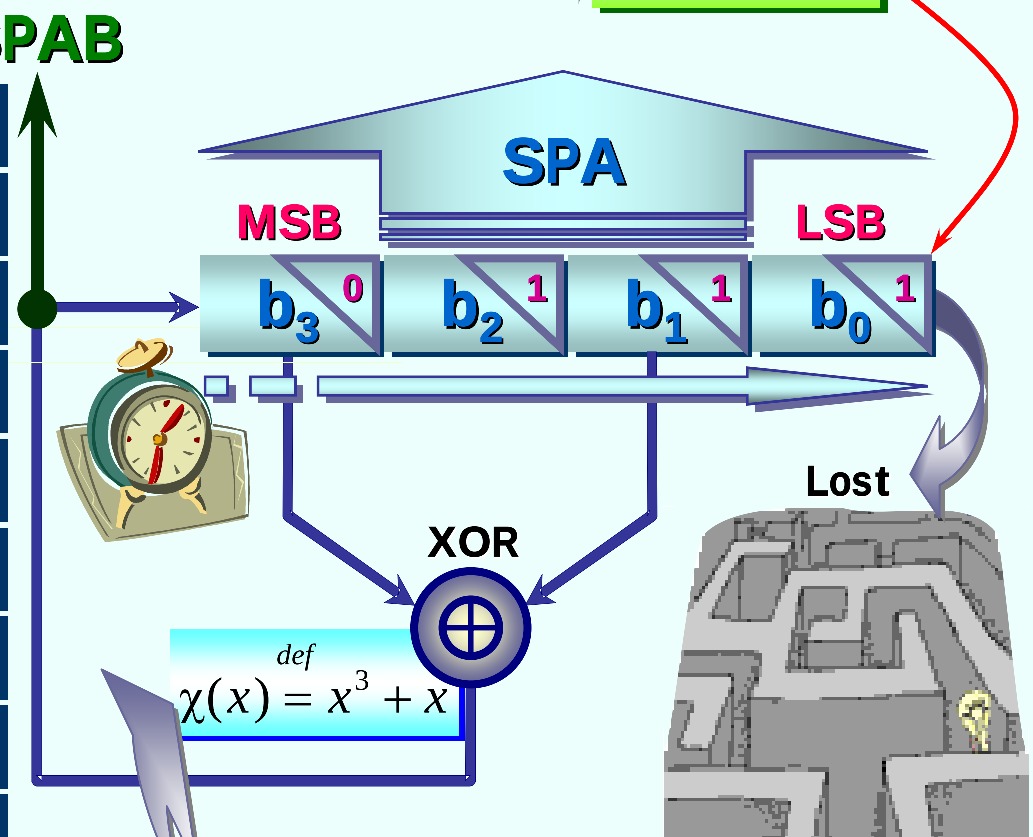
❸ Semnale de stimul

❸.❹ Clase de semnale persistente

Generarea SPA(B) pe cale hardware | **Componenta principală** ⇒ **Registrul de deplasare**

☝ Periodic.

SPAB	b_3	b_2	b_1	b_0	SPA
1	0	1	1	1	7
0	1	0	1	1	11
0	0	1	0	1	5
1	0	0	1	0	2
1	1	0	0	1	9
1	1	1	0	0	12
0	1	1	1	0	14
1	0	1	1	1	7



- Activarea biților care contribuie la producerea valorii MSB este de regulă indicată de polinomul caracteristic.

$$\chi(x) \overset{def}{=} \varepsilon_{N-1}x^{N-1} + \varepsilon_{N-2}x^{N-2} + \cdots + \varepsilon_1 x + \varepsilon_0$$

parametri de activare (binari)

$N \in \mathbb{N}^*$ → Numărul de biți ai registrului de deplasare.

$2^N - 1 \in \mathbb{N}^*$ → Numărul maxim de valori ale SPA.

$P \in \overline{1, 2^N - 1}$ → Perioada SPA(B).

☝ Inițializarea nulă se exculde.

❸ Semnale de stimul

❸.❹ Clase de semnale persistente

Generarea SPA(B) pe cale software

- Algoritmii derivați sunt destul de numeroşi, complexitatea lor variind mult.

