Prelucrarea semnalelor

Capitolul 5: Analiza în frecvenţă a semnalelor

Bogdan Dumitrescu

Facultatea de Automatică şi Calculatoare

Universitatea Politehnica Bucureşti

Cuprins

- Semnale periodice şi seria Fourier discretă
- Semnale cu suport finit şi transformata Fourier discretă
- Transformata Fourier rapidă (FFT)
  - FFT cu decimare în timp
  - FFT cu decimare în frecvenţă
- Alte transformate discrete
- Aplicaţii simple

Tipuri de semnale (discrete) studiate

- Semnale periodice: conţinutul în frecvenţă poate fi calculat dintr-o singură perioadă a semnalului
- Semnale cu suport finit. Justificare: în timp real, se analizează porţiuni (cadre) succesive ale semnalului (care e neperiodic, eventual nestaţionar)
- Dacă $\tilde{x}[n]$ este un semnal N-periodic, notăm $x[n]$ semnalul cu suport $0 : N-1$ care reprezintă o perioadă a lui $\tilde{x}[n]$

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & \text{dacă } \; x \in 0 : N-1 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

- Invers, dacă $x[n]$ este un semnal cu suport $0 : N-1$, notăm $\tilde{x}[n]$ prelungirea lui prin periodicitate, dată de

$$\tilde{x}[n] = x[n \bmod N]$$

Seria Fourier

- Un semnal analogic $x(t)$ cu perioada T se poate scrie ca o serie Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{2\pi kt/T}$$

- Semnalul este descompus într-o sumă infinită de sinusoide a căror frecvenţă este multiplu al frecvenţei fundamentale $2\pi/T$

Seria Fourier discretă (SFD)

- Fie $\tilde{x}[n]$ un semnal discret N-periodic, i.e. $\tilde{x}[n+kN] = \tilde{x}[n]$, $\forall k \in \mathbb{Z}$
- Ca şi în cazul continuu, semnalul se poate descompune ca o sumă de sinusoide de frecvenţă multiplu al frecvenţei fundamentale $2\pi/N$
- Acum sunt însă doar N sinusoide distincte !
- Reamintire:
  - $e^{j\omega n}$ are perioadă N doar dacă există $k \in \mathbb{Z}$ a.î. $2k\pi/\omega = N$, adică $\omega = 2k\pi/N$
  - sinusoidele discrete cu frecvenţele ω şi $\omega + 2\ell\pi$, $\ell \in \mathbb{Z}$, sunt identice

SFD—definiţie

- Orice semnal N-periodic $\tilde{x}[n]$ se poate reprezenta prin seria Fourier discretă (SFD)

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \tag{1}$$

- Valorile $\tilde{X}[k]$, $k = 0 : N-1$, se numesc coeficienţii seriei Fourier discrete
- Factorul $1/N$ a fost introdus doar din considerente formale
- Notăm $\boxed{w_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}}$
- Relaţia (1) se scrie $\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] w_N^{-kn}$

SFD—demonstraţie (1)

- Matricea TFD (explicaţia denumirii—mai târziu):

$$F_N = \begin{bmatrix} w_N^0 & w_N^0 & \dots & w_N^0 \\ w_N^0 & w_N^1 & \dots & w_N^{(N-1)} \\ w_N^0 & w_N^2 & \dots & w_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ w_N^0 & w_N^{(N-1)} & \dots & w_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

- Matricea F_N are structură Vandermonde
- Matricea F_N este simetrică (dar nu hermitică: $F_N \neq F_N^H$)

SFD—demonstraţie (2)

- Matricea F_N are coloane ortogonale şi

$$F_N^H F_N = F_N F_N^H = N \cdot I$$

- Într-adevăr, elementul (i, ℓ) al matricei $F_N^H F_N$ este

$$(F_N^H F_N)_{i\ell} = \sum_{k=0}^{N-1} w_N^{-ki} w_N^{k\ell} = \sum_{k=0}^{N-1} w_N^{k(\ell-i)} = \begin{cases} N, & \text{dacă } \; i = \ell \\ 0, & \text{dacă } \; i \neq \ell \end{cases}$$

- Am demonstrat anterior (vezi (3), pag.35, prezentare cap.3):

$$\sum_{k=0}^{N-1} w_N^{km} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi km/N} = \begin{cases} N, & \text{dacă } \; m \bmod N = 0 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

SFD—demonstraţie (3)

- Notăm (oarecum abuziv)

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}[0] \\ \tilde{x}[1] \\ \vdots \\ \tilde{x}[N-1] \end{bmatrix}, \quad \tilde{X} = \begin{bmatrix} \tilde{X}[0] \\ \tilde{X}[1] \\ \vdots \\ \tilde{X}[N-1] \end{bmatrix}$$

- Relaţia (1) se poate scrie în forma compactă

$$\tilde{x} = \frac{1}{N} F_N^H \tilde{X}$$

- Înmulţind la stânga cu F_N, rezultă $\tilde{X} = F_N \tilde{x}$, ceea ce arată cum se calculează coeficienţii $\tilde{X}[k]$ din (1)
- Relaţia dintre $\tilde{x}$ şi $\tilde{X}$ este biunivocă

Coeficienţii SFD

- Coeficienţii seriei Fourier (1) asociate semnalului periodic $\tilde{x}[n]$ au forma

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] w_N^{kn}$$

- În formă vectorială

$$\tilde{X} = F_N \tilde{x}$$

- Coeficienţii $\tilde{X}[k]$ ai seriei Fourier pot fi definiţi pentru orice $k \in \mathbb{Z}$, "semnalul" astfel obţinut fiind N-periodic (se observă că $w_N^{kn} = w_N^{(k+N)n}$)

SFD—analiză şi sinteză

- Analiză

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] w_N^{kn}$$

$$\tilde{X} = F_N \tilde{x}$$

- Calculează coeficienţii SFD (vezi semnificaţie mai jos)

- Sinteză

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] w_N^{-kn}$$

$$\tilde{x} = \frac{1}{N} F_N^H \tilde{X}$$

- Reface semnalul $\tilde{X}$ din coeficienţii SFD

- Relaţia dintre semnalul $\tilde{x}[n]$ şi coeficienţii SFD asociaţi este biunivocă

SFD pentru sinusoide (1)

- Se consideră următoarele sinusoide, cu $m \in 0 : N-1$

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1[n] &= e^{j\frac{2\pi m}{N}n} & \qquad \tilde{x}_3[n] &= \sin\left(\frac{2\pi m}{N}n\right) \\ \tilde{x}_2[n] &= e^{-j\frac{2\pi m}{N}n} & \qquad \tilde{x}_4[n] &= \cos\left(\frac{2\pi m}{N}n\right) \end{aligned}$$

- Identificând pur şi simplu în (1), obţinem, pentru $k \in 0 : N-1$,

$$\tilde{X}_1[k] = N\delta[k-m]$$

- Toată puterea semnalului este concentrată într-o singură frecvenţă

- Observând că $\tilde{x}_2[n] = e^{j\frac{2\pi(N-m)}{N}n}$, obţinem

$$\tilde{X}_2[k] = N\delta[k-(N-m)]$$

SFD pentru sinusoide (2)

- Pentru sinusoidele reale, observăm că

$$x_3[n] = \frac{x_1[n] - x_2[n]}{2j}, \quad x_4[n] = \frac{x_1[n] + x_2[n]}{2}$$

