Physique

Table des Matières

I. Attention, achtung !

dans tout ce document les opérateur gradient, divergence et rotationnel sont noté avec la notation nabla, voir Trucs et Astuce - Nabla pour plus d'information

Ainsi les opérateurs deviennes :

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{\mathrm{grad}} f & \longleftrightarrow & \vec{\nabla} f \\ \mathrm{div}\ \vec{A} & \longleftrightarrow & \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}} \vec{A} & \longleftrightarrow & \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \end{array}$$

II. Incertitude

1. Méthode statistique :

- $\bar{x} =$ moyenne
- $u(x) =$ l'écart type

2. Méthode probabiliste :

- $\bar{x} =$ moyenne
- $u(x) = \frac{\text{précision}}{\sqrt{3}}$

3. Calcule sur les incertitudes :

Relation	$Z = X + Y$	$Z = X - Y$	$Z = X \times Y$	$Z = \dfrac{X}{Y}$
Incertitude	$u(z) = \sqrt{u(x)^2 + u(y)^2}$		$\frac{u(z)}{\lvert z \rvert} = \sqrt{\left(\frac{u(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{u(y)}{y}\right)^2}$	

III. Optique Géométrique :

1. réfraction

$$n = \frac{c}{v}$$

- $n =$ indice de réfraction
- $c =$ célérité de la lumière $m.s^{-1}$
- $v =$ célérité dans le milieu $m.s^{-1}$

2. Longueur d'onde dans un milieu

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$$

- $n =$ indice de réfraction
- $\lambda =$ longueur d'onde dans le milieu
- $\lambda_0 =$ longueur d'onde dans le vide

3. Snell — Descartes

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2)$$

- $n_i =$ indice de réfraction du milieu i
- $\theta_i =$ angle du rayon lumineux

4. Formulaire de Gauss

- rayons peu incliné par rapport à l'axe optique
- rayons proche de l'axe optique

5. Relation de Conjugaison et du Grandissement

	Relation de conjugaison	Formule du grandissement
Descartes (origine au centre)	$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$	$\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$
Newton (origine au foyer)	$\overline{F'A'} \times \overline{FA} = f'^2$	$\gamma = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} = \frac{f'}{\overline{FA}}$

6. PR & PP

- **PP** : Punctum Remotum, le point le plus éloigné perçus net par l'œuil
- **PR** : Punctum Proximum, le point le plus proche perçus net par l'œuil

7. Grossisement dans une lunette astronomique :

$$G = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{f_1'}{f_2'}$$

- $G =$ le grossissement
- β (resp. α) $=$ l'angle entre le rayon sortant (resp. entrant) et l'axe optique
- f_1' (resp. f_2') $=$ la focale le la lentille 1 (resp. 2)

IV. L'Éléctronisme :

1. Les formules à la con :

Nom	Formule	Variable
	$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$	• $i =$ intensité • $q =$ la charge
Lois des Nœuds	$\sum \varepsilon_k i_k = 0$	• $i_k =$ intensité • $\varepsilon_k = +1/-1$
Lois des Mailles	$\sum \varepsilon_k u_k = 0$	• $u_k =$ la tension • $\varepsilon_k = +1/-1$

Nom	Formule	Variable
Lois d'Ohm	$u_R = Ri$	• $u_R =$ tension sur une résistance • $R =$ la résistance • $i =$ l'intensité
	$i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$	• $i =$ l'intensité • $C =$ la capacité • $u_C =$ la tension sur un condensateur
	$u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$	• $i =$ l'intensité • $L =$ l'inductance • $u_L =$ la tension sur une bobine
Pont Diviseur-Tension	$u_k = u\frac{R_k}{\sum R_i}$	• $u =$ une tension • $R =$ une résistance
Pont Diviseur-Courant	$i_k = \frac{\frac{1}{R_k}}{\sum \frac{1}{R_i}}$	• $i =$ une intensité • $R =$ une résistance

2. Circuit linéaire du 1er ordre :

Méthode de résolution :

- Trouver les conditions initiales (les $u(0^+), q(0^+)$, etc, grâce aux $u(0^-), q(0^-)$, etc)
- Étudier le régime permanent ($t \to +\infty$)
- Écrire l'équation à l'aide d'une loi des Mailles / loi des nœuds, sous la forme $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{\tau} = \frac{s(\infty)}{\tau}$
- Résoudre l'équa diff

Méthode : Bilan de Puissance

- reprendre la loi des mailles, la multipliée par i
- interpréter les termes
- intégrer sur le temps de 0 à $+\infty$

Oscilateur Non Harmonique :

- Forme Générale des Équa Diff :

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 s(\infty)$$

Posons $r_{1,2}$ les racines du polynôme caractéristique

1. Régime pseudo-périodique $Q > \frac{1}{2}$ & $\Delta < 0$:
   - $s_h(t) = e^{\Re(r)}(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t))$ avec $\Omega = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} = \Im(r)$
   - pseudo-période : $T = \frac{2\pi}{\Omega}$
   - l'amortissement $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$
   - Décrément logarithmimique $\delta = \ln\left(\frac{A(t)}{A(t+T)}\right)$, où $A(t) =$ l'amplitude
2. Régime peu amorti $Q \gg 1$:
   - pseudo-période $T = \frac{2\pi}{\Omega} \approx T_0$
   - Nombre d'oscillations $N \approx \frac{4\tau}{T} \approx 1,3Q$
3. Régime apériodique :
   - $s_h(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$
   - $\tau_2 = -\frac{1}{r_2} \approx \frac{1}{\omega_0 Q}$ en système très amorti $Q \ll 1$
4. Régime Critique :
   - $s_h(t) = (At + B)e^{rt}$
   - $r = -\omega_0$ et $\tau = \frac{1}{\omega_0}$

3. Régime sinusoïdale forcé :

Dans le cas du régime sinusoïdale forcé, toutes les grandeurs sont de la forme :

$$s(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

avec :

- $X_m =$ l'amplitude
- $\omega =$ la pulsation
- $\varphi =$ le déphasage

notation complexe :

$$\underline{s}(t) = X_m e^{j\omega t} e^{j\varphi} = \underline{X_m} e^{j\omega t}$$

avec :

- $\underline{s}(t) =$ la notation complexe
- $\underline{X_m} = X_m e^{j\varphi} =$ l'amplitude complexe

- Avantage :
  1. dérivation : $\frac{\mathrm{d}\underline{s}}{\mathrm{d}t} = j\omega\underline{s}$
  2. integration : $\int \underline{s}\,\mathrm{d}t = \frac{\underline{s}}{j\omega} + K$
  3. dephasage : $\varphi_{2/1} = \arg\left(\frac{\underline{s_2}}{\underline{s_1}}\right)$

4. Impédance :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}$$

avec :

- $\underline{Z} =$ l'impédance
- $\underline{u} =$ la tension
- $\underline{i} =$ l'intensité

- Admittance : $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$

5. Impédance d'un dipole :

	Résistance	Condensateur	Bobine
Impédance complexe	$\underline{Z} = R$	$\underline{Z} = \dfrac{1}{j\omega C}$	$\underline{Z} = j\omega L$
Impédance	$Z = R$	$Z = \dfrac{1}{\omega C}$	$Z = \omega L$
Admittance complexe	$\underline{Y} = \dfrac{1}{R}$	$\underline{Y} = j\omega C$	$\underline{Y} = \dfrac{1}{j\omega L}$
$\omega \longrightarrow 0$	$Z \longrightarrow R$	$Z \longrightarrow +\infty$ interupteur ouert	$Z \longrightarrow 0$ fils
$\omega \longrightarrow +\infty$	$Z \longrightarrow R$	$Z \longrightarrow 0$ fils	$Z \longrightarrow +\infty$ interupteur ouert

6. Lois de Kirchhoff :

- Loi des nœuds :

  $\sum \varepsilon_k \underline{i_k} = 0$

- Loi des mailles :

  $\sum \varepsilon_k \underline{u_k} = 0$

7. Pont comlexe :

- Pont Diviseur-Courant :

$$\underline{i_k} = \underline{i} \frac{1/R_k}{\sum 1/R_i}$$

- Pont Diviseur-Tension :

$$\underline{u_k} = \underline{u} \frac{R_k}{\sum R_i}$$

8. valeur moyenne/efficace :

- Valeur moyenne :

$$< s(t) >= \frac{1}{T} \int_0^T X(t) \, \mathrm{d}t$$

- Valeur efficace :

$$S_{\text{eff}} = \sqrt{< s^2 >} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T X^2(t) \, \mathrm{d}t}$$

- Mesures au multimètre :

Mode	Grandeur mesurée	Pour $u(t) = U_0 + U_m \cos(\omega t + \varphi)$
DC	Valeur moyenne	U_0
AC	Valeur efficace de la partie variable du signal	$\frac{U_m}{\sqrt{2}}$
AC + DC	Valeur efficace de tout le signal	$\sqrt{U_0^2 + \frac{U_m^2}{2}}$

9. Développement en série de Fourier :

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \cos(2\pi n f_n t + \varphi_n))$$

avec :

- $A_0 =$ la composante continue
- $A_n =$ l'amplitude de la composante sinusoïdale
- $f_n =$ la fréquence de l'armonique de rang n, (la fréquence fondamentale est $f_1 = \frac{1}{T}$)
- $\varphi_n =$ le déphasage de l'harmonique de rang n

10. Filtrage :

type de filtarge :

- Passe-bas : seul les signaux de basse fréquence passe
- Passe-haut : seul les signaux de haute fréquence passe
- Passe-bande : seul les signaux de fréquence dans une bande donnée passe
- Coupe-bande : seul les signaux de fréquence hors d'une bande donnée passe

Fonction de transfert :

$$\underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}}$$

avec :

- $\underline{H}$ = la fonction de transfert
- $\underline{u_s}$ = la tension de sortie
- $\underline{u_e}$ = la tension d'entrée

1. le module de la fonction de transfert est le gain : $G = |\underline{H}|$
2. l'argument de H est la phase : $\phi = \arg(\underline{H})$

- On admet que toute fonction de transfert peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{\underline{N}}{\underline{D}}$$

avec : N et D deux polynôme premier entre eux,

alors on appelle l'ordre du filtre le degré de D

diagramme de Bode :

- en Gain : $G_{\text{db}} = 20\log(G)$
- en Phase : $\varphi = \arg(\underline{H})$

Attention : ces diagrammes sont en échelle logarithmique

Bande passante et pulsation de coupure :

- Bande passante : c'est la bande de fréquence pour laquelle le gain est supérieur à -3 dB :

$$G > \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow G_{\text{dB, max}} > G_{\text{dB}} - 3\ \text{dB}$$

On définie ainsi la pulsation de coupure :

$$G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow G_{\text{dB, max}}(\omega_c) = G_{\text{dB}} - 3\ \text{dB}$$

pulsation de résonance :

c'est la plusation pour la quel les filtres du second ordre on leur maximum s'il existe

Dans le cas des filtre du second ordre, il y a résonance si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

fonction de transfert canonique :

Type	Fonction de transfert	Gain - cas au limites		Phase - cas au limites	pulsation caractérisique
Passe-bas 1er ordre	$H = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$	$\omega \to +\infty$	$\sim 20\log\left(\frac{\omega}{H_0\omega_0}\right)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\omega_c = \pm\omega_0$
		$\omega \to 0$	$\sim -20\log(H_0)$	0	
Passe-haut 1er ordre	$H = \frac{H_0 \times j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{H_0}{1 - j\frac{\omega_0}{\omega}}$	$\omega \to +\infty$	$\sim -20\log(H_0)$	0	$\omega_c = \pm\omega_0$
		$\omega \to 0$	$\sim -20\log\left(H_0\frac{\omega}{\omega_0}\right)$	$\frac{\pi}{2}$	
Passe-bande 2eme ordre	$H = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$	$\omega \to +\infty$	$\sim 20\log\left(\frac{Q}{H_0}\frac{\omega}{\omega_0}\right)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\omega_c = \frac{\omega_0}{2Q}\left(1 \pm \sqrt{1 + 4Q^2}\right)$
		$\omega \to 0$	$\sim -20\log\left(\frac{H_0}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}\right)$	$\frac{\pi}{2}$	$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$
Passe-haut 2eme ordre	$H = \frac{H_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{j}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}$	$\omega \to +\infty$	$\sim 40\log\left(\sqrt{H_0}\frac{\omega}{\omega_0}\right)$	π	$\omega_c = \pm\omega_0$
		$\omega \to 0$	$\sim -20\log(H_0)$	0	$\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$
Passe-bas 2eme ordre	$H = \frac{H_0}{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - \frac{j}{Q}\frac{\omega_0}{\omega}}$	$\omega \to +\infty$	$\sim -20\log(H_0)$	0	$\omega_c = \pm\omega_0$
		$\omega \to 0$	$40\log\left(\sqrt{H_0}\frac{\omega}{\omega_0}\right)$	$-\pi$	$\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$

les diagrame de bodes associer :

Sur l'axe des abssice est repésenté seulement la puissance de

- Passe-bas :

