❹ Metode de identificare şi validare

❹.❽ Identificarea şi predicţia proceselor autoregresive

Aplicaţii: predicţia optimală (continuare)

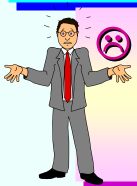
Problema predicţiei sub-optimale

$$\underbrace{\min E\left\{\left(y[N+p]-y_0[N+p\,|\,\mathcal{D}_N]\right)^2\right\}}+\underbrace{\min E\left\{\left(y_0[N+p\,|\,\mathcal{D}_N]-\hat{y}_p[N+p\,|\,\mathcal{D}_N]\right)^2\right\}}\quad \forall\, p\in\overline{1,P}$$

Modelul de identificare cel mai bun pentru predicţie **trebuie să minimizeze eroarea de predicţie pe orizontul de predicţie**.

Predictorul sub-optimal este **cel mai "apropiat"** de **predictorul de identificare**.

$$E\left\{\left(y_0[N+p\,|\,\mathcal{D}_N]-\hat{y}_p[N+p\,|\,\mathcal{D}_N]\right)^2\right\}\leq$$
$$\leq E\left\{\left(y_0[N+p\,|\,\mathcal{D}_N]-y_p[N+p\,|\,\mathcal{D}_N]\right)^2\right\}\quad \forall\, p\in\overline{1,P}$$



☹ Din nou apar în discuţie valorile necunoscute ale ieşirii procesului pe orizontul de predicţie.

MMEP operează cu erorile de predicţie **pe orizontul de măsură**.

Dacă $P \ll N$ (condiţia fiind naturală)

IE poate fi utilizată pentru relaxarea noii probleme.

$$E\left\{\left(y[N+p]-y_0[N+p\,|\,\mathcal{D}_N]\right)^2\right\}\cong$$
$$\cong\frac{1}{N+p}\sum_{n=1}^{N+p}\left(y[n+p]-y_0[n+p\,|\,\mathcal{D}_N]\right)^2\cong$$
$$\cong\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(y[n]-\boxed{y_0[n\,|\,\mathcal{D}_N]}\right)^2\quad \forall\, p\in\overline{1,P}$$

$$y_{\mathcal{M}}[n,\boldsymbol{\theta}]$$

Modelul de identificare (sub-)optimal pentru predicţie este cel rezultat în urma aplicării **MMEP**.

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_N=\underset{\boldsymbol{\theta}\in\mathcal{S}\subseteq\mathbb{R}^{n\theta}}{\operatorname{argmin}}\left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(y[n]-y_{\mathcal{M}}[n,\boldsymbol{\theta}]\right)^2\right]$$

❹ Metode de identificare şi validare

❹.❽ Identificarea şi predicţia proceselor autoregresive

Aplicaţii: predicţia optimală (continuare)

- Strategia generală de construcţie a predictorilor sub-optimali:

① **Determinarea setului de predictori (sub-)optimali care verifică inegalităţile:**

$$E\left\{\left(y_0[N+p\,|\,\mathcal{D}_N]-\hat{y}_p[N+p\,|\,\mathcal{D}_N]\right)^2\right\}\leq E\left\{\left(y_0[N+p\,|\,\mathcal{D}_N]-y_p[N+p\,|\,\mathcal{D}_N]\right)^2\right\}$$

$$\forall\, p\in\overline{1,P}$$

☝ Etapă cu caracter teoretic.

Obiectivul acestei etape este de a deduce o **expresie formală** între predictorul curent sub-optimal şi cel de identificare.

