

Метод обнаружения структурных сдвигов в GARCH-моделях с помощью бутстрэпа

Новиков Лев

10 июня 2020

Презентация основана на результатах выпускной квалификационной работы "Метод обнаружения структурных сдвигов в GARCH-моделях с помощью бутстрэпа".

Предисловие

Оценивание волатильности финансовых инструментов — важная задача, поскольку при неправильном оценивании можно недооценить риск, что может повлечь за собой серьезные убытки.

Один из широко используемых подходов — моделирование волатильности с помощью GARCH моделей. Однако, со временем параметры модели могут существенным образом меняться (например, при наступлении кризиса или если компания трансформируется в ходе M&A сделок).

Поэтому важно уметь выявлять моменты структурных сдвигов. Модель GARCH(p,q) определяется как

$$Y_t = r_t, \quad r_t = \sigma_t \cdot \epsilon_t, \quad \sigma_t^2 = w + \sum_{i=1}^q \alpha_i r_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

где $\theta = (w, \alpha_1, \dots, \alpha_q, \beta_1, \dots, \beta_p)$ — параметры модели, а $\{\epsilon_t\}_{t=-\infty}^{+\infty}$ — последовательность стандартизованных ошибок — инноваций (независимых, одинаково распределенных случайных величин).

О волатильности

Большинству финансовых временных рядов свойственны следующие факты:

- Цены финансовых активов в большинстве случаев не стационарны, в отличие от их доходностей;
- Автокорреляция для ряда доходностей как правило низкая или совсем отсутствует;
- Автокорреляция для ряда квадратов доходностей как правило высокая;
- Для волатильности в финансовом ряде чаще всего наблюдается кластеризация.

Естественной мерой волатильности для большинства финансовых рядов является логарифмическая доходность, определяемая как $r_t = \log(P_t) - \log(P_{t-1})$, где P_t — цена базового актива или биржевого индекса в момент времени t .

KL-метод (Kokoszka, Leipus, 1999)

Рассматривается следующая статистика:

$$\text{KL}(k) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{t=1}^k r_t^2 - \frac{k}{n} \sum_{t=1}^n r_t^2 \right), \quad k \in \{1, \dots, n\}.$$

Момент, подозреваемый на наличие структурного сдвига определяется как

$$\hat{k} = \min \left\{ k : |\text{KL}(k)| = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |\text{KL}(i)| \right\}.$$

KL-метод (Kokoszka, Leipus, 1999)

Положим $q = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, где $\lfloor \cdot \rfloor$ означает округление вниз.

Обозначим $\hat{s}_{n,q}^2 = \sum_{|j| \leq q} w_j \hat{\gamma}_j$, где $w_j = 1 - \frac{|j|}{q+1}$ — веса для треугольного ядра, и

$$\hat{\gamma}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-|j|} \left(r_i^2 - \bar{r}^2 \right) \left(r_{i+|j|}^2 - \bar{r}^2 \right) \text{ — выборочные ковариации.}$$

Критерий о наличии структурного сдвига: если

$$\frac{|\text{KL}(\hat{k})|}{\hat{s}_{n,q}} \geq q_{1-p},$$

то на уровне значимости p момент \hat{k} считается **моментом структурного сдвига**. Здесь q_{1-p} — квантиль уровня $1 - p$ супремума модуля Броуновского моста $\sup_{u \in [0; 1]} |B^0(u)|$.

KL-метод (Kokoszka, Leipus, 1999)

Супремум модуля Броуновского моста имеет распределение Колмогорова-Смирнова:

$$\Pr\left(\sup_{u \in [0; 1]} |B^0(u)| \leqslant v\right) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 v^2}, \text{ где } v > 0$$

Асимптотические квантили равны

$$q_{0.9} = 1.224, \quad q_{0.95} = 1.358, \quad q_{0.99} = 1.628.$$

О связи распределения Колмогорова-Смирнова и супремума модуля броуновского моста

Для распределения Колмогорова-Смирнова имеем

$$K(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\sqrt{n}D_n \leq t) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\sqrt{n} \sup_x |F_n(x) - F(x)| \leq t).$$

$$\sqrt{n} \sup_x |F_n(x) - F(x)| = \sup_x \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Z_i(x) \right|, \text{ где}$$

$$Z_i(x) = 1_{X_i \leq x} - \mathbb{E}[1_{X_i \leq x}]$$

Согласно ЦПТ, $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Z_i(x) \xrightarrow{d} N(0, F(x)(1 - F(x)))$ при $n \rightarrow \infty$.

