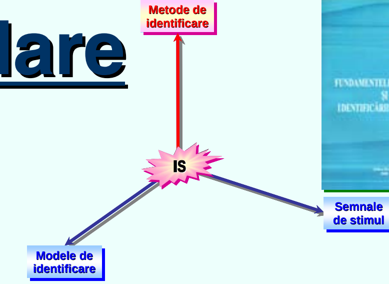
❹ Metode de identificare şi validare



❹.❶ Scurtă clasificare

Metode

Bazate pe Teoria Optimizărilor

- Metode care conduc la diferiţi algoritmi numerici de identificare, de regulă, eficienţi şi accesibili implementării pe un mijloc automat de calcul.
- Metode specifice modelelor de complexitate şi precizie limitate, de preferat liniare în parametri.

Bazate pe Toria Estimaţiei

- Metode dificil de implementat, în general nealgoritmice, cu caracter mai mult teoretic.
- Metode specifice modelelor de complexitate şi precizie ridicate, nu neapărat liniare în parametri, cu performanţe statistice determinate.

☝ Aceste două categorii nu sunt disjuncte, deoarece parametrii nu numai că se pot determina cu ajutorul unor proceduri numerice, dar pot fi caracterizaţi şi din punct de vedre statistic.

Metode

Neadaptive (de tip off-line)

- Folosite ori de cîte ori parametrii modelului matematic asociat sunt constanţi pe durata orizontului de măsură, adică nu necesită adaptări succesive dictate de variaţiile datelor achiziţionate.

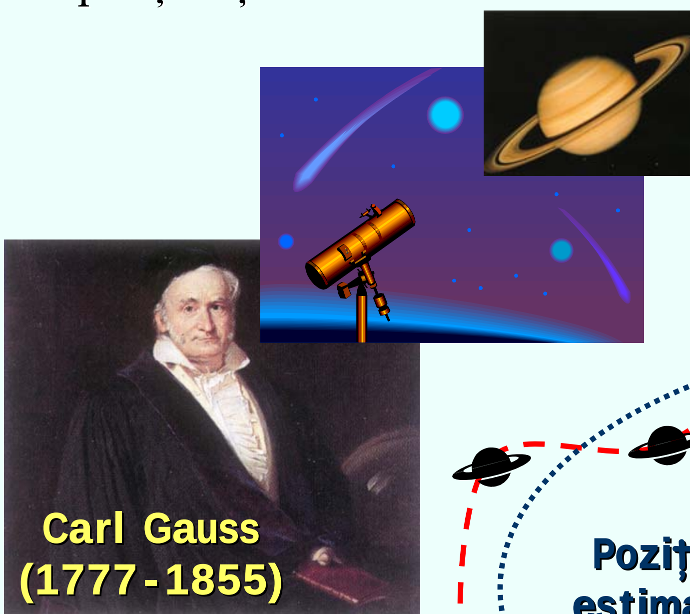
Adaptive (de tip on-line)

