❹ Metode de identificare şi validare

❹.❺ Metoda Celor Mai Mici Pătrate Extinsă (MCMMPE)

- Discuţia care urmează vizează identificarea modelelor de regresie liniară avînd vectorul regresorilor nemăsurabil.
- Astfel de modele se regăsesc atît în clasa ARMAX, cît şi (mai ales) în clasa RSISO.

Exemplu

ARMAX[na,nb,nc]

$$\varphi^T[n] \stackrel{def}{=} \Big[-y[n-1]\ -y[n-2] \cdots -y[n-na] \;\Big|\; u[n-1]\ u[n-2] \cdots u[n-nb] \;\Big|\; \ldots$$

3 componente,

$$\ldots\ \boxed{e[n-1]\ e[n-2] \cdots e[n-nc]\Big]}$$

ca şi vectorul parametrilor

$$\boldsymbol{\theta}^T \stackrel{def}{=} \Big[a_1\ a_2 \cdots a_{na} \;\Big|\; b_1\ b_2 \cdots b_{nb} \;\Big|\; c_1\ c_2 \cdots c_{nc} \Big]$$

☹ Ultima componentă nu este măsurabilă.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

- Strategia generală de identificare cu ajutorul MCMMPE constă în două etape:

  ① Estimarea zgomotului care intervine în componenta nemăsurabilă cu ajutorul unui model avînd vectorul regresorilor complet măsurabil (dar mai puţin precis).

  ② Determinarea parametrilor originali ai modelului cu ajutorul vectorului regresorilor avînd componenta nemăsurabilă estimată în etapa precedentă.

- În ambele etape este folosită o metodă de identificare din clasa MCMMP-MVI, de unde atributul “Extinsă”.
- În cazul modelului general ARMAX:

  ① Zgomotul alb este estimat cu ajutorul unui model de tip ARX suficient de complex.

  ② Se aplică din nou MCMMP, fie direct (folosind vectorul estimat al regresorilor), fie indirect (prin determinarea pseudo-soluţiei unui sistem incompatibil).

❹ Metode de identificare şi validare

❹.❺ Metoda Celor Mai Mici Pătrate Extinsă

Cazul modelelor ARMAX

zgomot (eventual) colorat

$\mathcal{P}(\theta^*)$

$$A^*(q^{-1})y[n] = B^*(q^{-1})u[n] + C^*(q^{-1})v[n] \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \iff y[n] = \boldsymbol{\varphi}^T[n]\boldsymbol{\theta}^* + v[n] \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

polinoame cu parametri adevăraţi, avînd gradele ***na***, ***na***, respectiv ***nc*** ⇒ $n\theta = na + nb + nc$

$\mathcal{D}_N = \{(u[n], y[n])\}_{n\in\overline{1,N}}$

date măsurate

☝ Vectorul regresorilor fiind nemăsurabil, se apelează la strategia în două etape care fundamentează MCMMPE.

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_N = \underset{\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{R}^{n\theta}}{\operatorname{argmin}}\, \mathcal{V}(\boldsymbol{\theta}) = ?$$

① Estimarea zgomotului de proces (alb sau colorat) cu ajutorul unui model de tip ARX suficient de complex.

Cum se poate aproxima modelul general ARMAX cu unul de tip ARX?

Prin împărţirea infinită trunchiată a ecuaţiei de proces la polinomul componentei MA.

$$\begin{cases} \dfrac{A^*(q^{-1})}{C^*(q^{-1})} = \sum\limits_{k\geq 0} \alpha_k^* q^{-k} \cong \sum\limits_{k=0}^{n\alpha} \alpha_k^* q^{-k} = \tilde{A}^*(q^{-1}) \\[2ex] \dfrac{B^*(q^{-1})}{C^*(q^{-1})} = \sum\limits_{k\geq 0} \beta_k^* q^{-k} \cong \sum\limits_{k=0}^{n\beta} \beta_k^* q^{-k} = \tilde{B}^*(q^{-1}) \end{cases}$$

indici structurali suficient de mari

$$\min\{n\alpha, n\beta\} \gg \max\{na, nb, nc\}$$

$\tilde{\mathcal{P}}(\tilde{\theta}^*)$

$$\tilde{A}^*(q^{-1})y[n] = \tilde{B}^*(q^{-1})u[n] + v[n] \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \iff y[n] = \tilde{\boldsymbol{\varphi}}^T[n]\tilde{\boldsymbol{\theta}}^* + v[n] \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