Для Броуновского же моста $B(t)$ дисперсия равна $t(1 - t)$, и учитывая, что можно положить $t = F(x)$ и применить теорему Донскера, получаем требуемое.

Пример применения алгоритма

Рассмотрим результат работы указанного критерия на примере 2000 симулированных наблюдений, соответствующим GARCH(1, 1) со структурным сдвигом на 1001 наблюдении.

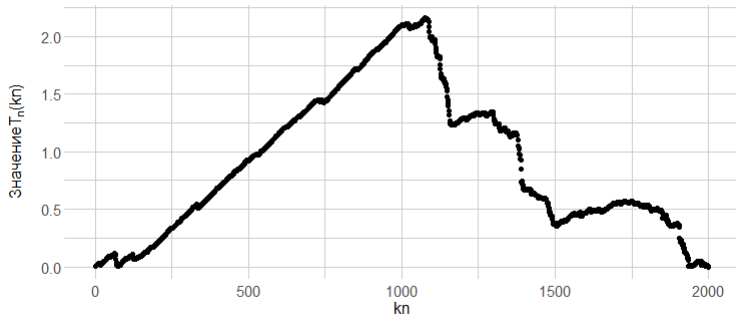
Параметры для обеих GARCH моделей указаны в таблице:

Параметры			
	w	β	α
$t \leq 1000$	0,1	0,7	0,2
$t \geq 1001$	0,3	0,7	0,2

Процесс $T_n(k)$ для этого временного ряда изображен на графике ниже:

Пример применения алгоритма

Процесс $T_n(kn)$ для данных с одним структурным сдвигом



Максимум указанного процесса достигается на $\hat{k} = 1076$ -ом наблюдении, максимальное значение процесса составляет $T_n(1076) = 2.165$, что больше $1.628 = q_{0.99}$, и гипотеза об отсутствии структурного сдвига отвергается на 1%-ном уровне значимости.

Алгоритм на основе бутстрэпа

Напоминание: классический бутстрэп, если данные $\{x_t\}_{t=1}^n$ являются независимыми наблюдениями, состоит в том, чтобы выбрать m наблюдений $\{x_1^*, \dots, x_m^*\}$ из исходной выборки с возвращением (сгенерировать бутстрэп-выборку), а затем вычислить интересующую нас статистику t^* на основе выбранных наблюдений. После этого данная процедура повторяется B раз, и в результате получается вектор $\{t_1^*, \dots, t_B^*\}$. Тогда распределение полученного в ходе бутстрэпа вектора аппроксимирует распределение тестовой статистики при верной нулевой гипотезе. Если мы выполним бутстрэп для тестовой статистики, то правостороннее p -значение для бутстрэпа может быть оценено как $\hat{p}^* = \frac{1}{B} \sum_{j=1}^B I(t_j^* \geq t)$, где t — тестовая статистика, оцененная по исходной выборке, а $I(x)$ — индикаторная функция.

Основная проблема

В случае временных рядов, когда наблюдения автокоррелированы, они не являются независимыми, и использование метода генерации повторной выборки может в итоге дать результаты хуже, чем классический подход.

Однако, в данной работе рассматривается метод, который вместо модифицирования метода повторной выборки (например, стационарного бутстрэпа) рассматривает применение классического бутстрэпа к стандартизованным ошибкам $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, поскольку ϵ_t являются независимыми, одинаково распределенными случайными величинами.

Описание критерия

Критерий для проверки гипотезы об отсутствии структурных сдвигов с помощью бутстрапа устроен следующим образом:

- 1 Для данной выборки $\{r_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ оцениваются коэффициенты GARCH(p, q) согласно оптимизационной задаче

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta \in \Theta} \sum_{i=1}^n \tilde{l}_i(\theta), \text{ где } \tilde{l}_i(\theta) = \frac{r_i^2}{\tilde{\sigma}_i^2(\theta)} + \log(\tilde{\sigma}_i^2(\theta))$$

— оценка псевдо-максимального правдоподобия;