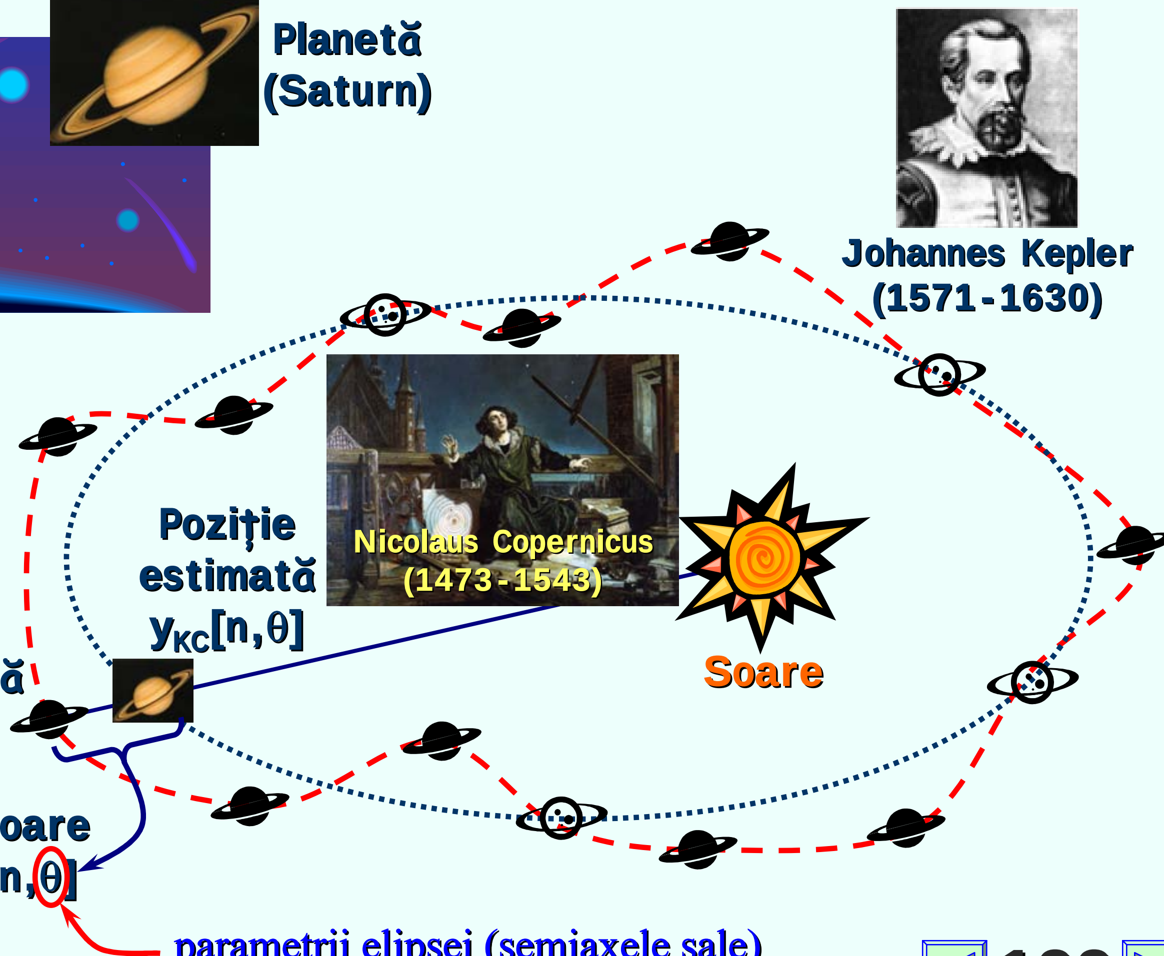
- Conduc, de regulă, la algoritmi de timp real şi se adresează proceselor/sistemelor cu caracteristici variabile în timp, cărora trebuie să li se asocieze modele cu parametri variabili, adaptaţi la variaţiile datelor achiziţionate.

❹ Metode de identificare şi validare

❹.❷ Metoda Celor Mai Mici Pătrate (MCMMP)

- MCMMP se bazează pe Teoria regresiei liniare inițiată de Carl Gauss.
- Beneficiind de un telescop destul de performant pentru acea epocă, Carl Gauss a observat şi notat timp de cîțiva ani pozițiile mai multor planete față de Pamînt, calculînd apoi coordonatele acestor poziții față de Soare.





☝ În pofida modelului de sistem solar propus intuitiv de Nicolaus Copernicus şi a Teoriei lui Johannes Kepler pozițiile obținute nu se situau pe o elipsă.

