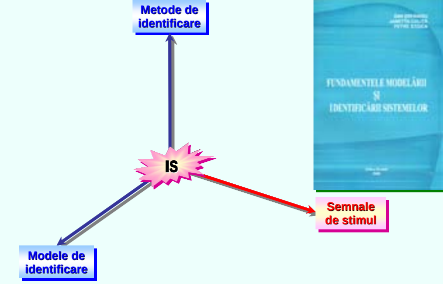
❸ Semnale de stimul



❸.❶ Necesitatea stimulării corecte a proceselor

- Stimularea **incorectă** a proceselor (în vederea identificării) poate conduce la modele matematice **inadecvate** sau **imprecise**, din cauză că o serie de **caracteristici** ale acestora **nu se mai regăsesc în modelele asociate**.

Exemplul 1

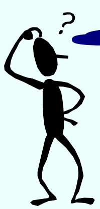
Pierderea caracteristicilor în domeniul timpului pentru un sistem de ordin I cu constantă de timp parazită

$$H(s) \overset{def}{=} \frac{K}{(1+T\,s)(1+T_p\,s)}$$

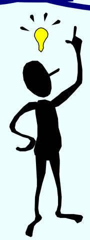
$$T_p << T$$

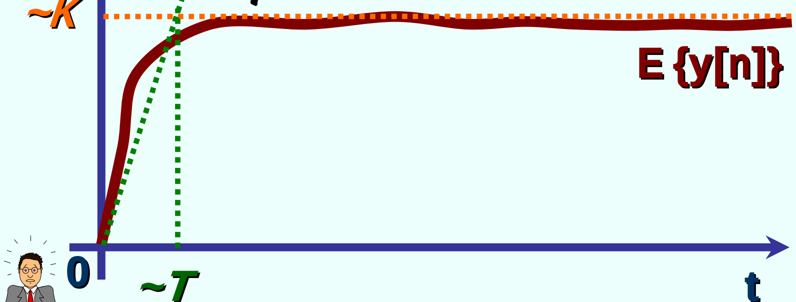
- Grosso modo, funcția de transfer relevă un **comportament similar cu al unui sistem de ordinul I**, deşi, în realitate, ea **descrie un sistem de ordinul II**.

Cum s-ar putea determina cei 3 parametri?



Prin stimularea cu o **treaptă unitară**.





T_p ?

De ce s-a pierdut informația referitoare la constanta de timp parazită?

Deoarece semnalul treaptă unitară **nu a stimulat corect sistemul**, în vederea identificării.

Comportamentul **în frecvență** al intrării, sistemului şi ieşirii poate releva mai uşor fenomenul pierderii de informație prin stimularea cu un semnal inadecvat.

☝ Constanta de timp parazită intervine în zona tranzitorie a răspunsului, efectul ei fiind insesizabil.

❸ Semnale de stimul

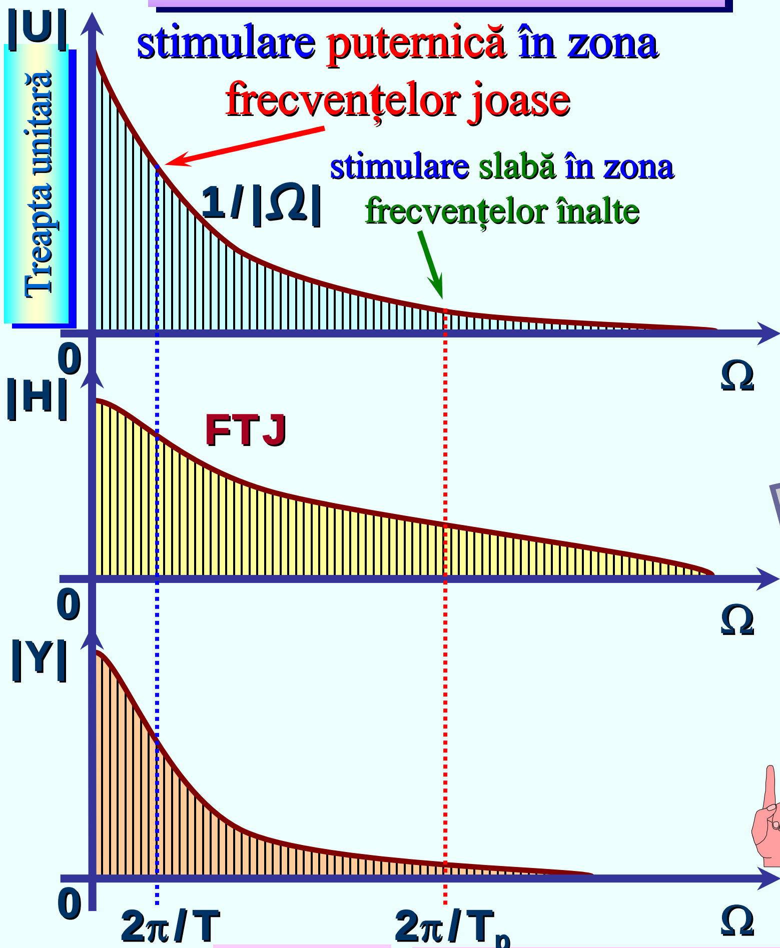
❸.❶ Necesitatea stimulării corecte a proceselor

