❷ Modele de identificare

❷.❷ Noţiuni de Statistică şi Prelucrare de Semnal

Proprietăţi statistice dezirabile ale estimaţiilor de parametri necunoscuţi

- Deoarece datele pe baza cărora se determină modele de identificare sunt afectate de perturbații stocastice, **parametrii estimaţi au de asemenea o natură stocastică**.

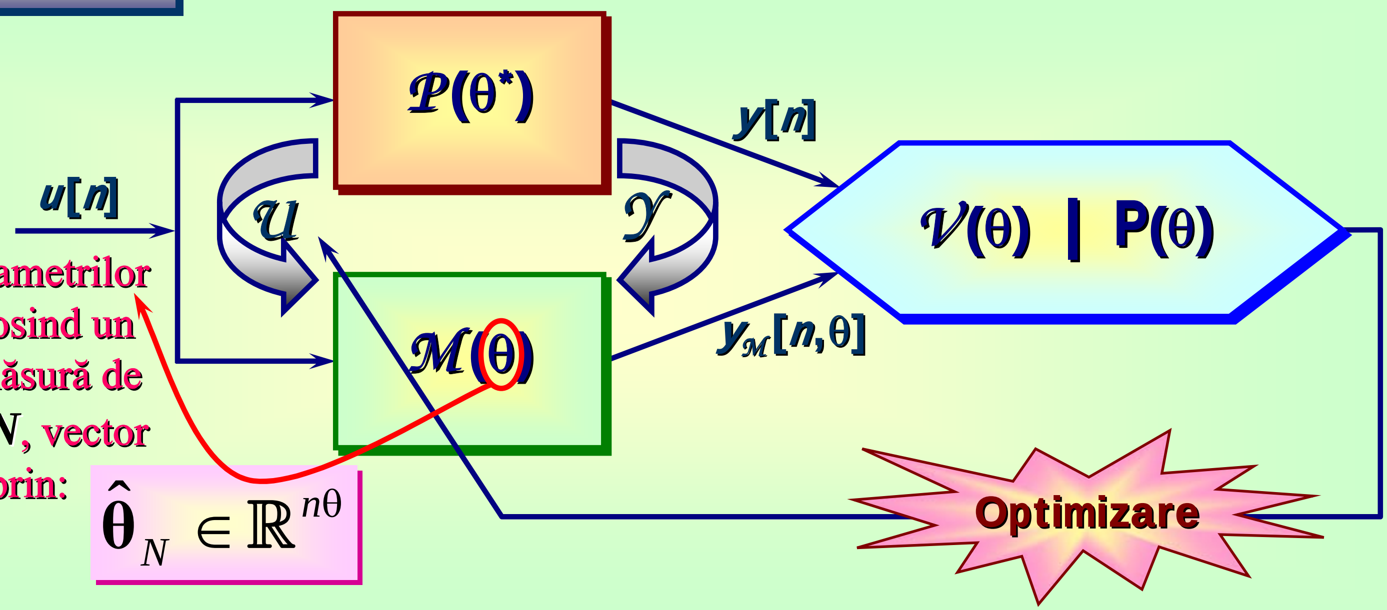
Adecvanța parametrilor estimați ai unui model de identificare este descrisă prin intermediul a **3 proprietăţi**.

Nedeviere (asimptotică) – abaterea față de media statistică

Consistență – convergența statistică

Eficiență – viteza de convergență

Contextul de lucru

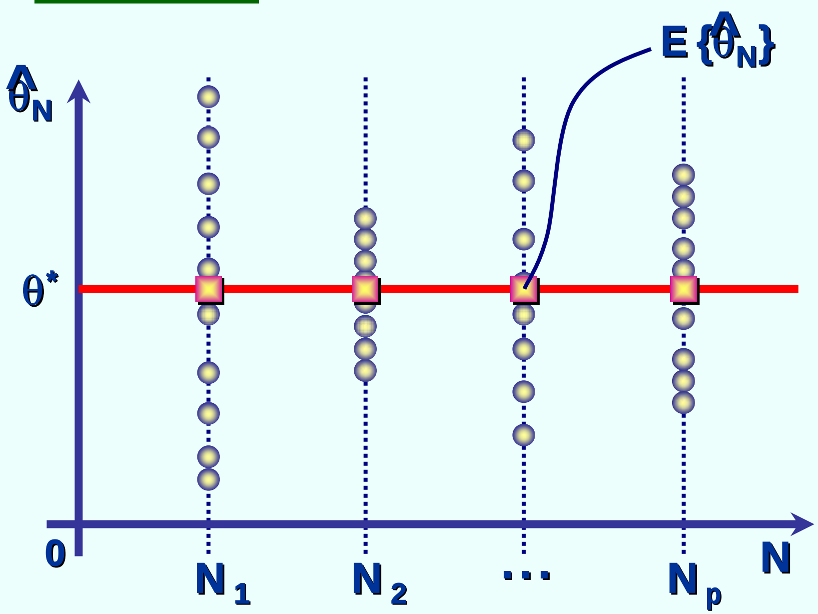


Vectorul parametrilor estimați folosind un orizont de măsură de dimensiune N, vector renotat prin: $\hat{\theta}_N \in \mathbb{R}^{n\theta}$

