Metode neparametrice de estimare spectrală

Metoda lui Blackman & Tukey

Ideea lui Blackman & Tukey (1958)

Fereastra de ponderare ar trebui aplicată direct secvenței de autocovarianță estimate, deoarece, pentru pivoți depărtați, aceasta este mai puțin precisă.

$$\hat{r}_x[k] \overset{def}{=} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]x[n-k] \quad \forall k \in \overline{1-N, N-1}$$

Pentru $|k|$ depărtat de origine, suma conține un număr mic de termeni, fiind imprecisă.

$$w\hat{r}_x$$

Fereastra are rolul de a depondera valorile imprecise ale autocovarianței estimate.

$$Supp(w) \subseteq \overline{1-N, N-1}$$

- Alte proprietăți impuse:

$$w[-n] = w[n] \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

(simetrie)

$$\mathcal{W}(e^{j\omega}) \overset{def}{=} \mathcal{F}(w)(e^{j\omega}) \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

(ne-negativitate)

☝ Pentru a conserva ne-negativitatea densității spectrale estimate.

Nu toate ferestrele verifică proprietatea. Exemplu: Hamming, Hanning – NU.

Periodograma estimată a lui Blackman & Tukey

$$\hat{\Phi}_{w,x}(\omega) \overset{def}{=} \mathcal{F}(w\hat{r}_x)(\omega) = \sum_{n=1-N}^{N-1} w[n]\hat{r}_x[n]e^{-j\omega n} \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad \text{(TCFD)}$$

$$\hat{\Phi}_{w,x}(\omega) \overset{def}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} w[n]\hat{r}_x[n]e^{-j\omega n} \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

☜ Teorema inversă de convoluție periodică

$$\hat{\Phi}_{w,x}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \hat{\Phi}_x(\mu)\mathcal{W}\left(e^{j(\omega-\mu)}\right)d\mu \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

❶❻ Metode neparametrice de estimare spectrală

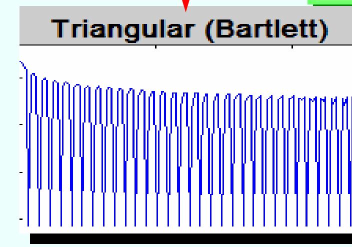
Metoda lui Blackman & Tukey (continuare)

Performanţele metodei

- Se evaluează **media** periodogramei estimate (**TCFD**).

$$E\left\{\hat{\Phi}_{w,x}(\omega)\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}E\left\{\hat{\Phi}_{x}(\mu)\right\}\mathcal{W}\left(e^{j(\omega-\mu)}\right)d\mu \quad \forall\,\omega\in\mathbb{R}$$

$$E\left\{\hat{\Phi}_{x}(\mu)\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\Phi_{x}(\nu)\boxed{\mathcal{W}_{\Delta,N}\left(e^{j(\mu-\nu)}\right)}d\nu \quad \forall\,\omega\in\mathbb{R}$$



$$E\left\{\hat{\Phi}_{w,x}(\omega)\right\}=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\Phi_{x}(\nu)\,\mathcal{W}_{\Delta,N}\left(e^{j(\mu-\nu)}\right)\mathcal{W}\left(e^{j(\omega-\mu)}\right)d\mu\, d\nu \quad \forall\,\omega\in\mathbb{R}$$

$$E\left\{\hat{\Phi}_{w,x}(\omega)\right\}=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{+\pi}\Phi_{x}(\nu)\underbrace{\left(\int_{-\pi}^{+\pi}\mathcal{W}_{\Delta,N}\left(e^{j(\mu-\nu)}\right)\mathcal{W}\left(e^{j(\omega-\mu)}\right)d\mu\right)}_{2\pi\left(\mathcal{W}\,\tilde{*}\,\mathcal{W}_{\Delta,N}\right)\left(e^{j(\omega-\nu)}\right)}d\nu \quad \forall\,\omega\in\mathbb{R}$$

(convoluţie periodică)

$$\cong 2\pi\mathcal{W}\left(e^{j(\omega-\nu)}\right)$$

Pentru a obţine o creştere a regulatităţii periodogramei, este necesar ca lungimea ferestrei w să fie mult mai mică decât cea a ferestrei Bartlett.

$$Supp(w)=\overline{1-M,M-1}$$

$$Supp\left(w_{\Delta,N}\right)=\overline{1-N,N-1}$$

$$M \ll N$$

$$E\left\{\hat{\Phi}_{w,x}(\omega)\right\}\cong\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\Phi_{x}(\mu)\mathcal{W}\left(e^{j(\omega-\mu)}\right)d\mu \quad \forall\,\omega\in\mathbb{R}$$

☝ Similară mediei periodogramei Bartlett.

TCFD a ferestrei Bartlett se comportă aproximativ ca un impuls Dirac în convoluţie cu TCFD a ferestrei w.

