Teorema fundamentală a MCMMP (continuare)

Demonstrație (Teorema 2)

- În continuare, va fi exprimată estimația vectorului perturbației, în vederea determinării unei expresii adecvate şi pentru dispersia estimată a zgomotului alb.

$$\hat{\mathbf{V}} \overset{def}{=} [\hat{v}[1]\ \ \hat{v}[2]\ \cdots\ \hat{v}[N]]^T \in \mathbb{R}^N$$

➔ Vectorul global estimat al perturbațiilor.

$$\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{Y} - \mathbf{\Phi}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{Y} - \mathbf{\Phi}\left(\mathbf{\Phi}^T\mathbf{\Phi}\right)^{-1}\mathbf{\Phi}^T\mathbf{Y} = \mathbf{Q}\mathbf{Y}$$

Vectorul perturbației se poate estima proiectînd vectorul datelor de ieşire pe hiperplanul parazit.

- Operatorul de deparazitare fiind ortogonal pe cel reprezentat de matricea regresorilor, estimația perturbației se poate obține prin proiecția perturbației necunoscute pe hiperplanul parazit.

$$\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{Q}\mathbf{Y} = \mathbf{Q}(\mathbf{\Phi}\boldsymbol{\theta}^* + \mathbf{V}) = \mathbf{Q}\mathbf{V}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{\Phi}\boldsymbol{\theta}^* + \mathbf{V}$$

- Rezultă imediat că: $\hat{\lambda}^2_{\gamma_N} = \dfrac{1}{\gamma_N}\hat{\mathbf{V}}^T\hat{\mathbf{V}} = \dfrac{1}{\gamma_N}\mathbf{V}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{V} = \dfrac{1}{\gamma_N}\mathbf{V}^T\mathbf{Q}^2\mathbf{V} = \dfrac{1}{\gamma_N}\mathbf{V}^T\mathbf{Q}\mathbf{V}$ (datorită proprietăților operatorului $\mathbf{Q}$)

- Acum, se pot demonstra concluziile teoremei.

1. **Nedevierea estimațiilor parametrilor necunoscuți**

$$E\{\hat{\boldsymbol{\theta}}_N\} = \boldsymbol{\theta}^* + E\left\{\left(\mathbf{\Phi}^T\mathbf{\Phi}\right)^{-1}\mathbf{\Phi}^T\mathbf{V}\right\} \underset{\text{a.}}{=} \boldsymbol{\theta}^* + \left(\mathbf{\Phi}^T\mathbf{\Phi}\right)^{-1}\mathbf{\Phi}^T \cancel{E\{\mathbf{V}\}} \underset{\text{c.}}{=} \boldsymbol{\theta}^*.$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_N = \boldsymbol{\theta}^* + \left(\mathbf{\Phi}^T\mathbf{\Phi}\right)^{-1}\mathbf{\Phi}^T\mathbf{V}$$

❹ Metode de identificare şi validare

❹.❷ Metoda Celor Mai Mici Pătrate

Teorema fundamentală a MCMMP (continuare)

Demonstraţie (Teorema 2)

2. Matricea de auto-covarianţă a erorii de estimare

$$\mathbf{P}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N) \overset{def}{=} E\left\{(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N - \boldsymbol{\theta}^*)(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N - \boldsymbol{\theta}^*)^T\right\} = E\left\{\left(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi}\right)^{-1}\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{V}\mathbf{V}^T\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi}\right)^{-1}\right\} \overset{\text{a.}}{=}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_N = \boldsymbol{\theta}^* + \left(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi}\right)^{-1}\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{V}$$

$$= \left(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi}\right)^{-1}\boldsymbol{\Phi}^T \underbrace{E\left\{\mathbf{V}\mathbf{V}^T\right\}}_{\lambda^2\mathbf{I}_N}\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi}\right)^{-1} \overset{\text{c.}}{=} \lambda^2\left(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi}\right)^{-1}\cancel{\left(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi}\right)}\cancel{\left(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi}\right)}^{-1} = \lambda^2\left(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi}\right)^{-1}.$$