Exemplu Un algoritm bazat pe lungimea cuvîntului maşinii

Date de intrare → $a \in \mathbb{Z}^*$ (amplificarea); $b \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ (numărul maxim reprezentabil pe lungimea cuvîntului maşină)

Inițializare → $u[0]$ (valoarea inițială a SPA)

Limbajul C

Buclă iterativă

restul împărțirii dintre 2 întregi

Pentru $n \geq 1$ → $u[n] = \left(a \cdot u[n-1]\right) \% \, b$

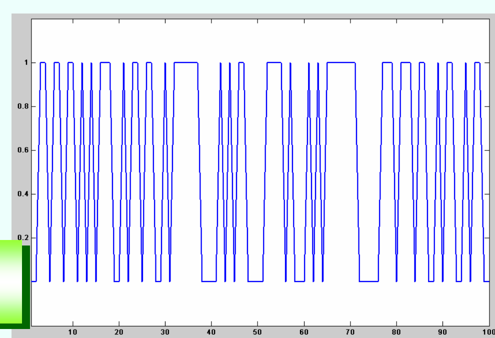
Date de ieşire SPA

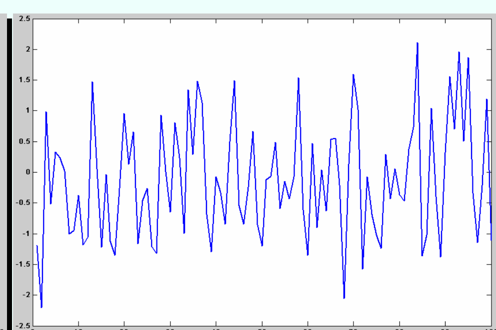
☝ Practic, se ignoră biții rezultați din depăşirea cuvîntului maşină.

- Semnalul rezultat este periodic, iar perioada este în general **mai mare pentru amplificări negative** decît pentru cele pozitive.

- Algoritmii cablați hardware pot fi de asemenea **emulați** (implementați pe cale software).

SPAB





SPA

❸ Semnale de stimul

❸.❹ Clase de semnale persistente

Proprietăţi fundamentale ale SPA(B)

SPAB₁ Periodicitate

Hardware	Software
$P \le 2^N - 1$	$P \le b-1$

Sp₂ ⇒ Ordinul de persistenţă al unui SPA(B) este finit şi cel mult egal cu perioada.

SPAB₂ Mărginire

Hardware	Software
$1 \le u[n] \le 2^N - 1$	$1 \le \lvert u[n] \rvert \le b-1$

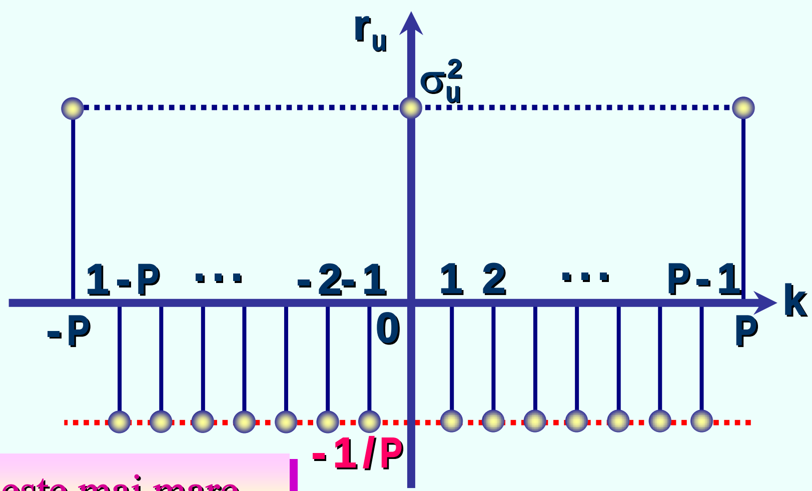
SPAB₃ Configuraţia auto-covarianţei

Auto-covarianţa unui SPA(B) este periodică şi de perioadă P.

Mai mult, valorile auto-covarianţei pentru pivoţi diferiţi de multiplii întregi ai perioadei sunt invers proporţionale cu perioada.

$$\lvert r_u[k] \rvert \le \boxed{\frac{\alpha_u}{P}} \quad \forall\, k \in \mathbb{Z} \setminus P\mathbb{Z}$$

Exemplu SPAB generat prin cablare hardware



☝ Cu cît perioada este mai mare, cu atît ordinul de persistenţă este mai mare şi SPA(B) aproximează mai bine zhomotul alb (în sensul auto-covarianţei).