❶❻ Metode neparametrice de estimare spectrală

Metoda lui Blackman & Tukey (continuare)

Performanţele metodei (continuare)

- Se evaluează **varianţa** periodogramei estimate (**TCFD**).

$$E\left\{\hat{\Phi}_{w,x}(\omega)\right\} \cong \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\Phi_x(\mu)\mathcal{W}\left(e^{j(\omega-\mu)}\right)d\mu \quad \forall\,\omega\in\mathbb{R}$$

$$\sigma^2_{\hat{\Phi}_{w,x}}(\omega) = \boxed{E\left\{\hat{\Phi}^2_{w,x}(\omega)\right\}} - \boxed{\left(E\left\{\hat{\Phi}_{w,x}(\omega)\right\}\right)^2} \quad \forall\,\omega\in\mathbb{R}$$

$$\left(E\left\{\hat{\Phi}_{w,x}(\omega)\right\}\right)^2 \cong \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\Phi_x(\mu)\Phi_x(\nu)\mathcal{W}\left(e^{j(\omega-\mu)}\right)\mathcal{W}\left(e^{j(\omega-\nu)}\right)d\mu d\nu \quad \forall\,\omega\in\mathbb{R}$$

$$E\left\{\hat{\Phi}^2_{w,x}(\omega)\right\} = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}E\left\{\hat{\Phi}_x(\mu)\hat{\Phi}_x(\nu)\right\}\mathcal{W}\left(e^{j(\omega-\mu)}\right)\mathcal{W}\left(e^{j(\omega-\nu)}\right)d\mu\, d\nu \quad \forall\,\omega\in\mathbb{R}$$

$$E\left\{\hat{\Phi}_x(\mu)\hat{\Phi}_x(\nu)\right\} = \Phi_x(\mu)\Phi_x(\nu)\left[1+\left(\frac{\sin\frac{N(\mu+\nu)}{2}}{N\sin\frac{\mu+\nu}{2}}\right)^2+\left(\frac{\sin\frac{N(\mu-\nu)}{2}}{N\sin\frac{\mu-\nu}{2}}\right)^2\right] \quad \forall\,\mu,\nu\in\mathbb{R}$$

$$\sigma^2_{\hat{\Phi}_{w,x}}(\omega) \cong \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\Phi_x(\mu)\Phi_x(\nu)\left[\left(\frac{\sin\frac{N(\mu+\nu)}{2}}{N\sin\frac{\mu+\nu}{2}}\right)^2+\left(\frac{\sin\frac{N(\mu-\nu)}{2}}{N\sin\frac{\mu-\nu}{2}}\right)^2\right]\mathcal{W}\left(e^{j(\omega-\mu)}\right)\mathcal{W}\left(e^{j(\omega-\nu)}\right)d\mu d\nu \quad \forall\,\omega\in\mathbb{R}$$

☝ Se poate observa simetria perfectă a integralelor în μ şi ν.

Metoda lui Blackman & Tukey (continuare)

Performanţele metodei (continuare)

$$\sigma^2_{\hat{\Phi}_{w,x}}(\omega) \cong \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\Phi_x(\mu)\Phi_x(\nu)\underbrace{\left[\left(\frac{\sin\frac{N(\mu+\nu)}{2}}{N\sin\frac{\mu+\nu}{2}}\right)^2+\left(\frac{\sin\frac{N(\mu-\nu)}{2}}{N\sin\frac{\mu-\nu}{2}}\right)^2\right]}\mathcal{W}\left(e^{j(\omega-\mu)}\right)\mathcal{W}\left(e^{j(\omega-\nu)}\right)d\mu d\nu$$

$\forall\,\omega\in\mathbb{R}$

$M << N$

TCFD a ferestrei Bartlett se comportă aproximativ ca un impuls Dirac în convoluţie cu TCFD a ferestrei w.

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\Phi_x(\nu)\left[\left(\frac{\sin\frac{N(\mu+\nu)}{2}}{N\sin\frac{\mu+\nu}{2}}\right)^2+\left(\frac{\sin\frac{N(\mu-\nu)}{2}}{N\sin\frac{\mu-\nu}{2}}\right)^2\right]\mathcal{W}\left(e^{j(\omega-\nu)}\right)d\nu \cong$$

$$\cong\frac{2\pi}{N}\left[\Phi_x(-\mu)\mathcal{W}\left(e^{j(\omega+\mu)}\right)+\Phi_x(\mu)\mathcal{W}\left(e^{j(\omega-\mu)}\right)\right]$$

$\forall\,\omega,\mu\in\mathbb{R}$

$$\sigma^2_{\hat{\Phi}_{w,x}}(\omega)\cong\frac{1}{2\pi N}\int_{-\pi}^{+\pi}\Phi_x(\mu)\Phi_x(-\mu)\underbrace{\mathcal{W}\left(e^{j(\omega+\mu)}\right)\mathcal{W}\left(e^{j(\omega-\mu)}\right)}d\mu+\frac{1}{2\pi N}\int_{-\pi}^{+\pi}\Phi_x^2(\mu)\mathcal{W}^2\left(e^{j(\omega-\mu)}\right)d\mu$$

$\forall\,\omega\in\mathbb{R}$

Produsul versiunilor întîrziată şi anticipată ale TCFD corespunzătoare ferestrei w este neglijabil în raport cu pătratul TCFD.

