❶❽ Metode moderne de estimare spectrală

Metode de extracţie a liniilor spectrale dominante (continuare)

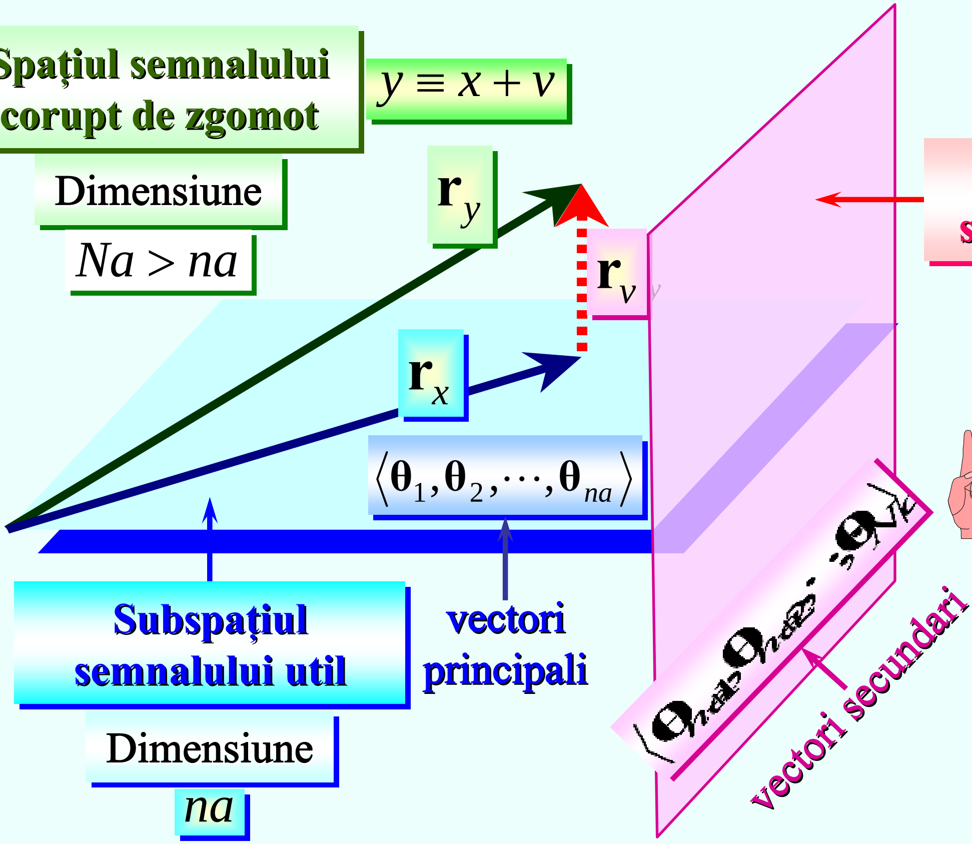
Metoda atenuării zgomotului (descompunere ortogonală în spaţiul semnalelor)

Ideea descompunerii ortogonale

Semnalul util, ca şi semnalul perturbator, deşi aparţin aceluiaşi spaţiu de semnale, se situează în 2 subspaţii ortogonale ale acestuia, determinate de vectorii secvenţelor de autocovarianţă.

Spaţiul semnalului corupt de zgomot $y \equiv x + v$

Dimensiune $Na > na$



Subspaţiul semnalului parazit

Dimensiune $Na - na$

Subspaţiul semnalului util

Dimensiune na

Separarea dintre cele două subspaţii **nu poate fi perfectă**.

Întotdeauna **o parte a semnalului util se pierde** prin proiecţia pe subspaţiul parazit, în timp ce **o parte a semnalului parazit se conservă** prin proiecţia pe subspaţiul util.

❶❽ Metode moderne de estimare spectrală

Metode de extracţie a liniilor spectrale dominante (continuare)

Metoda atenuării zgomotului (continuare)

- Strategia generală este reconsiderată.

Modelul semnalului util (generalizat)

$$x[n] \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{na} A_i e^{j(n\omega_i + \varphi_i)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

faze aleatoare, independente statistic, uniform distribuite (necunoscute)

amplitudini deterministe (necunoscute)

pulsaţii dominante

☝ Tot necunoscute.

Obiectiv — **Determinarea**

$\{\omega_i\}_{i\in\overline{1,na}}$ pulsaţiilor dominante

$\{A_i^2\}_{i\in\overline{1,na}}$ puterilor spectrale dominante

☝ Nu şi a fazelor!

folosind semnalul y.

Exerciţiu

$$r_x[k] \stackrel{def}{=} E\left\{x[n]\overline{x[n-k]}\right\} = \sum_{i=1}^{na} A_i^2 e^{jk\omega_i} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

- Pentru a demonstra această relaţie se poate ţine cont de următoarea proprietate:

$$E\left\{e^{j(n\omega+\theta)}\right\} = \begin{cases} e^{j\theta} & , \ \omega = 0 \\ 0 & , \ \omega \neq 0 \end{cases}$$

$y \equiv x + e$

$$r_y[k] = \lambda_e^2 \delta_0[k] + \sum_{i=1}^{na} A_i^2 e^{jk\omega_i} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\mathbf{R}_{Na}(x) \stackrel{def}{=} E\left\{\mathbf{x}[n]\overline{\mathbf{x}^T[n]}\right\} = \sum_{i=1}^{na} A_i^2 \mathbf{w}_i \overline{\mathbf{w}}_i^T$$

$$\mathbf{R}_{Na}(y) = \mathbf{R}_{Na}(x) + \lambda_e^2 \mathbf{I}_{Na}$$

matrici de autocovarianţă de ordin Na

$$\mathbf{x}[n] \stackrel{def}{=} \left[x[n] \ \ x[n-1] \ \cdots \ x[n-Na+1]\right]^T \in \mathbb{R}^{Na}$$

vector de semnal util

$$\mathbf{w}_i \stackrel{def}{=} \left[1 \ \ e^{j\omega_i} \ \ e^{2j\omega_i} \ \ \cdots \ \ e^{j(Na-1)\omega_i}\right]$$

vector armonic elementar

❶❽ Metode moderne de estimare spectrală

Metode de extracţie a liniilor spectrale dominante (continuare)