❹.❺ Metoda Celor Mai Mici Pătrate Extinsă

Aşadar $\tilde{\mathcal{P}}(\tilde{\boldsymbol\theta}^*)$ $y[n]=\tilde{\boldsymbol\varphi}^T[n]\tilde{\boldsymbol\theta}^*+v[n]$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

(proces ARX aproximant)

$$\begin{cases}\tilde{\boldsymbol\varphi}^T[n]\overset{def}{=}\left[-y[n-1]\;-y[n-2]\cdots-y[n-n\alpha]\;\middle|\;u[n-1]\;u[n-2]\cdots u[n-n\beta]\right]\\ \tilde{\boldsymbol\theta}^T\overset{def}{=}\left[\tilde a_1\;\tilde a_2\cdots\tilde a_{n\alpha}\;\middle|\;\tilde b_1\;\tilde b_2\cdots\tilde b_{nb}\right]\end{cases}\quad\forall n\in\mathbb{N}^*$$

MCMMP sau MVI

$$\tilde{\boldsymbol\theta}_N=\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\tilde{\boldsymbol\psi}[n]\tilde{\boldsymbol\varphi}^T[n]\right)^{-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\tilde{\boldsymbol\psi}[n]y[n]\right)$$

notaţie unificatoare: $\begin{cases}\tilde{\boldsymbol\varphi}[n] & \text{vectorul regresorilor}\\ \tilde{\boldsymbol\zeta}[n] & \text{vectorul instrumentelor}\end{cases}$

- Modelul aproximant permite estimarea zgomotului perturbator al procesului original:

$$v[n]\cong y[n]-\tilde{\boldsymbol\varphi}^T[n]\tilde{\boldsymbol\theta}_N=\tilde A_N(q^{-1})y[n]-\tilde B_N(q^{-1})u[n]\overset{def}{=}\boxed{\tilde\varepsilon\left[n,\tilde{\boldsymbol\theta}_N\right]}$$

eroare de predicţie cu un pas (diferenţa dintre datele utile măsurate şi cele prognozate folosind modelul de identificare)

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol\varphi}^T[n]\overset{def}{=}\Big[-y[n-1]\;-y[n-2]\cdots-y[n-na]\;&\ldots\\ \ldots\;u[n-1]\;u[n-2]\cdots u[n-nb]\;\Big|\;&\ldots\\ \ldots\;\tilde\varepsilon\left[n-1,\tilde{\boldsymbol\theta}_N\right]\tilde\varepsilon\left[n-2,\tilde{\boldsymbol\theta}_N\right]\cdots\tilde\varepsilon\left[n-nc,\tilde{\boldsymbol\theta}_N\right]\Big],&\quad\forall n\in\mathbb{N}^*.\end{aligned}$$

☝ Vectorul estimat al regresorilor.

❹ Metode de identificare şi validare

❹.❺ Metoda Celor Mai Mici Pătrate Extinsă

② Estimarea directă a parametrilor modelului ARMAX folosind vectorul aproximativ al regresorilor (din etapa precedentă).

MCMMPE

$$\hat{\boldsymbol\theta}_N = \left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\hat{\varphi}[n]\hat{\varphi}^T[n]\right)^{-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\hat{\varphi}[n]y[n]\right)$$ (parametri estimaţi)

$$\mathcal{V}\left(\hat{\boldsymbol\theta}_N\right) = \sum_{n=1}^{N}\left(y[n]-\hat{\varphi}^T[n]\hat{\boldsymbol\theta}_N\right)^2$$ (1/precizie)

$\gamma_N\hat{\lambda}_N^2$ ☜ Dacă perturbaţia este un zgomot alb cu dispersie necunoscută.

