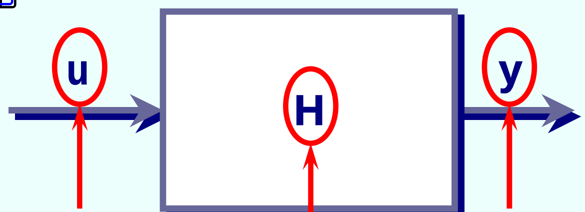
❷ Modele de identificare

❷.❷ Noțiuni de Statistică şi Prelucrare de Semnal

Caracterizarea în frecvenţă a sistemelor liniare discrete (continuare)

Problema convoluției

Sistem liniar



semnal de intrare — funcție de sistem — semnal de ieşire

$u \xrightarrow{*h} y \equiv u * h$

secvenţă pondere

$$\mathscr{F}(u*h) \equiv \mathscr{F}(y) \equiv$$

Transformata Z induce **Teoremele de convoluție** şi pentru **TF**

☞ **directă** $\mathscr{F}(u*h) \equiv \mathscr{F}(u)\mathscr{F}(h)$

$$\mathscr{F}(uh)(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} U(e^{j\varphi})H\left(e^{j(\omega-\varphi)}\right)d\varphi$$

☜ **inversă**

$\forall\,\omega \in \mathbb{R}$ — convoluție periodică

Soluțiile acestei probleme se numesc **Teoreme de convoluție**

☞ **Teorema directă**

☜ **Teorema inversă**

O pereche de **Teoreme de convoluție** provine de la **Transformata Z**

Teorema directă

$$\mathscr{Z}(u*h) \equiv \mathscr{Z}(u)\mathscr{Z}(h) \equiv \mathscr{Z}(y)$$

$$Y(z) = \boxed{H(z)}U(z)$$

funcție de transfer

Teorema inversă

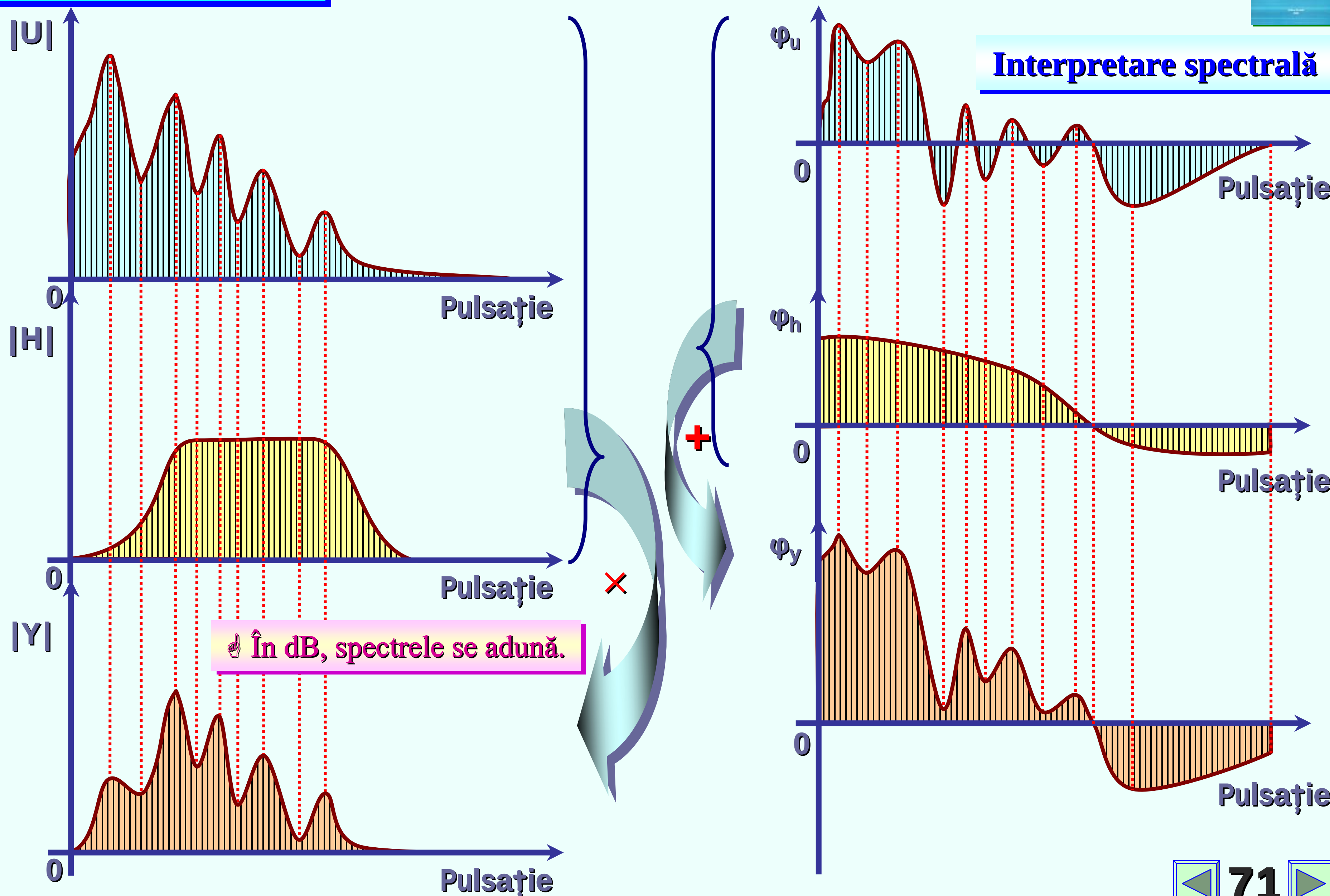
$$\mathscr{Z}(xy)(z) = V(z) = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\gamma\subseteq\mathcal{A}} X(\zeta)Y\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}$$