❹ Metode de identificare şi validare

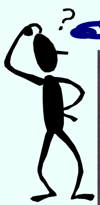
❹.❷ Metoda Celor Mai Mici Pătrate

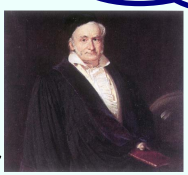
- Verificarea **legilor lui Kepler-Copernicus** impune ca **toate poziţiile observate ale planetei** (în număr de N) **să se situeze pe o anumită elipsă**.

$$y[n] = y_{KC}[n,\boldsymbol{\theta}] \quad \forall n \in \overline{1,N}$$

Sistem de ecuaţii din care ar trebui să rezulte parametrii elipsei.

Ce se poate face?





Se încearcă determinarea elipsei care trece **cel mai bine printre toate poziţiile observate**.

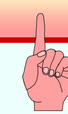
☝ Sistemul este de regulă **incompatibil**, deoarece numărul de ecuaţii este sensibil mai mare decît numărul de parametri iar poziţiile rezultate din observaţii şi calcule sunt afectate de erori.

Adică elipsa ai cărei parametri **minimizează un criteriu pătratic**.

$$\mathcal{V}(\boldsymbol{\theta}) \stackrel{def}{=} \sum_{n=1}^{N} \varepsilon^2[n,\boldsymbol{\theta}] = \sum_{n=1}^{N} \left(y[n] - y_{KC}[n,\boldsymbol{\theta}]\right)^2$$

(eroarea pătratică totală)

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \underset{\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{R}^{n\theta}}{\operatorname{argmin}}\, \mathcal{V}(\boldsymbol{\theta})$$

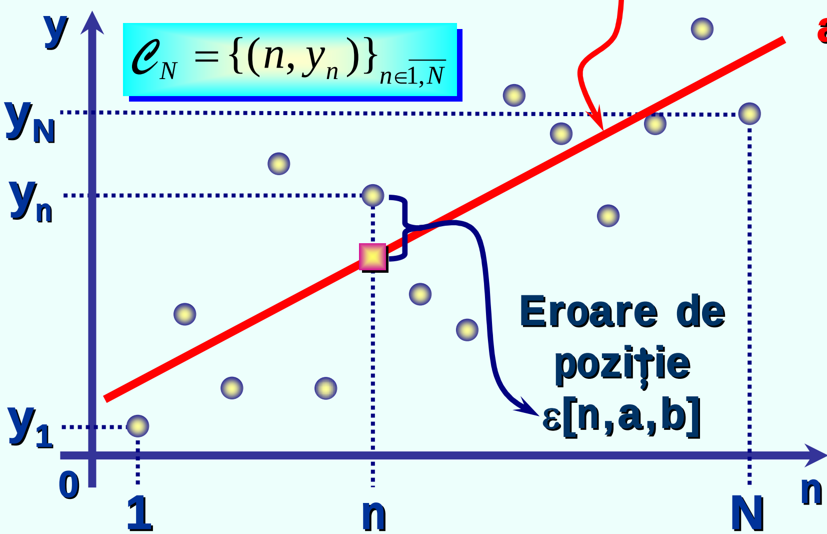


De aici rezultă numele metodei.

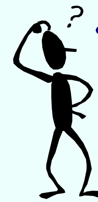
- Pentru rezolvarea problemei pătratice de optimizare, se poate apela la **gradient** (dacă funcţia criteriu este derivabilă şi gradientul ei se exprimă printr-o relaţie explicită sau cel puţin implicită) sau **la alte mijloace** (dacă, dintr-un motiv sau altul, aceasta nu permite evaluarea gradientului).
- Această tehnică (propusă de Gauss) se poate extinde şi pentru găsirea altor modele optimale în raport cu criteriul pătratic, plecînd de la un set de date măsurate.

❹.❷ Metoda Celor Mai Mici Pătrate

Exemplu Evaluarea dreptei de regresie liniară prin metoda gradientului



Cum pot fi determinaţi cei 2 parametri ai dreptei?



Prin minimizarea erorii pătratice totale.