- Concluzie: seria Fourier asociată unei sinusoide complexe de frecvenţă $2\pi m/N$ are un singur coeficient nenul, cel cu indice m sau $N - m$
- Dacă sinusoida este reală, atunci ambii coeficienţi sunt nenuli (mai puţin atunci când $m = 0$ sau $m = N/2$, dacă N e par)
- Caz particular: pentru $m = 0$, rezultă $\tilde{x}_3[n] = 0$ şi $\tilde{x}_4[n] = 1$. Deci $\tilde{X}_3[k] = 0$ şi $\tilde{X}_4[k] = N\delta[k]$
- Dacă N par şi $m = N/2$, rezultă $\tilde{x}_3[n] = 0$ şi $\tilde{x}_4[n] = (-1)^n$. Deci $\tilde{X}_3[k] = 0$ şi $\tilde{X}_4[k] = N\delta[k - N/2]$

SFD—semnificaţie

- Coeficienţii SFD $\tilde{X}[k]$ arată ponderea sinusoidelor cu frecvenţele $2\pi k/N$ în semnalul N-periodic $\tilde{x}[n]$
- Puterea semnalului $\tilde{x}[n]$ în frecvenţa $2\pi m/N$ este dată de doi coeficienţi ai SFD, anume $\tilde{X}[m]$ şi $\tilde{X}[N-m]$ (mai puţin pentru $m = 0$, $m = N/2$ (dacă N e par), adică pentru frecvenţele $\omega = 0$, respectiv $\omega = \pi$)
- Mai precis, puterea în frecvenţa $2\pi m/N$ este $|X[m]|^2 + |X[N-m]|^2$ (vezi teorema lui Parseval)

SFD—întârziere (1)

- *Întârziere.* Dacă $n_0 \in \mathbb{Z}$ şi $\tilde{y}[n] = \tilde{x}[n - n_0]$, atunci

$$\tilde{Y}[k] = w_N^{kn_0} \tilde{X}[k]$$

- Demonstraţie:

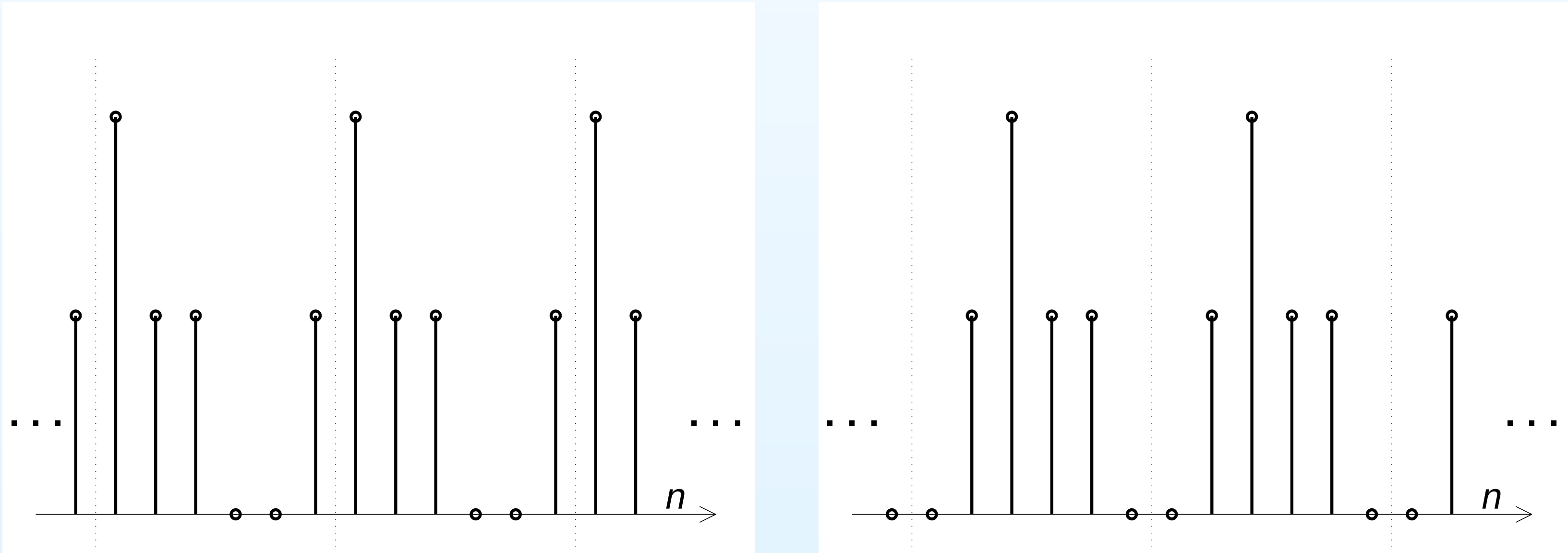
$$\tilde{Y}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{y}[n] w_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n - n_0] w_N^{k(n-n_0)} w_N^{kn_0} = w_N^{kn_0} \tilde{X}[k]$$

Atât $\tilde{x}[n]$ cât şi $\tilde{v}[n] = w_N^{kn}$ sunt N-periodice, deci

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n - n_0] w_N^{k(n-n_0)} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] w_N^{kn}$$

SFD—întârziere (2)

- Întârzierea cu n_0 a unui semnal N-periodic este echivalentă cu deplasarea ciclică de n_0 ori la dreapta a eşantioanelor cu suportul $0 : N-1$
- Stânga: semnal periodic cu perioadă $N = 6$. Dreapta: acelaşi semnal, după întârzierea cu $n_0 = 2$



SFD—proprietăţi (1)

- *Liniaritate.* Pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ avem

$$SFD(\alpha\tilde{x}[n] + \beta\tilde{y}[n]) = \alpha \cdot SFD(\tilde{x}[n]) + \beta \cdot SFD(\tilde{y}[n])$$

- *Complex conjugare.* Pentru $\tilde{y}[n] = \tilde{x}^*[n]$ obţinem

$$\tilde{Y}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}^*[n] w_N^{kn} = \left(\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] w_N^{-kn} \right)^* = \tilde{X}^*[-k] = \tilde{X}^*[N-k]$$

Ultima egalitate rezultă din periodicitatea coeficienţilor SFD

SFD—proprietăţi (2)

- Dacă semnalul $\tilde{x}[n]$ este real, atunci $\tilde{x}^*[n] = \tilde{x}[n]$ şi

$$\tilde{X}[k] = \tilde{X}^*[-k]$$

$$Re\tilde{X}[k] = Re\tilde{X}[-k] \qquad Im\tilde{X}[k] = -Im\tilde{X}[-k]$$
$$|\tilde{X}[k]| = |\tilde{X}[-k]| \qquad arg\tilde{X}[k] = -arg\tilde{X}[-k]$$

- *"Teorema" lui Parseval:*

$$\sum_{n=0}^{N-1} |\tilde{x}[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\tilde{X}[k]|^2$$

- Demonstraţie (ne amintim că $\tilde{x} = \frac{1}{N} F_N^H \tilde{X}$ şi $F_N F_N^H = N \cdot I$):

$$\sum_{n=0}^{N-1} |\tilde{x}[n]|^2 = \tilde{x}^H \tilde{x} = \frac{1}{N^2} \tilde{X}^H F_N F_N^H \tilde{X} = \frac{1}{N} \tilde{X}^H \tilde{X} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\tilde{X}[k]|^2$$