☝ Mai puțin importante în **IS**.

Caracterizarea în frecvenţă a sistemelor liniare discrete (continuare)

❷ Modele de identificare

❷.❷ Noţiuni de Statistică şi Prelucrare de Semnal



❷ Modele de identificare

❷.❷ Noțiuni de Statistică şi Prelucrare de Semnal

- Deşi în matematică există extensii ale definiției TF la mulțimi de semnale stocastice, acestea sunt dificil de utilizat în practică şi moştenesc caracterul nedeterminist.
- Principalul obiectiv al modelării statistice constă în caracterizarea entităților nedeterministe cu ajutorul unor concepte avînd natură deterministă.
- Caracterizarea în frecvență a proceselor stocastice se obține folosind reprezentarea în frecvență a secvențelor de (auto-)covarianță (mărimi deterministe) în locul setului de date măsurate (nedeterministe).

$$\underbrace{E\{y[n]\} \quad r_y[k] \quad r_{u,y}[k]}_{\text{Mărimi deterministe}}$$

Densitate spectrală încrucişată (de putere)

$$\phi_{u,y}(\omega) \overset{def}{=} \mathscr{F}(r_{u,y})(e^{j\omega}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} r_{u,y}[k]e^{-j\omega k} \quad \forall\,\omega\in\mathbb{R}$$

TF a secvenței de covarianță (încrucişată)

Densitate spectrală (de putere) (pură)

$$\phi_y(\omega) \overset{def}{=} \mathscr{F}(r_y)(e^{j\omega}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} r_y[k]e^{-j\omega k} \quad \forall\,\omega\in\mathbb{R}$$

TF a secvenței de auto-covarianță

- Secvențele de (auto-)covarianță pot fi recuperate cu ajutorul OF inverşi:

$$r_{u,y}[k] = \mathscr{F}^{-1}(\phi_{u,y})[k] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \phi_{u,y}(\omega)e^{+j\omega k}\,d\omega \quad \forall\,k\in\mathbb{Z}$$

$$r_y[k] = \mathscr{F}^{-1}(\phi_y)[k] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \phi_y(\omega)e^{+j\omega k}\,d\omega \quad \forall\,k\in\mathbb{Z}$$

❷ Modele de identificare

❷.❷ Noțiuni de Statistică şi Prelucrare de Semnal

- Ambele tipuri de densitate spectrală moştenesc o serie de proprietăți de la **OF**, dintre care **continuitatea** (indefinit derivabilitatea) şi **2π-periodicitatea** sunt evidente.