② **Determinarea modelului de identificare (sub-)optimal prin minimizarea erorii de predicţie pe durata orizontului de măsură:**

$$\sum_{n=1}^{N}\left(y[n]-\hat{y}_0[n\,|\,\mathcal{D}_N]\right)^2\leq\sum_{n=1}^{N}\left(y[n]-y_0[n\,|\,\mathcal{D}_N]\right)^2$$

☝ Datorită etapei precedente, predictorii (sub-)optimali vor fi automat determinaţi.

$$\hat{\varepsilon}_0[p]\overset{def}{=}y[N+p]-\hat{y}_0[N+p\,|\,\mathcal{D}_N]$$

(eroarea de predicţie (sub-)optimală)

$$\forall\, p\in\overline{0,P}$$

Folosind acest scenariu, cele două dispersii ale problemei predicţiei sub-optimale conduc la o valoare minimă însumată egală cu:

$$E\left\{\hat{\varepsilon}_0^2[p]\right\}\quad \forall\, p\in\overline{0,P}$$

$$E\left\{\left(y_0[N+p\,|\,\mathcal{D}_N]-\hat{y}_p[N+p\,|\,\mathcal{D}_N]\right)^2\right\}=0\quad \forall\, p\in\overline{1,P}$$

☜ Restricţie necesară

❹ Metode de identificare şi validare

❹.❽ Identificarea şi predicția proceselor autoregresive

Aplicaţii: predicţia optimală (continuare)

Cazul modelelor de tip AR?

În acest caz, predictorii sub-optimali sunt determinați din clasa predictorilor ale căror ieşiri sunt necorelate cu zgomotul alb pe orizontul de predicţie.

$$E\left\{y_p[N+p\,|\,\mathcal{D}_N]e[N+k]\right\}=0 \quad \forall\, k,p\in\overline{1,P}$$

- Restricție naturală sugerată de faptul că datele achiziționate sunt necorelate cu valorile viitoare ale zgomotului, adică dincolo de orizontul de măsură.

① Determinarea teoretică a setului de predictori (sub-)optimali.

Modelul AR poate fi exprimat cu ajutorul a două filtre: unul de tip FIR, care operează cu valori ale zgomotului din orizontul de predicție şi altul de tip IIR, care operează cu valori ale zgomotului din orizontul de măsură sau anterioare acestuia.

$$y[N+p]=\frac{1}{A^*(q^{-1})}e[N+p]\;\underset{\text{împățire infinită}}{=}\;\sum_{n\geq 0}\alpha_n^* e[N+p-n]=\underbrace{\sum_{n=0}^{p-1}\alpha_n^* e[N+p-n]}_{\text{FIR}}+\underbrace{\sum_{n\geq p}\alpha_n^* e[N+p-n]}_{\text{IIR}}\,,\quad\forall\, p\in\overline{1,P}\,.$$

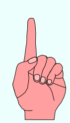
$c_0^*=\alpha_0^*=1$

FIR — orizontul de predicție

IIR — orizontul de măsură

funcția de sistem a filtrului

$$C_p^*(q^{-1})\overset{def}{=}1+\underset{\alpha_1^*}{c_1^*}q^{-1}+\cdots+\underset{\alpha_{p-1}^*}{c_{p-1}^*}q^{1-p}$$

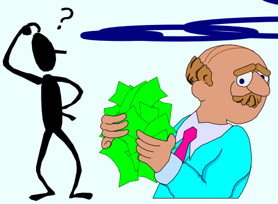


$$C_{p+1}^*(q^{-1})=C_p^*(q^{-1})+c_p^*q^{-p}$$

relație recurentă remarcabilă

Aplicaţii: predicţia optimală (continuare)

Cum se pot determina coeficienţii filtrului de tip FIR?



Folosind Teorema Împărţirii cu Rest (TIR).

$$\cancel{1}$$

$$\cancel{-1}-a_1^*q^{-1}-a_2^*q^{-2}-\cdots$$

$$\cancel{-a_1^*q^{-1}}-a_2^*q^{-2}-\cdots$$

$$\cancel{a_1^*q^{-1}}+\left(a_1^*\right)^2q^{-2}+\cdots$$

$$\vdots$$

$$\left[\left(a_1^*\right)^2-a_2^*\right]q^{-2}+\cdots$$

$$1+a_1^*q^{-1}+a_2^*q^{-2}+\cdots+a_{na}^*q^{-na}$$

$$1-a_1^*q^{-1}+\cdots+c_{p-1}^*q^{1-p}\Rightarrow C_p^*(q^{-1})$$ (cît)

c_0^* c_1^* c_2^*

☝ Procedură implementabilă (Algoritmul lui Euclid).