Metoda atenuării zgomotului (continuare)

Descompunere spectrală

$$\mathbf{R}_{Na}(y) = \mathbf{R}_{Na}(x) + \lambda_e^2 \mathbf{I}_{Na}$$

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_{na} \geq \lambda_{na+1} \geq \cdots \geq \lambda_{Na}$$ ← valori proprii ordonate descrescător

$$\boldsymbol{\theta}_1 \quad \boldsymbol{\theta}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\theta}_{na} \quad \boldsymbol{\theta}_{na+1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\theta}_{Na}$$ ← vectori proprii ortonormaţi

$$\overline{\boldsymbol{\theta}}_l^T \boldsymbol{\theta}_m = \delta_0[l-m] \quad \forall\, l,m \in \overline{1,Na}$$

În absenţa zgomotului

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_{na} \geq \lambda_{na+1} = \cdots = \lambda_{Na} = 0$$

- În acest caz, descompunerea spectrală corespunde matricii $\mathbf{R}_{Na}(x)$.

$$\mathbf{R}_{Na}(x) = \sum_{i=1}^{na} \lambda_i \boldsymbol{\theta}_i \overline{\boldsymbol{\theta}}_i^T \Rightarrow \boldsymbol{\theta}_1 \quad \boldsymbol{\theta}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\theta}_{na}$$ ← vectori proprii principali, care generază subspaţiul util

$$\langle \boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, \cdots, \boldsymbol{\theta}_{na} \rangle$$

În prezenţa zgomotului

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_{na} \geq \lambda_{na+1} \geq \cdots \geq \lambda_{Na} \geq 0$$

- Vectorii principali continuă să aibă rolul de a genera subspaţiul util.

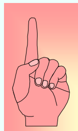
$$\mathbf{I}_{Na} = \sum_{i=1}^{Na} \boldsymbol{\theta}_i \overline{\boldsymbol{\theta}}_i^T$$

(ortonormalitate)

$$\mathbf{R}_{Na}(y) = \underbrace{\sum_{i=1}^{na} \lambda_i \boldsymbol{\theta}_i \overline{\boldsymbol{\theta}}_i^T}_{\mathbf{R}_{Na}(x)} + \lambda_e^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{Na} \boldsymbol{\theta}_i \overline{\boldsymbol{\theta}}_i^T}_{\mathbf{I}_{Na}} = \boxed{\sum_{i=1}^{na} \left(\lambda_i + \lambda_e^2\right) \boldsymbol{\theta}_i \overline{\boldsymbol{\theta}}_i^T} + \boxed{\lambda_e^2 \sum_{i=na+1}^{Na} \boldsymbol{\theta}_i \overline{\boldsymbol{\theta}}_i^T}$$

proiector

proiector



$$\perp$$

$$\langle \boldsymbol{\theta}_{na+1}, \boldsymbol{\theta}_{na+2}, \cdots, \boldsymbol{\theta}_{Na} \rangle$$

$$\boldsymbol{\theta}_{na+1} \quad \boldsymbol{\theta}_{na+2} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\theta}_{Na}$$ ← vectori proprii secundari, care generază subspaţiul parazit

❶❽ Metode moderne de estimare spectrală

Metode de extracţie a liniilor spectrale dominante (continuare)

Metoda atenuării zgomotului (continuare)

Alegerea lui Pisarenko $Na = na + 1$

- Modelul cu diferențe din cazul semnalelor cu valori reale **poate fi transformat** într-un model corespunzător semnalelor cu valori complexe (de dimensiune mai mică, dar cu **parametri avînd de asemenea valori complexe**).

$$\begin{cases} x[n] + a_1 x[n-1] + a_2 x[n-2] = 0 \\ a_1 = -2\cos\omega_0 \quad a_2 = 1 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$x[n] \leftarrow x[n] - e^{-j\omega_0} x[n-1]$$

$$\begin{cases} x[n] + a\,x[n-1] = 0 \\ a = -e^{j\omega_0} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$x[0] = A$$

$$x[n] = Ae^{jn\omega_0} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$y \equiv x + v$$

$$\sum_{i=0}^{na} a_i y[n-i] = \sum_{i=0}^{na} a_i v[n-i] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Model ARMA[na,na] cu polinoame identice.

- Parametrii modelului cu diferențe sunt identici cu elementele **vectorului propriu corespunzător valorii proprii minime.** λ_{na+1}

$$\boldsymbol{\theta}_{na+1} = [a_0 \;\; a_1 \;\; \cdots \;\; a_{na}]^T$$

- Aceasta, deoarece vectorii armonici elementari **aparţin subspaţiului util**, deci sunt **ortogonali** pe vectorul propriu al valorii proprii minime.

$$\overline{\mathbf{w}}_i^T \boldsymbol{\theta}_{na+1} = 0 \quad \forall i \in \overline{1,na}$$

$$a_0 + a_1 e^{-j\omega_i} + a_2 e^{-2j\omega_i} + \cdots + a_{na} e^{-jna\,\omega_i} = 0$$

Aşadar

Se poate reveni la **Metoda lui Pisarenko**.

Pulsațiile dominante sunt unghiurile rădăcinilor polinomului caracteristic.

$$P(q^{-1}) \overset{def}{=} a_0 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-1} + \cdots + a_{na} q^{-na}$$

❶❽ Metode moderne de estimare spectrală

Metode de extracţie a liniilor spectrale dominante (continuare)

Metoda atenuării zgomotului (continuare)

Alegerea generală $Na > na$

- În acest caz, s-a demonstrat că valoarea proprie minmă are multiplicitatea (***Na-na***).