Convoluţie periodică (1)

- *Convoluţia periodică* a semnalelor N-periodice $\tilde{x}[n]$ şi $\tilde{y}[n]$ este semnalul

$$\tilde{x}[n] \circledast \tilde{y}[n] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\ell=0}^{N-1} \tilde{x}[\ell]\tilde{y}[n-\ell]$$

- E convoluţia obişnuită, dar pe o singură perioadă (şi ţinând seama de ciclicitatea dată de periodicitate)
- SFD asociată convoluţiei a două semnale este produsul la nivel de element al SFD semnalelor

$$SFD(\tilde{x}[n] \circledast \tilde{y}[n]) = \tilde{X}[k] \cdot \tilde{Y}[k]$$

Convoluţie periodică (2)

- Demonstraţie: SFD asociată semnalului $\tilde{x}[n] \circledast \tilde{y}[n]$ este

$$\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{\ell=0}^{N-1}\tilde{x}[\ell]\tilde{y}[n-\ell]w_N^{kn} = \left(\sum_{\ell=0}^{N-1}\tilde{x}[\ell]w_N^{k\ell}\right)\left(\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{y}[n-\ell]w_N^{k(n-\ell)}\right)$$

  adică $\tilde{X}[k]\tilde{Y}[k]$

- Expresia de mai sus pentru $\tilde{Y}[k]$ este corectă deoarece $\tilde{y}[n-\ell]$ şi $w_N^{k(n-\ell)}$ sunt N-periodice
- *Modulaţie în timp:*

$$SFD(\tilde{x}[n]\tilde{y}[n]) = \frac{1}{N}\tilde{X}[k] \circledast \tilde{Y}[k]$$

Transformata Fourier discretă

- Fie $x[n]$ un semnal cu suport $0 : N - 1$
- Dorim să analizăm spectrul semnalului
- Transformata Fourier (TF) a semnalului este

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\omega n}$$

- Această expresie poate fi utilizată pentru evaluarea spectrului în orice punct $\omega \in [0, 2\pi]$
- Un mod de calcul mai eficient, prin care se obţine spectrul doar în N puncte echidistante, se bazează pe *transformata Fourier discretă* (TFD)

TFD—definiţie

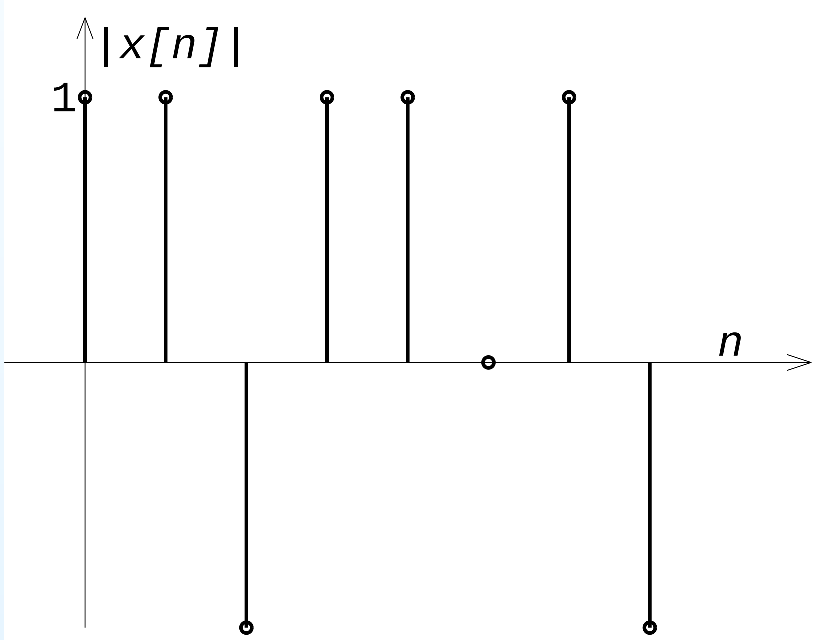
- *Transformata Fourier discretă (TFD)* a semnalului $x[n]$ cu suport $0 : N-1$ este secvenţa

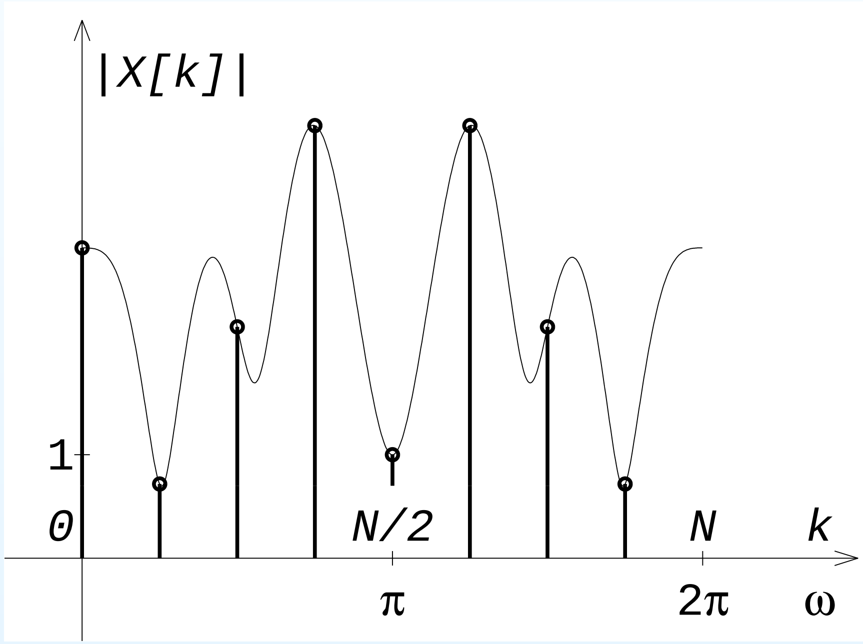
$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] w_N^{kn}, \;\; k = 0 : N-1$$

- Notăm $X[k] = TFD_N(x[n])$ (ignorând eventual indicele N atunci când lungimea suportului rezultă din context)
- TFD este TF pentru $\omega = 2\pi k/N$, $k \in 0 : N-1$

TFD–interpretare

- Pentru semnale cu suport finit, TFD reprezintă o eşantionare a TF, în N frecvenţe echidistante aflate în intervalul $[0, 2\pi]$





TFD—relaţia cu SFD

- TFD se defineşte la fel ca seria Fourier discretă asociată semnalului N-periodic $\tilde{x}[n]$, care reprezintă prelungirea prin periodicitate a semnalului $x[n]$

$$\tilde{x}[n] = x[n \bmod N]$$

- Facem convenţia că TFD se defineşte doar pe eşantioanele $0 : N-1$, în timp ce SFD se prelungeşte prin periodicitate pentru orice $k \in \mathbb{Z}$
- În acest fel, notaţiile $X[k]$ pentru TFD şi $\tilde{X}[k]$ pentru coeficienţii SFD sunt consistente
- Toate proprietăţile SFD se pot aplica transformatei Fourier discrete, cu precauţia de a evita ieşirea din suportul finit $0 : N-1$ în urma deplasărilor (care sunt interpretate ciclic)