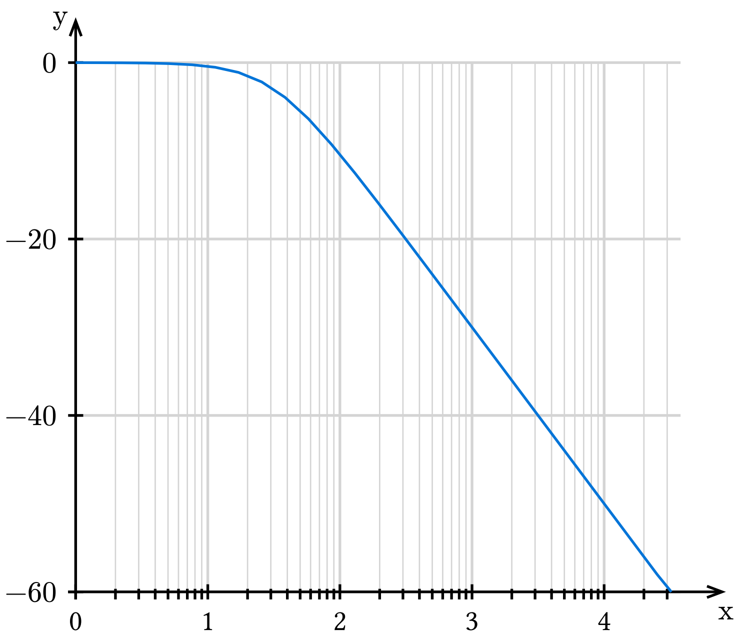


Fig. 1. – Gain

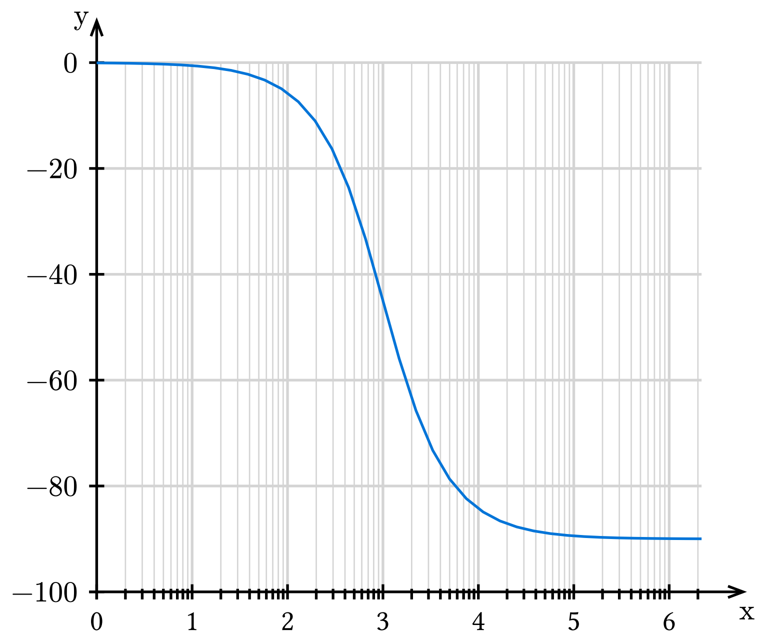


Fig. 2. – Phase

Passe-haut :

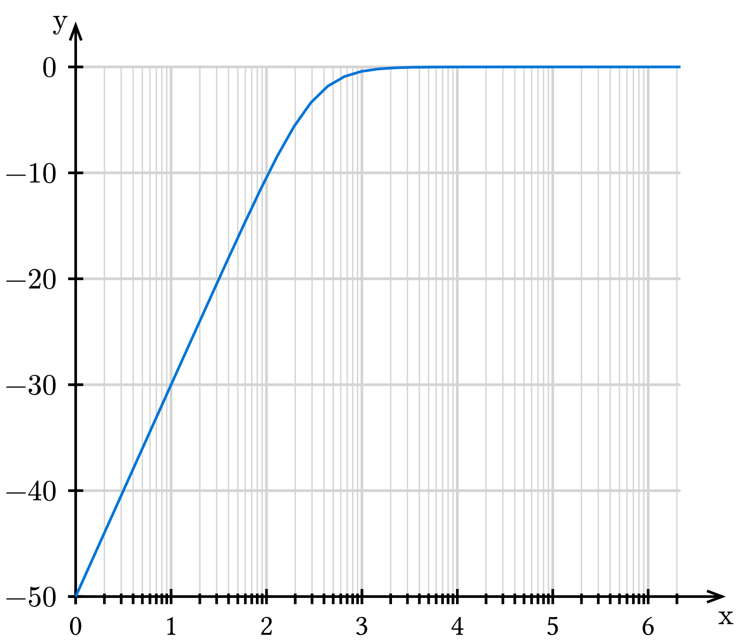


Fig. 3. – Gain

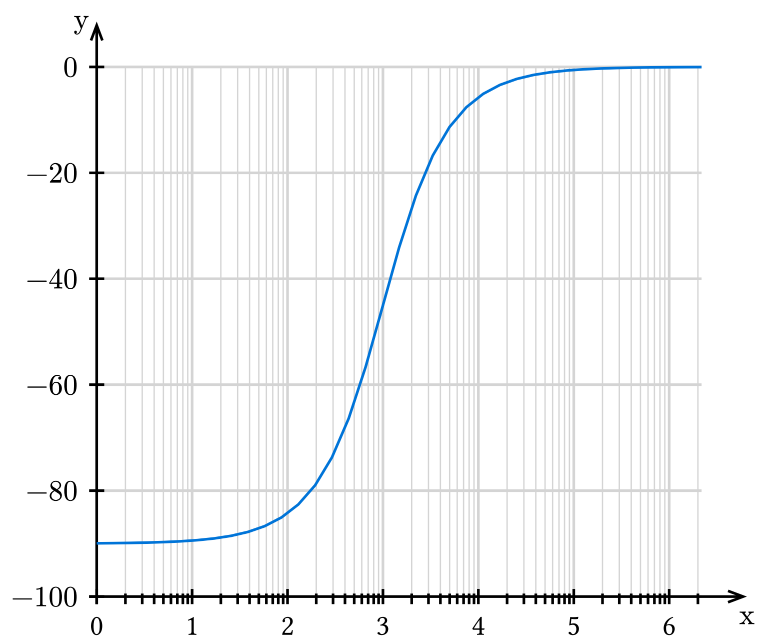


Fig. 4. – Phase

Passe-bande :

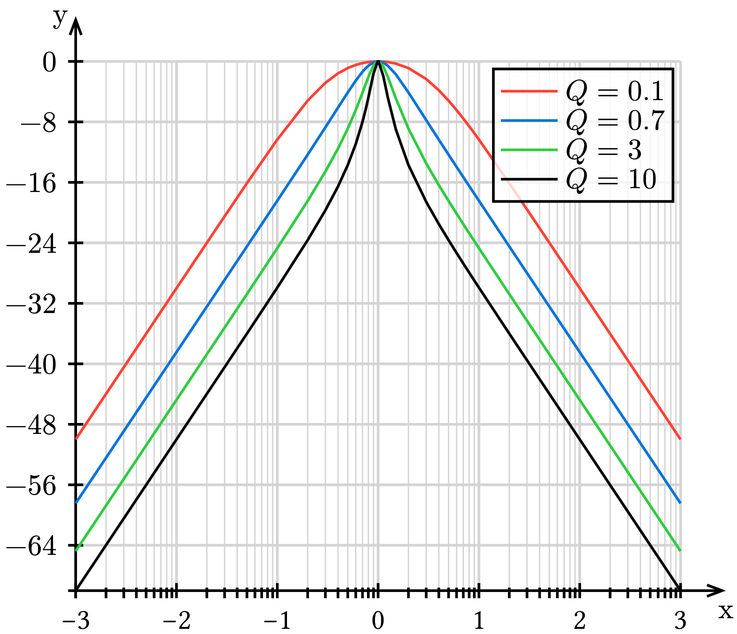


Fig. 5. – Gain

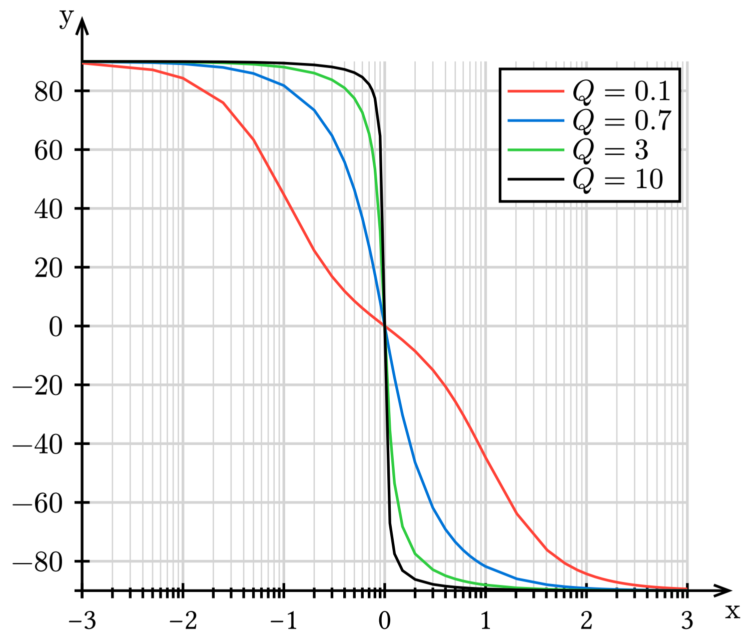


Fig. 6. – Phase

Passe-haut, 2$^{\text{éme}}$ ordre :

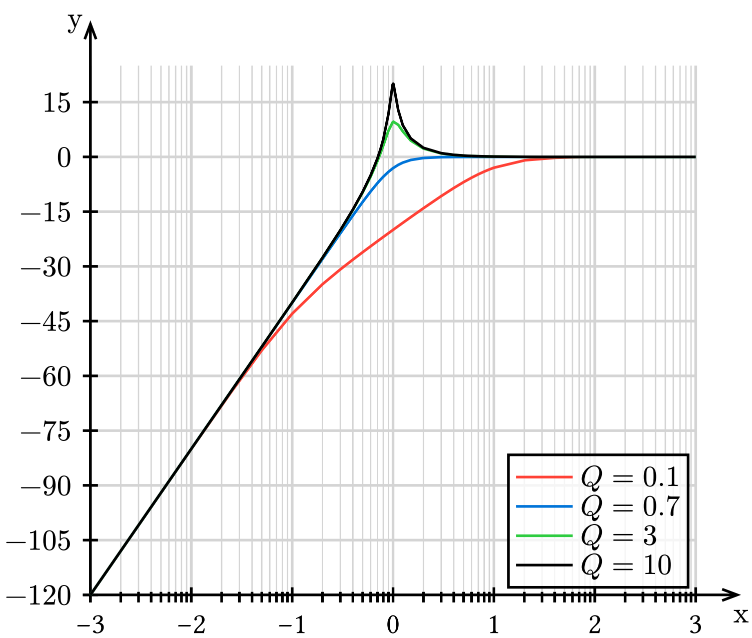


Fig. 7. – Gain

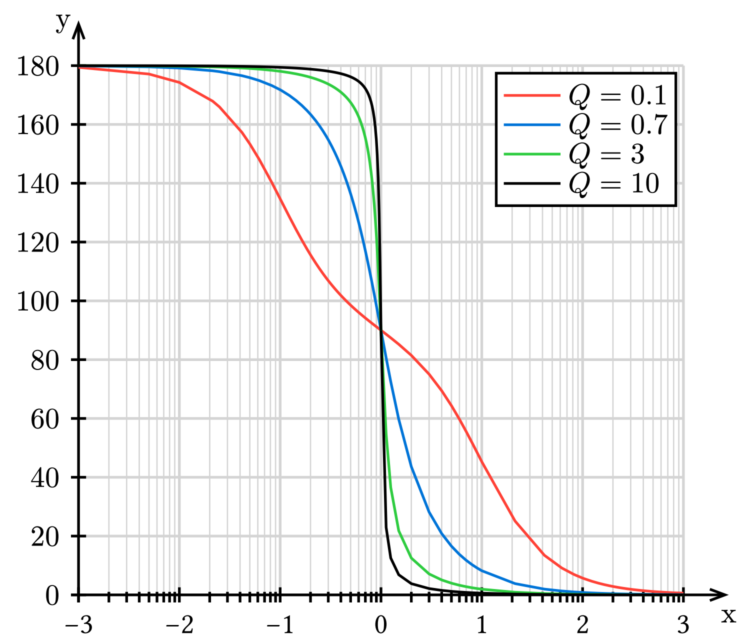


Fig. 8. – Phase

Passe-ba, 2$^{\text{éme}}$ ordre :

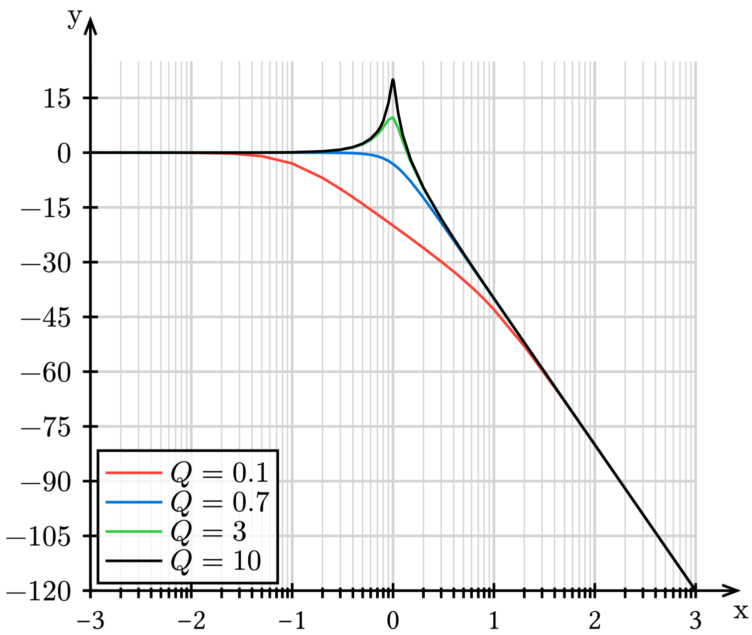


Fig. 9. – Gain

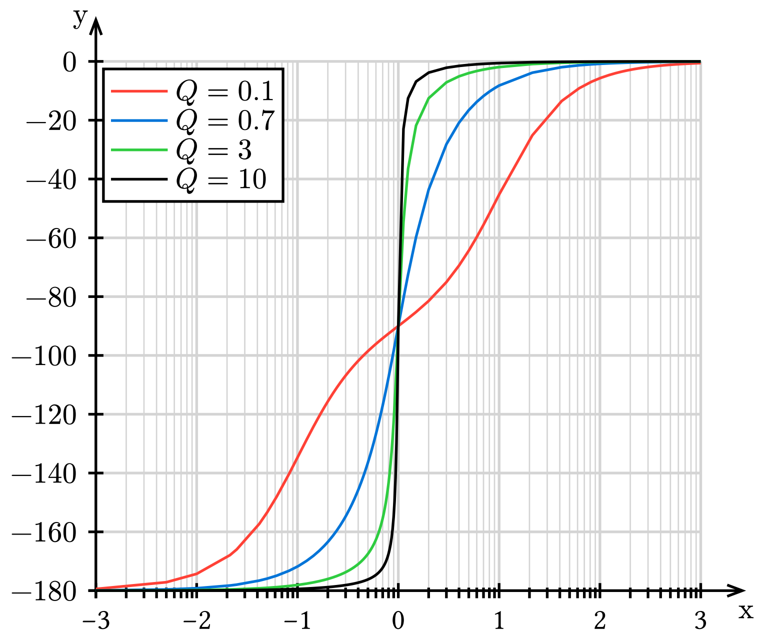


Fig. 10. – Phase

V. Mécaniques

1. Loi de Hook

$$\overrightarrow{F_{\text{él}}} = -k(l(t) - l_0)\vec{u}$$

- $k =$ konstante de raideur
- $l_0 =$ longueur dans le vide du ressort

2. Force centrale :
Une force centrale est une force constament dirigé vers un centre O, et si le centre O est le centre du repère sphèrique et/ou cylindrique, alors on peut la metre sous la forme : $\vec{f} = f\vec{u_r}$

