11 января 2023 г.

Задачи по теме «Вычисление площадей при помощи определённого интеграла» с решениями и ответами:

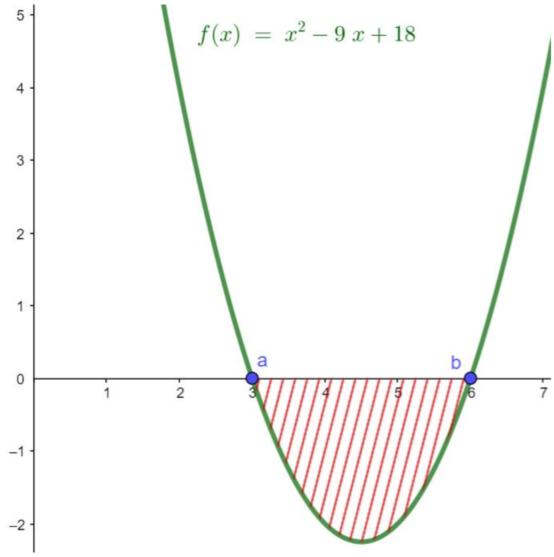
№1.

Найти площадь фигуры, которая получится, если разделить плоскость осью Ox и параболой $y(x) = x^2 - 9x + 18$.

Решение:

Ось абсцисс Ox пересекается с параболой $y(x) = x^2 - 9x + 18$ в её корнях.
$x^2 - 9x + 18 = (x-3)(x-6)$, поэтому её корнями являются $x = 3$ и $x = 6$.

То есть нам нужно найти площадь выпуклого сегмента параболы, изображённого на рисунке справа.



По теореме Ньютона-Лейбница площадь фигуры в данном случае может быть вычислена по формуле $S = F(b) - F(a)$.

Найдём первообразную:
$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 18x + C$. Получаем, что $S = F(6) - F(3) = \frac{1}{3} \cdot (6^3 - 3^3) - \frac{9}{2} \cdot (6^2 - 3^2) + 18 \cdot (6-3) + C - C = \frac{216-27}{3} - \frac{9 \cdot 27}{2} + 18 \cdot 3 = 63 - 121{,}5 + 54 = -4{,}5$. Площадь получилась отрицательной, потому что вся находится в отрицательной области, абсолютная величина же равна 4,5.

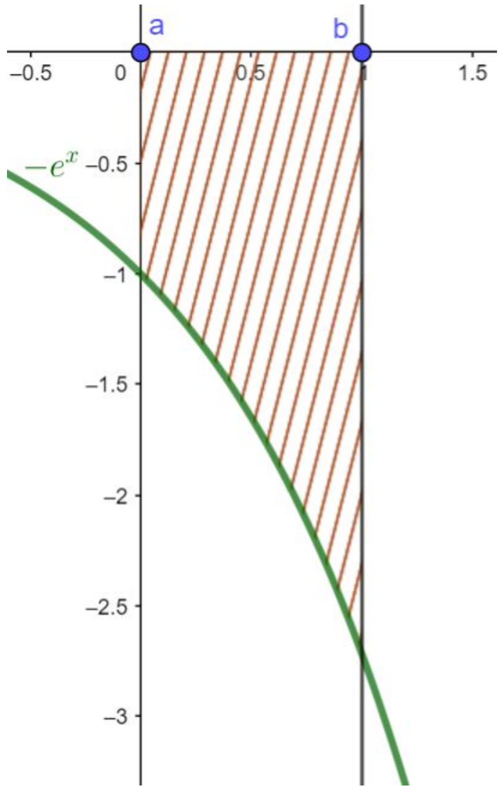
Ответ: Площадь фигуры (абсолютная величина) равна 4,5.

№2.

Найти площадь плоской фигуры, которая ограничена координатными прямыми, прямой $x = 1$, и функцией $y(x) = -e^x$.

Решение:

Одна из координатных прямых — $x = 0$, поэтому наша фигура находится между $x = 0$ и $x = 1$. Сверху она ограничена осью абсцисс, снизу экспонентой.



То есть нам нужно найти площадь фигуры, изображённой на рисунке справа.

По теореме Ньютона-Лейбница площадь фигуры в данном случае может быть вычислена по формуле $S = F(b) - F(a)$.

Находим первообразную: $F(x) = -e^x + C$. Получаем, что $S = F(1) - F(0) = -e^1 - (-e^0) + C - C = -e + 1 = 1 - e \approx -1{,}718$.