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \underset{\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{R}^2}{\operatorname{argmin}}\, \mathcal{V}(\boldsymbol{\theta}) = \underset{a\in\mathbb{R}^*,\, b\in\mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{n=1}^{N} \varepsilon^2[n,a,b] \right\} =$$

$$= \underset{a\in\mathbb{R}^*,\, b\in\mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{n=1}^{N} (y_n - an - b)^2 \right\}$$

paraboloid de rotaţie

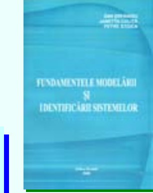
Soluţia problemei de optimizare se găseşte anulînd valorile gradientului.

$$\nabla\mathcal{V}(a,b) = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial a}\mathcal{V}(a,b) = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial b}\mathcal{V}(a,b) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2\sum_{n=1}^{N} n(y_n - an - b) = 0 \\ -2\sum_{n=1}^{N} (y_n - an - b) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{a} = \dfrac{6}{N(N^2-1)}\left[2\sum_{n=1}^{N} n y_n - (N+1)\sum_{n=1}^{N} y_n \right] \\[3mm] \hat{b} = \dfrac{2}{N(N-1)}\left[(2N+1)\sum_{n=1}^{N} y_n - 3\sum_{n=1}^{N} n y_n \right] \end{cases}$$

❹ Metode de identificare şi validare



❹.❷ Metoda Celor Mai Mici Pătrate

Soluţia generală a MCMMP în cazul modelelor de regresie liniară

$$y_{\mathcal{M}}[n,\boldsymbol{\theta}] \overset{def}{=} \varphi^T[n]\boldsymbol{\theta} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$y_{\mathcal{M}}[n,\boldsymbol{\theta}] \overset{def}{=} \varphi^T[n]\boldsymbol{\theta}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

model

$\mathcal{D}_N = \{(\varphi[n], y[n])\}_{n\in\overline{1,N}}$

date

Criteriul pătratic

☝ Tot un paraboloid de rotaţie, dar generalizat.

$$\mathcal{V}(\boldsymbol{\theta}) \overset{def}{=} \sum_{n=1}^{N}\varepsilon^2[n,\boldsymbol{\theta}] \overset{def}{=} \sum_{n=1}^{N}\left(y[n]-y_{\mathcal{M}}[n,\boldsymbol{\theta}]\right)^2 = \sum_{n=1}^{N}\left(y[n]-\varphi^T[n]\boldsymbol{\theta}\right)^2 \quad \forall \boldsymbol{\theta}\in\mathbb{R}^{n\theta}$$

Minim unic.

Metode de minimizare

- **Metoda matricială**
- **Metoda gradientului** — Exerciţiu
- **Metoda pătratelor perfecte** — Exerciţiu

Metoda matricială

$$\mathbf{Y} \overset{def}{=} [y[1]\ \ y[2]\ \cdots\ \ y[N]]^T \in \mathbb{R}^N$$

➔ Vectorul global al datelor de ieşire măsurate.

$$\boldsymbol{\Phi} \overset{def}{=} \begin{bmatrix} \varphi^T[1] \\ \hline \varphi^T[2] \\ \hline \vdots \\ \hline \varphi^T[N] \end{bmatrix} = \left[\phi_1 \,\middle|\, \phi_2 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \phi_{n\theta}\right] \in \mathbb{R}^{N\times n\theta}$$

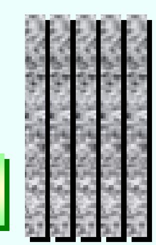
linii

coloane

➔ Matricea regresorilor.

☝ De regulă, o matrice monică.

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{\Phi}) = n\theta < N$$



coloane liniar independente

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}) \overset{def}{=} \left[\varepsilon[1,\boldsymbol{\theta}]\ \ \varepsilon[2,\boldsymbol{\theta}]\ \cdots\ \ \varepsilon[N,\boldsymbol{\theta}]\right]^T \in \mathbb{R}^N$$

➔ Vectorul erorilor de măsură faţă de model.