3. Force Newtonienne :
Toute force centrale consevative qui s'exprime sous la forme :

$$\vec{f} = -\frac{k}{r^2}\vec{u_r}$$

Sont des forces Newtonienne

De plus, sont énergie potentielle est : $E_p = -\frac{k}{r} + C$

4. Force de Gravitation :

$$\overrightarrow{F_{A/B}} = -G\frac{m_A m_B}{d^2}\vec{u_r}$$

- $G =$ la constante de Gravitation
- $m =$ la masse de l'astre considéré
- $d =$ la distance entre A et B

5. Loi de Coulomb :

$$\overrightarrow{F_{A/B}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_A q_B}{r^2}\vec{u_r}$$

- $\varepsilon_0 =$ permittivité du vide
- $q =$ la charge du corps considéré
- $r =$ la distance entre A et B

6. Force de frottement fluide :

$$\vec{f} = -k_1\vec{v} \text{ à faible vitesse}$$

$$\vec{f} = -k_2 v\vec{v} \text{ vitesse élever}$$

- $k_{1,2} =$ des coefficients

7. Poussée d'Archimède :

$$\overrightarrow{\Pi_A} = -m\vec{g}$$

$$\overrightarrow{\Pi_A} = -\rho V\vec{g}$$

- $m =$ masse du fluide d'éplacée
- $g =$ l'accélération de pesanteur

- $\rho =$ masse volumique du fluide
- $V =$ Volume du fluide d'éplacé

8. Lois de Newton

1. Principe d'inertie : Dans un référentiel galiléen, tout corps isolé est soit en mouvement rectiligne uniforme, soit immobile
2. $\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}}$
3. Principe d'aciton-réaciton : $\overrightarrow{F_{A\to B}} = -\overrightarrow{F_{B\to A}}$

9. Force de Lorentz

$$\vec{f} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$$

- $q =$ la charge
- $\vec{E} =$ champ électrique
- $\vec{v} =$ la vitesse de la particule
- $\vec{B} =$ le champ magnétique

10. Force de Laplace

$$\vec{F}_{\mathcal{L}} = \int_{P \in \widehat{MN}} I \vec{d}l_P \wedge \overrightarrow{B_{\text{ext}}}(P)$$

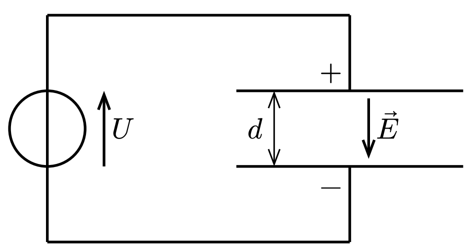
avec :

- $\widehat{MN} =$ le fil conducteur
- $I =$ l'intensité
- $\overrightarrow{B_{\text{ext}}} =$ le champs magnétique extérieur

11. champ éléctrique dans un condensateur

$$E = \frac{U}{d}$$

- $d =$ la distance entre les plaques
- $U =$ la tension entre les plaques



12. Champs magnétique

Champs caractéristique

Ici :

- $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$
- $i =$ l'intensité du courant
- $l =$ la longeur de la bobine
- $N =$ Le nombre de spire

Où	champ produit
Fils infini	$\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\vec{u}_\theta$
Spire circulaire	proche de l'axe

- $r =$ rayon de la bobine/spire

Où	champ produit
	$\frac{\mu_0 i}{2r}\vec{u}_z$
	loin de l'axe $\frac{\mu_0 i}{2}\frac{r^2}{z^3}\vec{u}_z$
Solénoïde	à l'intérieur : $\frac{\mu_0 N i}{l}\vec{u}_z$
	à l'extérieur : 0
Bobine plate	proche de l'axe : $\frac{\mu_0 N i}{2r}\vec{u}_z$

La bobine plate ($l \ll r$) est comme une spire juste N fois plus forte, donc sufie de multipliée par N le cas de la spire

Bobines de Helmoltz

C'est un dispositif composé de deux bobines concentrique de même rayon R et de même nombre de spire N espacé d'une distance L, tel que $R \ll L$,

Ce dispositif permet de créé un champs uniforme entre les deux bobines

Moment magnétique

Pour une spire

$$\vec{m} = I\vec{S}$$

avec :

- $\vec{m} =$ le moment magnétique
- $I =$ l'intensité du courant
- $\vec{S} =$ le vecteur surface

Dans le cas de plusieur spire

$$\vec{m} = IN\vec{S}$$

avec N le nombre de spire

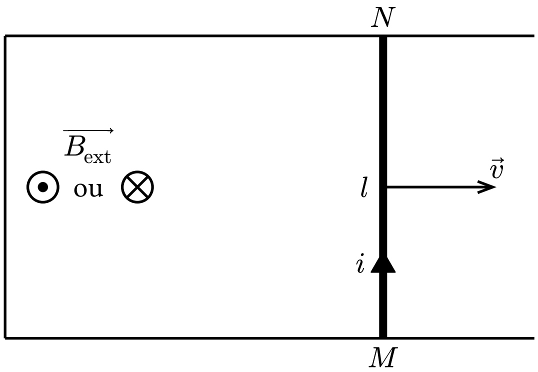
Pour un aiment permanent

$$\|\vec{m}\| = \text{volume de l'aiment} \times \text{aimantation volumique}$$

De plus on a :

$$\vec{B} \propto \vec{m}$$

13. Rails de Laplace



- **Résultante :**

$$\vec{F}_{\mathcal{L}} = i\overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{B_{\text{ext}}}$$

- **Puissance:**

$$\vec{P}_{\mathcal{L}} = \left(i\overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{B_{\text{ext}}}\right) \cdot \vec{v}$$

14. Spire rectangulaire en rotation

Dans une spire carré en rotation autour de l'axe O_z

- **Moment:**

$$\vec{\Gamma}_{\mathcal{L}} = \vec{m} \wedge \overrightarrow{B_{\text{ext}}} = i\vec{S} \wedge \overrightarrow{B_{\text{ext}}}$$

- **Puissance:**

$$\vec{P}_{\mathcal{L}} = \Gamma_{\mathcal{L}} \times \omega$$

15. Lois de Kepler

1er lois

Tout astre suit une orbite elliptique, dont le soleil est un des foyers

2eme lois : Lois des aires

Les aires $\mathscr{A}$ balayées par la ligne astre-soleil durant un même Δt, sont égaux :

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathscr{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{C}{2}$$

où $C = r^2\dot{\theta}$ est la constante des aires

3ème lois

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathscr{G}\ M}$$

avec :

- $T =$ La période de révolution
- $a =$ Le demi grand axe
- $\mathscr{G} =$ La constante de gravitation
- $M =$ La masse de l'astre atracteur

16. Satéllite Géostationnaire

C'est un satéllite (naturelle ou non), qui reste au-dessus du même point de la surface de l'astre attracteur, en ce cas :

$$r = \sqrt[3]{\frac{\mathscr{G}\ MT}{4\pi}}$$

avec :

- $r =$ le rayon de l'orbite géostationnaire
- $\mathscr{G} =$ la constante de gravitation
- $M =$ la masse de l'astre attracteur
- $T =$ la période de rotation de l'astre attracteur

17. Vitesse remarquable dans un champs de gravitation

Vitesse en orbite basse

$$v_{\mathrm{b}} = \sqrt{\frac{\mathscr{G}\ M}{\mathscr{R}}}$$

avec :

- $v_{\mathrm{b}} =$ la vitesse en orbite basse
- $\mathscr{G} =$ la constante de gravitationç
- $M =$ la masse de l'astre attracteur
- $\mathscr{R} =$ le rayon le l'astre attracteur

Vitesse de l'ibération

$$v_l = \sqrt{\frac{2\ \mathscr{G}\ M}{\mathscr{R}}}$$

avec :

- $v_l =$ vitesse de l'ibération
- $\mathscr{G} =$ constante de gravitation

- $M =$ la masse de l'astre attracteur
- $\mathscr{R} =$ Le rayon de l'astre attracteur

18. Vecteur rotation

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AB}}{\mathrm{d}t} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AB}$$

avec :

- $\vec{\Omega} =$ le vecteur rotation
- $\overrightarrow{AB} =$ le vecteur position

19. Loi de Coulomb pour le frottement

Cas de non glissement

$$\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| \leq \mu_s \left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$$

avec :

- $\overrightarrow{R_T} =$ la réaction tangentiel
- $\overrightarrow{R_N} =$ la réaction normal
- $\mu_s =$ le coefficient de frottement statique

Cas de glissement

$$\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| = \mu_d \left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$$

avec :

- $\overrightarrow{R_T} =$ la réaction tangentiel
- $\overrightarrow{R_N} =$ la réaction normal
- $\mu_d =$ le coefficient de frottement dynamique

Remarque : $\mu_s \geq \mu_d$ et dans le cas de glissement $\overrightarrow{R_T}$ est opposé à $\vec{v_g}$

De plus on passe du cas de non glissement au cas de glissement si $\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| = \mu_s \left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$

VI. Énergie

1. Travaille élémentaire :

$$\delta W_{/R}\left(\vec{f}\right) = \vec{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

- $\vec{f}$: une force
- $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$: un chemin élémentaire

2. Travaille

$$W_{A \to B} = \int_{M \in AB} \delta\left(\vec{f}\right) = \int_{M \in AB} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

3. Puissance

$$\mathcal{P}_{/R}\left(\vec{f}\right) = \vec{f} \cdot \overrightarrow{v_{M/R}}$$

$$\mathcal{P}_{/R}\left(\vec{f}\right) \mathrm{d}t = \delta W_{/R}\left(\vec{f}\right)$$

4. Théorème de la puissance cinétique

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{P}\left(\vec{f}_i\right) = \sum \vec{f}_i \cdot \vec{v}$$

5. Théorème de l'énergie cinétique

$$\Delta E_c = \sum W_{A \to B}\left(\vec{f}_i\right)$$

Au niveau infinitésimal :

$$\mathrm{d}E_c = \sum \delta W\left(\vec{f}_i\right) = \sum \vec{f}_i \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

6. Énergie Potentiel

$$\Delta_{AB} E_p = -W_{AB}\left(\overrightarrow{f_C}\right)$$

- $\vec{f}_c$: une force non conservative

7. Énergie mecanique

$$E_m = E_c + E_p$$

8. Théorème de la puissance mécanique

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{P}\left(\overrightarrow{f_{NC}}\right)$$

- E_m : L'énergie mécanique
- $\overrightarrow{f_{NC}}$: une force non consevative

9. Équilibre

Il y a équilibre en P lors que $\sum \vec{f}_i = \vec{0} \Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(E_p(P)\right) = \vec{0}$

Équilibre stable

On dit que l'équilibre est stable si pour une légère perturbation il revient à cette possition P ou si

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}q_i^2}\right)_P > 0$$

avec q_i les coordonnées généraliser, *i.e.* $q_1 = x$, $q_2 = y$ et $q_3 = z$ en cartésien ou $q_1 = r$, $q_2 = \theta$ et $q_3 = z$ en cylindrique

Équilibre instable

On dit que l'équilibre est instable si pour une légère perturbation il séloigne de cette possition P ou si

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}q_i^2}\right)_P < 0$$

10. les Énergies

Nom	Formule
cinétique	$\frac{1}{2}mv^2$
cinétique du solide	$\sum_i \frac{1}{2}m_i \lVert\vec{v}_i\rVert^2$
translation	$\frac{1}{2}m\lVert\vec{v}\rVert^2$
rotation	$\frac{1}{2}J_\Delta \omega^2$
Potentielles	
Pesanteur	mgz
Gravitationnelle	$-G\frac{m \times m_A}{r}$
Élastique	$\frac{1}{2}k(l-l_0)^2$
Électrostatique	$q\left(-\vec{E} \cdot \overrightarrow{OM}\right)$
Force centrale	$-\frac{k}{r}$
Mécaniques	
Gravitationnelle	$-\mathscr{G}\ \frac{mm_O}{2r_O}$

11. Énergies potentielles effectives

Dans le cas d'une force centrale l'énergie mécanique peut ce mettre sous cette forme :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,\text{ eff}}(r)$$

- dans le cas de la force de Gravitation $E_{p,\text{ eff}} = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + E_p(r)$, avec C la constante des aires, et $E_p(r)$ l'énergie potentielles de gravitation