3. Consistenţa estimaţiilor parametrilor necunoscuţi

$$\lim_{N\to\infty}\hat{\boldsymbol{\theta}}_N = \boldsymbol{\theta}^* + \lim_{N\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}[n]\boldsymbol{\varphi}^T[n]\right)^{-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}[n]v[n]\right)\right\} \overset{\text{a.\&b.}}{=} \boldsymbol{\theta}^* + \left\langle\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\varphi}^T\right\rangle^{-1}E\{\boldsymbol{\varphi}[n]v[n]\} \overset{\text{a.}}{=}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_N = \boldsymbol{\theta}^* + \left(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi}\right)^{-1}\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{V}$$

media aritmetică ideală a produselor $\boldsymbol{\varphi}[n]\boldsymbol{\varphi}^T[n]$

$$= \boldsymbol{\theta}^* + \left\langle\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\varphi}^T\right\rangle^{-1}\boldsymbol{\varphi}[n]\cancel{E\{v[n]\}} \overset{\text{c.}}{=} \boldsymbol{\theta}^*.$$

Demonstraţia s-a bazat pe faptul că limita şirului matricilor $\mathbf{R}_N$ continuă să fie inversabilă cel puţin pentru o realizare infinită a procesului furnizor de date.

☝ Consistenţa este cea mai importantă proprietate statistică.

❹ Metode de identificare şi validare

❹.❷ Metoda Celor Mai Mici Pătrate

Teorema fundamentală a MCMMP (continuare)

Demonstraţie (Teorema 2)

4. Eficienţa estimaţiilor parametrilor necunoscuţi

$$\underbrace{\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi}\right)^{-1}\boldsymbol{\Phi}^T}_{\hat{\mathbf{A}}\in\mathbb{R}^{n\theta\times N}}\mathbf{Y} \Rightarrow \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{Y} \in \boldsymbol{\Gamma}$$

a. Estimaţia oferită de MCMMP face parte din clasa de estimaţii definită în enunţul teoremei.

- Pentru simplitate, indicele N va fi omis din notaţia vectorului parametrilor necunoscuţi.
- Fie $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{Y} \in \Gamma$ o altă estimaţie nedeviată din clasa Γ, eventual diferită de cea oferită de **MCMMP**.

Nedeviere $\Rightarrow$ $E\{\tilde{\boldsymbol{\theta}}\} = \boldsymbol{\theta}^* \Leftrightarrow E\left\{\tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\theta}^* + \mathbf{V})\right\} \overset{a.}{=} \tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\theta}^* + \cancel{E\{\mathbf{V}\}}) \overset{c.}{=} \tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\theta}^* = \boldsymbol{\theta}^*$

$$\Leftrightarrow \tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{I}_{n\theta}$$

- Conform definiţiei, estimaţia $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ este cel puţin tot atît de eficientă ca estimaţia $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ dacă:

$$\mathbf{P}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \le \mathbf{P}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) \Leftrightarrow \mathbf{P}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) - \mathbf{P}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \ge \mathbf{0}.$$

- Pentru a demonstra această inegalitate, se pleacă de la operatorul liniar $\boldsymbol{\Delta} \overset{def}{=} \tilde{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{A}}$, care verifică proprietatea remarcabilă de a fi ortogonal pe operatorul reprezentat de matricea regresorilor (ca şi operatorul Q):

$$\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Phi} = \tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\Phi} - \hat{\mathbf{A}}\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{I}_{n\theta} - \mathbf{I}_{n\theta} = \mathbf{0}.$$

- Cu ajutorul operatorului Δ, se poate determina o relaţie între cele două estimaţii:

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{Y} = (\boldsymbol{\Delta} + \hat{\mathbf{A}})\mathbf{Y} = \boldsymbol{\Delta}\mathbf{Y} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \underset{\mathbf{Y} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\theta}^* + \mathbf{V}}{=} \boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\theta}^* + \mathbf{V}) + \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{V}.$$

Teorema fundamentală a MCMMP (continuare)

Demonstraţie (Teorema 2)

4. Eficienţa estimaţiilor parametrilor necunoscuţi (continuare)

Aşadar $\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}^* = \hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}^* + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{V}$

$$\mathbf{P}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) \overset{def}{=} E\left\{(\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}^*)(\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}^*)^T\right\} = E\left\{(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}^* + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{V})(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}^* + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{V})^T\right\} =$$

$$= \mathbf{P}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + E\left\{(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}^*)\mathbf{V}^T\boldsymbol{\Delta}^T\right\} + E\left\{\boldsymbol{\Delta}\mathbf{V}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}^*)^T\right\} + E\left\{\boldsymbol{\Delta}\mathbf{V}\mathbf{V}^T\boldsymbol{\Delta}^T\right\}$$

- **Termenii încrucişaţi (transpuşi unul altuia) se anulează:**

$$E\left\{(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}^*)\mathbf{V}^T\boldsymbol{\Delta}^T\right\} = E\left\{\left(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi}\right)^{-1}\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{V}\mathbf{V}^T\boldsymbol{\Delta}^T\right\} = \left(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi}\right)^{-1}\boldsymbol{\Phi}^T E\{\mathbf{V}\mathbf{V}^T\}\boldsymbol{\Delta}^T =$$

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}^* + \left(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi}\right)^{-1}\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{V}}$$

a. **c.**

$$= \lambda^2\left(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi}\right)^{-1}\underbrace{\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Delta}^T}_{\mathbf{0}} = \mathbf{0}.$$

☝ O demonstraţie alternativă a eficienţei utilizează un raţionament bazat pe un rezultat din Teoria Matricilor.

- **Rezultă atunci că:**

$$\mathbf{P}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{P}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + E\left\{\boldsymbol{\Delta}\mathbf{V}\mathbf{V}^T\boldsymbol{\Delta}^T\right\} = \mathbf{P}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + \lambda^2\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Delta}^T$$

c. **& Δ ➔ deterministă**

$$\boxed{\mathbf{P}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) - \mathbf{P}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \lambda^2\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Delta}^T \geq \mathbf{0}}$$

Teorema fundamentală a MCMMP (continuare)

Demonstraţie (Teorema 2)

5. Consistenţa estimaţiilor dispersiei zgomotului alb

$$\hat{\lambda}^2_{\gamma_N} = \frac{1}{\gamma_N}\mathbf{V}^T\mathbf{Q}\mathbf{V}$$

Exerciţiu

Proprietatea rezultă după câteva calcule elementare, ţinînd cont de ipotezele teoremei.

6. Proprietăţi de nedeviere ale estimaţiilor dispersiei zgomotului alb

$$\hat{\lambda}^2_N \overset{def}{=} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(y[n]-\boldsymbol{\varphi}^T[n]\hat{\boldsymbol{\theta}}_N\right)^2$$ ☹ Deviată

$$\hat{\lambda}^2_{N-n\theta} \overset{def}{=} \frac{1}{N-n\theta}\sum_{n=1}^{N}\left(y[n]-\boldsymbol{\varphi}^T[n]\hat{\boldsymbol{\theta}}_N\right)^2$$ ☺ Nedeviată

- **Ambele aserţiuni vor fi demonstrate simultan, folosind operatorul numit urmă a unei matrici (trace).**

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{A}) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

suma elementelor de pe diagonală

Proprietăţi elementare ale operatorului Tr

➔ Liniaritate

$$\mathrm{Tr}(\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{B}) = \alpha\mathrm{Tr}(\mathbf{A})+\beta\mathrm{Tr}(\mathbf{B}) \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$$

