᚨ}]{\text{ᚦ}}\right)$ ᚽ $\mathbb{C}$, et commme $\mathbb{Q}$ est un sous groupe et que $\sqrt[\text{ᚨ}]{\text{ᚦ}}$ ᛊ $\mathbb{C}$,

alors par les questions précédente:

$\mathbb{Q}\left(\sqrt[\text{ᚨ}]{\text{ᚦ}}\right)$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$

N=° ᚺ.

i) $\Rightarrow$ ii) est évident car $\mathbb{K}[\alpha]$ est un corps et donc stable par ᛞ

ii) $\Rightarrow$ iii) Supposons que $\alpha^{-1} \in \mathbb{K}[\alpha]$, alors
$\exists P \in \mathbb{K}[X], P(\alpha) = \alpha^{-1}$, soit P un telle polynôme, alors:

$$\begin{aligned} P(\alpha) = \alpha^{-1} &\Leftrightarrow \alpha\ P(\alpha) = \alpha\alpha^{-1} = 1 \\ &\Leftrightarrow \alpha\ P(\alpha) - \alpha = 0 \end{aligned}$$

Posons $R = X\ P(X) - 1 \in \mathbb{K}[X]$, ainsi $R(\alpha) = 0$
Et donc α est constructible
iii) $\Rightarrow$ i) Supposons que α est algébrique sur $\mathbb{K}$, alors par la question 7.
$\mathbb{K}[\alpha]$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$

Ainsi par un raisonnement cyclique,
on a bien que $\mathbb{K}[\alpha]$ est un sous-corps de $\mathbb{L} \Leftrightarrow \alpha^{-1} \in \mathbb{K}[\alpha] \Leftrightarrow \alpha$ est algébrique sur $\mathbb{K}$

Partie III. Polynômes minimal d'un élément algébrique

N=° 8.

Si I_α na possède pas une polynôme de degré q,
alors soit $P \in I_\alpha$ de degré q, alors soit a sont coefficient dominant
alors le polynome $\frac{P}{a}$ est de degrés q et sont coefficient dominant vaut 1
De plus $\frac{P}{a}(\alpha) = \frac{P(\alpha)}{a} = \frac{0}{a} = 0$ Donc $\frac{P}{a} \in I_\alpha$
Donc I_α possède un polynôme unitaire de degrés q

Soient $P, Q \in I_\alpha$ deux polynômes unitaire de degrés q
Alors $\exists a_0, \cdots, a_{q-1}, b_0, \cdots, b_{q-1} \in \mathbb{K}, P = X^q + \sum_{k=0}^{q-1} a_k X^k$ et $Q = X^q + \sum_{k=0}^{q-1} b_k X^k$
Alors $P(\alpha) - Q(\alpha) = \sum_{k=0}^{q-1} a_k \alpha^k - \sum_{k=0}^{q-1} b_k \alpha^k = 0$
donc $\sum_{k=0}^{q-1} (a_k - b_k)\alpha^k$, et comme $\left(1, \alpha, \cdots, \alpha^{q-1}\right)$ est libre, on a: $\forall k \in [\![0 ; q-1]\!], a_k = b_k$
Ainsi on a bien $P = Q$
Donc il existe un unique polynome unitaire de degré q dans I_α

N=° 9.

Supposons par l'absurde que μ_α est réductible,
alors $\exists P, Q \in \mathbb{K}[X], \mu_\alpha = P\ Q$, soient de tels polynômes
Ainsi $\mu_\alpha(\alpha) = P(\alpha)\ Q(\alpha) = 0$ donc $P(\alpha) = 0$ ou $Q(\alpha) = 0$,
donc α est algébrique de degrés inférieur stricte à d, absurde !
Donc μ_α est irréductible

Soit $P \in I_\alpha$, alors $\exists Q \in \mathbb{K}[X], P = \mu_\alpha\ Q$ car $P(\alpha) = 0$, ainsi $I_\alpha \subset \{\mu_\alpha\ P, P \in \mathbb{K}[X]\}$
Et soit $\exists Q \in \mathbb{K}[X], P = \mu_\alpha\ Q$, alors $P(\alpha) = (\mu_\alpha\ Q)(\alpha) = \mu_\alpha(\alpha)\ Q(\alpha) = 0$,
donc $P \in I_\alpha$ et donc $\{\mu_\alpha\ Q, Q \in \mathbb{K}[X]\} \subset I_\alpha$
Ainsi par double inclusion $\{\mu_\alpha\ Q, Q \in \mathbb{K}[X]\} = I_\alpha$

N=° ᛇ.