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_{na} \geq \lambda_{na+1} = \cdots = \lambda_{Na} \geq 0$$

- Vectorul parametrilor modelului cu diferenţe pot fi aleşi în mod neunic sub forma unei combinaţii liniare de vectori proprii corespunzători valorii proprii minime.

$$\boldsymbol{\theta} = [a_0 \;\; a_1 \;\; \cdots \;\; a_{na}]^T = \alpha_1 \boldsymbol{\theta}_{na+1} + \alpha_2 \boldsymbol{\theta}_{na+2} + \cdots + \alpha_{Na-na} \boldsymbol{\theta}_{Na}$$

Tot Metoda lui Pisarenko poate fi utilizată în continuare.

- În practică, din cauza utilizării matricii estimate de autocovarianţă a semnalului original şi a erorilor numerice, se ajunge la (***Na-na***) valori proprii diferite dar apropiate .

$$\hat{\lambda}_1 \geq \hat{\lambda}_2 \geq \cdots \geq \hat{\lambda}_{na} \geq \hat{\lambda}_{na+1} \cong \cdots \cong \hat{\lambda}_{Na} \geq 0$$

Ce se poate face?

În nici un caz nu se alege valoarea proprie minimă, care poate fi eronată.

O idee este să se opereze cu media valorilor proprii apropiate ca estimaţe a dispersiei zgomotului alb şi să se scadă dimensiunea spaţiului semnalelor de la Na la $na+1$.

$$\hat{\lambda}_e^2 \overset{def}{=} \frac{\hat{\lambda}_{na+1} + \hat{\lambda}_{na+2} + \cdots + \hat{\lambda}_{Na}}{Na - na}$$

Metoda lui Pisarenko

❶❽ Metode moderne de estimare spectrală

Metode de extracţie a liniilor spectrale dominante (continuare)

Metoda MUSIC (MUltiple SIgnal Classification)

- Această metodă oferă o altă soluție pentru problema valorilor proprii minime aproximativ egale.

Ideea clasificării multiple (R.D. Schmidt)

(1981, 1986)

Faptul că valoarea proprie minimă are multiplicitatea neunitară induce posibilitatea de a efectua o clasificare a semnalelor utile în funcție de vectorii proprii utilizați pentru determinarea modelului ARMA.

Cu toate acestea, semnalele utile au o proprietate comună: spectrul semnalului parazit cale le însoţeşte are linii spectrale nule pentru pulsaţiile dominante, oricare ar fi acestea.

Spectrul parazit ideal

$$\Phi_x^{\perp}(\omega) \overset{def}{=} \sum_{p=na+1}^{Na} w_p \left| \overline{\mathbf{w}}^T(\omega)\boldsymbol{\theta}_p \right|^2 \quad \forall\,\omega\in\mathbb{R}$$

ponderi nenegative

$$\mathbf{w}(\omega) \overset{def}{=} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\omega} & e^{2j\omega} & \cdots & e^{j(Na-1)\omega} \end{bmatrix}^T$$

vector armonic elementar variabil

Spectrul parazit este complementar celui util.

$$\mathbf{w}(\omega_i) = \mathbf{w}_i \quad \forall\, i\in\overline{1,na}$$

$$\Phi_x^{\perp}(\omega_i) \overset{def}{=} \sum_{p=na+1}^{Na} w_p \underbrace{\left| \overline{\mathbf{w}}_i^T\,\boldsymbol{\theta}_p \right|^2}_{\mathbf{w}_i\perp\boldsymbol{\theta}_p} = 0 \quad \forall\, i\in\overline{1,na}$$

Spectrul util ideal

$$\Phi_x(\omega) \overset{def}{=} \frac{1}{\displaystyle\sum_{p=na+1}^{Na} w_p \left| \overline{\mathbf{w}}^T(\omega)\boldsymbol{\theta}_p \right|^2} \quad \forall\,\omega\in\mathbb{R}$$

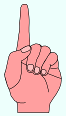
Spectrul util estimat

$$\hat{\Phi}_x(\omega) \overset{def}{=} \frac{1}{\displaystyle\sum_{p=na+1}^{Na} w_p \left| \overline{\mathbf{w}}^T(\omega)\hat{\boldsymbol{\theta}}_p \right|^2} \quad \forall\,\omega\in\mathbb{R}$$

➊➑ Metode moderne de estimare spectrală

Metode de extracţie a liniilor spectrale dominante (continuare)

Metoda MUSIC (continuare)



Spectrul util ideal are valori infinite pentru pulsațiile dominate.

Chiar dacă spectrul util estimat are valori finite pentru pulsațiile dominante, precizia lor este modestă.

Spectrul util de tip MUSIC are o foarte bună capacitate de localizare a pulsațiilor dominante (şi, implicit, de diseminare a pulsațiilor dominante apropiate).

Determinarea pulsaţiilor dominante se realizează prin detectarea maximelor spectrului util estimat (de tip MUSIC), dar puterile spectrale dominante se realizează cu ajutorul Metodei lui Pisarenko.

Algoritm

① Se stabileşte dimensiunea spaţiului semnalelor corupte de zgomot. Na

- De regulă, se ține cont de dimensiunea maximă a matricii de autocovarianță, pentru care descompunerea spectrală mai este eficientă.

② Se stabileşte dimensiunea spaţiului semnalelor utile. na

- Acest parametru controlează calitatea separaţiei dintre semnalul util şi cel parazit.
- Dacă na este prea mare, zgomotul este slab atenuat şi afectează în mod semnificativ semnalul util.
- Dacă na este prea mic, semnalul util suferă pierderi irecuperabile de informaţie.
- Determinarea unei valori optimale a dimensiunii subspațiului util se poate realiza cu ajutorul unui criteriu numit Descriere de Lungime Minimală.

