

**Def:** Pour un corps  $\mathbb{K}$  commutatif où l'exponentiation est définis et pour  $\mathbb{L}$  un sous corps de  $\mathbb{K}$ , on définit pour  $n \in \mathbb{N}$ :

$$(\mathbb{K}, \mathbb{L})_n[X] = \left\{ \sum_{k=0}^n \alpha_k X^{\beta_k}, \forall i > n, \alpha_i = 0, \forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j \Rightarrow \beta_i \neq \beta_j, (\alpha_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, (\beta_n) \in \mathbb{L}^{\mathbb{N}} \right\}$$

**Def:** Pour  $P, Q \in (\mathbb{K}, \mathbb{L})_n[X]$ , avec  $P = \sum_{i=0}^n \alpha_i X^{\beta_i}$  et  $Q = \sum_{i=0}^n a_i X^{b_i}$

- Si  $\mathbb{L}$  possède un ordre totale, alors on appelle  $\deg P = \max_{k \in \mathbb{N}} \{\beta_k, \alpha_k \neq 0\}$
- on appelle magnitude, et note  $\text{mag} P = \text{card}_{k \in \mathbb{K}} \{\alpha_k, \alpha_k \neq 0\}$
- $P = Q$  ssi  $\exists \varphi \in \mathfrak{S}, \forall n \in \mathbb{N}, (\alpha_n, \beta_n) = (a_{\varphi(n)}, b_{\varphi(n)})$
- $\forall \lambda \in \mathbb{L}, \lambda P = \sum_n \lambda \alpha_n X^{\beta_n}$
- $((\mathbb{K}, \mathbb{L}), +, *)$  est un anneaux sans diviseur de zéro

**Def:** On dit qu'un polynôme  $P \in (\mathbb{K}, \mathbb{L})_n[X]$ , de magnitude  $m$ , est condensé ssi  $\forall i \in \llbracket 0; m \rrbracket, \alpha_i \neq 0$

**Théorème 1:** Pour tout polynôme  $P = \sum_{i=0}^n \alpha_i X^{\beta_i}$  de magnitude  $m$ , il existe un polynôme condensé  $\tilde{P}$ , tel que  $P = \tilde{P}$

Preuve:

Soit  $\varphi \in \mathfrak{S}$  tq  $\forall i \in \llbracket 0; m \rrbracket, \alpha_{\varphi(i)} \neq 0$ ,

Posons  $\tilde{P} = \sum_{i=0}^n \alpha_{\varphi(i)} X^{\beta_{\varphi(i)}}$

Alors nous avons bien  $\forall n \in \mathbb{N}, (\alpha_n, \beta_n) = (\alpha_{\varphi^{-1}(\varphi(n))}, \beta_{\varphi^{-1}(\varphi(n))})$  avec  $\varphi^{-1}$  la permutation inverse de  $\varphi$ , donc  $P = \tilde{P}$

De plus  $\tilde{P}$  est bien condensé par définition de  $\varphi$  **Q.E.D.**

**Def:** On définit la dérivé d'un polynôme  $P \in (\mathbb{K}, \mathbb{L})_n[X]$  par:

$$P' = \sum_{i=0}^n \alpha_i \beta_i X^{\beta_i-1}$$

**Prop:** Soit  $P, Q \in (\mathbb{K}, \mathbb{L})_n[X]$ , alors pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ :

- $\deg P' = \deg P - 1$
- $\deg PQ = \deg P + \deg Q$
- $\deg P \circ Q = \deg P \times \deg Q$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \deg \lambda P = \deg P$
- $\deg(P + Q) = \max(\deg P, \deg Q)$
- $\text{mag} P' = \text{mag} P - \text{card}\{\beta_k = 0\} + \text{card}(\{\alpha_k = 0\} \cap \{\beta_k = 0\})$ , de plus si  $P$  est condensé:  
 $\text{mag} P' = \text{mag} P - \text{card}_{i \in \llbracket 0, \text{mag} P \rrbracket} \{\beta_i = 0\}$
- $\text{mag} P + Q = \text{mag} P + \text{mag} Q - \text{card}\{\beta_i = b_i, i \in \llbracket 0; n \rrbracket\}$
- $\text{mag} PQ = \min(\text{mag} P, \text{mag} Q)$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \text{mag} \lambda P = \text{mag} P$
- $\text{mag} P \circ Q = ?$