12. Puissance et travaille des actions mécanique extérieur sur un solide

Puissance

$$\mathscr{P}^{\text{ext}} = \mathscr{M}_\Delta^{\text{ext}} \times \omega$$

avec :

- $\mathscr{M}_\Delta^{\text{ext}}$ = les moment exterieurs

- $\mathscr{P}^{\text{ext}}$ = la puissance des actions mecaniques exterieurs
- ω = la vitesse de rotation du solide

Travaille

$$W_{A\to B}^{\text{ext}} = \int_{t_A}^{t_B} \mathscr{P}^{\text{ext}}\,\mathrm{d}t = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \mathscr{M}_\Delta^{\text{ext}}\,\mathrm{d}\theta$$

avec :

- $\mathscr{M}_\Delta^{\text{ext}}$ = les moment exterieurs
- $\mathscr{P}^{\text{ext}}$ = la puissance des actions mecaniques exterieurs
- $W_{A\to B}^{\text{ext}}$ le travaille des actions mecaniques exterieurs entre $A(t_A, \theta_A)$ et $B(t_B, \theta_B)$

13. Théorème de la puissance cinétique

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{P}^{\text{ext}} = \sum \mathscr{M}_\Delta^{\text{ext}} \times \omega$$

avec :

- E_c = L'énergie cinétique
- $\mathscr{P}^{\text{ext}}$ = la puissance des actions mecaniques exterieurs
- $\mathscr{W}_\Delta^{\text{ext}}$ = le moment des actions mecaniques exterieurs
- ω = la vitesse de rotation du solide

14. Théorème de l'énergie cinétique

Entre les instant t_A et t_B :

$$\Delta_{t_A\to t_B} E_c = \sum W_{t_A\to t_B}^{\text{ext}}$$

avec :

- $\Delta_{t_A\to t_B} E_c$ = la variation d'énergie cinétique entre les deux instants
- $W_{t_A\to t_B}^{\text{ext}}$ = le travaille des actions mecaniques exterieurs entre les deux instants

15. Énergie emmagasinée par une bobine

$$E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L i^2$$

avec :

- L = l'inductence de la bobine
- i = l'intensité du courant qui parcour la bobien

VII. Signaux

1. Signaux unidirectionelle

Represantation temporelle

$$s(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

En particulier

$$s(x,t) = s\left(0, t - \frac{x}{c}\right)$$

Represantation spacial

$$s(x,t) = F(x - ct)$$

En particulier

$$s(x,t) = s(x - ct, 0)$$

2. Onde progressive sinusoïdale

Définition

$$s(x,t) = A\cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi\right) = A\cos(\omega t - kx + \varphi)$$

avec :

- $A =$ l'emplitude
- $\omega =$ la pulsation
- $c =$ la célérité
- $\varphi =$ un déphasage
- $k = \frac{\omega}{c} =$ la pulsation spacial

caractéristique

caractéristique temporelle	caractéristique spacial
période temporelle T en s	longueur d'onde (période spacial) λ en m
fréquence temporelle $f = \frac{1}{T}$ en Hz	
pulsation temporelle $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ en rad $\cdot\, s^{-1}$	pulsation spacial $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ en rad $\cdot\, m^{-1}$

Méthode : calcule du déphasage

1. Mesurer la période T
2. déterminer si s_2 est en avance sur s_1 ou non :
   - si s_2 est en avance alors $\Delta\varphi_{2/1} > 0$
   - $\Delta\varphi_{2/1} < 0$ sinon
3. Mesurer le retard Δt
4. Déterminer la formule suivante : $\left|\Delta\varphi_{2/1}\right| = \frac{2\pi\Delta t}{T}$
   - Démo :

   Soit $s_1(t) = S_m \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x_1\right)$ et $s_2(t) = S_m \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x_2\right)$ deux mesures du même signale en l'abscisse x_1 et x_2, ainsi $\varphi_1 = -\frac{\omega}{c}x_1$ et $\varphi_2 = -\frac{\omega}{c}x_2$, donc :

   $$\Delta\varphi_{2/1} = \varphi_2 - \varphi_1 = -\omega \underbrace{\frac{x_2 - x_1}{c}}_{=\Delta t} = -\omega\Delta t = -\frac{2\pi\Delta t}{T}$$

5. Calculer $\Delta\varphi_{2/1}$

3. Diffration

Formule de la diffration :

- Dans le cas d'une OPPM

$$\sin(\theta) = \frac{\lambda}{a}$$

avec :

- $\theta =$ valeur de l'angle de diffraction pour la première extinction
- $\lambda =$ longueur d'onde
- $a =$ taille de l'ouverture

Interférences constructive, déstructive et différence de marche

1. Interférences constructive :

   Quand l'amplitude des deux ondes est en phase (est maximale)

2. Interférences déstructive :

   Quand l'amplitude des deux ondes est en opposition de phase (est minimale)

3. Différence de marche :

   La différence de marche est la différence de distance parcourue par les deux ondes,

   noté $\delta(M) = d_2(M) - d_1(M)$

4. Relation entre déphasage et différence de marche :

   $\varphi_{2/1}(M) = -\frac{2\pi}{\lambda}\delta_{2/1}(M)$

conditions d'interférences constructive/déstructive :

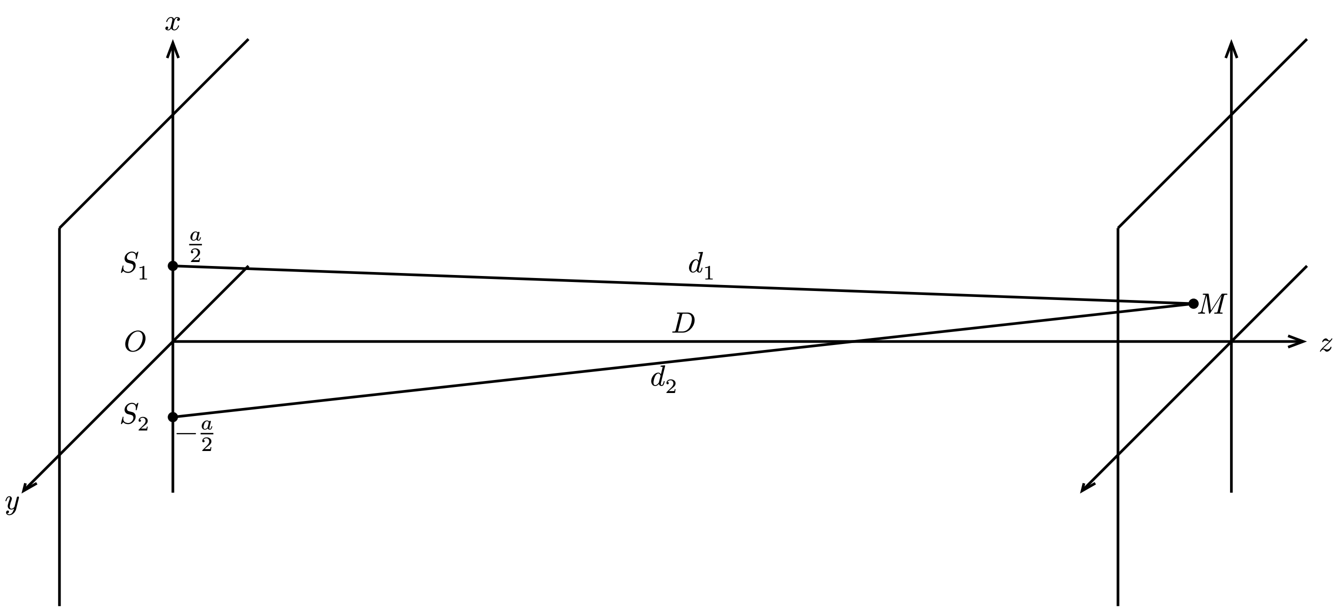
- Constructive :

  $\Delta\varphi_{2/1}(M) = 2n\pi \Leftrightarrow \delta_{2/1}(M) = n\lambda$ avec $n \in \mathbb{Z}$

- Déstructive :

  $\Delta\varphi_{2/1}(M) = (2n+1)\pi \Leftrightarrow \delta_{2/1}(M) = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$ avec $n \in \mathbb{Z}$

4. Fante de Young



$$d_1 = D\sqrt{1 + \frac{y^2}{D^2} + \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{D^2}} \approx D + \frac{y^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{2D} \approx D + \frac{y^2 + x^2 + \frac{a^2}{4} - ax}{2D}$$

$$d_2 = D\sqrt{1 + \frac{y^2}{D^2} + \frac{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2}{D^2}} \approx D + \frac{y^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2}{2D} \approx D + \frac{y^2 + x^2 + \frac{a^2}{4} + ax}{2D}$$

Ainsi

$$\delta_{2/1}(M) = d_2(M) - d_1(M) \approx \frac{ax}{D}$$

1. Pour les interférences constructive :

   $\delta_{2/1}(M) = n\lambda \Leftrightarrow \frac{ax}{D} = n\lambda \Leftrightarrow x = n\lambda\frac{D}{a}$

2. L'interfrange :

   distance entre deux interférences constructive

   $i = \frac{\lambda D}{a}(n + 1 - 1) = \frac{\lambda D}{a}$

VIII. Thermodynamie

1. Équilibre Thermodynamique

Un système est dit en équilibre thermodynamique macroscopique si :

- toutes ces grandeurs d'états sont constantes au cours du temps
- et il es isolé (*i.e.* il n'échange ni énérgie, ni matières avec l'extérieur)

C'est a dire que le système est en équilibre thermodynamique si :

1. Équilibre thermique :
   - La température est uniforme dans tout le système
   - au niveau d'une paroi diatherme, la température est la même des deux cotés

2. Équilibre mécanique :
   - La pression est uniforme dans tout le système
   - aucun élément mobile ne bouge
3. Équilibre chimique :
   - La concentration est uniforme dans tout le système
   - les réactions chimiques sont à l'arrêt
4. aucun échange de matière ni d'énergie avec l'extérieur

2. Pression

$$P = \frac{F}{S}$$

avec :

- $P =$ la pression
- $F =$ la force exercée par le gaz sur la surface
- $S =$ la surface

3. Modéle du gaz parfait

Hypothèse

- les particules sont poncutelles
- les particules sont sans interactions entre elles

Vitesse moyenne

1. Vecteur vitesse moyenne :

$$< \vec{v} >= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \vec{v_i}$$

2. vitesse quadratique moyenne, noté u :

$$u = \sqrt{< v^2 >} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} v_i^2}$$

avec :

- $N =$ le nombre de particules
- $v_i =$ la vitesse de la particule i
- $u =$ la vitesse quadratique moyenne

4. Température cinétique :

$$\mathscr{E}_{c,1} = \frac{3}{2} k_B T =< \frac{1}{2} m v^2 >= \frac{1}{2} m u^2$$

avec :

- $\mathscr{E}_{c,1}$ = l'énergie cinétique moyenne par particule
- k_B = la constante de Boltzmann $(1,38 \times 10^{-23} \mathrm{J} \cdot \mathrm{K}^{-1})$
- T = la température
- m = la masse de la particule
- u = la vitesse quadratique moyenne

5. Pression d'un gaz parfait :

$$P = \frac{1}{3} n^* m u^2$$

avec :

- P = la pression
- n^* = le nombre de particules par unité de volume
- m = la masse de la particule

6. Équation du gaz parfait :

$$PV = n \mathscr{R} T$$

avec :

- P = la pression
- V = le volume
- n = le nombre de mole
- $\mathscr{R}$ = la constante des gaz parfait $(8,31 \mathrm{J} \cdot \mathrm{K}^{-1} \cdot \mathrm{mol}^{-1})$
- T = la température

7. Énergie interne :

$$U = \mathscr{E}_{c,\mathrm{micro}} + \mathscr{E}_{p,\mathrm{int}}$$

avec :

- $\mathscr{E}_{c,\mathrm{micro}}$ = l'énergie cinétique microscopique
- $\mathscr{E}_{p,\mathrm{int}}$ = l'énergies potentielles interactions

8. Capacité thermique à volume constant :

$$\mathrm{d}U = C_V \, \mathrm{d}T \Leftrightarrow C_V = \left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T} \right)_V$$

avec :

- C_V = la capacité thermique à volume constant
- U = l'énergie interne
- T = la température

9. Énergie interne d'un gaz parfait monoatomique :

$$U_m = \frac{3}{2}\,\mathscr{R}\,T$$

et

$$C_{Vm} = \frac{3}{2}\,\mathscr{R}$$

avec :

- $U_m =$ l'énergie interne molaire
- $C_{Vm} =$ la capacité thermique molaire à volume constant
- $T =$ la température
- $\mathscr{R} =$ la constante des gaz parfait

10. Première loi de Joule :

- L'énergie interne molaire U_m d'un gaz parfait ne dépend que de la température :

$$U_m = U_{m(T)}$$

Ainsi l'énergie interne au cours d'une transformation est :

$$\Delta U_m = U_m(T_f) - U_m(T_i) = \int_{T_i}^{T_f} C_{Vm}(T)\,\mathrm{d}T$$

11. L'énergie interne d'une phase condensée :

$$\Delta U_m = U_m(T_f) - U_m(T_i) = \int_{T_i}^{T_f} C_{Vm}(T)\,\mathrm{d}T$$

12. transformation thermodynamique :

- Isobare : $P = cst$
- Isochore : $V = cst$
- Isotherme : $T = cst$
- Adiabatique : $Q = 0$
- Monobare : $P_{\text{ext}} = cst$
- Thermostat : $T_{\text{ext}} = cst$

13. Lois phénoménologiques de Newton :

$$\Phi_{s\to f} = h(T_s - T_f)S$$

avec :

- $\Phi_{s\to f} =$ le flux de chaleur
- $h =$ le coefficient de conductivité thermique
- $T_s =$ la température du solide
- $T_f =$ la température du fluide

- $S =$ la surface de contact

14. Entalpie :

$$H = U + PV$$

avec :