$\gamma_N \in \{N, N-na-nb-nc\}$

②' Estimarea indirectă a parametrilor modelului ARMAX folosind parametrii modelului ARX aproximant (din etapa precedentă).

$$\begin{cases}\dfrac{A^*(q^{-1})}{C^*(q^{-1})} = \sum_{k\geq 0}\alpha_k^* q^{-k} \cong \sum_{k=0}^{n\alpha}\alpha_k^* q^{-k} = \tilde{A}^*(q^{-1}) \\ \dfrac{B^*(q^{-1})}{C^*(q^{-1})} = \sum_{k\geq 0}\beta_k^* q^{-k} \cong \sum_{k=0}^{n\beta}\beta_k^* q^{-k} = \tilde{B}^*(q^{-1})\end{cases}$$

sugerează

$$\begin{cases}A(q^{-1}) = C(q^{-1})\tilde{A}(q^{-1}) \\ B(q^{-1}) = C(q^{-1})\tilde{B}(q^{-1})\end{cases}$$

Polinoamele necunoscute ***A***, ***B*** şi ***C*** ar trebui să rezulte prin identificarea coeficienţilor.

☹ Sistemul este însă incompatibil (are mai multe ecuaţii decît necunoscute).

$\min\{n\alpha, n\beta\} \gg \max\{na, nb, nc\}$

Ce se poate face?

Se caută o pseudo-soluţie, folosind tot MCMMP.

$$\tilde{\boldsymbol\Phi}\boldsymbol\theta = \tilde{\boldsymbol\rho}$$

☝ monică

$\in \mathbb{R}^{n\alpha+n\beta+2nc}$

$\in \mathbb{R}^{(n\alpha+n\beta+2nc)\times(na+nb+nc)}$

$$\hat{\boldsymbol\theta} = \left(\tilde{\boldsymbol\Phi}^T\tilde{\boldsymbol\Phi}\right)^{-1}\tilde{\boldsymbol\Phi}^T\tilde{\boldsymbol\rho}$$ (parametri estimaţi)

$$\mathcal{V}\left(\hat{\boldsymbol\theta}\right) = \tilde{\boldsymbol\rho}^T\tilde{\mathbf{Q}}\tilde{\boldsymbol\rho}$$ (1/precizie)

☝ Teorema 1

❹ Metode de identificare şi validare

❹.❺ Metoda Celor Mai Mici Pătrate Extinsă

Cît de precisă este această metodă?

Precizia este limitată din cauza a 4 surse de eroare:

- ➔ Trunchierea modelului ARX aproximant.
- ➔ Estimarea parametrilor modelului ARX aproximant.
- ➔ Estimarea valorilor perturbaţiei (adică a vectorului regresorilor modelului ARMAX).
- ➔ Estimarea parametrilor modelului ARMAX.

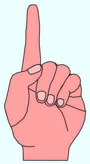
Consistenţa estimaţiilor?

Condiţiile de consistenţă sunt similare celor din Propoziţia 4 (pentru modelul ARX):

a. **modelul ARX aproximant este ideal, adică operează cu polinoame infinite (filtre de tip IIR);**

b. **semnalul de intrare este necorelat cu perturbaţia ($E\{u[n]v[m]\}=0$, $\forall\, n,m\in\mathbb{Z}$);**

c. **semnalul de intrare are un ordin de persistenţă suficient de mare, astfel încît matricea $E\{\varphi[n]\varphi^T[n]\}$ să fie inversabilă.**



În aplicaţiile practice, MCMMPE este utilizată atunci cînd nu se impune o precizie de estimare superioară sau ca metodă auxiliară capabilă să furnizeze iniţializări pentru alte metode mai precise.

❹ Metode de identificare şi validare

❹.❻ Metoda Minimizării Erorii de Predicție (MMEP)

- Aceasta este una dintre cele mai generale metode de identificare fundamentală.
- Ca şi MCMMPE, ea se adresează modelelor din clasele ARMAX şi RSISO care au vectorul regresorilor nemăsurabil, dar este mult mai precisă (şi mai complexă).
- Strategia generală de identificare cu ajutorul MMEP constă (tot) în două etape:

  ① Inițializarea algoritmului iterativ de la etapa următoare (eventual folosind MCMMPE).