Exemplul 1 (continuare)

Pierderea caracteristicilor în domeniul timpului pentru un sistem de ordin I cu constantă de timp parazită

$$H(s) \overset{def}{=} \frac{K}{(1+T\,s)(1+T_p\,s)}$$

Caracterizare în frecvență



TL a răspunsului indicial

$$Y(s) = H(s)U(s) = \frac{K}{s(1+Ts)(1+T_p s)}$$

$s = j\Omega$

$$Y(j\Omega) = H(j\Omega)U(j\Omega) = \frac{K}{j\Omega(1+j\Omega T)(1+j\Omega T_p)}$$

Relație spectrală

$$|Y(j\Omega)| = |H(j\Omega)||U(j\Omega)| = \frac{K}{|\Omega||1+j\Omega T||1+j\Omega T_p|} =$$

$$= \frac{K}{|\Omega|\sqrt{(1+\Omega^2T^2)(1+\Omega^2T_p^2)}}$$

$\forall \Omega \in \mathbb{R}$

$\times$

Dacă se dorește o informație consistentă și în zona constantei parazite, intrarea trebuie să solicite sistemul pe o **bandă de frecvențe mult mai largă** decît a treptei unitare.

$T_p \ll T \Rightarrow \frac{2\pi}{T} \ll \frac{2\pi}{T_p}$

☝ Informația despre constanta de timp principală este mai consistentă decît informația despre constanta de timp parazită.

❸ Semnale de stimul

❸.❶ Necesitatea stimulării corecte a proceselor

Exemplul 2 Mascarea caracteristicilor în domeniul frecvenţei pentru un oscilator afectat de o oscilaţie parazită

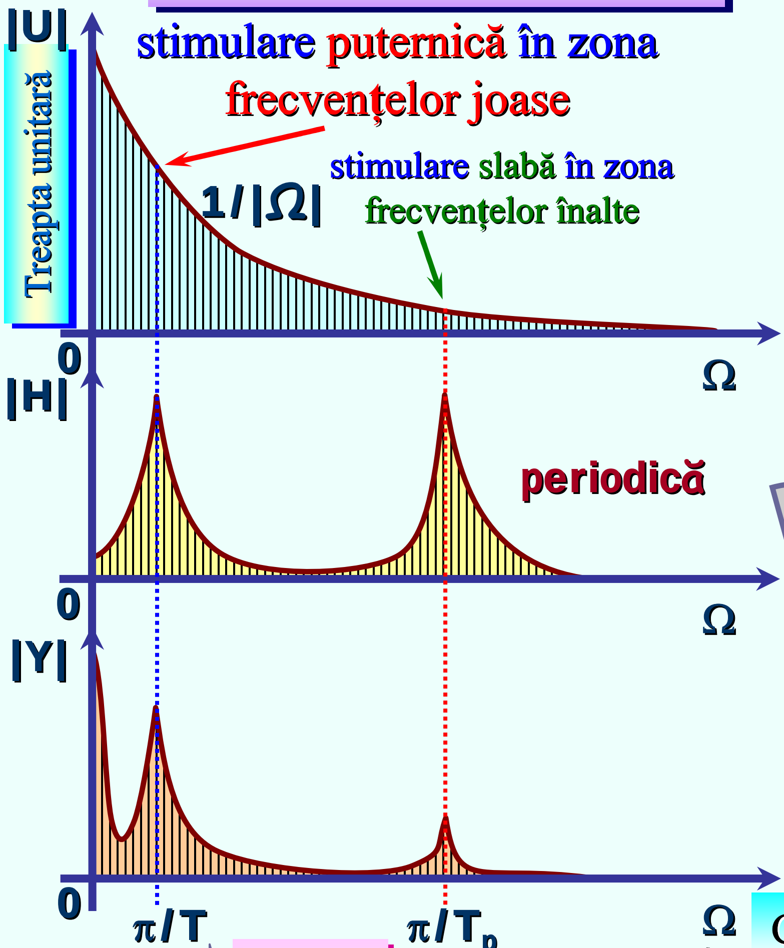
$$H(z) \overset{def}{=} \frac{K}{(1+z^{N})(1+z^{N_p})}$$