Metode de extracţie a liniilor spectrale dominante (continuare)

Metoda MUSIC (continuare)

Algoritm (continuare)

③ Se realizează descompunerea spectrală a matricii de autocovarianță. $\hat{\mathbf{R}}_{Na}(y)$

$$\left\{\begin{array}{l} \hat{\lambda}_1 \geq \hat{\lambda}_2 \geq \cdots \geq \hat{\lambda}_{na} \geq \hat{\lambda}_{na+1} \geq \cdots \geq \hat{\lambda}_{Na} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_1 \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_2 \quad \cdots \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_{na} \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_{na+1} \quad \cdots \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_{Na} \end{array}\right.$$

← valori proprii ordonate descrescător

← vectori proprii ortonormaţi

- Dacă dimensiunea subspațiului util a fost corect estimată, ultimele **(*Na-na*)** valori proprii sunt apropiate între ele şi sensibil diferite de restul valorilor proprii.
- Altfel, această dimensiune trebuie estimată din nou (eventual prin simulări).

☝ Nu întotdeauna se poate face o distincţie netă între valorile proprii mari şi cele mici.

④ Se estimează spectrul util de tip **MUSIC** cu o rezoluție în frecvență suficient de mare şi se determină primele na maxime ale sale cele mai puternice.

$$\hat{\Phi}_x(\omega) \stackrel{def}{=} \frac{1}{\displaystyle\sum_{p=na+1}^{Na} w_p \left| \overline{\mathbf{w}}^T(\omega)\hat{\boldsymbol{\theta}}_p \right|^2} \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \{\omega_i\}_{i\in\overline{1,na}} \leftarrow \arg\max_{\omega\in\mathbb{R}} \hat{\Phi}_x(\omega)$$

$$\mathbf{w}(\omega) \stackrel{def}{=} \left[1 \;\; e^{j\omega} \;\; e^{2j\omega} \;\; \cdots \;\; e^{j(Na-1)\omega}\right]^T$$

➊➑ Metode moderne de estimare spectrală

Metode de extracţie a liniilor spectrale dominante (continuare)

Metoda MUSIC (continuare)

Algoritm (continuare)

⑤ Se foloseşte **Metoda lui Pisarenko** pentru determinarea puterilor spectrale dominante (cazul semnalelor practice, cu valori reale).

$$r_y[k] \overset{def}{=} E\{y[n]y[n-k]\} = \lambda_e^2 \delta_0[k] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{na} A_i^2 \cos(k\omega_i) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_1^2 \\ \hat{A}_2^2 \\ \vdots \\ \hat{A}_{na}^2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \cos\omega_1 & \cos\omega_2 & \cdots & \cos\omega_{na} \\ \cos 2\omega_1 & \cos 2\omega_2 & \cdots & \cos 2\omega_{na} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos na\omega_1 & \cos na\omega_2 & \cdots & \cos na\omega_{na} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{r}_y[1] \\ \hat{r}_y[2] \\ \vdots \\ \hat{r}_y[na] \end{bmatrix}$$

⑥ Se estimează dispersia zgomotului alb, ca măsură a regularităţii spectrului estimat.

$$\hat{\lambda}_e^2 = \hat{r}_y[0] - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{na} \hat{A}_i^2$$

☝ În cazul semnalelor cu valori complexe, pasul 5 (Metoda lui Pisarenko) se poate modifica în mod corespunzător.

Exerciţiu

❶❽ Metode moderne de estimare spectrală

Metode de extracţie a liniilor spectrale dominante (continuare)

Determinarea numărului de armonice dominante

- Există 2 teste de bază.

Testul valorilor proprii

$$\hat{\mathbf{R}}_{Na}(y) = \sum_{i=1}^{na}\left(\hat{\lambda}_i + \hat{\lambda}_e^2\right)\hat{\boldsymbol{\theta}}_i\bar{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_i^T + \hat{\lambda}_e^2 \sum_{i=na+1}^{Na}\hat{\boldsymbol{\theta}}_i\bar{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_i^T$$

$\left\{\hat{\lambda}_i\right\}_{i\in\overline{1,na}}$ ← valori proprii utile

$\left\{\hat{\lambda}_p \cong \hat{\lambda}_e^2\right\}_{p\in\overline{na+1,Na}}$ ← valori proprii parazite

$$\hat{\lambda}_1 \geq \hat{\lambda}_2 \geq \cdots \geq \hat{\lambda}_{na} \geq \hat{\lambda}_{na+1} \geq \cdots \geq \hat{\lambda}_{Na}$$

Prag de separaţie care grupează (dacă este posibil) valorile proprii utile (cu amplitudini semnificative) şi valorile proprii parazite (cu amplitudini sensibil mai mici).

☝ Testul valorilor proprii eşuează frecvent în cazul unui raport semnal-zgomot (SNR – Signal-to-Noise Ratio) insuficient de mare.

Testul MDL

$$na = \arg\min_{p\in\overline{1,Na}} \boxed{\mathrm{MDL}[p]}$$

Minimum Description Length (Descriere de Lungime Minimală).

Wax-Kailath-Rissanen (1985)

$$\mathrm{MDL}[p] \overset{def}{=} \frac{p(2Na-p)}{2}\ln N - N\ln\left(\prod_{i=p+1}^{Na}\hat{\lambda}_i\right) + N(Na-p)\ln\left(\frac{1}{Na-p}\sum_{i=p+1}^{Na}\hat{\lambda}_i\right)$$

$\forall p \in \overline{1,Na}$

☝ Testul MDL este consistent.