Metode neparametrice de estimare spectrală

Metoda lui Blackman & Tukey (continuare)

Performanţele metodei (continuare)

$$\sigma^2_{\hat{\Phi}_{w,x}}(\omega) \cong \cancel{\frac{1}{2\pi N}\int_{-\pi}^{+\pi}\Phi_x(\mu)\Phi_x(-\mu)\mathcal{W}\left(e^{j(\omega+\mu)}\right)\mathcal{W}\left(e^{j(\omega-\mu)}\right)d\mu} + \frac{1}{2\pi N}\int_{-\pi}^{+\pi}\Phi_x^2(\mu)\mathcal{W}^2\left(e^{j(\omega-\mu)}\right)d\mu$$

$\forall\,\omega\in\mathbb{R}$

$$\sigma^2_{\hat{\Phi}_{w,x}}(\omega) \cong \frac{1}{2\pi N}\int_{-\pi}^{+\pi}\Phi_x^2(\mu)\mathcal{W}^2\left(e^{j(\omega-\mu)}\right)d\mu$$

$\forall\,\omega\in\mathbb{R}$

Rezoluţia în frecvenţă este stabilită practic de către TCFD a fereastrei , care are o deschidere a lobului principal inferioară lărgimii de bandă a densităţii spectrale adevărate.

Exerciţiu

- Deduceți expresiile performanțelor periodogramei Blackman-Tukey folosind TFD.

$$\sigma^2_{\hat{\Phi}_{w,x}}(\omega) \cong \frac{\Phi_x^2(\omega)}{2\pi N}\int_{-\pi}^{+\pi}\mathcal{W}^2\left(e^{j\mu}\right)d\mu = \Phi_x^2(\omega)\left[\frac{1}{N}\sum_{m=1-M}^{M-1}w^2[n]\right]$$

$\forall\,\omega\in\mathbb{R}$

Proprietatea lui Parseval

Factorul de calitate

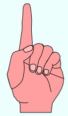
$$Q(\omega) \overset{def}{=} \frac{\left(E\left\{\hat{\Phi}_x(\omega)\right\}\right)^2}{\sigma^2_{\hat{\Phi}_x}(\omega)} \cong \frac{1}{\left[\frac{1}{N}\sum_{m=1-M}^{M-1}w^2[n]\right]}$$

$\forall\,\omega\in\mathbb{R}$

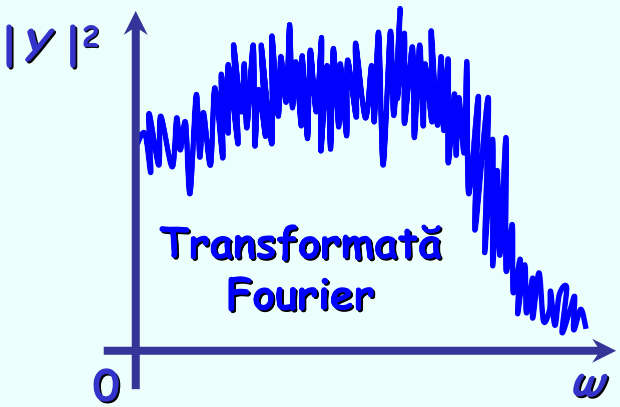
Cu cît fereastra are energie mai scăzută, cu atît factorul de calitate este mai mare.

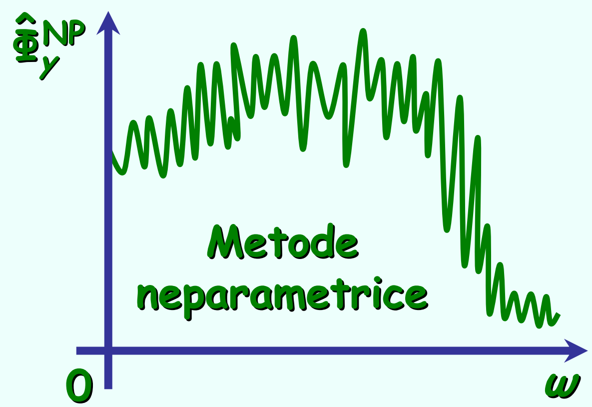
Metoda lui Blackman-Tukey oferă un foarte bun control al compromisului rezoluție-regularitate.

❶❼ Metode parametrice de estimare spectrală



Metodele neparametrice nu pot conduce la atenuarea sensibilă a gradului de fractalitate din spectrul estimat.



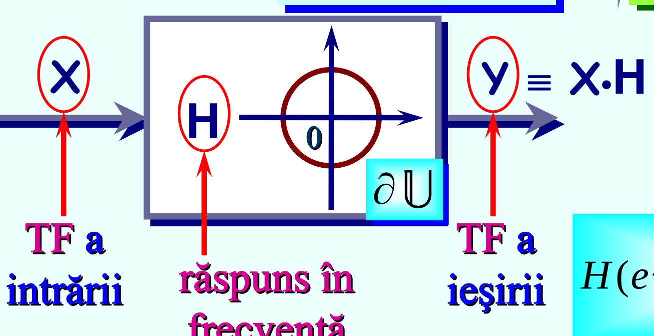


Cum pot fi atenuate neregularitățile locale din spectrul estimat?

