

Maths : DM 21

Problème 2 : une construction rigoureuse des fonctions trigonométriques

N° 1.

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $N \in \mathbb{N}$ alors

$$\sum_{n=0}^N \left| \frac{z^n}{n!} \right| = \sum_{n=0}^N \frac{|z|^n}{n!} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} e^{|z|}$$

Donc $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument

Partie I. Un théorème de dérivation terme à terme

N° 2.

Soit $z \in \mathbb{Z}$, alors

$$\frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = |z| o\left(\frac{r^{n+1}}{r^n}\right) = |z| o(r) = o(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1$$

Donc la série de terme générale $a_n z^n$ converge absolument

N° 3.

Soit $r, r' \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $0 < r' < r$, alors $\frac{r'}{r} < 1$

Donc $n\left(\frac{r'}{r}\right)^n = n o\left(\frac{1}{n}\right) = o(1)$

Donc $\frac{r'^n}{r^n \frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et donc $r'^n = o\left(\frac{r^n}{n}\right)$

Et comme $a_n = o(r'^n) = o\left(\frac{r^n}{n}\right)$

Donc $na_n = o(r^n)$

N° 4.

Comme $\forall r \in \mathbb{R}_+^*, na_n = o(r^n)$, alors par la question 2. $\forall z \in \mathbb{C}$, $\sum_{n \geq 0} na_n z^n$ converge absolument

Donc en particulier pour $x \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^N na_n x^{n-1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^N na_n x^n \text{ converge absolument}$$

De plus pour $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^N |n(n-1)a_n x^{n-2}| \leq \sum_{n=1}^N |n^2 a_n x^{n-2}| - \sum_{n=1}^N |na_n x^{n-2}|$$

On a montré juste avant que $\sum_{n=1}^N |na_n x^{n-2}|$ converge absolument

Et comme $\forall r \in \mathbb{R}_+^*, na_n = o(r^n)$, alors par la série précédente

$\sum_{n=1}^N |n(na_n)x^{n-2}|$ converge absolument
Ainsi $\sum_{n=1}^N n(n-1)a_n x^{n-2}$ converge absolument

N° 5. a.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $h \in]-1; 1[$, alors

Soit $f : x \mapsto (x+h)^n$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = n(x+h)^{n-1}$ et $x_0 - h \leq |x_0| + 1$

Alors par l'inégalité de Taylor-Lagrange avec $a = x_0 - h$ et $b = x_0$:

$$|f(x_0) - f(x_0 - h) - f'(x_0 - h)| \leq \frac{h^2}{2} n(n-1)(|x_0| + 1)^{n-2}$$

$$\Leftrightarrow |(x_0 + h)^n - x_0^n - hnx_0^{n-1}| \leq \frac{h^2}{2} n(n-1)(|x_0| + 1)^{n-2}$$

b.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |(x_0 + h)^n - x_0^n - hnx_0^{n-1}| \leq \left| f(x_0 + h) - f(x_0) - h \sum_{n=0}^{+\infty} na_n x_0^{n-1} \right| \leq \frac{h^2}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)(|x_0| + 1)^{n-2}$$

$$\Leftrightarrow \left| f(x_0 + h) - f(x_0) - h \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x_0^{n-1} \right| \leq \frac{h^2}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)(|x_0| + 1)^{n-2}$$

c.

Pour $h \neq 0$, alors par la question précédente

$$\frac{\left| f(x_0 + h) - f(x_0) - h \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x_0^{n-1} \right|}{|h|} \leq \frac{h^2}{2|h|} \sum_{n=2}^{+\infty} |a_n| n(n-1)(|x_0| + 1)^{n-2}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \left| \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(x_0)} - \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x_0^{n-1} \right| \leq \underbrace{\frac{|h|}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} |a_n| n(n-1)(|x_0| + 1)^{n-2}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0}$$

Donc par théorème des gendarmes $f'(x_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x_0^{n-1}$

N° 6. a.

On a pour spécialement pour tout $n, k \in \mathbb{N}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+2) \times (n-k+1)}{k!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$$

Soit $r, r' \in \mathbb{R}_+^*$, tel que $0 < r < r'$

donc $n^k \left(\frac{r'}{r}\right)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n^k o\left(\frac{1}{n^k}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1)$

Donc $r'^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{r^n}{n^k}\right)$ Donc $n^k a_n = o(r^n)$

Ainsi $a_n \binom{n}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(r^n)$

b.

