Анализ зависимостей

Рябенко Евгений
riabenko.e@gmail.com

24 ноября 2016 г.

Корреляция Пирсона

Коэффициент корреляции Пирсона — мера силы **линейной** взаимосвязи:

$$r_{X_1X_2} = \frac{\mathbb{E}\left(\left(X_1 - \mathbb{E}X_1\right)\left(X_2 - \mathbb{E}X_2\right)\right)}{\sqrt{\mathbb{D}X_1\mathbb{D}X_2}}.$$

$r_{X_1X_2} \in [-1, 1]$.

Выборочный коэффициент

Выборка пар $(X_{1i}, X_{2i}), i = 1, \ldots, n.$

Выборочный коэффициент корреляции Пирсона:

$$r_{X_1X_2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_{1i} - \bar{X}_1\right)\left(X_{2i} - \bar{X}_2\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(X_{1i} - \bar{X}_1\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \left(X_{2i} - \bar{X}_2\right)^2}}.$$

Свойства

https://yadi.sk/i/1idYe9YEzHgsk
https://yadi.sk/i/lfqo3s5ezHhQk
https://yadi.sk/i/xm4Jg_r9zHhVy
https://yadi.sk/i/JBoSC5IIzHhTP

Корреляция Спирмена

Коэффициент корреляции Спирмена — мера силы **монотонной** взаимосвязи;
равен коэффициенту корреляции Пирсона между рангами наблюдений.

$\rho x_1 x_2 \in [-1, 1]$.

Выборочный коэффициент

Выборка пар $(X_{1i}, X_{2i}), i = 1, \ldots, n$;
$\text{rank}(X_{1i}), \text{rank}(X_{2i})$ — ранги.

Выборочный коэффициент корреляции Спирмена:

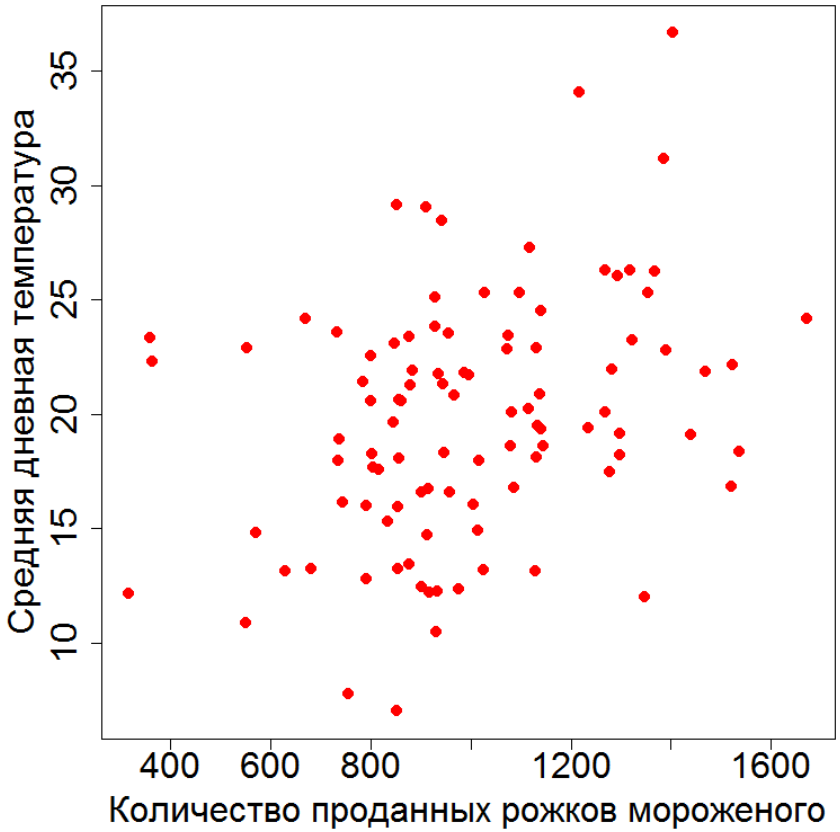
$$\rho_{X_1 X_2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\text{rank}(X_{1i}) - \frac{n+1}{2}\right)\left(\text{rank}(X_{2i}) - \frac{n+1}{2}\right)}{\frac{1}{12}(n^3 - n)} =$$

$$= 1 - \frac{6}{n^3 - n} \sum_{i=1}^{n} (\text{rank}(X_{1i}) - \text{rank}(X_{2i}))^2$$

Свойства

https://yadi.sk/i/53Ct2IRdzHhbR
https://yadi.sk/i/jJYpVo9CzHhds
https://yadi.sk/i/yNaVMvkazHhiB
https://yadi.sk/i/O1_LATvyzHhfk

Продажи мороженого



$r_{X_1X_2} = 0.45, \quad \rho_{X_1X_2} = 0.44.$

Связаны ли объём продаж мороженого и средняя дневная температура?

Критерий Стьюдента

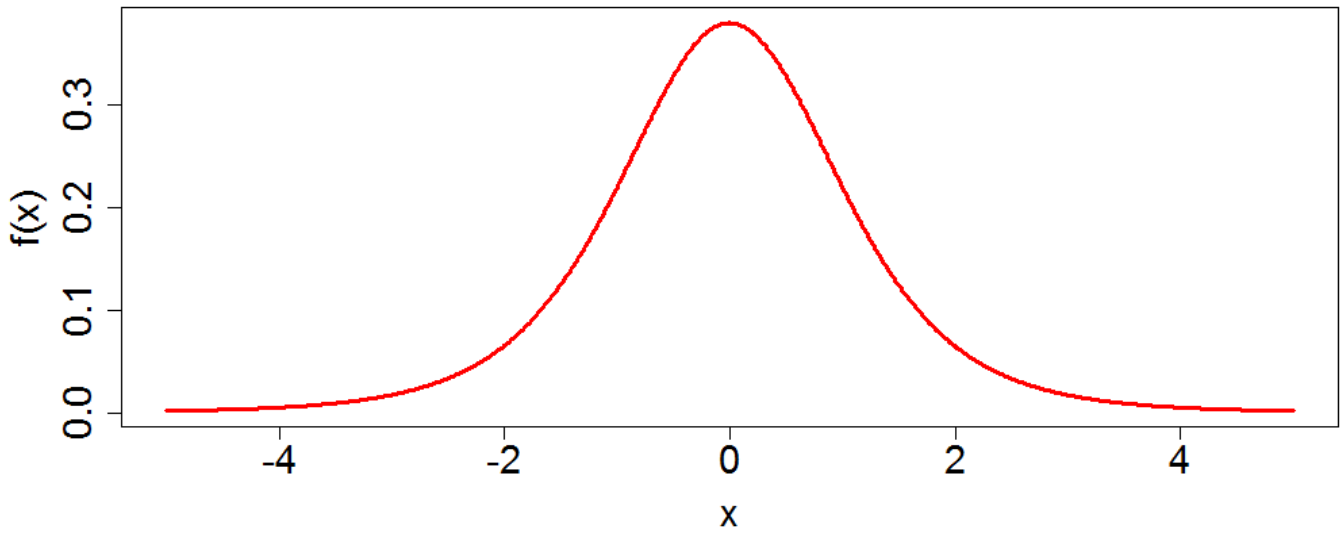
выборки: $(X_{1i}, X_{2i}), i = 1, \ldots, n,$

нулевая гипотеза: $H_0 : r_{X_1X_2} = 0;$

альтернатива: $H_1 : r_{X_1X_2} <\neq> 0;$

статистика: $T = \frac{r_{X_1X_2}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2_{X_1X_2}}};$

нулевое распределение: $T \sim St(n-2).$



Перестановочный критерий

выборки:	$X_1^n = (X_{11}, \ldots, X_{1n})$
	$X_2^n = (X_{21}, \ldots, X_{2n})$
	выборки связанные
нулевая гипотеза:	$H_0 \colon r_{X_1 X_2} = 0$
альтернатива:	$H_1 \colon r_{X_1 X_2} <\neq> 0$
статистика:	$T\left(X_1^n, X_2^n\right) = \hat{r}_{X_1 X_2}$
нулевое распределение:	порождается перебором $n!$ перестановок индексов одной из выборок

Достигаемый уровень значимости — доля перестановок, на которых получилось такое же или ещё более экстремальное значение статистики.

Для корреляции Спирмена

можно применять эти же критерии.

Продажи мороженого

H_0: линейной связи нет, $r_{X_1X_2} = 0$.
H_1: признаки линейно связаны, $r_{X_1X_2} \neq 0$.