Exerciţiu

$$q^{-p}D_p^*(q^{-1})\overset{def}{=}q^{-p}\left(d_{p,0}^*+d_{p,1}^*q^{-1}+\cdots+d_{p,na-1}^*q^{1-na}\right)$$ (rest)

☝ Grad constant: ***na*-1**.

☝ Coeficienţi variabili.

Aşadar

$$\frac{1}{A^*(q^{-1})}=C_p^*(q^{-1})+\frac{q^{-p}D_p^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})}\quad\forall\, p\in\overline{1,P}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$1=C_p^*(q^{-1})A^*(q^{-1})+q^{-p}D_p^*(q^{-1})\quad\forall\, p\in\overline{1,P}$$

$$y[N+p]=C_p^*(q^{-1})e[N+p]+\frac{D_p^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})}e[N]=\overbrace{\boxed{C_p^*(q^{-1})e[N+p]}}^{\text{viitor}}+\overbrace{\boxed{D_p^*(q^{-1})y[N]}}^{\text{prezent+trecut}}\quad\forall\, p\in\overline{1,P}$$

☺ Expresie formată din ieşirile a două filtre de tip FIR.

Aplicaţii: predicţia optimală (continuare)

$$E\left\{y_p[N+p\,|\,\mathcal{D}_N]e[N+k]\right\}=0 \quad \forall\, k,p\in\overline{1,P}$$

ipoteza de necorelare

$$E\left\{\left(C_k^*(q^{-1})e[N+k]\right)y_p[N+p\,|\,\mathcal{D}_N]\right\}=0 \quad \forall\, k,p\in\overline{1,P}$$

Filtrul "viitorului" operează numai asupra valorilor zgomotului alb de pe orizontul de predicţie, deci este natural ca ieşirea acestuia să nu fie corelată cu ale predictorilor.

De asemenea

Ieşirea filtrului "viitorului" (care operează numai cu valori ale zgomotului alb de pe orizontul de predicţie) nu este corelată cu ieşirea filtrului "prezentului şi trecutului" (care operează numai cu date măsurate).

$$E\left\{\left(C_p^*(q^{-1})e[N+p]\right)\left(D_p^*(q^{-1})y[N]\right)\right\}=0 \quad \forall\, p\in\overline{1,P}$$

Rezultă

exprimare cu 2 filtre de tip FIR

$$E\left\{\left(y_0[N+p\,|\,\mathcal{D}_N]-y_p[N+p\,|\,\mathcal{D}_N]\right)^2\right\}=E\left\{\left(C_p^*(q^{-1})e[N+p]+D_p^*(q^{-1})y[N]-y_p[N+p\,|\,\mathcal{D}_N]\right)^2\right\}=$$

$$=E\left\{\left(C_p^*(q^{-1})e[N+p]\right)^2\right\}+\cancel{2E\left\{\left(C_p^*(q^{-1})e[N+p]\right)\left(D_p^*(q^{-1})y[N]-y_p[N+p\,|\,\mathcal{D}_N]\right)\right\}}+$$

$$+E\left\{\left(D_p^*(q^{-1})y[N]-y_p[N+p\,|\,\mathcal{D}_N]\right)^2\right\}=$$

$$=E\left\{\left(C_p^*(q^{-1})e[N+p]\right)^2\right\}+E\left\{\left(D_p^*(q^{-1})y[N]-y_p[N+p\,|\,\mathcal{D}_N]\right)^2\right\}\ ,\quad \forall\, p\in\overline{1,P}\,.$$

Aplicaţii: predicţia optimală (continuare)

Aşadar

☝ Sumă de două dispersii.

$$E\left\{\left(y_0[N+p\,|\,\mathcal{D}_N]-y_p[N+p\,|\,\mathcal{D}_N]\right)^2\right\}=E\left\{\left(C_p^*(q^{-1})e[N+p]\right)^2\right\}+E\left\{\left(D_p^*(q^{-1})y[N]-y_p[N+p\,|\,\mathcal{D}_N]\right)^2\right\}$$

$\forall\, p\in\overline{1,P}$

Deoarece numai a doua dispersie depinde de ieşirile predictorilor, doar ea poate fi anulată în vederea minimizării.

$$E\left\{\left(D_p^*(q^{-1})y[N]-y_p[N+p\,|\,\mathcal{D}_N]\right)^2\right\}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{y}_p[N+p\,|\,\mathcal{D}_N]=D_p^*(q^{-1})y[N]$$

$\forall\, p\in\overline{1,P}$ $\qquad$ $\forall\, p\in\overline{1,P}$

☝ Expresiile predictorilor AR (sub-)optimali.

