1 Grafica MATLAB

Comanda **plot** . Daca y este un vector-linie , `plot(y)` deseneaza linia frinta intre punctele de coordonate `(i,y(i))` cu `i=1:length(y)`. Daca x si y sunt vectori-linie de aceiasi lungime, `plot (x,y)` deseneaza graficul cu punctele de abscisa ($x(i)$ si ordonata $y(i)$). De exemplu :

```
t=0:0.05:4*pi;
y=sin (t);
plot(t,y);
```

2 Controlul ecranului

Pentru a desena intr-o noua fereastra, putem folosi comanda `figure`, pentru a desena mai multe grafice in aceeasi fereastra si in acelasi sistem de axe , putem folosi secventa de comenzi `hold on - hold off`.In sfirsit, comanda `subplot(m,n,p)`, partitioneaza fereastra intr-o grila $m * n$ si deseneaza in sistemul de axe din casuta p.

Exercitiu. Desenati $sin(\omega * t)$ pentru $\omega = 1 : 9$ mai intai in ferestre diferite, apoi pe acelasi grafic si in aceeasi fereastra, respectiv in aceeasi fereastra dar in sisteme de axe diferite.

3 Scari logaritmice

In unele situatii este mai sugestiva si convenabila reprezentarea anumitor grafice folosind scari logaritmice (log_{10}). Intr-o scara logaritmica, pe sistemele de axe punctele 10^k cu $k \in \mathbb{Z}$ sunt echidistante. De cele mai multe ori in astfel de grafice variabila reprezentata pe abscisa are semnificatie de frecventa. In secventa de numere ...$1, 2, 5, 10$.. pe o scara logaritmica (log_{10}) distanta dintre 1 si 2 este aproximativ egala cu cea dintre 5 si 10 si aproximativ egala cu o treime din distanta dintre 1 si 10. In plus fata de aceasta, `MATLAB` mai efectueaza o "scalare" suplimentara, care consta in numarul de pixeli alocat pentru fiecare axa in parte "unitatii", adica distantei dintre doua puteri succesive ale lui10.
Pentru lucrul cu scari logaritmice, pot fi utile urmatoarele functii `MATLAB`:
`loglog, semilogx, semilogy,logspace`.

Exercitiu. Pentru o mai buna intelegere, urmariti cu atentie secventele de comenzi de mai jos si explicati ce realizeaza fiecare in parte:

```
f=logspace(0,2,100);
loglog(log(f));
```

```
f=logspace(0,2,100);
semilogy(f);
```

4 Hodograful

Definitie: Se numeste drum parametrizat in $\mathbb{R}^2$, $\gamma(\omega) = (f_1(\omega), f_2(\omega)) \quad \forall \omega \in I$ orice functie continua $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, unde I este un interval al dreptei reale. Submultimea lui $\mathbb{R}^2 : (\gamma) = \{((f_1(\omega), f_2(\omega)) \mid \omega \in I\}$ se numeste *hodograful* drumului γ.

In multe probleme specifice Teoriei Sistemelor , hodograful se reprezinta in coordonate carteziene :

$$\gamma : \quad \begin{cases} x = f_1(\omega) \\ y = f_2(\omega) \ , \quad \forall \omega \in I \end{cases}$$

numita si reprezentare parametrica.

Exercitiu Trasati hodograful urmatorului drum parametrizat:

$$\gamma : \quad \begin{cases} x = \frac{1}{1+\omega^2} \\ y = -\frac{\omega}{1+\omega^2} \ , \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Programul `MATLAB` este:

```
w=-pi:0.01:pi;
x=(1+w.^2).^(-1);
y=-w.*x;
plot(x,y)
```

5 Circuite liniare

Circuit de intarziere de ordinul intai:

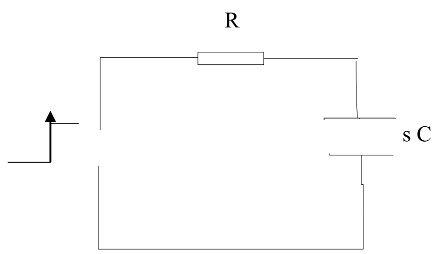


Figure 1: Element de intarziere de ordinul I."