Proprietăţi statistice dezirabile ale estimaţiilor de parametri necunoscuţi (continuare)

Nedeviere ⇒ $E\{\hat{\theta}_N\} = \theta^*$ $\forall N \in \mathbb{N}^*$

Exemplu — Cazul parametrului scalar



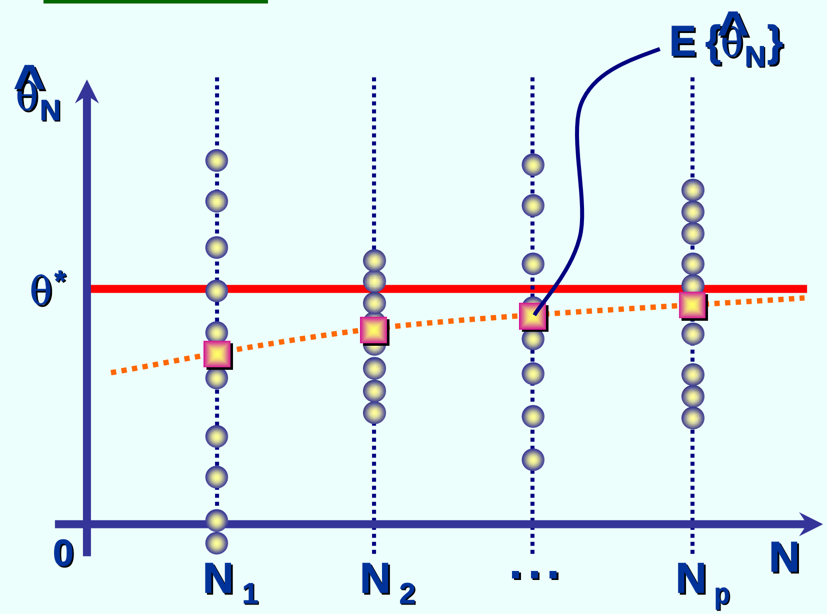
☝ Proprietate destul de restrictivă şi dificil de verificat în practică.

- Dacă media statistică a parametrilor estimaţi nu verifică această proprietate, atunci estimaţia se consideră **deviată**.

Proprietate relaxată

Nedeviere asimptotică ⇒ $\lim\limits_{N\to\infty} E\{\hat{\theta}_N\} = \theta^*$

Exemplu — Cazul parametrului scalar



Deviaţie

$$\Delta_N \stackrel{def}{=} \theta^* - E\{\hat{\theta}_N\} \quad \forall N \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{N\to\infty} E\{\hat{\theta}_N\} = \theta^* \iff \lim_{N\to\infty} \Delta_N = 0$$

Proprietăţi statistice dezirabile ale estimaţiilor de parametri necunoscuţi (continuare)

Consistenţă

$$\lim_{N\to\infty} \hat{\theta}_N = \theta^*$$

Exemplu — Cazul parametrului scalar

- Relevă maniera în care se grupează estimaţiile în jurul mediei (sau al valorilor adevărate).
- Raportul dintre consistenţă şi nedeviere (asimptotică) este ilustrat de următoarea proprietate:

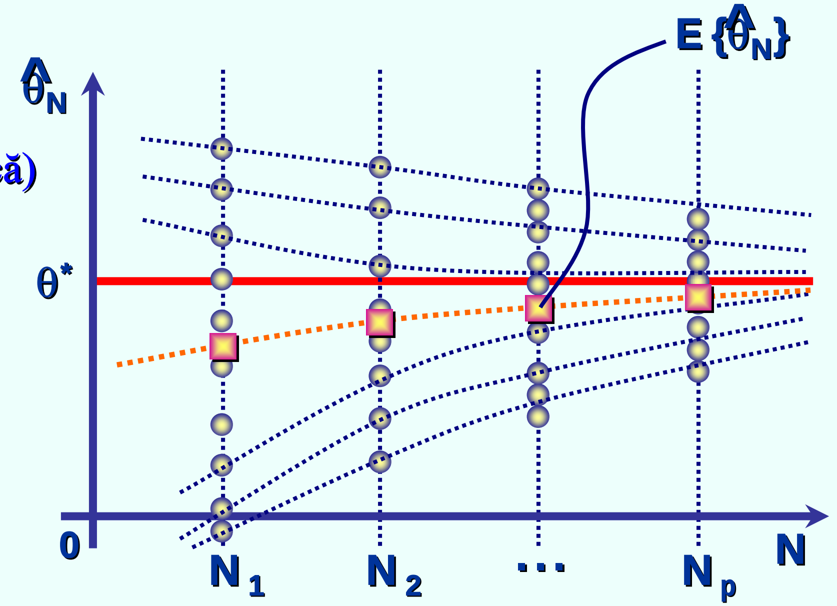
Exerciţiu ➔ Estimaţiile consistente pot fi deviate, dar sunt întotdeauna asimptotic nedeviate.