- 2 Рекурсивно оцениваются условные дисперсии

$$\tilde{\sigma}_t^2(\hat{\theta}) = \hat{w} + \sum_{i=1}^q \hat{\alpha}_i r_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \hat{\beta}_j \tilde{\sigma}_{t-j}^2(\hat{\theta}), \text{ после чего вычисляются}$$

оценки стандартизованных ошибок $\tilde{\epsilon}_t = \frac{r_t}{\tilde{\sigma}_t(\hat{\theta})}, t = 1, \dots, n;$

- 3 Вычисляется статистика критерия

$$\tilde{T}_n = \frac{1}{\hat{\tau}\sqrt{n}} \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=1}^k \tilde{\epsilon}_i^2 - \frac{k}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{\epsilon}_i^2 \right|, \text{ где}$$

$$\hat{\tau}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{\epsilon}_i^4 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{\epsilon}_i^2 \right)^2$$

Отдельно отметим, что в данном случае нет необходимости в непараметрическом оценивании дисперсии с помощью треугольного ядра.

Описание критерия

- Используя бутстрэп, выбираем n наблюдений из исходной выборки $\tilde{\epsilon}_1, \dots, \tilde{\epsilon}_n$ с возвращением (генерируем бутстрэп-выборку стандартизованных ошибок $\tilde{\epsilon}_1^*, \dots, \tilde{\epsilon}_n^*$)

4.1. На основе полученной выборки стандартизованных ошибок рекурсивно находим бутстрап-выборку

$$r_t^* = \sigma_t^* \tilde{\epsilon}_t^*, \quad \sigma_t^{*2}(\hat{\theta}) = \hat{w} + \sum_{i=1}^q \hat{\alpha}_i r_{t-i}^{*2} + \sum_{j=1}^p \hat{\beta}_j \sigma_{t-j}^{*2}(\hat{\theta}),$$

с фиксированными начальными значениями для $r_0^{*2}, \dots, r_{1-q}^{*2}$ и $\sigma_0^{*2}, \dots, \sigma_{1-p}^{*2}$. В алгоритме в качестве начального приближения использована выборочная дисперсия $\{r_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, однако показано, что асимптотически начальными приближениями можно пренебречь;

Описание критерия

4.2. Для полученной бутстрэп-выборки вычисляется статистика критерия

$$\tilde{T}_n^* = \frac{1}{\hat{\tau}^* \sqrt{n}} \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=1}^k \tilde{\epsilon}_i^{**2} - \frac{k}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{\epsilon}_i^{**2} \right|, \text{ где}$$

$\hat{\tau}^{*2}$ — оценка дисперсии $\tilde{\epsilon}_i^{**2}$ методом моментов, а $\{\tilde{\epsilon}_t^{**}\}$ определяется с помощью найденных на предыдущем шаге $\{r_t^*\}$ согласно формуле $\tilde{\epsilon}_t^{**} = \frac{r_t^*}{\tilde{\sigma}_t^{**}(\hat{\theta})}$, $t = 1, \dots, n$.

Условные дисперсии здесь также находятся рекурсивно

$$\tilde{\sigma}_t^{**2}(\hat{\theta}) = \hat{w}^* + \sum_{i=1}^q \hat{\alpha}_i^* r_{t-i}^{*2} + \sum_{j=1}^p \hat{\beta}_j^* \tilde{\sigma}_{t-j}^{**2}(\hat{\theta})$$

с фиксированными начальными значениями для $r_0^{*2}, \dots, r_{1-q}^{*2}$ и $\tilde{\sigma}_0^{**2}, \dots, \tilde{\sigma}_{1-p}^{**2}$;

Описание критерия

- 5 Шаги 4, 4.1, 4.2 повторяются B раз (в нашем алгоритме для уменьшения трудоемкости используется $B = 100$). В итоге получается выборка из бутстрэп-статистик

$$\tilde{T}_{n_1}^*, \dots, \tilde{T}_{n_B}^*;$$

- 6 Для данного критерия оценивается р-значение:

$$\hat{p}^* = \frac{1}{B} \sum_{j=1}^B I\left(\tilde{T}_{n_j}^* \geq \tilde{T}_n\right),$$

исходя из которого делается вывод о том, отвергается или не отвергается нулевая гипотеза об отсутствии структурных сдвигов на данном уровне значимости (0.05 или 0.01).