Prin utilizarea unui model de identificare asociat semnalului original. → Modelele parametrice din clasa ARMAX

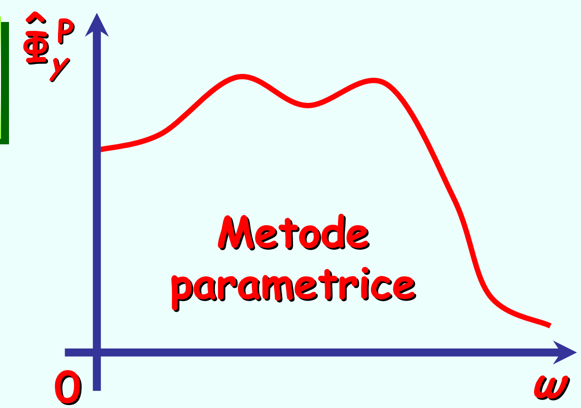
Rezultatul fundamental → Transferul densității spectrale prin sisteme liniare

$$\Phi_y(\omega) = \left|H(e^{j\omega})\right|^2 \Phi_x(\omega) \quad \forall\,\omega \in \mathbb{R}$$

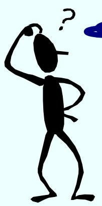


$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

- Modelele cele mai utilizate în PS:
  - ➔ AR
  - ➔ MA
  - ➔ ARMA



❶❼ Metode parametrice de estimare spectrală



Cum se poate obţine spectrul estimat folosind un model parametric?

Cu ajutorul următoarei **strategii naturale**.

Algoritm

① Se identifică un model parametric asociat semnalului original (y).

- ➔ AR
- ➔ MA
- ➔ ARMA

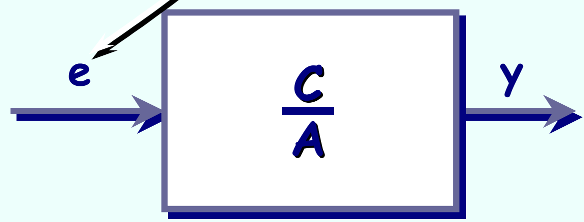
$$\hat{A}(q^{-1})\,y[n]=\hat{C}(q^{-1})\,\hat{e}[n] \qquad \forall n\in\overline{0,N-1}$$

O estimaţie a zgomotului alb care a stimulat sistemul generator al semnalului original.

$$\hat{A}(q^{-1}) \stackrel{def}{=} 1+\hat{a}_1 q^{-1}+\hat{a}_2 q^{-1}+\cdots+\hat{a}_{na} q^{-na}$$

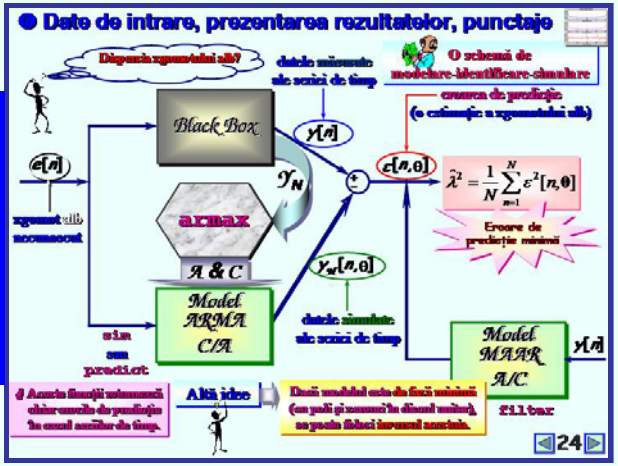
$$\hat{C}(q^{-1}) \stackrel{def}{=} 1+\hat{c}_1 q^{-1}+\hat{c}_2 q^{-1}+\cdots+\hat{c}_{nc} q^{-nc}$$

parametrii estimaţi ai modelului



② Se estimează zgomotul alb care a stimulat sistemul generator al semnalului original.

Lucrările de laborator



③ Se estimează densitatea spectrală de putere a zgomotului alb.

$$\Phi_{\hat{e}}(\omega) \stackrel{def}{=} \hat{\lambda}^2 \stackrel{def}{=} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\hat{e}^2[n] \qquad \forall\omega\in\mathbb{R}$$

☝ Măsură a preciziei modelului parametric.

❶❼ Metode parametrice de estimare spectrală

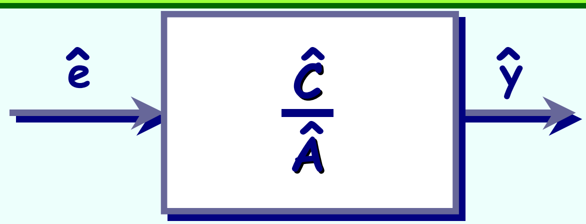
Algoritm (continuare)

④ Se estimează densitatea spectrală a semnalului original.