❶❽ Metode moderne de estimare spectrală

O analiză comparativă succintă

Exemplu

Performanțele metodelor de estimare spectrală reprezentative pentru un semnal cu 4 pulsații dominante.

$$y[n] \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{4} A_i e^{j(n\omega_i + \varphi_i)} + e[n] \quad \forall n \in \overline{0, N-1}$$

Parametrii semnalului

$A_i = 1 \quad \forall i \in \overline{1,4}$

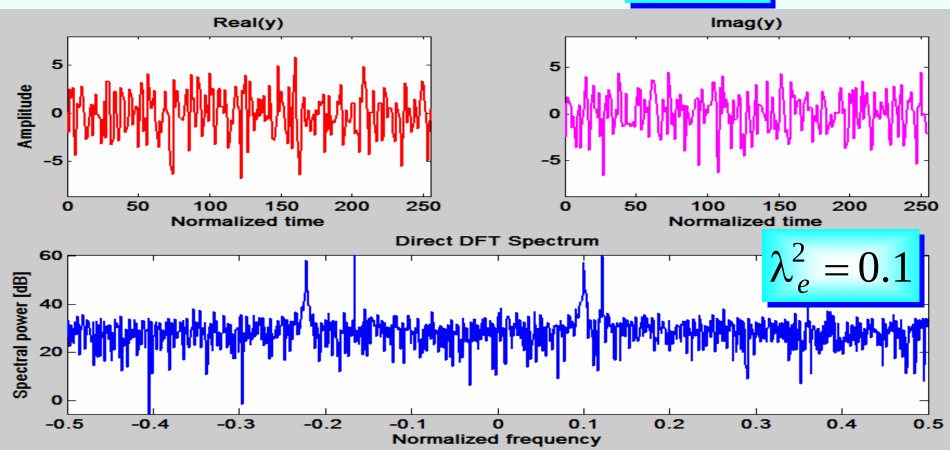
$\omega_1 = -1.39487$ $\omega_2 = -1.04301$

$\omega_3 = +0.62832$ $\omega_4 = +0.76655$

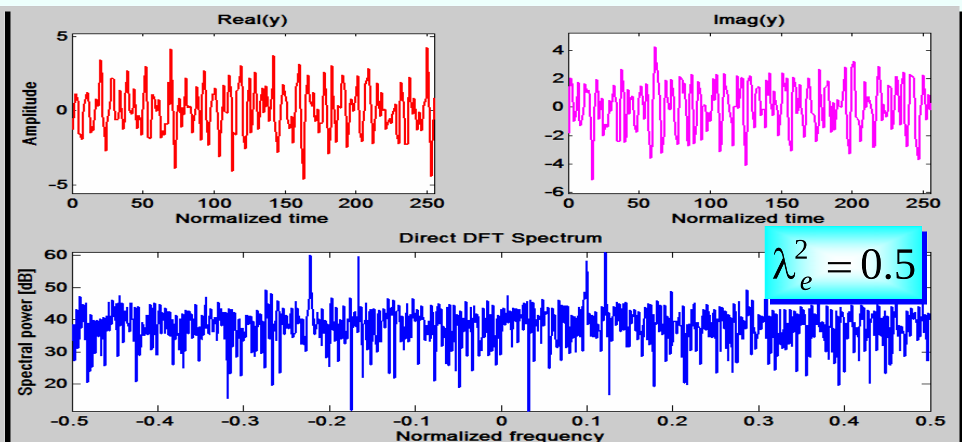
$\lambda_e^2 \in \{0.1, 0.5, 1\}$ (3 SNR diferite)

$N = 1024$ $Na = 12$

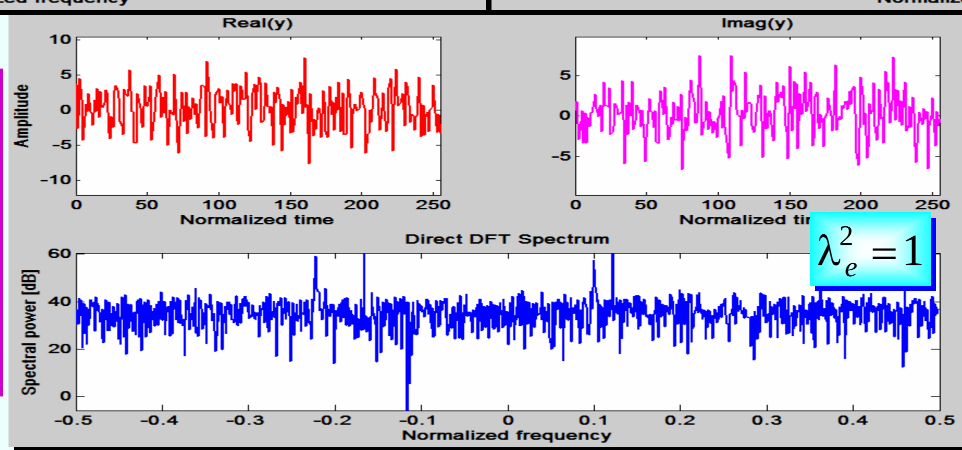
$\{\varphi_i\}_{i \in \overline{1,4}}$ ← variabile aleatoare independente, uniform distribuite