Proprietăți fundamentale ale densităților spectrale

➔ **Simetrie**

- **Densitatea spectrală încrucişată** are în general **valori complexe** şi verifică următoarea relație:

$$\phi_{u,y}(-\omega) = \phi_{y,u}(\omega) \in \mathbb{C} \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

se schimbă cu

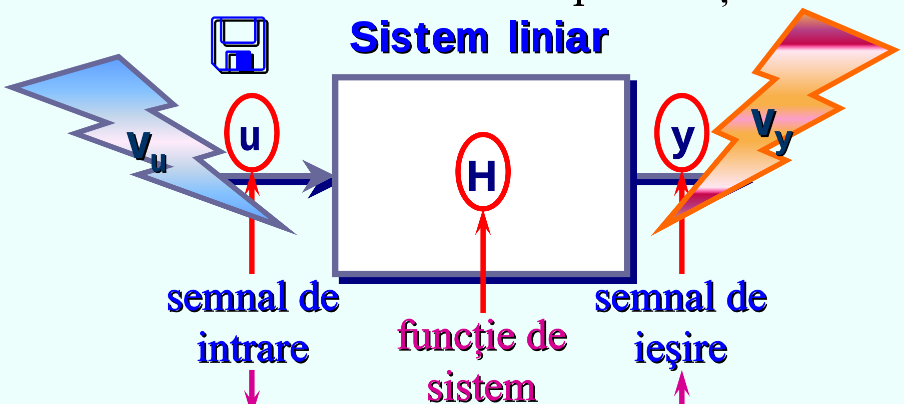
- **Densitatea spectrală pură** are **numai valori reale** şi este **simetrică**:

$$\phi_{y}(-\omega) = \phi_{y}(\omega) \in \mathbb{R} \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

Exerciții

➔ **Transferul densității spectrale prin sisteme liniare (discrete)**

- Această proprietate rezultă în urma încercării de a rezolva **problema convoluției** pentru sisteme liniare discrete afectate de perturbații nedeterministe atît la intrare cît şi la ieşire.



Problema convoluției

$$\phi_{y,u} \equiv f\big(\phi_u, \mathcal{F}(h)\big) \equiv ?$$

$$\phi_{y} \equiv g\big(\phi_u, \mathcal{F}(h)\big) \equiv ?$$

Răspunsul în frecvență al sistemului

$$u \xrightarrow{\ast h} y \equiv u * h \quad \text{(timp)}$$

Deterministă → secvență pondere

$$\mathcal{F}(y) \equiv \mathcal{F}(h)\mathcal{F}(u) \quad \text{(frecvență)}$$

Proprietăţi fundamentale ale densităţilor spectrale (continuare)

➔ Transferul densităţii spectrale prin sisteme liniare (discrete) (continuare)

- Dacă secvenţa pondere a sistemului are valori reale, atunci:

Exerciţiu

$$\phi_{y,u}(\omega) = H(e^{j\omega})\phi_u(\omega) \quad \forall\, \omega \in \mathbb{R}$$

$$\phi_y(\omega) = \left|H(e^{j\omega})\right|^2 \phi_u(\omega) \quad \forall\, \omega \in \mathbb{R}$$

Demonstraţie

Cum poate fi exprimată convoluţia $y \equiv h * u$ în termeni de corelaţie statistică ?

Folosind proprietăţile operatorului de mediere statistică.

- **Astfel, va fi mai întîi dedusă o relaţie între secvenţele de auto-covarianţă ale intrării şi ieşirii sistemului.**
- **Pentru aceasta, se pleacă de la definiţia secvenţei de auto-covarianţă a ieşirii.**

$$r_y[k] \overset{def}{=} E\{y[n]y[n-k]\} \overset{y \equiv h*u}{=} E\left\{\sum_{m\in\mathbb{Z}} h[m]u[n-m] \sum_{p\in\mathbb{Z}} h[p]u[n-k-p]\right\} =$$

sumele sunt absolut convergente

$$= E\left\{\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{p\in\mathbb{Z}} h[m]h[p]u[n-m]u[n-p-k]\right\} = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{p\in\mathbb{Z}} h[m]h[p]E\left\{u[n-m]u[n-p-k]\right\} =$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{p\in\mathbb{Z}} h[m]h[p]r_u[k+p-m] \quad , \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$

operatorul *E* este liniar

❷ Modele de identificare

❷.❷ Noțiuni de Statistică şi Prelucrare de Semnal

Proprietăți fundamentale ale densităților spectrale (continuare)

➔ Transferul densității spectrale prin sisteme liniare (discrete) (continuare)

$$\phi_y(\omega) = \left|H(\mathrm{e}^{j\omega})\right|^2 \phi_u(\omega) \quad \forall\, \omega \in \mathbb{R}$$

Demonstrație (continuare)

Aşadar $y \equiv h * u$ (nedeterministă) ⇒ $r_y[k] = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{p\in\mathbb{Z}} h[m]h[p]r_u[k+p-m]$ (deterministă) $\forall\, k \in \mathbb{Z}$

☝ Un fel de convoluție bidimensională.

