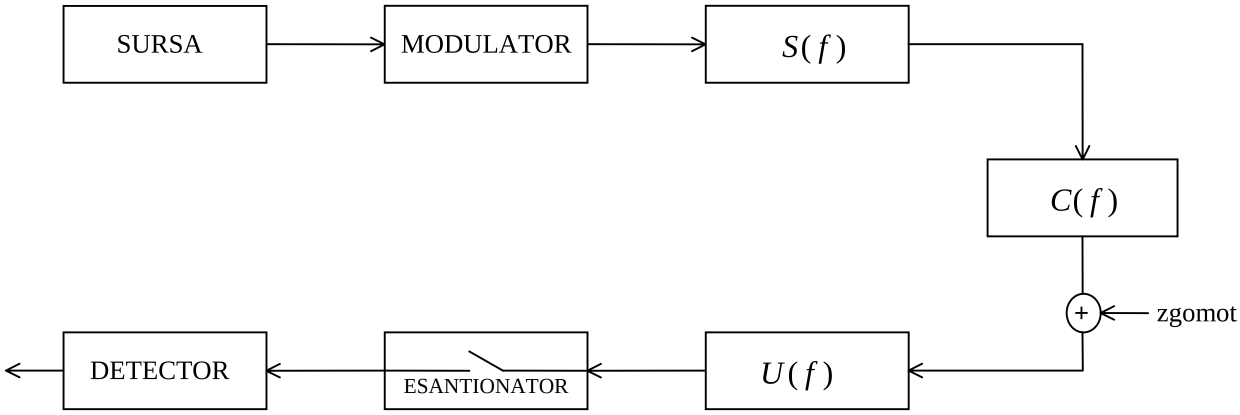
LUCRARE DE LABORATOR #5

- TRANSMITEREA SEMNALELOR PRIN CANALE DE BANDA LIMITATA
- TEOREMELE NYQUIST
- FILTRE DIGITALE LINEARE
- EGALIZAREA ADAPTIVA

1. TRANSMITEREA SEMNALELOR PRIN CANALE DE BANDA LIMITATA

Se considera transmiterea unor semnale printr-un canal linear dispersiv in timp, adica un canal perturbat atat de interferenta intersimbol (ISI) cat si de zgomotul aditiv.

Modelul sistemului de transmitere este prezentat in figura de mai jos.



Secventa de date (a_l) este aplicata modulatorului. Este convenabil din punct de vedere matematic sa se considere ca modulatorul este un bloc care genereaza la iesire o secventa de impulsuri Dirac $\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l \delta(t-lT)$
(T fiind intervalul de timp asignat unui simbol). Considerand ca filtrul de emisie are o functie pondere $s(t)$ (raspunsul la impuls $\delta(t)$), semnalul aplicat la intrarea in canal este $\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l s(t-lT)$. Canalul de comunictie este reprezentat printr-un sistem linear invariant in timp cu o functie pondere $c(t)$ si un zgomot aditiv $w(t)$. Semnalul de la iesirea canalului este

$$r(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l p(t-lT) + w(t)$$

in care

$$p(t) = s(t) * c(t)$$

este raspunsul canalului la semnalul aplicat direct canalului, sau echivalent la un impuls Dirac aplicat la intrarea filtrului de emisie. La iesirea din canal, semnalul este filtrat de un filtru de receptie si esantionat. Secventa esantionata (x_l) este aplicata unui detector. Acesta ia decizia de decodare **,esantion cu esantion.**

Notand prin $q(t)$ convolutia $q(t) = p(t)*u(t) = s(t)*c(t)*u(t)$ si prin $n(t)$ convolutia $n(t) = w(t)*u(t)$ in care $u(t)$ este functia pondere a filtrului de receptie;la intrarea esantionatorului se obtine