Prouvons par récurrence $P(k) : f$ est \mathcal{C}^k et $\forall x \in \mathbb{R} f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} k! \binom{n}{k} a_n x^{n-k}$

• **Initialisation :**

Pour $k = 0$:

On a prouvé à la question précédente que f est dérivable, donc f de classe \mathcal{C}

et $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(0)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 0! \binom{n}{0} a_n x^{n-0} = \sum_{n=0}^{+\infty} 0! \binom{n}{0} a_n x^{n-0} = f(x)$

• **Hérédité :**

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $P(k)$ soit vérifiée

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= (f^{(k)})'(x) = \sum_{n=k+1}^{+\infty} k!(n-k) \binom{n}{k} a_n x^{n-k-1} \\ &= \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{k+1}{k+1} k!(n-k) \frac{n!}{k!(n-k)!} a_n x^{n-(k+1)} \\ &= \sum_{n=k+1}^{+\infty} (k+1)! \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} a_n x^{n-(k+1)} = \sum_{n=k+1}^{+\infty} (k+1)! \binom{n}{k+1} a_n x^{n-(k+1)} \end{aligned}$$

Ainsi par principe de récurrence simple $P(k)$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$

Donc comme f est dérivable autemps de fois que l'on veut elle est $\mathcal{C}^{+\infty}$

Partie II. produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes

N° 7. a.

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$C_n = \sum_{k=0}^n c_k = \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{0 \leq p, q \leq k \\ p+q=k}} a_p b_q = \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{0 \leq p, q \leq n \\ p+q=k}} a_p b_q = \sum_{\substack{0 \leq p, q \leq n \\ p+q=n}} a_p b_q$$

$$\text{De plus } C_n = \sum_{\substack{0 \leq p, q \leq n \\ p+q=n}} a_p b_q \leq \sum_{0 \leq p, q \leq n} a_p b_q = A_n B_n$$

Car la somme C_n comporte moins de termes à sommer car on vient sommer sur les mêmes indices que $A_n B_n$ mais avec une condition en plus sur les indices

b.

$C_n \geq 0$ car somme de termes positifs, Ainsi $0 \leq C_n \leq A_n B_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} AB$

Donc par théorème des gendarmes C converge

c.

Soit $n \in \mathbb{N}$

L.A.F.

Donc $A_n B_n \leq C_{2n}$

Donc pour n paire, $A_{\frac{n}{2}} B_{\frac{n}{2}} \leq C_n$, prenons donc n paire pour la fin de cet exercice

Ainsi par la question 7.a. $\underbrace{\frac{A_n B_n}{2}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} AB} \leq C_n \leq \underbrace{\frac{A_n B_n}{2}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} AB}$

Donc par le théorème des gendarmes $C_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} AB$

N° 8. a.

L.A.F.

b.

Soit $n \in \mathbb{N}$,

D'après la question précédente on a : $0 \leq \sum_{k=0}^n |c_k| \leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |a_k| \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |b_k| \right)$

Or comme $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_k|$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} |b_k|$ converge car $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes

Donc par théorème des gendarmes $\sum c_n$ converge absolument

c.

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left| \left(\sum_{k=0}^n a_k \right) \left(\sum_{k=0}^n b_k \right) - \sum_{k=0}^n c_k \right| &= \left| \sum_{0 \leq k, i \leq n} (a_k b_i - c_k) \right| \leq \sum_{0 \leq k, i \leq n} |a_k b_i - c_k| \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^n |a_k| \right) \left(\sum_{k=0}^n |b_k| \right) + \sum_{k=0}^n |c_k| \end{aligned}$$

L.A.F.

N° 9.

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$,

Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$ vaut e^a , de même pour $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b^n}{n!} = e^b$,

Alors

$$c_n = \sum_{k=0}^n$$

Partie III. Fonctions trigonométriques

N° 10.

Soit $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} &= \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(it)^n}{n!}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!} \overbrace{\left(1 + (-1)^n \right)}^{=0 \text{ si } n \text{ impaire}, 2 \text{ sinon}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ paire}}}^{+\infty} 2i^n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} i^{2n} \frac{t^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} = c(t) \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} &= \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (it)^n}{n!}}{2i} = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!} \overbrace{\left(1 - (-1)^n\right)}^{=0 \text{ si } n \text{ paire} \atop 2 \text{ sinon}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ impaire}}}^{+\infty} 2i^{n-1} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} i^{2n} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} = s(t)\end{aligned}$$

Q.E.D.

N° 11.