Площадь получилась отрицательной, потому что она вся находится в отрицательной области, абсолютная величина же равна $e - 1 \approx 1{,}718$.

Ответ: $S = e - 1 \approx 1{,}718$.

№3.

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x + 1$, $y = \frac{2}{x}$, $y = 0$, $x = 3$ (сначала аккуратно нарисовать все графики на координатной плоскости).

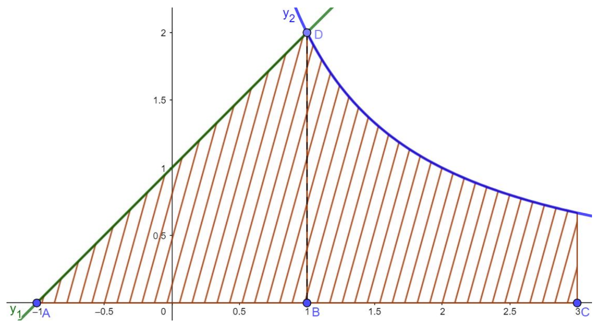
Решение: Выясним, что с чем пересекается: $y = x + 1$ пересекается с $y = \frac{2}{x}$ $\Rightarrow$ $x + 1 = \frac{2}{x}$ $\Rightarrow$ $x^2 + x - 2 = 0$ $\Rightarrow$ $x = 1$; $x = -2$.

Точки пересечения прямой и гиперболы — $(1; 2)$ и $(-2; -1)$.

Прямая $y = x + 1$ пересекается с $y = 0$ в $x = -1$, точка пересечения $(-1; 0)$.

Точки пересечения прямой $x = 3$ с осью абсцисс и гиперболой — $(3; 0)$ и $(3; \frac{2}{3})$.

Таким образом, интересующая нас фигура выглядит так, как показано на рисунке справа, координаты всех указанных точек мы уже нашли.



Чтобы найти площадь под графиком, нужно вычислить определённый интеграл.

В данном случае можно использовать аддитивность интеграла: искомая площадь равна сумме двух площадей, и $S = \int\limits_{-1}^{1} (x+1)\,dx + \int\limits_{1}^{3} \frac{2}{x}\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_{-1}^{1} + 2\ln x\Big|_{1}^{3} =$

$= \frac{1}{2} + 1 - \frac{(-1)^2}{2} - (-1) + 2\ln 3 - 2\ln 1 = 2 + 2\ln 3 = 2(1 + \ln 3)$.

Ответ: Площадь указанной фигуры равна $2(1 + \ln 3) \approx 4{,}197$.

№4*.

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y_1(x) = -x$, $y_2(x) = 2x - x^2$ (сначала нарисовать на координатной плоскости параболу и прямую и понять, каковы пределы интегрирования).

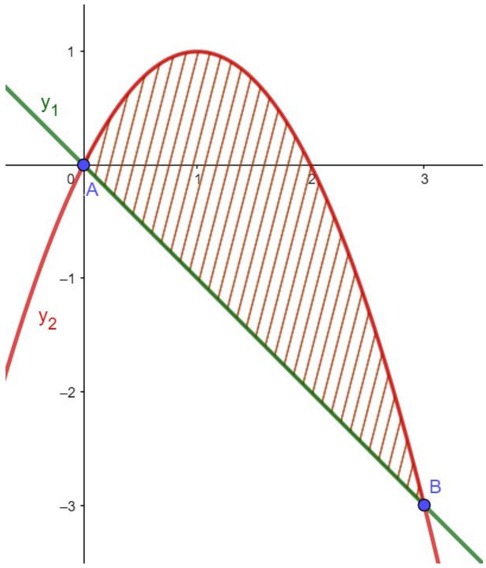
Решение:

Изобразим графики функций $y_1(x) = -x$ и $y_2(x) = 2x - x^2$: получается, что фигура имеет вид, изображённый на рисунке справа. Найдём точки пересечения прямой и параболы (графические методы не позволяют ничего посчитать):

$-x = 2x - x^2 \;\Rightarrow\; 3x - x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x(3-x) = 0.$

Значит, парабола и прямая пересекаются в точках $A(0;0)$ и $B(3;-3)$. То есть для нахождения площади нужно найти определённый интеграл от 0 до 3 от какой-то функции.

Разберёмся, что это за функция: суммируются величины $f(x)$, при x, меняющемся от 0 до 3.



После размышлений можно понять, что интеграл берётся от функции $y_2(x) - y_1(x)$: везде на этом отрезке $y_2(x) \geqslant y_1(x)$ и $y_2(x) - y_1(x)$ является длиной вертикального отрезка, рассекающего эту фигуру по точкам с абсциссой x.

