❷ Modele de identificare

❷.❹ Modele parametrice

Forma generală

$$\begin{cases} \mathbf{y}[n] = \mathbf{H}(q^{-1},\boldsymbol{\theta})\mathbf{u}[n] + \mathbf{G}(q^{-1},\boldsymbol{\theta})\mathbf{e}[n] \\ E\{\mathbf{e}[n]\mathbf{e}^T[m]\} = \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\theta})\delta_0[n-m] \end{cases} \quad \forall\, n,m \in \mathbb{N}$$

$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{nu}$ ➔ Vectorul semnalelor de stimul (intrare).

$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{ny}$ ➔ Vectorul semnalelor de răspuns (ieşire).

$\mathbf{e} \in \mathbb{R}^{ny}$ ➔ Vectorul perturbaţiilor externe, de tip zgomot alb.

☝ Există tot atîtea perturbaţii scalare cîte canale de ieşire măsurabile.

$\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}^{ny\times ny}$ ➔ Matricea corelaţiilor dintre perturbaţii.

$\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\theta}) \geq 0$

- Componentele perturbaţiilor nu sunt corelate între ele la diferite momente de timp (vezi simbolul lui Kornecker).
- Dacă matricea este diagonală, diferitele componente ale perturbaţiilor nu sunt corelate între ele la acelaşi moment de timp.

$\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{n\theta}$ ➔ Vectorul parametrilor necunoscuţi.

indice structural

☝ De asemenea necunoscut.

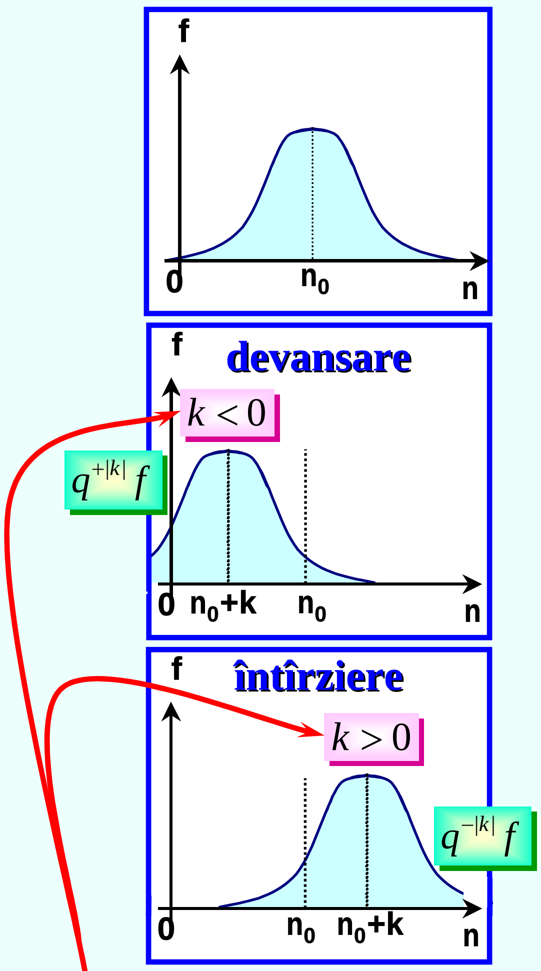
q^{-1} ➔ Operatorul de întîrziere cu un pas.

$$\left(q^{-1} f\right)[n] \overset{def}{=} f[n-1] \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$$

Generalizare q^{-k} ➔ Operatorul de translatare temporală cu $|k|$ paşi.

$$\left(q^{-k} f\right)[n] \overset{def}{=} f[n-k] \quad \forall\, k,n \in \mathbb{Z}$$

Efectul practic al operatorului de translatare temporală



☝ Tipul inegalității sugerează sensul deplasării temporale.