Convoluţia ciclică

- Fie $x[n]$ un semnal cu suport $0 : N-1$. Semnalul deplasat circular ("întârziat") cu n_0 eşantioane la dreapta este $y[n] = x[(n-n_0) \bmod N]$
- *Convoluţia ciclică* a semnalelor $x[n]$ şi $y[n]$, ambele cu suport finit $0 : N-1$, este semnalul

$$x[n] \circledast_N y[n] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\ell=0}^{N-1} x[\ell] y[(n-\ell) \bmod N]$$

- TFD a convoluţiei ciclice a două semnale cu suport $0 : N-1$ este

$$TFD(x[n] \circledast_N y[n]) = X[k] \cdot Y[k]$$

TFD inversă

- Dacă $x[n]$ este un semnal cu suport $0 : N - 1$ şi $X[k] = TFD(x[n])$, atunci are loc egalitatea

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j \frac{2\pi}{N} kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] w_N^{-kn}$$

  care defineşte transformata Fourier discretă inversă
- (Forma este identică cu SFD)

TFD—forma matriceală

- Notând

$$x = \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix}$$

se poate scrie

$$x = \frac{1}{N} F_N^H X, \quad X = F_N x,$$

unde F_N este matricea TFD (vezi pag. 7)

Eşantionarea spectrului

- Fie $x[n]$ un semnal cu suport $0 : N - 1$
- $X[k] = TFD_N(x[n])$ este o eşantionare în N puncte a spectrului $X(\omega)$ al semnalului
- Cum obţinem o eşantionare în $M > N$ puncte ?
- Prelungim artificial suportul

$$y[n] = \begin{cases} x[n], & \text{dacă } 0 \le n \le N - 1 \\ 0, & \text{dacă } N \le n \le M - 1 \end{cases}$$

- Avem evident $X(\omega) = Y(\omega)$
- Deci $Y[k] = TFD_M(y[n])$ este o eşantionare în M puncte a spectrului $X(\omega)$
- Dacă $M = pN$, atunci $Y[pk] = X[k]$

Transformata Fourier rapidă (FFT)

- Transformata Fourier rapidă (FFT – Fast Fourier Transform) este numele generic pentru o clasă de algoritmi rapizi de calcul al transformatei Fourier discrete (TFD), pentru semnale cu suport finit
- Primul algoritm de acest tip a fost propus de Cooley şi Tukey în 1965, dar ideea e mult mai veche (Gauss !)
- Înmulţirea matrice-vector $X = F_N x$ are o complexitate de $O(N^2)$ operaţii
- Algoritmii FFT au complexitate $O(N \log_2 N)$
- Reducerea complexităţii este semnificativă pentru valori practice ale mărimii suportului
- Pentru $N = 1024$, avem $N^2 \approx 10^6$ şi $N \log_2 N \approx 10^4$
- Pentru $N = 100$ complexitatea scade de $N/\log_2 N > 10$ ori

Ideea FFT

- Se presupune că N este putere a lui 2
- Algoritmi FFT
  - cu decimare în timp
  - cu decimare în frecvenţă
- Ideea de bază este de tip *divide et impera*
- Calculul TFD$_N(\cdot)$ se reduce la calculul a două transformări TFD$_{N/2}(\cdot)$
- Pentru calculul fiecărei TFD de lungime mai mică, se aplică *recursiv* acelaşi mod de calcul

Complexitatea FFT

- Reducerea calculului TFD$_N(\cdot)$ la calculul a două transformări TFD$_{N/2}(\cdot)$ are complexitate αN, unde α este o constantă
- Complexitatea algoritmului este

$$\alpha N + 2\alpha\frac{N}{2} + 4\alpha\frac{N}{4} + \ldots$$

- Numărul de termeni în suma de mai sus este $\log_2 N$,
i.e. numărul de înjumătăţiri necesare pentru a ajunge de la N la 1
- Concluzie: complexitatea este $\alpha N \log_2 N$

Decimare în timp—ideea de calcul (1)

- Definiţia TFD pentru un semnal cu suport $0 : M - 1$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] w_N^{kn}$$

- Separăm două sume, una pentru indici pari, alta pentru indici impari

$$X[k] = \sum_{n\ par}^{N-1} x[n] w_N^{kn} + \sum_{n\ impar}^{N-1} x[n] w_N^{kn}$$

Decimare în timp—ideea de calcul (2)

- Substituim $n = 2m$, $m = 0 : N/2 - 1$, în prima sumă, şi $n = 2m + 1$, $m = 0 : N/2 - 1$, în a doua

$$X[k] = \sum_{m=0}^{N/2-1} x[2m] w_N^{2km} + \sum_{m=0}^{N/2-1} x[2m+1] w_N^{k(2m+1)}$$

- Ţinem seama că

$$w_N^{2km} = e^{-j\frac{2\pi}{N}2km} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}km} = w_{N/2}^{km}$$

şi obţinem

$$X[k] = \sum_{m=0}^{N/2-1} x[2m] w_{N/2}^{km} + w_N^k \sum_{m=0}^{N/2-1} x[2m+1] w_{N/2}^{km}$$

Decimare în timp—primul pas

- Notăm $x_p[m] = x[2m]$ semnalul cu suport $0 : N/2 - 1$ format din eşantioanele pare ale semnalului iniţial
- Notăm $x_i[m] = x[2m + 1]$ pentru eşantioanele impare
- Transformatele Fourier discrete ale acestora sunt