  ② Determinarea iterativă a parametrilor originali ai modelului cu ajutorul unei metode bazate pe TO (de exemplu: MGN sau, mai general, MNR).
- În acest curs, vor fi utilizate metodele: MCMMPE şi MGN.

Dacă MGN este înlocuită de MNR

Metoda de Regresie Pseudo-Liniară (MRPL)

Minimizarea Erorii de Predicție?

Numele provine de la criteriul de optimizare, care este exprimat prin dispersia erorii dintre model şi proces pe orizontul de măsură.

$$\mathcal{V}_N(\boldsymbol{\theta}) \overset{def}{=} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\varepsilon^2[n,\boldsymbol{\theta}]$$

$\forall\,\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{R}^{n\theta}$

Aşadar

Minimizarea criteriului pătratic revine la minimizarea dispersiei erorii de predicție pe orizontul de măsură.

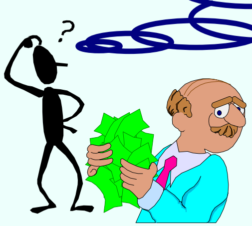
Eroare de predicție (cu un pas)

$$\varepsilon[n,\boldsymbol{\theta}] = y[n] - \boldsymbol{\varphi}^T[n]\boldsymbol{\theta}$$

$\forall\, n\in\mathbb{N}^*$

valoare prognozată (predictată) folosind modelul de identificare

☝ În cazul modelelor de regresie liniară.



Şi totuşi… de unde provine numele de “eroare de predicție”?

Pentru a genera prin simulare valoarea curentă a ieşirii procesului, sunt utilizate numai date măsurate la momente anterioare celui curent.

☝ A se vedea cum arată vectorul regresorilor.

❹.❻ Metoda Minimizării Erorii de Predicţie

Algoritmul generic al Minimizării Erorii de Predicţie

Date de intrare

- $\mathcal{D}_N = \{(u[n], y[n])\}_{n\in\overline{1,N}}$ (date intrare-ieşire măsurate)
- $\varepsilon = f[n,\boldsymbol{\theta}]$ (expresia erorii de predicţie, cel puţin derivabile)
- $\eta > 0$ (prag de precizie)

Iniţializare

- $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,0} \in \mathbb{R}^{n\theta}$ ➔ evaluat cu ajutorul MCMMPE
- $\alpha_0 \in \mathbb{R}^*$ ➔ ales fie arbitrar, fie cu ajutorul unui algoritm specific
- $k = 0$ ➔ indicele iterativ iniţial

Buclă iterativă

☝ Se utilizează iteraţia specifică din cadrul MGN.

① Se reactualizează aproximaţia optimului

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k+1} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k} - \alpha_k \underbrace{\left[\sum_{n=1}^{N} \nabla\varepsilon[n,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}]\left[\nabla\varepsilon[n,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}]\right]^T\right]^{-1}}_{\mathbf{R}_{N,k}^{-1}} \underbrace{\left[\sum_{n=1}^{N} \varepsilon[n,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}]\nabla\varepsilon[n,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}]\right]}_{\mathbf{r}_{N,k}}$$

② Se reactualizează pasul variabil

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k + \frac{\mathbf{r}_{N,k+1}^T \mathbf{R}_{N,k}^{-1} \mathbf{r}_{N,k}}{\mathbf{r}_{N,k}^T \mathbf{R}_{N,k}^{-1} \mathbf{R}_{N,k+1} \mathbf{R}_{N,k}^{-1} \mathbf{r}_{N,k}}$$

Test: $|\alpha_k| \cdot \left\|\mathbf{R}_{N,k}^{-1}\mathbf{r}_{N,k}\right\| < \eta$

NU: $k \leftarrow k+1$ (se revine la ①)

DA: **Date de ieşire**

- $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k+1}$ ➔ aproximaţia de precizie η
- $k+1$ ➔ numărul de iteraţii efectuate

❹ Metode de identificare şi validare

❹.❻ Metoda Minimizării Erorii de Predicție

MMEP aplicată modelului general de tip ARMAX

$\mathcal{P}(\theta^*)$

$$A^*(q^{-1})y[n] = B^*(q^{-1})u[n] + C^*(q^{-1})v[n] \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \Leftrightarrow \quad y[n] = \boldsymbol{\varphi}^T[n]\boldsymbol{\theta}^* + v[n] \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$\mathcal{M}(\theta)$

