DEVOIR MAISON 14

▸ Problème : polynômes de Tchebychev et théorème de Block-Thielmann

Partie I. Polynômes de Tchebychev (de première espèce)
On définit une famille $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathbf{R}[X]$ en posant : $T_0 = 1, T_1 = X$, et pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

1. Calculer T_2, T_3 et T_4.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, T_n est de degré n et déterminer son coefficient dominant.
3. Prouver que pour tout $\theta \in \mathbf{R}$ et tout $n \in \mathbf{N}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
   Déduire de ce qui précède une expression de $\cos(4\theta)$ en fonction de $\cos\theta$.
4. Prouver que pour tous $m, n \in \mathbf{N}^*$, $T_n \circ T_m = T_{mn}$.

Partie II. Le théorème de Block et Thielmann
On appelle **suite commutante** toute suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de polynômes de $\mathbf{R}[X]$ tels que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \deg P_n = n \text{ et } \forall (m,n) \in \mathbf{N}^*,\ P_m \circ P_n = P_n \circ P_m.$$

5. Montrer que les suites $(X^n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(T_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sont commutantes.
6. Soit $p \in \mathbf{R}$ fixé. On note $\mathscr{C}_p$ l'ensemble des polynômes non constants de $\mathbf{R}[X]$ tels que

$$P \circ (X^2 + p) = (X^2 + p) \circ P.$$

   a. Montrer que tout élément de $\mathscr{C}_p$ est unitaire.
   b. On souhaite prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathscr{C}_p$ contient au plus un polynôme de degré n.
      Soient donc P_1, P_2 deux polynômes de degré n de $\mathscr{C}_p$.
      En considérant le polynôme $P_1 \circ (X^2 + p) - P_2 \circ (X^2 + p)$, prouver que $P_1 = P_2$.
   c. Montrer que si $\mathscr{C}_p$ contient un polynôme de degré 3, alors $p = 0$ ou $p = -2$.
   d. Prouver que $\mathscr{C}_0 = \{X^n,\ n \in \mathbf{N}^*\}$.
7. a. Montrer qu'un polynôme $U \in \mathbf{R}[X]$ est inversible pour $\circ$ (la composition) si et seulement si son degré vaut 1. On note alors U^{-1} son inverse.
   b. Pour $U = aX + b \in \mathbf{R}[X]$ de degré 1, déterminer U^{-1}.
8. Soit $(P_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite commutante, et soit $U \in \mathbf{R}[X]$ de degré 1. Prouver que $\left(U \circ P_n \circ U^{-1}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est encore une suite commutante.
9. Soit $P = aX^2 + bX + c$ un polynôme de degré 2, donc avec $(a,b,c) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. On pose $U = aX + \dfrac{b}{2}$.
   Prouver que $U \circ P \circ U^{-1}$ est de la forme $X^2 + p$ pour un certain $p \in \mathbf{R}$.
10. Trouver un polynôme $V \in \mathbf{R}[X]$, de degré 1, tel que $V \circ (X^2 - 2) \circ V^{-1} = T_2$.
11. Prouver enfin que les seules suites commutantes de $\mathbf{R}[X]$ sont les $(U \circ X^n \circ U^{-1})_{n\in\mathbf{N}^*}$ et les $(U \circ T_n \circ U^{-1})_{n\in\mathbf{N}^*}$ pour U polynôme de degré 1.