étant donner que μ_α est le plus petit polynômes telle que $\mu_\alpha(\alpha)$ ᛟ ᚠ

alors $(1, \alpha, \cdots, \alpha^q)$ est la plus petite famille liée, donc le degrés de alpha vaut q est d, si bien que:

$\deg \mu_\alpha$ ᛟ d

N=° ᚢᚠ.

il est évident que le polynôme minimal est $X^{ᚨ}$ ᛉ ᚦ

N=° ᚢᚢ.

Posons ᛤ ᛟ ᛔ $X^{ᚱ}$ ᛏ ᛘ $X^{ᚨ}$ ᛏ ᛅ $X^{ᚦ}$ ᛏ ᛃ X ᛏ ᛄ ᛊ $\mathbb{Q}[X]$, avec ᛔ, ᛘ, ᛅ, ᛃ, ᛄ non tous nul

Alors cherchons ᛔ, ᛘ, ᛅ, ᛃ, ᛄ tel que ᛤ(α) ᛟ ᚠ

Ainsi

$$\begin{aligned} ᛤ(\alpha) &ᛟ ᛔ \left(\sqrt{ᚦ} ᛏ \sqrt{ᚨ}\right)^{ᚱ} ᛏ ᛘ \left(\sqrt{ᚦ} ᛏ \sqrt{ᚨ}\right)^{ᚨ} ᛏ ᛅ \left(\sqrt{ᚦ} ᛏ \sqrt{ᚨ}\right)^{ᚦ} ᛏ ᛃ \left(\sqrt{ᚦ} ᛏ \sqrt{ᚨ}\right) ᛏ ᛄ \\ &ᛟ ᚱᚢᛔ ᛏ ᚢᚺᛔ \sqrt{ᚷ} ᛏ ᛇᛘ \sqrt{ᚦ} ᛏ ᚾᛘ \sqrt{ᚨ} ᛏ ᚲᛅ ᛏ ᚦᛅ \sqrt{ᚷ} ᛏ ᛃ \sqrt{ᚦ} ᛏ ᛃ \sqrt{ᚨ} ᛏ ᛄ \\ &ᛟ (ᚢᚺᛔ ᛏ ᚦᛅ)\sqrt{ᚷ} ᛏ (ᚾᛘ ᛏ ᛃ)\sqrt{ᚨ} ᛏ (ᛇᛘ ᛏ ᛃ)\sqrt{ᚦ} ᛏ ᚱᚢᛔ ᛏ ᚲᛅ ᛏ ᛄ ᛟ ᚠ \end{aligned}$$

Alors comme $\left(1, \sqrt{ᚦ}, \sqrt{ᚨ}, \sqrt{ᚷ}\right)$ est libre, on obtient:

$$\begin{cases} ᚢᚺᛔ ᛏ ᚦᛅ ᛟ ᚠ \\ ᚾᛘ ᛏ ᛃ ᛟ ᚠ \\ ᛇᛘ ᛏ ᛃ ᛟ ᚠ \\ ᚱᚢᛔ ᛏ ᚲᛅ ᛏ ᛄ ᛟ ᚠ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ᛘ ᛟ ᚠ \\ ᛃ ᛟ ᚠ \\ ᛅ ᛟ ᛉ ᛜᛔ \\ ᚱᚢᛔ ᛏ ᚲᛅ ᛏ ᛄ ᛟ ᚠ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ᛘ ᛟ ᚠ \\ ᛃ ᛟ ᚠ \\ ᛅ ᛟ ᛉ ᛜᛔ \\ ᛔ ᛟ ᛄ \end{cases}$$