Критерий Стьюдента: $p = 3 \times 10^{-6}$, признаки линейно связаны,
корреляция Пирсона — 0.45 (95% доверительный интервал — $[0.28, 0.59]$).

H_0: монотонной связи нет, $\rho_{X_1X_2} = 0$.
H_1: признаки монотонно связаны, $\rho_{X_1X_2} \neq 0$.

Критерий Стьюдента: $p = 3 \times 10^{-6}$, признаки монотонно связаны,
корреляция Спирмена — 0.44 (95% доверительный интервал — $[0.26, 0.60]$).

Корреляция Мэтьюса

Коэффициент корреляции Мэтьюса — мера силы взаимосвязи между двумя бинарными переменными.

Таблица сопряжённости:

X_1 \ X_2	0	1
0	a	b
1	c	d

$$\mathrm{MCC}_{X_1X_2} = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}}.$$

$\mathrm{MCC}_{X_1X_2} \in [-1, 1]$;

0 — полное отсутствие взаимосвязи,

$1 \Leftrightarrow b = c = 0$,

$-1 \Leftrightarrow a = d = 0$.

Таблица сопряжённости $K_1 \times K_2$

X_1 \ X_2	1	$\dots$	j	$\dots$	K_2
1					
$\vdots$					
i			n_{ij}		
$\vdots$					
K_1					

V Крамера

Коэффициент V Крамера — мера силы взаимосвязи между двумя категориальными переменными.

$$\phi_c\left(X_1^n, X_2^n\right) = \sqrt{\frac{\chi^2\left(X_1^n, X_2^n\right)}{n\left(\min\left(K_1, K_2\right) - 1\right)}}.$$

$\phi_c\left(X_1^n, X_2^n\right) \in [0, 1]$;

0 — полное отсутствие взаимосвязи,

1 — совпадение переменных (с точностью до переименования уровней).

Пары переменных разных типов

Между категориальными и непрерывными признаками корреляции считать не нужно!

Пусть $X_1 \in \mathbb{R}, X_2 \in \{0, 1\}$;
X_1 и X_2 положительно коррелированы, если
$\mathbb{E}(X_1 \mid X_2 = 1) > \mathbb{E}(X_1 \mid X_2 = 0)$.

Мера взаимосвязи X_1 и X_2 — разность $\mathbb{E}(X_1 \mid X_2 = 1) - \mathbb{E}(X_1 \mid X_2 = 0)$.

Эффективность лечения

Исследуется влияние сахарного диабета на эффективность тромболитической терапии.

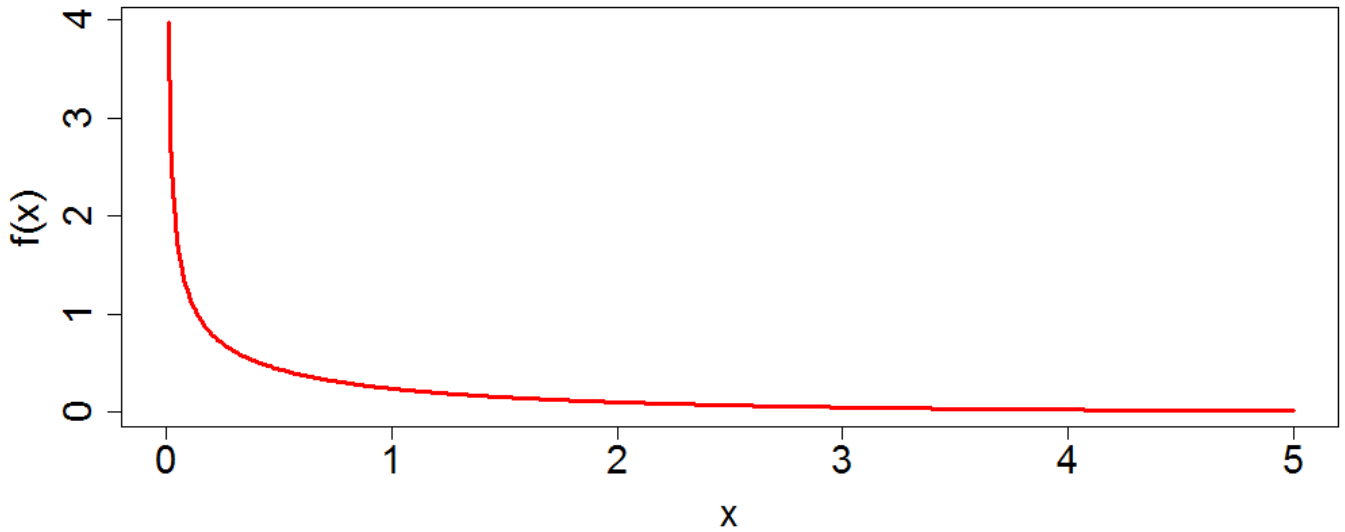
	Выздоровели	Не выздоровели
Диабет	48	30
Нет	92	36

$\mathrm{MCC} = -0.1074$.

Связано ли наличие диабета с эффективностью лечения?

Критерий хи-квадрат

выборки:	$(X_{1i}, X_{2i}), i = 1, \ldots, n,$ $X_1, X_2 \in \{0, 1\};$
нулевая гипотеза:	$H_0 \colon \mathrm{MCC}_{X_1 X_2} = 0;$
альтернатива:	$H_1 \colon \mathrm{MCC}_{X_1 X_2} \neq 0;$
статистика:	$\chi^2 = n \, \mathrm{MCC}^2_{X_1 X_2};$
нулевое распределение:	$\chi^2 \sim \chi^2_1.$



Условия применимости:

- $n \geqslant 40$
- $\frac{(a+c)(a+b)}{n}, \frac{(a+c)(c+d)}{n}, \frac{(b+d)(a+b)}{n}, \frac{(b+d)(c+d)}{n} > 5$

Эффективность лечения

	Выздоровели	Не выздоровели
Диабет	48	30
Нет	92	36

$MCC = -0.1074$.

H_0: эффективность лечения не зависит от наличия диабета.
H_1: эффективность лечения зависит от наличия диабета.

Критерий хи-квадрат: $p = 0.1651$, нельзя утверждать, что связь есть.

Пол и диета

Для 26 опрошенных известен пол и сидят ли они на диете.

	М	Ж
На диете	1	9
Не на диете	13	3

$MCC = -0.6953.$

Есть ли связь между этими признаками?

Точный критерий Фишера

выборки: $X_1^n = (X_{11}, \ldots, X_{1n}), X_1 \in \{0, 1\}$
$X_2^n = (X_{21}, \ldots, X_{2n}), X_2 \in \{0, 1\}$
выборки связанные

нулевая гипотеза: H_0: X_1 и X_2 независимы

альтернатива: H_1: H_0 неверна

Пусть в таблице сопряжённости суммы по строкам и столбцам фиксированы, тогда вероятность появления наблюдаемой таблицы равна

$$P\left(X_1^n, X_2^n\right) = \frac{(a+b)!\,(c+d)!\,(a+c)!\,(b+d)!}{a!b!c!d!n!}.$$

Достигаемый уровень значимости определяется как сумма по всем возможным вариантам таблицы с такими же суммами по строкам и столбцам, имеющим вероятность не более $P\left(X_1^n, X_2^n\right)$.

Для односторонней альтернативы ($ad \ll bc$) достигаемый уровень значимости можно определить через гипергеометрическое распределение:

$$p = \sum_{i=0}^{a} \frac{C_{a+b}^i C_{c+d}^{a+c-i}}{C_n^{a+c}}.$$

Пол и диета

Для 26 опрошенных известен пол и сидят ли они на диете.

	М	Ж
На диете	1	9
Не на диете	13	3

$MCC = -0.6953$.

H_0: связи нет.
H_1: признаки связаны.
Точный критерий Фишера: $p = 0.0008$.

Перестановочный критерий

Представим выборку в виде таблицы $n \times 2$:

	М	Ж
На диете	1	9
Не на диете	13	3

$\Rightarrow$

Строка	Столбец
1	1
1	2
...	
1	2
2	1
...	
2	1
2	2
2	2
2	2

Используем статистику критерия хи-квадрат, но её нулевое распределение будем оценивать по $n!$ перестановок второй колонки.

H_0: связи нет.
H_1: признаки связаны.
Точный критерий Фишера: $p = 0.0008$.
Критерий хи-квадрат: $p = 0.0004$.
Перестановочный критерий со статистикой хи-квадрат: $p = 0.0014$.