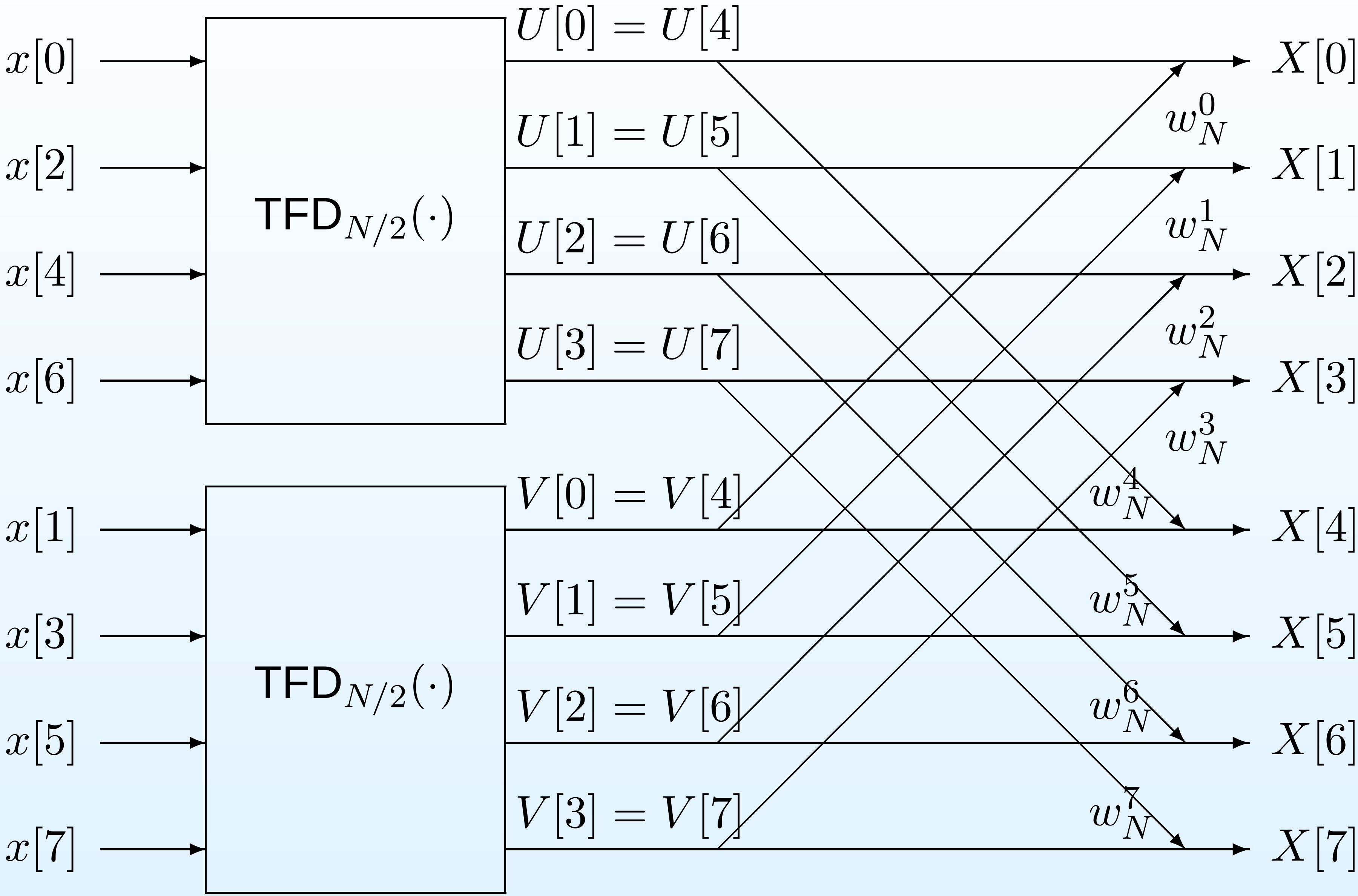
$$U[k] = \text{TFD}_{N/2}(x_p[m]), \quad V[k] = \text{TFD}_{N/2}(x_i[m])$$

- Putem deci scrie

$$X[k] = U[k] + w_N^k V[k], \ k = 0 : N - 1$$

- În această relaţie avem $k = 0 : N - 1$, deci apar *două* perioade ale transformatelor Fourier discrete $U[k]$, $V[k]$

Decimare în timp—primul pas, schema de calcul



Decimare în timp—forma recursivă

- Folosind recursiv metoda de înjumătăţire de mai sus, obţinem un prim algoritm FFT
- Dacă $N = 1$, atunci TFD este identică cu semnalul
- Pentru instrucţiunile 2.3 şi 2.4 sunt necesare N adunări complexe şi N înmulţiri complexe (constantele w_N^k sunt tabelate)

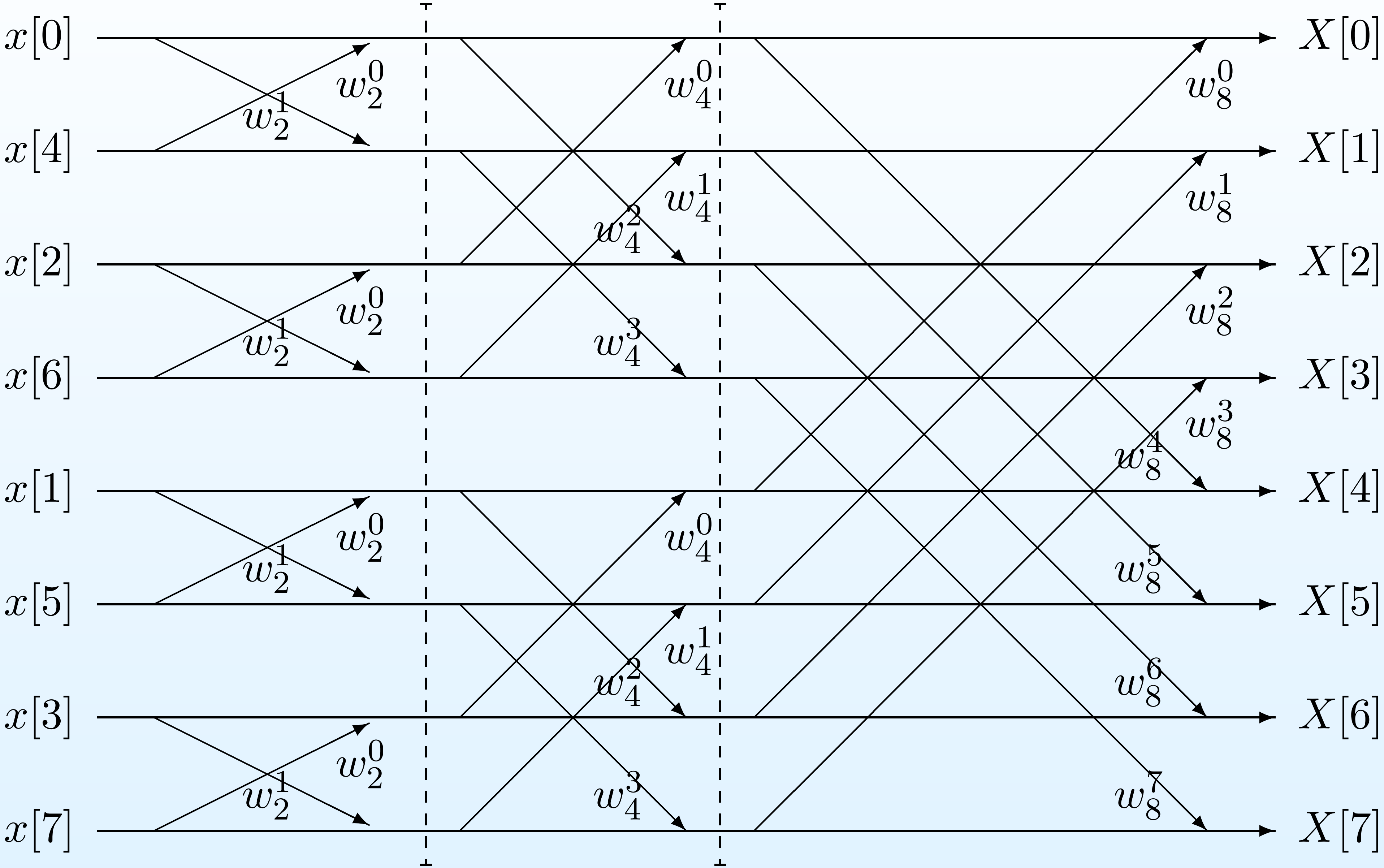
funcţie $X = \text{FFT}(x, N)$

1. dacă $N = 1$ atunci
    1. $X = x$
2. altfel
    1. Pune $x_p[m] = x[2m]$, $x_i[m] = x[2m + 1]$, pentru $m = 0 : N/2 - 1$
    2. Calculează $U = \text{FFT}(x_p, N/2)$, $V = \text{FFT}(x_i, N/2)$ (apel recursiv)
    3. $X[k] = U[k] + w_N^k V[k]$, pentru $k = 0 : N/2 - 1$
    4. $X[k] = U[k - N/2] + w_N^k V[k - N/2]$, pentru $k = N/2 : N - 1$