Вычисляем определённый интеграл: $\int\limits_0^3 ((2x - x^2) - (-x))\,dx = \int\limits_0^3 (3x - x^2)\,dx = \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^3 = \frac{3}{2}\cdot 9 - \frac{1}{3}\cdot 3^3 = 13{,}5 - 9 = 4{,}5.$

Таким образом, площадь образующейся фигуры равна 4,5.

Ответ: Площадь фигуры, которая ограничена линиями $y_1(x) = -x$ и $y_2(x) = 2x - x^2$, равна 4,5.

№5*.

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y_1(x) = x^2 - 2$, $y_2(x) = 2x + 1$ (сначала нарисовать на координатной плоскости параболу и прямую и понять, каковы пределы интегрирования).

Решение:

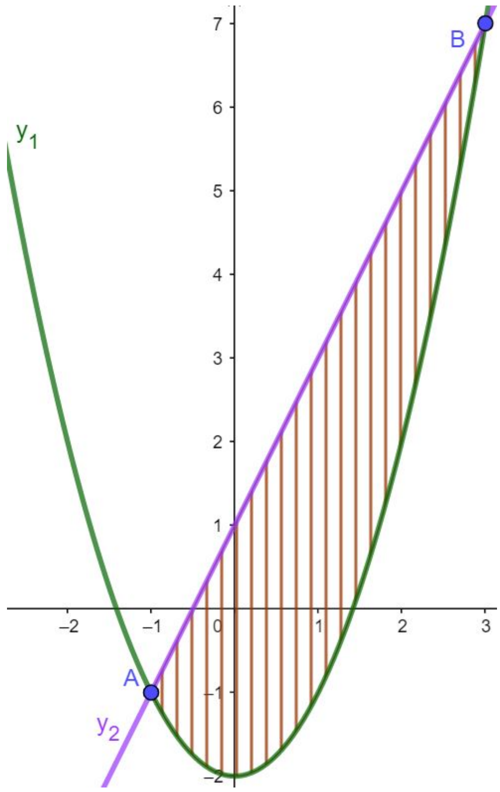
Выясним, где пересекаются эти прямая и парабола: $y_1(x) = y_2(x) \Rightarrow x^2 - 2 = 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3;\ x = -1$.

Поэтому фигура имеет вид, изображённый на рисунке справа. Чтобы найти данную площадь, нужно вычислить определённый интеграл.

А так как $y_2(x) - y_1(x)$ равно высоте данной фигуры в точке x, площадь этой фигуры по определению интеграла равна $\int\limits_{-1}^{3} (y_2(x) - y_1(x))\,dx =$

$= \int\limits_{-1}^{3} (2x + 1 - (x^2 - 2))\,dx = \int\limits_{-1}^{3} (3 + 2x - x^2)\,dx$.

$\int\limits_{-1}^{3} (3 + 2x - x^2)\,dx = \left(3x + x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{3} = 9 + 9 - \frac{27}{3} - \left(-3 + (-1)^2 - \frac{(-1)^3}{3}\right) = 11 - \frac{1}{3} = 10\frac{2}{3}$.



Ответ: Площадь данной фигуры равна $10\frac{2}{3}$.

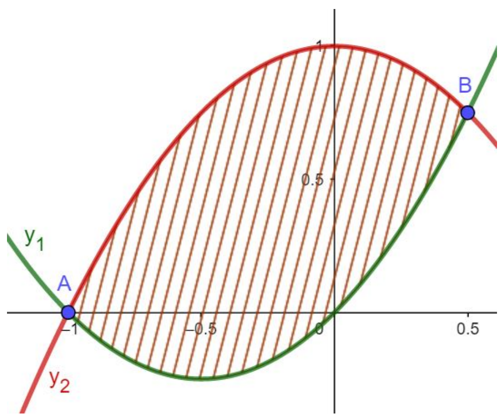
№6*.

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y_1(x) = x^2 + x$, $y_2(x) = 1 - x^2$ (сначала нарисовать на координатной плоскости параболы и понять, каковы пределы интегрирования).

Решение: Выясним, в каких точках эти параболы пересекаются: $y_1(x) = y_2(x) \Rightarrow x^2 + x = 1 - x^2 \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow D = 9 \Rightarrow x = -1;\ x = \frac{1}{2}$.