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}s(a)c(b) + c(a)s(b) &= \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i} \frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2} + \frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2} \frac{e^{ib} - e^{-ib}}{2i} \\ &= \frac{1}{4i} (e^{ia+ib} + \cancel{e^{ia-ib}} - \cancel{e^{ib-ia}} - e^{-ia-ib} + e^{ia+ib} - \cancel{e^{ia-ib}} + \cancel{e^{ib-ia}} - e^{-ia-ib}) \\ &= \frac{1}{4i} (2e^{i(a+b)} - 2e^{-i(a+b)}) = \frac{e^{ia+b} - e^{-ia+b}}{2i} = s(a+b)\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}c(a)c(b) - s(a)s(b) &= \frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2} \frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2} - \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i} \frac{e^{ib} - e^{-ib}}{2i} \\ &= \frac{1}{4} (e^{i(a+b)} + \cancel{e^{i(a-b)}} + \cancel{e^{i(b-a)}} + e^{-i(a+b)} + e^{i(a+b)} - \cancel{e^{i(a-b)}} - \cancel{e^{i(b-a)}} + e^{-i(a+b)}) \\ &= \frac{1}{4} (2e^{i(a+b)} + 2e^{-i(a+b)}) = \frac{e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)}}{2} = c(a+b)\end{aligned}$$

Q.E.D.

N° 12.

Comme on l'a justifié dans la partie I, on a que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{C}, x \mapsto e^{ax}$ est dérivable, de dérivée:

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a^n \frac{(x)^{n-1}}{(n-1)!} = a \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ax)^n}{n!} = ae^{ax}$$

Soit $t \in \mathbb{R}$

$$s'(t) = \frac{ie^{it} + ie^{-it}}{2i} = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = c(t)$$

Et

$$c'(t) = \frac{ie^{it} - ie^{-it}}{2} = -\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = -s(t)$$

Q.E.D.

N° 13.

Soit $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
c(t)^2 + s(t)^2 &= \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^2 + \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^2 \\
&= \frac{1}{4} (\cancel{e^{2it}} + 2 + \cancel{e^{-2it}} - \cancel{e^{2it}} + 2 - \cancel{e^{-2it}}) = \frac{4}{4} = 1
\end{aligned}$$

Donc $c(t)^2 + s(t)^2 = 1$

Q.E.D.

Ainsi $c(t)^2 = 1 - s(t)^2 \leq 1$

Donc $|c(t)| \leq 1$

De même pour $s(t)$

$s(t)^2 = 1 - c(t)^2 \leq 1$

Donc $|s(t)| \leq 1$

Ainsi s et c sont bornées entre $[-1; 1]$

N° 14. a.

On a prouvé à la question 12. que $s' = c$

Or $c(0) = \frac{e^0 + e^0}{2} = \frac{2}{2} = 1 > 0$

et comme on a supposé que c ne s'annule pas, alors $\forall x \in \mathbb{R}, c(x) \geq 0$

Ainsi $s' = c \geq 0$

Donc s est strictement croissante

Q.E.D.

b.

On a $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = -s(x) + s(1)$, Comme $-s$ est strictement décroissante

alors pour $x \in]1, +\infty[$, $g'(x) = -s(x) + s(1) < 0$

Donc g est décroissante sur $]1, +\infty[$

Q.E.D.

c.

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = c(x) + xs(1) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \text{ car } c(x) \text{ bornée}$$

Ce qui est Absurde car g décroissante

Donc $c(x)$ s'annule au moins une fois

N° 15.

L.A.F.

N° 16. a.

Soit $x \in [0, \frac{p}{2}]$

alors comme $c(x)$

L.A.F.

Alors Ainsi

x	0	$\frac{p}{2}$
Variation de c	1	0

Comme on vient de montrer que $\forall t \in [0, \frac{p}{2}], c(t) \geq 0$

Donc $s'(x) = c(x) \geq 0$, Donc s est croissante sur $[0, \frac{p}{2}]$

De plus $s(0) = 0$ et $\forall t \in \mathbb{R}, s(-t) = \frac{e^{-it} - e^{it}}{2i} = -\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = -s(t)$, donc s est impaire

Donc $1 = c(0) = c(\frac{p}{2} - \frac{p}{2}) = \underbrace{c(\frac{p}{2})c(-\frac{p}{2})}_{=0} - s(\frac{p}{2})s(-\frac{p}{2})$, donc $s(\frac{p}{2})^2 = 1(i)$

Mais comme s est croissante sur $[0; \frac{p}{2}]$, et que $s(0) = 0$, alors $s(\frac{p}{2}) \geq 0$, Donc par (i), $s(\frac{p}{2}) = 1$
Ainsi

x	0	$\frac{p}{2}$
Signe de s'	+	
Variation de s	0	1

b.

