11 января 2023 г.

Задачи по теме «Вычисление площадей при помощи определённого интеграла» с подсказками:

№1.
Найти площадь фигуры, которая получится, если разделить плоскость осью Ox и параболой $y(x) = x^2 - 9x + 18$.

Подсказка: Применить формулу $S = F(b) - F(a)$, предварительно найдя точки пересечения b и a. Подумать о том, какой должен быть знак.

№2.
Найти площадь плоской фигуры, которая ограничена координатными прямыми, прямой $x = 1$, и функцией $y(x) = -e^x$.

Подсказка: Применить формулу $S = F(b) - F(a)$, выяснив чему равны b и a. Подумать о том, какой должен быть знак у площади.

№3.
Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x + 1,\ y = \frac{2}{x},\ y = 0,\ x = 3$ (сначала аккуратно нарисовать все графики на координатной плоскости).

Подсказка: Разбей площадь данной фигуры на две более простых площади.

№4*.
Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y_1(x) = -x,\ y_2(x) = 2x - x^2$ (сначала нарисовать на координатной плоскости параболу и прямую и понять, каковы пределы интегрирования).

Подсказка: Интегрироваться будет функция $f(x) = y_2(x) - y_1(x)$. Почему?

№5*.
Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y_1(x) = x^2 - 2,\ y_2(x) = 2x + 1$ (сначала нарисовать на координатной плоскости параболу и прямую и понять, каковы пределы интегрирования).

Подсказка: Площадь криволинейной трапеции, заключённой между функциями $f(x)$ и $g(x)$, может быть вычислена как $\int\limits_a^b (f(x) - g(x))\,dx$, если $f > g$ на $[a; b]$.

№6*.
Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y_1(x) = x^2 + x,\ y_2(x) = 1 - x^2$ (сначала нарисовать на координатной плоскости параболы и понять, каковы пределы интегрирования).

Подсказка: Площадь криволинейной трапеции, заключённой между функциями $f(x)$ и $g(x)$, может быть вычислена как $\int\limits_a^b (f(x) - g(x))\,dx$, если $f > g$ на $[a;b]$.

№7*.

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x + y = 4$, $xy = 3$ (сначала нарисовать графики на координатной плоскости).

Подсказка: Площадь криволинейной трапеции, заключённой между функциями $f(x)$ и $g(x)$, может быть вычислена как $\int\limits_a^b (f(x) - g(x))\,dx$, если $f > g$ на $[a;b]$.

№8*.

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3 - x + 1$, $y = -\frac{7}{8}$, $x = \frac{1}{2}$ (сначала аккуратно нарисовать график на координатной плоскости).

Подсказка: Площадь криволинейной трапеции, заключённой между функциями $f(x)$ и $g(x)$, может быть вычислена как $\int\limits_a^b (f(x) - g(x))\,dx$, если $f > g$ на $[a;b]$.

№9*.

Интеграл $I(a) = \displaystyle\int_{a-1}^{a+1} f(x)\,dx$ равен площади под графиком функции $f(x)$ на отрезке $[a–1;\ a+1]$. Найти, при каком вещественном a эта площадь будет наименьшей из всех возможных, если $f(x) = x^2 - 5x + 7$.

Подсказка: Вычисли определённый интеграл (он будет зависеть от a), а затем с помощью производной найди минимум этого выражения.

№10*.

Интеграл $\displaystyle\int_{b-1}^{b+1} e^{-|x|}\,dx$ равен площади под графиком функции $f(x) = e^{-|x|}$ на отрезке $[b-1;\ b+1]$. Нарисовать график этой функции и выяснить, при каком вещественном b эта площадь будет максимальна.

Подсказка: Вычисли определённый интеграл (он будет зависеть от b), а затем с помощью производной найди максимум этого выражения.
Для того, чтобы аккуратно избавиться от модуля, надо рассмотреть три случая:
1) $b-1 < b+1 \leqslant 0$, **2)** $0 \leqslant b-1 < b+1$, **3)** $b-1 \leqslant 0 \leqslant b+1$.