Gaspar Daguet

Maths : DM 14

Problème : polynômes de Tchebychev et théorème de Block-Thielman

Partie I. Polynômes de Tchebychev (de première espèce)

N=°1.

$$T_2 = 2XT_1 - T_0 = 2X \times X - 1 = 2X^2 - 1$$
$$T_3 = 2XT_2 - T_1 = 2X(2X^2 - 1) - X = 4X^3 - 3X$$
$$T_4 = 2XT_3 - T_2 = 2X(4X^3 - 3X) - 2X^2 + 1 = 8X^4 - 8X^2 + 1$$

Ainsi on trouve que: $T_2 = 2X^2 - 1, T_3 = 4X^3 - 3X$ et $T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$

N=°2.

Prouvons par une récurrence double que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \deg T_n = n$

- **Initialisation:**

Pour $n = 1$, $\deg T_1 = \deg X = 1 = n$ et $2^{1-1} = 1$ qui est bien le coefficent dominant
Pour $n = 2$, $\deg T_2 = \deg 2X^2 - 1 = 2 = n$ et $2^{2-1} = 2$ qui est bien le coefficent dominant
Donc l'Iitialisation est vérifié

- **Hérédité:**

$$\begin{aligned}\deg T_{n+2} = \deg(2XT_{n+1} - T_n) &= \max(\deg(2X) + \deg(T_{n+1}), \deg(T_n)) \\ &= \max(1 + n + 1, n) = n + 2\end{aligned}$$

Donc l'hérédité est vérifié

Donc par le principe de récurrence double et comme $\deg T_0 = \deg 1 = 0$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \deg T_n = n$

Soit $n \in \mathbb{N}$
alors on a: $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ Or on vient de montrer que le degré de T_{n+1} est plus grand que celuis de T_n
donc seul T_{n+1} contribue au coefficent dominant.
Ainsi en répétant cette opération, il vient que

$$T_{n+2} = \underbrace{2X(2X(2X(2X(\cdots(2X(X(1)))))))}_{n \text{ fois}} = 2^{n-1}X^n$$

Donc le coefficent dominant est 2^{n-1}

N=°3.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$
Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\cos((n+2)\theta) &= \cos((n+1)\theta + \theta)\\ &= \cos((n+1)\theta)\cos(\theta) - \sin((n+1)\theta)\sin(\theta)\end{aligned}$$

donc $\cos((n+1)\theta)\cos(\theta) - \cos((n+2)\theta) = \sin((n+1)\theta)\sin(\theta)$
et

$$\begin{aligned}\cos(n\theta) &= \cos((n+1)\theta - \theta)\\ &= \cos((n+1)\theta)\cos(\theta) + \sin((n+1)\theta)\sin(\theta)\end{aligned}$$

donc $\cos(n\theta) - \cos((n+1)\theta)\cos(\theta) = \sin((n+1)\theta)\sin(\theta)$

Ainsi $\cos((n+1)\theta)\cos(\theta) - \cos((n+2)\theta) = \cos(n\theta) - \cos((n+1)\theta)\cos(\theta)$
donc $\cos((n+2)\theta) = 2\cos((n+1)\theta)\cos(\theta) - \cos(n\theta)$

Prouvons par récurrence double que $\forall n \in \mathbb{N}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$

- **Initialisation:**

Pour $n = 0, T_0(\cos(\theta)) = 1 = \cos(0\theta)$
Pour $n = 1, T_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta) = \cos(\theta)(1 \times \theta)$ Donc l'Iitialisation est vérifié

- **Hérédité:**

$$\begin{aligned}T_{n+2}(\cos(\theta)) &= 2\cos(\theta)T_{n+1}(\cos(\theta)) - T_n(\cos(\theta))\\ &= 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) \quad = \cos((n+2)\theta)\end{aligned}$$

Donc l'hérédité est vérifié

Donc par le principe de récurrence double $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$

Ainsi Soit $\theta \in \mathbb{R}$

$$\cos(4\theta) = T_4(\cos(\theta)) = 8\cos^4(\theta) - 8\cos^2(\theta) + 1$$

N=°4.

