DEVOIR MAISON 10

► Exercice 1 : théorème de Cesàro

Si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite à valeurs réelles, on appelle **suite des moyennes de Cesàro associée à** (u_n) la suite $(\sigma_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \sigma_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}.$$

Partie I. Le théorème de Cesàro

1. On suppose dans cette question que (u_n) converge vers 0. Soit $\varepsilon > 0$.

   a. Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.

   b. Prouver que pour tout $n \geqslant n_0$, on a

   $$|\sigma_n| \leqslant \frac{|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_{n_0-1}|}{n} + \frac{|u_{n_0}| + \cdots + |u_n|}{n}.$$

   c. En déduire que $(\sigma_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

2. En utilisant la question précédente, et sans refaire de nouveaux calculs, justifier que si (u_n) converge vers un réel ℓ, alors $\sigma_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
   Ce résultat est appelé le lemme de Cesàro.

3. Montrer que la réciproque de la question précédente est fausse, c'est-à-dire qu'on peut avoir (σ_n) convergente sans que (u_n) converge.

4. Prouver que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $\sigma_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

5. Montrer que si (u_n) est croissante, alors la réciproque de la question 1. est vraie, c'est-à-dire que (σ_n) converge si et seulement si (u_n) converge.

Partie II. Quelques applications

6. **Le lemme de l'escalier** Soit a un réel, et soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_{n+1} - a_n) = a$.
   Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = a$ (*c'est le lemme de l'escalier*).

7. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite telle que $\begin{cases} u_1 \in \mathbf{R}_+^* \\ \forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2} \end{cases}$.

   a. Prouver que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   b. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{1}{u_n^2}$. Prouver que $v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$.

   c. En déduire, à l'aide du lemme de l'escalier que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\sqrt{2n} = 1$.

Partie III (facultative). Le théorème taubérien faible de Hardy

Dans cette partie, on considère $(u_n)_{n\geqslant 1} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}^*}$, et on note encore $(\sigma_n)_n$ la suite de ses moyennes de Cesàro.
On note également, pour $n \geqslant 1$, $x_n = u_{n+1} - u_n$. La question 2 prouve qu'il est possible que (σ_n) converge sans que ce soit le cas de (u_n).
Nous cherchons ici à prouver que moyennant une hypothèse supplémentaire, la convergence de (σ_n) entraine celle de (x_n).

8. Prouver que (u_n) converge si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}-\sigma_n)=0$.
   En déduire que (u_n) converge si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_1+2x_2+\cdots+nx_n}{n}=0$.
9. On suppose que (σ_n) converge vers une limite ℓ, et que de plus, $n(u_{n+1}-u_n)=nx_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   En utilisant le lemme de Cesàro, montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Le résultat reste vrai si on suppose seulement que $(nx_n)_n$ est bornée (ce qui est notamment le cas lorsque $nx_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$), mais la preuve en est considérablement plus difficile (c'est le théorème taubérien ***fort*** *de Hardy).*

▸ Exercice 2 : calcul des puissances d'une matrice 3×3

Dans tout l'exercice, on note $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Le but de l'exercice est le calcul de A^n, pour $n\in\mathbf{N}$.

1. a. Résoudre le système $AX=X$, d'inconnue $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$. En donner une solution C_1 dont le coefficient de la troisième ligne vaut 1.
   b. Résoudre le système $AX=2X$, d'inconnue $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$. En donner une solution C_3 dont le coefficient de la troisième ligne vaut 1.
   c. Montrer que pour $\lambda\in\mathbf{R}\setminus\{1,2\}$, le système linéaire $AX=\lambda X$, d'inconnue $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ n'a pas de solution non nulle.
   d. Déterminer une colonne $C_2\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ de troisième coefficient égal à -1 pour laquelle $AC_2=C_1+C_2$.
2. On note désormais P la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ dont les colonnes sont C_1, C_2, C_3, dans cet ordre.
   a. Montrer qu'il existe une matrice triangulaire T, que l'on précisera, telle que $AP=PT$.
   b. Prouver que P est inversible, et calculer son inverse.
   c. Pour $n\in\mathbf{N}$, calculer T^n.
3. Donner l'expression de A^n, pour $n\in\mathbf{N}$.