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot q(t - kT) + n(t)$$

Considerand esantionarea la momentele $t_l = t_0 + lT$ si dependenta de timp este indicata prin indexul l , semnalul de la iesirea esantionatorului este

$$x_l = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot q_{l-k} + n_l$$

Esantionarea este efectuata la momentele de timp $t_l \neq lT$ deoarece trebuie luat in considerare timpul finit de propagare prin canal ($t_0 > 0$!). Pentru comoditate in continuare se va considera $t_0 = 0$. Iesirea esantionatorului este

$$x_l = a_l \cdot q_0 + \sum_{k \neq l} a_k \cdot q_{l-k} + n_l$$

Prin alegerea adecvata a filtrelor de emisie/receptie se poate considera $q_0 = 1$ si primul termen reprezinta tocmai simolul aplicat la intrarea in canal. Al doilea termen reprezinta contributia interferentei intersimbol (simbolurile care au precedat si au succedat simbolului purtator de informatie curent). Al treilea termen reprezinta efectul zgomotului aditiv.

2. TEOREMELE NYQUIST

Teoremele Nyquist formalizeaza conditiile generale ale unei transmiteri lipsite de interferenta intersimbol, la intrarea ansamblului filtru de emisie, canal, filtru de iesire fiind aplicate impulsuri Dirac.

Teorema largimii de banda minime

Daca se aplica impulsuri Dirac sincrone cu frecventa f_s [simboluri/secunda] unui canal ideal trece-jos cu faza lineara avand frecventa de taiere $f_N = \frac{f_s}{2} = \frac{1}{2T}$ (canal Nyquist), raspunsurile la aceste impulsuri pot fi observate in mod independent (discernute) fiind lipsite de interferenta intersimbol.

Teorema largimii de banda minime (numita si criteriul Nyquist) mai poate fi reformulat si astfel :

Pe un canal de banda limitata se pot trnsmite cel mult doua impulsuri (simboluri) pe secunda pe fiecare hertz de largime de banda.

Daca se considera de exemplu o linie telefonica cu banda utlizabila de 2400 Hz, aceasta permite o rata a semnalului (signaling rate) de cel mult 4800 Bd (bauds). Deci pentru a transmite un debit de informatie de 9600 bps (rata de biti !) este necesar ca fiecare impuls sa aiba 2 biti (2bit/Bd) , deci o transmitere M-ara.

Teorema largimii de banda mininime, precizeaza in domeniul frecventa, conditia prin care se elimina interferenta intersimbol din domeniul timpului, impunand conditia

$$q_l = \begin{cases} 0, & l \neq 0 \\ 1, & l = 0 \end{cases}$$

Observatie

Conditia formulata mai sus beneficiaza in continuare de simplificarea $t_0 = 0$ (decalarea momentului de esantionare la receptie).

Functia pondere a canalului (inclusiv filtrul de emisie si cel de receptie) este precizata doar la momentele de esantionare $t_l = lT$. Criteriul Nyquist afirma ca functia pondere

$$q(t) = \frac{\sin(\pi t / T)}{\pi t / T}$$

satisface conditiile impuse la momentele de timp $t_l = lT$, iar in domeniul frecventa

$$Q(f) = \begin{cases} T, & |\mathrm{f}| \le \dfrac{1}{2T} \\ 0, & |\mathrm{f}| > \dfrac{1}{2T} \end{cases}$$

sau mai general, tinand cont si de intarzierea de propagare prin canal

$$q(t) = \frac{\sin(\pi t / T - D)}{\pi(t / T - D)}$$

si

$$Q(f) = \begin{cases} Te^{-j2\pi fDT}, & |\mathrm{f}| \le \dfrac{1}{2T} \\ 0, & |\mathrm{f}| > \dfrac{1}{2T} \end{cases}$$

Se constata din aceasta ultima expresie ca faza este lineara.

O caracteristica de frecventa *Q(f)* de acest tip “brickwall” nu este fizic realizabila (sistem necauzal) iar in domeniul timpului *q(t)* tinde catre zero cu o viteza de convergenta ca si aceea a lui *1/t* si deci orice “jitter” la esantionare conduce la interferenta intersimbol.

Teorema de simetrie

Sumarea unei functii de transfer reale, impara in raport cu frecventa de taiere $f_N = \dfrac{1}{2T}$ la functia de transfer a filtrului Nyquist (ideal trece-jos) pastreaza trecerile prin zero ale raspunsului la impuls. Aceste treceri prin zero ofera in continuare conditiile unei transmiteri fara interferenta intersimbol, iar viteza de convergenta catre zero a raspunsului (in domeniul timpului) este cu atat mai mare cu cat caracteristica de frecventa este mai neteda (fara discontinuitati ea si derivatele ei).