- Se aplică acum definiția densității spectrale a ieşirii.

sumele sunt absolut convergente

$$\phi_y(\omega) \overset{def}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} r_y[k]\mathrm{e}^{-j\omega k} = \boxed{\sum_{k\in\mathbb{Z}}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{p\in\mathbb{Z}} h[m]h[p]r_u[k+p-m]\mathrm{e}^{-j\omega k} =$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{p\in\mathbb{Z}} h[m]h[p] \sum_{k\in\mathbb{Z}} r_u[\underbrace{k+p-m}_{n}]\mathrm{e}^{-j\omega k} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{p\in\mathbb{Z}} h[m]h[p] \underbrace{\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} r_u[n]\mathrm{e}^{-j\omega n}\right)}_{\phi_u(\omega)} \mathrm{e}^{+j\omega p}\,\mathrm{e}^{-j\omega m} =$$

$n \Leftrightarrow k = n - p + m$

$k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n \in \mathbb{Z}$

$$= \underbrace{\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} h[m]\mathrm{e}^{-j\omega m}\right)}_{H(\mathrm{e}^{j\omega})} \underbrace{\left(\sum_{p\in\mathbb{Z}} h[p]\mathrm{e}^{+j\omega p}\right)}_{H(\mathrm{e}^{-j\omega})} \phi_u(\omega) = \left|H(\mathrm{e}^{j\omega})\right|^2 \phi_u(\omega) \;,\quad \forall\, \omega \in \mathbb{R}.$$

$H(\mathrm{e}^{-j\omega}) = \overline{H(\mathrm{e}^{j\omega})}$ **Exercițiu**

secvența pondere are valori reale

❷ Modele de identificare

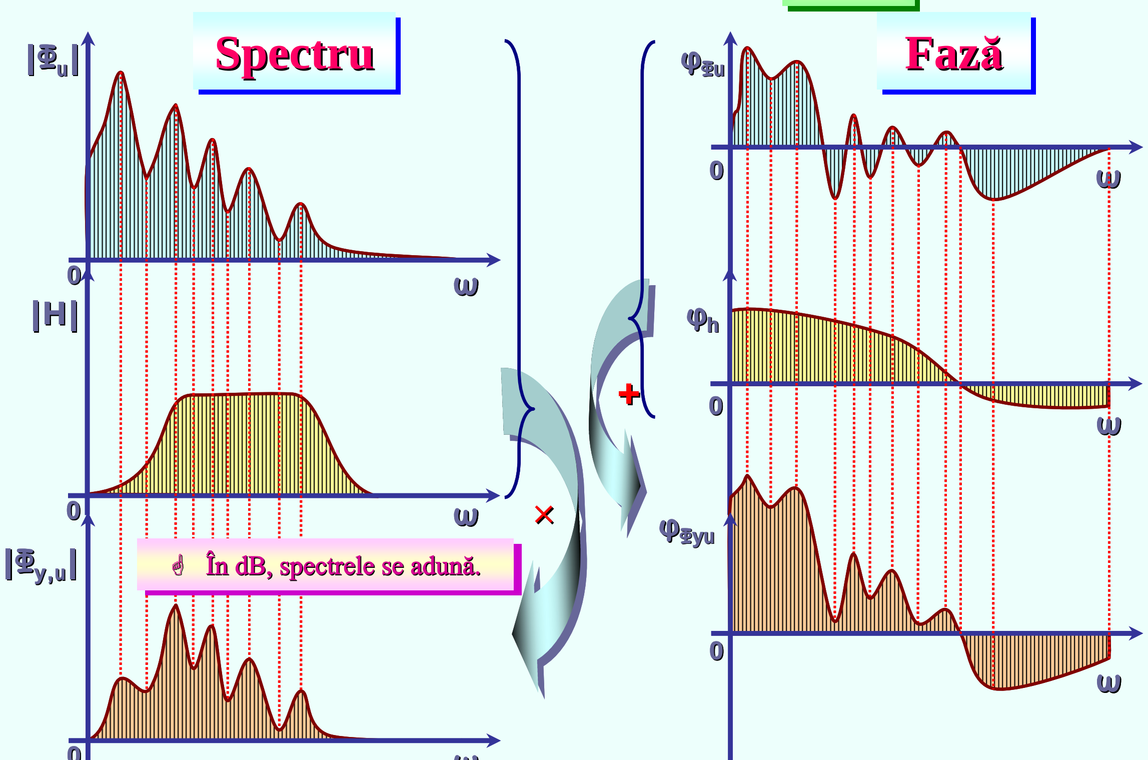
❷.❷ Noţiuni de Statistică şi Prelucrare de Semnal