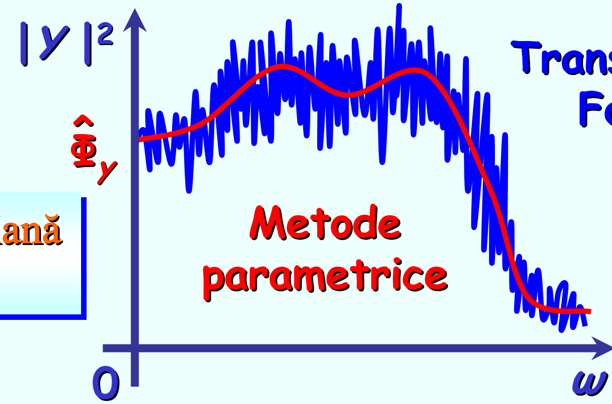
Transferul densității spectrale prin sisteme liniare

$$\hat{\Phi}_y(\omega) = \left|\frac{\hat{C}(e^{j\omega})}{\hat{A}(e^{j\omega})}\right|^2 \Phi_{\hat{e}}(\omega) = \hat{\lambda}^2 \left|\frac{\hat{C}(e^{j\omega})}{\hat{A}(e^{j\omega})}\right|^2$$

$\forall \omega \in \mathbb{R}$



Spectrul estimat apare ca o curbă mediană a spectrului original.



Caracteristici generale ale metodelor parametrice de estimare spectrală

☺ Atenuarea comportamentului fractal se datorează filtrării importante a zgomotelor care corup semnalul, cu ajutorul modelului parametric.

☺ Rezoluţia în frecvenţă poate fi aleasă liber, independent de durata semnalului.

☺ Regularitatea spectrului estimat poate fi (parţial) controlată prin intermediul indicilor structurali ai modelului parametric.

☺ Liniile spectrale dominante pot fi puse în evidenţă mai uşor.

☝ Gradul de netezime al spectrului estimat nu constituie o măsură a regularităţii sale.

☹ Compromisul rezoluţie-regularitate este sensibil la variaţia indicilor structurali.

❶❽ Metode moderne de estimare spectrală

Două categorii
- ➔ Metode de varianță minimă
- ➔ Metode de extracție a liniilor spectrale dominante

Metode de varianță minimă

Ideea varianței minime (Capon & Lacoss)
(1969) (1971)

➔ Modelul de identificare ar trebui determinat astfel încît varianța zgomotului alb estimat să fie minimă și răspunsul în frecvență să fie unitar pentru o pulsație precizată.

Exemplu — **Modelul AR ne-normalizat**

$$A(q^{-1})\, y[n] = e[n] \qquad \forall\, n \in \overline{0, N-1}$$

$$\sigma_e^2(\boldsymbol{\theta}) \overset{def}{=} E\left\{e^2[n]\right\} = E\left\{\boldsymbol{\theta}^T \cdot \mathbf{y}[n] \cdot \mathbf{y}^T[n] \cdot \boldsymbol{\theta}\right\}$$

$$A(q^{-1}) \overset{def}{=} a_0 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-1} + \cdots + a_{na} q^{-na}$$

☝ Nu neapărat unitar.

$$\mathbf{y}[n] \overset{def}{=} \left[y[n] \;\; y[n-1] \;\; \cdots \;\; y[n-na]\right]^T \in \mathbb{R}^{na+1}$$

vector de semnal

$$\boldsymbol{\theta} \overset{def}{=} \left[a_0 \;\; a_1 \;\; \cdots \;\; a_{na}\right]^T \in \mathbb{R}^{na+1}$$

vector de parametri

(IS)

$$\mathbf{R}_{na+1}(y) \overset{def}{=} E\left\{\mathbf{y}[n]\mathbf{y}^T[n]\right\} \in \mathbb{R}^{(na+1)\times(na+1)}$$

matrice de autocovarianță

$$\sigma_e^2(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{R}_{na+1}(y)\boldsymbol{\theta}$$

$$\left[1 \;\; e^{j\omega_0} \;\; e^{2j\omega_0} \;\; \cdots \;\; e^{jna\,\omega_0}\right]$$

vector armonic elementar

- Pentru determinarea parametrilor necunoscuți, se rezolvă o problemă de optimizare cu restricții.

$$\min_{\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{R}^{na+1}} \left\{\sigma_e^2(\boldsymbol{\theta})\right\} \quad \text{s.t.} \;\; A(e^{j\omega_0}) = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \min_{\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{R}^{na+1}} \left\{\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{R}_{na+1}(y)\boldsymbol{\theta}\right\} \quad \text{s.t.} \;\; \boxed{\mathbf{w}^T(\omega_0)}\,\boldsymbol{\theta} = 1$$

pulsația pentru care va fi determinat modelul AR

❶❽ Metode moderne de estimare spectrală

Metode de varianță minimă (continuare)

