Devoir maison 16

Le premier exercice est obligatoire. Pour la suite, vous traiterez soit l'exercice 2 soit l'exercice 2 bis (plus dur). Et de même, vous traiterez soit l'exercice 3 soit l'exercice 3 bis (plus dur).

▸ Exercice 1 : endomorphismes laissant stables toutes les droites

Soit $\mathbf{K}$ un corps, soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, et soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E.
On suppose que toutes les droites vectorielles de E sont stables par u, c'est-à-dire que pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, $\mathrm{Vect}(x)$ est stable par u.

1. Justifier que pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, il existe un unique $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.

Dans la suite, pour $x \in E \setminus \{0_E\}$, on note λ_x l'unique scalaire tel que $u(x) = \lambda_x x$.

2. Soient x et y deux vecteurs non nuls de E.

   a. Prouver que si la famille (x, y) est liée, alors $\lambda_x = \lambda_y$.

   b. Montrer que si (x, y) est libre, alors $\lambda_x = \lambda_y$ *(on pourra considérer $u(x + y)$).*

3. Prouver que u est une homothétie de E.

Fun fact *: cet exercice montre que dans un cadre particulier, on peut échanger un quantificateur universel et un quantificateur existentiel.*
En effet, nous venons de dire que si $\forall x \in E,\ \exists \lambda \in \mathbf{K}, u(x) = \lambda x$, alors $\exists \lambda \in \mathbf{K}, \forall x \in E,\ u(x) = \lambda x$.

▸ Exercice 2

Soient E, F, G trois $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, et soient $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $g \in \mathscr{L}(F, G)$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}\, f \iff \mathrm{Ker}\, g \cap \mathrm{Im}\, f = \{0_F\}$.

2. Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g) \iff \mathrm{Ker}\, g + \mathrm{Im}\, f = F$.

▸ Exercice 2 bis : endomorphismes de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ colinéaires à la trace.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbf{C}), \mathbf{C})$.
Montrer que $\varphi \in \mathrm{Vect}(\mathrm{tr})$ si et seulement si $\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, $\varphi(AB) = \varphi(BA)$.

▸ Exercice 3 : composée de deux projecteurs qui commutent

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et soient $p, q \in \mathscr{L}(E)$ deux projecteurs de E qui commutent (donc avec $p \circ q = q \circ p$).
Montrer que $p \circ q$ est un projecteur, avec $\mathrm{Ker}(p \circ q) = \mathrm{Ker}\, p + \mathrm{Ker}\, q$ et $\mathrm{Im}(p \circ q) = \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q$.
ps

▸ Exercice 3 bis : théorème de Maschke

Dans tout l'exercice, E désigne un espace vectoriel, et F est un sous-espace vectoriel de E, non réduit à $\{0_E\}$ ni égal à E.
On suppose que F admet un supplémentaire H dans E (ce qui est toujours le cas mais que nous admettons pour l'instant, nous le prouverons bientôt dans le cas de la dimension finie), et on note q la projection sur F parallèlement à H.
On suppose qu'il existe un sous-groupe fini G de $GL(E)$ tel que F soit stable par tous les éléments de G (on dit que F est stable par G).
Le but de l'exercice est de prouver que F admet alors un supplémentaire qui est lui aussi stable par G.

1. Soient f et g deux endomorphismes de E qui commutent. Prouver que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont stables par g.

2. On pose $p = \dfrac{1}{|G|} \displaystyle\sum_{g \in G} g \circ q \circ g^{-1}$.

Montrer que $p \in \mathscr{L}(E)$, puis que son image est incluse dans F.
Prouver alors que p est un projecteur dont l'image est F.

3. Montrer que p commute avec tous les éléments de G

4. Conclure.