- $H =$ l'entalpie
- $U =$ l'énergie interne
- $P =$ la pression
- $V =$ le volume

15. Capacité thermique à pression constante :

$$\mathrm{d}H = C_P \,\mathrm{d}T \Leftrightarrow C_P = \left(\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}T}\right)_P$$

avec :

- $C_P =$ la capacité thermique à pression constante
- $H =$ l'entalpie
- $T =$ la température

16. 2$^{\text{e}}$ lois de Joule :

$$\Delta H_m = H_m(T_f) - H_m(T_i) = \int_{T_i}^{T_f} C_P(T)\,\mathrm{d}T$$

avec :

- $H_m =$ l'entalpie molaire
- $C_P =$ la capacité thermique molaire à pression constante
- $T =$ la température

17. 1$^{\text{er}}$ principe de la thermodynamique :

Formulation énérgétique :

1. Cas Générale :

$$\Delta E_{\text{tot}} = W + Q$$

2. Pour un système au repos macroscopique

$$\Delta U = W + Q$$

avec :

- $\Delta U =$ la variation d'énergie interne
- $W =$ le travaille échangé
- $Q =$ la chaleur échangée

Formulation enthalpique :

$$\Delta H = W' + Q$$

avec :

- ΔH = la variation d'entalpie
- W' = le travaille des forces exterieurs
- Q = la chaleur échangée

18. transformation réversible

Une transformation est dite réversible si on peut la ramener dans sont état initiale

Pour q'une transformation soit réversible, il faut que :

- elle soit infiniment lente
- à chaque étape de la transformation, elle doit être à l'équilibre avec le milieux exterieurs
- les phénomènes disipatif sont négligeable (ex : frottement)

Si un des cas suivant apparait, alors la transformation n'est plus réversible :

1. Des forces de frottements
2. Des phénomènes de diffusion, (ex : goutte d'encre dans de l'eau)
3. Des réactions chimiques
4. Le passage d'un courant éléctrique dans une résistance

19. Entropie

On définie pour tout système, une fonction d'état extensive noté S, telle que l'évolution d'un système isolé s'acompagne d'une augmentation d'Entropie

- Dans le cas non réversible : $S_{\text{finale}} > S_{\text{initial}}$
- Dans le cas réversible : $S_{\text{finale}} = S_{\text{initial}}$

20. 2nd principe de la Thermodynamie

Énoncer

Pour un système fermé :

$$\Delta S = S_{\text{éch}} + S_{\text{créée}}$$

avec :

- $S_{\text{éch}}$ = l'entropie échangée, l'orsque le système est en contact avec un thermostat

$$S_{\text{éch}} = \sum_i \frac{Q_i}{T_i}$$

  avec Q_i transfert thermique reçu par le thermostat T_i

- $S_{\text{créée}}$ = entropie créée :

- $S_{\text{créée}} < 0$: transformation impossible
- $S_{\text{créée}} = 0$: transformation réversible
- $S_{\text{créée}} > 0$: transformation non réversible

Cas d'un système isolé
Dans le cas d'un système isolé $S_{\text{éch}} = 0$, donc $\Delta S = S_{\text{créée}} \geq 0$.

Ainsi dans un système isloé l'entropie ne fait qu'augmenté jusqu'à atteindre sont max à l'équilibre thermodynamique

Cas d'une transformation adiabatique réversible
Dans ce cas $S_{\text{éch}} = 0$ car adiabatique et $S_{\text{créée}} = 0$ car réversible,

donc $\Delta S = 0$, ainsi la transformation est dite isentropique

Cas d'une transformation Monotherme
Dans ce cas le milieux exterieur est un thermostat de température $T_e = \text{cst}$, alors on à :

$$S_{\text{éch}} = \frac{Q}{T_e}$$

avec $Q =$ le transfert thermique entre le système est l'exterieur

21. Variation d'entropie pour une phase condensée

- Écriture molaire :

$$S_m(T) = C_m \ln\left(\frac{T}{T_{\text{ref}}}\right) + S_{m,\text{ ref}}$$

- Écriture massique :

$$s(t) = c \ln\left(\frac{T}{T_{\text{ref}}}\right) + s_{\text{ref}}$$

avec C_m (resp c) la capacité thermique molaire (resp massique)

- Variation d'entropie entre les deux état A et B :

$$\Delta S = nC_m \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) = mc \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right)$$

22. Variation d'entropie d'un gaz parfait

- Écriture molaire :
  1. En fonction de T et V :

$$S_m(T, V) = \frac{\mathscr{R}}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{T}{T_{\text{ref}}}\right) + \mathscr{R} \ln\left(\frac{V}{V_{\text{ref}}}\right) + S_{m,\text{ ref}}$$

  2. En fonction de T et P :

$$S_m(T, P) = \frac{\mathscr{R}\ \gamma}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{T}{T_{\text{ref}}}\right) - \mathscr{R} \ln\left(\frac{P}{P_{\text{ref}}}\right) + S_{m,\text{ ref}}$$

3. En fonction de P et V :

$$S_m(P,V) = \frac{\mathscr{R}}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{P}{P_{\text{ref}}}\right) + \frac{\mathscr{R}\ \gamma}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{V}{V_{\text{ref}}}\right) + S_{m,\text{ ref}}$$

Avec $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{C_{P,m}}{C_{V,m}} = \frac{c_P}{c_V}$

- Écriture massique :

1. En fonction de T et V :

$$s(T,V) = \frac{\mathscr{R}}{M(\gamma - 1)} \ln\left(\frac{T}{T_{\text{ref}}}\right) + \frac{\mathscr{R}}{M} \ln\left(\frac{V}{V_{\text{ref}}}\right) + s_{\text{ref}}$$

2. En fonction de T et P :

$$s(T,P) = \frac{\mathscr{R}\ \gamma}{M(\gamma - 1)} \ln\left(\frac{T}{T_{\text{ref}}}\right) - \frac{\mathscr{R}}{M} \ln\left(\frac{P}{P_{\text{ref}}}\right) + s_{\text{ref}}$$

3. En fonction de P et V :

$$s(P,V) = \frac{\mathscr{R}}{M(\gamma - 1)} \ln\left(\frac{P}{P_{\text{ref}}}\right) + \frac{\mathscr{R}\ \gamma}{M(\gamma - 1)} \ln\left(\frac{V}{V_{\text{ref}}}\right) + s_{\text{ref}}$$

- Variation d'entropie :

1. En fonction de T et V :

$$\Delta S = nC_{V,m} \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) + n\ \mathscr{R} \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

2. En fonction de T et P :

$$\Delta S = nC_{P,m} \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) + n\ \mathscr{R} \ln\left(\frac{P_B}{P_A}\right)$$

3. En fonction de P et V :

$$\Delta S = nC_{V,m} \ln\left(\frac{P_B}{P_A}\right) + nC_{P,m} \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

23. Loi de Laplace

- dans un système fermé, constitué d'un gaz parfait
- subissant une transformation adiabatique réversible ou isentropique
- n'échangeant que un travaille de pression

Alors :

$$P \times V^{\gamma} = cst$$

$$T \times V^{\gamma - 1} = cst'$$

$$T^{\gamma} \times P^{1-\gamma} = cst''$$

24. phase

Une phase est quand les variable d'état intensive sont continue, suivant les conditions de pression et de température, un corps peut se présenté sous différente phase : solide, liquide, gazeux

25. Diagramme (P, T)

Définition

C'est un diagrame qui présente les différentes phases d'un corps pur, en fonction de la pression et la température

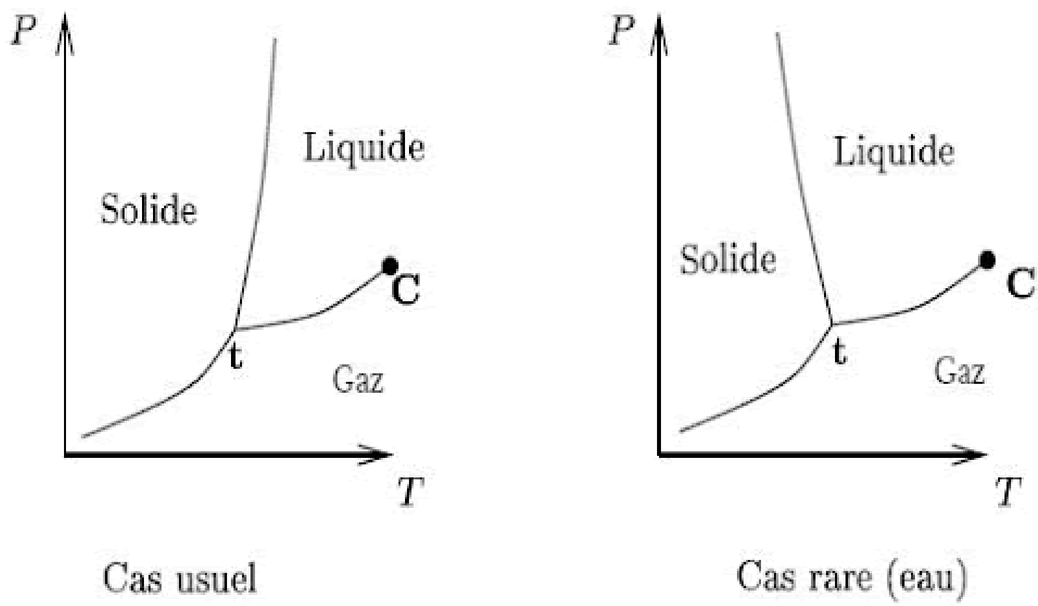


Fig. 11. – Diagramme (P, T), cas usuel (à gauche) et cas rare (à droite)

Point remarquable

- Pression de vapeur saturante : la pression d'équilibre liquide-gaz à la température T est appelée pression de vapeur saturante et est noté : $P_{\text{sat}}(T)$
- Point triple : c'est le point du diagramme (t sur la firgure 7) où les trois phase peuvent coéxisté
- Point critique : c'est le point du diagramme (C sur la firgure 7) à partire du quel il n'y a plus de distinction entre liquide et gaz

26. Diagramme (P, V) ou Diagramme de Clapeyron

Définition

Il représente les différente phase (et zone diphasé), en fonction de la pression et du volume, il permet de connaitre la proprortion du corps dans chaqu'une des phase

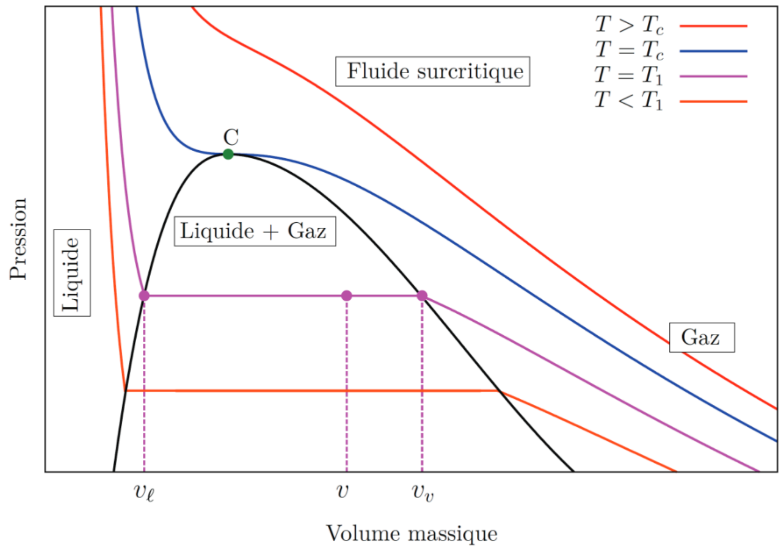


Fig. 12. – Diagramme de Clapeyron

titre massique gaz/liquide

Ces deux grandeur représente la proprortion de gaz/liquide du corps pur pour une pression et un volume donnés

- Titre massique en gaz :

$$x_g = \frac{\text{masse du corps pur sous forme gazeuse}}{\text{masse totale du corps pur}} = \frac{m_g}{m}$$

- Titre massique en liquide:

$$x_l = \frac{\text{masse du corps pur sous forme liquide}}{\text{masse totale du corps pur}} = \frac{m_l}{m}$$

On a donc $x_g + x_l = 1$

27. Théorème des moments

À partir d'un diagramme de Clapeyron on peut déterminer le titre massique en gaz, par la formule suivante :

$$x_g = \frac{v - v_l}{v_g - v_l}$$

28. Enthalpie de transition de phase

Ça correspond au transfert tehermique Q pour passer de la phase φ_1 à la phase φ_2, noté et calculé par :

$$\Delta_{\varphi_1 \to \varphi_2} H_m(T) = H_{m,\varphi_2}(T) - H_{m,\varphi_1}(T)$$

ou sous forme massique

$$\Delta_{\varphi_1 \to \varphi_2} h(T) = h_{\varphi_2}(T) - h_{\varphi_1}(T)$$

29. Entropie de transition de phase

Exactement la même chose que l'enthalpie de transition de phase mais avec l'entropie

pour les formules remplaces H par S

Liens avec l'enthalpie de transition de phase :

$$\Delta_{\varphi_1 \to \varphi_2} s(T) = \frac{\Delta_{\varphi_1 \to \varphi_2} h(T)}{T}$$

30. Machine thermique

Définition

C'est un dispositif dans le quel un fluide faits un cycle dans le but de réaliser une conversion d'énergie thermique en énergie mécanique ou réciproquement

Représentation

On réprésente une machine thermique par un diagramme, avec

- la machine au centre
- deux thermostat (un froid Q_F et un chaud Q_C) en indiquand le signe de l'échange thermique et en les reliant à la machine au centre
- le travaille également en indiquand sont signe et en le reliant à la machine

Théorème de Carnot

L'éfficacité d'une machine thermique ditherme cyclique réeele est toujours inférieur à l'éfficacité de Carnot (qui ne dépend que de la température des thermostat)