Exemplu — **Modelul AR ne-normalizat (continuare)**

Soluția problemei

$$\min_{\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{R}^{na+1}} \left\{\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{R}_{na+1}(y)\boldsymbol{\theta}\right\}$$

$$\text{s.t.}\quad \mathbf{w}^T(\omega_0)\,\boldsymbol{\theta} = 1$$

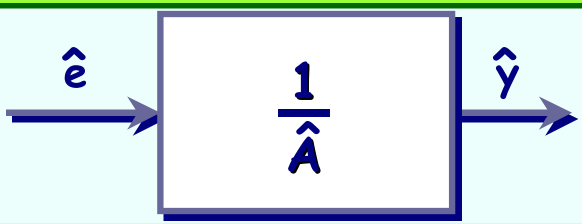
Lacoss

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(\omega_0) = \frac{\mathbf{R}_{na+1}^{-1}(y)\mathbf{w}(\omega_0)}{\mathbf{w}^T(\omega_0)\mathbf{R}_{na+1}^{-1}(y)\mathbf{w}(\omega_0)}$$

$$\sigma_e^2\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}(\omega_0)\right) \overset{def}{=} \lambda_{e,\min}^2(\omega_0) = \frac{\mathbf{w}^T(\omega_0)\mathbf{R}_{na+1}^{-1}(y)\mathbf{R}_{na+1}(y)\hat{\boldsymbol{\theta}}(\omega_0)}{\mathbf{w}^T(\omega_0)\mathbf{R}_{na+1}^{-1}(y)\mathbf{w}(\omega_0)} = \frac{\underbrace{\boxed{\mathbf{w}^T(\omega_0)\hat{\boldsymbol{\theta}}(\omega_0)}}_{1}}{\mathbf{w}^T(\omega_0)\mathbf{R}_{na+1}^{-1}(y)\mathbf{w}(\omega_0)} = \frac{1}{\mathbf{w}^T(\omega_0)\mathbf{R}_{na+1}^{-1}(y)\mathbf{w}(\omega_0)}$$

- Se estimează densitatea spectrală de putere a ieşirii modelului, pentru pulsaţia specificată.

Transferul densității spectrale prin sisteme liniare



$$\Phi_{\hat{y}}(\omega_0) = \frac{\Phi_{\hat{e}}(\omega)}{\left|\hat{A}(e^{j\omega_0})\right|^2} = \lambda_{e,\min}^2 = \frac{1}{\mathbf{w}^T(\omega_0)\mathbf{R}_{na+1}^{-1}(y)\mathbf{w}(\omega_0)}$$

☝ Nu depinde de vectorul parametrilor estimaţi, ci doar de pulsaţia specificată.

$$\hat{\Phi}_y(\omega) = \frac{1}{\mathbf{w}^T(\omega)\boxed{\hat{\mathbf{R}}_{na+1}^{-1}(y)}\mathbf{w}(\omega)} \qquad \forall\,\omega\in\mathbb{R}$$

☝ Se inversează o singură dată, pentru toate pulsaţiile.

- Practic, nu mai este necesar modelul AR (altfel el ar fi trebuit reactualizat pentru fiecare pulsaţie).
- De remarcat că relaţia este implementabilă numai dacă matricea de autocovarianţă se estimează în prealabil.

Metode moderne de estimare spectrală

Metode de varianță minimă (continuare)

Algoritm

① Se alege ordinul modelului AR ascuns. na

- Acesta controlează compromisul rezoluție-regularitate pentru spectrul estimat.

② Se estimează şi se inversează matricea de autocovarianță a semnalului. $\hat{\mathbf{R}}_{na+1}(y)$

- Matricea este de tip Toeplitz simetrică (adică este determinată complet de prima linie/coloană, prin expandare pe diagonale).
- Pentru inversarea acesteia, se poate utiliza Algoritmul Levinson-Durbin din IS, care necesită un efort de calcul proporțional cu na^2 (şi nu na^3 ca în cazul Algoritmului lui Gauss)

$$\hat{\mathbf{R}}_{na+1}(y) \overset{def}{=} \begin{bmatrix} \hat{r}_y[0] & \hat{r}_y[1] & & \hat{r}_y[k] & & \hat{r}_y[na] \\ \hat{r}_y[1] & \hat{r}_y[0] & \hat{r}_y[1] & & \hat{r}_y[k] & \\ & \hat{r}_y[1] & \hat{r}_y[0] & \hat{r}_y[1] & & \hat{r}_y[k] \\ \hat{r}_y[k] & & \hat{r}_y[1] & \hat{r}_y[0] & \hat{r}_y[1] & \\ & \hat{r}_y[k] & & \hat{r}_y[1] & \hat{r}_y[0] & \hat{r}_y[1] \\ \hat{r}_y[na] & & \hat{r}_y[k] & & \hat{r}_y[1] & \hat{r}_y[0] \end{bmatrix}$$

③ Se estimează spectrul semnalului.

$$\hat{\Phi}_y(\omega) = \frac{1}{\mathbf{w}^T(\omega)\hat{\mathbf{R}}_{na+1}^{-1}(y)\mathbf{w}(\omega)} \quad \forall\, \omega \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{w}(\omega) \overset{def}{=} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\omega} & e^{2j\omega} & \cdots & e^{jna\omega} \end{bmatrix}^T$$

Caracteristici generale ale metodei

☺ Indicele structural al modelului parametric permite un control destul de bun al compromisului rezoluție-regularitate, cu performanțe superioare metodelor ne-parametrice.

