

Laboratorul 4.

Reprezentarea în frecvență a sistemelor

1. Introducere

Scopul laboratorului constă în studierea răspunsului permanent (staționar) al unui sistem la un semnal sinusoidal. În particular pentru clasa de sisteme studiate (liniare, invariante în timp și având funcție de transfer proprie) vom vedea că răspunsul la un semnal de intrare sinusoidal este tot un semnal sinusoidal de aceeași frecvență cu semnalul de intrare. În schimb amplitudinea și faza semnalului de ieșire diferă în general de cele ale semnalului de intrare, iar valorile diferențelor corespunzătoare sunt funcții de frecvența semnalului de intrare. Prin urmare, vom studia răspunsul staționar al unui sistem la o intrare sinusoidală a cărei frecvență variază. Mai precis, vom examina funcția de transfer $H(s)$, pentru $s = j\omega$ și vom dezvolta metode specifice de reprezentare a lui $H(j\omega)$. Principala metodă grafică de analiză și sinteză a sistemelor este dată de diagramele Bode. În plus, vom introduce diagramele de tip Nyquist și vom cuantifica anumite mărimi de performanță din domeniul timp în termenii răspunsului în frecvență.

2. Definiții generale

Definiția 1. Fie un sistem cu funcția de transfer $H(s)$. Se numește *reprezentare în frecvență* a sistemului, orice reprezentare grafică a evoluției vectorului $H(j\omega)$ în funcție de ω .

Dar $H(j\omega) \in \mathbb{C}$ acesta poate fi scris în forma:

$$H(j\omega) = \operatorname{Re}(H(j\omega)) + j\operatorname{Im}(H(j\omega)).$$

Notând $\operatorname{Re}(H(j\omega)) = U(\omega)$ și $\operatorname{Im}(H(j\omega)) = V(\omega)$, rezultă $H(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$.

Definiția 2. Graficul (curba parametrizată) $V(\omega) = f(U(\omega))$, se numește *hodograf* sau *loc de transfer*, sau *loc Nyquist*.

Propoziția 3. $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este funcție pară, iar $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este funcție impară.

Așadar, este suficientă trasarea curbei doar pentru $\omega \in [0, \infty)$, care este și domeniul de interes.

În reprezentare trigonometrică

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j \arg(H(j\omega))}.$$

Notând

$$H(\omega) = |H(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} \quad \text{și} \quad \phi(\omega) = \arg(H(j\omega)) = \arctan \frac{V(\omega)}{U(\omega)}$$

avem : $H(j\omega) = H(\omega)e^{j \phi(\omega)}$.

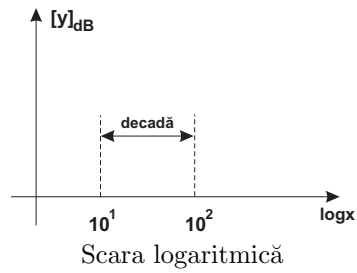
Definiția 4. Se numește scară logaritmică un sistem de axe în care abscisa este $\log x$ iar ordonata este $[y]_{dB} = 20 \log y$. Graficul $[y]_{dB} = F(\log x)$, se numește *reprezentare la scară logaritmică* a lui $y = f(x)$. dB este prescurtarea de la decibel.

Distanța dintre 2 puncte reprezentând puteri consecutive ale lui 10, de pe abscisă, se numește *decadă*.

Definiția 5. Reprezentările

$$[H(\omega)]_{dB} = f(\log \omega) \quad \text{și} \quad \phi(\omega) = f(\log \omega)$$

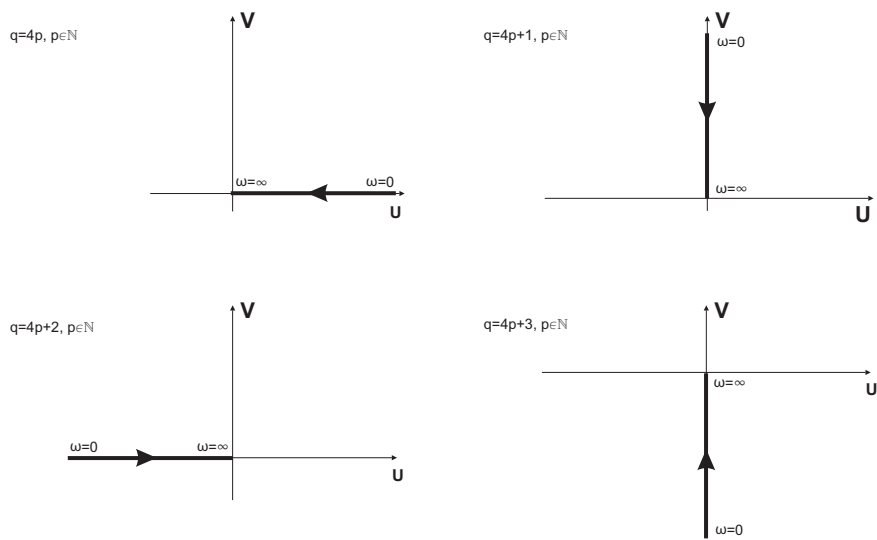
se numesc *caracteristicile amplitudine-frecvență respectiv fază-frecvență* ale sistemului $H(s)$, sau *diagramele Bode* ale acestuia.



3. Hodografe

3.1. Hodografele elementelor de bază

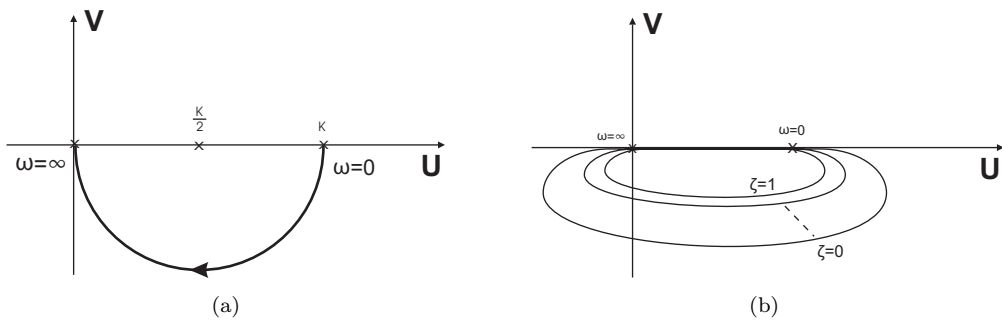
Integratorul : $H(s) = \frac{K}{s^q}$, $K, q \in \mathbb{Z}$. Avem discuție după $q > 0$.



Integratorul (discuție după q)

Elementul de ordin I : $H(s) = \frac{K}{Ts + 1}$, $K, T > 0$.

Elementul de ordin II : $H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$, $\omega_n > 0, \zeta \in [0, 1)$.