perioadă proprie de oscilaţie (N)

perioadă parazită de oscilaţie (N_p)

$N_p << N$

Caracterizare în frecvenţă



- Se consideră că sistemul discret provine de la un sistem continuu prin discretizare ideală cu o perioadă de eşantionare prestabilită.

$$H(s) \overset{def}{=} \frac{K}{\left(1+e^{sNT_s}\right)\left(1+e^{sN_pT_s}\right)} \quad \Leftarrow \quad z = e^{sT_s}$$

$s = j\Omega$

T proprie

T_p parazită

Stimulare cu o treaptă unitară

$$|Y(j\Omega)| = |H(j\Omega)||U(j\Omega)| = \frac{K}{2|\Omega|\sqrt{[1+\cos(\Omega T)][1+\cos(\Omega T_p)]}} =$$

$$= \frac{K}{4|\Omega|\cdot\left|\cos\left(\frac{\Omega T}{2}\right)\right|\cdot\left|\cos\left(\frac{\Omega T_p}{2}\right)\right|}$$

Relaţie spectrală $\forall \Omega \in \mathbb{R}$

$T_p << T \Rightarrow \frac{\pi}{T} << \frac{\pi}{T_p}$

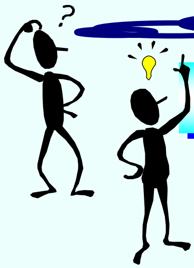
Chiar dacă treapta unitară este fundamentală în TS, în cadrul IS, ea joacă doar un rol secundar (ajută la determinarea timpului mort).

❸ Semnale de stimul

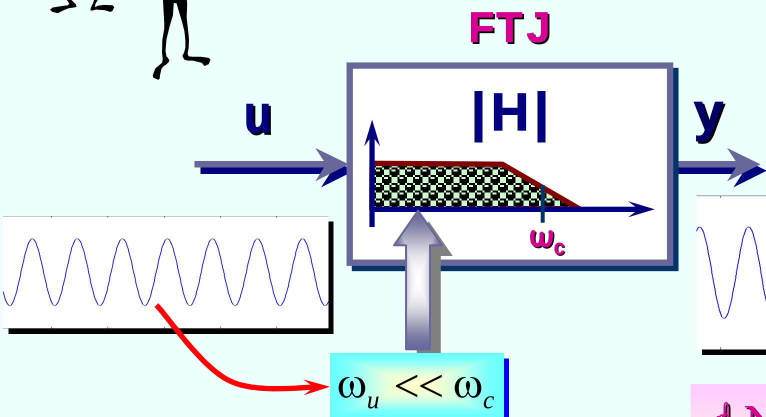
❸.❶ Necesitatea stimulării corecte a proceselor

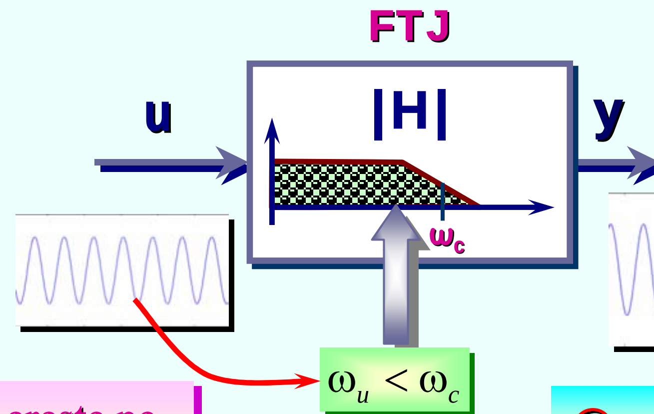
Exemplul 3 — Stimularea empirică a unui FTJ cu armonice elementare izolate

Cum s-ar putea determina pulsaţia/frecvenţa de tăiere a filtrului?