❸ Semnale de stimul

❸.❹ Clase de semnale persistente

Aşadar Atît ordinul de persistenţă al unui SPA(B) cît şi precizia de aproximare a zgomotului alb sunt controlabile prin intermediul perioadei.

Cum s-ar putea genera SPA(B) de perioade maximale?

☝ Perioada trebuie să fie sensibil mai mare decît dimensiunea orizontului de măsură.

Rezolvînd o problemă granulară de optimizare. → Funcţia criteriu poate fi evaluată în toate punctele domeniului de definiţie, dar numărul de valori ale acestuia este extrem de mare.

Perioada este determinată de 3 parametri.

Hardware

- N ➔ Numărul de biţi ai registrului de deplasare.
- $\{\varepsilon_n\}_{n\in\overline{0,N-1}}$ ➔ Configuraţia polinomului caracteristic.
- $\{b_{0n}\}_{n\in\overline{0,N-1}}$ ➔ Iniţializarea registrului de deplasare.

• De regulă, registrul de deplasare are 16, 32, 64 sau 128 de biţi.

Căutarea exhaustivă a perioadei maximale este adesea ineficientă.

Tehnicile euristice de IA sau strategiile evoluţioniste (AG) sunt mult mai indicate.

Software

- b ➔ Numărul maxim de valori ce pot fi generate.
- a ➔ Amplificarea.
- $u[0]$ ➔ Iniţializarea algoritmului.

• De regulă, numărul maxim de valori este cel mai mare număr reprezentabil folosind cuvîntul maşină, amplificarea este negativă, iar iniţializarea este returnată de ceasul calculatorului pe care este implementat algoritmul.

Generarea de SPA(B) cu distribuţie de probabilitate dorită

- Tehnicile anterioare de generare a SPA(B) sunt destul de simple, dar rudimentare.
- Inconvenientul major: nu se poate atribui secvenţei pseudo-aleatoare o densitate de probabilitate dorită (aceasta fiind implicit cea uniformă).
- În unele aplicații, densitatea de probabilitate a semnalului de intrare este impusă.

Cum s-ar putea genera SPA(B) cu distribuţie de probabilitate impusă?

Folosind tehnica Eşantionării Universale Stocastice introdusă de J.E. Baker în 1987.

SUS ➔ **S**tochastic **U**niversal **S**ampling

- Se pleacă de la o mulțime finită de valori numerice:

$$\mathcal{A}_N \overset{def}{=} \{a_n\}_{n\in\overline{1,N}}$$ (mulţimea de selecţie: valorile posibile ale SPA(B))

- Acesteia i se atribuie următoarea densitate de probabilitate (de tip frecvență de apariție):

$$\begin{bmatrix} \wp : \mathcal{A}_N \to [0,1] \\ a_n \mapsto \wp(a_n) \overset{def}{=} p_n \,. \end{bmatrix} \Rightarrow \mathcal{P}_N \overset{def}{=} \{p_n\}_{n\in\overline{1,N}}$$ (mulţimea frecvenţelor de apariţie)

(evenimentul sigur) $$\sum_{n=1}^{N} p_n = 1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{N} Np_n = N \Rightarrow \sum_{n=1}^{N} p_n = M$$ pseudo-histogramă (generalizare)

☝ Nu neapărat întregi, dar nenegative.

Problemă

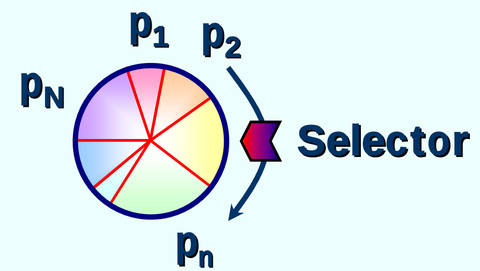
Implementarea mecanismului SUS, care constă în generarea de numere din mulțimea $\mathcal{A}_N$ cu frecvențele de apariție corespunzătoare valorilor din $\mathcal{P}_N$ (fie că aceste valori sunt sau nu returnate de o densitate de probabilitate).