Elementele de ordin 1, figura (a), respectiv ordin 2, figura (b)

3.2. Trasarea calitativă

Trasarea se poate face în 2 moduri:

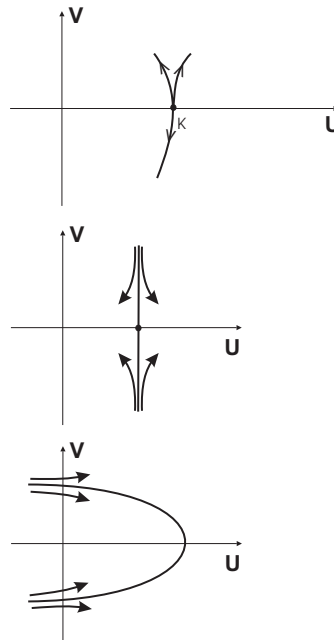
Metoda 1: Se observă forma curbei $V = f(U)$ în formă explicită sau implicită. Apoi se studiază comportarea la joasă frecvență ($\omega = 0$) și la înaltă frecvență ($\omega = \infty$).

Metoda 2: Tabelul de variație a lui U și V , ca funcții reale de variabilă ω . Pentru o trasare cât mai riguroasă a graficului se mai pot studia:

- i. *Intersecțiile cu axele;*
- ii. *Asimptote, limite la capete;*
- iii. *Monotonie (derivata I).*

Acestea se studiază doar când U și V au forme în general simple. În rest trasarea se face prin puncte și studierea comportamentului la joasă frecvență ($\omega = 0_+$) și la înaltă frecvență ($\omega = \infty$).

iv. *Comportarea hodografului la joasă frecvență :* Fie un sistem $H(s) = \frac{r(s)}{p(s)}$, o funcție rațională de transfer. Atunci există $\tilde{r}(s)$ și $\tilde{p}(s)$, două polinoame, cu proprietatea că $\tilde{r}(0) = \tilde{p}(0) = 1$, astfel încât $H(s) = \frac{K \tilde{r}(s)}{s^q \tilde{p}(s)}$.



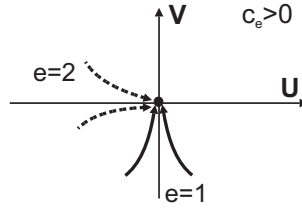
Comportamentul hodografului la j.f.

v. *Comportarea hodografului la înaltă frecvență:*

Dacă $H(s) = \frac{r(s)}{p(s)}$, notăm $e = \partial(p(s)) - \partial(r(s))$ *excesul de poli* al lui $H(s)$. Mai notăm $c_e = \frac{\text{coef. dominant al lui } p}{\text{coef. dominant al lui } r}$. Atunci faza sistemului la $\omega \rightarrow \infty$ va fi

$$\phi(\infty) = \begin{cases} -e\frac{\pi}{2}, & c_e > 0 \\ -e\frac{\pi}{2} - \pi, & c_e < 0 \end{cases}$$

Observația 6. În MATLAB funcția care trasează diagrame Nyquist este *nyquist(sys)*, unde parametrul *sys* reprezintă sistemul și poate fi dat în formă *tf*, *zpk*.



Comportamentul hodografului la î. f.

3.3. Exerciții

Trasați hodografele următoarelor sisteme și comentați formele graficelor:

Exercițiul 1. $H(s) = \frac{K}{s^3+1}$, $K > 0$.

Soluție : $H(j\omega) = \frac{K}{1-j\omega^3} = \frac{K}{1+\omega^6} + j\frac{K\omega^3}{1+\omega^6} \Rightarrow U(\omega) = \frac{K}{1+\omega^6}$ și $V(\omega) = \frac{K\omega^3}{1+\omega^6}$.

Met. 1 : Tabelul de variație.

1. Intersecțiile cu axele : $U(0) = K$ și $V(0) = 0 \Rightarrow$ hodograful taie axa reală în punctul $(K, 0)$.

2. Asimptote, limite la capete : $U(\infty) = 0_+$ și $V(\infty) = 0_+$.

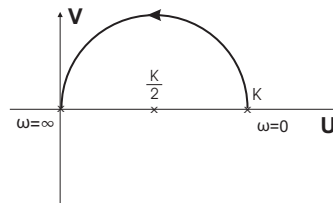
3. Monotonie : $U'(\omega) = -\frac{6K\omega^5}{(1+\omega^6)^2} < 0$, $(\forall) \omega \geq 0 \Rightarrow U$ este descrescătoare pe $[0, \infty)$.

$V'(\omega) = -3K\omega^2 \frac{\omega^6-1}{(1+\omega^6)^2} \begin{cases} > 0, & \omega < 1 \\ \leq 0, & \omega \geq 1 \end{cases} \Rightarrow V$ este crescătoare pe $[0, 1)$ și descrescătoare pe $(1, \infty)$.

4. Comportarea la ∞ : $e = 3$, $c_e > 0 \Rightarrow \phi(\infty) = -3\frac{\pi}{2}$.

5. Tabelul :

ω	0_+	1	∞
$U(\omega)$	K	\searrow	0_+
$V(\omega)$	0	$\nearrow \frac{K}{2} \searrow$	0_+



Met. 2 :

Observația 7. $U^2(\omega) + V^2(\omega) = K \frac{K}{1+\omega^6} = K U(\omega)$, $(\forall) \omega \geq 0 \Leftrightarrow (U - \frac{K}{2})^2 + V^2 = \frac{K^2}{4}$, \Rightarrow semicerc cu centrul în $(\frac{K}{2}, 0)$ și rază $\frac{K}{2}$. Pentru stabilirea sensului se studiază comportarea la ∞ ca mai sus.

MATLAB :

```
for K=0:10
    H=tf([K],[1 0 0 1]);
    nyquist(H,{0.1,1000});
    hold on;
end
```

Se va observă că în general orice sistem de forma $H(s) = \frac{K}{s^n+1}$, cu n impar, va avea hodograful un semicerc de rază $\frac{K}{2}$. Dar dacă n este par?

MATLAB :

```
% Trasam hodograful sistemului H(s)=k/(s^n+1), pentru diversi n.
function ex1a(n) for K=0:10
    H=tf([K],[1 zeros(length(n)-1) 1]);
    nyquist(H);
    hold on;
end
hold off;
```

Exercițiul 2. $H(s) = \frac{K}{s(s+1)}$, $K > 0$.

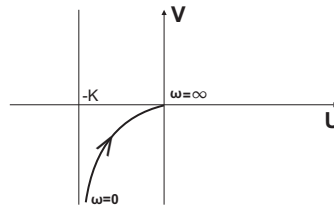
Soluție : $H(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1+j\omega)} \Rightarrow U(\omega) = -\frac{K\omega}{\omega(1+\omega^2)} = -\frac{K}{1+\omega^2}$ și $V(\omega) = \frac{-K}{\omega(1+\omega^2)}$.