(cleştele consistenţei)

- O altă proprietate interesantă este legată de conceptul de varianţă a erorii de estimare.

$$\sigma^2\left(\hat{\theta}_N\right) \overset{def}{=} E\left\{\left\|\theta - \theta^*\right\|^2\right\} \in \mathbb{R}$$

☝ Produsul interior (scalar).



☝ Toate realizările estimaţiilor converg la valoarea adevărată.

Exerciţiu

$$\lim_{N\to\infty} \hat{\theta}_N = \theta^* \Leftrightarrow \lim_{N\to\infty} \mathbf{P}\left(\hat{\theta}_N\right) = 0$$

Matrice de auto-covarianţă

$$\mathbf{P}(\theta) \overset{def}{=} E\{(\theta - \theta^*)(\theta - \theta^*)^T\} \in \mathbb{R}^{n\theta \times n\theta}$$

☝ Produsul exterior.

Dispersie tot mai mică în jurul mediei.

$$\lim_{N\to\infty} \sigma^2\left(\hat{\theta}_N\right) = 0$$

se poate arăta

☝ Consistenţa este proprietatea cea mai importantă.

Proprietăţi statistice dezirabile ale estimaţiilor de parametri necunoscuţi (continuare)

Eficienţă ⇒ $\hat{\theta}_N$ este cel puţin tot atît de eficientă ca $\tilde{\theta}_N$ dacă:

$$\mathbf{P}\left(\hat{\theta}_N\right) \le \mathbf{P}\left(\tilde{\theta}_N\right) \Leftrightarrow \mathbf{P}\left(\tilde{\theta}_N\right) - \mathbf{P}\left(\hat{\theta}_N\right) \ge 0$$

☝ În sensul pozitiv (semi-)definirii.

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \ge 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$\sigma(\mathbf{A}) \subset \mathbb{R}_+$$

☝ spectrul matricii

$$\Delta_1(\mathbf{A}) \ge 0$$

$$\Delta_2(\mathbf{A}) \ge 0$$

$$\vdots$$

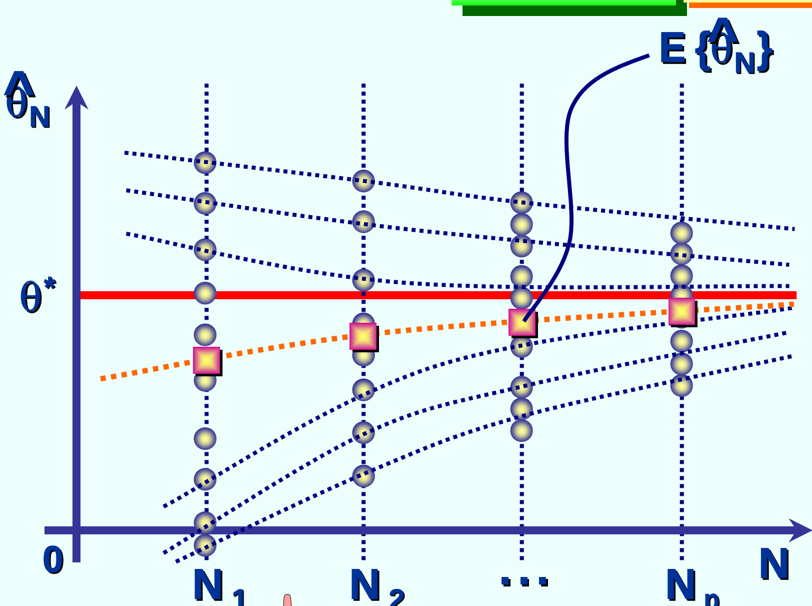
$$\det(\mathbf{A}) \ge 0$$

☝ determinanţii Sylvester

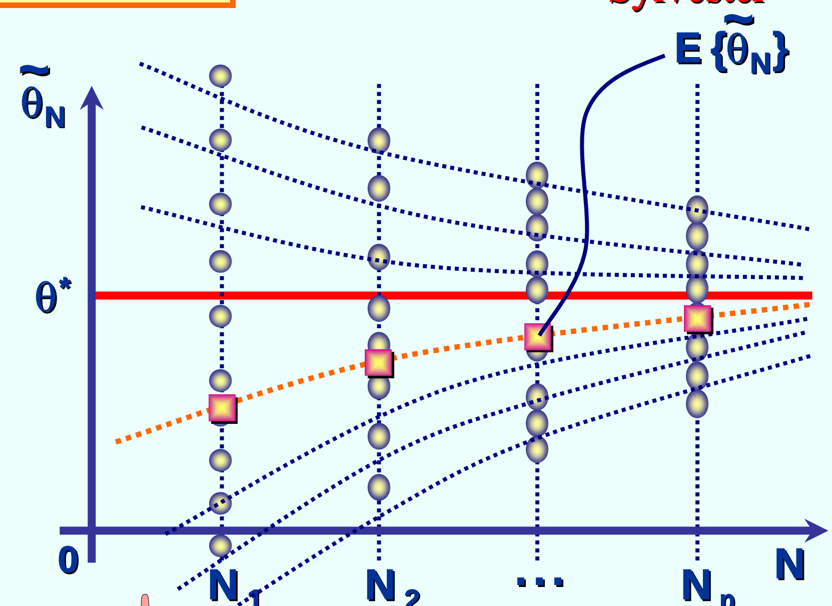
$$\lim_{N\to\infty} \hat{\theta}_N = \theta^* \Leftrightarrow \lim_{N\to\infty} \mathbf{P}\left(\hat{\theta}_N\right) = 0$$

- Eficienţa este asimilată cu viteza de consistenţă.