Scriem legea lui Kirchoff pentru circuitul in cauza:

$$R\,C\frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = e(t) \;\; t > 0 \tag{1}$$

unde $e(t)$ este un salt de amplitudine in tensiune de tip treapta Heavyside. Daca luam $\lim_{t\to\infty}$ in ecuatia (1) obtinem $\lim_{t\to\infty}\ v_c(t) = e_0$. Consideram $v_c(0) = 0$ conditia initiala. Integrand ecuatia (1) printr-o metoda oarecare (metoda vartiatiei constantelor, de exemplu) obtinem ca solutiile sunt de forma $x(t) = A + Be^{-\frac{t}{RC}}$. Se observa ca $\lim_{t\to\infty} x(t) = A$ respectiv ca $\lim_{t\to 0} x(t) = A + B$. Rezulta asadar prin identificare ca $v_c(t) = e_0\big(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\big)$

O metoda mai usoara de scriere a ecuatiilor circuitelor de acest tip este aceea de a folosi expresiile impedantelor in "operational", anume $\frac{1}{sC}$ pentru capacitati respectiv sL pentru inductante. Astfel ecuatiile diferentiale de mai sus se scriu mult mai comod sub forma unor ecuatii algebrice, cu ipoteza insa ca si *conditiile initiale, adica curentii prin bobine si respectiv tensiunile pe condensatoare, sa fie nule.* Astfel tensiunea pe condensator are urmatoarea expresie(scriem ecuatia divizorului de tensiune):

$$v_C(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}}\, e(s) = \frac{1}{CR\,s + 1}\, e(s)$$

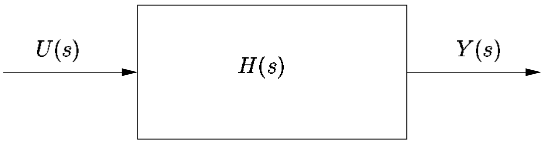


Figure 2: Reprezentare de tip "black-box"

Daca consideram circuitul de mai sus ca fiind o reprezentare de tip "black-box" pentru care $U(s) := e(s)$ este intrarea iar $Y(s) := v_C(s)$ este iesirea, raportul $\dfrac{iesire}{intrare} = \dfrac{1}{RCs+1}$ este o functie rationala in s (*functia de transfer* a sistemului.)

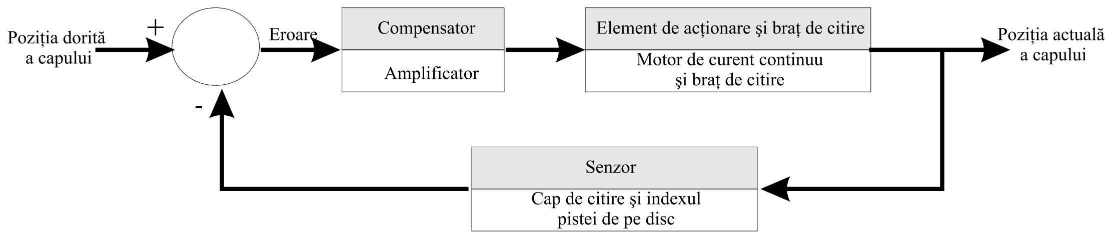
`MATLAB` stie sa traseze graficul in timp al iesirii atunci cand intrarea este o treapta unitate Heavyside, apeland functia `step` care primeste ca parametrii polinoamele reprezentand numaratorul respectiv numitorul functiei de transfer(`step(numarator,numitor)`). In `MATLAB` polinoamele se reprezinta prin vectori linie care contin coeficientii in ordinea descrecatoare a puterilor nedeterminatei. Consideram ca exemplu numeric ca $R = 1\Omega$, $C = 1F$.

Programul `MATALAB` este:

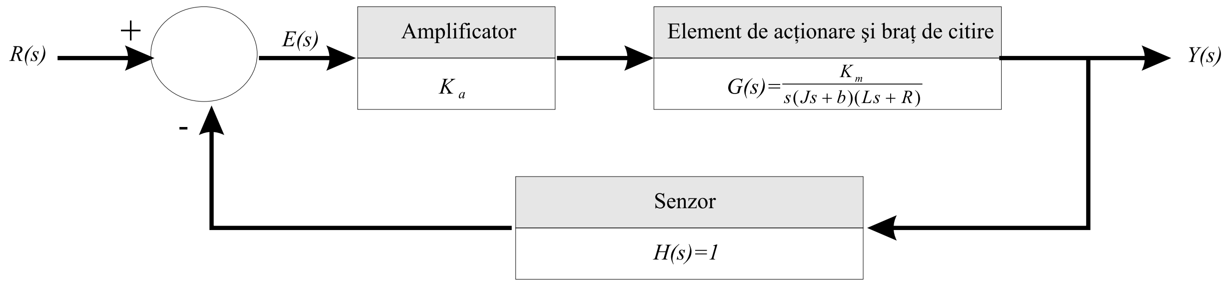
```
R=1;C=1;
step([1],[R*C 1]);
```

6 Hard Disk Drive

Informatia poate fi stocata in mod eficient pe discuri magnetice. Nivelul vanzarilor de disk drive-uri la nivel mondial erau estimate la 100 de milioane de unitati in 1996. Scopul unui dispozitiv disk drive este acela de a pozitiona capul de citire pentru a putea citi datele stocate pe o anumita pista a hard-diskului. Asadar marimea variabila care trebuie controlata cu precizie este pozitia capului de citire. Diskul se roteste cu o turatie cuprinsa intre 1800 si $7200rpm.$, in timp ce capul de citire "zboara" pe deasupra diskului la o distanta de mai putin de $100nm$. Specificatiile tehnice cer ca eroarea de pozitionare a capului sa fie de cel mult $1\mu m$. Mai mult decat atat, se doreste ca deplasarea de la o pista a la o pista b de exemplu sa se faca in cel mult $50ms$. Pentru acestea stabilim urmatoarea configuratie a unui sistem de control "in bucla inchisa" a pozitiei capului de citire.



Disk drive-ul foloseste un motor de curent continuu cu magnet permanent pentru a roti capul de citire. Capul de citire, confectionat dint-o pelicula subtire citeste fluxul magnetic de pe disk si furnizeaza un semnal electric unui amplificator. Semnalul de eroare din figura urmatoare este furnizat citind indexul pistei unde se afla pozitionat capul de citire la momentul curent si comparandu-l cu pozitia pistei unde se doreste a fi deplasat. Se considera modele (dinamice) ale motorului de curent continuu si ale amplificatorului liniar ca fiind cele de mai jos.

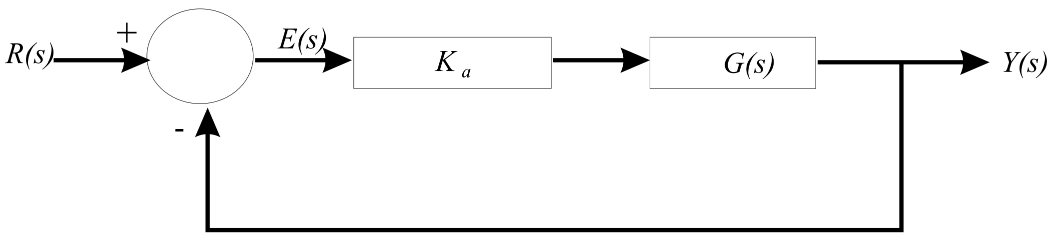


Functia de transfer a unui hard-disk drive este :

$$G(s) = \frac{K_m}{s(Js+b)(Ls+R)} = \frac{5000}{s(s+20)(s+1000)}$$

unde J este inertia bratului de citire $J = 1$ $[nms^2/rad]$; b este o constanta de frecare $b = 20$ $[kg/ms]$; K_a este o constanta de amplificare avavalori intre 10 si 1000; R este rezistenta armaturii $R = 1$ Ω; K_m este o constanta a motorului $K_m = 5$ $[nm/A]$ iar L este inductanta armaturii $L = 1$ mH Mai putem scrie $G(s)$ si ca $G(s) = \dfrac{K_m/bR}{s(\tau_L s+1)(\tau s+1)}$ unde $\tau_L = J/b = 50ms$ si $\tau = L/R = 1ms$. Deoarece $\tau_L \ll \tau$ in mod frecvent neglijam τ. Astfel $G(s) \approx \dfrac{K_m/bR}{s(\tau_L s+1)} = \dfrac{0.25}{s(0.05s+1)}$ sau $G(s) = \dfrac{5}{s(s+20)}$.

Diagrama bloc a sistemului in bucla inchisa este data mai jos.



Obtinem astfel ca

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_a\, G(s)}{1 + K_a\, G(s)}$$