Pentru fiecare deplasament de predicţie, trebuie (re-)evaluat restul împărţirii polinomului unitar la polinomul modelului AR.

Gradul funcţiei de sistem fiind constant **(*na*-1)**, doar coeficienţii trebuie adaptaţi pentru fiecare deplasament de predicţie, folosind TIR.

Ce rămâne după minimizare?

Un termen care oferă informaţia despre precizia predicţiei.

$$\sigma_p^2 \overset{def}{=} E\left\{\left(C_p^*(q^{-1})e[N+p]\right)^2\right\}=\lambda^2\left[1+\left(c_1^*\right)^2+\cdots+\left(c_{p-1}^*\right)^2\right]$$

$\forall\, p\in\overline{1,P}$

☝ Precizia ideală de predicţie scade pe măsură ce deplasamentul de predicţie se îndepărtează de orizontul de măsură.

② Determinarea modelului de identificare folosind MMEP (adică ALD).

Predictorii practici (sub-)optimali

$A^* \Leftarrow \hat{A}$ $\qquad$ $C_p^* \Leftarrow \hat{C}_p$ $\qquad$ $D_p^* \Leftarrow \hat{D}_p$

$\lambda^2 \Leftarrow \hat{\lambda}^2$ $\qquad$ (estimaţii)

Aplicaţii: predicţia optimală (continuare)

❹ Metode de identificare şi validare

❹.❽ Identificarea şi predicţia proceselor autoregresive

Algoritmul predicţiei AR (sub-)optimale (nerecursiv)

Date de intrare

- $\mathcal{D}_N = \{y[n]\}_{n\in\overline{1,N}}$ (setul de date măsurate la ieşirea procesului auto-regresiv)
- na (ordinul modelului auto-regresiv)
- P (marginea de predicţie)

Iniţializare

Se estimează parametrii modelului **AR** şi dispersia zgmotului alb, eventual folosind **ALD**.

- $\hat{A}(q^{-1}) = 1 + \hat{a}_1 q^{-1} + \cdots + \hat{a}_{na} q^{-na}$
- $\hat{\lambda}^2$

Buclă iterativă

Pentru $p \in \overline{1,P}$

① Se aplică **TIR** (**Algoritmul lui Euclid**): $1 = \hat{C}_p(q^{-1})\hat{A}(q^{-1}) + q^{-p}\hat{D}_p(q^{-1})$

② Se estimează valorile predictate ale ieşirii procesului:

$$\hat{y}_p[N+p\,|\,\mathcal{D}_N] = D_p^*(q^{-1})y[N] = $$
$$= \hat{d}_{p,0}\,y[N] + \hat{d}_{p,1}\,y[N-1] + \cdots + \hat{d}_{p,na-1}\,y[N-na+1]$$

③ Se estimează dispersia erorii de predicţie: $\hat{\sigma}_p^2 = \hat{\lambda}^2\left[1 + \hat{c}_1^2 + \cdots + \hat{c}_{p-1}^2\right]$