➔ Invarianţă la comutarea matricilor

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{Tr}(\mathbf{BA})$$

☝ Proprietate care se verifică indiferent dacă produsul celor două matrici este sau nu comutativ.

$$E \quad \hat{\lambda}^2_{\gamma_N} = \frac{1}{\gamma_N}\mathbf{V}^T\mathbf{Q}\mathbf{V}$$

$$E\left\{\hat{\lambda}^2_{\gamma_N}\right\} = \frac{1}{\gamma_N}E\left\{\underbrace{\mathbf{V}^T\mathbf{Q}\mathbf{V}}_{\in\mathbb{R}}\right\} = \frac{1}{\gamma_N}E\left\{\mathrm{Tr}(\mathbf{V}^T\mathbf{Q}\mathbf{V})\right\} = \frac{1}{\gamma_N}E\left\{\mathrm{Tr}(\mathbf{Q}\mathbf{V}\mathbf{V}^T)\right\}$$

Teorema fundamentală a MCMMP (continuare)

Demonstrație (Teorema 2)

6. Proprietăți de nedeviere ale estimațiilor dispersiei zgomotului alb (continuare)

Aşadar

$$E\left\{\hat{\lambda}^2_{\gamma_N}\right\} = \frac{1}{\gamma_N} E\left\{ \mathrm{Tr}(\mathbf{Q}\mathbf{V}\mathbf{V}^T)\right\}$$

$$E\left\{\hat{\lambda}^2_{\gamma_N}\right\} \underset{\text{a.}}{=} \frac{1}{\gamma_N} \mathrm{Tr}\left(\mathbf{Q}E\left\{\mathbf{V}\mathbf{V}^T\right\}\right) \underset{\text{c.}}{=} \frac{\lambda^2}{\gamma_N}\mathrm{Tr}(\mathbf{Q}) = \frac{\lambda^2}{\gamma_N}\mathrm{Tr}\left[\mathbf{I}_N - \mathbf{\Phi}\left(\mathbf{\Phi}^T\mathbf{\Phi}\right)^{-1}\mathbf{\Phi}^T\right] =$$

$$= \frac{\lambda^2}{\gamma_N}\left\{N - \mathrm{Tr}\left[\mathbf{\Phi}\left(\mathbf{\Phi}^T\mathbf{\Phi}\right)^{-1}\mathbf{\Phi}^T\right]\right\} = \frac{\lambda^2}{\gamma_N}\left\{N - \mathrm{Tr}\left[\left(\mathbf{\Phi}^T\mathbf{\Phi}\right)^{-1}\mathbf{\Phi}^T\mathbf{\Phi}\right]\right\} =$$

$$= \frac{\lambda^2}{\gamma_N}\left[N - \mathrm{Tr}\left(\mathbf{I}_{n\theta}\right)\right] = \frac{N - n\theta}{\gamma_N}\lambda^2$$

- **Egalitatea obținută demonstrează proprietatea de deviere/nedeviere a estimațiilor dispersiei zgomotului alb şi justifică alegerea constantei γ_N.**

Ipotezele teoremei au fost alese cu grijă, astfel încît atît consistența cît şi nedevierea estimațiilor să fie verificate.

☝ Dacă ipoteza b. din enunțul Teoremei este necesară pentru buna definire a estimației parametrilor necunoscuți, ipotezele a. şi c. sunt destul de restrictive.