1. Intersecțiile cu axele : graficul nu intersectează axele.
2. Asimptote, limite la capete : $U(0) = -K$, $U(\infty) = 0_-$ și $V(0) = -\infty$, iar $V(\infty) = 0_-$.
3. Monotonie : $U'(\omega) = \frac{2K\omega}{(1+\omega^2)^2} > 0$, $(\forall) \omega \geq 0 \Rightarrow U$ este strict crescătoare pe $[0, \infty)$.

$V'(\omega) = K \frac{3\omega^2+1}{\omega^2(1+\omega^2)^2}$, $(\forall) \omega \geq 0 \Rightarrow V$ este strict crescătoare pe $(0, \infty)$.

4. Comportarea la ∞ : $e = 2$, $c_e > 0 \Rightarrow \phi(\infty) = -\pi$.
5. Tabelul :

ω	0_+	∞
$U(\omega)$	$-K$	0_-
$V(\omega)$	$-\infty$	0_-



MATLAB :

```
for K=0:10
    H=tf([K],conv([1 0],[1 1]));
    nyquist(H,{0.11,10000});
    hold on;
end
% Se observa dependenta de K a graficului
```

Deoarece sistemul conține un integrator, se observă "plecarea" asimptotică a graficului dinspre $-\infty$. În plus se va vedea cu ajutorul calculatorului că aceasta este forma hodografului pentru orice sistem de tipul: $H(s) = \frac{K}{s(s+1)\dots(s+p)}$, $K > 0$, cu excepția asimptotei verticale la $\omega = 0$, a cărei poziție depinde de K .

MATLAB :

```
function ex3a(pmax) den=1; for
p=0:pmax
    den=conv(den,[1 p]);
end for K=0:10
    hold on;
    H=tf([K],den);
```

```

nyquist(H);
end
%Se pastreaza dependenta de K.

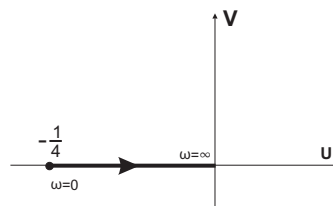
```

Verificați analitic cele afirmate mai sus, pentru $p_{max} = 2$.

Exercițiul 3. $H(s) = \frac{s^2-1}{s^4+4s^2+4}$.

Soluție : $H(j\omega) = -\frac{\omega^2+1}{\omega^4-4\omega^2+4} = U(\omega) \in \mathbb{R}$. Deoarece $V(\omega) = 0$, $(\forall) \omega \geq 0$, hodograful va fi un segment de dreaptă orientat, situat pe axa reală. Pentru stabilirea sensului este necesară studierea monotoniei lui U . După calcule destul de laborioase (lăsate exercițiu cititorului) avem că $U'(\omega) > 0$, $(\forall) \omega \geq 0 \Rightarrow U$ este strict crescătoare pe $[0, \infty)$.

$$\begin{array}{c|cc} \omega & 0_+ & \infty \\ \hline U(\omega) & -\frac{1}{4} & 0_- \end{array} \quad \longrightarrow$$



Observația 8. Este respectată și comportarea la ∞ : $\phi(\infty) = -\pi$.

Observația 9. $H(s) = H(-s) \Rightarrow H(j\omega) = H(-j\omega) = H(\overline{j\omega}) = \overline{H(j\omega)} \Rightarrow H(j\omega) = U(\omega) \in \mathbb{R}$. Pentru orice sistem de acest tip hodograful este un segment orientat pe axa reală.

Exercițiul 4. $H(s) = \frac{s+1}{s^2+1}$. Să se găsească frecvențele pentru care hodograful taie cercul unitate.

Soluție : $H(j\omega) = \frac{1+j\omega}{1-\omega^2} \Rightarrow U(\omega) = \frac{1}{1-\omega^2}$, $V(\omega) = \frac{\omega}{1-\omega^2} \Rightarrow U^2(\omega) - V^2(\omega) = U(\omega)$, $(\forall) \omega > 0 \Leftrightarrow (U - \frac{1}{2})^2 - V^2 = \frac{1}{4}$. Rescriind ecuația sub forma:

$$\frac{(U - \frac{1}{2})^2}{\frac{1}{4}} - \frac{V^2}{\frac{1}{4}} = 1 \quad (1)$$

putem recunoaște o hiperbolă $(\frac{U}{a})^2 - (\frac{V}{b})^2 = 1$, cu $a = b = \frac{1}{2}$. Dreapta $V = (U - \frac{1}{2})$, pentru $\omega \geq 0$ este asimptotă. Pentru stabilirea sensului pe hodograf, studiem comportarea la $\omega = 0$: $U(0) = 1, V(0) = 0$, precum și pe cea la ∞ : $\phi(\infty) = -\frac{\pi}{2}$. Deoarece U și V au discontinuități în $\omega = 1$, **MATLAB** nu trasează corect hodograful cu funcția *nyquist*. În continuare trasăm hodograful folosind exclusiv definiția.

MATLAB :

```

for w=0:0.001:0.9;
    hold on;
    u=1/(1-w^2);
    v=w/(1-w^2);
    plot(u,v)
end
grid on
hold on;

for w=1.1:0.001:10;
    hold on;

```

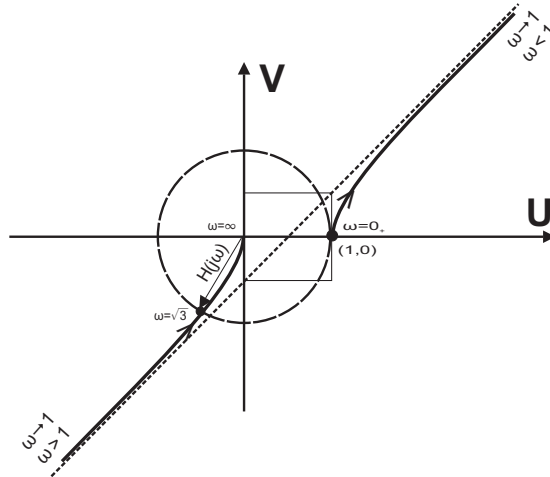
```

u=1/(1-w^2);
v=w/(1-w^2);
plot(u,v)
end
title('Hodograf')
xlabel('U')
ylabel('V')

```

Notând hodograful cu \mathcal{H} , avem că: $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(0,1) = \{\omega \in \mathbb{R} \mid |H(j\omega)| = 1\}$. Afirmatia este corectă, deoarece este reprezentat vectorul $H(j\omega)$ în planul complex, cu modulul $|H(j\omega)|$ și faza $\phi(\omega) = \arg H(j\omega)$.