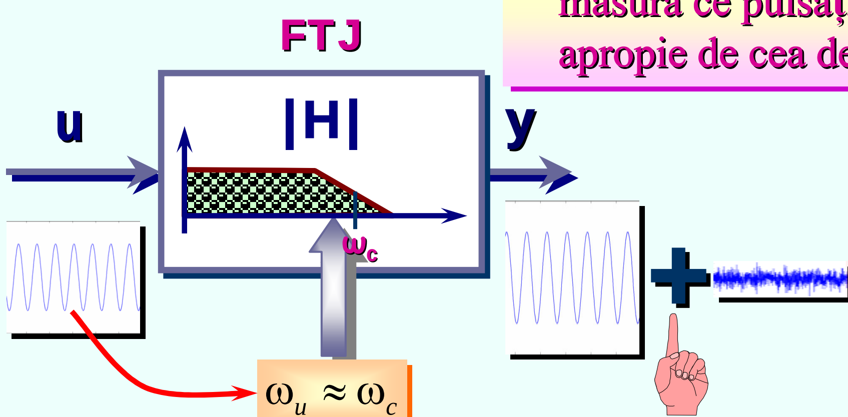
Prin stimularea cu armonice elementare de diferite pulsaţii/frecvenţe.

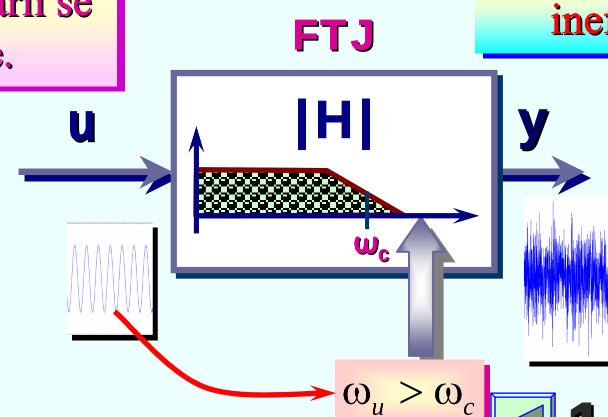




☝ Nivelul de zgomot creşte pe măsură ce pulsaţia intrării se apropie de cea de tăiere.

☹ Empiric şi ineficient!





❸ Semnale de stimul

❸.❷ Conceptul de persistență

Semnal persistent de ordin M

$$\mathbf{R}_M(u) \overset{def}{=} \begin{bmatrix} r_u[0] & r_u[1] & r_u[2] & \cdots & r_u[M-1] \\ r_u[1] & r_u[0] & r_u[1] & \cdots & r_u[M-2] \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ r_u[M-2] & \cdots & r_u[1] & r_u[0] & r_u[1] \\ r_u[M-1] & \cdots & r_u[2] & r_u[1] & r_u[0] \end{bmatrix} > 0$$

Ordinul de persistență indică numărul de valori identificabile ale secvenței pondere a unui sistem liniar discret cauzal și stabil asociat procesului furnizor de date.

Matrice Toeplitz simetrică

Matricea de auto-covarianță

☝ Inversabilă.

Sistemul Wiener-Hopf

$$\mathbf{R}_M(u)\,\boldsymbol{\theta} = \mathbf{r}_M(y,u)$$

Soluția sistemului Wiener-Hopf

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_M = \mathbf{R}_M^{-1}(u)\mathbf{r}_M(y,u) \in \mathbb{R}^M$$

Așadar Cu cît ordinul de persistență al semnalului de stimul este mai mare, cu atît secvența pondere este mai bine determinată (adică pe un orizont mai mare de timp).

Modelul de identificare este cu atît mai precis cu cît semnalul de stimul este mai persistent.

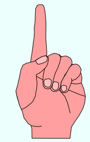
$Sp[M]$ ⇐ Clasa semnalelor persistente de ordin M.