Категориальные признаки

X_1 \ X_2	1	$\dots$	j	$\dots$	K_2	$\sum$
1						
$\vdots$						
i			n_{ij}			n_{i+}
$\vdots$						
K_1						
$\sum$			n_{+j}			n

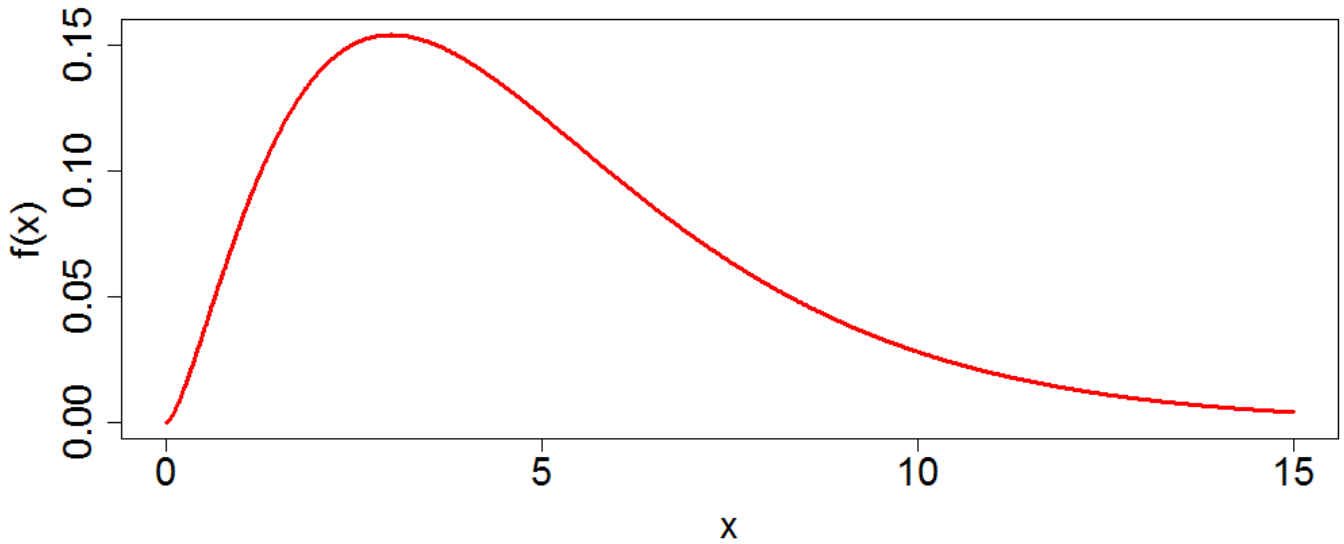
Критерий хи-квадрат

выборки: $(X_{1i}, X_{2i}), i = 1, \ldots, n,$
$X_1 \in \{1, \ldots, K_1\}, \quad X_2 \in \{1, \ldots, K_2\},$

нулевая гипотеза: H_0: X_1 и X_2 независимы;

альтернатива: H_1: H_0 неверна;

статистика:
$$\chi^2\left(X_1^n, X_2^n\right) = \sum_{i=1}^{K_1}\sum_{j=1}^{K_2} \frac{\left(n_{ij} - \frac{n_{i+}n_{+j}}{n}\right)^2}{\frac{n_{i+}n_{+j}}{n}} = n\left(\sum_{i=1}^{K_1}\sum_{j=1}^{K_2} \frac{n_{ij}^2}{n_{i+}n_{+j}} - 1\right);$$
$$\chi^2\left(X_1^n, X_2^n\right) \sim \chi^2_{(K_1-1)(K_2-1)}.$$



Критерий хи-квадрат

Условия применимости:

- $n \geqslant 40$
- $\frac{n_i + n_{+j}}{n} < 5$ не более, чем в 20% ячеек

Проверяет значимость отличия от нуля коэффициента V Крамера:

$$\phi_c\left(X_1^n, X_2^n\right) = \sqrt{\frac{\chi^2\left(X_1^n, X_2^n\right)}{n\left(\min\left(K_1, K_2\right) - 1\right)}}.$$

Другие критерии

Точный критерий Фишера и перестановочный критерий существуют и строятся по аналогии.

Парадокс хи-квадрат (Симпсона)

Эксперимент: пациенты принимают препарат или плацебо, по окончании курса определяется, выздоровели они или нет.
Есть ли связь между выздоровлением и приёмом препарата?

Мужчины	Выздоровели	Нет
Препарат	700	800
Плацебо	80	130

Женщины	Выздоровели	Нет
Препарат	150	70
Плацебо	300	280

Для мужчин: $\chi^2 = 5.456,\ p = 0.0195.$
Для женщин: $\chi^2 = 17.555,\ p = 2.8 \times 10^{-5}.$

М+Ж	Выздоровели	Нет
Препарат	850	870
Плацебо	380	410

Суммарно: $\chi^2 = 0.376,\ p = 0.5398.$

Парадокс хи-квадрат (Симпсона)

Причины несогласованности выводов — большие отличия в размерах групп пациентов, принимающих плацебо и препарат: основной вклад в выводы вносят женщины, принимавшие плацебо, и мужчины, принимавшие препарат.

Чтобы такого не происходило, плацебо и препарат должны поровну распределяться по всем анализируемым подгруппам.

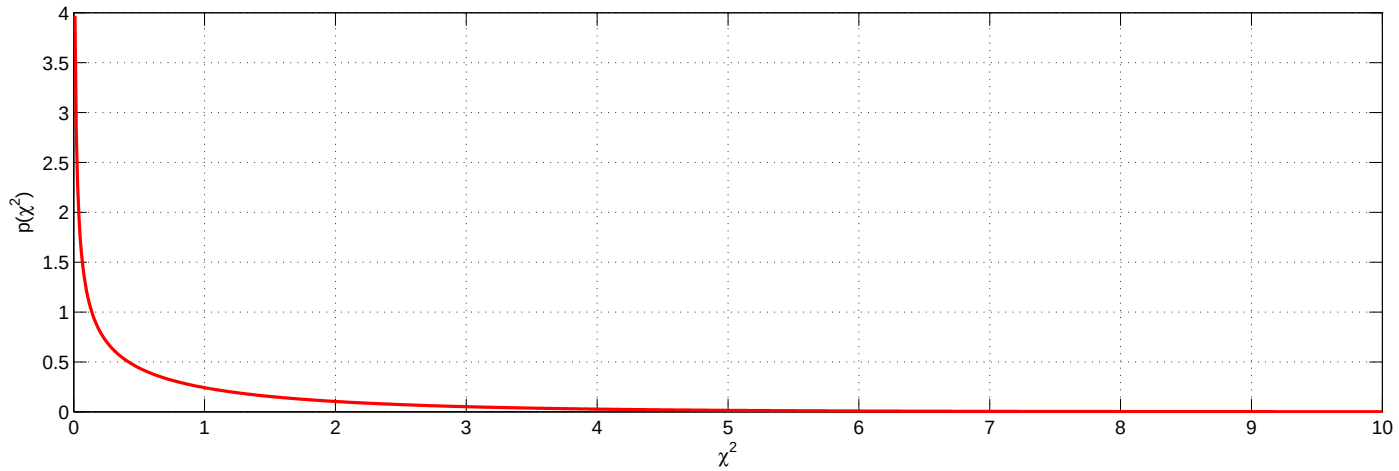
Парадокс хи-квадрат (Симпсона)

Пример (Bikel at el., 1975): в 1973 году на университет Беркли, Калифорния, подали в суд: доля поступивших абитуриентов мужского пола была выше, чем доля поступивших женского пола.

	Не поступили	Поступили	Доля поступивших
Мужчины	4704	3738	44.3%
Женщины	2827	1494	34.6%

Парадокс хи-квадрат (Симпсона)

Критерий хи-квадрат: $\chi^2 = 108.1,\ p \approx 0.$



	Наблюдаемые		Ожидаемые		Разности	
	-	+	-	+	-	+
Мужчины	4704	3738	4981.3	3460.7	-227.3	227.3
Женщины	2827	1494	2549.7	1771.3	227.3	-227.3

Парадокс хи-квадрат (Симпсона)

Будем искать виноватых: посмотрим детализированную статистику по 85 факультетам.