Proprietăți

- **Convenție:** $q^0 f \equiv f$
- **Liniaritate:** $q^{-k}(\alpha f + \beta g) \equiv \alpha\left(q^{-k} f\right) + \beta\left(q^{-k} g\right)$
- **Principiul cumulării deplasărilor temporale:**

$$q^{-k} \circ q^{-m} \equiv q^{-(m+k)} \quad \forall\, m,k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} \mathbf{y}[n] = \mathbf{H}(q^{-1},\boldsymbol{\theta})\mathbf{u}[n] + \mathbf{G}(q^{-1},\boldsymbol{\theta})\mathbf{e}[n] \\ E\{\mathbf{e}[n]\mathbf{e}^T[m]\} = \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\theta})\delta_0[n-m] \end{cases} \quad \forall\, n,m \in \mathbb{N}$$

$\mathbf{H}(q^{-1},\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}^{ny \times nu}$ ➔ **Matricea de sistem a filtrului util.**

$\mathbf{G}(q^{-1},\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}^{ny \times ny}$ ➔ **Matricea de sistem a filtrului de zgomot.**

- **Uzual, aceste matrici sunt formate din elemente raționale, adică rapoarte de polinoame în q^{-1}.**
- Coeficienții polinoamelor fac parte din vectorul parametrilor necunoscuți, iar gradele lor sunt indicii structurali ai modelului .

Ipoteze fundamentale

$\mathcal{HM}_1$ Stabilitate

Atît matricea de sistem a filtrului util $\mathrm{H}(q^{-1},\theta)$ cît şi matricea de sistem a filtrului de zgomot $\mathrm{G}(q^{-1},\theta)$ trebuie să fie **(asimptotic) stabile**.

$\mathcal{HM}_2$ Cauzalitate

Cele două filtre trebuie să fie **realizabile fizic** (implementbile).
Aceasta revine la proprietatea ca matricile de sistem $\mathrm{H}(q^{-1},\theta)$ şi $\mathrm{G}(q^{-1},\theta)$ să fie **cauzale** **(adică toate secvenţele pondere implicate să fie nule în stînga originii timpului normalizat)**.

$\mathcal{HM}_3$ Transmisie intrare-ieşire

Intrarea **nu se poate transmite instantaneu la ieşire**. Filtrul util posedă un timp mort intrinsec de cel puţin o perioadă de eşantionare.
Aceasta revine la: $\mathrm{H}(0,\theta) = \mathbf{0}_{ny\times nu}$ (matricea nulă).

$\mathcal{HM}_4$ Transmisie perturbaţie-ieşire

Perturbaţia **se transmite întotdeauna instantaneu la ieşire**.
Măsurătorile sunt întotdeauna afectate de un zgomot instantaneu.
Aceasta revine la: $\mathrm{G}(0,\theta) = \mathbf{I}_{ny}$ (matricea unitate).

❷ Modele de identificare

❷.❹ Modele parametrice

Ipoteze fundamentale (continuare)

$\mathcal{HM}_5$ Distribuţia Gaussiană

În absenţa altor specificaţii, densităţile de probabilitate ale componentelor perturbaţiei sunt în mod implicit Gaussiene.

- Aceste ipoteze sunt destul de naturale (puţin restrictive).
- Ipoteza stabilităţii este uneori înlocuită prin:

$\mathcal{HM}'_1$ Stabilitate (variantă)

Următoarele matrici de sistem trebuie să fie asimptotic stabile: $\mathbf{G}^{-1}(q^{-1},\boldsymbol{\theta})$ şi $\mathbf{G}^{-1}(q^{-1},\boldsymbol{\theta})\mathbf{H}(q^{-1},\boldsymbol{\theta})$.

- Aceasta corespunde unei ecuaţii generale în care filtrul de zgomot apare inversat (dacă este posibil).

$$\begin{cases} \mathbf{G}^{-1}(q^{-1},\boldsymbol{\theta})\mathbf{y}[n] - \mathbf{G}^{-1}(q^{-1},\boldsymbol{\theta})\mathbf{H}(q^{-1},\boldsymbol{\theta})\mathbf{u}[n] = \mathbf{e}[n] \\ E\{\mathbf{e}[n]\mathbf{e}^T[m]\} = \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\theta})\delta_0[n-m] \end{cases} \quad \forall\, n,m \in \mathbb{N}$$

☝ Exprimare care pune în evidenţă faptul că prin filtrarea cu inversul filtrului de zgomot a diferenţei dintre datele măsurate şi cele simulate se obţine zgomotul alb generator al perturbaţiilor.