Date de ieşire

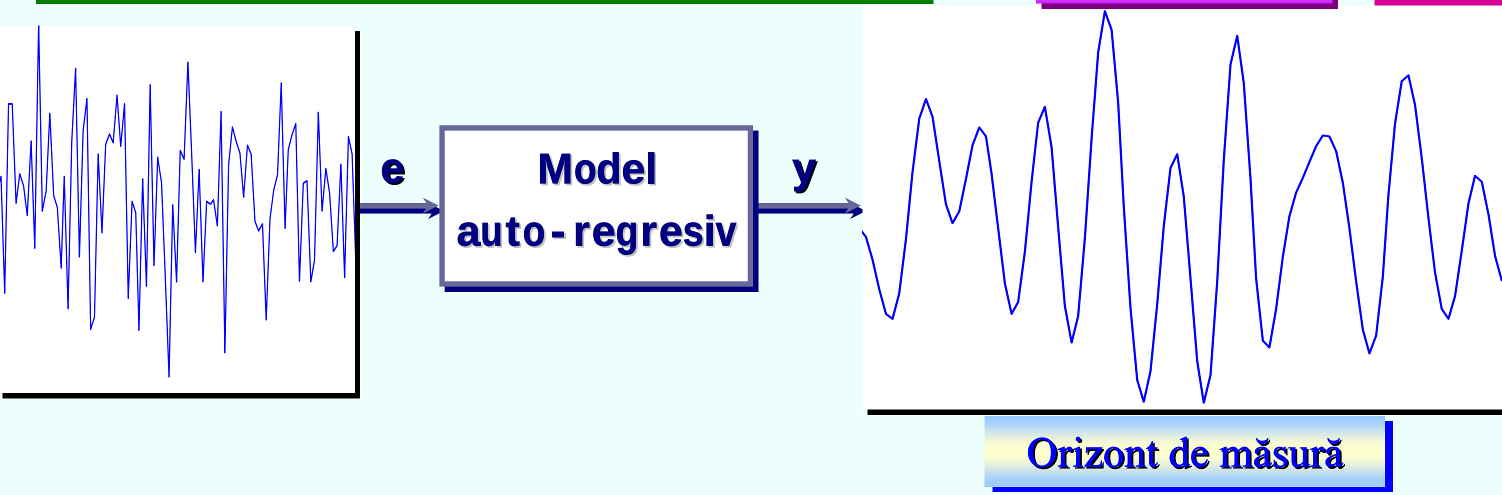
- $\left\{\hat{y}_p[N+p\,|\,\mathcal{D}_N]\right\}_{p\in\overline{1,P}}$ ⇒ Ieşirile predictate.
- $\left\{\hat{\sigma}_p^2\right\}_{p\in\overline{1,P}}$ ⇒ Dispersiile estimate ale erorilor de predicţie.

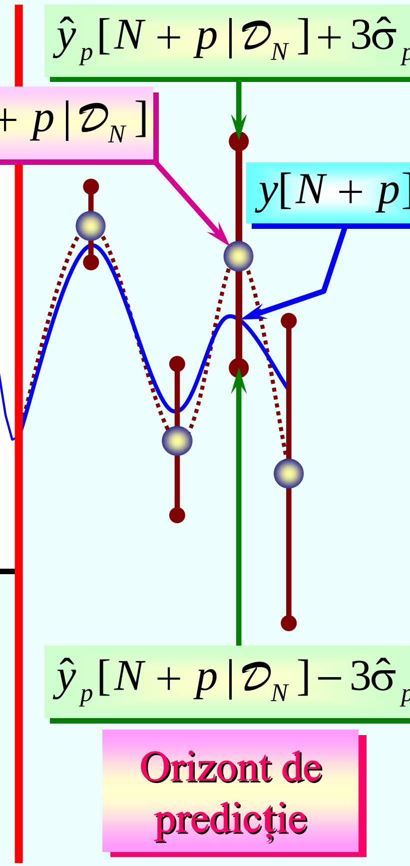
❹ Metode de identificare şi validare

❹.❽ Identificarea şi predicţia proceselor autoregresive

Aplicaţii: predicţia optimală (continuare)

Interpretare geometrică în cazul proceselor normal distribuite





- Valorile (sub-)optimale predictate (care depind de datele măsurate) sunt de asemenea normal distribuite, dar cu dispersiile erorilor de predicţie.
- În jurul fiecărei valori predictate, se poate construi cîte un interval de încredere de tip 3σ, în care valoarea reală a ieşirii procesului are şanse de peste 95% să aparţină.
- În afara valorilor predictate, pe grafic se amplasează şi intervalele de încredere, sub forma unor segmente liniare centrate în valorile predictate.
- Aceste intervale devin din ce în ce mai largi odată cu creşterea deplasamentului de predicţie, indicînd deteriorarea preciziei de predicţie.
- Curba valorilor măsurate (continuă) se îndepărtează din ce în ce mai mult de curba valorilor predictate (punctată).