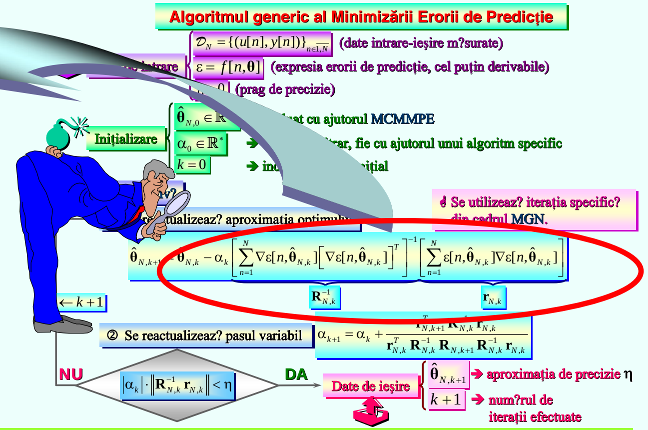
$$A(q^{-1})y[n] = B(q^{-1})u[n] + C(q^{-1})\varepsilon[n,\boldsymbol{\theta}] \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \Leftrightarrow \quad y[n] = \boldsymbol{\varphi}^T[n]\boldsymbol{\theta} + \varepsilon[n,\boldsymbol{\theta}] \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

eroarea de predicție cu un pas

Problema este de a determina valorile erorii de predicție și ale gradientului acesteia pentru iterația curentă.

$$\mathbf{R}_{N,k} \overset{def}{=} \sum_{n=1}^{N} \nabla\varepsilon[n,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}]\left[\nabla\varepsilon[n,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}]\right]^T$$

$$\mathbf{r}_{N,k} \overset{def}{=} \sum_{n=1}^{N} \varepsilon[n,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}]\nabla\varepsilon[n,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}]$$



Ar putea fi utilizată ecuația modelului de identificare, cu parametrii curent estimați.

$$\hat{A}_{N,k}(q^{-1})y[n] = \hat{B}_{N,k}(q^{-1})u[n] + \hat{C}_{N,k}(q^{-1})\varepsilon\left[n,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}\right] \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

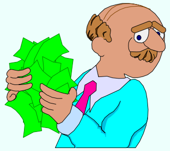
$$\begin{aligned}\varepsilon[n,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}] = y[n] &+ \hat{a}_{1,k}^N y[n-1] + \cdots + \hat{a}_{na,k}^N y[n-na] - \\ &- \hat{b}_{1,k}^N u[n-1] - \cdots - \hat{b}_{nb,k}^N u[n-nb] - \\ &- \hat{c}_{1,k}^N \varepsilon\left[n-1,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}\right] - \cdots - \hat{c}_{nc,k}^N \varepsilon\left[n-nc,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}\right] \quad \forall n \in \mathbb{N}^*\end{aligned}$$

Inițializare cauzală

$$\varepsilon[n,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}] = u[n] = y[n] = 0 \quad \forall n \le 0$$

☝ Ecuație recurentă pentru determinarea erorii de predicție.

MMEP aplicată modelului general de tip ARMAX (continuare)



Nimic nu împiedică **derivarea ecuației** care produce relația recursivă a erorii de predicție.

$$\hat{A}_{N,k}(q^{-1})y[n] = \hat{B}_{N,k}(q^{-1})u[n] + \hat{C}_{N,k}(q^{-1})\varepsilon\left[n,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}\right] \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$$

∇

$$C_{N,k}(q^{-1})\frac{\partial}{\partial a_i}\varepsilon\left[n,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}\right] = y[n-i] \quad \forall\, i \in \overline{1,na}$$