❸ Semnale de stimul

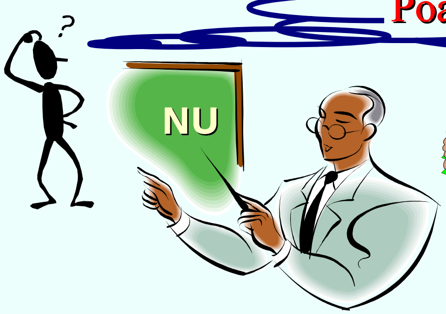
❸.❹ Clase de semnale persistente

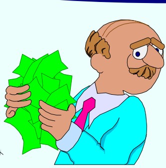
Generarea de SPA(B) cu distribuţie de probabilitate dorită (continuare)

- Mecanismul SUS este simulat cu ajutorul unei rulete virtuale.
- Discul ruletei este segmentat în sectoare avînd suprafețe proporționale cu valorile frecvențelor de apariție / pseudo-histogramei impuse.
- Suprafața totală a discului este fie unitară, fie, mai general, un număr întreg oarecare. $\sum_{n=1}^{N} p_n = M$
- Fiecare sector corespunde unui număr din mulțimea de selecție. $\mathcal{A}_N$
- Un selector (bila ruletei) se mişcă liber, dar amortizat, în jurul discului, indicînd în final numărul ce trebuie extras din mulțimea de selecție pentru a defini valoarea curentă a SPA(B).
- Fiecare din numerele mulțimii de selecție are şansa de a fi selectat (chiar dacă frecvența sa de apariție este mică), numai că această şansă este proporțională cu aria sectorului care îl reprezintă.
- Dacă se efectuează suficient de multe extrageri de numere din folosind ruleta, histograma numerelor selecționate se apropie de graficul densității de probabilitate / pseudo-histogramei impuse.



Poate fi implementat mecanismul SUS în această formă?





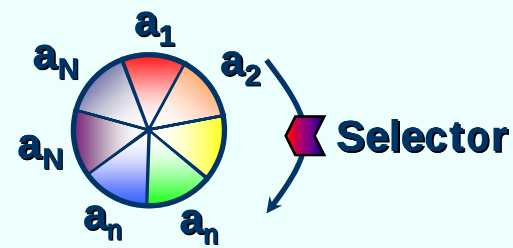
Din cauză că nu se poate opera cu valori fracționare ale ariilor sectoarelor de disc.

☝ Mecanismul trebuie exprimat în formă implementabilă, prin reconsiderarea elementelor ruletei.

❸ Semnale de stimul

❸.❹ Clase de semnale persistente

Generarea de SPA(B) cu distribuţie de probabilitate dorită (continuare)



- De această dată, discul ruletei va trebui să conţină un număr de sectoare echivalente (adică de arii identice) egal cu N (numărul de valorilor de selecţie) sau M (suma valorilor pseudo-histogramei).
- Aria unui sector nu mai are importanţă, deoarece fiecare sector este ocupat de cîte un număr din mulţimea valorilor SPA(B). $\mathcal{U}_N$

☝ Un acelaşi număr poate fi atribuit mai multor sectoare.

$s_n \in \mathbb{N}$ ➔ Numărul de sectoare ocupate de valoarea a_n.

☝ Poate fi şi nul, dacă valorii corespunzătoare a SPA(B) i s-a atribuit o probabilitate prea mică de apariţie.

$$\mathcal{U}_N \subseteq \mathcal{A}_N$$

Unele valori din mulţimea de selecţie pot lipsi.

$$\mathcal{S}_N \overset{def}{=} \{ s_n \}_{n \in \overline{1,N}}$$ ➔ Histograma dorită a SPA(B).

☝ Valorile histogramei dorite fiind întregi, aceasta este în general uşor diferită de pseudo-histograma impusă.

$$\mathcal{S}_N \neq \mathcal{P}_N$$

- Cu toate acestea, suma valorilor histogramei este egală cu suma valorilor pseudo-histogramei impuse.

$$\sum_{n=1}^{N} s_n = N \sum_{n=1}^{N} p_n = N$$ (distribuţie de probabilitate) sau $$\sum_{n=1}^{N} s_n = \sum_{n=1}^{N} p_n = M$$ (pseudo-histogramă)

- Selectorul alege acum unul dintre sectoarele echivalente care indică în mod direct o anumită valoare a SPA(B).

☝ Nu este necesar ca sectoarele ocupate de o anumită valoare să fie adiacente sau grupate în aceeaşi zonă a discului.

- Practic, acum se selectează sectoare cu distribuţie uniformă, dar o valoare a SPA(B) poate ocupa mai multe sectoare.