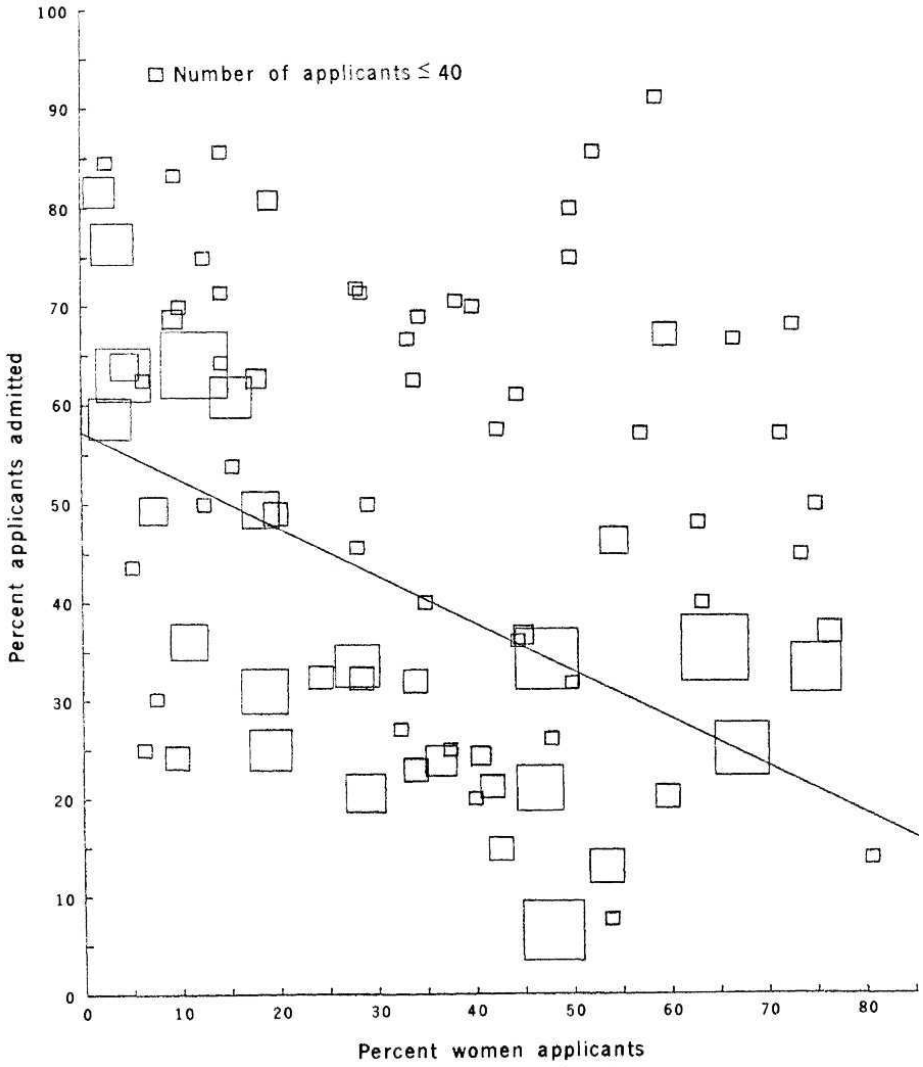
Значимо (при $\alpha = 0.05$) меньше женщин прошли отбор на 4 факультета, суммарный дефицит по ним — 26.
На 6 факультетов поступило значимо меньше мужчин, суммарный дефицит — 64.

Данные по 6 крупнейшим факультетам:

	Мужчины		Женщины	
	$\sum$	+	$\sum$	+
1	825	62%	108	**82%**
2	560	63%	25	**68%**
3	325	**37%**	593	34%
4	417	33%	375	**35%**
5	191	**28%**	393	24%
6	272	6%	341	**7%**

Парадокс хи-квадрат (Симпсона)

Ответ: женщины чаще пытались поступить на факультеты с большим конкурсом.



Булщит и консервативность

RESEARCH ARTICLE

Misperceiving Bullshit as Profound Is Associated with Favorable Views of Cruz, Rubio, Trump and Conservatism

Stefan Pfattheicher[1]*, **Simon Schindler**[2]

1 Ulm University, Ulm, Germany, **2** Kassel University, Kassel, Germany

http://journals.plos.org/plosone/article?id=10.1371/journal.pone.0153419

Определение

Булщит — бессодержательное, нелогичное или явно противоречащее элементарным научным знаниям утверждение.

Примеры:

- “Скрытый смысл трансформирует беспрецедентную абстрактную красоту”
- “Воображение лежит в основе экспоненциальных пространственно-временных событий”

Данные

Испытуемые: 196 граждан Америки (43.4% женщин, средний возраст 36.4 лет), набранные на Amazon Mechanical Turk.
Задание:

1. оценить глубокомысленность утверждений по шкале от 1 (“абсолютно не глубокое”) до 5 (“очень глубокое”)
2. оценить степень симпатии к трём кандидатам в президенты США от демократической и трём — от республиканской партий по шкале от 1 (“очень несимпатичен”) до 5 (“очень симпатичен”)
3. оценить степень консервативности собственных политических взглядов по семибалльной шкале Лайкерта.

Часть утверждений, оцениваемых респондентами, — булщит, часть — относительно редкие поговорки (“Промокший человек не боится дождя”).

Анализ

Для каждого испытуемого вычислялась средняя склонность считать булщит глубокомысленным.

Вычислялась корреляция Спирмена между итоговым признаком, консервативностью политических взглядов и степенями симпатии к кандидатам.

Для проверки значимости отличия корреляции от нуля использовался критерий Стьюдента.

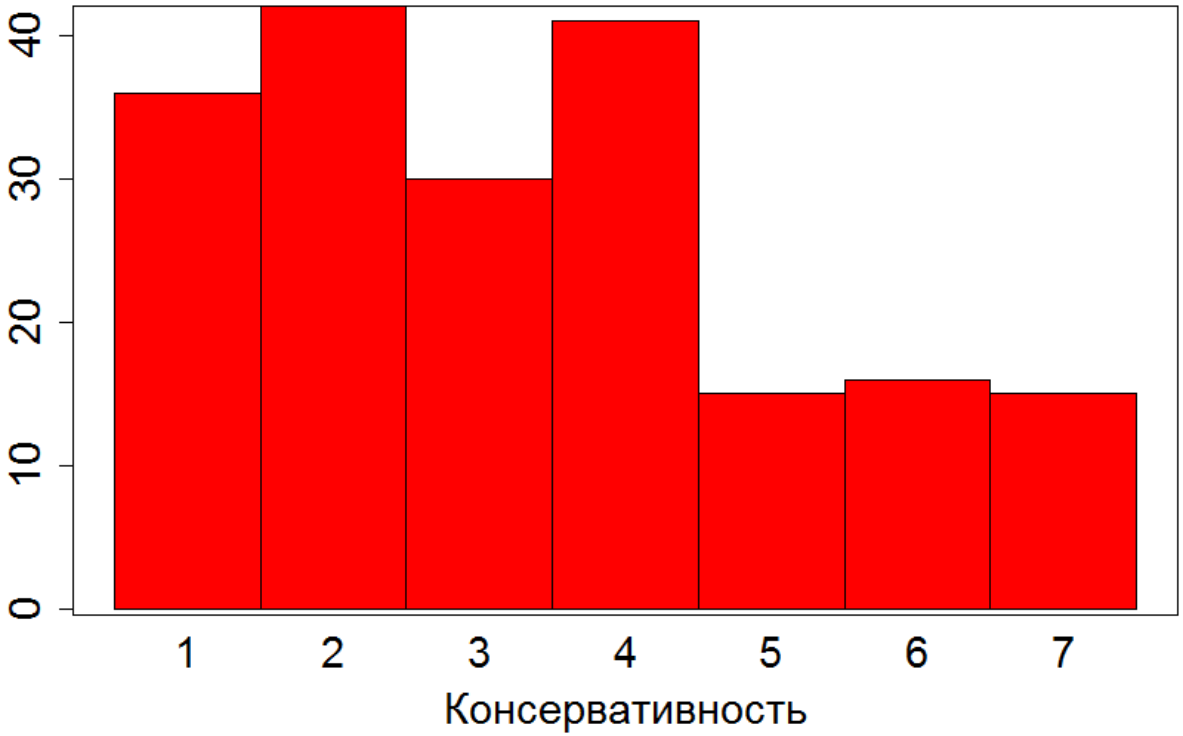
Результат

Обнаружена значимая положительная корреляция между тягой к булщиту и:

- симпатией к Теду Крузу, Марку Рубио и Дональду Трампу
- степенью консерватизма

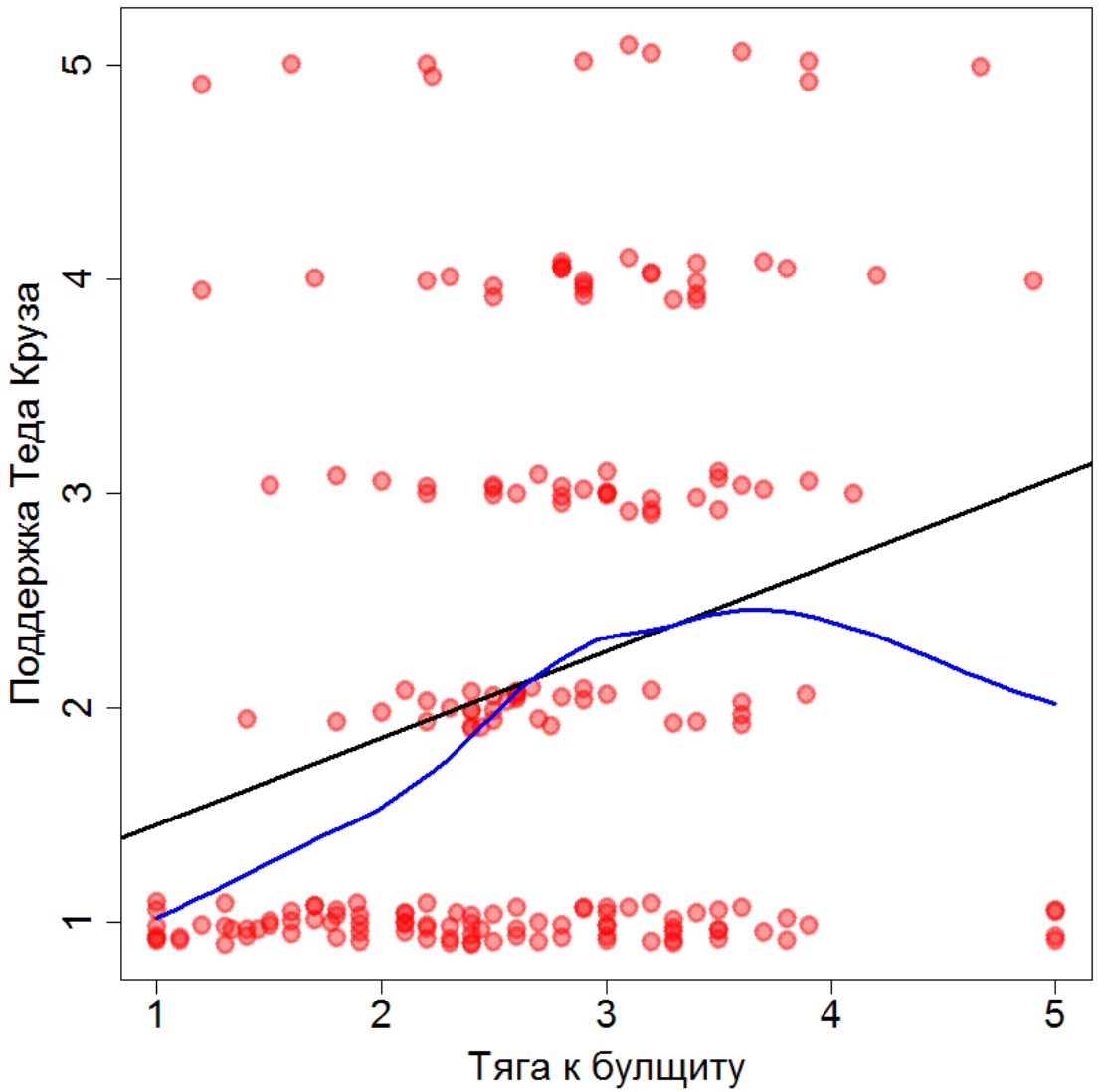
Проблемы

- репрезентативность выборки: аудитория Amazon Mechanical Turk — не случайная выборка граждан США
- несбалансированность выборки:



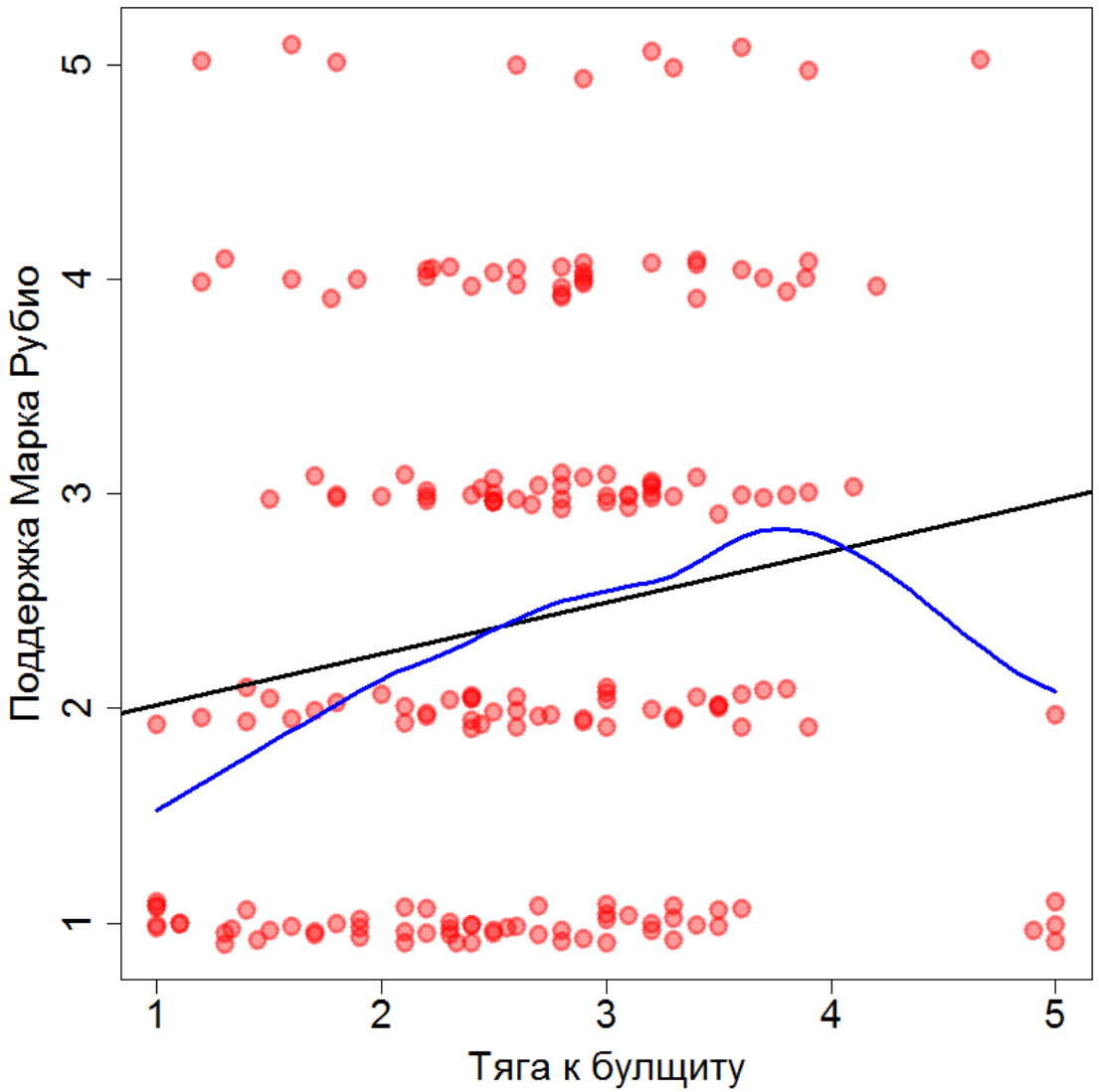
- сырые данные

Сырые данные



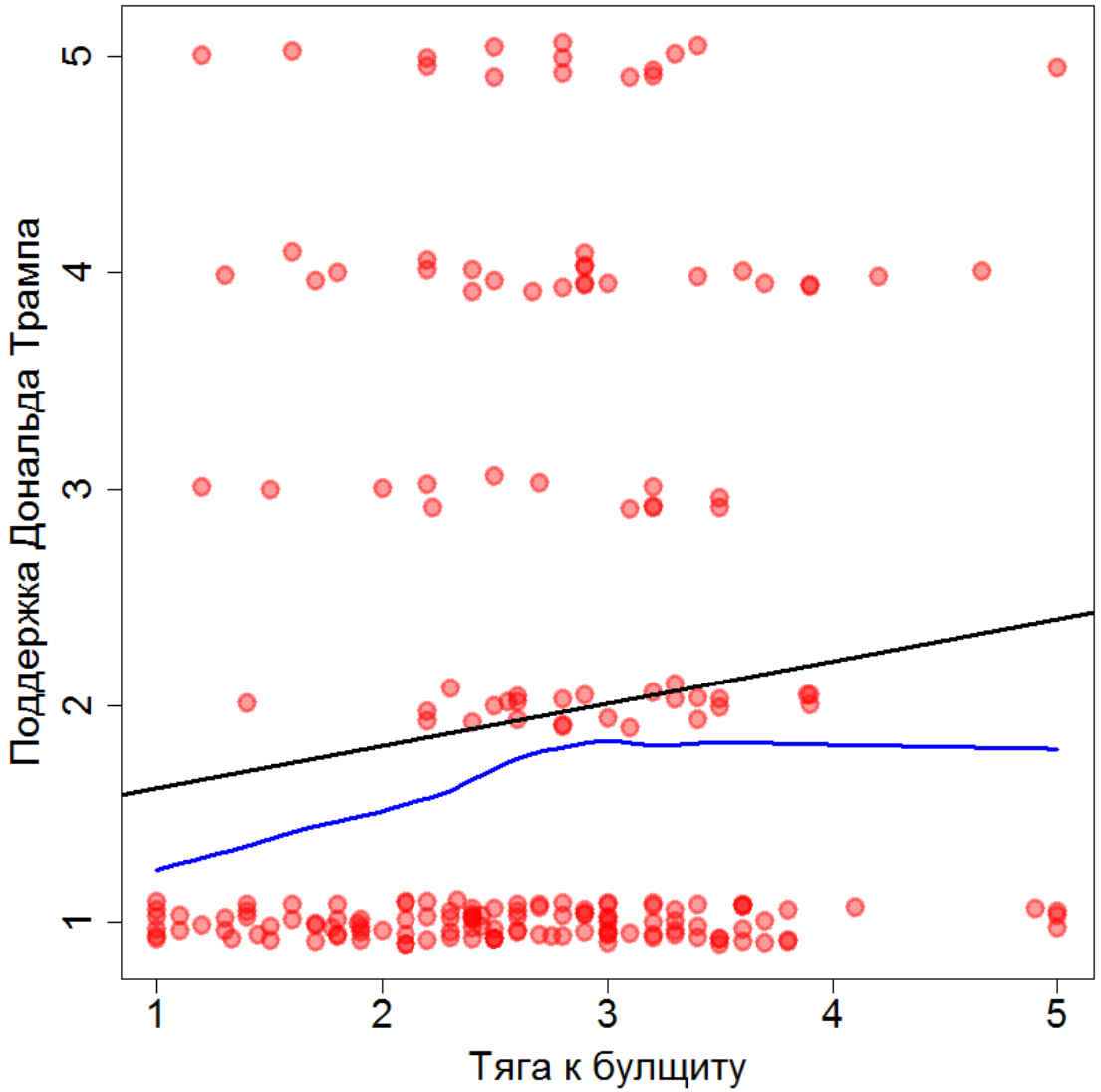
$\rho_{XY} = 0.3, p = 2 \times 10^{-5}$.