Clase uzuale de modele liniare

ARMAX | RSISO | De stare

Clasa ARMAX

ARMAX[na,nb,nc,nk]

indici structurali (na, nb, nc) ; întîrziere intrinsecă (nk)

$$\begin{cases} A(q^{-1})y[n] = B(q^{-1})u[n] + C(q^{-1})e[n] \\ E\{e[n]e[m]\} = \lambda^2\delta_0[n-m] \end{cases} \quad \forall\, n,m \in \mathbb{N}$$

$$\begin{array}{l} A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \cdots + a_{na} q^{-na} \\ B(q^{-1}) = \quad (b_1 q^{-1} + \cdots + b_{nb} q^{-nb}) q^{1-nk} \\ C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + \cdots + c_{nc} q^{-nc} \end{array}$$

(polinoame)

Uzual $nk = 1$ ⇒ **ARMAX[na,nb,nc]**

$$A(q^{-1})y[n] = y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + \cdots + a_{na} y[n-na]$$

➔ Componenta **A**uto-**R**egresivă

valori regresate în timp ale ieşirii

$$C(q^{-1})e[n] = e[n] + c_1 e[n-1] + c_2 e[n-2] + \cdots + c_{nc} e[n-nc]$$

➔ Componenta de **M**edie **A**lunecătoare

(auto-regresivă în perturbaţie)

$$B(q^{-1})u[n] = b_1 u[n-nk] + b_2 u[n-nk-1] + \cdots + b_{nb} u[n-nk-nb+1]$$

➔ Componenta de control e**X**ogen

(auto-regresivă în intrare)

❷ Modele de identificare

❷.❹ Modele parametrice

Clasa ARMAX

Ecuaţie cu diferenţe

$$y[n]+a_1y[n-1]+a_2y[n-2]+\cdots+a_{na}y[n-na]=b_1u[n-nk]+b_2u[n-nk-1]+\cdots+b_{nb}u[n-nk-nb+1]+$$
$$+e[n]+c_1e[n-1]+c_2e[n-2]+\cdots+c_{nc}e[n-nc] \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

☝ Analogul în timp discret al conceptului de ecuaţie diferenţială.

$$y(t)+a_1\dot{y}(t)+a_2\ddot{y}(t)+\cdots+a_{na}y^{(na)}(t)=b_1u(t-\tau)+b_2\dot{u}(t-\tau)+\cdots+b_{nb}u^{(nb)}(t-\tau)+$$
$$+e(t)+c_1\dot{e}(t)+c_2\ddot{e}(t)+\cdots+c_{nc}e^{(nc)}(t) \quad \forall t\in\mathbb{R}_+$$

Obiectiv: Determinarea modelului de identificare din date achiziţionate la intrarea şi ieşirea unui proces.

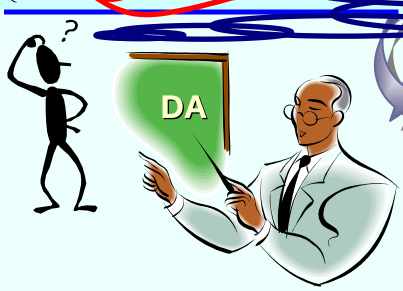
~~**Obiectiv**: Rezolvarea ecuaţiei cu diferenţe, plecînd de la o iniţializare dată.~~

Necunoscutele modelului
- ➔ parametrii: $\{a_i\}_{i\in\overline{1,na}}$ $\{b_i\}_{i\in\overline{1,nb}}$ $\{c_i\}_{i\in\overline{1,nc}}$
- ➔ indicii scructurali: na nb nc
- ➔ dispersia zgomotului alb: λ^2

În mod normal, întîrzierea intrinsecă este cunoscută, altfel ea este implicit considerată unitară.

$$\begin{cases} A(q^{-1})y[n]=B(q^{-1})u[n]+C(q^{-1})e[n] \\ E\{e[n]e[m]\}=\lambda^2\delta_0[n-m] \end{cases} \quad \forall n,m\in\mathbb{N}$$

Este clasa ARMAX un caz particular al modelului general de identificare?



$$\begin{cases} y[n]=\dfrac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u[n]+\dfrac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}e[n] \\ E\{e[n]e[m]\}=\lambda^2\delta_0[n-m] \end{cases} \quad \forall n,m\in\mathbb{N}$$

$$H(q^{-1},\boldsymbol{\theta})\overset{def}{=}\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}=H(q^{-1})$$

$$G(q^{-1},\boldsymbol{\theta})\overset{def}{=}\frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}=G(q^{-1})$$