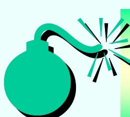
$$\frac{\partial}{\partial a_i}\varepsilon\left[n,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}\right] = y[n-i] - \hat{c}_{1,k}^{N}\frac{\partial}{\partial a_i}\varepsilon\left[n-1,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}\right] - \cdots - \hat{c}_{nc,k}^{N}\frac{\partial}{\partial a_i}\varepsilon\left[n-nc,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}\right] \quad \forall\, i \in \overline{1,na}$$

$$C_{N,k}(q^{-1})\frac{\partial}{\partial b_j}\varepsilon\left[n,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}\right] = -u[n-j] \quad \forall\, j \in \overline{1,nb}$$

$$\frac{\partial}{\partial b_j}\varepsilon\left[n,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}\right] = -u[n-j] - \hat{c}_{1,k}^{N}\frac{\partial}{\partial b_j}\varepsilon\left[n-1,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}\right] - \cdots - \hat{c}_{nc,k}^{N}\frac{\partial}{\partial b_j}\varepsilon\left[n-nc,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}\right] \quad \forall\, j \in \overline{1,nb}$$

☝ **Ecuații recurente pentru determinarea componentelor gradientului.** $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$

$$C_{N,k}(q^{-1})\frac{\partial}{\partial c_l}\varepsilon[n,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}] = -\varepsilon[n-l,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}] \quad \forall\, l \in \overline{1,nc}$$



Inițializare cauzală

$$\nabla\varepsilon[n,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}] = \varepsilon[n,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}] = u[n] = y[n] = 0 \quad \forall\, n \le 0$$

$$\frac{\partial}{\partial c_l}\varepsilon\left[n,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}\right] = -\varepsilon\left[n-l,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}\right] - \hat{c}_{1,k}^{N}\frac{\partial}{\partial c_l}\varepsilon\left[n-1,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}\right] - \cdots - \hat{c}_{nc,k}^{N}\frac{\partial}{\partial c_l}\varepsilon\left[n-nc,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}\right] \quad \forall\, l \in \overline{1,nc}$$

MMEP aplicată modelului general de tip ARMAX (continuare)

Exemplu Primele 3 iteraţii ale relaţiilor recursive la pasul curent de aproximare $k \in \mathbb{N}$

$n = 1$

$$\varepsilon\left[1,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}\right] = y[1] \qquad \frac{\partial}{\partial a_i}\varepsilon\left[1,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}\right] = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial b_j}\varepsilon\left[1,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}\right] = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial c_l}\varepsilon\left[1,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}\right] = 0$$

$n = 2$

$$\varepsilon\left[2,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}\right] = y[2] + \hat{a}_{1,k}^N y[1] - \hat{b}_{1,k}^N u[1] - \hat{c}_{1,k}^N \varepsilon\left[1,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}\right] = = y[2] + \left(\hat{a}_{1,k}^N - \hat{c}_{1,k}^N\right) y[1] - \hat{b}_{1,k}^N u[1]$$

$$\frac{\partial}{\partial b_j}\varepsilon\left[2,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}\right] = -u[2-j] - \hat{c}_{1,k}^N \frac{\partial}{\partial b_j}\varepsilon\left[1,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}\right] = -u[2-j]$$

$$\frac{\partial}{\partial a_i}\varepsilon\left[2,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}\right] = y[2-i] - \hat{c}_{1,k}^N \frac{\partial}{\partial a_i}\varepsilon\left[1,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}\right] = y[2-i]$$

$$\frac{\partial}{\partial c_l}\varepsilon\left[2,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}\right] = -\varepsilon\left[2-l,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}\right] - \hat{c}_{1,k}^N \frac{\partial}{\partial c_l}\varepsilon\left[1,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}\right] = = -\varepsilon\left[2-l,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}\right]$$

$n = 3$

$$\varepsilon\left[3,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}\right] = y[3] + \hat{a}_{1,k}^N y[2] + \hat{a}_{2,k}^N y[1] - \hat{b}_{1,k}^N u[2] - \hat{b}_{2,k}^N u[1] - - \hat{c}_{1,k}^N \varepsilon\left[2,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}\right] - \hat{c}_{2,k}^N \varepsilon\left[1,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial a_i}\varepsilon\left[3,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}\right] = y[3-i] - \hat{c}_{1,k}^N \frac{\partial}{\partial a_i}\varepsilon\left[2,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}\right] - - \hat{c}_{2,k}^N \frac{\partial}{\partial a_i}\varepsilon\left[1,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}\right] = y[3-i] - \hat{c}_{1,k}^N y[2-i]$$