❸ Semnale de stimul

❸.❷ Conceptul de persistență

Exercițiu

- Treapta unitară (discretă) (ca și orice semnal constant) este un semnal persistent de ordin 1.



Treapta unitară permite identificarea unei singure valori a secvenței pondere.

Care este caracterizarea în frecvență a unui semnal persistent de ordin M?

Propoziția 3

Un semnal discret este persistent de ordin M dacă și numai dacă densitatea sa spectrală de putere posedă cel puțin M linii spectrale nenule.

Demonstrație

Cum poate fi exprimată definiția originală a persistenței în domeniul frecvenței?

Folosind proprietățile operatorului de mediere statistică și ale densității spectrale de putere.

$$\mathbf{R}_M(u) \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} r_u[0] & r_u[1] & r_u[2] & \cdots & r_u[M-1] \\ r_u[1] & r_u[0] & r_u[1] & \cdots & r_u[M-2] \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ r_u[M-2] & \cdots & r_u[1] & r_u[0] & r_u[1] \\ r_u[M-1] & \cdots & r_u[2] & r_u[1] & r_u[0] \end{bmatrix}$$

$$r_u[k] \stackrel{def}{=} E\{u[n]u[n-k]\}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{R}_M(u) = E\left\{ \begin{bmatrix} u[n-1] \\ \vdots \\ u[n-M] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u[n-1] & \cdots & u[n-M] \end{bmatrix} \right\}$$

Demonstrație (Propoziția 3)

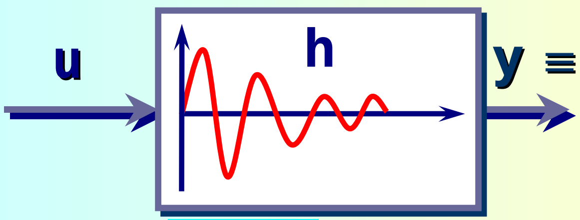
- Expresia matricii de auto-covarianță simplifică exprimarea **formei pătratice asociate**.
- Astfel, pentru orice vector determinist $\mathbf{x} = [x_1 \ \cdots \ x_M]^T \in \mathbb{R}^M$ rezultă:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{R}_M(u)\mathbf{x} = E\left\{ \mathbf{x}^T \begin{bmatrix} u[n-1] \\ \vdots \\ u[n-M] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u[n-1] & \cdots & u[n-M] \end{bmatrix} \mathbf{x} \right\} = E\left\{ \left(x_1 u[n-1] + \cdots + x_M u[n-M] \right)^2 \right\} \geq 0.$$

☝ Aşadar, matricea de auto-covarianţă este şi pozitiv (semi-)definită.

- Interpretare: forma pătratică se exprimă ca **dispersia** unui semnal obținut la ieşirea unui sistem de tip **FIR**.

Sistem liniar FIR



$$y[n] = \sum_{m=1}^{M} h[m]u[n-m] = \sum_{m=1}^{M} x_m u[n-m] \ , \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\sigma_y^2 = E\left\{ y^2[n] \right\} = E\left\{ \left(x_1 u[n-1] + \cdots + x_M u[n-M] \right)^2 \right\}$$

$h[0] = 0$

$h[1] = x_1$

$h[2] = x_2$

$\vdots$

$h[M] = x_M$

- Dispersia se obține însă şi folosind **densitatea spectrală** a ieşirii sistemului:

$$\sigma_y^2 = r_y[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \phi_y(\omega)\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left| X\left(e^{j\omega}\right) \right|^2 \phi_u(\omega)\, d\omega.$$

Transferul densității spectrale prin sisteme liniare

$$H\left(q^{-1}\right) = X\left(q^{-1}\right) = \sum_{m=1}^{M} x_m q^{-m}$$

funcția de sistem

Polinom de grad (*M*-1) ☞

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{m=1}^{M} x_m e^{-j\omega m} = e^{-j\omega}\left(x_1 + x_2 e^{-j\omega} + \cdots + x_M e^{-j\omega(M-1)} \right)$$

$\forall \omega \in \mathbb{R}$

răspunsul în frecvență

❸ Semnale de stimul

❸.❷ Conceptul de persistență

Demonstrație (Propoziția 3)

Aşadar $\mathbf{x}^T\mathbf{R}_M(u)\mathbf{x} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi}\left|X(\mathrm{e}^{j\omega})\right|^2 \phi_u(\omega)\,d\omega$

☝ Ecuație care arată cum se transferă informația despre persistență din timp în frecvență şi reciproc.