Exemplu Cazul parametrului scalar



☝ Consistenţă rapidă.



☝ Consistenţă lentă.

❷ Modele de identificare

❷.❸ Analiza modelelor neparametrice

Caracterizări **calitative** ale proceselor

Deterministe | Nedeterministe

- Analiza tranzitorie
- Analiza pe bază de corelaţie
- Analiza în frecvenţă
- Analiza spectrală

Timp: Analiza tranzitorie, Analiza pe bază de corelaţie

Frecvenţă: Analiza în frecvenţă, Analiza spectrală

Analiza tranzitorie

- Analiză care se desfăşoară de regulă în cadrul aplicaţiilor de TS.

Obiectiv (TS): Analiza performanţelor de stabilitate şi robusteţe.

Obiectiv (IS): Determinarea cu suficientă precizie a unor mărimi caracteristice (amplificare, constante de timp, timp mort, etc.).

- Se pleacă de la răspunsurile procesului la o intrare de tip treaptă unitară (răspunsul indicial) sau impuls unitar (răspunsul cauzal la impuls sau funcţia pondere).
- Răspunsul indicial produce o serie de informaţii privind: tipul de sistem liniar care ar putea fi asociat procesului; caracteristicile sistemului liniar (dacă are ordinul inferior lui 3); timpul mort intrinsec al procesului; timpul de stabilizare, etc.
- Răspunsul cauzal la impuls (funcţia pondere) oferă informaţii complementare referitoare la stabilitate, care ar putea fi exploatate ulterior şi pentru identificarea procesului.

Sistem liniar stabil ⇒ $\lim_{n\to\infty} h[n] = 0$

Secvenţa pondere poate fi trunchiată, în vederea determinării unui număr finit de valori.