Decimare în timp—diagrama fluture

- Implementările practice ale algoritmului FFT nu folosesc apelurile recursive, ci variante iterative echivalente, care conduc la programe mai eficiente
- Diagrama *fluture* (butterfly) din pagina următoare ilustrează toate operaţiile pentru cazul $N = 8$
- Liniile punctate verticale separă etapele de calcul (iteraţiile sau nivelele de recursie, după cum interpretăm algoritmul)
- Sunt $\log_2 N$ etape şi în fiecare dintre ele se efectuează $2N$ operaţii, ceea ce conduce la un total de $2N \log_2 N$

Decimare în timp—diagrama fluture pentru $N = 8$



Ordine bit-inversă

- În ce ordine se află eşantioanele semnalului de intrare ?
- Înaintea ultimei etape, elementele $x[n]$, cu n par, se află în jumătatea de sus a diagramei (adică sunt primele), iar cele cu n impar se află în jumătatea de jos
- Privind la reprezentarea binară a lui n, elementele cu ultimul bit al indicelui egal cu zero sunt în prima jumătate
- Înaintea penultimei etape, elementelor cu indice par sunt separate în două; cele cu indice par în această secvenţă, adică cele pentru care penultimul bit al lui n este zero, se află în sfertul de sus al diagramei; celelalte, pentru care penultimul bit este 1, sunt în al doilea sfert
- Concluzie: eşantioanele intrării se află în *ordine bit-inversă a indicilor*

Diagrama fluture îmbunătăţită

- Numărul de înmulţiri din diagrama fluture se poate reduce
- Observăm că

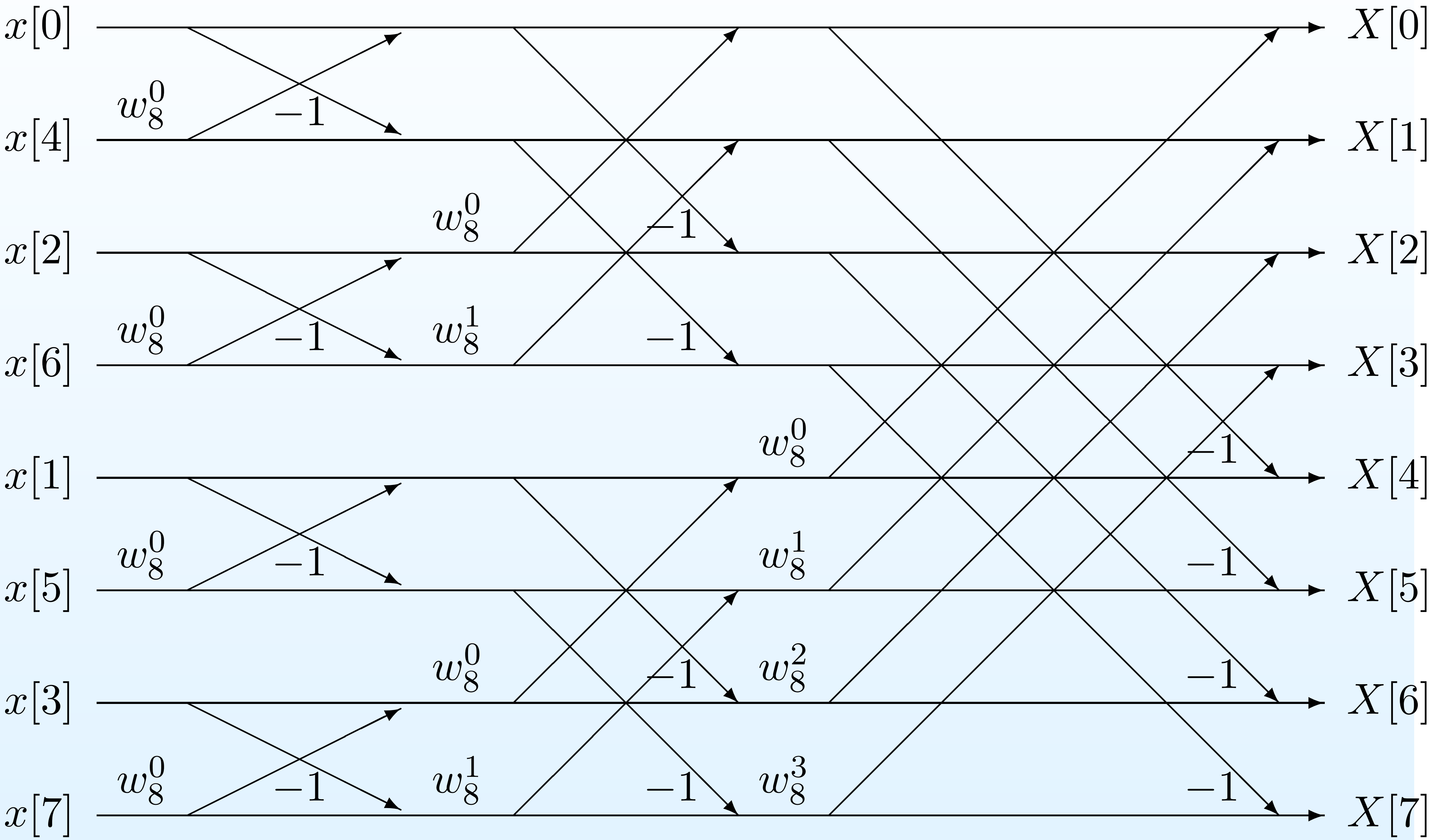
$$w_N^{k-N/2} = e^{-j(\frac{2k\pi}{N}-\pi)} = -w_N^k$$

- Pentru un divizor K al lui N putem scrie

$$w_K^m = w_N^{mN/K}$$

- Concluzie: în diagrama fluture se pot utiliza doar constantele w_N^k, $k = 0 : N/2 - 1$
- În noua diagramă sunt doar $3N/2 \log_2 N$ operaţii complexe, din care doar $N/2$ înmulţiri
- Reducerea este datorată apariţiei constantelor -1, astfel că unele înmulţiri dispar

Decimare în timp—diagrama fluture îmbunătăţită



Decimare în timp—forma iterativă

- Calculele se pot desfăşura pe loc în vectorul x

funcţie $x =$ FFT_decimare_timp(x, N)

1. Ordonează x în ordine bit-inversă a indicilor
2. pentru $i = 1 : \log_2 N$
    1. $K = 2^i$
    2. pentru $k = 0 : K : N - 1$
        1. pentru $m = 0 : K/2 - 1$
            1. $y = x[k + m]$
            2. $z = w_N^{mN/K} x[k + K/2 + m]$
            3. $x[k + m] = y + z$
            4. $x[k + K/2 + m] = y - z$

Decimare în frecvenţă—ideea de calcul (1)

- Idee duală celei folosite pentru decimarea în timp
- Separarea se face în transformata Fourier discretă $X[k]$
- Considerăm întâi indicii pari, $k = 2\ell$, $\ell = 0 : N/2 - 1$

$$X[2\ell] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] w_N^{2\ell n}$$

- Separăm primii $N/2$ termeni din sumă de ultimii $N/2$ (pentru care facem substituţia $n \to n + N/2$)

$$X[2\ell] = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n] w_{N/2}^{\ell n} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n + N/2] w_{N/2}^{\ell(n+N/2)}$$

Decimare în frecvenţă—ideea de calcul (2)