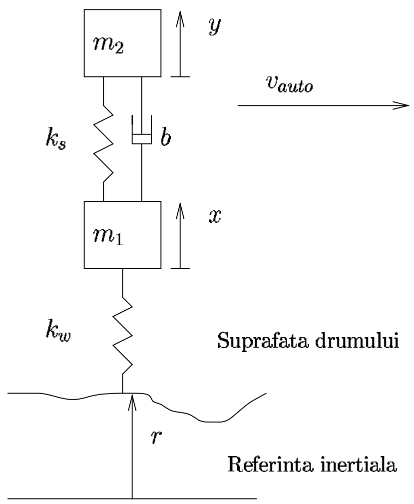
si luand $K_a = 40$ rezulta

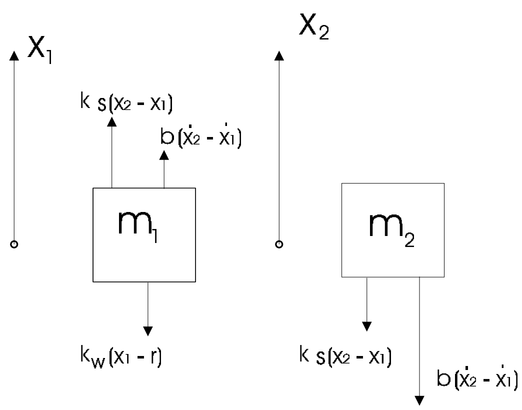
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{5\, K_a}{s^2 + 20s + 5\, K_a}$$

Cerinta. Trasati raspunsul la intrare treapta a sistemului in bucla inchisa folosind functia `MATLAB step`.

7 Suspensia de automobil

Figura urmatoare reprezinta schematic modelul simplificat al unei roti de automobil. Coordonatele corpurilor m_1 si m_2 notate cu x_1 si respectiv x_2 reprezinta deplasarile celor doua corpuri de la pozitiile lor de echilibru. m_1 este masa rotii, k_w este constanta de elasticitate a pneului, b constanta de frecare vascoasa in interiorul amortizorului, m_2 masa ce revine unei roti din masa totala a automobilului. Modulul fortei opuse de amortizorul de socuri este considerat a fi direct proportional prin constanta b cu viteza de variatie a deplasarii relative a celor doua corpuri, adica $F_f = b(\dot{x_1} - \dot{x_2})$. Consideram si efectul fortei de gravitatie, constante ce actioneaza asupra fiecaruia dintre cele doua corpuri. Aceasta a fost omisa din figura deoarce efectul ei este anulat de reactiunea din arcuri, fiind analizate fortele ce actioneaza asupra fiecarui corp in parte.





In aceste conditii prima lege a dinamicii pentru sistemul format din cele doua corpuri este:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x_1}(t) &= b\big[\dot{x_2}(t) - \dot{x_1}(t)\big] + k_s\big[x_2(t) - x_1(t)\big] - \big[x_1(t) - r(t)\big] \\ m_2\ddot{x_2}(t) &= -k_s\big[x_2(t) - x_1(t)\big] - b\big[\dot{x_2}(t) - \dot{x_1}(t)\big] \end{cases} \tag{2}$$

Functia reala $r(t)$ reprezinta "configuratia" drumului (vezi fig.1). Se considera ca automobilul se deplaseaza rectiliniu cu viteza constanta astfel ca in sistemul mecanic considerat nu apar forte de inertie.

Cerinte. a) Folosind `MATLAB` trasati graficul in timp al pozitiei corpului m_2 respectiv al pozitiei rotii, adica $x_1(t)$ respectiv $x_2(t)$, dupa ce masin aloveste cu roata o bordura de inaltime egala cu unitatea, adica $r(t) = 1(t)$ treapta unitate a lui Heavyside. Se dau: $m_1 = 10[kg.], m_2 = 250[kg.], k_w = 5 * 10^5[N/m], k_S = 10^4[N/m]$.

b) Dati o valoare lui $b[\frac{N\,s}{m}]$ care sa convina cel mai mult in situatia in care ati fi pasager in masina.

Rezolvare. Pentru a rezolva cerintele de mai sus, avem in prealabil nevoie de urmatoarea observatie importanta : *orice ecuatie diferentiala ordinara de ordin $n \in \mathbb{N}$ liniara, se poate scrie printr-o renumerotare convenabila a variabilelor ca un sistem (liniar si omogen) de ecuatii diferentiale de ordinul unu.* Mai exact, fie ecuatia generala de ordinul n:

$$a_0 x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} x^{(1)}(t) + a_n x(t) = 0 \tag{3}$$

Introducem notatiile:

$$x_{n-1}(t) := x^{(n-1)(t)}; x_{n-2}(t) := x^{(n-2)(t)}; \ldots x_1(t) := x^1(t); x_0 := x(t)$$

Atunci (3) este echivalenta cu sistemul:

$$\begin{cases} \dot{x_0}(t) & = & x_1(t) \\ \dot{x_1}(t) & = & x_2(t) \\ & \vdots & \\ \dot{x_{n-3}}(t) & = & x_{n-2}(t) \\ \dot{x_{n-2}}(t) & = & x_{n-1}(t) \\ \dot{x_{n-1}}(t) & = & -\frac{a_1}{a_0}x_{n-1} - \frac{a_2}{a_0}x_{n-2} - \cdots - \frac{a_n}{a_0}x_0 \end{cases} \tag{4}$$