Proprietăţi fundamentale ale densităţilor spectrale (continuare)

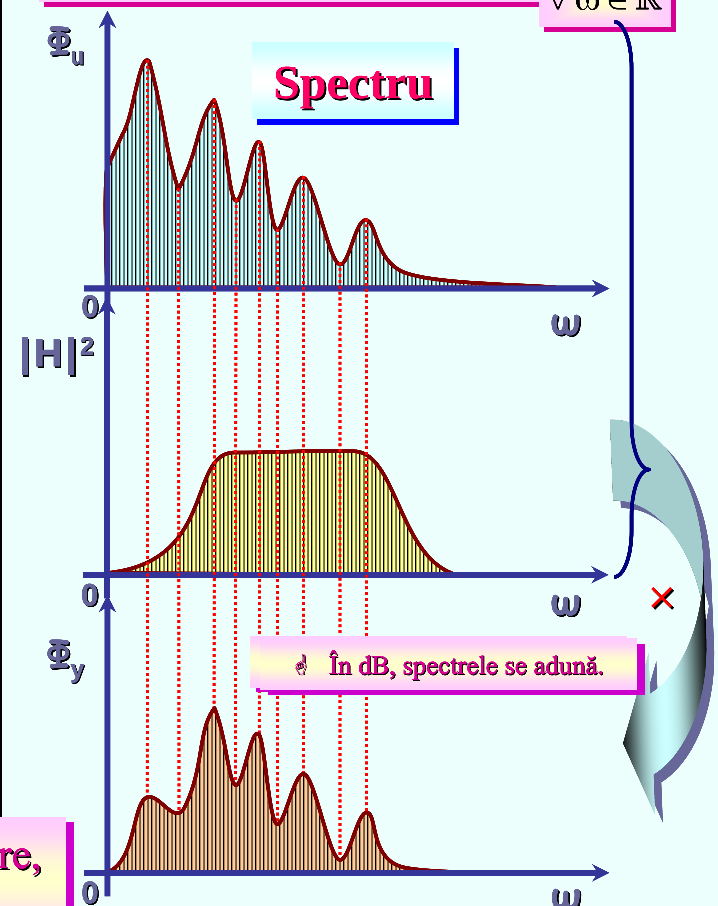
➔ **Transferul densităţii spectrale prin sisteme liniare (discrete) (continuare)**

- Interpretarea spectrală a celor două proprietăţi este similară celei din cazul determinist.

$$\phi_{y,u}(\omega) = H(e^{j\omega})\phi_u(\omega) \quad \forall\, \omega \in \mathbb{R}$$



$$\phi_{y}(\omega) = \left|H(e^{j\omega})\right|^2 \phi_u(\omega) \quad \forall\, \omega \in \mathbb{R}$$



☝ Prin transferul densităţii spectrale pure, se pierde informaţia de fază.