$\lambda_e^2 = 0.1$



$\lambda_e^2 = 0.5$



$\lambda_e^2 = 1$

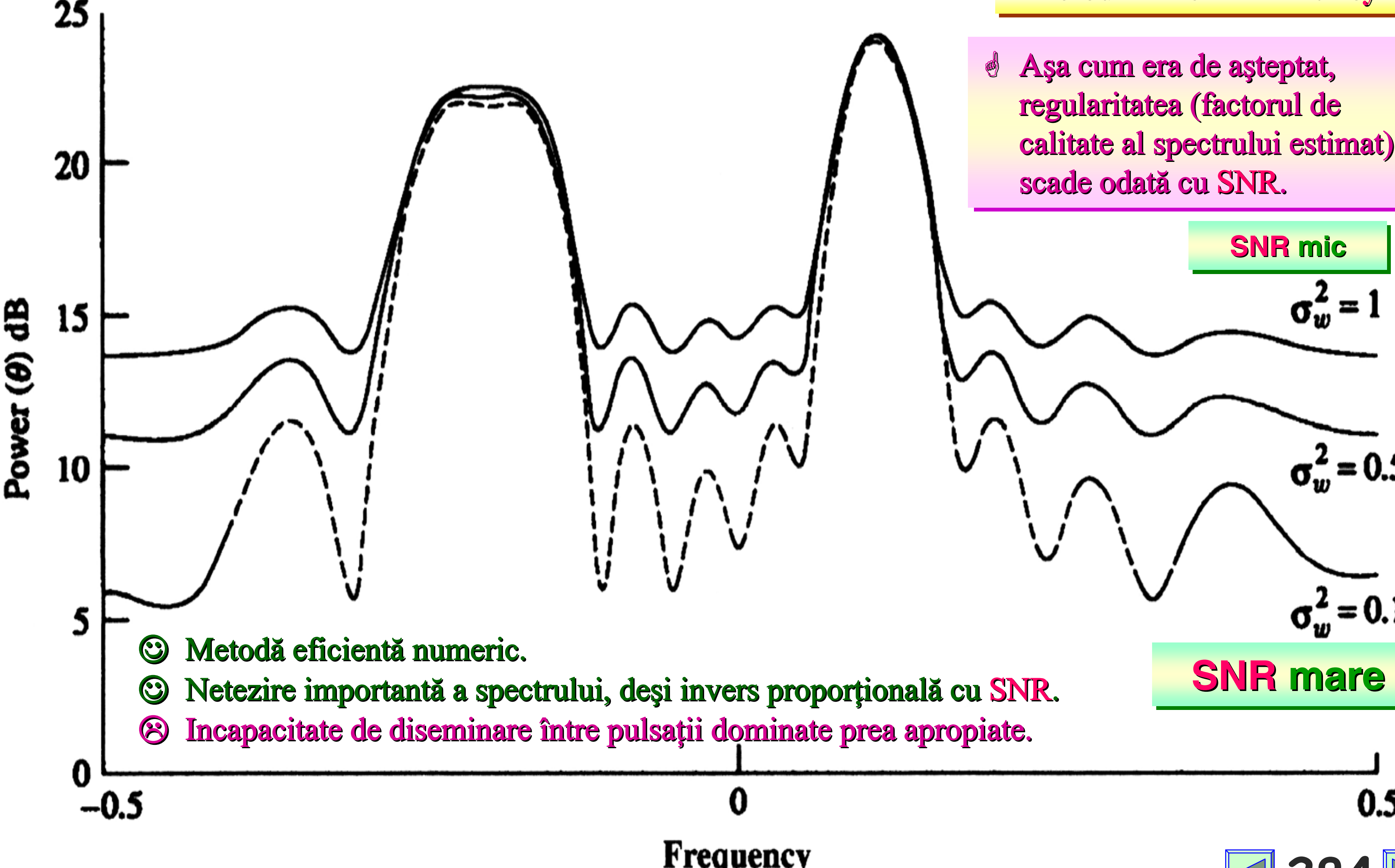
☝ Spectrul calculat direct cu TFD este puternic distorsionat, dar cele 4 pulsații dominante sunt puse în evidență.

❶❽ Metode moderne de estimare spectrală

O analiză comparativă succintă

Exemplu (continuare)

Metoda Blackman-Tukey



☝ Aşa cum era de aşteptat, regularitatea (factorul de calitate al spectrului estimat) scade odată cu SNR.

SNR mic

SNR mare

- ☺ Metodă eficientă numeric.
- ☺ Netezire importantă a spectrului, deşi invers proporţională cu SNR.
- ☹ Incapacitate de diseminare între pulsaţii dominate prea apropiate.