Поэтому фигура имеет вид, изображённый на рисунке справа. Чтобы найти данную площадь, нужно вычислить определённый интеграл.

$y_2(x) - y_1(x)$ равно высоте этой фигуры в точке x, поэтому площадь этой фигуры по определению интеграла равна $\int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}} (y_2(x) - y_1(x))\,dx$.



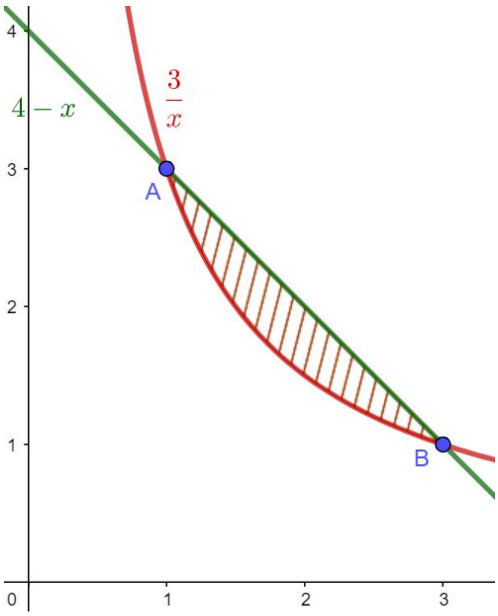
$\int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}} (y_2(x) - y_1(x))\,dx = \int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}} (1 - x^2 - (x^2 + x))\,dx = \int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}} (1 - x - 2x^2)\,dx = \left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{12} - \left(-1 - \frac{1}{2} - \frac{2\cdot(-1)^3}{3}\right) = 2 - \frac{1}{8} - \frac{1}{12} - \frac{2}{3} = 1\frac{1}{8} = 1{,}125$.

Ответ: Площадь указанной фигуры составляет 1,125.

№7*.

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x + y = 4$, $xy = 3$ (сначала нарисовать графики на координатной плоскости).

Решение: Перепишем уравнения, задающие наши линии, выразив y:
$x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - x$. $xy = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{x}$.
Выясним, где данные линии пересекаются:
$4 - x = \frac{3}{x} \Rightarrow 4x - x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = 1;\ x = 3$.
Следовательно, поскольку везде на отрезке $[1;\ 3]$ прямая лежит выше гиперболы ($4 - x > \frac{3}{x}$), площадь фигуры S может быть найдена с помощью следующего определённого интеграла:



$$S = \int\limits_1^3 \left(4 - x - \frac{3}{x}\right)\, dx.$$

$\int\limits_1^3 (4 - x - \frac{3}{x})\, dx = \left(4x - \frac{x^2}{2} - 3\ln x\right)\Big|_1^3 = 12 - 4{,}5 - 3\ln 3 - (4 - 0{,}5 - 3\ln 1) = 4 - 3\ln 3$.

Ответ: Площадь данной фигуры равна $4 - 3\ln 3 \approx 0{,}704$.

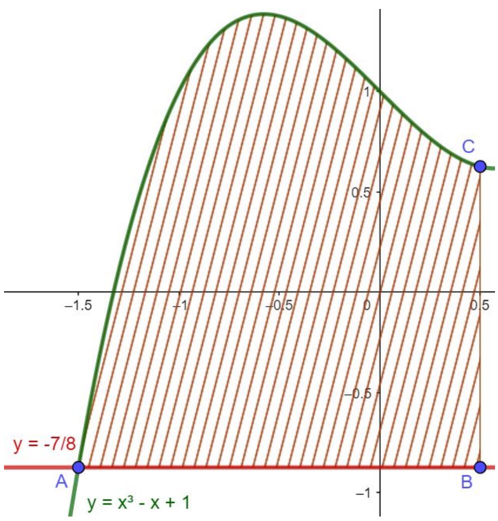
№8*.

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3 - x + 1$, $y = -\frac{7}{8}$, $x = \frac{1}{2}$ (сначала аккуратно нарисовать график на координатной плоскости).

Решение: Выясним, в каких точках происходят пересечения: есть пересечение перпендикулярных прямых в точке $B = (\frac{1}{2};\ -\frac{7}{8})$, есть точка $C = (\frac{1}{2};\ \frac{5}{8})$.

Найдём точку пересечения $y = x^3 - x + 1$ и $y = -\frac{7}{8}$:
$x^3 - x + 1 = -\frac{7}{8} \Rightarrow x^3 - x + \frac{15}{8} = 0 \Rightarrow (x + \frac{3}{2}) \cdot (x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}) = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$.
(поскольку для квадратного $D = \frac{9}{4} - 4 \cdot \frac{5}{4} < 0$).

