Physique: DM17

Problème 1: noyaux et images en dimension finie

Partie I. Généralités

N=° 1.

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathcal{K}\mathrm{er}(f^k)$, alors

$$f^k(f(x)) = f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0) = 0$$

Donc $f(x) \in \mathscr{K}\mathrm{er}(f^k)$, et donc $\mathscr{K}\mathrm{er}(f^k)$ est stable par f

Soit
$$x \in \mathcal{F}\mathrm{m}(f^k)$$
, alors

 $\exists y \in E, f^k(y) = x \text{ donc}$

$$f(x)=f\big(f^k(y)\big)=f^{k+1}(y)=f^k(f(y))\in \mathcal{F}\mathrm{m}(f^k)$$

Donc $f(x) \in \mathcal{J}\mathrm{m}(f^k)$, et donc $\mathcal{J}\mathrm{m}(f^k)$ est stable par f

N=° 2.

Montrons par récurrence sur $k\in\mathbb{N}$ que $\mathscr{I}\mathrm{m}(f^{k+1})\subset\mathscr{I}\mathrm{m}(f^k)$ et que $\mathscr{K}\mathrm{er}(f^k)\subset\mathscr{K}\mathrm{er}(f^{k+1})$

• Initialisation:

$$\begin{aligned} \operatorname{Pour} \mathscr{K} & \text{er} \\ \operatorname{Soit} x \in \mathscr{K} & \text{er}(f^0) = \mathscr{K} & \text{er}(\operatorname{Id}_E) \\ \operatorname{alors} x & = 0 & \text{car} & \operatorname{Id}_E & \text{est bijective} \\ \operatorname{Or} x & = 0 \in \mathscr{K} & \text{er} & f \\ \operatorname{Donc} \mathscr{K} & \text{er}(f^0) \subset \mathscr{K} & \text{er} & f \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \operatorname{Pour} \mathscr{I}_{\mathrm{m}} \\ \operatorname{Soit} x \in \mathscr{I} \mathrm{m} f \\ \operatorname{alors} x \in E = \mathscr{I} \mathrm{m} (\operatorname{Id}_E) \operatorname{car} f \\ \operatorname{endomorphisme} \\ \operatorname{Donc} \mathscr{I} \mathrm{m} f \subset \mathscr{I} \mathrm{m} (f^0) \end{array}$$

• Hérédité:

Soit
$$k\in\mathbb{N}$$
 tel que $\mathscr{F}\mathrm{m}(f^{k+1})\subset\mathscr{F}\mathrm{m}(f^k)$ et $\mathscr{K}\mathrm{er}(f^k)\subset\mathscr{K}\mathrm{er}(f^{k+1})$

Pour
$$\mathscr{K}$$
er $x\in \mathscr{K}\mathrm{er}(f^k)$ alors

Pour
$$\mathcal{F}_{\mathrm{m}}$$
 Soit $x\in\mathcal{F}\mathrm{m}(f^{k+1})$ alors $\exists y\in E, f^{k+1}(y)=x$

$$f^{k+1}(x) = f(f^{k+1}(x)) = f(0) = 0$$

Donc
$$x = f^{k+1}(y) = f^k(f(y)) \in \mathcal{F}\mathbf{m}(f^k)$$

Donc $x \in \mathcal{K}\mathrm{er}(f^{k+1})$ Donc $\mathcal{K}\mathrm{er}(f^k) \subset \mathcal{K}\mathrm{er}(f^{k+1})$

$$\operatorname{Donc} x \in \operatorname{\mathcal{F}m}(f^k)$$

$$\operatorname{Donc} \operatorname{\mathcal{F}m}(f^{k+1}) \subset \operatorname{\mathcal{F}m}(f^k)$$

Donc par le principe de récurrence, on a

$$\mathscr{I}\mathrm{m}(f^{k+1})\subset \mathscr{I}\mathrm{m}(f^k)$$
 et $\mathscr{K}\mathrm{er}(f^k)\subset \mathscr{K}\mathrm{er}(f^{k+1})$ pour tout $k\in\mathbb{N}$

N=° 3.