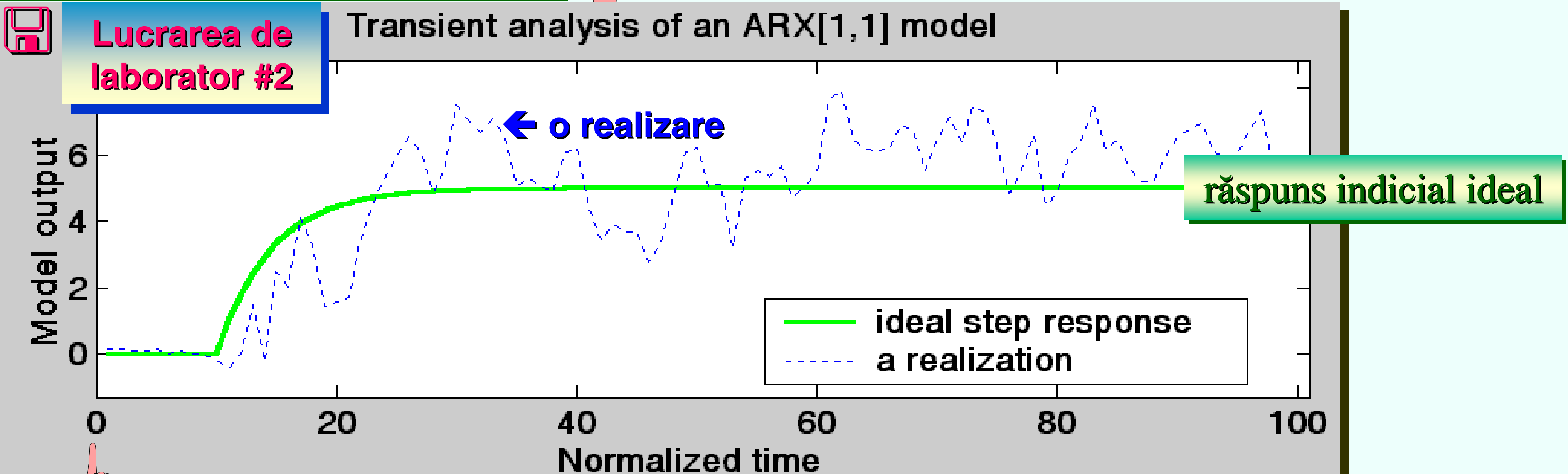
❷ Modele de identificare

❷.❸ Analiza modelelor neparametrice

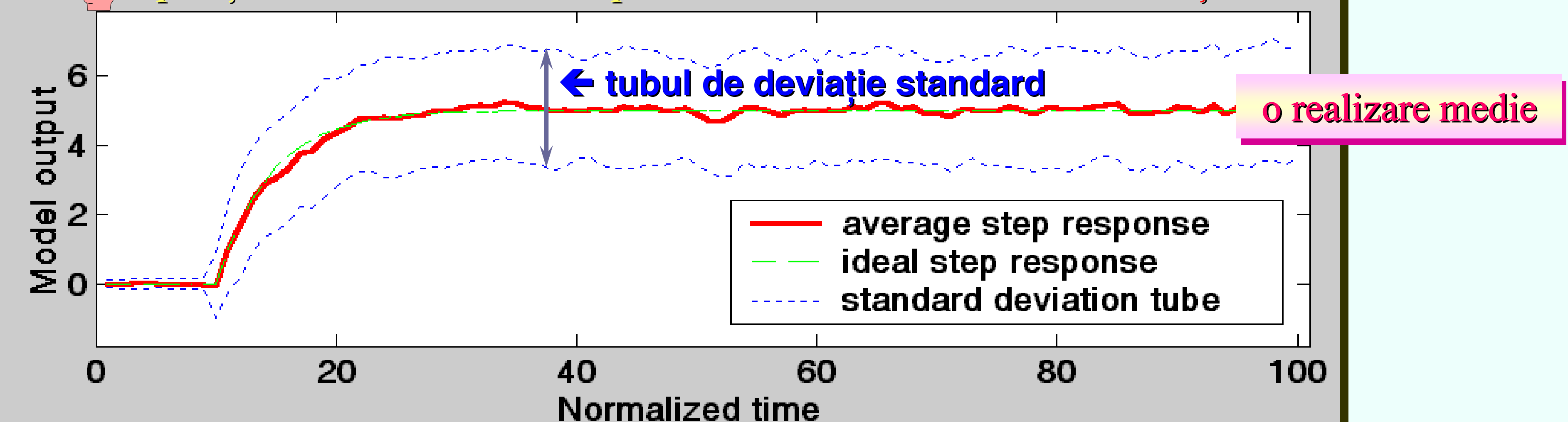
Analiza tranzitorie (continuare)

Principalul inconvenient: natura stocastică a datelor măsurate.

Lucrarea de laborator #2



Operația de mediere statistică peste un număr de realizări este esențială.



Dacă nu este disponibilă decît o realizare, se apelează la media temporală a acesteia.

❷ Modele de identificare

❷.❸ Analiza modelelor neparametrice

Analiza în frecvenţă

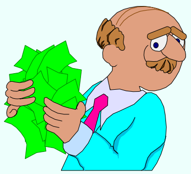
Obiectiv

Determinarea cu suficientă precizie a răspunsului în frecvenţă corespunzător procesului furnizor de date.

$$H(\mathrm{e}^{j\omega}) \overset{def}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} h[k]\mathrm{e}^{-j\omega k} \quad \forall\, \omega\in\mathbb{R}$$

☝ TF a secvenţei pondere

Cum s-ar putea determina răspunsul în frecvenţă din date corupte de zgomot?



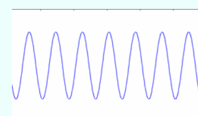
Cu ajutorul unei proprietăţi remarcabile a sistemelor liniare discrete.

Sistem liniar

Exerciţiu

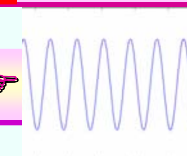
u → **H** → y

$u_0 \sin(\omega_0 n)$



☜ Aceeaşi frecvenţă ☞

$\boxed{y_0}\sin(\omega_0 n + \varphi)$



$y_0 = u_0 \left|H(e^{j\omega_0})\right|$

$\varphi = \varphi_H = \arg H(e^{j\omega_0})$

$\left|H(\mathrm{e}^{j\omega})\right|$ — spectru

$\varphi_H(\omega)$ — fază

☝ prin varierea lui ω_0

- În absenţa zgomotului, sau în cazul unui zgomot extrem de slab (SNR>4) spectrul şi faza procesului se pot trasa grafic prin stimularea cu armonice de diferite frecvenţe.

☝ Faza răspunsului în frecvenţă se măsoară prin defazajul dintre armonica de ieşire şi cea de intrare.

De regulă, precizia de determinare a fazei este inferioară preciziei de determinare a spectrului.

- În prezenţa zgomotului, există două strategii:

➔ Prin mediere directă, aplicată realizărilor spectrului şi fazei.

➔ Prin mediere indirectă, aplicată proiecţiei ieşirii pe două armonice deterministe elementare.