❹.❷ Metoda Celor Mai Mici Pătrate

Sumarul relaţiilor matriciale din contextul MCMMP

Contextul de lucru

$\mathcal{P}(\theta^*)$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{\Phi}\boldsymbol{\theta}^* + \mathbf{V}$$

$$E\{\mathbf{V}\} = \mathbf{0}$$

$$E\{\mathbf{V}\mathbf{V}^T\} = \lambda^2 \mathbf{I}_N$$

$\mathcal{M}(\theta)$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{\Phi}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}^*) = \mathbf{V}$$

Extracţia datelor utile din date afectate de zgomot **nu este însă perfectă**, calitatea ei depinzînd de matricea regresorilor.

$$\mathrm{SNR}\left(\mathbf{\Phi}\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \geq \mathrm{SNR}(\mathbf{Y})$$

Criteriul pătratic

$$\mathcal{V}(\boldsymbol{\theta}) \overset{def}{=} \left\|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta})\right\|^2 = \left\|\mathbf{Y} - \mathbf{\Phi}\boldsymbol{\theta}\right\|^2$$

MCMMP induce o tehnică de **extragere a datelor utile din datele măsurate**, cu ajutorul proiecţiilor ortogonale, adică **neredundante**.

Estimaţiile oferite de MCMMP

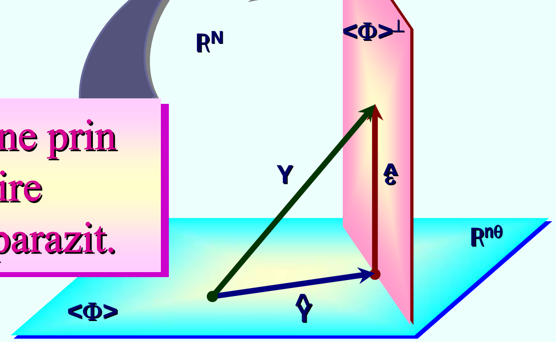
$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_N = \left(\mathbf{\Phi}^T\mathbf{\Phi}\right)^{-1}\mathbf{\Phi}^T\mathbf{Y} = \boldsymbol{\theta}^* + \left(\mathbf{\Phi}^T\mathbf{\Phi}\right)^{-1}\mathbf{\Phi}^T\mathbf{V}$$

$$\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{Y} - \mathbf{\Phi}\hat{\boldsymbol{\theta}}_N = \mathbf{Q}\mathbf{Y} = \mathbf{Q}\mathbf{V}$$

$$\hat{\lambda}^2_{\gamma_N} = \frac{1}{\gamma_N}\hat{\mathbf{V}}^T\hat{\mathbf{V}} = \frac{1}{\gamma_N}\mathbf{V}^T\mathbf{Q}\mathbf{V}$$

$$\mathcal{V}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N\right) = \mathbf{Y}^T\mathbf{Q}\mathbf{Y} = \mathbf{V}^T\mathbf{Q}\mathbf{V} = \hat{\mathbf{V}}^T\hat{\mathbf{V}} = \gamma_N\hat{\lambda}^2_{\gamma_N}$$

☝ Zgomotul estimat se obţine prin proiectarea datelor de ieşire măsurate pe hiperplanul parazit.



❹ Metode de identificare şi validare

❹.❷ Metoda Celor Mai Mici Pătrate

Nerespectarea condiţiilor Teoremei fundamentale

Cum pot fi relaxate condiţiile restrictive din cadrul Teoremei fundamentale fără a afecta consistenţa estimaţiilor?

Condiţia a. (determinismul matricii regresorilor) este adesea înlocuită prin condiţia ca perturbaţia şi vectorul regresorilor să nu fie corelate.

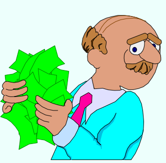
$$E\{\varphi[n]v[m]\}=0 \quad \forall n,m\in\mathbb{N}^*$$

- Se poate arăta (deşi este mai complicat), că noua condiţie nu conduce la pierderea consistenţei.
- Condiţia este sugerată de expresia ideală aparametrilor adevăraţi.