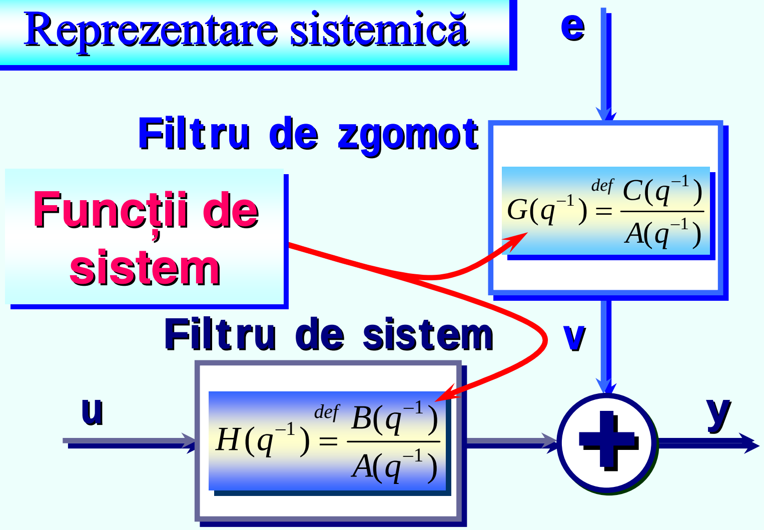
SISO

❷ Modele de identificare

❷.❹ Modele parametrice

Clasa ARMAX

Reprezentare sistemică



Ce legătură există cu funcţiile de transfer din TS?

Cele două concepte reprezintă matematic **entităţi cu naturi diferite**, dar se construiesc folosind **aceiaşi coeficienţi** (parametri).

Funcţie de sistem ⇒ **Operator** care acţionează asupra unor funcţii definite pe un domeniu temporal.

Funcţie de transfer ⇒ **Funcţie complexă** exprimată cu ajutorul Transformatelor Laplace sau Z.

Exemplu Filtrul de sistem cu întîrziere unitară

Funcţie de sistem

$$H(q^{-1}) \overset{def}{=} \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} = \frac{b_1 q^{-1} + \cdots + b_{nb} q^{-nb}}{1 + a_1 q^{-1} + \cdots + a_{na} q^{-na}}$$

Funcţie de transfer

$$H(z) = H(q^{-1})\Big|_{q^{-1}=z^{-1}} = z^{na-nb} \frac{b_1 z^{nb-1} + \cdots + b_{nb}}{z^{na} + a_1 z^{na-1} + \cdots + a_{na}}$$

Teorema întîrzierii (TZ)

$$\mathcal{Z}(q^{-1}h)(z) = z^{-1}\mathcal{Z}(h)(z)$$

Corespondenţă remarcabilă

$$q^{-1} \Leftrightarrow z^{-1}$$

☝ Funcţia de sistem este mai bine adaptată contextului IS şi PS, în timp ce funcţia de transfer este specifică domeniului TS.

❷ Modele de identificare

❷.❹ Modele parametrice

Clasa ARMAX

Funcția de sistem poate fi utilizată în rezolvarea ecuațiilor cu diferențe

Exemplu — Funcție de sistem rațională

$$H(q^{-1}) \overset{def}{=} \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} = \frac{b_1 q^{-1} + \cdots + b_{nb} q^{-nb}}{1 + a_1 q^{-1} + \cdots + a_{na} q^{-na}} \Rightarrow y \equiv H(q^{-1})u$$

Două tehnici de determinare a ieşirii

Iterativă (practică)

Inițializare

$$\begin{cases} u[na-nb] \quad u[na-nb+1] \quad \cdots \quad u[na-1] \\ y[0] \quad y[1] \quad \cdots \quad y[na-1] \end{cases}$$

☝ **(na+nb)** date.