- Ţinând seama că $w_{N/2}^{\ell N/2} = 1$, obţinem

$$X[2\ell] = \sum_{n=0}^{N/2-1} \left(x[n] + x[n+N/2]\right) w_{N/2}^{\ell n}$$

- Egalitatea de mai sus este

$$X[2\ell] = \text{TFD}_{N/2}(x[n] + x[n+N/2]), \quad \ell = 0 : N/2 - 1$$

- Am exprimat jumătatea pară a transformatei $X[k]$ printr-o TFD de lungime $N/2$ a semnalului $u[n] = x[n] + x[n+N/2]$ obţinut din semnalul iniţial $x[n]$

Decimare în frecvenţă—ideea de calcul (3)

- Pentru indicii impari, $k = 2\ell + 1$, $\ell = 0 : N/2 - 1$, scriem în mod analog

$$\begin{aligned}
X[2\ell+1] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] w_N^{(2\ell+1)n} \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n] w_N^{(2\ell+1)n} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n+N/2] w_N^{(2\ell+1)(n+N/2)} \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n] w_N^{n} w_{N/2}^{\ell n} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n+N/2] w_N^{n} w_{N/2}^{\ell n} w_N^{\ell N} w_N^{N/2} \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} w_N^{n} \left(x[n] - x[n+N/2] \right) w_{N/2}^{\ell n}
\end{aligned}$$

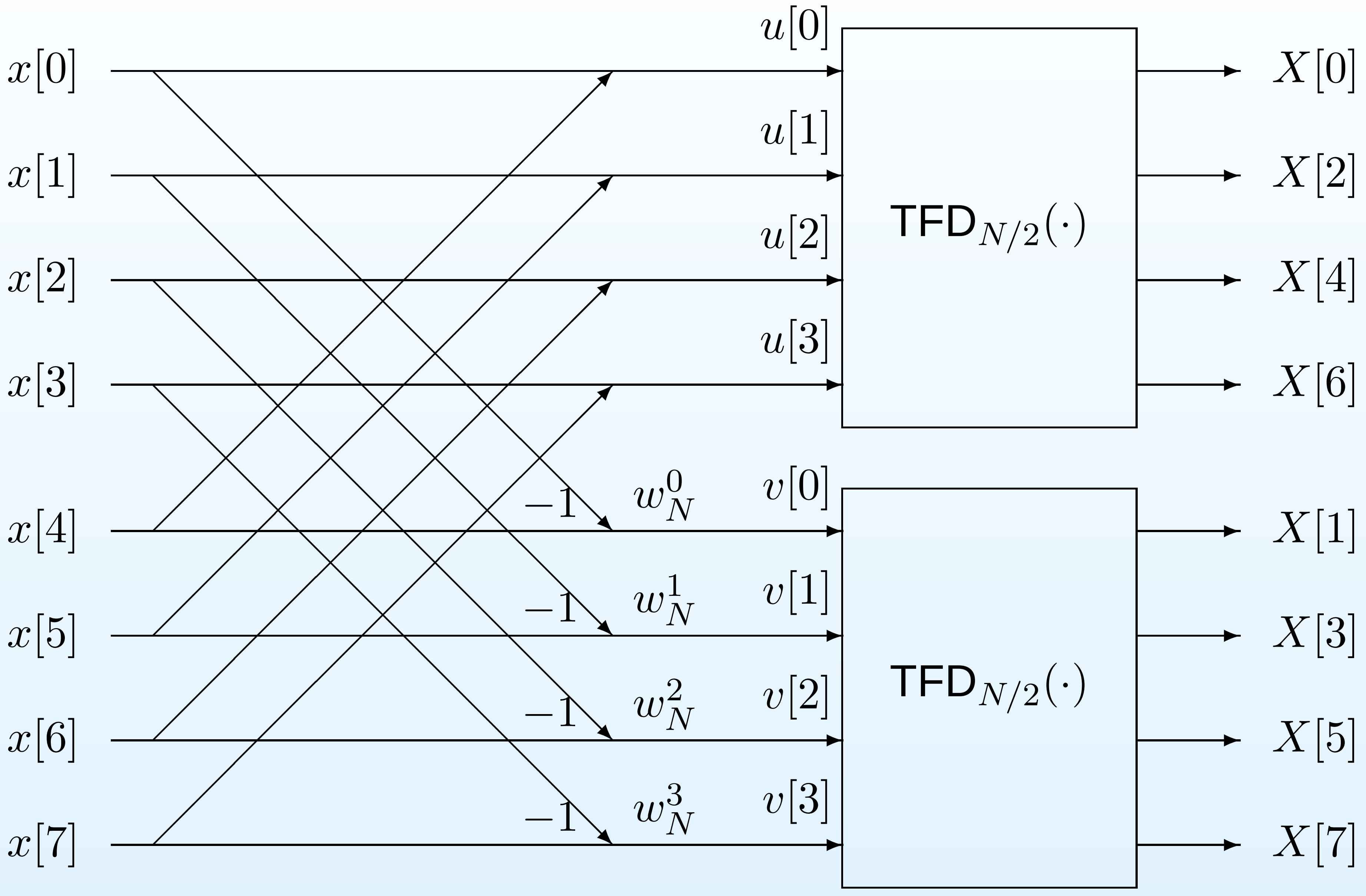
Decimare în frecvenţă—ideea de calcul (4)

- Ultima relaţie este echivalentă cu

$$X[2\ell+1] = \text{TFD}_{N/2}(w_N^n(x[n]-x[n+N/2])), \quad \ell = 0 : N/2-1$$

- Am exprimat jumătatea impară a transformatei $X[k]$ printr-o TFD de lungime $N/2$ a semnalului $v[n] = w_N^n(x[n]-x[n+N/2])$
- Calculul unei TFD de lungime N se reduce la calculul a două TFD de lungime $N/2$, ale unor semnale obţinute prin transformări simple ale celui iniţial