❷ Modele de identificare

❷.❷ Noţiuni de Statistică şi Prelucrare de Semnal

Proprietăţi fundamentale ale densităţilor spectrale (continuare)

➔ Pozitiv (semi-)definirea densităţii spectrale pure

$$\phi_y(\omega) \geq 0 \quad \forall\, \omega \in \mathbb{R}$$

• Această proprietate justifică denumirea de **densitate spectrală**.

$$\mathcal{E}(y) \overset{def}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |y[n]|^2$$

Distribuţia energiei semnalului stocastic peste axa frecvenţei

Demonstraţie

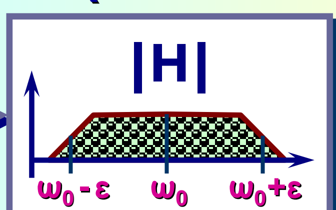
- **Raţionament de tip reducere la absurd.**
- **Se presupune, prin absurd, că densitatea spectrală pură nu este neapărat nenegativă.**
- **Atunci există cel puţin o pulsaţie** $\omega_0 \in [-\pi, +\pi]$ **pentru care** $\phi_y(\omega_0) < 0$ **.**

Densitatea spectrală este o funcţie continuă. ⇒ **Densitatea spectrală ia valori negative pe o întreagă vecinătate a lui** ω_0 **:**

$$\phi_y(\omega) < 0,\ \forall\, \omega \in [\omega_0 - \varepsilon, \omega_0 + \varepsilon] \quad (\varepsilon > 0)$$

- **În consecinţă, se poate construi un filtru ideal, de tip trece-bandă (FTB), care să izoleze banda de pulsaţii** $[\omega_0 - \varepsilon, \omega_0 + \varepsilon]$ **din conţinutul în frecvenţă al semnalului** y**.**

Filtru (trece-bandă)



$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1 & , \text{ pentru } \omega \in [\omega_0 - \varepsilon, \omega_0 + \varepsilon] \\ 0 & , \text{ pentru } \omega \notin [\omega_0 - \varepsilon, \omega_0 + \varepsilon] \end{cases}$$

- **Dispersia semnalului de ieşire este:**

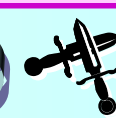
$$\sigma_{y_f}^2 = r_{y_f}[0] = \mathscr{F}^{-1}(\phi_{y_f})[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \phi_{y_f}(\omega)\,d\omega =$$

Transferul densităţii spectrale prin sisteme liniare

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |H(e^{j\omega})|^2 \phi_y(\omega)\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_0-\varepsilon}^{\omega_0+\varepsilon} \underbrace{\phi_y(\omega)}_{<0}\,d\omega \,.$$

$$\sigma_{y_f}^2 < 0$$

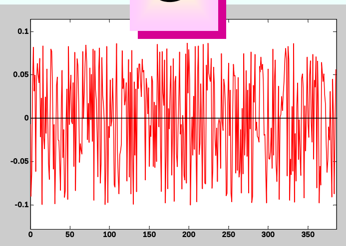
☝ Absurd.



❷ Modele de identificare

❷.❷ Noțiuni de Statistică şi Prelucrare de Semnal

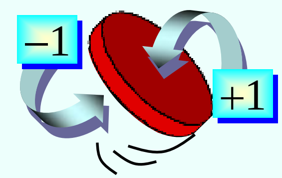
Zgomot alb e — Proces stocastic total necorelat, impredictibil.



- Utilizat pentru a construi **modele stocastice ale perturbațiilor** care afectează partea utilă a datelor măsurate din alte procese şi care **nu pot fi măsurate**.
- Modele deterministe sunt arareori potrivite pentru a caracteriza sau estima valorile unei perturbații stocastice.

Exemplu — Un proces stocastic frecvent utilizat în Statistică: **aruncarea monedei**

- De fiecare dată cînd se efectuează un experiment de aruncare a monedei, se obține un set de date de ieşire diferit, adică o **realizare a procesului**.
- Fiecare realizare este **independentă** de celelalte, avînd totodată **media nulă**.



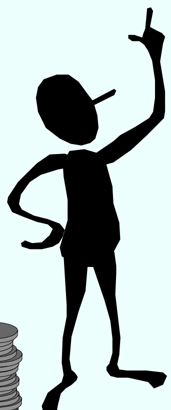
$\{y[n]\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \{-1,+1\}$

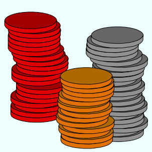
Propoziția 1

Nu există **nici o corelație** între evenimente (aruncări ale monedei).

Procesul poate fi descris de o secvență de **variabile aleatoare necorelate**, **identic distribuite**, **de medie nulă** şi **dispersie unitară**.