$\mathbf{x}^T\mathbf{R}_M(u)\mathbf{x} = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{x} = \mathbf{0}$ dacă şi numai dacă $\left|X(\mathrm{e}^{j\omega})\right|^2 \phi_u(\omega) = 0$, $\forall\,\omega\in\mathbb{R}$

semnalul este persistent de ordin M

(forma pătratică este nedegenerată)

Semnalul discret este persistent de ordin M. ⇒ **Densitatea sa spectrală de putere posedă cel puțin M linii spectrale nenule.**

- Raționament de tip **reducere la absurd**.
- Se presupune, prin absurd, că **densitatea spectrală este nenulă într-un număr de pulsații mai mic decît** M. ⇒ $\exists\, m < M \;\&\; \{\omega_i\}_{i\in\overline{1,m}} : \phi_u(\omega_i) > 0,\ \forall\, i\in\overline{1,m}.$
  (în rest, densitatea spectrală este nulă)
- Se va construi un vector nenul $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^M$ pentru care $\mathbf{x}^T\mathbf{R}_M(u)\mathbf{x} = 0$, ceea ce contrazice ipoteza de la care s-a plecat.
- Vectorul căutat este format din coeficienții următorului “polinom frecvențial”, ale cărui rădăcini sunt chiar pulsațiile $\{\omega_i\}_{i\in\overline{1,m}}$:

$$X(\mathrm{e}^{j\omega}) \overset{def}{=} \mathrm{e}^{-j\omega}\underbrace{\left(1-\mathrm{e}^{-j(\omega-\omega_1)}\right)\cdots\cdots\left(1-\mathrm{e}^{-j(\omega-\omega_m)}\right)}_{\text{☝ Polinom de grad } m} X_0(\mathrm{e}^{j\omega}),\quad \forall\,\omega\in\mathbb{R}.$$

polinom de completare pînă la gradul M

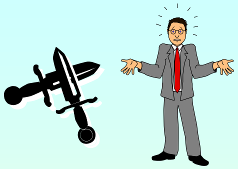
$X_0(\mathrm{e}^{j\omega_i}) \neq 0$, $\forall\, i\in\overline{1,m}$

❸ Semnale de stimul

❸.❷ Conceptul de persistență

Demonstrație (Propoziția 3)

- Polinomul frecvențial nefiind identic nul, cel puțin un coeficient este nenul, astfel că vectorul coeficienților este nenul.
- Mai mult: $\mathbf{x}^T \mathbf{R}_M(u)\mathbf{x} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \boxed{\left|X(e^{j\omega})\right|^2} \phi_u(\omega)\, d\omega = 0.$



☝ Absurd.

0 pentru $\omega \in \{\omega_i\}_{i\in\overline{1,m}}$

0 pentru $\omega \notin \{\omega_i\}_{i\in\overline{1,m}}$

Densitatea sa spectrală de putere posedă cel puțin M linii spectrale nenule. ⇒ **Semnalul discret este persistent de ordin M.**

- Să presupunem că setul de pulsații pentru care densitatea spectrală nu se anulează este $\{\omega_i\}_{i\in\overline{1,m}}$, cu $m \geq M$. Astfel: $\phi_u(\omega_i) > 0,\ \forall i \in \overline{1,m}.$
- Pentru a testa persistența de ordin M a semnalului, trebuie rezolvată ecuația:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{R}_M(u)\mathbf{x} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \underbrace{\left|X(e^{j\omega})\right|^2 \phi_u(\omega)}_{\geq 0}\, d\omega = 0 \Leftrightarrow \boxed{e^{j\omega} X(e^{j\omega})} = 0,\ \forall \omega \in \{\omega_i\}_{i\in\overline{1,m}}$$

necunoscuta ecuației

☝ Polinom de grad $(M\text{-}1)$ cu $m > M\text{-}1$ rădăcini.

$$X \equiv 0$$

- Aşadar, unica soluție a ecuației este cea nulă.