Soluţia generală a MCMMP în cazul modelelor de regresie liniară (continuare)

Metoda matricială

De ce matricea regresorilor este de regulă monică?

Mulţimea matricilor neinversabile este mai parsimonioasă.

Test

- Completaţi la întâmplare o matrice de ordin 3. Este această matrice inversabilă? Ce şanse sunt ca ea să nu fie inversabilă?

- Paradoxal, tocmai perturbaţiile stocastice care afectează datele măsurate aduc matricea regresorilor în stare de rang maxim.

Ecuaţii matriciale

$$y_{\mathcal{M}}[n,\boldsymbol{\theta}] \overset{def}{=} \boldsymbol{\varphi}^T[n]\boldsymbol{\theta}, \quad \forall n \in \overline{1,N} \iff \mathbf{Y}_{\mathcal{M}} \overset{def}{=} \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^N$$

← Ecuaţia globală a modelului de regresie liniară.

$$\varepsilon[n,\boldsymbol{\theta}] \overset{def}{=} y[n] - \boldsymbol{\varphi}^T[n]\boldsymbol{\theta}, \quad \forall n \in \overline{1,N} \iff \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}) \overset{def}{=} \mathbf{Y} - \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^N$$

← Eroarea globală de model.

$$\mathcal{V}(\boldsymbol{\theta}) \overset{def}{=} \sum_{n=1}^{N} \varepsilon^2[n,\boldsymbol{\theta}] \iff \mathcal{V}(\boldsymbol{\theta}) \overset{def}{=} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}) = \left\|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta})\right\|^2 = (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\theta})^T(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\theta}) = \left\|\mathbf{Y} - \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\theta}\right\|^2$$

← Criteriul pătratic.

Teorema 1 (Soluţia generală a MCMMP)

Soluţia problemei pătratice de optimizare este exprimată de următoarele ecuaţii:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \overset{def}{=} \left(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi}\right)^{-1}\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{Y} \;; \qquad \mathcal{V}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{Y}^T\mathbf{Y} - \mathbf{Y}^T\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi}\right)^{-1}\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{Y}.$$

estimaţie MCMMP — precizie

Soluţia generală a MCMMP în cazul modelelor de regresie liniară (continuare)

Metoda matricială

Aşadar

$$\hat{\theta} \overset{def}{=} \boxed{\left(\Phi^T\Phi\right)^{-1}\Phi^T}\mathbf{Y}$$

Pseudo-inversa Moore-Penrose

$$\mathcal{V}(\hat{\theta}) = \mathbf{Y}^T\mathbf{Y} - \mathbf{Y}^T\Phi\left(\Phi^T\Phi\right)^{-1}\Phi^T\mathbf{Y}$$

$$\mathcal{V}(\hat{\theta}) = \mathbf{Y}^T\underbrace{\left[\mathbf{I}_N - \Phi\left(\Phi^T\Phi\right)^{-1}\Phi^T\right]}_{\mathbf{Q}\in\mathbb{R}^{N\times N}}\mathbf{Y}$$

Operator de deparazitare $\mathbf{Q}\in\mathbb{R}^{N\times N}$

- Practic, orice sistem liniar incompatibil:

$$\mathbf{Y} = \Phi\theta$$

cu matricea Φ monică admite o unică pseudo-soluţie:

$$\Phi^T \times \;\Big|\; \mathbf{Y} = \Phi\theta \;\Rightarrow\; \Phi^T\mathbf{Y} = \boxed{\left(\Phi^T\Phi\right)}\theta$$

☝ Inversabilă.

$$\hat{\theta} = \left(\Phi^T\Phi\right)^{-1}\Phi^T\mathbf{Y}$$

Proprietăţi elementare ale operatorului de deparazitare

➔ Simetrie

$$\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}_N - \Phi\left(\Phi^T\Phi\right)^{-1}\Phi^T = \mathbf{Q}$$