$$\boldsymbol{\theta}^*=\left(E\{\boldsymbol{\varphi}[n]\boldsymbol{\varphi}^T[n]\}\right)^{-1}\left(E\{\boldsymbol{\varphi}[n]y[n]\}-\cancel{E\{\boldsymbol{\varphi}[n]v[n]\}}\right)$$

$$\boldsymbol{\theta}^*=\left(E\left\{\boldsymbol{\varphi}[n]\boldsymbol{\varphi}^T[n]\right\}\right)^{-1}\left(E\left\{\boldsymbol{\varphi}[n]y[n]\right\}\right)=\underbrace{\left[\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}[n]\boldsymbol{\varphi}^T[n]\right)^{-1}\right]\left[\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}[n]y[n]\right)\right]}_{\cong\hat{\boldsymbol{\theta}}_N}$$

- Mai mult, datorită timpului mort intrinsec al procesului, în anumite cazuri este posibilă verificarea condiţiei de necorelare chiar şi în cazul identificării în buclă închisă.



Condiţia b. (inversabilitatea matricii de covarianţă) este indispensabilă pentru buna definire a estimaţiei vectorului parametrilor necunoscuţi.

☝ Dealtfel, aceasta nu este o condiţie restrictivă.

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_N=\mathbf{R}_N^{-1}\mathbf{r}_N=\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}[n]\boldsymbol{\varphi}^T[n]\right)^{-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}[n]y[n]\right)$$

Nerespectarea condiţiilor Teoremei fundamentale (continuare)

Condiția c. (perturbaţia este un zgomot alb) se verifică rareori în practică.

Pentru relaxarea ei, există două abordări.

Cazul zgomotelor colorate, de medie nulă → **Estimatorul Markov**

Erori sistematice de măsură ☞

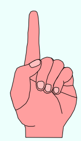
☝ Cazuri frecvent întîlnite în aplicaţii.

Cazul zgmotelor albe de medie nenulă → **Centrarea datelor pe medie**

Cazul zgomotelor colorate, de medie nulă. Estimatorul Markov.

$$E\{\mathbf{V}\mathbf{V}^T\} = \mathbf{\Lambda} > \mathbf{0}$$

matrice de auto-covarianță nu neapărat diagonală, dar simetrică şi strict pozitiv definită



Deoarece media zgomotului continuă să fie nulă, atît nedevierea cît şi consistența estimațiilor oferite de MCMMP se conservă.

☹ Se pierde eficiența estimației.

Cum se poate remedia acest efect?

Exerciţiu $\mathbf{P}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \left(\mathbf{\Phi}^T\mathbf{\Phi}\right)^{-1}\mathbf{\Phi}^T\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Phi}\left(\mathbf{\Phi}^T\mathbf{\Phi}\right)^{-1}$

Estimatorul CMMP se poate înlocui cu estimatorul Markov, care se construieşte plecînd de la descompunerea Cholesky a matricii Λ.

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}^T\mathbf{C} > \mathbf{0}$$

$$\mathbf{C}^{-T}\times \quad \mathbf{Y} = \mathbf{\Phi}\boldsymbol{\theta}^* + \mathbf{V} \Leftrightarrow \underbrace{\mathbf{C}^{-T}\mathbf{Y}}_{\tilde{\mathbf{Y}}} = \underbrace{\mathbf{C}^{-T}\mathbf{\Phi}}_{\tilde{\mathbf{\Phi}}}\boldsymbol{\theta}^* + \underbrace{\mathbf{C}^{-T}\mathbf{V}}_{\tilde{\mathbf{V}}} \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{Y}} = \tilde{\mathbf{\Phi}}\boldsymbol{\theta}^* + \tilde{\mathbf{V}}$$

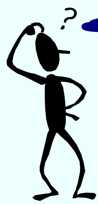
Transformare echivalentă a ecuației procesului

Nerespectarea condiţiilor Teoremei fundamentale (continuare)

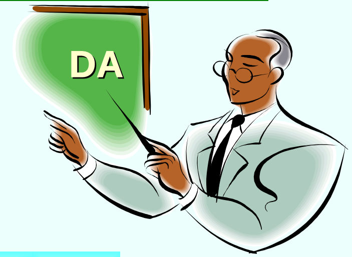
Cazul zgomotelor colorate, de medie nulă. Estimatorul Markov. (continuare)