Cogénération

Cela consite à utiliser la chaleur produit dans le cas d'un moteur, et donc rendre Q_C utile

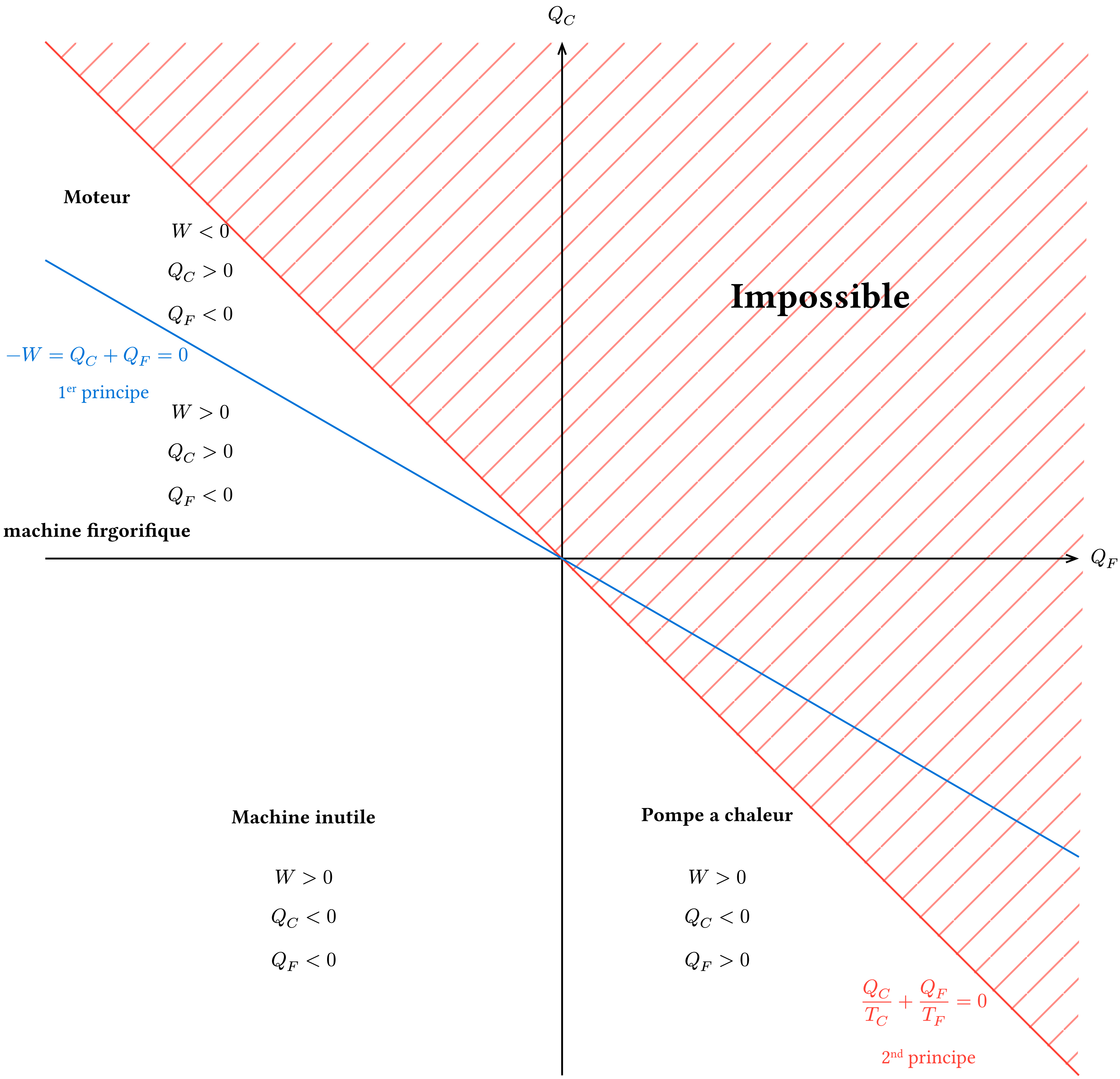
Rendement

$$\eta = \frac{\text{énergie échangée utile}}{\text{énergie échangée qui coute}}$$

type de machine	Rendement	Rendement de Carnot (utile)
Moteur	$-\frac{W}{Q_C}$	$1 - \frac{T_F}{T_C}$
machine figorifique	$\frac{Q_F}{W}$	$\frac{T_F}{T_C - T_F}$
pompe à chaleur	$-\frac{Q_C}{W}$	$\frac{T_C}{T_C - T_F}$
Cogénération	$\frac{\lvert W_u + Q_u \rvert}{Q_C}$	

Diagramme de Raveau

On peut représenté les différentes type de machine en fonction de Q_C et Q_F dans un diagramme



Q_C
Moteur
$W < 0$
$Q_C > 0$
$Q_F < 0$
Impossible
$-W = Q_C + Q_F = 0$
1er principe
$W > 0$
$Q_C > 0$
$Q_F < 0$
machine firgorifique
Q_F
Machine inutile
$W > 0$
$Q_C < 0$
$Q_F < 0$
Pompe a chaleur
$W > 0$
$Q_C < 0$
$Q_F > 0$
$\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} = 0$
2nd principe

31. Transfert thermique

Modes de Transfert

1. Rayonement :
   - Pas de support
   - $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$
2. Convection :
   - liée a un mouvement de fluide
   - dommine dans les fluides
3. Conduction :
   - transfert de proche en proche
   - sans déplacement macroscopique de la matière

Flux thermique

flux thermique passant par une surface S :

$$\phi = \iint_S \vec{\jmath}_{\text{th}} \, \mathrm{d}\vec{S}$$

avec :

- $\phi =$ le flux thermique en W
- $\vec{\jmath} =$ le vecteur densité de flux thermique en $W \cdot m^{-2}$

Remarque : $\delta Q = \phi \, \mathrm{d}t$

Loi de Fourier

$$\vec{\jmath}_{\text{th}} = -\lambda \vec{\nabla} T$$

avec :

- $\lambda =$ la conductivité thermique en $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
- $T =$ la température
- $\vec{\jmath} =$ le vecteur densité de flux thermique

Équation de la diffusion thermique

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T$$

avec :

- $\rho =$ la masse volumique en $\text{kg} \cdot m^{-3}$
- $c =$ la capacité thermique massique en $J \cdot \text{kg}^{-1} \cdot K^{-1}$
- $T =$ la température
- $\lambda =$ la conductivité thermique en $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$

Remarque : $\rho c \frac{\delta T}{t_c} \sim \lambda \frac{\delta T}{L^2} \Longrightarrow t_c \sim \frac{\rho c L^2}{\lambda} = \frac{L^2}{a}$ avec $a = \frac{\lambda}{\rho c}$

conditions au limites entre deux solides :

La température étant continue on impose que au contact entre deux milieux solide 1 et 2 on a :

$\begin{cases} T_1(P,t)=T_2(P,t) \\ \vec{j}_{\text{th},1}(P,t).\vec{n}_{12}=\vec{j}_{\text{th},2}(P,t).\vec{n}_{12} \end{cases}$

N.B. : pour un contact entre un fluide et un solide voir loi phénoménologique de Newton

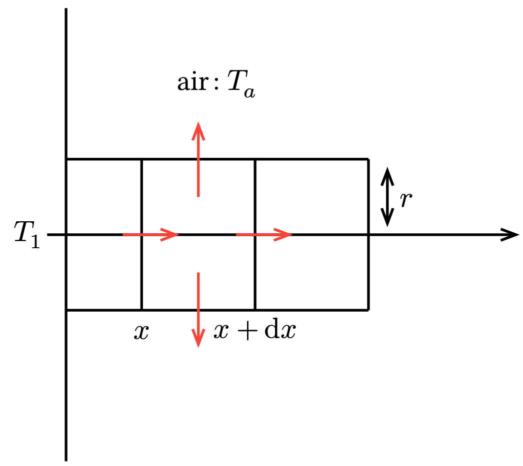
Loi phénoménologique de Newton :

$$\vec{j}_{\text{th}} = h\big(T(P,t) - T_f\big)$$

avec :

- $h =$ le coefficient de conductivité thermique en $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$
- $T =$ la température
- $T_f =$ la température du fluide

Exemple classique : ailette de refroidissement



Par le 1er principe de la thermodynamie, on a : $\mathrm{d}U = \delta Q$

Or $\mathrm{d}U = \rho S \,\mathrm{d}x c(T(x, t + \mathrm{d}t) - T(x,t))$

Et $\delta Q = j_{\text{th}}(x,t) S \,\mathrm{d}t - j_{\text{th}}(x + \mathrm{d}x) S \,\mathrm{d}t - h(T(x,t) - T_a) \,\mathrm{d}t 2\pi r \,\mathrm{d}x$

D'où après simplification :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{2h}{r}(T(x,t) - T_a)$$

ensuite on en faits soit une simulation numérique

soit une étude en régime permanent

Étude en régime permanent

Ici on étudie le cas d'une tige en métal calorifugé sur les cotés de longeur L et dont les températures aux extrémités sont T_1 et T_2

Ainsi l'équation de le propagation de la chaleur s'écrit sous la frome :

$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$, mais le résonement se généralise trés bien à d'autre cas

En régime permanent on a : $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0$ d'où $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$

D'où $T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$ avec L la longeur

Donc $j_{\text{th}} = \frac{\lambda}{L}(T_1 - T_2)$ et donc $\phi = \frac{\lambda S}{L}(T_1 - T_2)$ avec S la section de la tige

On peut poser la resistance thermique $R_{\text{th}} = \frac{T_1 - T_2}{\phi}$

qui ici vaut $R_{\text{th}} = \frac{L}{\lambda S}$

On remarque donc une analogie avec l'éléctronique :

thermo	éléctro
$\vec{\jmath}_{\text{th}} = -\lambda \vec{\nabla} T$	$\vec{\jmath} = \gamma \vec{\nabla} V$
ϕ	i
$T_A - T_B$	$u_A - u_B = u_{AB}$

Ainsi la résitance thermique est analoge à la résistance $R = \frac{L}{\gamma S}$

IX. Chimie

1. Acide/Bases

Définitions

Un acest une espèce chimique capable de céder un proton H^+ : AH

Une base est une espèce chimique capable de capter un proton H^+ : A^-recte acide/base AH/A^- est un couple d'espèces chimiques qui peut se transformer l'une en l'autre par échange d'un protonrect amphotère : une espèce chimique qui peut se comporter comme un acide ou une base (Ex : H_2O)

Cas de l'eau

1. Autoprolyse de l'eau :

$$2H_2O = H_3O^+ + HO^-$$

2. Produit ionique de l'eau :

$$K_e = [H_3O^+][HO^-] = 10^{-14} \text{ a } 25°\text{C}$$

pH

$$pH = -\log[H_3O^+]$$

- On définie aussi $pOH = -\log([HO^-])$
- Relation entre pH et pOH : $pH + pOH = pK_e = 14 \text{ a } 25°\text{C}$

Constante d'acidité

Pour les acides :

$$K_a = [A^-]\frac{[H_3O^+]}{[AH]}$$

et

$$pK_a = -\log K_a$$

Pour les bases :

$$K_b = [AH]\frac{[HO^-]}{[A^-]}$$

et

$$pK_b = -\log K_b$$

- Relation entre K_a et K_b : $K_a K_b = K_e = 10^{-14}$

Relation pK_a/pH

$$pK_a = pH + \log\frac{[A^-]}{[AH]}$$

X. Cinétique

1. Moment cinétique du point

- par rapport a un point :

$$\overrightarrow{L_A(M/R)} = \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{p(M/R)} = \overrightarrow{AM} \wedge m\overrightarrow{v(M/R)}$$

- par rapport a un axe :

$$\overrightarrow{L_\Delta(M/R)} = \overrightarrow{L_A(M/R)} \cdot \overrightarrow{u_\Delta}$$

2. Moment cinétique d'une force :

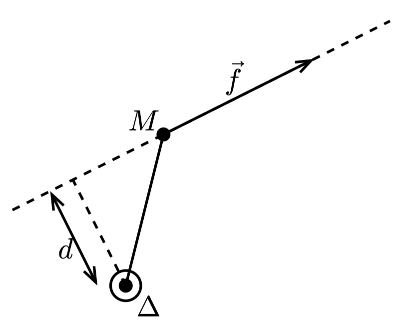
- par rapport a un point :

$$\overrightarrow{\mathscr{M}_A}\left(\vec{f}\right) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}$$

- par rapport a un axe :

$$\mathscr{M}_\Delta\left(\vec{f}\right) = \overrightarrow{\mathscr{M}_A}\left(\vec{f}\right) \cdot \vec{u}_\Delta$$

3. Bras de levier :



$$\left|\mathscr{M}_\Delta\left(\vec{f}\right)\right| = d \times \left\|\vec{f}\right\|$$

Le signe se détermine grâce à la règle de la main droite (dans le même sens : positif, négatif sinon)

4. Théorème du moment cinétique

- par rapport à un point :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O(M/R)}}{\mathrm{d}t}\right)_{/R} = \sum_i \overrightarrow{\mathscr{M}_O}\left(\vec{f}_i\right)$$

- par rapport à un axe :

$$\left(\frac{\mathrm{d}L_\Delta(M/R)}{\mathrm{d}t}\right)_{/R} = \sum_i \mathscr{M}_\Delta\left(\vec{f}_i\right)$$

5. Moment d'inertie

$$J_\Delta = \sum_i J_\Delta(M_i) = \sum_i (m_i r_i^2)$$

Solide	J_Δ
cylindre vide de rayon R	mR^2
cylindre plein de rayon R	$\frac{1}{2}mR^2$
sphère de rayon R	$\frac{2}{3}mR^2$
boulle de rayon R	$\frac{2}{5}mR^2$
barre (axe au centre) de longueur L	$\frac{1}{12}mL^2$
barre (axe à une extrémité) de longueur L	$\frac{1}{3}mL^2$
anneau de rayon R	mR^2
disque de rayon R	$\frac{1}{2}mR^2$