$\lambda = 1$





Ecuații care descriu statistica zgomotului alb în domeniul **timpului**.

$$E\{y[n]\} = 0$$

$$r_y[k] \stackrel{def}{=} E\{y[n]y[n-k]\} = \lambda^2\delta_0[k] = \begin{cases} \lambda^2 & , \text{ pentru } k = 0 \\ 0 & , \text{ pentru } k \neq 0 \end{cases}$$

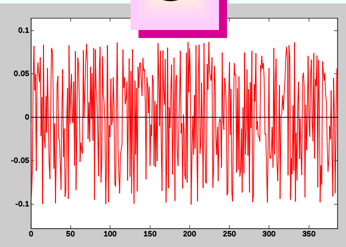
În domeniul **frecvenței**.

$$\phi_y(\omega) = \lambda^2 \quad \forall\,\omega\in\mathbb{R}$$

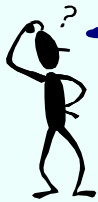
☝ **Toate frecvențele sunt prezente în spectrul zgomotului alb, cu aceeaşi putere.**

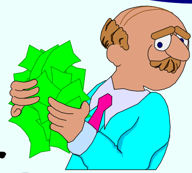
❷ Modele de identificare

❷.❷ Noţiuni de Statistică şi Prelucrare de Semnal

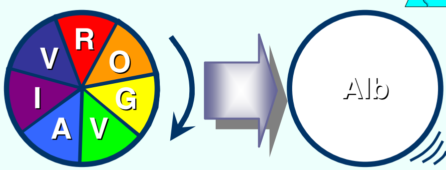


e





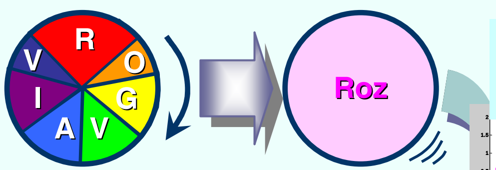
De ce ”alb”?



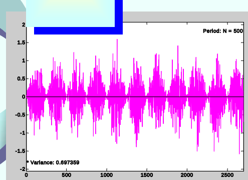
Prin analogie cu o experienţă de Fizică elementară.

- Un disc este împărţit în 7 sectoare egale, fiecare fiind colorat cu una dintre culorile fundamentale ale spectrului luminos.
- Culorile sunt ordonate în ordinea descrescătoare a lungimii de undă caracteristice din spectrul vizibil.
- Rotirea discului cu o anumită viteză conduce la o singură culoare, cea albă, datorită recombinării culorilor fundamentale egal cantitativ prezente pe disc.
- Dacă unuia dintre sectoarele discului i se modifică aria, atunci culoarea discului rotit nu mai rămîne albă, fiind dominată de culoarea fundamentală corespunzătoare ariei mai mari.

☝ Analog, spectrul zgomotului alb conţine toate frecvenţele posibile, cu aceeaşi putere.



v

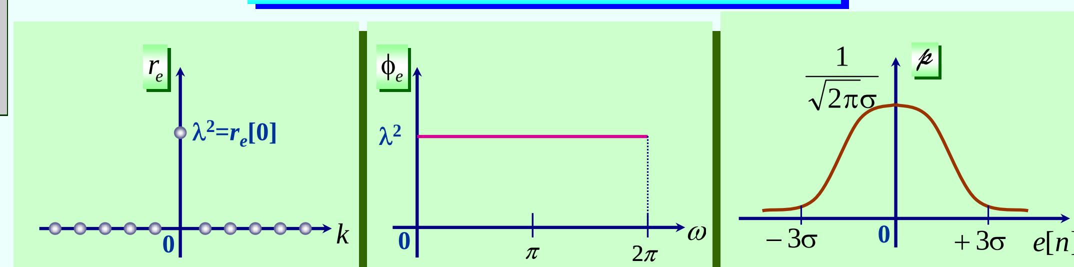


Zgomot colorat

Proces stocastic corelat, cu un anumit grad de predictibilitate, obţinut adesea prin filtrarea zgomotului alb.

☝ Spectrul zgomotului colorat este neuniform şi pune în evidenţă frecvenţele (”culorile”) dominante.

Caracteristicile zgomotului alb



Timp | Frecvenţă | Distribuţie Gaussiană

$$za(\bar{e}, \lambda^2)$$

⇐ Clasa zgomotelor albe de medie $\bar{e}$ şi dispersie λ^2.