Ainsi ᛤ ᛟ ᛄ $X^{ᚱ}$ ᛉ ᛜᛄ $X^{ᚦ}$ ᛏ ᛄ, ainsi on prouve que α est algébrique

et que ᛤ est le polynôme minimal de α sur $\mathbb{Q}$ car sinon on aurais ᛔ ᛟ ᚠ

Partie IV. Nombres algébriques (sur $\mathbb{Q}$)

N=° ᚢᚦ. a.

il est évident que $\mathbb{Q}[\alpha, \beta]$ est stable par ᛏ et ᛞ

et deplus, soit ᛃ, ᛄ, ᛅ ᛊ $\mathbb{Q}[\alpha, \beta]$ alors ᛒ ᛔ, ᛘ, ᚫ, ᛔ′, ᛘ′, ᚫ′, ᛔ′, ᛘ′, ᚫ′ ᛊ $\mathbb{Q}$, ᛃ ᛟ ᛔ ᛏ ᛘ α ᛏ ᚫ β et ᛄ ᛟ ᛔ′ ᛏ ᛘ′α ᛏ ᚫ′β et ᛅ ᛟ ᛔ′ ᛏ ᛘ′α ᛏ ᚫ′β

alors

$$\begin{aligned} (ᛄ ᛏ ᛃ)ᛅ &ᛟ (ᛔ ᛏ ᛘ\,\alpha ᛏ ᚫ\,\beta ᛏ ᛔ' ᛏ ᛘ'\alpha ᛏ ᚫ'\beta)(ᛔ'' ᛏ ᛘ''\alpha ᛏ ᚫ''\beta) \\ &ᛟ (ᛔ ᛏ ᛘ\,\alpha ᛏ ᚫ\,\beta)(ᛔ'' ᛏ ᛘ''\alpha ᛏ ᚫ''\beta) ᛏ (ᛔ' ᛏ ᛘ'\alpha ᛏ ᚫ'\beta)(ᛔ'' ᛏ ᛘ''\alpha ᛏ ᚫ''\beta) \\ &ᛟ ᛄ\,ᛅ ᛏ ᛃ\,ᛅ \end{aligned}$$

De même ᛅ(ᛃ ᛏ ᛄ) ᛟ ᛅ ᛃ ᛏ ᛅ ᛄ

De plus par la question ᚹ $\mathbb{Q}[\alpha, \beta]$ est une extention finie de $\mathbb{Q}[\alpha]$

Or $\mathbb{Q}[\alpha]$ est une extensions finis de $\mathbb{Q}$

Donc $\mathbb{Q}[\alpha, \beta]$ est un corps et est une extention finie de $\mathbb{Q}$

b.

Pourvons d'abord que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$,

Pour cela cherchons $a, b \in \mathbb{Q}$, $a + b\sqrt{2} = \sqrt{3}$, alors:

$$a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2} = 3$$

$$\text{Donc } \begin{cases} 2ab\sqrt{2} = 0 \\ a^2 + 2b^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ ou } b = 0 \\ a^2 + 2b^2 = 3 \end{cases}$$

Il est évident que $b \neq 0$ car $b \in \mathbb{Q}$ et $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ donc $a = 0$

Ainsi $2b^2 = 3 \Leftrightarrow b = \sqrt{\frac{3}{2}} \notin \mathbb{Q}$ absurde, donc $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$

Et donc comme $\mathbb{Q}$ est un sous corps de $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ et que $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ est un sous corps de $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}, \sqrt{3}\right]$,

et comme $\left(1, \sqrt{2}\right)$ est une base du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$

et que $\left(1, \sqrt{3}\right)$ est une base du $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$-espace vectoriel $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}, \sqrt{3}\right]$

Ainsi par la question 2. $\left(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\right)$ est une base du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}, \sqrt{3}\right]$

Et donc $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}, \sqrt{3}\right] = \left\{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}, a, b, c, d \in \mathbb{Q}\right\}$

N=° 13.

Soit $a, b \in \overline{\mathbb{Q}}$. Alors $\mathbb{Q}[a, b]$ est un corps,

et en particulier une extension finie de $\mathbb{Q}$.

Donc la somme,l'inverse et le produits sont stables dans $\mathbb{Q}[a, b]$,

et donc par la question 6. $\overline{\mathbb{Q}}$ est un corps, et est donc un sous-corps de $\mathbb{C}$