

Maths : DM 21

Exercice: un calcul de l'intégrale de Gauss

N° 1.

soient $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $y \geq x$, alors

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x(1+\tan^2 t)} dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-y(1+\tan^2 t)} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x(1+\tan^2 t)} - e^{-y(1+\tan^2 t)} dt \end{aligned}$$

Mais, $-x \geq -y$ donc $e^{-x} \geq e^{-y}$, et pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $1 + \tan^2 t \geq 0$ Donc $x \mapsto x^{1+\tan^2 t}$ est croissantedonc $(e^{-x})^{1+\tan^2 t} \geq (e^{-y})^{1+\tan^2 t}$ donc $e^{-x(1+\tan^2 t)} - e^{-y(1+\tan^2 t)} \geq 0$ Ainsi par croissance de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x(1+\tan^2 t)} - e^{-y(1+\tan^2 t)} dt \geq 0$ et donc $f(x) - f(y) \geq 0$ et donc $f(x) \geq f(y)$ Ainsi f est décroissante

N° 2.

soit $x \in \mathbb{R}$, alors

$$\frac{f(x)}{e^{-x}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x(1+\tan^2 t)+x} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x \tan^2 t} dt$$

Comme $\forall t \in [0; \frac{\pi}{4}]$, $0 \leq \tan t \leq 1$, soit un telle t , alors $0 \geq -x \tan^2 t \geq -x$ donc $e^0 = 1 \geq e^{-x \tan^2 t} \geq e^{-x}$ Et donc $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x} dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x \tan^2 t} dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 dt = \frac{\pi}{4}$

Et comme:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x} dt = \frac{\pi}{4} e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

On a donc que $\frac{f(x)}{e^{-x}}$ est bornée au voisinage de l'infinieEt donc $\frac{f(x)}{e^{-x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} O(e^{-x})$

N° 3.

soit $y \in [-A; A]$, et soit $f : y \mapsto e^y$ alors comme f est convexe car f'' est strictement positiveOn a que f est supérieur à toute ses tangentes, en particulier à $y \mapsto y + 1$ Donc $e^y \geq y + 1$ donc $0 \leq e^y - y - 1$ On a $e^A \geq f''(y) = e^y \geq 0$, donc par l'inégalité de Taylor-Lagrange:

$$f(y) - 1 - y = |f(y) - f(0) - f'(0)y| \leq e^A \frac{y^2}{2}$$

N° 4. a.

soit $h \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) + hg(a) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-(a+h)(1+\tan^2 t)} dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-a(1+\tan^2 t)} dt + h \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2 t) e^{-a(1+\tan^2 t)} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-a(1+\tan^2 t)} (e^{-h(1+\tan^2 t)} - 1 + h(1+\tan^2 t)) dt \end{aligned}$$

Or par la question précédente pour tout $t \in [0; \frac{\pi}{4}]$:

$$0 \leq e^{-h(1+\tan^2 t)} - 1 + h(1+\tan^2 t) \leq e^{\frac{\pi}{4} \frac{h^2}{2}} (1+\tan^2 t)^2 \text{ avec } A = 2|h|$$

$$\text{donc } 0 \leq e^{-a(1+\tan^2 t)} (e^{-h(1+\tan^2 t)} - 1 + h(1+\tan^2 t)) \leq e^{2|h|} \frac{h^2}{2} e^{-a(1+\tan^2 t)} (1+\tan^2 t)^2 \leq e^{\frac{\pi}{4}} 2h^2 e^{-a(1+\tan^2 t)}$$

$$\text{donc } 0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-a(1+\tan^2 t)} (e^{-h(1+\tan^2 t)} - 1 + h(1+\tan^2 t)) dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{2|h|} 2h^2 e^{-a(1+\tan^2 t)} dt$$

$$\text{donc } 0 \leq f(a+h) - f(a) + hg(a) \leq e^{2|h|} 2h^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-a(1+\tan^2 t)} dt = e^{2|h|} 2h^2 f(a)$$

$$\text{Ainsi } \underline{\forall h > 0, 0 \leq f(a+h) - f(a) + hg(a) \leq e^{2|h|} 2h^2 f(a)}$$

b.

D'après la question précédente, pour tout $h > 0$:

$$0 \leq f(a+h) - f(a) + hg(a) \leq e^{2|h|} 2h^2 f(a) \text{ soit } 0 \leq \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + g(a) \leq \underbrace{e^{2|h|} 2hf(a)}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0}$$

Donc par le théorème des gendarmes $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + g(a) = 0$

$$\text{Et donc } f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = -g(a)$$

N° 5. a.

On vient de prouver que f était dérivable et par le théorème fondamentale de l'analyse

$$\int_0^x e^{-u^2} du \text{ est dérivable, de dérivé } x \mapsto e^{-x^2}$$

Donc par somme et composition de fonction dérivable h est dérivable

b.

En posant $u = x \tan t$, on a $du = x(1+\tan^2 t) dt$

$$\text{donc } \int_0^x e^{-u^2} du = \int_0^{\arctan(\frac{x}{x})=\frac{\pi}{4}} e^{-x^2 \tan^2 t} x(1+\tan^2 t) dt$$

soit $x \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} h'(x) &= -2xg(x^2) + 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du \\ &= -2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(1+\tan^2 t) e^{-x^2(1+\tan^2 t)} dt + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x^2(1+\tan^2 t)} (1+\tan^2 t) dt = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \underline{\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = 0}$$

c.

Par la question précédente $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = l \in \mathbb{R}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l$

Deplus comme $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(e^{-x})$ et comme $e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

$$\text{Donc } l = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{f(x^2)}_{\rightarrow 0} + \left(\int_0^x e^{-u^2} \, du \right)^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^x e^{-u^2} \, du \right)^2$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-u^2} \, du = \sqrt{l}$$

$$\text{Et } l = h(0) = f(0) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 \, dt = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Et donc } \underline{\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-u^2} \, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$