➔ Ortogonalitate faţă de matricea regresorilor

$$\mathbf{Q}\Phi = \Phi - \Phi\cancel{\left(\Phi^T\Phi\right)^{-1}}\cancel{\left(\Phi^T\Phi\right)} = \mathbf{0} = \Phi^T\mathbf{Q}$$

➔ Operatorul este şi proiector

$$\mathbf{Q}^2 = \mathbf{I}_N - 2\Phi\left(\Phi^T\Phi\right)^{-1}\Phi^T + \Phi\cancel{\left(\Phi^T\Phi\right)^{-1}}\cancel{\left(\Phi^T\Phi\right)}\left(\Phi^T\Phi\right)^{-1}\Phi^T =$$

$$= \mathbf{I}_N - \Phi\left(\Phi^T\Phi\right)^{-1}\Phi^T = \mathbf{Q}.$$

➔ Pozitiv (semi-definire)

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^2 = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} \geq 0$$

☝ Deşi valoarea optimă a criteriului pătratic se exprimă printr-o diferenţă, ea este nenegativă (cum era de aşteptat).

$$\mathcal{V}(\hat{\theta}) = \mathbf{Y}^T\mathbf{Q}\mathbf{Y} \geq 0$$

❹ Metode de identificare şi validare

❹.❷ Metoda Celor Mai Mici Pătrate

Soluţia generală a MCMMP în cazul modelelor de regresie liniară (continuare)

Demonstrație geometrică a Teoremei 1

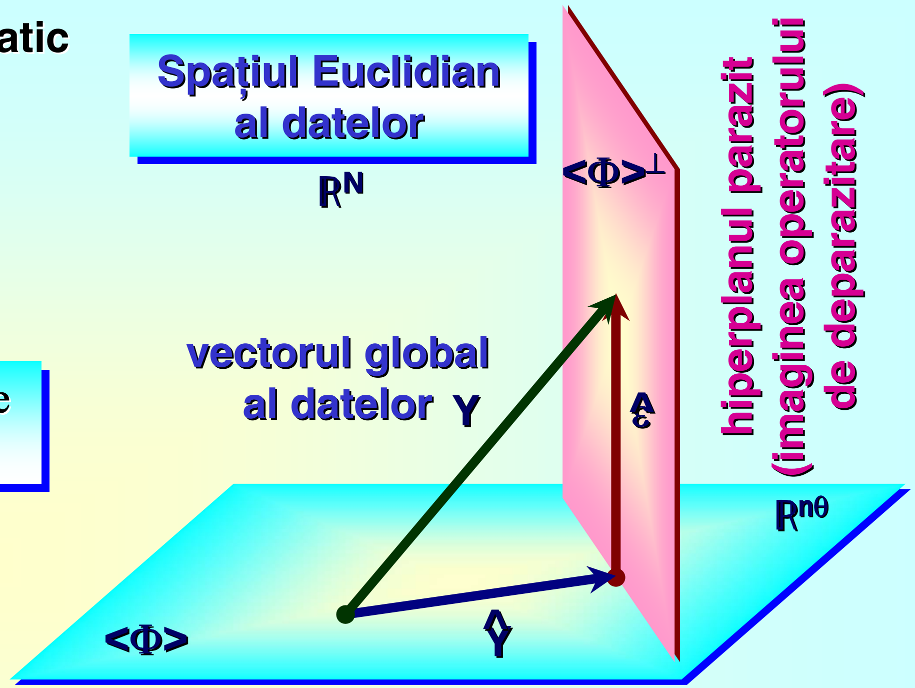
Metoda matricială

- **Problema optimizării folosind criteriul pătratic se reformulează în termeni geometrici.**

☝ Este practic imposibil ca vectorul global al datelor să fie generat numai de coloanele matricii regresorilor.

Se caută vectorul din hiperplanul modelului de regresie care este cel mai apropiat de vectorul datelor.