Iterare

$$y[na] = -a_1 y[na-1] - a_2 y[na-2] - \cdots - a_{na} y[0] + b_1 u[na-1] + b_2 u[na-2] + \cdots + b_{nb} u[na-nb]$$

$$y[na+1] = -a_1 y[na] - a_2 y[na-1] - \cdots - a_{na} y[1] + b_1 u[na] + b_2 u[na-1] + \cdots + b_{nb} u[na-nb+1]$$

$\vdots$

$$y[n] = -a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] - \cdots - a_{na} y[n-na] + b_1 u[n-1] + b_2 u[n-2] + \cdots + b_{nb} u[n-nb] \quad \forall\, n \ge na$$

Directă (teoretică)

$\frac{B}{A}$ **Prin împărțirea infinită a polinoamelor**

$$\begin{array}{l|l} \cancel{b_1 q^{-1}} + b_2 q^{-2} + \cdots + b_{nb} q^{-nb} & 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \cdots + a_{na} q^{-na} \\ \cancel{-b_1 q^{-1}} - a_1 b_1 q^{-2} - \cdots & \hline \\ \hline \cancel{(b_2 - a_1 b_1) q^{-2}} + (b_3 - a_2 b_1) q^{-3} + \cdots & b_1 q^{-1} + (b_2 - a_1 b_1) q^{-2} + \cdots \\ \cancel{(a_1 b_1 - b_2) q^{-2}} + a_1 (a_1 b_1 - b_2) q^{-3} + \cdots & \\ \hline & [(b_3 - a_2 b_1) + a_1 (a_1 b_1 - b_2)] q^{-3} + \cdots \end{array}$$

α_0 α_1 α_2

$\vdots$

$$y[n] \equiv H(q^{-1}) u[n] = \sum_{m \ge 0} \alpha_m u[n-m-1] \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

☝ **Neimplementabilă.**

❷ Modele de identificare

❷.❹ Modele parametrice

Clasa ARMAX

Vectorul parametrilor necunoscuţi

Natural

$$\boldsymbol{\theta}^T \overset{def}{=} \left[a_1 \; a_2 \cdots a_{na} \;\middle|\; b_1 \; b_2 \cdots b_{nb} \;\middle|\; c_1 \; c_2 \cdots c_{nc} \right]$$

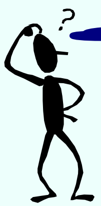
$$n\theta = na + nb + nc$$

Extins

$$\boldsymbol{\theta}^T \overset{def}{=} \left[a_1 \; a_2 \cdots a_{na} \;\middle|\; b_1 \; b_2 \cdots b_{nb} \;\middle|\; c_1 \; c_2 \cdots c_{nc} \;\middle|\; \lambda^2 \right]$$

Rareori utilizat.

$$n\theta = na + nb + nc + 1$$



Cum se pot verifica ipotezele fundamentale?

HM₃ Transmisie intrare-ieşire — $b_0 = 0$

HM₄ Transmisie perturbaţie-ieşire — $c_0 \neq 0$

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \cdots + a_{na} q^{-na}$$

$$B(q^{-1}) = 0\,(b_1 q^{-1} + \cdots + b_{nb} q^{-nb}) q^{1-nk}$$

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + \cdots + c_{nc} q^{-nc}$$

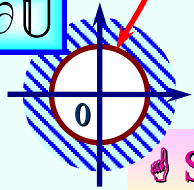
HM₁ Stabilitate

- Deoarece ambele filtre au aceiaşi poli, daţi de polinomul $\boldsymbol{A}$, modelul ARMAX este stabil dacă şi numai dacă polinomul $\boldsymbol{A}$ este stabil.

Polii lui $\boldsymbol{A(z)}$ trebuie să fie în discul unitar.

$$A(z) = z^{-na}\left(z^{na} + a_1 z^{na-1} + \cdots + a_{na}\right)$$

cercul unitar $\partial\mathbb{U}$



Stabilitatea polinoamelor sistemelor liniare discrete se testează cu ajutorul Criteriului Schür-Cohn.

Exemplu — Sistem de ordin I

$$H(q^{-1}) \overset{def}{=} \frac{1}{1 + a q^{-1}}$$

$$h[n] = \begin{cases} (-a)^n & , \; n \geq 0 \\ 0 & , \; n < 0 \end{cases}$$

secvenţa pondere cauzală

Stabil $\sum_{n \geq 0} |h[n]| < \infty$

$$\sum_{n \geq 0} |h[n]| = \sum_{n \geq 0} a^n = \frac{1}{1-a} \iff |a| < 1$$