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$c\left(x + \frac{p}{2}\right) = c(x) \underbrace{c\left(\frac{p}{2}\right)}_{=0} - \underbrace{s(x) s\left(\frac{p}{2}\right)}_{=1} = -s(x)$$

Et

$$s\left(x + \frac{p}{2}\right) = \underbrace{c(x) s\left(\frac{p}{2}\right)}_{=1} + \underbrace{s(x) c\left(\frac{p}{2}\right)}_{=0} = c(x)$$

Et

$$c(x + p) = c\left(\left(x + \frac{p}{2}\right) + \frac{p}{2}\right) = -s\left(x + \frac{p}{2}\right) = -c(x)$$

Et

$$s(x + p) = s\left(\left(x + \frac{p}{2}\right) + \frac{p}{2}\right) = c\left(x + \frac{p}{2}\right) = -s(x)$$

Et

$$c\left(x + \frac{3p}{2}\right) = c\left(\left(x + \frac{p}{2}\right) + p\right) = -c\left(x + \frac{p}{2}\right) = s(x)$$

Et

$$s\left(x + \frac{3p}{2}\right) = s\left(\left(x + \frac{p}{2}\right) + p\right) = -s\left(x + \frac{p}{2}\right) = -c(x)$$

$$\text{Donc } \forall x \in [0; 2p], \forall t \in [0; \frac{p}{2}], c(x) = \begin{cases} c(t) & \text{si } x \in [0; \frac{p}{2}] \\ -s(t) & \text{si } x \in [\frac{p}{2}; p] \\ -c(t) & \text{si } x \in [p; \frac{3p}{2}] \\ s(t) & \text{si } x \in [\frac{3p}{2}; 2p] \end{cases} \text{ et } s(x) = \begin{cases} s(t) & \text{si } x \in [0; \frac{p}{2}] \\ c(t) & \text{si } x \in [\frac{p}{2}; p] \\ -s(t) & \text{si } x \in [p; \frac{3p}{2}] \\ -c(t) & \text{si } x \in [\frac{3p}{2}; 2p] \end{cases}$$

Ainsi, à l'aide de la question précédente, on obtient les tableaux de variation suivant:

x	0	$\frac{p}{2}$	p	$\frac{3p}{2}$	$2p$
Variation de s	0	1	0	-1	0

Et

x	0	$\frac{p}{2}$	p	$\frac{3p}{2}$	$2p$
Variation de c	1	0	-1	0	1

Q.E.D.

c.

Soit $x \in \mathbb{R}$ Avec ce qui a été fait à la question précédente on a:

$$c(x + 2p) = c((x + p) + p) = -c(x + p) = c(x)$$

Et

$$s(x + 2p) = s((x + p) + p) = -s(x + p) = s(x)$$

Donc s et c sont $2p$ -périodiques

Prouvons que $2p$ est leur plus petite période

Soit $T \in \mathbb{R}$ tel que T soit la plus petite période de s et c

Alors $\exists n \in \mathbb{N}^*, 2p = nT$, soit $n \in \mathbb{N}^*$ un telle n

$$\text{donc } T = \frac{2p}{n}$$

Supposons par l'absurde que $n \neq 1$, alors

- si $n = 2$,

$$\text{on a: } \forall x \in \mathbb{R}, s\left(\frac{p}{2} + T\right) = s\left(\frac{p}{2} + \frac{2p}{2}\right) = s\left(\frac{p}{2} + p\right) = -s\left(\frac{p}{2}\right) = -1 \neq 1 = s\left(\frac{p}{2}\right)$$

$$\text{et } 1 = c(0) = c(0 + T) = c(p) = -1$$

Absurde !

- si $n > 2$,

$$\text{alors } \frac{2p}{n} \in]0; p[$$

Or par la question 16.b., on sais que $\forall x \in]0; p[, s(x) \neq 0$ et $c(x) \neq 1$

$$\text{sauf que } s\left(\frac{2p}{n}\right) = s\left(0 + \frac{2p}{n}\right) = s(0 + T) = s(0) = 0 \text{ et } c\left(\frac{2p}{n}\right) = c(0 + T) = c(0) = 1$$

ce qui est Absurde

Donc $n = 1$ et donc $T = 2p$

Ainsi $2p$ est la plus petite période de s

Q.E.D.