☹ Performanțele unui model AR identificat cu acelaşi indice structural sunt superioare celor corespunzătoare modelului AR bazat pe minimizarea varianței de ieşire.

❶❽ Metode moderne de estimare spectrală

Metode de extracţie a liniilor spectrale dominante

Ideea liniilor spectrale dominante

Pentru extracţia doar a liniilor spectrale cu puteri dominante, modelul parametric ar trebui să fie constituit numai din suma armonicelor elementare corespunzătoare pulsaţiilor dominante.

Orice armonică elementară poate fi generată recursiv cu ajutorul unei ecuaţii cu diferenţe de ordin 2.

$$\begin{cases} x[n]+a_1x[n-1]+a_2x[n-2]=0 \\ a_1=-2\cos\omega_0 \quad a_2=1 \end{cases} \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Exerciţiu

- Arătaţi că soluţiile armonice ale ecuaţiei cu diferenţe pot fi următoarele:

$$\begin{cases} x[0]=0 \\ x[-1]=-A\sin\omega_0 \end{cases} \Rightarrow x[n]=A\sin(n\omega_0) \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$$\begin{cases} x[0]=A \\ x[-1]=A\cos\omega_0 \end{cases} \Rightarrow x[n]=A\cos(n\omega_0) \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

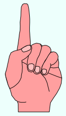
Dacă se doreşte extragerea primelor ***na*** linii spectrale dominante, modelul matematic are forma următoare:

$$x[n] = -\sum_{i=1}^{2na} a_i x[n-i] \quad \forall n\in\mathbb{N} \qquad a_0 \overset{def}{=} 1$$

- Polinomul caracteristic al ecuaţiei cu diferenţe:

$$P(q^{-1}) \overset{def}{=} 1+a_1q^{-1}+a_2q^{-1}+\cdots+a_{2na}q^{-2na}$$

☝ Rădăcinile sunt situate pe cercul unitar (nu neapărat în puncte echidistante).



Armonicele trebuie extrase dintr-un semnal corupt de zgomot aditiv.

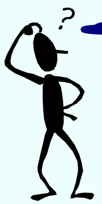
$$y \equiv x + v \Rightarrow \sum_{i=0}^{2na} a_i y[n-i] = \sum_{i=0}^{2na} a_i v[n-i] \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

y: semnal original; x: semnal util; v: semnal parazit

Model ARMA[2na,2na] cu polinoame identice.

❶❽ Metode moderne de estimare spectrală

Metode de extracţie a liniilor spectrale dominante (continuare)



Cum se pot determina parametrii modelului ARMA?

Folosind Metoda Celor Mai Mici Pătrate (MCMMP).

- Se poate considera că semnalul parazit este un zgomot alb de medie nulă, iar semnalul util este determinist.

$$\sum_{i=0}^{2na} a_i y[n-i] = \sum_{i=0}^{2na} a_i \cancel{y}[n-i] \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

e

$$\mathbf{y}^T[n]\cdot\boldsymbol{\theta} = \mathbf{e}^T[n]\cdot\boldsymbol{\theta} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$\mathbf{y}[n] \equiv \mathbf{x}[n] + \mathbf{v}[n] \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

vector de semnal util

$$\mathbf{y}[n] \overset{def}{=} \left[y[n] \;\; y[n-1] \;\; \cdots \;\; y[n-2na] \right]^T \in \mathbb{R}^{2na+1}$$

vector de semnal

$$\mathbf{e}[n] \overset{def}{=} \left[e[n] \;\; e[n-1] \;\; \cdots \;\; e[n-2na] \right]^T \in \mathbb{R}^{2na+1}$$

vector de zgomot (necunoscut)

$$\boldsymbol{\theta} \overset{def}{=} \left[a_0 \;\; a_1 \;\; \cdots \;\; a_{2na} \right]^T \in \mathbb{R}^{2na+1}$$

vector de parametri

$$\mathbf{R}_{2na+1}(y) \overset{def}{=} E\left\{ \mathbf{y}[n]\mathbf{y}^T[n] \right\} \in \mathbb{R}^{(2na+1)\times(2na+1)}$$

matrice de autocovarianţă

$$\begin{cases} E\{\mathbf{e}[n]\} = \mathbf{0}_{2na+1} & \text{(medie nulă)} \\ E\left\{\mathbf{e}[n]\mathbf{e}^T[n]\right\} = \lambda_e^2 \mathbf{I}_{2na+1} \in \mathbb{R}^{(na+1)\times(na+1)} \end{cases}$$

dispersia zgomotului (necunoscută)

MCMMP

E ② | $\mathbf{y}[n]\times$ ①

$$\mathbf{y}^T[n]\cdot\boldsymbol{\theta} = \mathbf{e}^T[n]\cdot\boldsymbol{\theta} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$E\left\{ \mathbf{y}[n]\mathbf{y}^T[n] \right\}\boldsymbol{\theta} = E\left\{ \mathbf{y}[n]\mathbf{e}^T[n] \right\}\boldsymbol{\theta} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$E\left\{ \mathbf{y}[n]\mathbf{e}^T[n] \right\} = E\left\{ (\mathbf{x}[n]+\mathbf{e}[n])\mathbf{e}^T[n] \right\} = E\left\{ \mathbf{e}[n]\mathbf{e}^T[n] \right\} = \lambda_e^2 \mathbf{I}_{2na+1}$$

Ecuaţie spectrală.

$$\mathbf{R}_{2na+1}(y)\,\boldsymbol{\theta} = \lambda_e^2\,\boldsymbol{\theta}$$

vector propriu

valoare proprie

☝ Semnalul util este determinist, iar media zgomotului este nulă.