Исследование на симулированных данных

Было показано¹, что данный метод является устойчивым при неправильной спецификации модели (например, при рассматривании GARCH(1,1) модели вместо GARCH(2,1)).

Поэтому во всех тестах будет оцениваться модель GARCH(1,1).

Мы будем рассматривать такие параметры GARCH-модели, которые являются приближенными к реальной ситуации на финансовом рынке. Для этой цели были собраны данные о ценах закрытия для акций 13 крупных компаний, торгуемых на американской бирже, за последние 10 лет, построены ряды логарифмических доходностей и для каждого ряда оценена GARCH(1, 1)-модель.

Результаты представлены в таблице №1 на следующем слайде: (компании — Apple, Boeing, Chevron, Disney, IBM, Intel Corp., Johnson&Johnson, JPMorgan, Coca-Cola, McDonalds, Microsoft, WalMart, Exxon Mobil).

¹Lee, Kim, Baek, «Tests for volatility shifts in Garch Against Long-Range Dependence», p. 136

Исследование на симулированных данных

Параметры оцененных GARCH(1, 1) моделей для логарифмических доходностей акций крупных американских компаний:

Таблица №1													
TICKER	AAPL	BA	CVX	DIS	IBM	INTC	JNJ	JPM	KO	MCD	MSFT	WMT	XOM
α	0.11	0.10	0.10	0.14	0.11	0.07	0.10	0.11	0.07	0.18	0.13	0.32	0.13
β	0.82	0.86	0.87	0.78	0.78	0.88	0.87	0.84	0.88	0.64	0.79	0.54	0.84

Как следствие, в работе рассматриваются модели GARCH(1, 1) с параметрами $\alpha=0.1$ и $\beta=0.8$. Параметр w для всех оцениваемых рядов очень мал (порядка 10^{-5}) и поэтому в таблице не указан, в нашем исследовании мы положили $w=0.1$. Мы будем сравнивать эмпирические ошибки первого рода и мощности критериев на уровнях значимости 0.05 и 0.01. Все результаты основаны на 1000 симуляций для выборок размеров 200, 500, и 2000, рассматриваются уровни значимости 5% и 1%.

Исследование на симулированных данных

В качестве альтернативы для симуляций, сравнивающих мощности тестов, рассматривается модель со структурным сдвигом на наблюдении 101, 251, 1001, соответственно, с изменением параметра w на 0.2. То есть первая половина наблюдений ведёт себя согласно модели GARCH(1, 1) с параметрами (0.1, 0.1, 0.8), а вторая — согласно модели GARCH(1, 1) с параметрами (0.3, 0.1, 0.8).

Эмпирические ошибки первого рода

Таблица №2

Ошибка первого рода при уровне значимости 0.01

	n=200	n=500	n=2000
KL	0	0.01	0.005
Bootstrap	0	0.005	0.01

Таблица №3

Ошибка первого рода при уровне значимости 0.05

	n=200	n=500	n=2000
KL	0.02	0.07	0.05
Bootstrap	0.03	0.07	0.045

Мощность теста для проверки гипотезы об отсутствии структурных сдвигов

Таблица №4

Мощность теста при уровне значимости 0.01

$(w_1, \alpha_1, \beta_1) \text{ и } (w_2, \alpha_2, \beta_2)$	n=200	n=500	n=2000
KL (0.1, 0.1, 0.8) – (0.3, 0.1, 0.8)	0.11	0.755	0.995
Bootstrap (0.1, 0.1, 0.8) – (0.3, 0.1, 0.8)	0.075	0.195	0.945

Таблица №5

Мощность теста при уровне значимости 0.05

$(w_1, \alpha_1, \beta_1) \text{ и } (w_2, \alpha_2, \beta_2)$	n=200	n=500	n=2000
KL (0.1, 0.1, 0.8) – (0.3, 0.1, 0.8)	0.66	0.95	0.995
Bootstrap (0.1, 0.1, 0.8) - (0.3, 0.1, 0.8)	0.195	0.45	0.995

Как мы видим, при большом размере выборки ошибка первого рода для обоих тестов становится близкой к номинальному уровню значимости 0.01 и 0.05, а эмпирическая мощность стремится к 1, что подтверждается результатами других исследований. Таким образом, асимптотические свойства у статистики, построенной с использованием бутстрэп-метода, сохраняются.