То есть $A = (-\frac{3}{2};\ -\frac{7}{8})$. Следовательно, фигура имеет вид, изображённый на рисунке справа:



Высота этой фигуры в точке x равна $x^3 - x + \frac{15}{8}$, поэтому площадь этой фигуры по определению интеграла равна $S = \int\limits_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} (x^3 - x + \frac{15}{8})\, dx$.

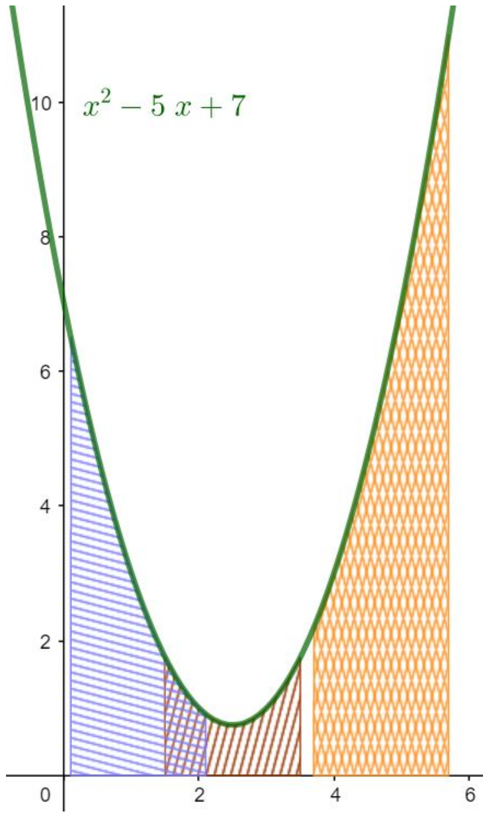
$\int\limits_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} (x^3 - x + \frac{15}{8})\, dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{15}{8}x\right)\Big|_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{64} - \frac{1}{8} + \frac{15}{16} - \left(\frac{81}{64} - \frac{9}{8} - \frac{45}{16}\right) = -\frac{80}{64} + 1 + \frac{60}{16} = -\frac{5}{4} + 1 + \frac{15}{4} = 3{,}5$.

Ответ: Площадь указанной фигуры составляет 3,5.

№9*.

Интеграл $I(a) = \int_{a-1}^{a+1} f(x)\,dx$ равен площади под графиком функции $f(x)$ на отрезке $[a–1;\ a+1]$. Найти, при каком вещественном a эта площадь будет наименьшей из всех возможных, если $f(x) = x^2 - 5x + 7$.

Решение:



Квадратный трёхчлен x^2-5x+7 имеет отрицательный дискриминант $D = 25 - 28 < 0$ и положительный старший коэффициент, поэтому данная парабола находится выше оси абсцисс и любой определённый интеграл будет положителен. Поскольку пределы интегрирования — $a-1$ и $a+1$, в каждом случае получается «окно» шириной 2. Пусть a — какое-то неизвестное нам число, вычислим определённый интеграл:

$\int f(x)\,dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 7x + C \ \Rightarrow$

$\int_{a-1}^{a+1}(x^2 - 5x + 7)\,dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 7x\right|_{a-1}^{a+1} =$
$= \frac{1}{3}((a+1)^3-(a-1)^3) - \frac{5}{2}((a+1)^2-(a-1)^2) + 7(a+1-(a-1)) = \frac{1}{3}(6a^2+2) - 10a + 14 =$
$= 2f(a) + \frac{2}{3}$.

Итого, $I(a) = 2f(a) + \frac{2}{3}$. Для нахождения минимума $I(a)$ находим производную: $I'(a) = 2\cdot(2a-5)$. $\ I'(a) = 0 \ \Rightarrow\ a = 2{,}5$ (вершина параболы).

Ответ: Данная площадь $S = I(a)$ будет наименьшей, если взять $a = 2{,}5$. Площадь в этом случае будет равна $2f(2{,}5) + \frac{2}{3} = \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{13}{6} \approx 2{,}17$.

№10*.

Интеграл $\int_{b-1}^{b+1} e^{-|x|}\,dx$ равен площади под графиком функции $f(x) = e^{-|x|}$ на отрезке $[b-1;\ b+1]$. Нарисовать график этой функции и выяснить, при каком вещественном b эта площадь будет максимальна.