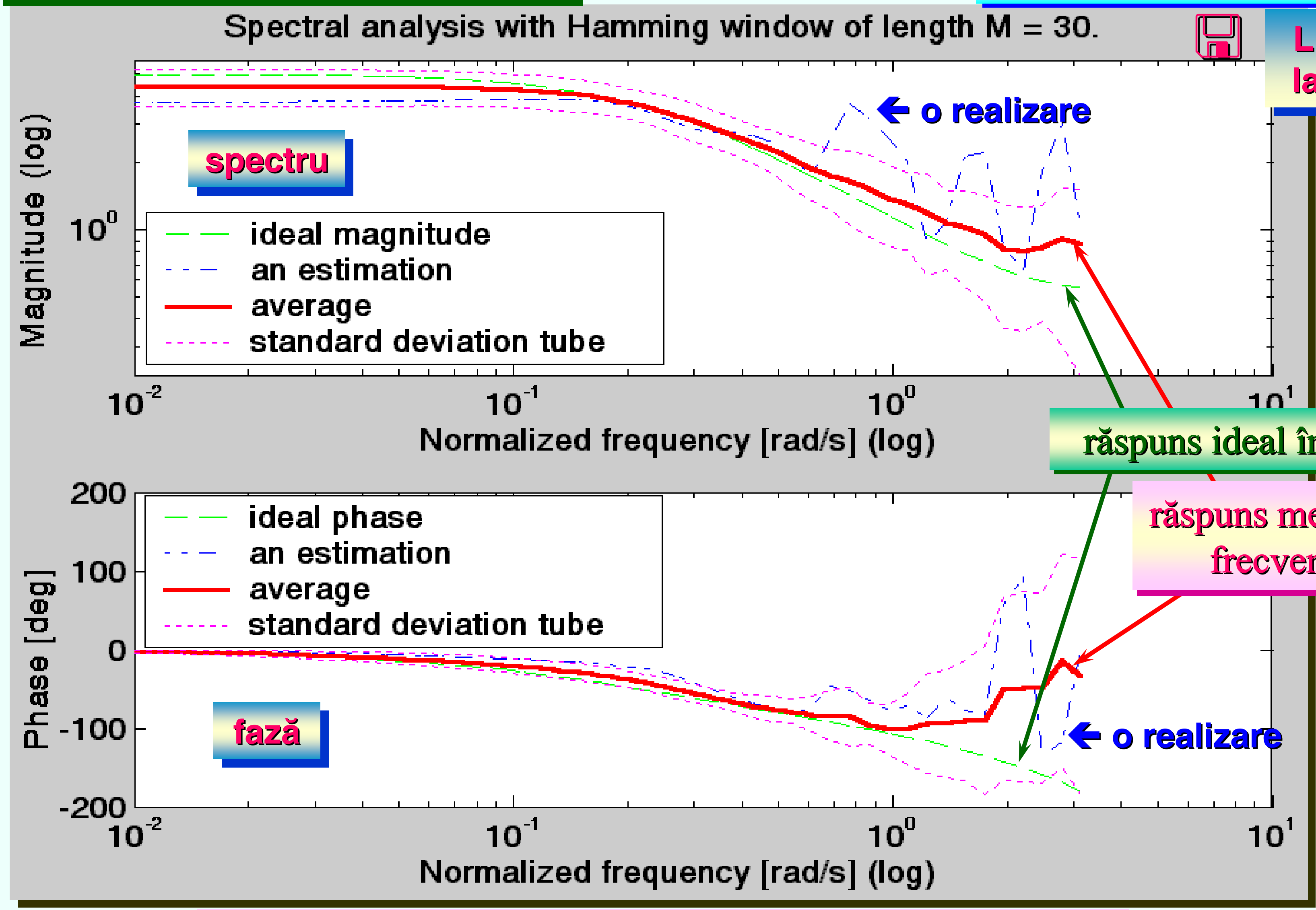
➋ Modele de identificare

➋.➌ Analiza modelelor neparametrice

Analiza în frecvență (continuare)

Strategia **medierii directe**

Lucrarea de laborator #2



☝ Sensibilitate crescută la zgomote în banda de frecvență înaltă.

Analiza în frecvenţă (continuare)

Strategia medierii indirecte

Aşadar

$u[n] = u_0 \sin(\omega_0 n)$

$y[n] = y_0 \sin(\omega_0 n + \varphi)$

$$\begin{cases} y_0 = u_0 \left| H(e^{j\omega_0}) \right| \\ \varphi = \arg H(e^{j\omega_0}) \end{cases}$$

Se poate trasa pentru diferite valori ale lui ω_0.

Dificil de estimat!

Ce se poate face?

Cazul practic al frecvenţei raţionale

$\omega_0 = 2\pi m_0 / n_0$

$m_0, n_0 \in \mathbb{N}^*$

Se poate exploata proprietatea oricărei armonice elementare de a avea **medie nulă pe durata unei perioade**.