Rezolvăm deci ecuația $|H(j\omega)| = 1 \Leftrightarrow \omega = 0$, sau $\omega = \sqrt{3}$ adică la aceste frecvențe hodograful taie cercul unitate în punctele $(1,0)$, respectiv $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.



Definiția 10. Un sistem cu funcția de transfer

$$H_T(s) = \frac{\prod_{i=1}^n (T_i s - 1)}{\prod_{i=1}^n (T_i s + 1)}, \quad T_i \in \mathbb{R},$$

se numește *filtru trece-tot (all-pass)*.

Propoziția 11. $|H_T(j\omega)| = 1$, $(\forall) \omega \in \mathbb{R}$, $T_i \in \mathbb{R}$.

Demonstrația este lăsată temă cititorului.

Exercițiul 5. $H(s) = \frac{s-a}{s+a}$, $a \in \mathbb{R}^*$.

Soluție : Acesta este un filtru trece-tot, conform definiției de mai sus, deci în frecvență are modulul 1, pe toată axa reală. Hodograful este cercul unitate, iar sensul de parcurgere este dat de semnul lui a . Dacă $a > 0$ atunci sensul este cel al acelor de ceas, iar dacă $a < 0$ sensul este trigonometric.

MATLAB :

```

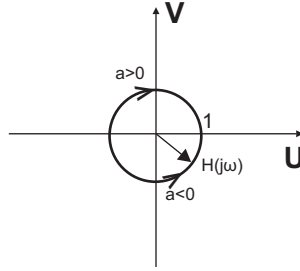
%cazul all-pass.
function ex6(a)
H=tf([1 -a],[1 a]);
nyquist(H)

```

Exercițiul 6. $H(s) = \frac{K}{s} \frac{s-1}{s+1}$.

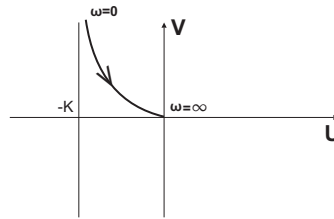
Soluție : Lăsăm ca temă rezolvarea analitică a acestui exercițiu.

MATLAB :



Filtru de tip trece-tot cu un singur pol

```
H1=tf([1],[1 0])
nyquist(H1);
hold on;
H2=tf([1 -1],[1 1]);
H=series(H2,H1)
nyquist(H) H3=tf([1 1],[1 -1]);
Ho=series(H3,H1)
nyquist(Ho)
hold off;
```



Exercițiul 7. $H(s) = \frac{K}{s} e^{-\tau s}$, $\tau > 0$, $K > 0$.

Soluție : Este un element integrator cu timp mort. Timpul mort reprezintă o întâziere în răspunsul sistemului, mai precis dacă intrarea a fost aplicată la momentul $t = 0$, sistemul începe să răspundă la momentul $\tau > 0$.

Observația 12. Sistemul este infinit dimensional (ecuația lui caracteristică are o infinitate de soluții).

Acest fapt se va reflecta și în răspunsul în frecvență. Timpul mort afectează faza sistemului.

Evaluăm $H(j\omega) = \frac{K}{j\omega} e^{-j\omega\tau} = \frac{K}{j\omega} (\cos \omega\tau - j \sin \omega\tau) \Rightarrow U(\omega) = -K \frac{\sin \omega\tau}{\omega}$, iar $V(\omega) = -K \frac{\cos \omega\tau}{\omega}$. Deoarece U și V au forme complicate, procedăm altfel. Hodograful este curba ce indică evoluția vectorului $H(j\omega)$ în planul complex. Vom studia modulul și faza acestuia :

Modulul : $|H(j\omega)| = \frac{K}{\omega} |e^{-j\omega\tau}| = \frac{K}{\omega}$, descrescător pe $(0, \infty) \Rightarrow$ vectorul își micșorează modulul cu cât ω crește. Evident pentru $\omega = \infty$, modulul devine 0.

Faza : $\phi(\omega) = -\omega\tau - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \phi(0) = -\frac{\pi}{2}$ și $\phi(\infty) = -\infty \Rightarrow$ vectorul se rotește în sensul acelor de ceas de o infinitate de ori. Acest comportament ne sugerează forma unei spirale. Pentru o rigurozitate crescută a construcției graficului mai este necesar studiul intersecției cu axele :

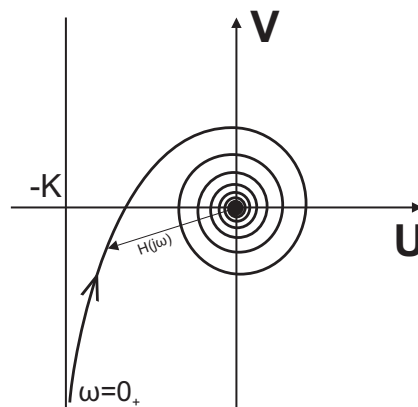
$$Im : V(\omega) = 0 \Leftrightarrow \sin \omega\tau = 0 \Leftrightarrow \omega = \frac{p\pi}{\tau}, p \in \mathbb{Z} \Rightarrow OV \cap \mathcal{H} = \{(0, -K\tau \frac{\cos p\pi}{p\pi}) \mid p \in \mathbb{Z}\}$$

$$Re : U(\omega) = 0 \Leftrightarrow OU \cap \mathcal{H} = \{(-K\tau \frac{\sin(2p+1)\pi}{(2p+1)\pi}, 0) \mid p \in \mathbb{Z}\}.$$

Deoarece timpul mort nu poate fi introdus cu ajutorul **MATLAB**, nu putem crea sistemul pentru diagrama Nyquist. Vom scrie explicit U și V în funcție de ω și vom construi graficul conform definiției.

MATLAB :

```
function ex7(K,tau)
for w=0.1:0.001:10;
    hold on;
    u=-K*sin(w*tau)/w;
    v=-K*cos(w*tau)/w;
    plot(u,v)
end
grid on
ylabel('Axa imaginara')
xlabel('Axa reala')
```



4. Diagrame Bode

4.1. Trasarea calitativă

Vom prezenta o procedură de desenare a caracteristicilor asimptotice și a celor reale, atât pentru amplitudine, cât și pentru fază.

Problemă : Dându-se un sistem $H(s)$, se cere trasarea caracteristicilor $[H(\omega)]_{dB} = f(\log \omega)$ și $\phi(\omega) = f(\log \omega)$, pentru $\omega \in (0, \infty)$.