On a, pour $\theta \in \mathbb{R}$

$$(T_n \circ T_m)(\cos(\theta)) = T_n(\cos(m\theta)) = \cos(nm\theta) = T_{mn}(\cos(\theta))$$

Or $\cos(\theta)$ est dans $[-1; 1]$
donc le polynôme $T_n \circ T_m - T_{mn}$ s'annule une infinité de fois sur $[-1; 1]$
donc $T_n \circ T_m - T_{mn} = 0$
Donc $T_n \circ T_m = T_{mn}$

Partie II. Le théorème de Block et Thielman

N=°5.

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$
Alors

$$X^n \circ X^m = (X^m)^n = X^{mn} = (X^n)^m = X^m \circ X^n$$

et

$$T_n \circ T_m = T_{nm} = T_{mn} = T_m \circ T_n$$

De plus

$$\deg X^n = n$$

et on a déjà montré que $\deg T_n = n$
Ainsi $(X^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont comutante

N=°6. a.

Soit $P \in \mathcal{C}_p$ et Soient $a, p \in \mathbb{R}$, le coefficent dominant de P
Alors P doit vérifier: $P \circ (X^2 + p) = (X^2 + 1) \circ P$
Or le coefficent dominant de $P \circ (X^2 + p)$ est a
et celuis de $(X^2 + 1) \circ P$ est a^2
Donc $a^2 = a \Leftrightarrow a = 1$ ou $a = 0$
Or si $a = 0$ alors a n'est pas le coefficent dominant de P,
ce qui est impossible par définition de a
Donc $a = 1$

b.

Supposons par l'absurde que $P_1 \neq P_2$
Tout d'abord on a,

$$P_1 \circ (X^2 + p) - P_2(X^2 + p) = (P_1 - P_2) \circ (X^2 + p)$$

De plus

$$\begin{aligned} P_1 \circ (X^2 + p) - P_2(X^2 + p) &= (X^2 + p) \circ P_1 - (X^2 + p) \circ P_2 \\ &= P_1^2 + p - P_2^2 - p = P_1^2 - P_2^2 \end{aligned}$$

Ainsi $(P_1 - P_2) \circ (X^2 + p) = P_1^2 - P_2^2$
Sauf que P_1 et P_2 sont tout deux unitaire par la question précédente
et de même degrés donc $\deg(P_1 - P_2) = 6 \in [\![1; n - 1]\!]$
Ainsi:

$$\deg((P_1 - P_2) \circ (X^2 + p)) = \deg(P_1^2 - P_2^2) = \deg((P_1 + P_2)(P_1 - P_2))$$

Donc:

$$26 = n + 6$$

Donc:

$$6 = n$$

Ce qui est absurde, donc $P_1 = P_2$

c.

Si $\mathcal{C}_p$ contient un polynôme de degré 3, alors soit $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ un telle polynôme. Alors

$$\begin{aligned} P \circ (X^2 + p) &= (X^2 + p)^3 + a(X^2 + p)^2 + b(X^2 + p) + c \\ &= X^6 + (3p + a)X^4 + (3p^2 + 2ap + b)X^2 + p^3 + ap^2 + bp + c \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (X^2 + p) \circ P &= (X^3 + aX^2 + bX + c)^2 + p \\ &= X^6 + 2aX^5 + (a^2 + 2b)X^4 + 2(ab + c)X^3 + (b^2 + 2ac)X^2 + 2bcX + c^2 + p \end{aligned}$$

Il en vient donc:

$$\begin{cases} 2a = 0 \\ a^2 + 2b = 3p + a \\ 2(ab + c) = 0 \\ b^2 + 2ac = (3p^2 + 2ap + b) \\ 2bc = 0 \\ c^2 + p = p^3 + ap^2 + bp + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 3p = 2b \\ c = 0 \\ b^2 = 3p^2 + b \\ p^3 + \frac{3}{2}p^2 = p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \\ 12p^2 - 9p^2 + 6p = 3p(p + 2) \\ p(2p^2 + 3p - 2) = p\left(p - \frac{1}{2}\right)(p + 2) \end{cases}$$

Donc les deux dernière lignes du système nous donne que $p = 0$ ou $p = -2$

d.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que P non constant et qu'il vérifie $P \circ X^2 = X^2 \circ P$