❸ Semnale de stimul

❸.❹ Clase de semnale persistente

Generarea de SPA(B) cu distribuție de probabilitate dorită (continuare)

Cum se îmbunătăţeşe implementabilitatea mecanismului SUS în noua filozofie?

Obiectivul principal este acum cel de generare a **mulţimii valorilor posibile ale SPA(B).**

$$\mathcal{U}_N = ?$$

- **Prin convenţie**, în această mulțime, **elementele de selecţie se pot repeta**, astfel că mulțimea constituie o reprezentare a discului ruletei sub forma unui şir de numere.

$$\mathcal{U}_N = \{\underbrace{a_1, a_1, \cdots, a_1}_{s_1 \text{ ori}}, \underbrace{a_2, a_2, \cdots, a_2}_{s_2 \text{ ori}}, \cdots, \underbrace{a_N, a_N, \cdots a_N}_{s_N \text{ ori}}\}$$

- Practic, plecînd de la pseudo-histograma impusă, trebuie construită histograma dorită.

$$\mathcal{P}_N \Rightarrow \mathcal{S}_N = ?$$

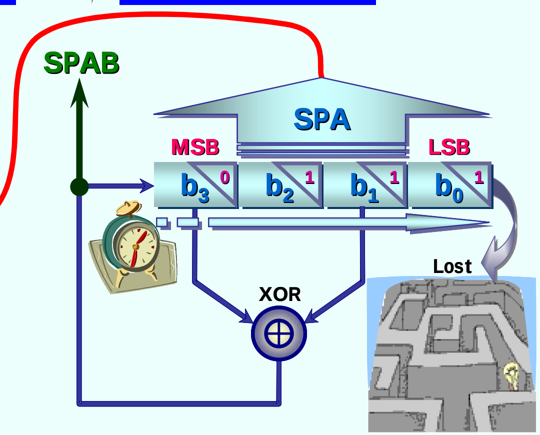
- Odată mulțimea valorilor **SPA(B)** construită, selecția acestora se poate efectua **folosind o distribuţie uniformă**.

Exemplu

O metodă hardware se poate implementa/emula pentru a genera **adresele valorilor** SPA(B) care trebuie returnate.

$$\mathcal{U}_N = \{\overset{1}{a_1}, \overset{2}{a_1}, \cdots, a_1, a_2, a_2, \cdots, a_2, \overset{n}{\cdots}, a_N, a_N, \cdots \overset{M}{a_N}\}$$

$$u[n] = a_{k_n}$$



❸ Semnale de stimul

❸.❹ Clase de semnale persistente

Algoritmul (clasic al) lui Baker

Date de intrare

- $\mathcal{A}_N = \{a_n\}_{n\in\overline{1,N}}$ (mulţimea de selecţie)
- $\mathcal{P}_N = \{p_n\}_{n\in\overline{1,N}}$ (distribuţia de probabilitate impusă) $\sum_{n=1}^{N} p_n = 1$ & $M = N$

Iniţializare

- $\mu \in [0,1)$ ➔ indicator de altitudine ales arbitrar (cu distribuţie uniformă)
- $\nu = 0$ ➔ înălţimea (curentă a) ştachetei
- $\mathcal{U}_N = \varnothing$ ➔ mulţimea valorilor SPA(B) (iniţial, vidă)
- $\mathcal{S}_N = \{s_n = 0\}_{n\in\overline{1,N}}$ ➔ numerele valorilor SPA(B) pe discul ruletei (iniţial, nule)

Buclă iterativă

Pentru $n \in \overline{1,N}$

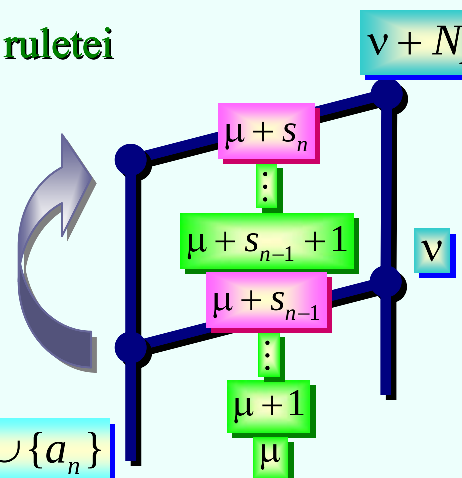
① Se ridică ştacheta $\nu \leftarrow \nu + Np_n$