Algoritm :

Pas 1 : Se rescrie funcția de transfer a sistemului sub formă de produse (conectări în serie) de elemente integratoare, de ordin 1, 2, de întârziere (la numitor) sau inversate (de anticipație, la numărător) :

$$H(s) = \frac{K}{s^q} \frac{\prod_{i=1}^l (T_i s + 1) \prod_{i=1}^m (T_{n_i}^2 s^2 + 2\zeta_i T_{n_i} s + 1)}{\prod_{j=1}^n (T_j s + 1) \prod_{j=1}^p (T_{n_j} s^2 + 2\zeta_j T_{n_j} s + 1)}, \quad T_i, T_j, T_{n_i}, T_{n_j} > 0, \quad \zeta_i, \zeta_j \in [0, 1).$$

Observația 13. Deoarece se lucrează la scară logaritmică frecvența $\omega = 0$, nu are sens!

Pas 2 : Se determină *frecvențele de tăiere* în ordinea crescătoare (descrescătoare a constantelor de timp). Astfel, intervalul $(0, \infty)$ este împărțit pe *benzi de frecvență* : $(0, \infty) = (0, \omega_{T_1}) \cup [\omega_{T_1}, \omega_{T_2}) \cup [\omega_{T_3}, \omega_{T_4}) \cup \dots$, $\omega_{T_k} = \frac{1}{T_k}$.

Pas 3 :

Caracteristica amplitudine-frecvență (AF): Pe fiecare bandă se trasează caracteristica asimptotică corespunzătoare fiecărui element, adunând de fiecare dată pantele. Caracteristica reală urmărește asimptotele, cu specificitățile fiecărui sistem elementar în parte.

Caracteristica fază-frecvență (FF): Se desenează caracteristica specifică fiecărui element, pe același grafic, apoi se încearcă vizual însumarea graficelor pe fiecare bandă de frecvență.

MATLAB :

bode(sys) - pentru caracteristica reală

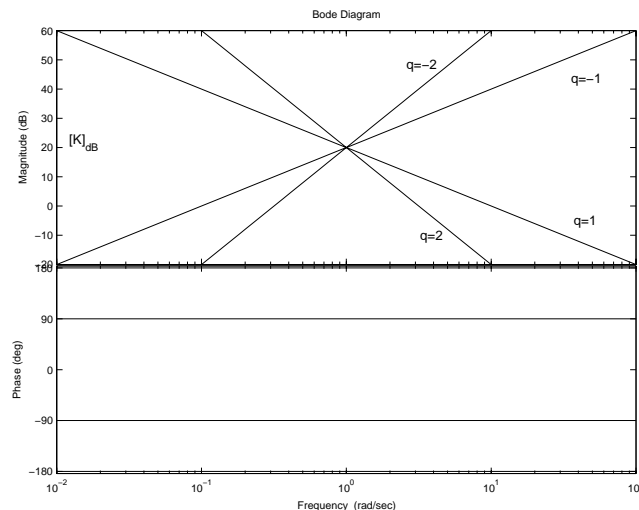
bodeasym(sys) - pentru caracteristicile asimptotice.

4.2. Caracteristicile elementelor de bază

Integratorul : $H(s) = \frac{K}{s^q}$, $K, q \in \mathbb{Z}$.

AF : Se obține o familie de drepte de forma $20 \log K - 20q \log \omega = [K]_{dB} - 20q \log \omega$ (panta este de $-20q \text{ dB/dec}$).

FF : Faza este constantă, iar valoarea ei depinde de q , $\phi(\omega) = -q\frac{\pi}{2}$.



Diagramele Bode ale integratorului (discuție după q , $K = 10$)

Elementul de ordin I : $H(s) = \frac{K}{Ts+1}$, $T \in \mathbb{R}$, $K > 0 \Rightarrow [H(\omega)]_{dB} = [K]_{dB} - 20 \log(1 + \omega^2 T^2)$. Cum $T \in \mathbb{R}$ vom vorbi de $|\omega T| = \omega|T| \Rightarrow \omega_T = \frac{1}{|T|}$, frecvența de tăiere. Dacă $T > 0$, atunci sistemul este stabil. Dacă $T < 0$, atunci sistemul este instabil.

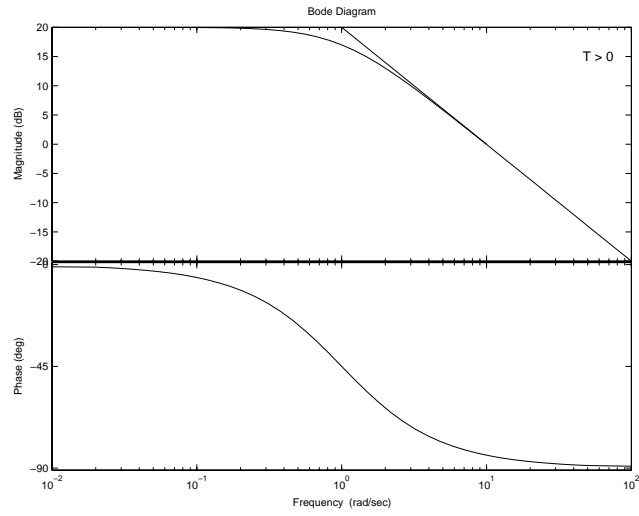
AF : Cele trei benzi vor fi:

joasă frecvență (j.f.): $[K]_{dB}$;

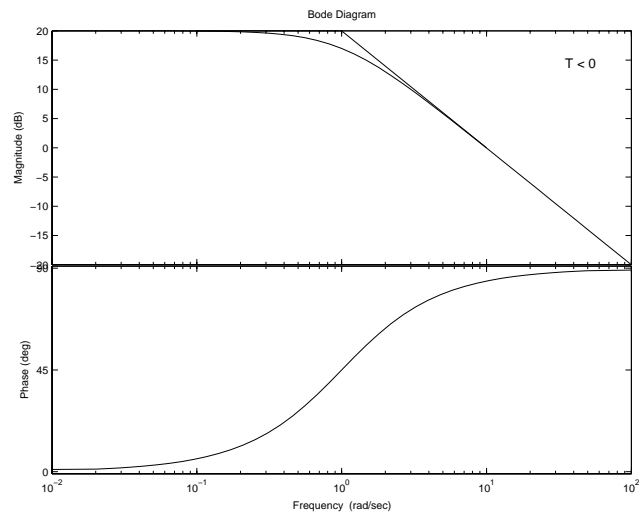
medie frecvență (m.f.): -3 dB (abatere, ne ajută la caracteristica reală);

întă frecvență (i.f.): dreaptă cu panta de -20 dB/dec .

FF : $\phi(\omega) = -\arctan(\omega T)$.



Element de ordin 1 stabil



Element de ordin 1 instabil

Observăm că dacă $T < 0$, atunci se modifică doar faza.