Se realizeaza astfel un compromis intre cresterea largimii de banda si interferenta intersimbol mai redusa in conditiile in care se tolereaza “jitter”-ul.

Caracteristica denumita “raised cosine” este foarte frecvent utilizata pentru canalele de banda limitata (linile telefonice). Expresia ei in domeniul frecventa este

$$Q(f) = \begin{cases} T & ,0 \le |f| \le \dfrac{(1-\beta)}{2T} \\ \dfrac{T}{2}\left[1 - \sin\left(\pi T\left(f - \dfrac{1}{2T}\right)\beta\right)\right] & ,\dfrac{(1-\beta)}{2T} \le |f| \le \dfrac{(1+\beta)}{2T} \end{cases}$$

unde β este numit “rolloff parameter” $(\beta \in [0,1])$. Sa remarcam ca pentru $\beta = 0$ se obtine canalul rectangular , iar pentru $\beta = 1$ un canal cu largimea de banda $f = 2f_N$.

In domeniul timpului, expresia functiei pondere este

$$q(t) = \frac{\sin(\pi t / T)}{\pi t / T} \cdot \frac{\cos(\beta\pi t / T)}{1 - 4\beta^2 t^2 / T^2}$$

si care converge catre 0 cu aceasi viteza ca si $1/t^3$.

Parametrul β contoleaza panta de cadere a caracteristicii de frecventa (un β mic conduce la o caracteristica abrupta) si viteza de convergenta catre zero a raspunsului in domeniul timpului (un β mic conduce la o viteza de convergenta mica). Se remarca compromisul intre largimea de banda care variaza intre $f_N = \dfrac{1}{2T}$ si $2f_N = \dfrac{1}{T}$, si viteza de convergenta care asigura tolerarea “jitter”-ului.

3.FILTRE DIGITALE LINEARE

Semnale digitale

Sunt functii definite pe **Z** (multimea numerelor intregi).

Functia impuls Dirac

$$\delta[n] = \begin{cases} 0 & ,n \neq 0 \\ 1 & ,n = 0 \end{cases}$$

Functia treapta unitate

$$u[n] = \begin{cases} 0 & ,n < 0 \\ 1 & ,n \geq 0 \end{cases}$$

Relatiile dintre aceste functii sunt

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$$

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

Functia rampa unitate

$$r[n] = n \cdot u[n]$$

Functia exponentiala

$$x[n] = A \cdot e^{\beta n}$$

Pentru $\beta < 0$ se obtine o exponentiala descrescatoare in timp.

Pentru $\beta \geq 0$ se obtine o exponentiala crescatoare in timp.

Functia sinusoidala

$$x[n] = A \cdot \sin(\Omega n)$$

In mod uzual, daca se considera ca N este perioada acestei functii trebuie ca $\frac{\Omega}{2\pi} = \frac{1}{N}$ adica un numar rational.

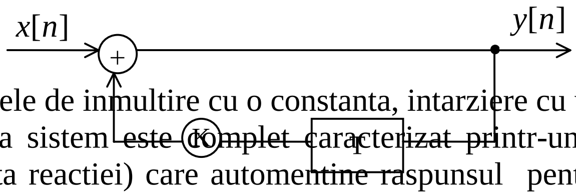
Sisteme digitale IIR

Sunt sisteme pentru care raspunsul la un impuls unitate este de durata infinita (Infinite Impuls Response).

Un sistem de ordin I este descris prin ecuatia cu diferente finite

$$y[n] = K \cdot y[n-1] + x[n]$$

Schema bloc de implementare este prezentata in figura de mai jos



in care se identifica elementele de inmultire cu o constanta, intarziere cu un tact si adunare digitala.

Se observa ca un asemenea sistem este complet caracterizat printr-un singur parametru K. Se releva caracterul recursiv (existenta reactiei) care automentine raspunsul pentru o intrare de tip impuls Dirac unitate.