❶❽ Metode moderne de estimare spectrală

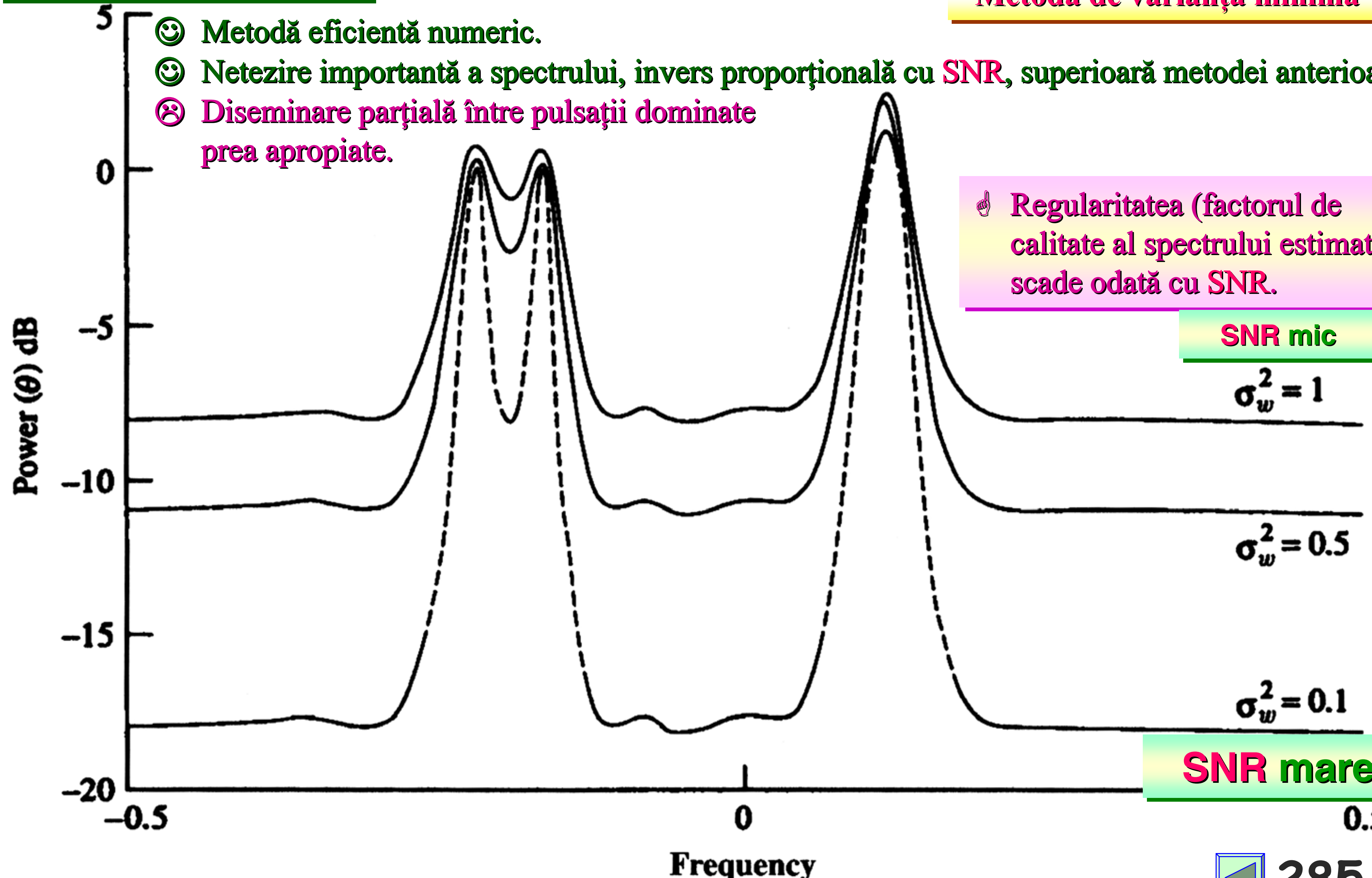
O analiză comparativă succintă

Exemplu (continuare)

Metoda de varianță minimă

- ☺ Metodă eficientă numeric.
- ☺ Netezire importantă a spectrului, invers proporțională cu SNR, superioară metodei anterioare.
- ☹ Diseminare parțială între pulsații dominate prea apropiate.

☝ Regularitatea (factorul de calitate al spectrului estimat) scade odată cu SNR.



SNR mic

SNR mare

❶❽ Metode moderne de estimare spectrală

O analiză comparativă succintă

Exemplu (continuare)

Metoda de autocorelaţie cu model AR

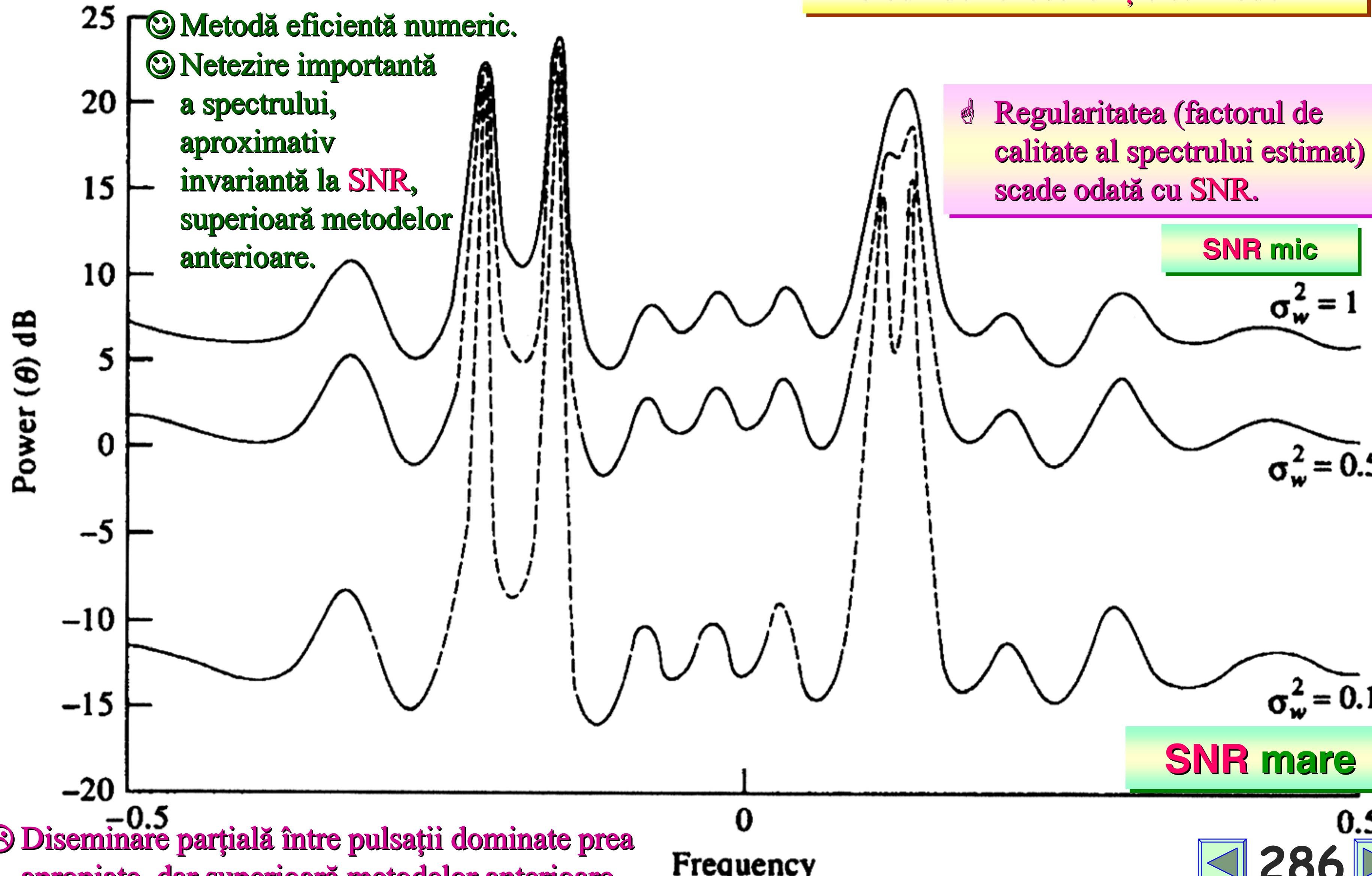
☺ Metodă eficientă numeric.

