Def : Pour un corps $\mathbb{K}$ commutatif où l'exponentiation est définis et pour $\mathbb{L}$ un sous corps de $\mathbb{K}$, on définis pour $n \in \mathbb{N}$:

$$(\mathbb{K}, \mathbb{L})_n[X] = \left\{ \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^{\beta_k}, \forall i > n, \alpha_i = 0, \forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j \Rightarrow \beta_i \neq \beta_j \text{ ou } \beta_i = \beta_j = 0, (\alpha_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, (\beta_n) \in \mathbb{L}^{\mathbb{N}} \right\}$$

Def : Pour $P, Q \in (\mathbb{K}, \mathbb{L})_n[X]$, avec $P = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i X^{\beta_i}$ et $Q = \sum_{i=0}^{n} a_i X^{b_i}$

- Si $\mathbb{L}$ possède une relation d'ordre totale, alors on appelle $\deg P = \max_{k \in \mathbb{N}} \{\beta_k, \alpha_k \neq 0\}$
- on appelle magnitude, et note $\operatorname{mag} P = \operatorname{card}_{k \in \mathbb{K}} \{\alpha_k, \alpha_k \neq 0\}$
- $P = Q$ ssi $\exists \varphi \in \mathfrak{S}, \forall n \in \mathbb{N}, (\alpha_n, \beta_n) = \left(a_{\varphi(n)}, b_{\varphi(n)}\right)$
- $\forall \lambda \in \mathbb{L}, \lambda P = \sum_n \lambda \alpha_n X^{\beta_n}$
- $((\mathbb{K}, \mathbb{L}), +, *)$ est un anneaux sans diviseur de zéro

Def : On dit qu'un polynôme $P \in (\mathbb{K}, \mathbb{L})_n[X]$, de magnitude m, est condensé ssi $\forall i \in [\![0; m]\!], \alpha_i \neq 0$

Théorème 1 : Pour tout polynôme $P = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i X^{\beta_i}$ de magnitude m, il existe un polynôme condensé $\tilde{P}$, tel que $P = \tilde{P}$

Preuve :
Soit $\varphi \in \mathfrak{S}$ tq $\forall i \in [\![0; m]\!], \alpha_{\varphi(i)} \neq 0$,
Posons $\tilde{P} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_{\varphi(i)} X^{\beta_{\varphi(i)}}$
Alors nous avons bien $\forall n \in \mathbb{N}, (\alpha_n, \beta_n) = \left(\alpha_{\varphi^{-1}(\varphi(n))}, \beta_{\varphi^{-1}(\varphi(n))}\right)$ avec φ^{-1} la premutation inverse de φ, donc $P = \tilde{P}$
De plus $\tilde{P}$ est bien condensé par définition de φ **Q.E.D.**

Def : On définis la dérivé d'un polynôme $P \in (\mathbb{K}, \mathbb{L})_n[X]$ par :

$$P' = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \beta_i X^{\beta_i - 1}$$

Prop : Soit $P, Q \in (\mathbb{K}, \mathbb{L})_n[X]$, alors pour $k \in [\![0, n]\!]$:

- $\operatorname{mag} P' = \operatorname{mag} P - \operatorname{card}\{\beta_k = 0\} + \operatorname{card}(\{\alpha_k = 0\} \cap \{\beta_k = 0\})$, de plus si P est condensé : $\operatorname{mag} P' = \operatorname{mag} P - \operatorname{card}_{i \in [\![0, \operatorname{mag} P]\!]} \{\beta_i = 0\}$
- $\operatorname{mag}(P + Q) = \operatorname{mag} P + \operatorname{mag} Q - \operatorname{card}\left\{\beta_i = b_j, i, j \in [\![0; \max(\operatorname{mag} P, \operatorname{mag} Q)]\!]\right\}$
- $\operatorname{mag} PQ = \min(\operatorname{mag} P, \operatorname{mag} Q)$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \operatorname{mag} \lambda P = \operatorname{mag} P$
- $\operatorname{mag} P \circ Q = ?$

De plus si $\mathbb{L}$ possède une relation d'odre totale :

- $\deg P' = \deg P - 1$
- $\deg PQ = \deg P + \deg Q$
- $\deg P \circ Q = \deg P \times \deg Q$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \deg \lambda P = \deg P$

- $\deg(P + Q) = \max(\deg P, \deg Q)$