Adică proiecția acestuia pe hiperplanul modelului de regresie.



hiperplanul modelului de regresie (generat de coloanele matricii regresorilor)

Aşadar

Problema revine la determinarea proiecţiei vectorului datelor pe hiperplanul modelului de regresie, adică la minimizarea normei erorii dintre vectorul de date şi al proiecţiei sale.

$$\hat{\varepsilon} = \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{Q}\mathbf{Y}$$

$$\|\hat{\varepsilon}\|^2 = \hat{\varepsilon}^T\hat{\varepsilon} = \mathbf{Y}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^T\mathbf{Q}^2\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^T\mathbf{Q}\mathbf{Y}$$

(datorită proprietăţilor operatorului **Q**)

☝ Eroarea minimă dintre cei doi vectori este un element al hiperplanului parazit, ortogonal pe hiperplanul modelului de regresie.

Soluţia generală a MCMMP în cazul modelelor de regresie liniară (continuare)

Demonstrație (Teorema 1)

Metoda matricială

- Urmează determinarea proiecției vectorului datelor.
- Acesta este un element al hiperplanului modelului de regresie:

$$\hat{\mathbf{Y}} = \boldsymbol{\Phi}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\theta}_1\phi_1 + \hat{\theta}_2\phi_2 + \cdots + \hat{\theta}_{n\theta}\phi_{n\theta}$$

(combinație liniară a coloanelor matricii de regresie liniară)

coeficienţi necunoscuţi

- Pentru a determina coeficienții necunoscuți, este suficientă exprimarea condiției de ortogonalitate pe hiperplanul modelului de regresie, adică pe fiecare vector care îl generează:

$$\phi_i^T\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0 \;\Leftrightarrow\; \phi_i^T(\mathbf{Y}-\hat{\mathbf{Y}}) = 0,\; \forall i \in \overline{1,n\theta} \;\Leftrightarrow\; \hat{\theta}_1\phi_i^T\phi_1 + \hat{\theta}_2\phi_i^T\phi_2 + \cdots + \hat{\theta}_{n\theta}\phi_i^T\phi_{n\theta} = \phi_i^T\mathbf{Y},\; \forall i \in \overline{1,n\theta}.$$

- Matricial, sistemul rezultat se exprimă astfel:

$$\begin{bmatrix} \phi_1^T\phi_1 & \phi_1^T\phi_2 & \cdots & \phi_1^T\phi_{n\theta} \\ \phi_2^T\phi_1 & \phi_2^T\phi_2 & \cdots & \phi_2^T\phi_{n\theta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n\theta}^T\phi_1 & \phi_{n\theta}^T\phi_2 & \cdots & \phi_{n\theta}^T\phi_{n\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\theta}_{n\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1^T\mathbf{Y} \\ \phi_2^T\mathbf{Y} \\ \vdots \\ \phi_{n\theta}^T\mathbf{Y} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_1^T \\ \hline \phi_2^T \\ \hline \vdots \\ \hline \phi_{n\theta}^T \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Phi}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_1 \mid \phi_2 \mid \cdots \mid \phi_{n\theta} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Phi}} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\theta}_{n\theta} \end{bmatrix}}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_1^T \\ \hline \phi_2^T \\ \hline \vdots \\ \hline \phi_{n\theta}^T \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Phi}^T} \mathbf{Y}$$

☝ Aceste interpretări de natură geometrică sunt valabile în condiţiile în care modelele matematice pot fi exprimate în forma de regresie liniară.

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi}\right)^{-1}\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{Y}$$

❹.❷ Metoda Celor Mai Mici Pătrate

Teorema fundamentală a MCMMP (modele de regresie liniară)

Contextul de lucru

$\mathcal{P}(\theta^*)$ $y[n] = \varphi^T[n]\theta^* + v[n]$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

perturbaţie stocastică (zgomot de măsură)

$\mathcal{M}(\theta)$ $y[n] = \varphi^T[n]\theta + \varepsilon[n,\theta]$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

eroarea dintre proces şi model

Modelul este conform cu procesul $\Rightarrow$ $\varepsilon[n,\theta^*] = v[n]$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

☝ Modelul "perfect" diferă de proces numai prin zgomotul de măsură.

