Soluţie (Exerciţiul 4.3)

- Valorile adevărate:

$$\theta^* = \begin{bmatrix} a^* \\ b^* \end{bmatrix} = \left[E\{z[n]\varphi^T[n]\}\right]^{-1}\left(E\{z[n]y[n]\} - E\{z[n]e[n]\}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} -r_{yu}[0] & r_u[0] \\ -r_{yu}[1] & r_u[1] \end{bmatrix}^{-1}\left(\begin{bmatrix} r_{yu}[1] \\ r_{yu}[2] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_{eu}[1] \\ r_{eu}[2] \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} r_u[1] & -r_u[0] \\ r_{yu}[1] & -r_{yu}[0] \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} r_{yu}[1] \\ r_{yu}[2] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_{eu}[1] \\ r_{eu}[2] \end{bmatrix}\right),$$

cu $\Delta = r_u[0]\,r_{yu}[1] - r_u[1]\,r_{yu}[0]$

- Evident: $\lim\limits_{N\to\infty} \hat{\theta} = \theta^* \iff \boxed{r_{eu}[1] = r_{eu}[2] = 0}$

(condiţia generală de consistenţă)

- Caz particular: u şi e zgomote albe necorelate

$$\theta^* = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} 0 & -\sigma_u^2 \\ r_{yu}[1] & -r_{yu}[0] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_{yu}[1] \\ r_{yu}[2] \end{bmatrix}, \quad \text{cu } \Delta = \sigma_u^2\, r_{yu}[1]$$

$$r_{yu}[k] = E\{y[n]u[n-k]\} = E\{(-a\,y[n-1] + b\,u[n-1] + e[n])\,u[n-k]\} =$$

$$= -a\,r_{yu}[k-1] + b\,\sigma_u^2\,\delta_0[k-1], \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Soluție (Exercițiul 4.3)

$$r_{yu}[0] + a\,r_{yu}[-1] = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \cancel{r_{yu}[1]} + a\,r_{yu}[0] = b\sigma_u^2 \\ \cancel{r_{yu}[2]} + a\,\cancel{r_{yu}[1]} = 0 \\ \vdots \\ r_{yu}[k] + a\,\cancel{r_{yu}[k-1]} = 0 \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} \\ \left(-\frac{1}{a}\right)^1 \\ \vdots \\ \left(-\frac{1}{a}\right)^{k-1} \end{array}\right.$$

$$\left(-\frac{1}{a}\right)^{k-1} r_{yu}[k] = b\sigma_u^2 - a\,r_{yu}[0] \iff$$

$$\iff r_{yu}[k] = (-a)^{k-1}\left(b\sigma_u^2 - a\,r_{yu}[0]\right), \quad \forall k \geq 1$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} r_{yu}[1] = b\sigma_u^2 - a\,r_{yu}[0]. \\ r_{yu}[2] = a\left(a\,r_{yu}[0] - b\sigma_u^2\right) \end{array}\right.$$

- Parametru liber: $\alpha = r_{yu}[0]$

❺ Exerciții rezolvate

Soluție (Exercițiul 4.3)

$$\theta^* = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} 0 & -\sigma_u^2 \\ b\sigma_u^2 - a\alpha & -\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b\sigma_u^2 - a\alpha \\ a(a\alpha - b\sigma_u^2) \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \sigma_u^2(b\sigma_u^2 - a\alpha)$$

* verificare:

$$a^* = \frac{-\sigma_u^2 a(a\alpha - b\sigma_u^2)}{\sigma_u^2(b\sigma_u^2 - a\alpha)} = a$$

$$b^* = \frac{(b\sigma_u^2 - a\alpha)^2 - a\alpha(a\alpha - b\sigma_u^2)}{\sigma_u^2(b\sigma_u^2 - a\alpha)} =$$

$$= \frac{b\sigma_u^2 - a\alpha + a\alpha}{\sigma_u^2} = b$$

❺ Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 4.4

a. Reluaţi exerciţiul precedent pentru un vector al instrumentelor de tip parţial filtrat, unde filtrul aplicat intrării este determinat de estimaţiile coeficienţilor evaluate cu MCMMP.
Studiaţi consistenţa estimaţiilor în cazul în care MCMMP oferă chiar valorile adevărate ale parametrilor.
Specificaţi un ansamblu suficient (dar natural) de condiţii de consistenţă în acest caz.

b. Arătaţi că estimaţiile oferite de MVI pentru vectorul instrumentelor de tip parţial filtrat şi pentru cel de tip total filtrat dar avînd $q^{+1}u_f$ în loc de u_f sunt identice.
Care credeţi că este semnificaţia acestui rezultat interesant?
Cum poate fi el exploatat?

Indicaţie

Identitatea a 2 estimaţii oferite de MVI se poate arăta pe 2 căi. Prima cale, mai laborioasă (şi mai puţin elegantă), presupune calculul efectiv al estimaţiilor. A doua cale, mai elegantă, se bazează pe o proprietate interesantă a estimaţiei MVI: invarianţa la transformări liniare ale vectorului instrumentelor. Încercaţi să demonstraţi această proprietate şi apoi găsiţi transformarea liniară dintre cei 2 vectori ai instrumentelor din cadrul exerciţiului.

❺ Exerciții rezolvate

Soluție (Exercițiul 4.4)

a) $$\tilde{\theta}_N = \left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \tilde{z}[n]\,\varphi^T[n]\right]^{-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \tilde{z}[n]\,y[n]\right]$$

$$\varphi[n] = \left[-y[n-1] \quad u[n-1]\right]^T$$

$$\tilde{z}[n] \triangleq \left[u_f[n-1] \quad u[n-1]\right]^T, \text{ cu } u_f[n] = \frac{bq^{-1}}{1+aq^{-1}}\,u[n]$$

MCMMP

$$\begin{bmatrix}\hat{a}\\ \hat{b}\end{bmatrix} = \left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \varphi[n]\,\varphi^T[n]\right]^{-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \varphi[n]\,y[n]\right] =$$

$$= \frac{1}{\Delta_N}\begin{bmatrix} r_{yu}^N[0]\,r_{yu}^N[1] - r_u^N[0]\,r_y^N[1] \\ r_y^N[0]\,r_{yu}^N[1] - r_y^N[1]\,r_{yu}^N[0] \end{bmatrix}$$

(vezi $\boxed{\text{Ex } 3.1}$)

$$\Delta_N = r_u^N[0]\,r_y^N[0] - \left(r_{yu}^N[0]\right)^2$$

$$\tilde{\theta}_N = \frac{1}{\Delta_N}\begin{bmatrix} r_u^N[0] & -r_{uu_f}^N[0] \\ r_{yu}^N[0] & -r_{yu_f}^N[0] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_{yu_f}^N[1] \\ r_{yu}^N[1] \end{bmatrix}$$

$$\Delta_N = r_{yu}^N[0]\,r_{uu_f}^N[0] - r_u^N[0]\,r_{yu_f}^N[0]$$