Aplicații: predicția optimală (continuare)

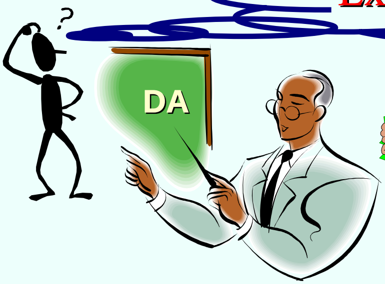
☹ Dezavantajul major al algoritmului de predicție nerecursiv: ineficiența cauzată de estimarea tuturor coeficienților restului pentru fiecare deplasament de predicție.

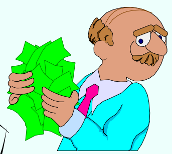
☝ Câtul poate fi calculat recursiv.

$$C^*_{p+1}(q^{-1}) = C^*_p(q^{-1}) + c^*_p q^{-p}$$

$\forall\, p \in \overline{1, P-1}$

Există o relație recursivă şi între resturi succesive?





În realitate, se poate evidenția o relație recursivă între ieşirile succesive ale predictorilor (sub-)optimali.

- Aceasta creează impresia că există un singur predictor AR (sub-)optimal, de accea se omite indicele ***p*** din notație.

Exercițiu

Algoritmul predicției AR (sub-)optimale (recursiv)

Teorema 7 (forma recursivă a predictorilor AR (sub-)optimali)

Valorile predictate ale procesului de tip AR folosind predictorul (sub-)optimal verifică următoarele relații de recurență:

a. pentru $p \in \overline{1, na}$ **:** $\hat{y}[N+p\,|\,\mathcal{D}_N] = -\hat{a}_1\,\hat{y}[N+p-1\,|\,\mathcal{D}_N] - \cdots - \hat{a}_{p-1}\hat{y}[N+1\,|\,\mathcal{D}_N] -$

$$-\,\hat{a}_p y[N] - \cdots - \hat{a}_{na} y[N+p-na]\,;$$

b. pentru $p \in \overline{na+1, P}$ **:** $\hat{y}[N+p\,|\,\mathcal{D}_N] = -\hat{a}_1\,\hat{y}[N+p-1\,|\,\mathcal{D}_N] - \cdots - \hat{a}_{na}\hat{y}[N+p-na\,|\,\mathcal{D}_N]$.

De asemenea, dispersiile erorilor de predicție, verifică relația de recurență:

$$\hat{\sigma}^2_p = \hat{\sigma}^2_{p-1} + \hat{c}^2_{p-1}\hat{\lambda}^2,\ \forall\, p \in \overline{1, P},$$

unde: $\hat{\sigma}^2_0 = 0$.

❹.❽ Identificarea şi predicția proceselor autoregresive

Aplicații

Predicția optimală a proceselor auto-regresive

Estimarea spectrală prin modelare auto-regresivă

Estimarea spectrală

Obiectiv

Aproximarea spectrului de putere al unei serii de date măsurate la ieşirea unui proces.

Estimație spectrală **Serie de timp**

$$\mathcal{D} = \{y[n]\}_{n\in\overline{1,N}}$$

- Calitatea estimației spectrale este determinată de:
  - ➔ Corectitudinea cu care s-a efectuat achiziția datelor (determinată în principal de maniera în care a fost aleasă perioada de eşantionare).
  - ➔ Modelul matematic pe baza căruia se evaluează spectrul de putere.
- Proprietăți dezirabile ale estimației spectrale:

Netezime

➢ Cu cît spectrul are un aspect mai neted (adică mai regulat), cu atît el este mai util şi mai uşor de interpretat.

Precizie (acuratețe)

➢ Condiție necesară pentru corectitudinea interpretării/prelucrărilor spectrale.

Deoarece setul de date măsurate are suport finit (rezoluție finită de reprezentare în timp), precizia spectrului estimat (rezoluția de reprezentare în frecvență) este mărginită.