$$\frac{\partial}{\partial b_j}\varepsilon\left[3,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}\right] = -u[3-j] - \hat{c}_{1,k}^N \frac{\partial}{\partial b_j}\varepsilon\left[2,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}\right] - \hat{c}_{2,k}^N \frac{\partial}{\partial b_j}\varepsilon\left[1,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}\right] = = -u[3-j] + \hat{c}_{1,k}^N u[2-j]$$

$$\frac{\partial}{\partial c_l}\varepsilon\left[3,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}\right] = -\varepsilon\left[3-l,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}\right] - \hat{c}_{1,k}^N \frac{\partial}{\partial c_l}\varepsilon\left[2,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}\right] - \hat{c}_{2,k}^N \frac{\partial}{\partial c_l}\varepsilon\left[1,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}\right] = = -\varepsilon\left[3-l,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}\right] + \hat{c}_{1,k}^N \varepsilon\left[2-l,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}\right]$$

1/precizie

$$\mathcal{V}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}\right) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \varepsilon^2\left[n,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k}\right]$$

$\gamma_N \hat{\lambda}_{N,k}^2$ $\quad v \in \mathcal{za}(0,\lambda^2)$

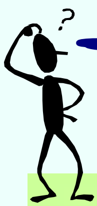
MMEP aplicată modelului general de tip ARMAX (continuare)

Cît de precisă este această metodă?

Precizia este ridicată, dar afectată de 2 surse importante de eroare:

➔ Inițializările parametrilor şi ale relațiilor recursive prin intermediul cărora se estimează eroarea de predicție şi gradientul.

➔ Aproximarea matricii Hessiene operată în cadrul MGN.



Consistența estimațiilor?

Teorema 5 (Cosnsistența estimației oferite de MMEP pentru modelele ARMAX)

Se consideră că modelul ARMAX[na,nb,nc] verifică următoarele ipoteze:

a. **modelul este parsimonios:** $(A^*, B^*, C^*) = 1$ **(polinoamele adevărate sunt coprime);**

b. **intrarea** u **este un semnal de stimul cu ordin de persistență suficient de mare astfel încît matricea** $E\{\varphi[n]\varphi^T[n]\}$ **să fie inversabilă;**

c. **perturbația** v **aparține clasei** $za(0,\lambda^2)$ **(adică este un zgomot alb de medie nulă şi dispersie necunoscută** λ^2**), nefiind corelată cu semnalul de stimul:**

$$E\{u[n]v[m]\} = 0 \,, \quad \forall\, n,m \in \mathbb{N}^* .$$

Atunci estimațiile oferite de MMEP sunt convergente şi consistente.

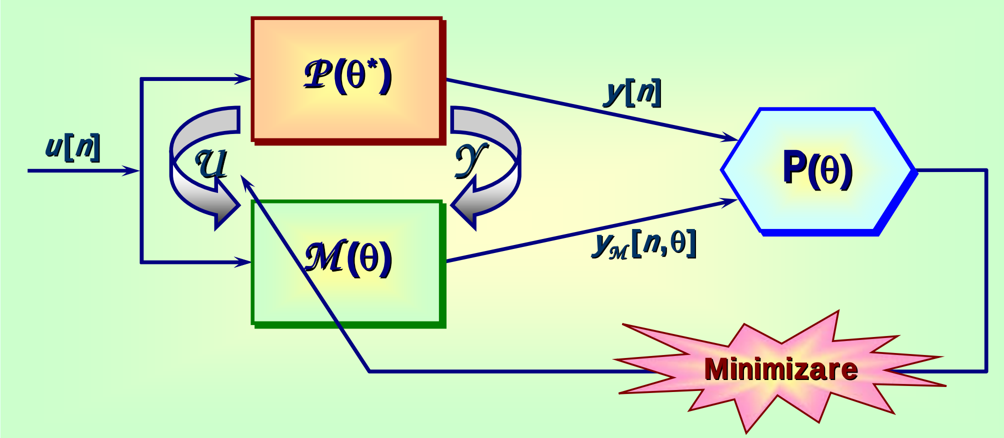
Mai precis:
$$\begin{cases} \lim\limits_{N\to\infty} \lim\limits_{k\to\infty} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,k} = \boldsymbol{\theta}^* \\ \lim\limits_{N\to\infty} \lim\limits_{k\to\infty} \hat{\lambda}^2_{N,k} = \lambda^2 \end{cases}$$

☝ Metoda funcționează corect şi în cazul zgomotelor colorate, dacă se consideră un model separat pentru acestea (de exemplu ARMA).