6. Moment cinétique d'un solide

$$L_\Delta(S/R) = \sum L_\Delta(M_i/R) = J_\Delta(S) \times \omega$$

avec :

- $S =$ Le solide

- $M_i \in S$, la masse des point qui constitue le solide
- $\Delta = (O; \vec{u}_\Delta)$, l'axe de rotation
- $J_\Delta =$ dans le cas où l'axe de rotation est fixe, le moment d'inertie du solide par rapport a l'axe Δ

7. Moment du poids sur un solide

$$\overrightarrow{M}_O\left(\vec{P}\right) = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g}$$

avec :

- $OG =$ la distance du point O au barycentre G
- $m =$ la masse du solide
- $\vec{g} =$ l'accélération de la gravitation

8. couple

Un couple est l'ensemble des actions mécaniques de résultante nul et de moment non nul

9. Théorème du moment cinétique pour un solide

$$\frac{\mathrm{d}L_\Delta(S)}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{M}_\Delta^{\text{ext}} \Leftrightarrow J_\Delta \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{M}_\Delta^{\text{ext}}$$

XI. Éléctromagnétisme

1. Induction magnétique

Phénomène d'apparition d'un courant dans un circuit fermé à l'approche d'un champ magnétique en mouvement

Loi de modératino de Lenz

Les effets produit par un phénomène d'induction s'opposent toujours aux causes qui leur ont donné naissance

pour faire plus simple : à l'approche d'un champ magnétique la bobine va en créé un de même norme mais de sens opposé pour pour annulé le champ initial

Flux d'un champ magnétique

Dans le cas où une spire de vecteur de surface $\vec{S}$ est traversé par un champ magnétique $\vec{B}$, alors

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$$

De plus si le champ traverse N spire identique : $\Phi = N\vec{B} \cdot \vec{S}$

- Dans le cas générale le flux ce calcule avec une double intégrale :

$$\Phi = \iint_{M \in S} \vec{B}(M)\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

On parle aussi de flux propre Φ_P, c'est le flux induit par le champs magnétique luis même induit par l'intensité du courant dans le circuit

2. Loi de Faraday (1831)

$$e_{\text{ind}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

avec :

- $e_{\text{ind}} =$ la fem induite
- $\Phi =$ le flux formé par le champ magnétique $\vec{B}$

Dans un circuit on représenteras la fem par un généateur, dont la flèche est dans le même sens que la flèche du cournat induit d'intensité i qui oriente le circuit

3. Inductence propre

On appelle inductence propre le coefficient $L \geq 0$ entre le flux propre et l'intensité

$$\Phi_P = Li$$

4. fem auto-induite

tout circuit parcouru par un courant d'intensité i dépendant du temps, s'auto-gène avec un champ magnétique auto-induit

Dans ce cas :

$$e_P = -\frac{\mathrm{d}\Phi_P}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

Note : On retrouve ici le phénomène de bobine dans un circuit

5. Inductence mutuelle

Dans le cas où deux circuit $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont proche, l'un va géner l'autre avec sont champ magnétique auto-induit,

dans ce cas on a :

$$\Phi_{k \to k'}(t) = M \times i_k(t)$$

avec :

- $\Phi_{k \to k'} =$ le flux généré par le circuit k sur k'
- $i_k(t) =$ l'intensité du courant dans le circuit k
- $M =$ inductence mutuelle entre les deux circuit

Cas de deux Solénoïde concentrique

$$M = \frac{N_1 N_2}{l}\mu_0 S$$

avec :

- $M =$ l'inductence mutuelle
- $N_i =$ le nombre de spire de la bobine i
- $l =$ la longueur des bobines
- $S =$ la section des bobines
- $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$

6. Théorème de Gauss

Énoncer

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

avec :

- $\vec{E} =$ le champ éléctrique
- $Q_{\text{int}} =$ la charge intérieur à la surface S
- $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ la permittivité du vide

Exemple : fil infini de rayon R
On sait que $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$ (Voir Invariance et Symétrie)

On a sur une longeur H du fil :

$$\oiint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 2\pi r H E(r)$$

Or

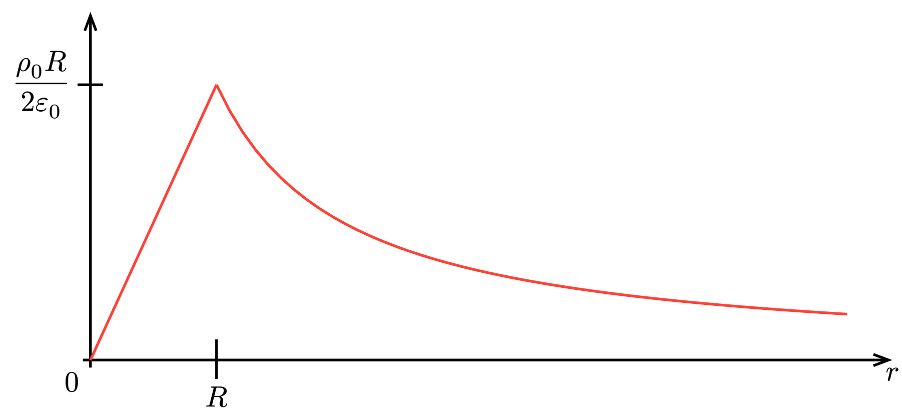
$$\text{pour} \quad R > r : Q_{\text{int}} = \rho_0 \pi R^2 H$$

$$\text{pour} \quad R < r : Q_{\text{int}} = \rho_0 \pi r^2 H$$

Donc par théorème de gauss :

$$\text{pour} \quad R > r : E(r) = \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0 r}$$

$$\text{pour} \quad R < r : E(r) = \frac{\rho}{2}\varepsilon_0 r$$



7. Théorème d'Ampère :

Énoncer

$$\oint_{\mathscr{C}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

avec :

- $\vec{B} =$ le champ magnétique
- $I_{\text{enlacé}} =$ le courant enlacé par la courbe $\mathscr{C}$

Exemple : fil infini de rayon R
On sait par symétrie et invariance que $\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta$

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 2\pi r B(r)$$

Or

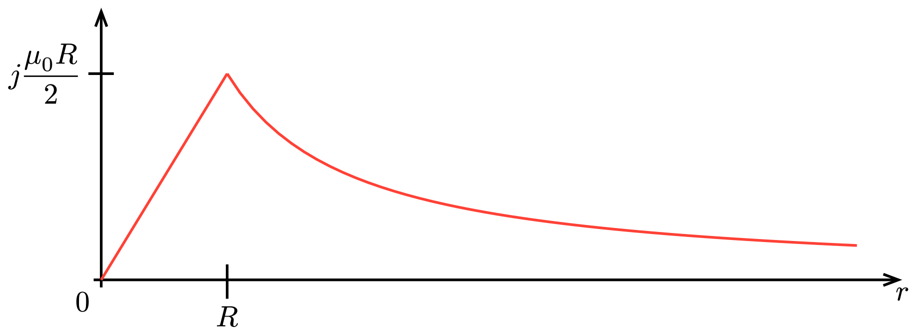
pour $R > r : I_{\text{enlacé}} = j\pi R^2$

pour $R < r : I_{\text{enlacé}} = j\pi r^2$

Donc par théorème de gauss :

pour $R > r : B(r) = j\dfrac{\mu_0 R^2}{2r}$

pour $R < r : B(r) = j\dfrac{\mu_0}{2} r$



8. Équation de Maxwell

$$\text{Gauss } \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{Flux } \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\text{Faraday } \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{Ampère } \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{\jmath} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

avec :

- $\vec{E} =$ le champ éléctrique
- $\vec{B} =$ le champ magnétique
- $\rho =$ la densité de charge
- $\vec{\jmath} =$ la densité de courant
- $c =$ la célérité de la lumière dans le vide
- $\varepsilon_0 =$ la permittivité du vide
- $\mu_0 =$ la perméabilité du vide

N.B. $\varepsilon_0 \times \mu_0 \times c^2 = 1$

9. Analogie avec le champs Gravitationnelle

Le Théorème de Gauss et la lois de Maxwell-Gauss peuvent se réécrire pour le champs Gravitationnelle en réalisant les équivalences suivantes :

Électrosatique	$\longleftrightarrow$	Gravitation
$\vec{F} = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$	$\longleftrightarrow$	$\vec{F} = -G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_r$
q	$\longleftrightarrow$	m
$\vec{F} = q\vec{E}$	$\longleftrightarrow$	$\vec{F} = q\vec{\mathscr{G}}$
$\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$	$\longleftrightarrow$	$-G$

Ainsi le Théorème de Gauss et la loi de Maxwell-Gauss deviennes :

- Théorème de Gauss : $\oiint_S \mathscr{G} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 4\pi G M_{\text{int}}$

- Maxwell-Gauss : $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathscr{G}} = -4\pi G\rho$

10. Équation de propagation dans le vide

Dans le vide on a $\vec{\jmath} = \rho = 0$, d'où

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \ = 0$$

Après le calcule de $\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}\right)$ de deux manière différente, on trouve :

$$\vec{\Delta}\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0\left(\Box\vec{E} = 0\right)$$

avec :

- $\vec{\Delta} =$ l'opérateur laplacien
- $c =$ la célérité de la lumière dans le vide
- $\vec{E} =$ le champ éléctrique
- $\Box =$ l'opérateur d'alembertien ($\Box = \vec{\Delta} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$)

on trouve de manière analoge $\Box\vec{B} = \vec{\Delta}\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$

11. A.R.Q.S.

Approximation des régime quasi-stationaire

i.e. que l'information du système met un temps très petit devant le temps caractérise du système,

ou que la longeur d'onde de l'onde éléctromagnétique est très grande devant les longeurs caractéristiques du système

Ainsi $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \approx 0$, donc $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{\jmath}$

12. Dipôle Éléctrosatique

Définition

On appelle dipôle éléctrosatique un système constitué d'une charge $+q$ en P et $-q$ en N, dont on observe des effets à des distances grandes devantNP

On caractérise un tel dipôle par :

$$\vec{p} = q\overrightarrow{NP}$$

Potentiel éléctrosatique

$$V(M) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 NM} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 PM} = \frac{p\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

avec :

- $\theta =$ l'angle formé par le vecteur $\vec{p}$ et le vecteur $\overrightarrow{OM}$, avec O le barycentre éléctrosatique du dipôle

- $r =$ la distance entre le point M et le barycentre éléctrosatique

Action d'un champs exterieur
Dans le cas où $\vec{E}_{\text{ext}} = \vec{E}_0$ uniforme, alors

- $E_p = -\vec{p} \cdot \overrightarrow{E_0}$
- la résultante des forces $\mathscr{R} = 0$
- Le moment $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \overrightarrow{E_0}$

Dans le cas où $\vec{E}_{\text{ext}}$ est quasi-uniforme :

- $E_p = -\vec{p} \cdot \overrightarrow{E_0}$
- la résultante des forces $\mathscr{R} \neq 0$
- Le moment $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \overrightarrow{E_0}$

13. Dipôle magnétique

Définition
De manière analoge au dipôle éléctrique on définie un dipôle magnétique par

$$\overrightarrow{M} = i\vec{S}$$

avec :

- $\vec{S} =$ le vecteur surface
- $i =$ l'intensité du courant

Aciton d'un champ exterieur
On a :

- Le moment $\vec{\Gamma} = \overrightarrow{M} \wedge \vec{B}_{\text{ext}}$
- $E_p = -\overrightarrow{M} \cdot \vec{B}_{\text{ext}}$

14. Densité volumique de courant

$$\vec{\jmath} = \rho_m \vec{v}$$

avec :

- $\rho_m =$ la densité volumique de charge moblie
- $\vec{v} =$ la vitesse du courant

Remarque : le vecteur densité de courant est définie tel que $\mathrm{d}q = \vec{\jmath} \cdot \mathrm{d}\vec{S}\,\mathrm{d}t$

15. Équation de conservation de la charge

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\jmath} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

avec :

- $\rho =$ la densité de charge
- $\vec{\jmath} =$ la densité de courant

Remarque : en régime permanent $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, donc $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$,et on en déduit la loi des nœuds (voir l'intuition derière la divergence)

16. Loi local d'Ohm

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

avec :

- $\gamma =$ la conductivité éléctrique
- $\vec{j} =$ la densité de courant
- $\vec{E} =$ le champ éléctrique

17. Aspect énergétique :

Équation de Poyting :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

avec :

- $u =$ densité volumique énérgétique = $\varepsilon_0 \frac{\vec{E}}{2} + \frac{\vec{B}}{2} \mu_0$
- $\vec{\Pi} =$ le vecteur de Poyting = $\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$
- $\vec{j} \cdot \vec{E} =$ énérgie cédée à la matière

18. Polarisation

Définition

La polarisation d'une onde c'est la courbe décrite par $\vec{E}$ quand vois arriver l'onde sur nous

Polarisateur

Un polarisateur filtre les ondes polarisées pour sortir que des ondes polarisées dans le sens du polarisateur

Théorème de Malus

A ne pas confondre avec l'autre Théorème de Malus en optique géométrique

Après le passage par un polarisateur suivants $\vec{u}_p$, l'intensité I_0 devient $I_0 \cos(\theta)$ avec θ l'angle entre la polarisation précédente et $\vec{u}_p$

19. OPPM

Définition

Une onde plane progressive monochorme est une onde de la forme $s(\vec{r}, t) = S_0 e^{i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)}$

Vitesse de phase et de groupe

1. Vitesse de phase

On définis la vitesse de phase par $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$,

cette vitesse représente la vitesse de la phase a l'origine de l'onde

ou encore la vitesse des ocsilation de l'onde

Attention : cette vitesse n'a pas de sens physique car peut aller plus vite que la vitesse de la lumière dans le vide

1. Vitesse de Groupe

On définie la vitesse de groupe par $v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$

Cette vitesse représente la vitesse réelle de l'onde,

20. Porpagation dans un plasma dilué

Dans un plasma dilué on a $\rho = 0$, ainsi

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{\jmath} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \qquad = 0$$

Ainsi on trouve :

$$\square \vec{E} = \vec{\Delta}\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\mathrm{d}\vec{\jmath}}{\mathrm{d}t}$$

Relation de strucutre

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

Relation de dispersion

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

avec :

- $\omega_p =$ la fréquence de plasma

Cas $\omega > \omega_p$

On a $k = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p}{\omega}}\, \lim(\longrightarrow, +\infty)\frac{\omega}{c}$

Donc a haute fréquence le plasma se comporte comme le vide

Cas $\omega < \omega_p$

On a $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} < 0$, donc soit $k = \pm ik$' avec $k' = \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}}$

Si $k = ik$' est impossible car l'onde divergerais

Si $k = -ik$', on obtient une onde évanéssante, $\vec{E}' = \vec{E}_0' e^{-k' z} e^{i\omega t}$

21. Paquet d'onde

Définition

On définis un paquet d'onde par la transformer de fourier, i.e.