Elementul de ordin II : $H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$, $\omega_n, \zeta > 0$ (sistemul este stabil). Notând $x = \frac{\omega}{\omega_n} \Rightarrow$

$$H(\omega) \leftarrow H(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + 4\zeta^2 x^2}}.$$

Frecvența de tăiere este $\omega_T = \omega_n \Leftrightarrow x_T = 1$:

AF :

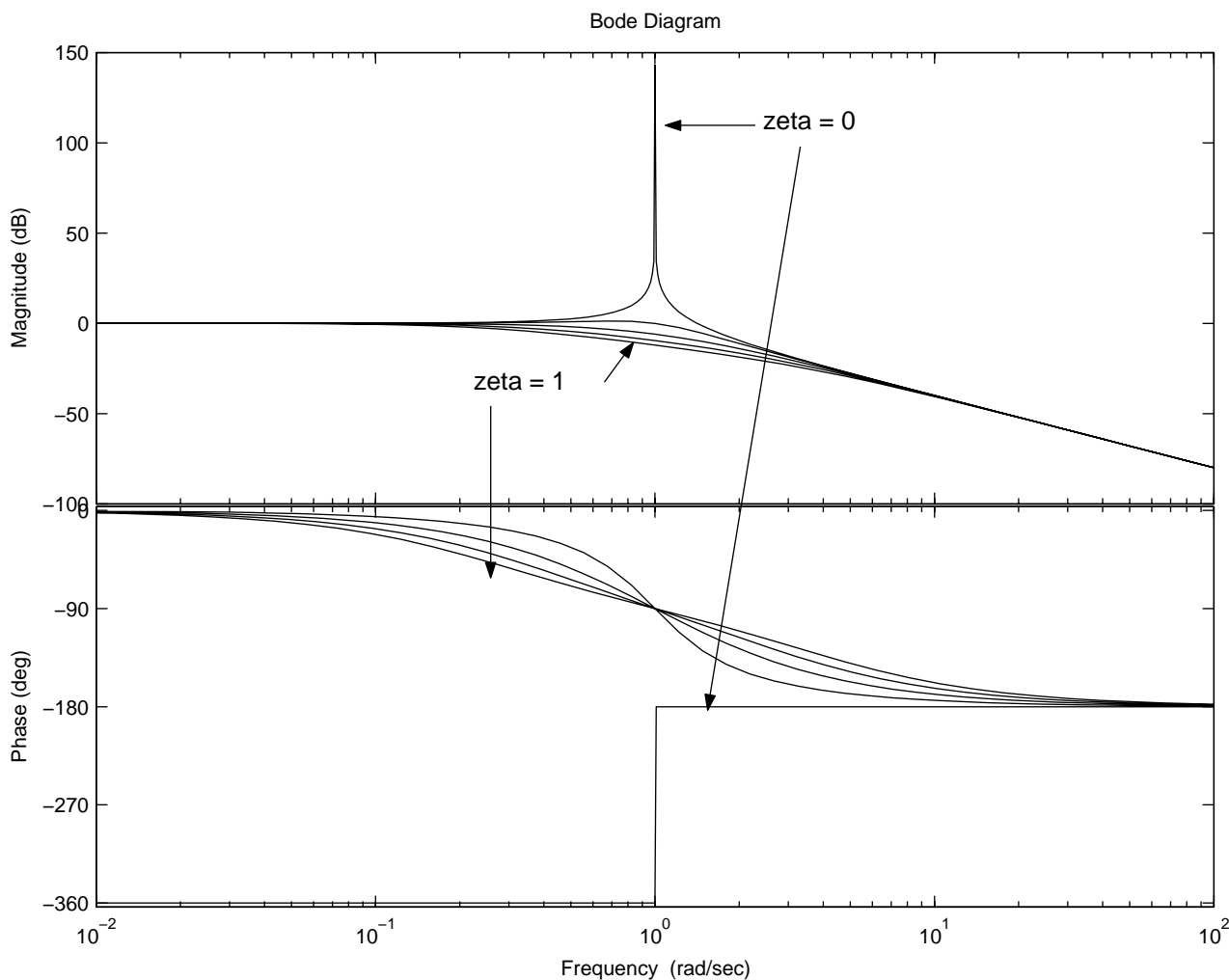
j.f. : 0;

m.f. : $-10 \log 4 - 20 \log \zeta$;

i.f. : dreaptă cu panta de -40 dB/dec.

FF : $\phi(\omega) = \arctan(-\frac{2\zeta x}{1-x^2})$.

Ambele caracteristici depind de ζ .



Element de ordin II

Observația 14. Dacă $\zeta > 1$, atunci elementul de ordin II are 2 poli reali ($\delta > 0$), deci practic elementul de ordin II devine o înseriere a 2 elemente de ordin I, iar caracteristica va semăna cu cea a unui sistem de ordin I, doar cu panta mai abruptă. Reamintim că $\zeta = 0$ reprezintă regimul de rezonanță iar $\zeta \geq 1$ este regimul critic amortizat.

Observația 15. Caracteristicile elementelor inverse sunt simetricele celor de mai sus față de abscisă.

4.3. Exerciții

Trasați caracteristicile Bode ale următoarelor sisteme :

Exercițiul 8. $H(s) = \frac{2s + 1}{s(10s + 1)(s^2 + 4s + 8)}$.

Soluție : $H(s) = \frac{1}{8} \frac{1}{s} \frac{2s + 1}{(10s + 1)} \frac{1}{(\frac{1}{2\sqrt{2}})^2 s^2 + 2(\frac{1}{2\sqrt{2}})(\frac{1}{\sqrt{2}})s + 1}$. De unde rezultă că $K = \frac{1}{8}$; $T_1 = 10$; $T_2 =$

2; $T_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, iar $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0.7$. Așadar frecvențele de tăiere sunt : $\omega_{T_1} = \frac{1}{10} < \omega_{T_2} = \frac{1}{2} < \omega_{T_3} = 2\sqrt{2}$.

AF : Vom respecta algoritmul prezentat anterior:

$(0, \omega_{T_1})$: integrator \rightarrow dreaptă cu panta de -20 dB/dec . La $\omega = 1$, asimptota de j.f. are valoarea $[K]_{dB} = [\frac{1}{8}]_{dB} \simeq -18 \text{ dB}$;

$(\omega_{T_1}, \omega_{T_2})$: ordin I \rightarrow dreaptă cu panta de $-20 - 20 = -40 \text{ dB/dec}$;

$(\omega_{T_2}, \omega_{T_3})$: ordin I inversat \rightarrow dreaptă cu panta de $-40 + 20 = -20 \text{ dB/dec}$.

(ω_{T_3}, ∞) : ordin II (cu poli complecși) \rightarrow dreaptă cu panta de $-20 - 40 = -60 \text{ dB/dec}$.