Dimensiunea orizontului de măsură poate fi aleasă **proporţională cu perioada**.

$$N = m_0 K \left(\frac{2\pi}{\omega_0} \right) = K n_0$$

Se proiectează ieşirea pe armonicele reale elementare de pulsaţie egală cu pulsaţia intrării.

$$\begin{cases} y_s[n] \overset{def}{=} y[n]\sin(\omega_0 n) = y_0 \sin(\omega_0 n + \varphi)\sin(\omega_0 n) = \dfrac{y_0}{2}\cos\varphi - \dfrac{y_0}{2}\cos(2\omega_0 n + \varphi) \\ y_c[n] \overset{def}{=} y[n]\cos(\omega_0 n) = y_0 \sin(\omega_0 n + \varphi)\cos(\omega_0 n) = \dfrac{y_0}{2}\sin\varphi + \dfrac{y_0}{2}\sin(2\omega_0 n + \varphi) \end{cases}$$

trigonometrie

☝ Rezultatul rămâne totuşi sensibil la perturbaţii.

mediere temporală

$$\begin{cases} \bar{y}_s = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} y_s[n] = \dfrac{y_0}{2}\cos\varphi \\ \bar{y}_c = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} y_c[n] = \dfrac{y_0}{2}\sin\varphi \end{cases}$$

$$\varphi = \operatorname{atan2}\left(\frac{\bar{y}_c}{\bar{y}_s} \right) = \operatorname{atan2}\left(\frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} y[n]\cos(\omega_0 n)}{\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} y[n]\sin(\omega_0 n)} \right)$$

❷ Modele de identificare

❷.❸ Analiza modelelor neparametrice

Analiza pe bază de corelație

Obiectiv neparametric

Evaluarea şi trasarea grafică a secvenţelor de covarianţă asociate procesului. r_u $r_{u,y}$ r_y

- Graficele covarianțelor permit efectuarea unei analize calitative privind identificabilitatea şi predictibilitatea procesului, prin comparație cu secvența de auto-covarianță a zgomotului alb.

Obiectiv parametric

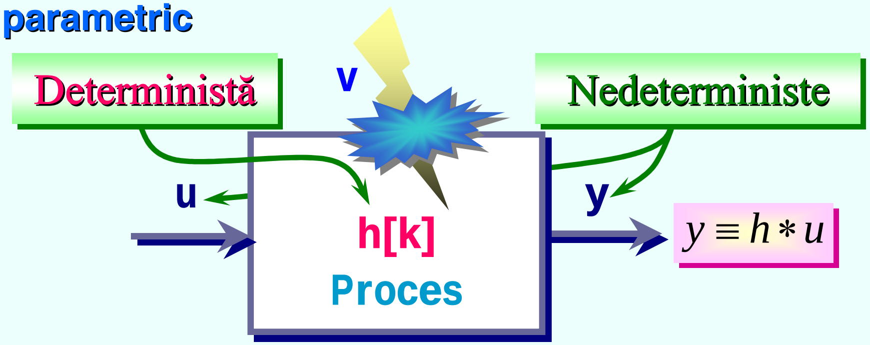
Determinarea secvenţei pondere corespunzătoare procesului furnizor de date, dacă acesta ar fi identificat cu un sistem liniar discret cauzal şi stabil. $\{h[n]\}_{n\in\mathbb{Z}}$

cauzal: $h[n]=0 \quad \forall n<0$

stabil: $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|h[n]|<\infty$ absolut sumabilă

Proprietatea lui Parseval: $\lim_{n\to\infty}|h[n]|=0$

Secvența pondere poate fi trunchiată.



$y \equiv h*u$

$$\boldsymbol{\theta} \overset{def}{=} \left[h[0] \quad h[1] \quad \cdots \quad h[M-1]\right]^T \in \mathbb{R}^M$$

vectorul parametrilor necunoscuţi

Cum s-ar putea determina θ din datele măsurate?

Prin transformarea relației nedeterministe de convoluție într-o relație similară, dar cu caracter determinist.

☝ Un raţionament propus de N. Wiener (1894-1964).

fondatorul PS şi al Ciberneticii

- Se aplică două operații succesive:

$$E \left| u[n-k]\times \right| y[n]=\sum_{m\geq 0} h[m]u[n-m]$$

② E ① $u[n-k]\times$, $\forall k\in\mathbb{N}$

❷ Modele de identificare

❷.❸ Analiza modelelor neparametrice

Analiza pe bază de corelație (continuare)

E ② $u[n-k]\times$ ① $\forall k\in\mathbb{N}$ $\quad y[n]=\sum_{m\geq 0} h[m]u[n-m]$

$$r_{y,u}[k]=E\{y[n]u[n-k]\}=\sum_{m\in\mathbb{N}} h[m]E\{u[n-m]u[n-k]\} \quad \forall k\in\mathbb{N}$$

Ecuațiile Wiener-Hopf

$$r_{y,u}[k]=\sum_{m\in\mathbb{N}} h[m]r_u[k-m] \quad \forall k\in\mathbb{N}$$

Relație de convoluție cu caracter determinist.

- Din sistemul infinit de ecuații Wiener-Hopf se pot extrage numai primele M.
- Fiecare dintre acestea se poate apoi trunchia, folosind proprietatea lui Parseval.

$k=0$: $r_{y,u}[0] = h[0]r_u[0]+h[1]r_u[1]+h[2]r_u[2]+\cdots+h[M-1]r_u[M-1]$

$k=1$: $r_{y,u}[1] = h[0]r_u[1]+h[1]r_u[0]+h[2]r_u[1]+\cdots+h[M-1]r_u[M-2]$

$\vdots$

$k=M-2$: $r_{y,u}[M-2] = h[0]r_u[M-2]+\cdots+h[M-3]r_u[1]+h[M-2]r_u[0]+h[M-1]r_u[1]$

$k=M-1$: $r_{y,u}[M-1] = h[0]r_u[M-1]+\cdots+h[M-3]r_u[2]+h[M-2]r_u[1]+h[M-1]r_u[0]$

☝ S-a utilizat simetria secvenței de auto-covarianță a intrării.