Aşadar $\tilde{\mathbf{Y}} = \tilde{\mathbf{\Phi}}\theta^* + \tilde{\mathbf{V}}$

$\mathbf{C}^{-T}\mathbf{Y}$ | $\mathbf{C}^{-T}\mathbf{\Phi}$ | $\mathbf{C}^{-T}\mathbf{V}$



Este alb noul zgomot?



$$E\{\tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{V}}^T\} = E\{\mathbf{C}^{-T}\mathbf{V}\mathbf{V}^T\mathbf{C}^{-1}\}$$
$$= \mathbf{C}^{-T}E\{\mathbf{V}\mathbf{V}^T\}\mathbf{C}^{-1}$$
$$= \mathbf{C}^{-T}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^{-T}\mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{I}_N$$

☝ Şi are chiar dispersie unitară.

Estimaţia Markov

$$\tilde{\theta} = \left(\tilde{\mathbf{\Phi}}^T\tilde{\mathbf{\Phi}}\right)^{-1}\tilde{\mathbf{\Phi}}^T\tilde{\mathbf{Y}} = \left(\mathbf{\Phi}^T\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{\Phi}\right)^{-1}\mathbf{\Phi}^T\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{Y}$$

☝ Cea mai eficientă din clasa Γ.

Exerciţiu $\mathbf{P}(\tilde{\theta}) = \left(\mathbf{\Phi}^T\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{\Phi}\right)^{-1}$

$$\Rightarrow \underset{\text{Markov}\quad\text{CMMP}}{\mathbf{P}(\tilde{\theta}) \le \mathbf{P}(\hat{\theta})} \Leftrightarrow \mathbf{\Phi}^T\left[\mathbf{\Lambda}^{-1} - \mathbf{\Phi}\left(\mathbf{\Phi}^T\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Phi}\right)^{-1}\mathbf{\Phi}^T\right]\mathbf{\Phi} \ge 0$$

Este acest estimator implementabil?

În general, nu, din două motive:

- ➔ Matricea de auto-covarianţă a zgomotului colorat nu este cunoscută.
- ➔ Chiar dacă matricea de auto-covarianţă a zgomotului colorat ar fi estimată în prealabil, dimensiunea acesteia este egală cu a orizontului de măsură, astfel că inversarea este o operaţie consumatoare de timp.

În cazul zgomotelor colorate de medie nulă, se utilizează tot MCMMP, chiar dacă nu este cea mai eficientă.

❹ Metode de identificare şi validare

❹.❷ Metoda Celor Mai Mici Pătrate

Nerespectarea condiţiilor Teoremei fundamentale (continuare)

Cazul zgomotelor albe, de medie nenulă. Centrarea datelor pe medie.

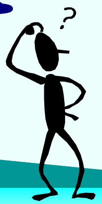
$$E\{v[n]\} = \langle v \rangle \neq 0$$

eroare sistematică de măsură (necunoscută)

Exerciţiu ☹ Consistenţa şi nedevierea estimaţiei se pierd.

Cum se poate remedia acest efect?

Există două strategii.



în acest curs ☞

Centrarea datelor pe medie (staţionarizarea datelor)

Exerciţiu

Metoda Celor Mai Mici Pătrate cu Parametri Extinşi (MCMMPPE)

- Se pleacă de la observaţia că zgomotul staţionarizat are medie nulă.

$$\tilde{v} \overset{def}{\equiv} v - E\{v[n]\} = v - \langle v \rangle \quad \Rightarrow \quad E\{\tilde{v}[n]\} = \langle v \rangle - \langle v \rangle = 0$$

- De notat că zgomotul staţionarizat nu mai este alb, ci colorat.