FF : $\phi(\omega) = -\frac{\pi}{2} + \arctan(2\omega) - \arctan(10\omega) - \arctan(\frac{1,4\omega\omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2})$. In general aici nu se precizează decât valorile la 0_+ și la ∞ , dacă se pot calcula. Deci $\phi(0_+) = -\frac{\pi}{2}$, iar $\phi(\infty) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \pi = -2\pi$.

MATLAB :

```
num=[2 1];
den=conv([1 0],[10 1]);
den=conv(den,[1 4 8]);
H=tf(num,den);
hold on;
bodeasym(H,'r')
bode(H)
```

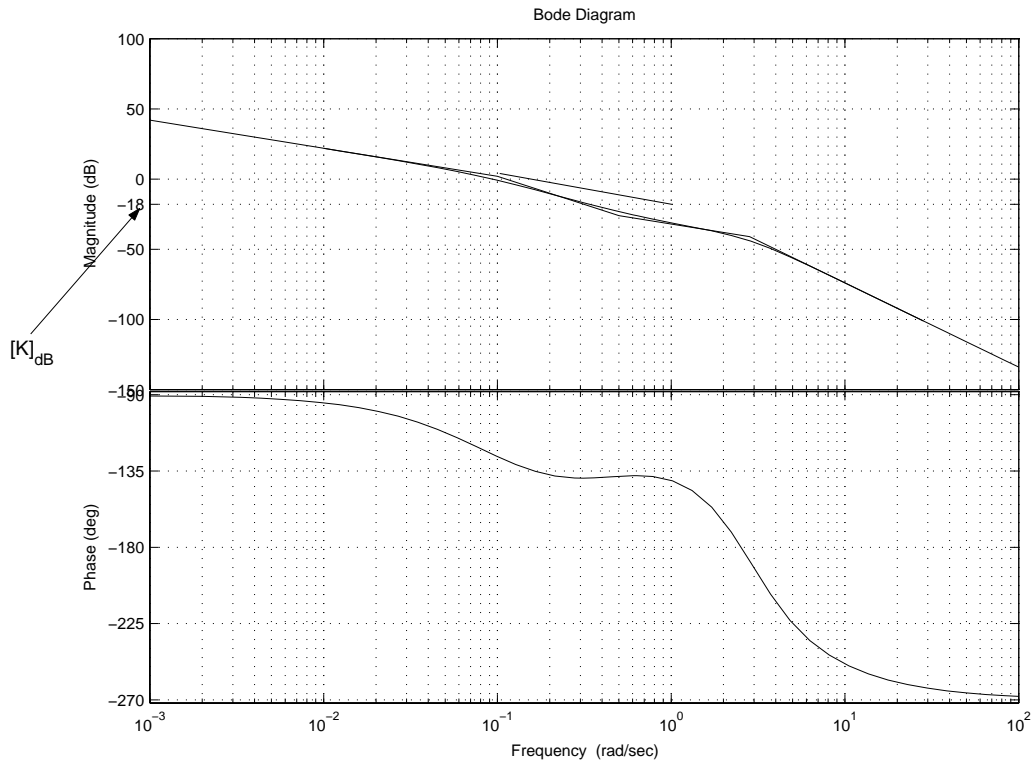


Figura 1: Rezultatul exercițiului 8

Rezultatele sunt prezentate în figura 1.

Exercițiile următoare nu vor mai conține explicații analitice extinse, deoarece ele reprezintă din punct de vedere al rezolvării doar aplicarea directă a procedurii, ci doar observații practice din analiza graficelor.

Exercițiul 9. $H(s) = \frac{10}{s} \cdot \frac{1+s^2}{(0,1s+1)(0,05s+1)}$.

Soluție : $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 10$, $\omega_3 = 20$. Elementul de ordin II prezent în sistem, are $\zeta = 0$, funcționând la rezonanță. Acest fenomen va fi pus în evidență clar pe caracteristica de amplitudine. După cum s-a văzut acesta este reprezentat prin discontinuitatea în frecvența de tăiere.

MATLAB :

```
num=[10 0 10];
den=conv([1 0],[0.11]);
den=conv(den,[0.05 1]);
H=tf(num,den)
bode(H)
```

Rezultatul este prezentat în figura 2.

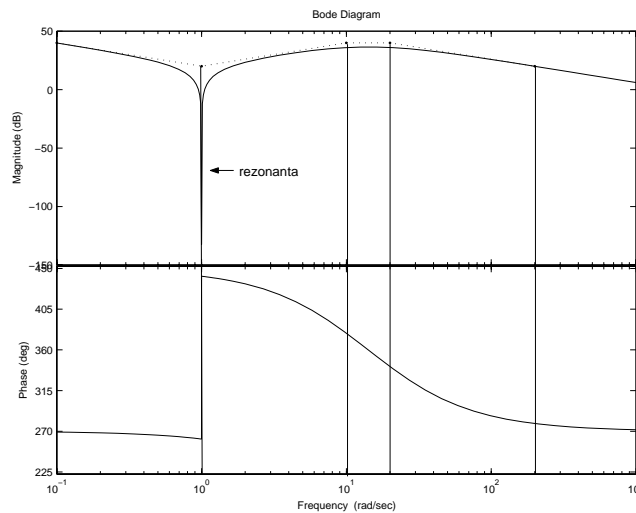


Figura 2: Rezultatul exercițiului 9

Exercițiul 10. $G(s) = \frac{\alpha s + 1}{\beta s + 1}$, $\alpha, \beta > 0$. Calculați $\sup_{\omega} |G(j\omega)|$. Discuție după α și β .

Soluție : **cazul 1.** $\alpha < \beta \Rightarrow \omega_1 = \frac{1}{\beta} < \omega_2 = \frac{1}{\alpha}$.

$\sup_{\omega} |G(j\omega)|$ se ia de pe grafic și corespunde valorii maxime a lui $[G]_{dB}$. Aici $[G]_{dB_{max}} = 0 \Rightarrow \sup_{\omega} |G(j\omega)| = 1$.