Сырые данные



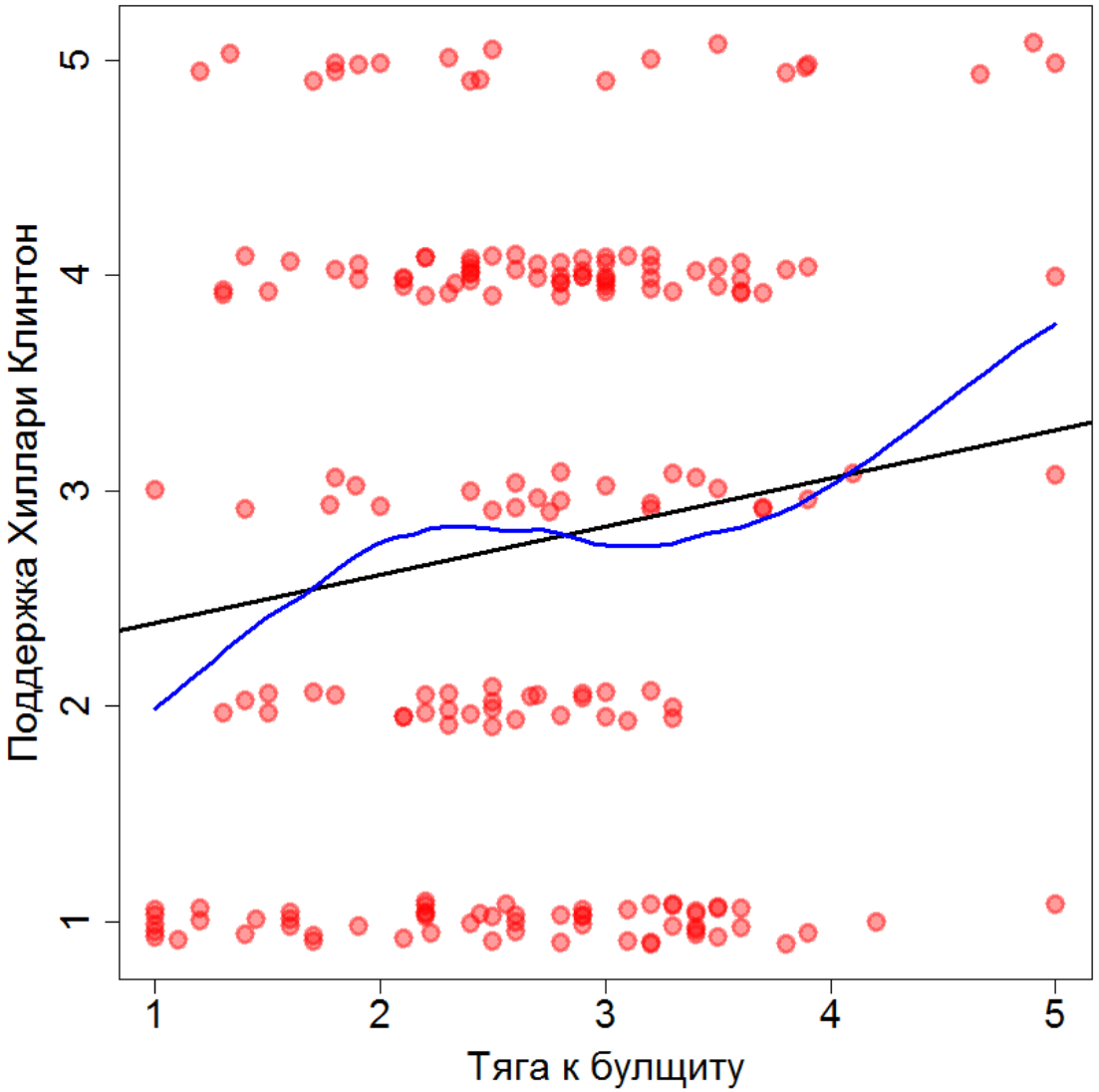
$\rho_{XY} = 0.2, p = 0.0064.$

Сырые данные



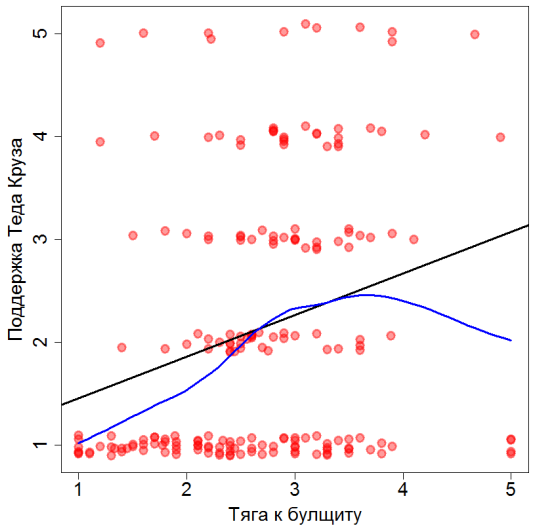
$\rho_{XY} = 0.15, p = 0.0324.$

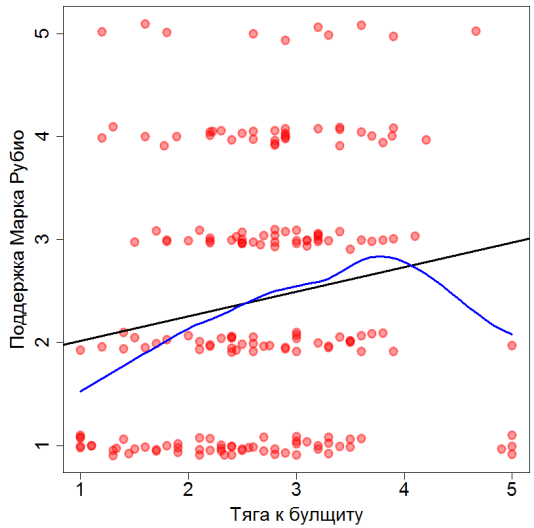
Сырые данные

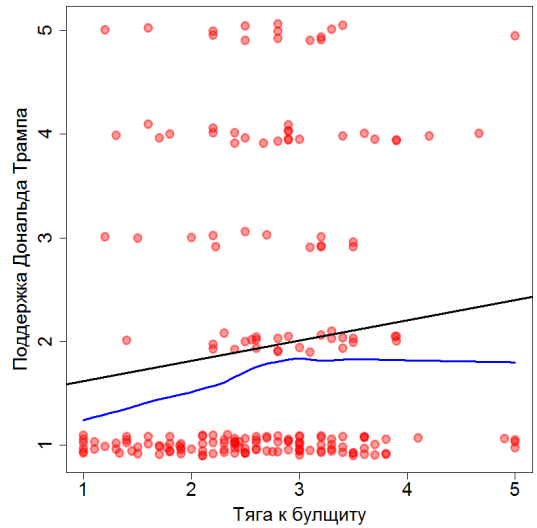


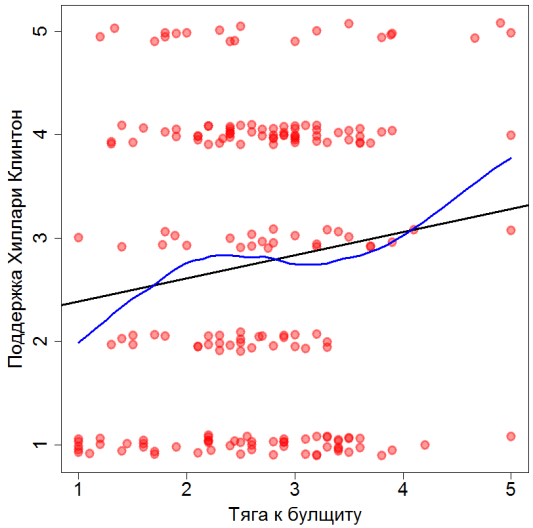
$\rho_{XY} = 0.09, p = 0.212.$

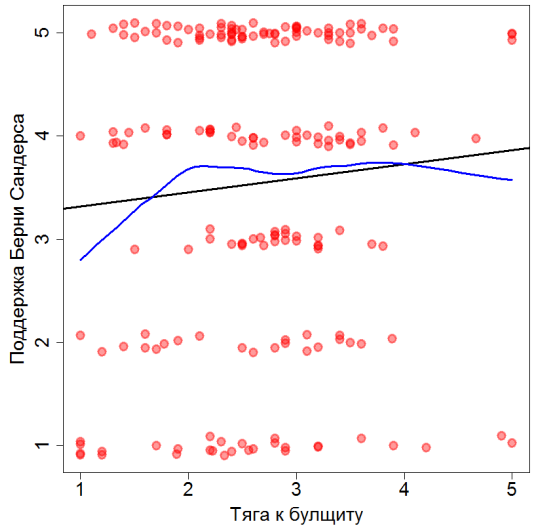
Сырые данные

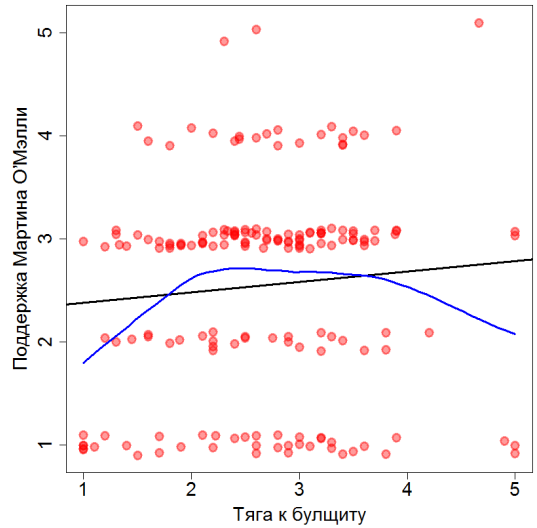








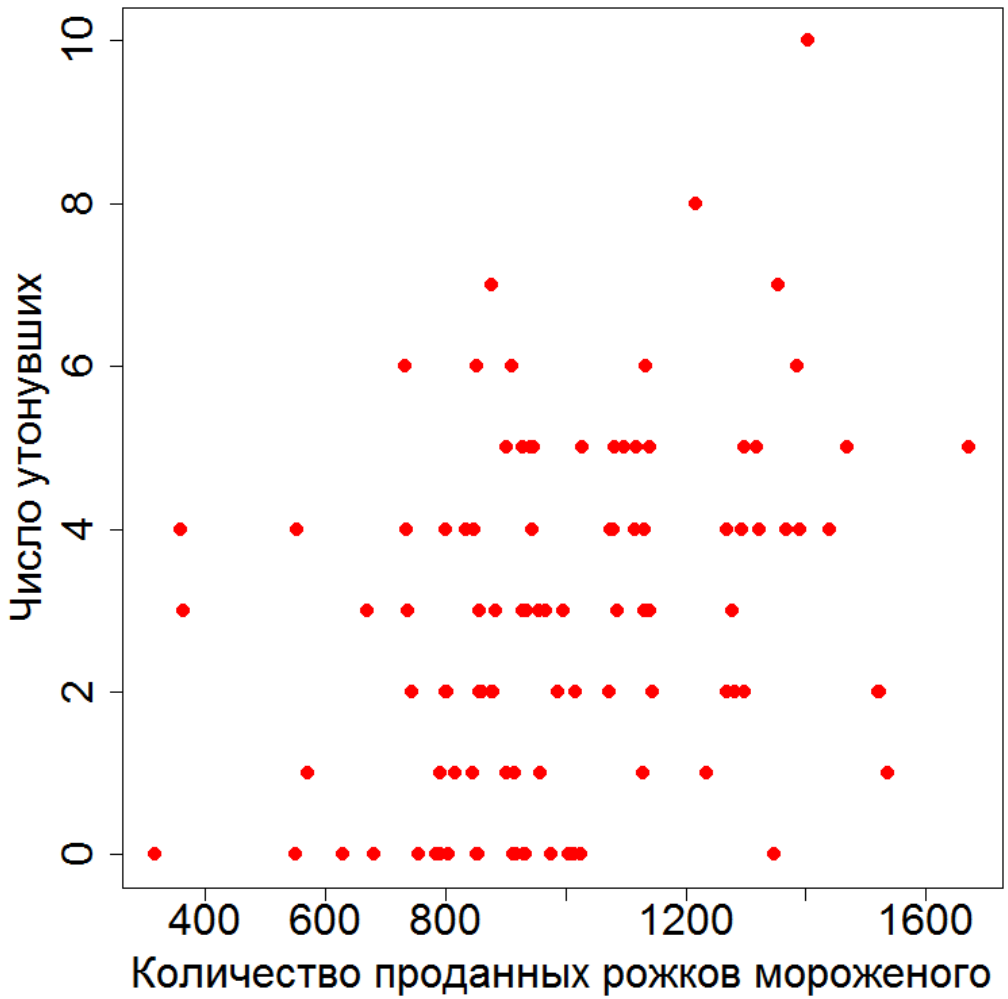




Резюме

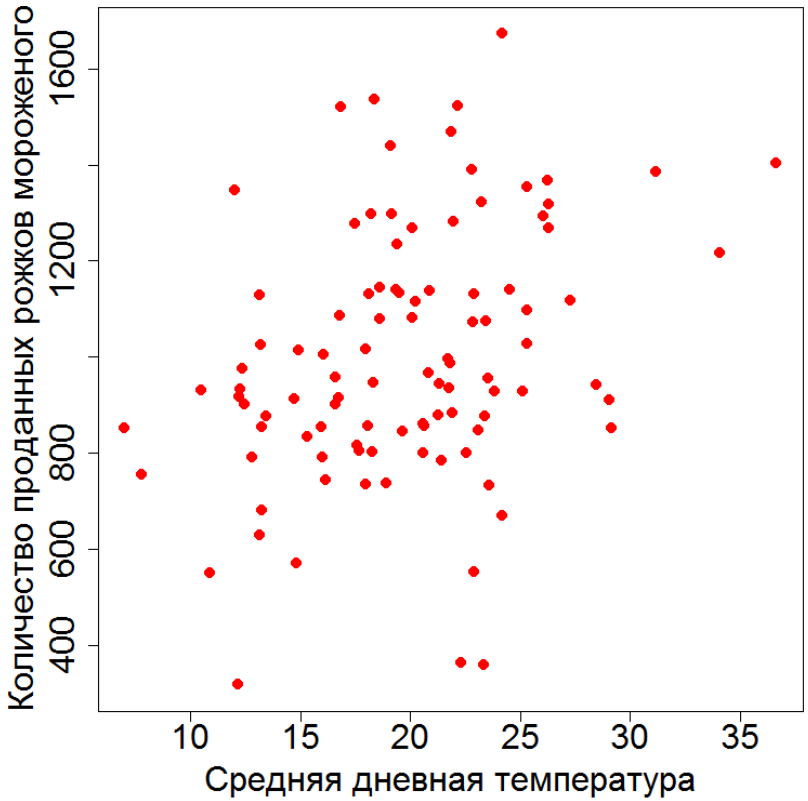
- всегда смотрите на сырые данные!
- корреляционный анализ — не сосисочная машина (справедливо для всех статистических методов)

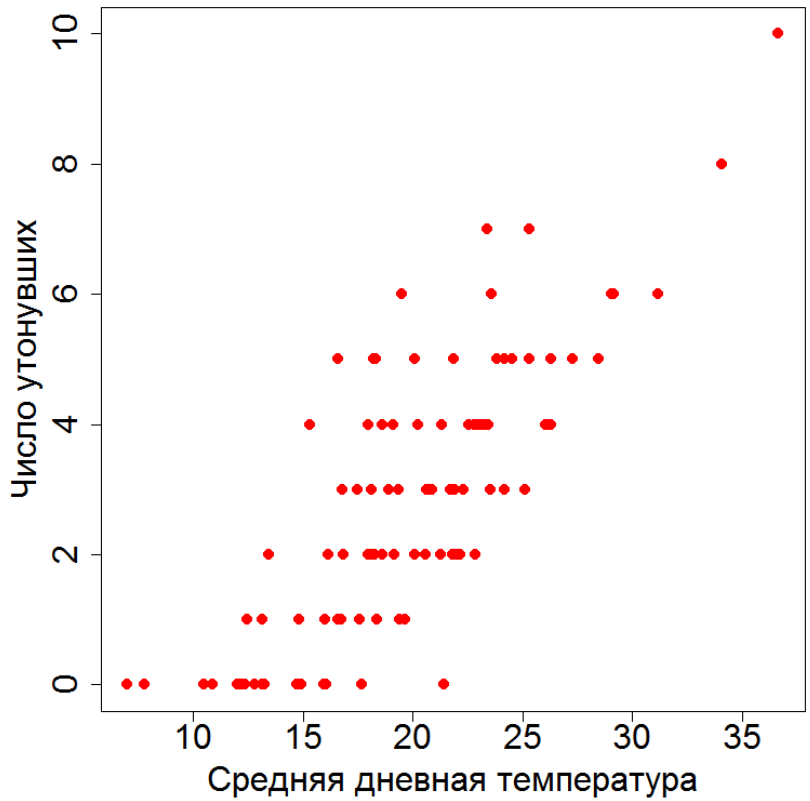
Мороженое и смерть



$r_{X_1X_2} = 0.33, p = 0.0009$ (критерий Стьюдента), 95% доверительный интервал — $[0.138, 0.491]$.

Мороженое, смерть и температура

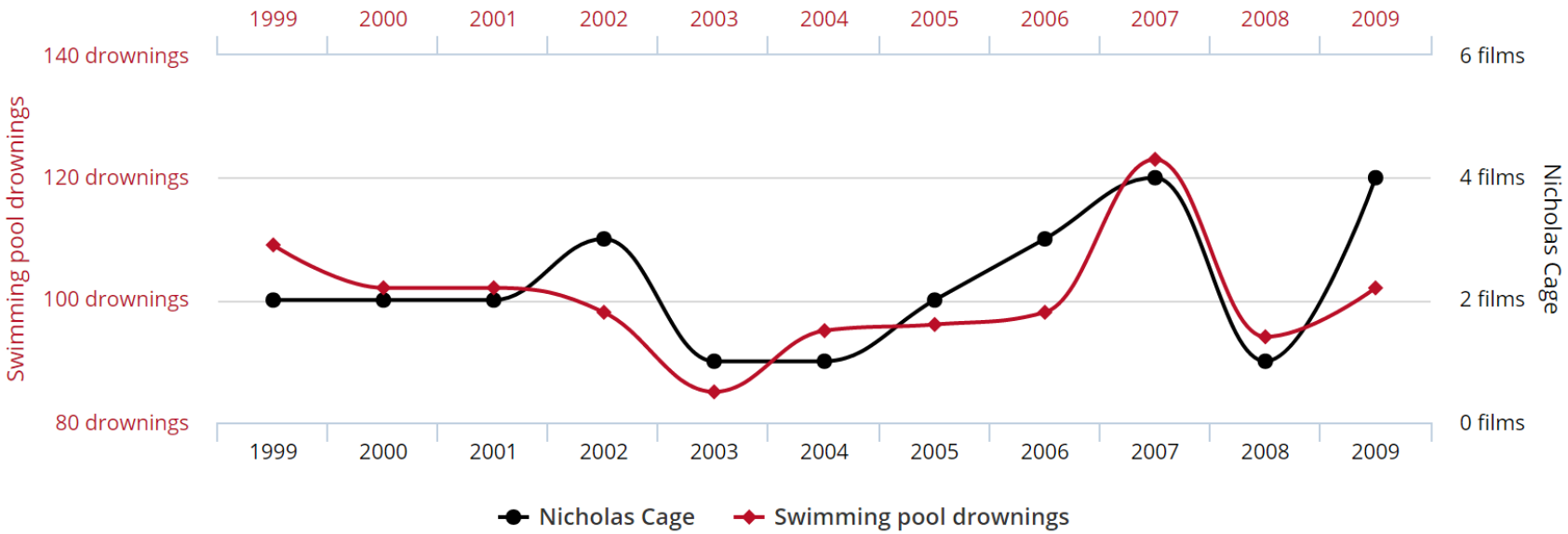




Другие примеры

- количество самоубийств и радиоприёмников на душу населения (размер города)
- уровень CO_2 в атмосфере и распространённость ожирения (уровень жизни)
- рыночная доля Internet Explorer и количество убийств в США (время)

Смерть и Николас Кейдж