☺ Netezire importantă a spectrului, aproximativ invariantă la SNR, superioară metodelor anterioare.

☝ Regularitatea (factorul de calitate al spectrului estimat) scade odată cu SNR.

SNR mic

SNR mare



☹ Diseminare parţială între pulsaţii dominate prea apropiate, dar superioară metodelor anterioare.

❶❽ Metode moderne de estimare spectrală

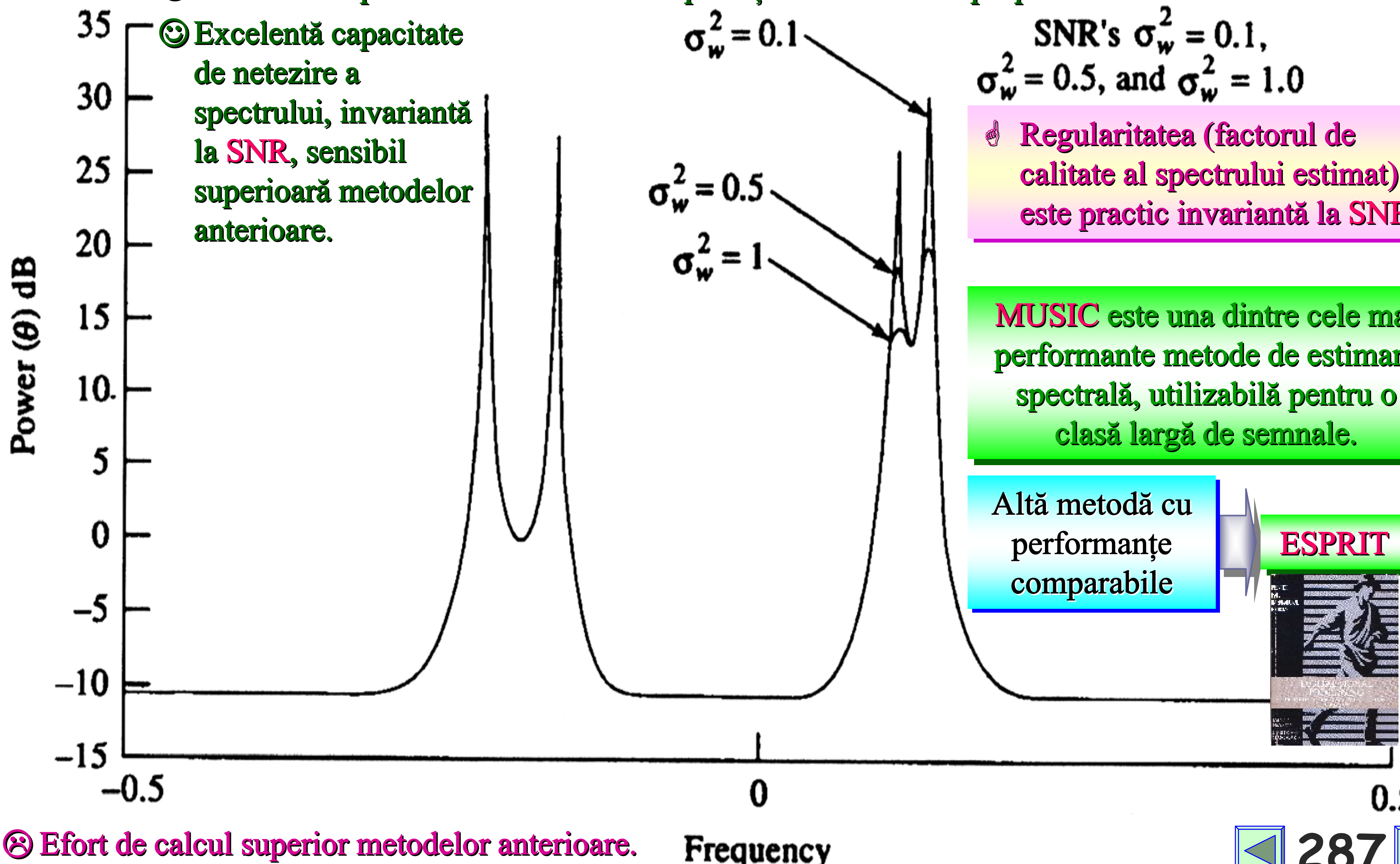
O analiză comparativă succintă

Exemplu (continuare)

Metoda MUSIC

☺ Excelentă capacitate de diseminare a pulsaţiilor armonice apropiate.

☺ Excelentă capacitate de netezire a spectrului, invariantă la SNR, sensibil superioară metodelor anterioare.



☝ Regularitatea (factorul de calitate al spectrului estimat) este practic invariantă la SNR.

MUSIC este una dintre cele mai performante metode de estimare spectrală, utilizabilă pentru o clasă largă de semnale.

Altă metodă cu performanțe comparabile ⇨ ESPRIT

☹ Efort de calcul superior metodelor anterioare.