Однако, при малом числе наблюдений новый критерий не даёт большей мощности; более того, мощность критерия оказалась существенно ниже, чем у давно изученного CUSUM-теста, в связи с чем можно сделать вывод о том, что данный метод хорошо себя проявляет лишь на больших выборках.

Реальные данные

Проверим, как новый метод выявляет структурные сдвиги в реальных данных. В качестве исходных данных рассматриваются уже упомянутые цены закрытия, наблюдаемый диапазон времени — с 30.04.2010 по 30.04.2020, всего в каждой выборке порядка 2500 наблюдений.

Для всех временных рядов была произведена предобработка на случай наличия в данных сплита или обратного сплита цены акции (в случае, если бы он не был учтен, это был бы выброс во временном ряде логарифмических доходностей). Затем строится ряд логарифмических доходностей $r_t = \log(P_t) - \log(P_{t-1})$, где P_t — цена акции в момент времени t , после чего итеративно выявляются структурные сдвиги.

Реальные данные

Результаты для рассмотренных компаний получились следующие:

Таблица №6

TICKER	AAPL	BA	CVX	DIS	IBM	INTC	JNJ	JPM	KO	MCD	MSFT	WMT	XOM
\hat{k}	-	2533	2539	-	2191	2012	2010	2533	2219	2533	-	1413	-

Как мы можем видеть, 4 компании из разных секторов экономики — Boeing, Chevron, JPMorgan и McDonald's согласно нашему критерию имеют структурный сдвиг приблизительно в одно и то же время. Это соответствует 20.02.2020 (для McDonald's 21.02.2020). В это время на финансовом рынке США начался крах из-за развала сделки ОПЕК, а также опасений по поводу коронавирусной инфекции, которые спустя несколько недель получили подтверждение.

В итоге поведение волатильности изменилось: она ощутимо возросла, что и замечает наш критерий.

Пример использования теста для улучшения оценки волатильности

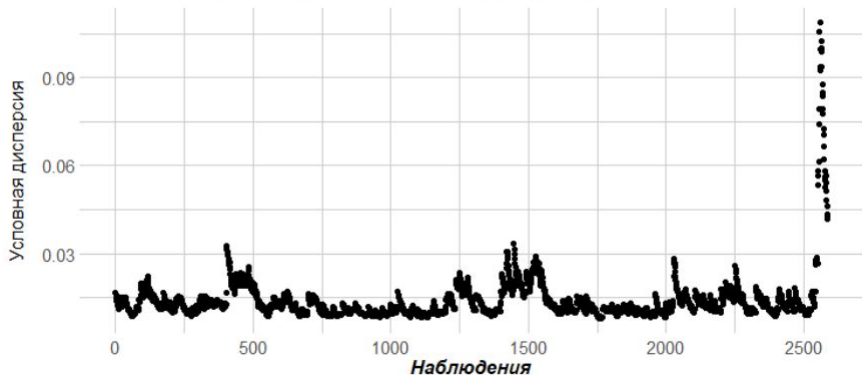
Если волатильность моделируется при помощи GARCH модели, мы можем улучшить оценку, оценив GARCH модель отдельно для каждой из полученных после применения метода подвыборок.

Покажем пример этого для логарифмических доходностей цены акции компании Chevron. Оценим GARCH(1, 1)-модель для всей выборки и получим условные дисперсии для всего временного ряда, а затем сделаем это в отдельности для наблюдений 1-2538 и 2539-2587.

Результаты можно увидеть на графиках ниже:

Пример использования теста для улучшения оценки волатильности

Условная дисперсия GARCH(1,1)-процесса



Пример использования теста для улучшения оценки волатильности

Пересчитанная условная дисперсия



- Мы протестировали новый метод на реальных данных — логарифмических доходностях акций крупных американских компаний, и обнаружили, что алгоритм выявляет структурные сдвиги в реальных финансовых временных рядах, в том числе примерную дату начала последнего кризиса — 20.02.2020.
- Рассмотренный нами метод хорошо выявляет структурные сдвиги в случае большого количества наблюдений: эмпирические ошибки первого рода близки к номинальным, а мощность стремится к 1. Однако, при малом числе наблюдений мощность теста оказывается невысокой: существенно меньше, чем мощность CUSUM-теста.

Таким образом, предпочтительнее использовать CUSUM-тест.

Спасибо за внимание!