❹ Metode de identificare şi validare

❹.❼ Metode bazate pe Teoria Estimaţiei

Formularea problemei de identificare din perspectiva Teoriei Estimaţiei



$$\mathbf{P}(\theta) \overset{def}{=} E\{(\theta-\theta^*)(\theta-\theta^*)^T\} \in \mathbb{R}^{n\theta\times n\theta}$$

matricea de auto-covarianţă
a erorii de estimare

$$\hat{\theta}_N = \underset{\theta\in\mathcal{S}\subseteq\mathbb{R}^{n\theta}}{\operatorname{argmin}} \mathbf{P}(\theta)$$

☝ În sensul pozitiv (semi-)definirii.

☹ Matricea de auto-covarianţă a erorii de estimare este dificil, dacă nu imposibil de evaluat.

☹ Chiar dacă ar putea fi evaluată (vezi Teorema fundamentală a MCMMP),
ea depinde de paramerii adevăraţi (necunoscuţi).

$$\mathbf{P}\left(\hat{\theta}_N\right) \overset{def}{=} \lambda^2 \left(\sum_{n=1}^{N} \varphi[n]\varphi^T[n]\right)^{-1}$$

Şi atunci?...

Problema se poate relaxa prin înlocuirea matricii de auto-covarianţă cu alte criterii,
corelate (direct sau indirect) cu aceasta.

$$\mathcal{D} = \{(u[n], y[n])\}_{n\in\overline{1,N}}$$

date măsurate

$\hat{\theta}(\mathcal{D})$ ➔ Estimaţie evaluată plecînd de la setul de date măsurate.

$\hat{\theta}(\bullet)$ ➔ Estimator.

☝ Concept împrumutat şi metodelor
din afara domeniului TE.

❹ Metode de identificare şi validare

❹.❼ Metode bazate pe Teoria Estimaţiei

Metoda lui Bayes (MB)

- Aceasta este una dintre tehnicile cele mai cunoscute de **predicţie a valorilor unei variabile aleatoare**, **folosind diferite distribuţii de probabilitate asociate acesteia şi istoria valorilor sale**.
- În cadrul **IS**, variabila aleatoare ce trebuie predictată este **vectorul parametrilor necunoscuţi**.
- Densităţi de probabilitate asociate:

$p(\theta)$ ➔ **Densitatea de probabilitate a apariţiei vectorului θ (necondiţionată de setul de date măsurate).**

$p(\mathcal{D})$ ➔ **Densitatea de probabilitate a obţinerii setului de date $\mathcal{D}$ (necondiţionată de vectorul parametrilor).**

$p(\theta,\mathcal{D})$ ➔ **Densitatea de probabilitate a apariţiei vectorului θ şi obţinerii setului de date $\mathcal{D}$ în acelaşi experiment de identificare.**

$p(\theta|\mathcal{D})$ ➔ **Densitatea de probabilitate a apariţiei vectorului θ, condiţionată de setul de date $\mathcal{D}$ (adică estimat plecînd de la setul de date măsurate).**

$p(\mathcal{D}|\theta)$ ➔ **Densitatea de probabilitate a obţinerii setului de date $\mathcal{D}$, condiţionată de vectorul θ (adică prin simularea folosind modelul de identificare cu vectorul parametrilor).**

Problema lui Bayes ➔

$$\hat{\theta}(\mathcal{D}) = \underset{\theta\in\mathcal{S}\subseteq\mathbb{R}^{n\theta}}{\operatorname{argmax}}\, p(\theta|\mathcal{D})$$

☝ Se caută acel vector de parametri care are probabilitatea maximă de a fi estimat plecînd de la setul de date măsurate.