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \int_0^{+} \infty g(\omega) e^{i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)}\, \mathrm{d}\omega \vec{u}_r$$

caractérise

Un paquet d'onde respecte les caractérises suivantes :

- $\omega_0 = 2\frac{\pi}{T_0}$
- $\delta\omega \sim \frac{1}{\delta t}$

- $k(\omega) \approx k(\omega_0) + (\omega - \omega_0)\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega} = k_0 + \frac{\omega - \omega_0}{v_g}$

interpretation

Un paquet d'onde peut être vue comme une somme infinie d'OPPM légèrement différentes

en faites la transformer de fourier peut est une base continue de fonction, avec ici les OPPM comme vecteurs de base

dans le cas de l'éléctromagnétisme

On a par la relation de dispersion $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} \Longleftrightarrow \frac{\omega}{k}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = c^2 = v_\pi v_g$
Or $v_\pi = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$, donc $v_g = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$

22. matériau conducteur

Équation de propagation

Dans un matériau conducteur on peut considéré $\rho = 0$, donc par les équations de Maxwell :

$$\frac{\partial \vec{\jmath}}{\partial t}\gamma\mu_0 = \vec{\Delta}\vec{\jmath} \text{ équation de diffusion}$$

résolution

On cherche une solution de la forme $\vec{\jmath} = \underline{\vec{\jmath}_0} e^{-i\omega t} e^{-kx}$ et $\underline{k}^2 = -\gamma\mu_0 i\omega$

on trouve alors $\underline{k} = \pm\frac{1-i}{\delta}$, avec $\delta = \sqrt{\frac{2}{\gamma\mu_0\omega}}$ l'épaisseur de peau

et ainsi

$$\vec{\jmath} = \underline{\vec{\jmath}_0} e^{i\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)} e^{-\frac{x}{\delta}} + \underline{\vec{\jmath}_1} e^{i\left(\omega t + \frac{x}{\delta}\right)} e^{\frac{x}{\delta}}$$

XII. Mécaniques quantique

1. Corps Noir

Un corps noir est une entité qui absorbe toute les radiation et rayon lumineux (d'où le nom) et retransmet la totalité sous forme de chaleur

- Loi de Plank :

$$L^{\circ}_{\Omega,\nu} = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{\frac{hc}{kT}} - 1}$$

avec :

- $L^{\circ}_{\Omega,\nu} =$ La luminance énergétique spectrale par unité de fréquence
- $\nu =$ la fréquence du rayonement du corps noir
- $h =$ la constant de plank
- $c =$ la célérité de la lumière dans le vide
- $T =$ la température du corps noir
- $k =$ la constante de Boltzmann

2. Relation de de Broglie

pour toute particule on peut luis associer une onde de matière, ainsi

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

avec :

- $\lambda =$ la longeur d'onde de la particule
- $h =$ la constante de plank
- $p = mv =$ la quantité de mouvement de la particule avec m sa masse et v sa vitesse

3. Relation de Plank-Einstein

Le rayonement éléctromagnétique monochormatique est constitué de photon qui :

- sont de masse nulle
- se déplace à la vitesse de la lumière dans le vide
- d'énergie : $E = h\nu$, avec h la constante de plank et ν la fréquence du rayonement
- de quantité de mouvement $p = \frac{h}{\lambda}$

4. Effet photoélctirque

C'est un phénomène dans le quel un matériaux émet un des éléctrons (sous la forme d'un courant généralement) sous l'effet d'un rayonement à haute fréquence

$$E_{c,\text{ max}} = h\nu - W_0$$

avec :

- $E_{c,\text{ max}} =$ l'énérgie cinétique maximale de l'éléctrons
- $\nu =$ la fréquence de la lumière
- $h =$ la constante de plank
- $W_0 =$ un travaille minimum a fournir pour arraché l'éléctrons, qui est propre au matériau

XIII. Truc et astuce

1. Constantes :

Nom	symbole	Valeur	Origine
Éléctromagnétisme			
vitesse de la lumière dans le vide	c	$3 \cdot 10^8 ms^{-1}$	Par définition
Charge élémentaire	e	$1,6 \cdot 10^{-19} C$	Par définition
Perméabilité du vide	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} TmA^{-1}$	$\frac{2\alpha h}{e^2 c}$
Permittivité diélectrique du vide	ε_0	$8,85 \cdot 10^{-12} Fm^{-1}$	$\frac{1}{\mu_0 c^2}$
Constante de Coulomb	k	$8,99 \cdot 10^9 Nm^2C^{-2}$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$
Gravitation			
Constante gravitationnelle	G	$6,67 \cdot 10^{-11} m^3\text{kg}^{-1}s^{-2}$	Mesure
Accélération de pesanteur	g	$9,81 ms^{-2}$	Convention
Rayon de la terre	R_T	$6,4 \cdot 10^6 m$	Mesure
Masse de la terre	M_T	$5,97 \cdot 10^{24}$ kg	Mesure
Rayon du Soleil	$R_\odot$	$6,96 \cdot 10^8 m$	Mesure

Nom	symbole	Valeur	Origine
Masse du Soleil	$M_{\odot}$	$1.99 \cdot 10^{30}$ kg	Mesure
Unité astronomique	$U.A.$	$1,5 \cdot 10^{11} m$	Distance terre soleil
Année lumière	al	$9,46 \cdot 10^{15} m$	$c \times 1$ ans
Physico-Chimique			
Pression de l'atmosphère	atm	$1,01325 \cdot 10^{5}$ Pa	Convention
Nombre d'Avogadro	N_A	$6,02 \cdot 10^{23} \text{mol}^{-1}$	Définition de la mole
Constante des gaz parfait	R	$8,31 J \text{mol}^{-1} \text{K}^{-1}$	$k_B N_A$
Constante de Boltzmann	k ou k_B	$1,38 \cdot 10^{-23} J \text{K}^{-1}$	Par définition du Kelvin
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	$5,67 \cdot 10^{-8} W m^{-2} K^{-4}$	$\frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2}$
Atomique et nucléaire			
Masse du Proton	m_p	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg	Mesure
Masse du Neutron	m_n	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg	Mesure
Masse de l'Electron	m_e	$9,11 \cdot 10^{-31}$ kg	Mesure et $\approx \frac{m_p}{2000}$
Unité de Planck			
Constante de Planck	h	$6,63 \cdot 10^{-34} J s$	Par définition
Constante de Planck réduite	$\hbar$	$1,1 \cdot 10^{-34} J s$	$\frac{h}{2\pi}$
Longeur de Planck	l_p	$1,6 \cdot 10^{-35} m$	$\sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$
Masse de Planck	m_p	$2,2 \cdot 10^{-8}$ kg	$\sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$
Temps de Planck	t_p	$5,4 \cdot 10^{-44} s$	$\sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}}$

2. Vecteur surface

On définie de Vecteur surface $\vec{S}$ par :

- direction : orthogonal à la surface
- sens : donnée par la règle de la main droite la plus par du temps (mais reste très intuitif dans le sens choisir)
- norme : la surface S

3. Symétrie

Plan de Symétrie

Soit un plan $\mathscr{P}$ et $M \in \mathscr{P}$, alors

- $\vec{E}(M) \in \mathscr{P}$
- soit $M' = \text{sym}_{\mathscr{P}}(M)$, alors $\vec{E}(M') = \text{sym}_{\mathscr{P}}\left(\vec{E}(M)\right)$

Plan de Anti-Symétrie

Soit un plan Π et $M \in \Pi$, alors

- $\vec{E}(M) \perp \Pi$
- soit $M' = \text{sym}_{\Pi}(M)$, alors $\vec{E}(M') = -\text{sym}_{\Pi}\left(\vec{E}(M)\right)$

Utilité :

Permet de retiré directement des composantes des vecteurs étudiés

Exemple

Dans un fils infini uniformément chargée, soit M un point de l'espace

alors tout les plans passant par $\left(\vec{O}_z\right)$ sont des plans de symétrie

de même pour le plan perpendiculaire à $\vec{O}_z$ passant par M Ainsi $\vec{E} = E_r\vec{u}_r + \cancel{E_\theta\vec{u}_\theta} + \cancel{E_z\vec{u}_z} = E_r\vec{u}_r$

4. Invariance

Principe de Curie :

Les symétries des causes se retrouvent dans les effets. Les effets peuvent avoir plus de symétries que les causes.

Exemple

On a déjà vue que dans le cas du fil infini uniformément chargée, on a $\vec{E}(r,\theta,z) = E_r(r,\theta,z)\vec{u}_r$

Donc Ici on a invariance par rotation autour de $\vec{O}_z$ et par translation suivant u_z

Ainsi $\vec{E}(r,\cancel{\theta},\cancel{z}) = \vec{E}(r)$

5. Théorème de Stokes

$$\oint_{\mathscr{C}} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \iint_{\mathscr{S}} \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

avec :

- $\vec{A}$ = un champ vectoriel

6. Théorème de Green-Ostrograski

$$\oiint_S \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E}\,\mathrm{d}\tau$$

avec :

- $\vec{A}$ = un champ vectoriel

7. Intuition sur la divergence et le rotationnel :

La divergence noté div ou $\vec{\nabla}\,\cdot$ représente intuitivement « la quantité » de vecteur qui sort ou rentre d'un espace donné

Tandis que le rotationnel, noté rot ou $\vec{\nabla}\,\wedge$ représente intuitivement « la quantité » de vecteurs qui tournent autour d'un point donné.

Exemple :

Sur un aiment la divergence du champs magnétique est nul car les vecteurs du champs « sorte » du pôle nord et « rerentre » au pôle sud.
Mais dans le cas de la gravitation le champs gravitationnelle semble comme sortir du centre de la planète, et donc la divergence est positif et serait négatif si celle-ci semblais rentrer dans la planète

Si un mobile bouge en translation le rotationnel est nul car aucun des vecteurs vitesses attachés en chaque points du mobile ne « tourne ».
Alors que si ce même mobile est en rotation par rapport à sont centre, alors le rotationnel serait tantôt positif ou négatif (régle de la main droite) car chaqu'un des vecteurs vitesses semble tourner autour de l'axe de rotation

8. Nabla

Le vecteur nabla est un opérateur différentiel qui permet de définir des opérations sur les champs scalaires et vectoriels, noté $\vec{\nabla}$
Et est définie dans $\mathbb{R}^3$ par : $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$, avec $\left\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right\}$ une base de $\mathbb{R}^3$
Un des avantage de cette notation, et que dans le cas des coordonnées cartésien, calculer un opérateur vectoriel est équivalent a calculer le produit, produit scalaires, produit vectoriel entre la grandeur et le vecteur nabla

9. Formulaire d'analyse vectorielle

Définition des opérateurs

Opérateur	Cartésien	Cylindrique	Sphérique
$\vec{\nabla} f$	$\frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_x$	$\frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$	$\frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$
$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(A_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$
$\vec{\nabla} \wedge \vec{A}$	$\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{u}_x$ $+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{u}_y$ $+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{u}_z$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{u}_r$ $+\left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta$ $+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{u}_z$	$\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial\left(A_\varphi \sin\theta\right)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right)\vec{u}_r$ $+\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial\left(rA_\varphi\right)}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta$ $+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{u}_\varphi$

Opérateur	Cartésien	Cylindrique	Sphérique
Δf	$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial f}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial f}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2 \sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\right)$ $+\dfrac{1}{r^2 \sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$
$\vec{\Delta}\vec{A}$	$\Delta A_x \vec{u}_x + \Delta A_y \vec{u}_y + \Delta A_z \vec{u}_z$	$\left(\Delta A_r - \dfrac{A_r}{r^2} - \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial A_\theta}{\partial \theta}\right)\vec{u}_r$ $+\left(\Delta A_\theta - \dfrac{A_\theta}{r^2} - \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{u}_\theta$ $+(\Delta A_z)\vec{u}_z$	Voir ci-dessous

Le laplacien en coordonnées sphériques est donné par :

$$\vec{\Delta}\vec{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_r - 2\dfrac{A_r}{r^2} - 2\dfrac{A_\theta}{r^2}\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} - \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \dfrac{2}{r^2 \sin^2\theta}\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \\ \Delta A_\theta - \dfrac{A_\theta}{r^2 \sin^2\theta} + \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial A_r}{\partial \theta} - \dfrac{2\cos\theta}{r^2 \sin^2\theta}\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \\ \Delta A_\varphi - \dfrac{A_\varphi}{r^2 \sin^2\theta} + \dfrac{2}{r^2 \sin\theta}\dfrac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \dfrac{2\cos\theta}{r^2 \sin^2\theta}\dfrac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

Composition des opérateurs

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}\right) = 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) - \vec{\Delta}\vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} f\right) = \Delta f$$

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} f\right) = 0$$