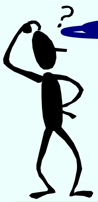
❶❽ Metode moderne de estimare spectrală

Metode de extracţie a liniilor spectrale dominante (continuare)

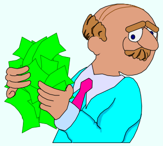
Aşadar

Pentru extragerea primelor ***na*** linii spectrale dominante, trebuie mai întîi rezolvată o **ecuaţie spectrală** al cărei principal actor este **matricea de autocovarianţă estimată a semnalului original**.

$$\hat{\mathbf{R}}_{2na+1}(y)\,\boldsymbol{\theta} = \lambda_e^2\ \boldsymbol{\theta}$$



Totuşi, spectrul matricii de autocovarianţă poate conţine mai multe valori proprii.
Care dintre acestea trebuie considerată?



Răspunsul este dat de un rezultat al lui **V. F. Pisarenko**.

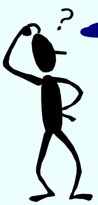
(1973)

Modelul ARMA[2na,2na] care corespunde unei colecții de na sinusoide scufundate într-un zgomot alb aditiv este determinat de valoarea proprie minimă a matricii de autocovarianță a semnalului original.

$$\lambda_e^2 = \lambda_{\min}$$

Parametrii modelului ARMA sunt identici cu elementele unui **vector propriu** corespunzător valorii proprii minime.

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = [1\ \ \hat{a}_1\ \ \cdots\ \ \hat{a}_{2na}]^T$$



Cum se estimează spectrul?

Strategia generală

① Se determină pulsațiile dominante folosind rădăcinile polinomului caracteristic al modelului matematic.

$$\hat{P}(q^{-1}) \overset{def}{=} 1 + \hat{a}_1 q^{-1} + \hat{a}_2 q^{-1} + \cdots + \hat{a}_{2na} q^{-2na} = 0 \;\Rightarrow\; \left\{ e^{\pm j\omega_i} \right\}_{i\in\overline{1,na}}$$

② Se determină puterile spectrale corespunzătoare pulsațiilor dominante nenegative folosind autocovarianța semnalului.

❶❽ Metode moderne de estimare spectrală

Metode de extracţie a liniilor spectrale dominante (continuare)

Metoda lui Pisarenko (descompunere armonică)

Ideea lui Pisarenko (1973)

Semnalul util se exprimă ca o combinaţie liniară de funcţii armonice elemenare reale cu faze stabilite în mod aleator.

$$x[n] \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{na} A_i \cos(n\omega_i + \varphi_i) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

faze aleatoare (necunoscute)

amplitudini deterministe (necunoscute)

pulsaţii dominante (cunoscute)

$\left\{A_i^2\right\}_{i \in \overline{1,na}}$ puteri spectrale dominante

Pentru determinarea puterilor spectrale dominante, trebuie utilizată **secvenţa de autocovarianţă a semnalului original**.

$$y[n] = x[n] + e[n] = e[n] + \sum_{i=1}^{na} A_i \cos(n\omega_i + \varphi_i) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Exerciţiu

$$r_y[k] \overset{def}{=} E\{y[n]y[n-k]\} = \lambda_e^2 \delta_0[k] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{na} A_i^2 \cos(k\omega_i) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Soluţia unui sistem liniar compatibil şi determinat

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_1^2 \\ \hat{A}_2^2 \\ \vdots \\ \hat{A}_{na}^2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \cos\omega_1 & \cos\omega_2 & \cdots & \cos\omega_{na} \\ \cos 2\omega_1 & \cos 2\omega_2 & \cdots & \cos 2\omega_{na} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos na\omega_1 & \cos na\omega_2 & \cdots & \cos na\omega_{na} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{r}_y[1] \\ \hat{r}_y[2] \\ \vdots \\ \hat{r}_y[na] \end{bmatrix}$$

- Pentru a demonstra această relaţie se poate ţine cont de următoarea proprietate:

$$E\{\cos(n\omega + \theta)\} = \begin{cases} \cos\theta & , \ \omega = 0 \\ 0 & , \ \omega \neq 0 \end{cases}$$

- Se poate arăta că: $\hat{\lambda}_{\min} = \hat{\lambda}_e^2 = \hat{r}_y[0] - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{na} \hat{A}_i^2$

Exerciţiu

- Estimaţi spectrul unei sinusoide afectat de un zgomot alb aditiv, prin Metoda lui Pisarenko, cunoscînd primele 3 valori ale funcţiei de autocorelaţie.

$\hat{r}_y[0] = 3$ $\hat{r}_y[1] = 1$ $\hat{r}_y[2] = 0$