Alors posons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec n le degré de P et $a_0, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ et $a_n = 1$

Alors $P \circ X^2 = \sum_{k=0}^{n} a_k X^{2k}$ et $X^2 \circ P = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right)^2 = \sum_{k=0}^{n} a_k^2 X^2 k + 2 \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j-1} a_i a_j$

Donc

$$P \circ X^2 = X^2 \circ P \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} (a_k - a_k^2) X^{2k} - 2 \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j-1} a_i a_j = 0$$

Donc $\sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j-1} a_i a_j = 0$

Donc pour $j = n$, $\sum_{i=0}^{n-1} a_i a_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i = 0$

Ainsi $\forall i \in [\![0; n - 1]\!], a_i = 0$

Donc $P = X^n$ car a_n est le seul coefficent non nul

Ainsi $\mathcal{C}_0 = \{X^n, n \in \mathbb{N}^*\}$

N=°7. a

Soient $U, P \in \mathbb{R}[X]$ de degrés respectif n et m tel que $U \circ P = P \circ U = X$

Alors $\deg(U \circ P) = \deg(P \circ U) = \deg X \Leftrightarrow mn = nm = 1 \Leftrightarrow m = n = 1$ car $n, m \in \mathbb{N}$

Donc U est inversible si et seulement si $\deg U = 1$

b.

Soit $U = aX + b \in \mathbb{R}[X]$, vérifions que $P = \frac{1}{a}X - \frac{b}{a}$ est bien l'inverse de U

Alors

$$U \circ P = aP + b = X = a\frac{X - b}{a} + b = X - b + b = X$$

Et

$$P \circ U = \frac{(aX + b) - b}{a} = \frac{aX}{a} = X$$

Donc $P = U^{-1} = \frac{1}{a}X - \frac{b}{a}$

N=°8.

Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$

Alors, on a

$$\deg(U \circ P_n \circ U^{-1}) = 1 \times n \times 1 = n$$

Et

$$\begin{aligned}(U \circ P_n \circ U^{-1}) \circ (U \circ P_m \circ U^{-1}) &= U \circ P_n \circ U^{-1} \circ U \circ P_m \circ U^{-1} \\ &= U \circ P_n \circ P_m \circ U^{-1} = U \circ P_m \circ P_n \circ U^{-1} \\ &= U \circ P_m \circ U^{-1} \circ U \circ P_n \circ U^{-1} = (U \circ P_m \circ U^{-1}) \circ (U \circ P_n \circ U^{-1})\end{aligned}$$

Donc $(U \circ P_n \circ U^{-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite commutante

N=°9.

On a selon la question **7.b**, $U^{-1} = \frac{1}{a}X - \frac{b}{2a}$

Donc

$$\begin{aligned}U \circ P \circ U^{-1} = U(P(U^{-1})) &= U\left(P\left(\frac{1}{a}X - \frac{b}{2a}\right)\right) \\ &= U\left(a\left(\frac{1}{a}X - \frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{1}{a}X - \frac{b}{2a}\right) + c\right) \\ &= U\left(\frac{1}{a}X^2 \cancel{- \frac{b}{a}X} + \cancel{\frac{b^2}{2a}} + \cancel{\frac{b}{a}X} \cancel{- \frac{b^2}{2a}} + c\right) \\ &= U\left(\frac{1}{a}X^2 + c\right) \\ &= a\left(\frac{1}{a}X^2 + c\right) + \frac{b}{2} = X^2 + \underbrace{ac + \frac{b}{2}}_{=p}\end{aligned}$$

Donc $U \circ P \circ U^{-1} = X^2 + p$ avec $p = ac + \frac{b}{2}$

N=°10.

Montrons que $V = \frac{1}{2}X \in \mathbb{R}[X]$ est un tel polynôme   Soit V un tel polynôme, alors:

$$V \circ (X^2 - 2) \circ V^{-1} = \frac{1}{2}\left((2X)^2 - 2\right) = \frac{1}{2}(4X^2 - 2) = 2X^2 - 1 = T_2$$

Donc V est un tel polynôme

N=°11.