Raspunsul unui sistem de ordin I la impuls Dirac unitate este

$$y[n] = \begin{cases} 0 & ,n < 0 \\ K^{n+1} y(-1) + K^{n} & ,n \geq 0 \end{cases}$$

Se observa ca pentru conditia initial nula raspunsul obtinut este $y[n] = K^{n} \quad n \geq 0$.

Raspunsul sistemului la treapta unitate este

$$y[n]=\begin{cases}0 & ,n<0\\ K^{n+1}y[-1]+\dfrac{K^{n+1}-1}{K-1} & ,n\ge 0\end{cases}$$

Daca conditia initiala este nula

$$y[n]=\frac{K^{n+1}-1}{K-1}$$

si $y[n]\to\dfrac{1}{1-K}$ pentru $n\to\infty$ daca $|K|<1$.

Pentru un semnal de intrare sinusoidal, raspunsul sistemului este, in regim stationar, tot sinusoidal de aceeasi frecventa, dar intarziat si cu alta amplitudine.

4.EGALIZAREA ADAPTIVA

Structura cea mai frecventa de implementare a unui egalizor adaptiv este aceea de filtru FIR transversal. (Sistemele digitale FIR sunt acelea pentru care raspunsul este de durata finita pentru un impus Dirac - Finite Impulse Response).

Se efectueaza o acordare dinamica a coeficientilor filtrului, in conformitate cu un criteriu de optim, urmarindu-se combatrerea intreferentei intersimbol si minimzarea zgomotului.

Iesirea filtrului este

$$p_{eq}(t)=\sum_{n=-N}^{N}c_n\cdot p_r[t-(n+N)T]$$

in care $p_r(t)$ este raspunsul receptionat la iesirea din canal.

Daca se considera ca pentru t=0 se receptioneaza varful impulsului, iesirea trebuie esantionatala momentele $t_k=(k+NT)$ rezultand

$$p_{eq}(t_k)=\sum_{n=-N}^{N}c_n\cdot p_r[(k-N)T]$$

Introducand notatiile

$$p_r(nT)=p_r(n)$$

$$p_{eq}(t_k)=p_{eq}(k)$$

se obtine expresia raspunsului egalizat ca

$$p_{eq}(k)=\sum_{n=-N}^{N}c_n\cdot p_r(k-n)$$

Una din conditiile de optim de receptie este aceea de minimizare a interferentei intersimbol

$$p_{eq}(k)=\begin{cases}1 & ,\text{pentru } k=0\\ 0 & ,\text{pentru } k=\pm1,\pm2,\ldots,N\end{cases}$$

care conduce la setul de ecuatii

$$\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_r(0) & p_r(-1) & \ldots & p_r(-2N)\\ p_r(1) & p_r(0) & & p_r(-2N+1)\\ \vdots & & & \vdots\\ \vdots & & & \vdots\\ \vdots & & & \vdots\\ p_r(2N-1) & & & \vdots\\ p_r(2N) & \cdots & \cdots & p_r(0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_{-N}\\ c_{-N+1}\\ \vdots\\ c_0\\ \vdots\\ c_{N-1}\\ c_N\end{bmatrix}$$

Ecuatiile de acest tip sunt rezolvate printr-un algoritm iterativ pornind de la o solutie arbitrara. Spre exemplu se pleaca cu toti coeficientii 0 cu exceptia celui din mijloc care se considera a fi 1.

Un exemplu de o astfel de metoda iterativa este **metoda perturbatiilor** .

Se considera sistemul scris sub forma

$$I = X \cdot C$$

unde I este o matrice coloana cu 2N+1 componente nule cu exceptia celei de pe pozitia N+1

X este o matrice patrata de ordinul 2N+1 ale carei elemente $x_{ij} = p_r(i - j)$

C este o matrice coloana ale carei elemente sunt coeficientii filtrului transversal

Se noteaza cu C^k solutia la pasul de iteratia k. Aceasta solutie aproximativa genereaza o eroare $\varepsilon^k = X \cdot C^k - I$. Se elaboreaza o noua solutie de forma

$$C^{k+1} = C^k - \Delta \cdot \mathrm{sgn}(\varepsilon^k)$$

in care Δ este incrementul. Conditia de oprire a algoritmului este ca ε sa fie sub o anumita valoare.