- Sistemul finit obținut nu este identic celui corespunzător extras din ecuațiile Wiener-Hopf, dar îl aproximează pe acesta.

❷ Modele de identificare

❷.❸ Analiza modelelor neparametrice

Analiza pe bază de corelaţie (continuare)

$$r_{y,u}[0] = h[0]r_u[0] + h[1]r_u[1] + h[2]r_u[2] + \cdots + h[M-1]r_u[M-1]$$
$$r_{y,u}[1] = h[0]r_u[1] + h[1]r_u[0] + h[2]r_u[1] + \cdots + h[M-1]r_u[M-2]$$
$$\vdots$$

sistem liniar

$$r_{y,u}[M-2] = h[0]r_u[M-2] + \cdots + h[M-3]r_u[1] + h[M-2]r_u[0] + h[M-1]r_u[1]$$
$$r_{y,u}[M-1] = h[0]r_u[M-1] + \cdots + h[M-3]r_u[2] + h[M-2]r_u[1] + h[M-1]r_u[0]$$

Exprimare matricială

Sistemul Wiener-Hopf

$$\mathbf{R}_M(u)\,\boldsymbol{\theta} = \mathbf{r}_M(y,u)$$

Matricea de auto-covarianţă (a intrării)

$$\mathbf{R}_M(u) \overset{def}{=} \begin{bmatrix} r_u[0] & r_u[1] & r_u[2] & \cdots & r_u[M-1] \\ r_u[1] & r_u[0] & r_u[1] & \cdots & r_u[M-2] \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ r_u[M-2] & \cdots & r_u[1] & r_u[0] & r_u[1] \\ r_u[M-1] & \cdots & r_u[2] & r_u[1] & r_u[0] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{M\times M}$$

Vectorul de covarianţă încrucişată (intrare-ieşire)

$$\mathbf{r}_M(y,u) \overset{def}{=} \begin{bmatrix} r_{y,u}[0] \\ r_{y,u}[1] \\ \vdots \\ r_{y,u}[M-2] \\ r_{y,u}[M-1] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{M}$$

Matrice Toeplitz simetrică

(elementul generic depinde de diferenţa indicilor săi)

Matricea se construieşte pe diagonale şi este complet definită de prima linie sau coloană.

$\mathbf{R}_M(u) > 0$ inversabilă

Intrarea este suficient de persistentă.

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_M = \mathbf{R}_M^{-1}(u)\,\mathbf{r}_M(y,u)$$

Soluţia sistemului Wiener-Hopf

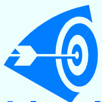
Altă proprietate interesantă

$\mathbf{R}_M(u) \geq 0$ pozitiv (semi-)definită

☝ Inversarea eficientă: Algoritmul Levinson-Durbin.

❷.❸ Analiza modelelor neparametrice

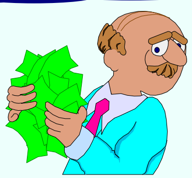
Analiza spectrală


Obiectiv

Determinarea răspunsului în frecvență al procesului prin tehnici de diminuare a influenţei perturbaţiilor din datele măsurate asupra rezultatului.

$$H(e^{j\omega}) \overset{def}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} h[k]e^{-j\omega k}$$ $\forall\,\omega\in\mathbb{R}$

☝ TF a secvenţei pondere

Cum s-ar putea diminua influenţa zgomotelor?

În general, prin tehnici de estimare spectrală.

PS

În particular (IS), prin exploatarea proprietăților densităților spectrale.

☝ Transferul densității spectrale prin sisteme liniare joacă rolul principal.

Sistem liniar

u → H → y

$\phi_u(\omega)$

$H(e^{j\omega})$

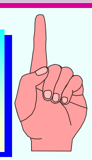
$$H(e^{j\omega}) = \frac{\phi_{y,u}(\omega)}{\phi_u(\omega)}$$ $\forall\,\omega\in\mathbb{R}$

$$\phi_{y,u}(\omega) = H(e^{j\omega})\phi_u(\omega)$$

$$\phi_y(\omega) = \left|H(e^{j\omega})\right|^2\phi_u(\omega)$$

- Rezultatul suferă totuşi 3 tipuri de erori:
  - ➔ Folosirea de formule aproximative pentru estimarea secvenţelor de covarianţă.
  - ➔ Implementarea definiţiilor densităţilor spectrale, cu ajutorul versiunii discrete a TF.
  - ➔ Efecte numerice marginale cauzate de orizontul finit de măsură al datelor.

Mai puțin utilă, deoarece se pierde informaţia de fază.



Pondererea datelor cu ferestre (vezi Lucrarea de laborator #2).