Решение: Для того, чтобы правильно раскрыть модуль во всех случаях, будем действовать аккуратно. Во-первых, подынтегральная функция $f(x) = e^{-|x|}$ равна e^x при $x \leqslant 0$ и равна e^{-x} при $x \geqslant 0$. Далее, для нахождения интеграла нам понадобится первообразная функции $f(x)$. При $x \leqslant 0$ первообразной $f_1(x) = e^x$ является $e^x + C$, при $x \geqslant 0$, первообразной для $f_2(x) = e^{-x}$ будет $-e^{-x} + C$.

Согласно формуле Ньютона-Лейбница, $I(b) = \int_{b-1}^{b+1} f(x)\,dx = F(b+1) - F(b-1)$.

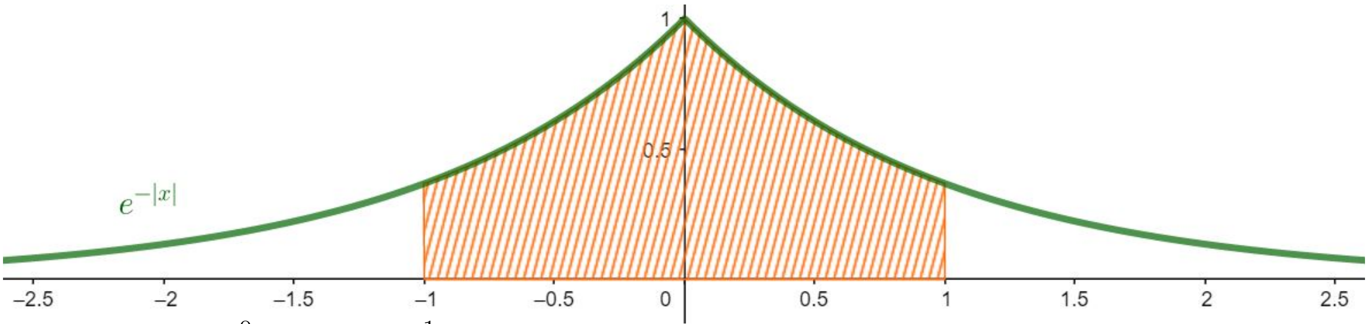
Рассмотрим отдельно три случая:

1) $b-1 < b+1 \leqslant 0$. Тогда $F(x) = e^x$, и интеграл равен $e^{b+1} - e^{b-1} = e^b \cdot (e - \frac{1}{e})$. В этом случае $b \leqslant -1$, а при поиске максимума мы получаем, что e^b должно быть как можно больше (ведь $e - \frac{1}{e} > 0$, e^b — монотонно возрастающая). То есть $b = -1$.

2) $0 \leqslant b-1 < b+1$, или $b \geqslant 1$. Тогда $F(x) = -e^{-x}$, $I(b) = -e^{-(b+1)} - (-e^{-(b-1)}) = e^{-b} \cdot (e - \frac{1}{e})$. При поиске максимума, так как $e - \frac{1}{e} > 0$, а e^{-x} — монотонно убывающая функция, получаем, что b должно быть как можно меньше, то есть $b = 1$.

3) Случай, когда левый предел интегрирования неположителен, а правый — неотрицателен: $b-1 \leqslant 0 \leqslant b+1$. В этом случае $I(b) = -e^{-(b+1)} - e^{b-1} = -\frac{1}{e} \cdot (e^b + e^{-b})$. Мы ищем максимум этого выражения, причём только для $b \in [-1;\, 1]$.
$I'(b) = -\frac{1}{e} \cdot (e^b - e^{-b})$. Находим критическую точку: $I'(b) = 0 \;\Rightarrow\; e^b - e^{-b} = 0 \;\Rightarrow\; e^b = e^{-b} \;\Rightarrow\; b = -b \;\Rightarrow\; b = 0$. Несложно убедиться, что это действительно точка максимума (левее производная положительна, правее — отрицательна).

Таким образом, все значения b, такие что $|b| > 1$, проигрывают $b = \pm 1$, а те, в свою очередь, проигрывают $b = 0$ (смотри на график функции $f(x)$ ниже)



$$I(0) = \int_{-1}^{0} e^x \, dx + \int_0^1 e^{-x} \, dx = e^0 - e^{-1} + (-e^{-1}) - (-e^0) = 2 - \frac{2}{e} \approx 1{,}26.$$

Ответ: Площадь будет максимальна при $b = 0$. $S_{\max} = I(0) = 2 - \frac{2}{e} \approx 1{,}26$.