Decimare în frecvenţă—primul pas, schemă de calcul

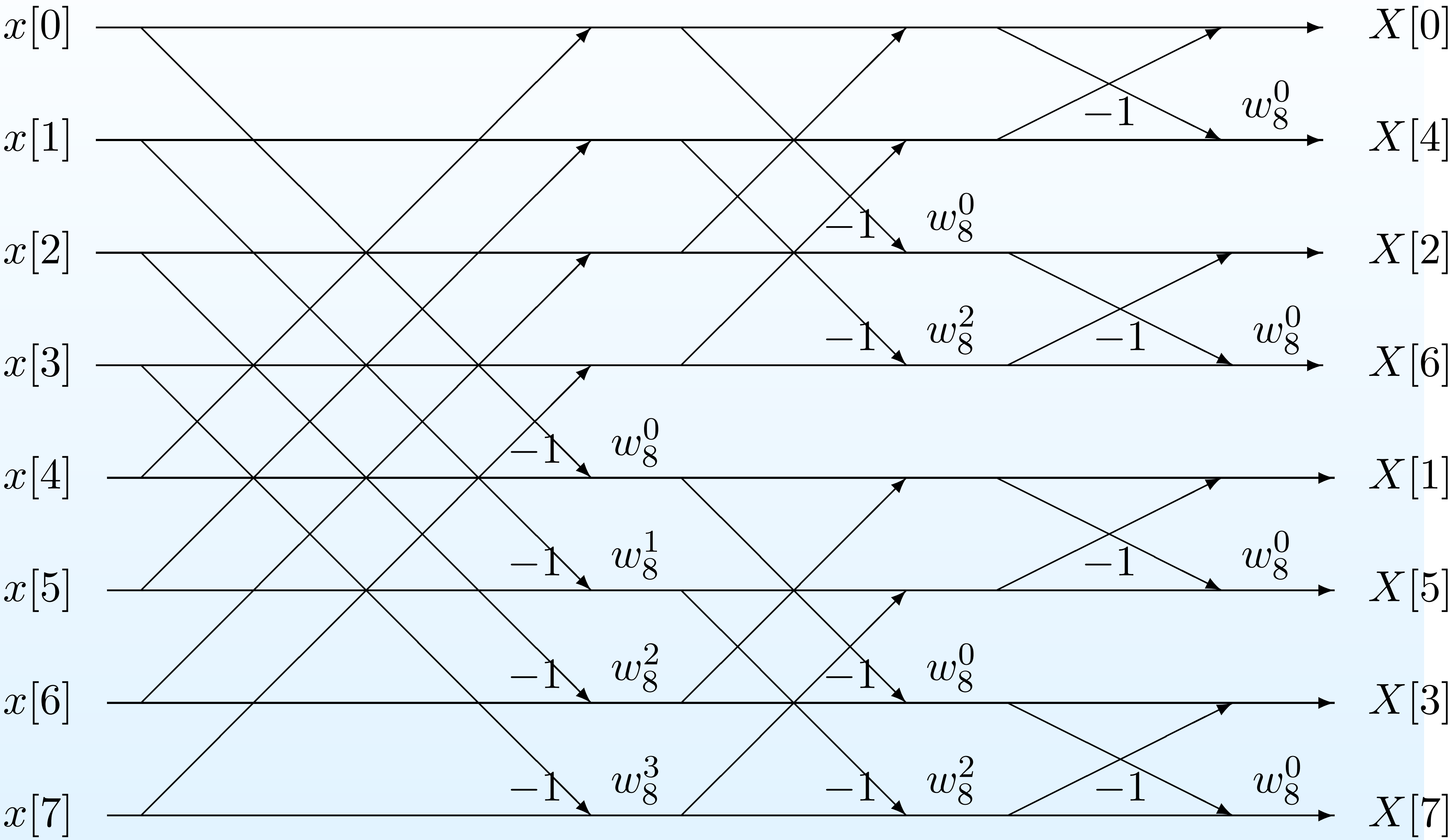


Decimare în frecvenţă—forma recursivă

funcţie $X = \text{FFT}(x, N)$

1. dacă $N = 1$ atunci
   1. $X = x$
2. altfel
   1. $u[n] = x[n] + x[n + N/2]$, pentru $n = 0 : N/2 - 1$
   2. $v[n] = w_N^n (x[n] - x[n + N/2])$, pentru $n = 0 : N/2 - 1$
   3. Calculează $X_p = \text{FFT}(u, N/2)$, $X_i = \text{FFT}(v, N/2)$ (apel recursiv)
   4. $X[2\ell] = X_p[\ell]$, $X[2\ell + 1] = X_i[\ell]$, pentru $\ell = 0 : N/2 - 1$

Decimare în frecvenţă—diagrama fluture, $N = 8$



Decimare în frecvenţă—forma iterativă

- Eşantioanele transformatei $X[k]$ sunt în ordinea bit-inversă a indicilor
- Numărul de operaţii este $3N/2\log_2 N$
- Calculele se pot desfăşura pe loc în vectorul x

funcţie $x =$ FFT_decimare_frecvenţă(x, N)
1. pentru $i = 1 : \log_2 N$
    1. $K = N/2^{i-1}$
    2. pentru $k = 0 : K : N-1$
        1. pentru $m = 0 : K/2-1$
            1. $u = x[k+m] + x[k+K/2+m]$
            2. $v = w_N^{mN/K}(x[k+m] - x[k+K/2+m])$
            3. $x[k+m] = u$
            4. $x[k+K/2+m] = v$
2. Ordonează x în ordine bit-inversă a indicilor

Calculul TFDI utilizând FFT

- Se cunosc coeficienţii transformatei Fourier discrete $X[k]$, $k = 0 : N - 1$, ai unui semnal $x[n]$ cu suport $0 : N - 1$
- Cum se pot calcula valorile semnalului folosind FFT ?
- Din definiţia TFDI rezultă

$$x^*[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^*[k] w_N^{kn}$$

- Rezultă că $Nx^*[n] = TFD(X^*[k])$
- O alternativa este scrierea unor algoritmi speciali pentru TFDI, care sunt obţinuţi prin modificarea algoritmilor FFT; în diagramele fluture apar puteri negative ale constantei w_N, în locul celor pozitive.

Analiza în frecvenţă a semnalelor

- Separare în cadre, eventual cu suprapunere
- Aplicare fereastră pentru fiecare cadru
- Exemple:
  - Spectrogramă
  - Spectrometru cu bare
  - Periodogramă
- (Noţiunile de aici vor fi explicate la tablă !)

Transformări bloc (ortogonale)

- Considerăm un bloc (cadru) de lungime N al unui semnal discret

$$x = \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N$$

- O transformare bloc este o matrice $U \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ortogonală ($U^T U = I$)
- Vectorul $X = Ux \in \mathbb{R}^N$ se numeşte transformata (prin U) a blocului x
- Transformările ortogonale conservă energia:

$$\|X\|_2^2 = X^T X = x^T U^T U x = x^T x = \|x\|^2$$

TFD ca transformată bloc

- În cazul complex $U \in \mathbb{C}^{N \times N}$ este unitară: $U^H U = I$
- De exemplu TFD se bazează pe matricea TFD de la pagina 7, iar transformarea bloc corespunzătoare este

$$U = \frac{1}{\sqrt{N}} F_N$$

- Avantaje:
  - X este o eşantionare a spectrului, deci semnificaţia transformării e clară
  - Există un algoritm rapid de calcul (FFT)
- Dezavantaj: X este în general complex, chiar dacă semnalul este real

Alte transformate bloc

- Rezultat real pentru semnal real
- Transformata cosinus discretă (TCD):

$$u_{kn} = \frac{\alpha_k}{\sqrt{2}} \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) k \frac{\pi}{N}\right], \quad \alpha_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \text{ sau } k = N-1 \\ \sqrt{2}, & \text{altfel} \end{cases}$$

- Transformata Hartley

$$u_{kn} = \cos\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{N} kn\right)$$

- Aceste transformate (şi altele) se pot calcula utilizând FFT (plus alte operaţii înainte şi după FFT)
- Coeficienţii transformatelor au legătură cu spectrul: primii coeficienţi reprezintă frecvenţele joase etc.

Transformata Karhunen-Loeve

- Transformările anterioare (TFD, TCD) sunt fixe
- Ele dau rezultate bune pentru multe semnale, dar nu sunt optime
- Transformata Karhunen-Loeve este adaptată proprietăţilor statistice ale semnalului de intrare
- TKL este optimă, în sensul concentrării energiei semnalului într-un număr mic de coeficienţi, proprietate utilă pentru codare

Aplicaţii ale transformatelor bloc

- Exemplu 1: codare (compresie cu pierderi)
- Exemplu 2: egalizor grafic
- (Exemplele vor fi explicate la tablă !)