$$\mathbf{R}_M(u) > 0$$

❸ Semnale de stimul

❸.❸ Proprietăţi ale semnalelor persistente

$\mathcal{S}p_1$ Imbricarea claselor de semnale persistente

Exerciţiu

Dacă un semnal este persistent de ordin M, atunci este persistent şi de ordin m, cu $m \leq M$.

$$\mathcal{S}p[1] \supset \mathcal{S}p[2] \supset \cdots \supset \mathcal{S}p[m] \supset \cdots \supset \mathcal{S}p[M] \supset \cdots \supset \mathcal{S}p[\infty]$$

$\mathcal{S}p_2$ Persistenţa unui semnal periodic

Exerciţiu

Dacă un semnal este periodic de perioadă P, atunci ordinul său de persistenţă este cel mult egal cu perioada.

$\mathcal{S}p_3$ Conservarea persistenţei la ieşirea procesului furnizor de date

Exerciţiu

Fie $u \in \mathcal{S}p[M]$ un semnal care stimulează un proces/sistem cu următoarea proprietate: funcţia sa de sistem $H(q^{-1})$ nu are zerouri pe cercul unitar. Atunci semnalul de ieşire y are proprietatea de a conserva ordinul de persistenţă al intrării: $y \in \mathcal{S}p[M]$.

$\mathcal{S}p_4$ Cazuri de stimulare nedorite în IS

Exerciţiu

Fie un sistem de tip FIR cu secvenţa pondere $\{h[m]\}_{m \in \overline{1,M}}$. Se stimulează sistemul cu un semnal u şi se obţine semnalul de ieşire y.

a. Dacă $u \in \mathcal{S}p[M]$ şi totuşi $y \equiv 0$, atunci $h \equiv 0$.

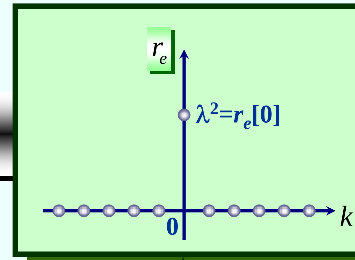
b. Dacă $u \in \mathcal{S}p[m]$, cu $m < M$, atunci se poate construi o secvenţă pondere nebanală h, de dimensiune M, astfel încît $y \equiv 0$.

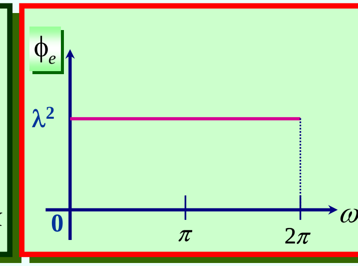
☝ Experimentul de identificare poate eşua din cauza stimulării inadecvate a procesului.

❸ Semnale de stimul

❸.❹ Clase de semnale persistente

Semnalul ideal → **Zgomotul alb**





Propoziţia 3 → $e \in \mathcal{S}p[\infty]$

☝ Nu poate fi generat pe cale artificială.

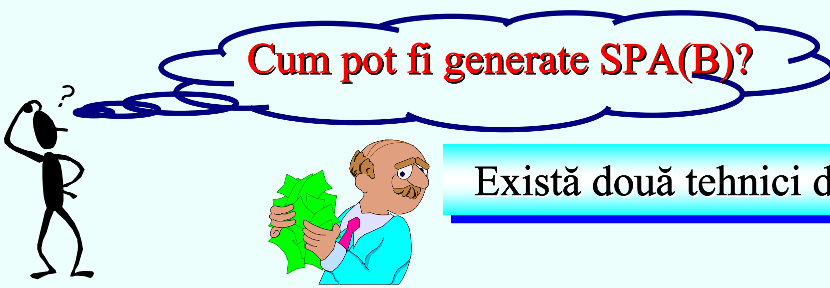
Se încearcă generarea unor semnale care să aproximeze zgomotul alb în sensul auto-covarianţei.

- Cu cît secvenţa de auto-covarianţă a semnalului artificial este “mai apropiată” de cea a zgomotului alb, cu atît acesta este mai bine aproximat.

☝ Cu toate acestea, semnalele artificiale au ordin de persistenţă finit.

Semnale practice → **Semnal Pseudo-Aleator (Binar) (SPAB)**

- Semnale generate cu ajutorul unui mijloc automat de calcul.
- În consecinţă, SPA(B) sunt semnale periodice.



Există două tehnici de bază.

- **Hardware**
- **Software**