② Cît timp indicatorul de altitudine este sub ştachetă: $\mu < \nu$

a. Se adaugă valoarea curentă la mulţimea finală. $\mathcal{U}_N \leftarrow \mathcal{U}_N \cup \{a_n\}$

b. Se incrementează numărul corespunzător de sectoare ocupate pe ruletă. $s_n \leftarrow s_n + 1$

c. Se ridică altitudinea cu paşi unitari. $\mu \leftarrow \mu + 1$



Date de ieşire

$$\mathcal{U}_N = \{\underbrace{a_1, a_1, \cdots, a_1}_{s_1 \text{ ori}}, \underbrace{a_2, a_2, \cdots, a_2}_{s_2 \text{ ori}}, \cdots, \underbrace{a_N, a_N, \cdots a_N}_{s_N \text{ ori}}\}$$

❸ Semnale de stimul

❸.❹ Clase de semnale persistente

Algoritmul generalizat al lui Baker

Date de intrare

- $\mathcal{A}_N = \{a_n\}_{n\in\overline{1,N}}$ (mulţimea de selecţie)
- $\mathcal{P}_N = \{p_n\}_{n\in\overline{1,N}}$ (pseudo-histograma impusă)
- $M \in \mathbb{N}^*$ (numărul de sectoare echivalente ale ruletei virtuale)

Normalizare

$$p_n \leftarrow M \frac{p_n}{\sum_{i=1}^{N} p_i} \quad \forall\, n \in \overline{1,N} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{N} p_n = M$$

Iniţializare

- $\mu \in [0,1)$ ➔ indicator de altitudine ales arbitrar (cu distribuţie uniformă)
- $\nu = 0$ ➔ înălţimea (curentă a) ştachetei
- $\mathcal{U}_N = \varnothing$ ➔ mulţimea valorilor SPA(B) (iniţial, vidă)
- $\mathcal{S}_N = \{s_n = 0\}_{n\in\overline{1,N}}$ ➔ numerele valorilor SPA(B) pe discul ruletei (iniţial, nule)

Buclă iterativă

Pentru $n \in \overline{1,N}$

① Se ridică ştacheta $\nu \leftarrow \nu + p_n$

② Cît timp indicatorul de altitudine este sub ştachetă: $\mu < \nu$

a. Se adaugă valoarea curentă la mulţimea finală. $\mathcal{U}_N \leftarrow \mathcal{U}_N \cup \{a_n\}$

❸ Semnale de stimul

❸.❹ Clase de semnale persistente

Algoritmul generalizat al lui Baker (continuare)

Buclă iterativă

Pentru $n \in \overline{1,N}$

① Se ridică ştacheta $\nu \leftarrow \nu + p_n$

② Cît timp indicatorul de altitudine este sub ştachetă: $\mu < \nu$

a. Se adaugă valoarea curentă la mulţimea finală. $\mathcal{U}_N \leftarrow \mathcal{U}_N \cup \{a_n\}$

b. Se incrementează numărul corespunzător de sectoare ocupate pe ruletă. $s_n \leftarrow s_n + 1$

c. Se ridică altitudinea cu paşi unitari. $\mu \leftarrow \mu + 1$

Date de ieşire

$$\mathcal{U}_N = \{\underbrace{a_1, a_1, \cdots, a_1}_{s_1 \text{ ori}}, \underbrace{a_2, a_2, \cdots, a_2}_{s_2 \text{ ori}}, \cdots, \underbrace{a_N, a_N, \cdots a_N}_{s_N \text{ ori}}\}$$

- Se poate arăta că histograma rezultată în urma acestor algoritmi este un aproximant al pseudo-histogramei impuse.

Algoritmul clasic $\lfloor p_n N \rfloor \le s_n \le \lceil p_n N \rceil$, $\forall n \in \overline{1,N}$ & $\sum_{n=1}^{N} s_n = N$

Algoritmul generalizat $\lfloor p_n \rfloor \le s_n \le \lceil p_n \rceil$, $\forall n \in \overline{1,N}$ (după normalizare) & $\sum_{n=1}^{N} s_n = M$

☝ Rolul parametrului M este de a mări rezoluţia ruletei, pentru ca toate valorile de selecţie să se regăsească în mulţimea valorilor SPA(B).