Principiul de incertitudine Heisenberg-Gabor

☹ Cele două proprietăți sunt opuse!

☝ Produsul rezoluțiilor este mărginit.

❹ Metode de identificare şi validare

❹.❽ Identificarea şi predicţia proceselor autoregresive

Aplicaţii: estimarea spectrală (continuare)

- Problema estimării spectrale este abordată de regulă prin metode de PS.
- În cadrul IS, există două abordări practice, ambele avînd ca obiectiv estimarea densităţii spectrale de putere a seriei de date.

① Prima abordare constă în implementarea definiţiei densităţii spectrale.

$$\phi_y(\omega) \overset{def}{=} \mathscr{F}(r_y)(e^{j\omega}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} r_y[k]e^{-j\omega k} \quad \forall\,\omega\in\mathbb{R}$$

$$\phi_y^N(\omega) \overset{def}{=} r_y^N[0] + 2\sum_{k=1}^{N} r_y^N[k]\cos(\omega k) \quad \forall\,\omega\in\mathbb{R}$$

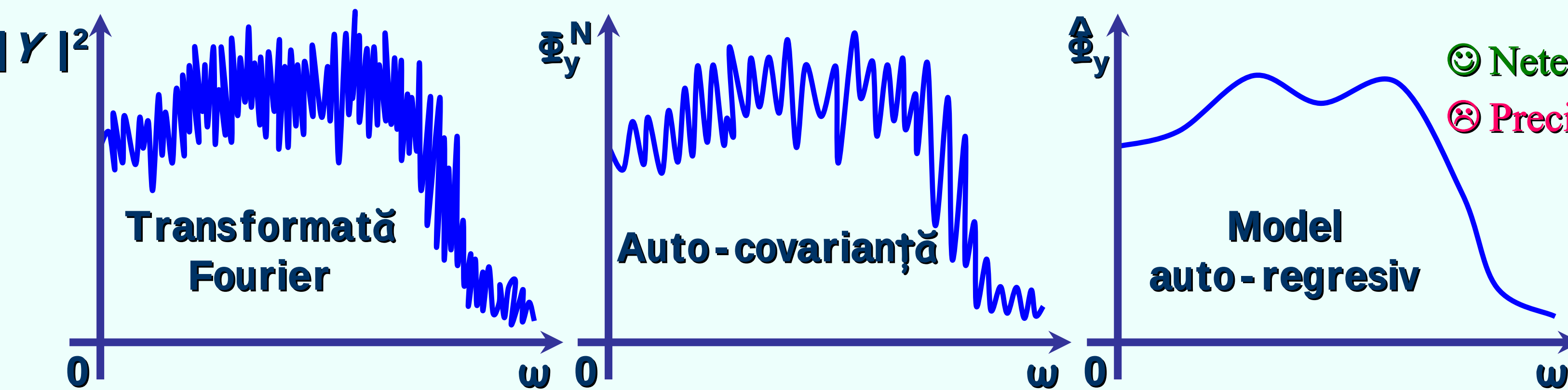
Exerciţiu

☺ Faţă de spectrul evaluat cu ajutorul TF, densitatea spectrală este mai regulată.

☹ Totuşi, iregularităţile rămîn importantele pentru date afectate de zgomote colorate.

② A doua abordare propune identificarea prealabilă a seriei de date cu un model auto-regresiv (AR sau ARMA), urmată de evaluarea densităţii spectrale folosind proprietatea transferului acesteia prin sisteme liniare.

$$\hat{\phi}_y(\omega) = \hat{\lambda}^2\left|\frac{\hat{C}(e^{j\omega})}{\hat{A}(e^{j\omega})}\right|^2 = \hat{\lambda}^2\left|\frac{1+\hat{c}_1\,e^{-j\omega}+\cdots+\hat{c}_{nc}\,e^{-jnc\,\omega}}{1+\hat{a}_1\,e^{-j\omega}+\cdots+\hat{a}_{na}\,e^{-jna\,\omega}}\right|^2 \quad \forall\,\omega\in\mathbb{R}$$



☺ Netezire importantă.

☹ Precizie acceptabilă.