$r_{X_1X_2} = 0.67, p = 0.0253$ (критерий Стьюдента), 95% доверительный интервал — $[0.110, 0.905]$.

Больше: `http://www.tylervigen.com`

Резюме

- корреляция $\not\Rightarrow$ причинно-следственная связь
- причинно-следственная связь $\xRightarrow{\text{возможно}}$ корреляция

Литература

- непрерывные признаки — Лагутин, гл. 20;
- категориальные признаки — Agresti, гл. 2 и 3, Bilder, разделы 3.1, 3.2, 6.2.1, 6.2.2;
- значимость корреляции Пирсона — Kanji, №12, Good, 3.8;
- значимость корреляции Кендалла и Спирмена — Кобзарь, 5.2.2.2.1, 5.2.2.2.2;
- значимость частной и множественной корреляций — Кобзарь, 5.2.1.3.

Кобзарь А.И. *Прикладная математическая статистика*, 2006.

Лагутин М.Б. *Наглядная математическая статистика*, 2007.

Agresti A. *Categorical Data Analysis*, 2013.

Bickel P.J., Hammel E.A., O'connell J.W. (1975). *Sex bias in graduate admissions: data from Berkeley*. Science, 187(4175), 398–404.

Bilder C.R., Loughin T.M. *Analysis of Categorical Data with R*, 2013.

Good P. *Permutation, Parametric and Bootstrap Tests of Hypotheses: A Practical Guide to Resampling Methods for Testing Hypotheses*, 2005.

Kanji G.K. *100 statistical tests*, 2006.