MATLAB :

```
function ex11(alfa, beta)
num=[alfa 1];
den=[beta 1];
H=tf(num,den)
hold on
bodeasym(H)
bode(H)
% modulul este 1. Graficul fazei se pastreaza.
% Se considera 2 cazuri : alfa<beta, alfa>beta.
```

Rezultatul este prezentat în figura 3.

cazul 2. $\alpha > \beta \Rightarrow \omega_1 = \frac{1}{\alpha} < \omega_2 = \frac{1}{\beta}$. Desenele sunt simetricele celor de mai sus față de abscisă. În plus

$$\sup_{\omega} |G(j\omega)| = \frac{\alpha}{\beta}.$$

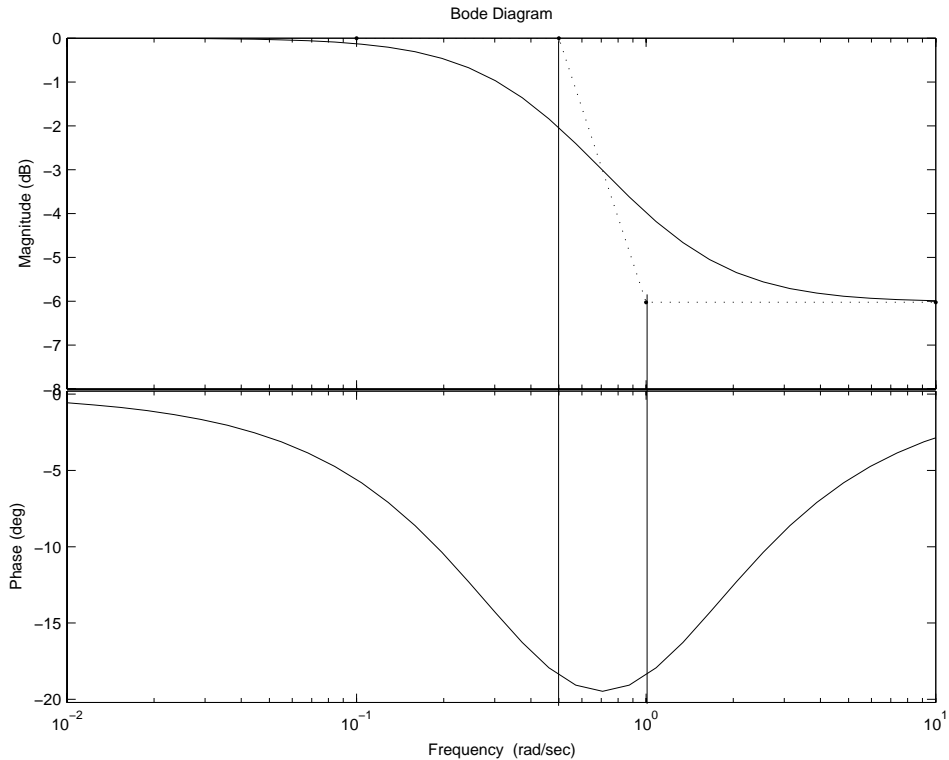


Figura 3: Rezultatul exercițiului 10

Verificați analitic corectitudinea afirmației anterioare.

Indicație : Maximul se găsește pe caracteristica asimptotică. De ce?

Exercițiul 11. $H(s) = \frac{s-a}{s+a}$, $a \in \mathbb{R}_+$.

Soluție : Este cazul filtrului de tip trece-tot care are modulul 1 pe întreg spectrul pozitiv de frecvențe.

AF : 0 dB pe $\omega \in (0, \infty)$.

FF : $\phi(\omega) = \arctan \frac{2a\omega}{\omega^2 - a^2}$ (asemănătoare cu element de ordin I, doar că se schimbă punctul de inflexiune și capetele între care evoluează, $\phi(0_+) = \frac{\pi}{2}$, iar $\phi(\infty) = 0$.)

MATLAB :

```
function ex13(a)
num=[1 -a];
den=[1 a];
H=tf(num,den)
bode(H)
```

%Se dau valori pozitive lui a. Graficul amplitudinii va avea variații mici în jurul semiaxei logaritmice. Care este cauza acestui fenomen și cum se poate proceda pentru vizualizarea corectă a graficului?

Exercițiul 12. $H(s) = \frac{K}{s} e^{-\tau s}$.

Soluție : $H(\omega) = \frac{K}{\omega}$, iar $\phi(\omega) = -\omega\tau - \frac{\pi}{2}$, ($\forall \omega > 0$ (fază liniară)).

Observația 16. În general, un sistem cu timp mort are funcția de transfer $H(s) = \tilde{H}(s)e^{-\tau s}$, unde $\tilde{H}(s)$

este o funcție de transfer rațională (strict) proprie. Rezultă că $|H(j\omega)| = |\tilde{H}(j\omega)|$, $(\forall) \omega > 0$, așadar modulul nu este influențat de timpul mort. În schimb faza este $\phi(\omega) = \arg(\tilde{H}(j\omega)) - \omega\tau$, $(\forall) \omega > 0$, afectată semnificativ la frecvențe mari ($\phi(\infty) = -\infty$).

5. Anexă

În această anexă sunt prezentate suprafețe generate prin introducerea ca variabilă a parametrilor caracteristici elementelor ordinare. Adică în cazul diagramelor Nyquist:

element de ordin 1: $U(\omega)$, $V(\omega) \leftarrow U(\omega, T)$, $V(\omega, T)$, $T \in \mathbb{R}$;

element de ordin 2: $U(\omega, \zeta)$, $V(\omega, \zeta)$, $\zeta \in \mathbb{R}$;

Pentru diagramele Bode prezintă interes doar elementul de ordin 2: $H(\omega) \leftarrow H(\omega, \zeta)$ și $\phi(\omega) \leftarrow \phi(\omega, \zeta)$, $\zeta \in \mathbb{R}$.

MATLAB :

```
% elementul de ord. 1, parametrizat in functie de T (Nyquist).
```

```
W=1:0.1:101;
```

```
for T=-500:500
```

```
    [U,V]=nyquist([1],[T 1],W);
```

```
    for i=1:length(W)
```

```
        X(i,T+501)=U(i,1);
```

```
        Y(i,T+501)=V(i,1);
```

```
    end
```

```
end
```

```
T=-500:500;
```

```
mesh(T,X,Y)
```

```
%elementul de ordin 2, parametrizat in functie de zeta in R (Nyquist)
```

```
W=1:0.1:101;
```

```
for zetta=-50:50
```

```
    [U,V]=nyquist([1],[1 2*zetta 1],W);
```

```
    for i=1:length(W)
```

```
        X(i,zetta+51)=U(i,1);
```

```
        Y(i,zetta+51)=V(i,1);
```

```
    end
```

```
end
```

```
zetta=-50:50;
```

```
mesh(zetta,X,Y)
```

```
% element de ordin 2, parametrizat in functie de zeta in R (Bode)
```

```
W=1:0.1:101;
```

```
for zetta=-50:50
```

```
    H=tf([4],[1 4*(zetta-1) 4]);
```

```
    [MAG,PHASE]=bode(H,W);
```

```
    MAGDB=20*log10(MAG);
```

```
    for i=1:length(W)
```

```
        X(51+zetta,i)=MAGDB(1,1,i);
```

```
        Y(51+zetta,i)=PHASE(1,1,i);
```

```
    end
```

```
end
```

```
end
```

```
zetta=-50:50;
```

```
mesh(W,zetta,X)
```

```
figure(2)
```

```
mesh(W,zetta,Y)
```