Sistemul liniar si omogen (4) echivalent cu ecuatia (3) se pot scrie in forma "matriciala" :

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ \vdots \\ x_{n-2}(t) \\ x_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -\frac{a_n}{a_0} & -\frac{a_{n-1}}{a_0} & -\frac{a_{n-2}}{a_0} & \ldots & -\frac{a_2}{a_0} & -\frac{a_1}{a_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ \vdots \\ x_{n-2}(t) \\ x_{n-1}(t) \end{bmatrix} \tag{5}$$

adica este de forma $\dot{x}(t) = A\,x(t)$ unde A este o matrice constanta, din $\mathbb{R}^{n \times n}$, cu n ordinul sistemului de ecuatii, iar $x(t) := [x_0(t)\ x_1(t)\ \ldots x_{n-1}(t)]^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.

In aceasta ordine de idei, Matlab stie sa manipuleze sisteme de ecuatii liniare (nu neaparat omogene), daca ele sunt date intr-o forma "matriciala" (5) care se mai numeste *a variabilelor de stare.* Astfel, dupa cateva impartiri si rearanjarea termenilor, ecuatia 2 devine:

$$\begin{cases} \ddot{x_1}(t) & = & [-\frac{k_s}{m_1} - \frac{k_w}{m_1}]x_1(t) - \frac{b}{m_1}\dot{x_1}(t) + \frac{k_s}{m_1}x_2(t) + \frac{b}{m_1}\dot{x_2}(t) + \frac{k_w}{m_1}r(t) \\ \ddot{x_2}(t) & = & \frac{k_s}{m_2}x_1(t) + \frac{b}{m_2}\dot{x_1}(t) - \frac{k_s}{m_2}x_2(t) - \frac{b}{m_2}\dot{x_2}(t) \end{cases} \tag{6}$$

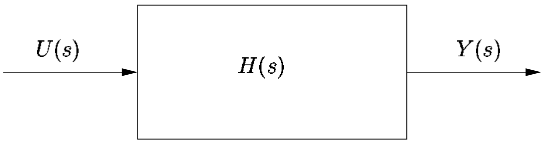


Figure 3: Reprezentare de tip "black-box"

(6) se mai poate scrie si in urmatoarea forma, sistem de ordinul intai:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x_1} \\ x_2 \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{k_s+k_w}{m_1} & -\dfrac{b}{m_1} & \dfrac{k_s}{m_1} & \dfrac{b}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k_s}{m_2} & \dfrac{b}{m_2} & -\dfrac{k_s}{m_2} & -\dfrac{b}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x_1} \\ x_2 \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{k_w}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r(t) \tag{7}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x_1} \\ x_2 \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} + 0\, r(t) \tag{8}$$

Faptul ca (7) este echivalenta cu (6) se verifica usor prin identificarea termenilor. Forma mai generala a ecuatiilor (7) si(8) este

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\,x(t) + b\,r(t) \\ y(t) &= c^T\,x(t) + d\,r(t) \end{aligned} \tag{9}$$

O idee foarte importanta este aceea ca *orice sistem de ecuatii diferentiale, liniar se poate scrie in forma (9), sistemul fiind perfect determinat de setul de matrice* $\left[A; b; c^T; d\right]$.

Orice sistem liniar este privit ca avand o intrare si o iesire:

unde in ecuatiile de mai sus $r(t)$ este considerata a fi intrarea, iar $y(t)$ iesirea. Este important de observat ca iesirea este o combinatie liniara a variabilelor de stare. In cazul particular (8) se observa ca $y = x_1$ asadar iesirea este chiar una dintre variabilele de stare, $x_1(t)$ adica coordonata rotii automobilului. In continuare este necesara initializarea setului $\left[A; b; c^T; d\right]$ cu datele numerice, iar apoi apelarea functiei `MATLAB` `step` functie care afiseaza evolutia in timp a iesirii unui sistem liniar (determinat de setul $\left[A; b; c^T; d\right]$) atunci cand intrarea sistemului este o functie de tip treapta unitate. Trasati $x_1(t)$ pentru diverse valori ale lui b coeficientul de frecare vascoasa in amortizor.

Cum modificati ecuatia (8) pentru ca iesirea y sa fie $x_2(t)$ adica pozitia masei m_2 in timp?