❺ Exerciții rezolvate

Soluție (Exercițiul 4.2)

$$\mathcal{M}_2: \quad \theta^* = \left[E\{\varphi[n]\varphi^T[n]\}\right]^{-1}\left(\left[E\{\varphi[n]y[n]\}\right] - E\{\varphi[n]v[n]\}\right) =$$

$$= -\begin{bmatrix} r_y[0] & r_y[1] \\ r_y[1] & r_y[0] \end{bmatrix}^{-1}\left(\begin{bmatrix} r_y[1] \\ r_y[2] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_{vy}[1] \\ r_{vy}[2] \end{bmatrix}\right)$$

(dacă modelul ar fi de ordin 2).

$$\lim_{N\to\infty} \hat{a}_{21} = \frac{r_y[1]\left(r_y[2] - r_y[0]\right)}{\left(r_y[0]\right)^2 - \left(r_y[1]\right)^2} = a \Longleftrightarrow \qquad a = -\frac{r_y[1]}{r_y[0]}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} r_y[1] \neq 0 \text{ și} \\ r_y[0]\, r_y[2] = r_y^2[1] \end{cases}$$

$$\lim_{N\to\infty} \hat{a}_{22} = \frac{r_y^2[1] - r_y[0]\, r_y[2]}{\left(r_y[0]\right)^2 - \left(r_y[1]\right)^2} = a_{12}^* = 0 \Longleftrightarrow$$

al doilea param. al lui θ

$$\Longleftrightarrow r_y^2[1] = r_y[0]\, r_y[2] \quad \text{(la fel)}$$

* În această situație, se constată cu ușurință că $\theta^* = [a_{11}^* \;\; 0]^T$, ceea ce conduce la exprimarea estimației $\hat{\lambda}^2$ astfel:

$$\hat{\lambda}^2 = \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(y[n] + y[n-1]\,\hat{a}_{11}\right)^2}_{\text{estimația pentru } \mathcal{M}_1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

un termen ce tinde la $\varnothing$ când $N \to \infty$

* Rezultă că $\lim_{N\to\infty} \hat{\lambda}^2 = (\lambda^*)^2$

– Condiția de consistență este: $\begin{cases} r_y^2[1] = r_y[0]\, r_y[2] \text{ și} \\ r_y[2] \neq 0,\; r_y[2] \neq 1 \end{cases}$

Soluție (Exercițiul 4.2)

c) $\mathcal{M}_1$: $\sigma_N^2[1] = \lambda^2 \left[r_y^{N-1}[0] (N-1) \right]^{-1} = \dfrac{\lambda^2}{(N-1)\, r_y^{N-1}[0]}$

$\mathcal{M}_2$: $E\{(\hat{\theta}_N - \theta^*)(\hat{\theta}_N - \theta^*)^T\} = \lambda^2 \begin{bmatrix} N r_y^N[0] & N r_y^N[1] \\ N r_y^N[1] & N r_y^N[0] \end{bmatrix}^{-1} =$

$$\sigma_N^2[2] = \frac{\lambda^2}{N} \frac{1}{(r_y^N[0])^2 - (r_y^N[1])^2} \begin{bmatrix} r_y^N[0] & -r_y^N[1] \\ -r_y^N[1] & r_y^N[0] \end{bmatrix}$$

$$\sigma_N^2[2] = \frac{\lambda^2}{N} \frac{r_y^N[0]}{(r_y^N[0])^2 - (r_y^N[1])^2}$$

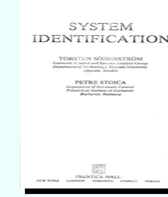
$$\lim_{N\to\infty} N \sigma_N^2[1] = \frac{\lambda^2}{r_y[0]} \; ; \; \lim_{N\to\infty} N \sigma_N^2[2] = \frac{\lambda^2 r_y[0]}{(r_y[0])^2 - (r_y[1])^2}$$

- deoarece $0 \leq (r_y[1])^2$ rezultă:

$$0 \leq (r_y[0])^2 - (r_y[1])^2 \leq r_y^2[0] \iff$$

$$\iff \frac{\lambda^2}{r_y[0]} \leq \frac{\lambda^2 r_y[0]}{(r_y[0])^2 - (r_y[1])^2}$$ q.e.d.

❺ Exerciţii rezolvate



Exerciţiul 4.3

Deduceţi expresiile estimaţiilor oferite de MVI pentru un model ARX[1,1] şi un vector al instrumentelor de tip nefiltrat.
Studiaţi consistenţa lor şi precizaţi un set de condiţii suficiente pentru verificarea acestei proprietăţi.
Determinaţi condiţiile generale de consistenţă în cazul în care nici intrarea nici zgomotul nu sunt neapărat albe.

Soluţie

- MVI: $$\hat{\theta} = \left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} z[n]\varphi^T[n]\right]^{-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} z[n]y[n]\right],$$ unde:

$$\varphi^T[n] = \left[-y[n-1] \quad u[n-1]\right]$$

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix}\hat{a}\\ \hat{b}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} u[n-1]y[n-1] & \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} u^2[n-1] \\ -\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} u[n-2]y[n-1] & \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} u[n-1]u[n-2] \end{bmatrix}^{-1} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} u[n-1]y[n] \\ \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} u[n-2]y[n] \end{bmatrix}$$

❺ Exerciții rezolvate

Soluție (Exercițiul 4.3)

- Cu notațiile cunoscute, rezultă:

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} -r_{uy}^{N}[0] & r_{u}^{N}[0] \\ -r_{yu}^{N}[1] & r_{u}^{N}[1] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} r_{yu}^{N}[1] \\ r_{yu}^{N}[2] \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta_N} \begin{bmatrix} r_{u}^{N}[1] & -r_{u}^{N}[0] \\ r_{yu}^{N}[1] & -r_{yu}^{N}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{yu}^{N}[1] \\ r_{yu}^{N}[2] \end{bmatrix},$$

cu $\Delta_N = r_{u}^{N}[0]\, r_{yu}^{N}[1] - r_{u}^{N}[1]\, r_{yu}^{N}[0] \neq 0$ (dacă se verifică)

$$\begin{cases} \hat{a} = \dfrac{r_{u}^{N}[1]\, r_{yu}^{N}[1] - r_{u}^{N}[0]\, r_{yu}^{N}[2]}{r_{u}^{N}[0]\, r_{yu}^{N}[1] - r_{u}^{N}[1]\, r_{yu}^{N}[0]} \\[2ex] \hat{b} = \dfrac{\left(r_{yu}^{N}[1]\right)^2 - r_{yu}^{N}[0]\, r_{yu}^{N}[2]}{r_{u}^{N}[0]\, r_{yu}^{N}[1] - r_{u}^{N}[1]\, r_{yu}^{N}[0]} \end{cases}$$

$$\hat{\lambda}^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left(y[n] - \varphi^T[n]\hat{\theta} \right)^2$$