Exerciţiu
$$E\{\tilde{v}[n]\tilde{v}[m]\} = E\Big\{\big(v[n]-\langle v \rangle\big)\big(v[m]-\langle v \rangle\big)\Big\} = \lambda^2\delta_0[n-m] - \langle v \rangle^2 \quad \forall\, n,m \in \mathbb{N}^*$$

- Conform cazului anterior, zgomotele colorate nu produc pierderea consistenţei, dacă au media nulă.

$$y[n] = \varphi^T[n]\theta^* + v[n] \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad \Leftrightarrow \quad y[n] = \varphi^T[n]\theta^* + \langle v \rangle + \tilde{v}[n] \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$$

parametru necunoscut suplimentar

Transformare echivalentă a ecuaţiei procesului

❹ Metode de identificare şi validare

❹.❷ Metoda Celor Mai Mici Pătrate

Nerespectarea condiţiilor Teoremei fundamentale (continuare)

Cazul zgomotelor albe, de medie nenulă. Centrarea datelor pe medie. (continuare)

Aşadar $y[n] = \boldsymbol{\varphi}^T[n]\boldsymbol{\theta}^* + \langle v\rangle + \tilde{v}[n]$ $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$

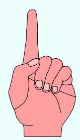
- Se poate aplica operatorul de mediere statistică: $\underbrace{E\{y[n]\}}_{\langle y\rangle} = \underbrace{E\{\boldsymbol{\varphi}^T[n]\}}_{\langle\boldsymbol{\varphi}\rangle^T}\boldsymbol{\theta}^* + \underbrace{E\{v[n]\}}_{\langle v\rangle}$ $\quad \langle y\rangle = \langle\boldsymbol{\varphi}\rangle^T\boldsymbol{\theta}^* + \langle v\rangle$ ecuaţia mediilor
- Ecuaţia mediilor se scade din cea a procesului:

☝ Medii ale datelor măsurate.

$$\underbrace{y[n] - \langle y\rangle}_{\tilde{y}[n]} = \Big(\underbrace{\boldsymbol{\varphi}^T[n] - \langle\boldsymbol{\varphi}\rangle^T}_{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^T[n]}\Big)\boldsymbol{\theta}^* + \tilde{v}[n]$$

$$\tilde{y}[n] = \tilde{\boldsymbol{\varphi}}^T[n]\boldsymbol{\theta}^* + \tilde{v}[n] \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$$

☝ Date staţionarizate (centrate pe medie).



Zgomotul noii ecuaţii de proces are medie nulă, dar este colorat.

Se poate folosi fie Estimatorul Markov, fie Estimatorul CMMP.

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}_N = \left(\sum_{n=1}^{N}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}[n]\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^T[n]\right)^{-1}\left(\sum_{n=1}^{N}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}[n]\tilde{y}[n]\right)$$

$$\tilde{\lambda}^2_{\gamma_N} = \frac{1}{\gamma_N}\sum_{n=1}^{N}\left(\tilde{y}[n] - \tilde{\boldsymbol{\varphi}}^T[n]\tilde{\boldsymbol{\theta}}_N\right)^2$$

$$\widetilde{\langle v\rangle}_N = \widetilde{\langle y\rangle}_N - \widetilde{\langle\boldsymbol{\varphi}\rangle}_N^T\tilde{\boldsymbol{\theta}}_N$$

medii temporale estimate

➔ Eroarea sistematică estimată.

$$\boldsymbol{\theta}^*_e \overset{def}{=} \begin{bmatrix}\boldsymbol{\theta}^* \\ \langle v\rangle\end{bmatrix}$$

Exerciţiu

- Să se dezvolte MCMMPPE plecînd de la exprimarea ecuaţiei procesului cu ajutorul vectorului extins de parametri.
  - Se poate arăta că estimaţiile oferite de MCMMPPE sunt aceleaşi ca în cazul staţionarizării datelor.