Problema constă în minimizarea erorii pătratice globale dintre proces şi model pe durata orizontului de măsură, pentru determinarea unei estimaţii a vectorului parametrilor necunoscuţi din date experimentale.

$$\mathcal{D}_N = \{(\varphi[n], y[n])\}_{n\in\overline{1,N}}$$

$$\hat{\theta} = \underset{\theta\in\mathbb{R}^{n\theta}}{\operatorname{argmin}}\, \mathcal{V}(\theta) = \underset{\theta\in\mathbb{R}^{n\theta}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{n=1}^{N} \varepsilon^2[n,\theta] \right\} = \underset{\theta\in\mathbb{R}^{n\theta}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{n=1}^{N} \left(y[n] - \varphi^T[n]\theta \right)^2 \right\}$$

Teorema 1

$$\begin{cases} \hat{\theta} = \left(\Phi^T\Phi\right)^{-1}\Phi^T Y \\ \mathcal{V}(\hat{\theta}) = Y^T Y - Y^T\Phi\left(\Phi^T\Phi\right)^{-1}\Phi^T Y \end{cases}$$

Cum pot fi totuşi implementate aceste relaţii?

Prin gruparea convenabilă a factorilor, astfel încît să se opereze cu vectori şi matrici avînd dimensiunea vectorului parametrilor.

☝ Relaţii care pot fi neimplementabile dacă dimensiunea orizontului de măsură este prea mare.

$n\theta < N$

❹ Metode de identificare şi validare

❹.❷ Metoda Celor Mai Mici Pătrate

Teorema fundamentală a MCMMP (continuare)

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\theta}} = \boxed{\left(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi}\right)}^{-1}\boxed{\boldsymbol{\Phi}^T\,\mathbf{Y}} \\ \mathcal{V}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \boxed{\mathbf{Y}^T\mathbf{Y}} - \mathbf{Y}^T\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi}\right)^{-1}\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{Y} \end{cases}$$

$$\mathbf{R} \overset{def}{=} \boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi} = \left[\varphi[1] \,\vdots\, \varphi[2] \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \varphi[N]\right]\begin{bmatrix} \varphi^T[1] \\ \hline \varphi^T[2] \\ \hline \vdots \\ \hline \varphi^T[N] \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^{N}\varphi[n]\varphi^T[n] \in \mathbb{R}^{n\theta\times n\theta}$$

produsul exterior

$$N\sigma^2_{N,y} \overset{def}{=} \mathbf{Y}^T\mathbf{Y} = \sum_{n=1}^{N} y^2[n]$$

dispersie estimată

$$\mathbf{r} \overset{def}{=} \boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{Y} = \left[\varphi[1] \,\vdots\, \varphi[2] \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \varphi[N]\right]\begin{bmatrix} y[1] \\ \hline y[2] \\ \hline \vdots \\ \hline y[N] \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^{N}\varphi[n]y[n] \in \mathbb{R}^{n\theta}$$

Matricea şi vectorul de covarianţă a datelor

$$\mathbf{R}_N \overset{def}{=} \frac{1}{N}\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\varphi[n]\varphi^T[n] \cong E\left\{\varphi[n]\varphi^T[n]\right\}$$

$$\mathbf{r}_N \overset{def}{=} \frac{1}{N}\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{Y} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\varphi[n]y[n] \cong E\left\{\varphi[n]y[n]\right\}$$

$$E \;\; \varphi[n]\times \;\; y[n] = \boldsymbol{\varphi}^T[n]\boldsymbol{\theta}^* + v[n]$$

$$\boldsymbol{\theta}^* = \left(E\{\boldsymbol{\varphi}[n]\boldsymbol{\varphi}^T[n]\}\right)^{-1}\left(E\{\boldsymbol{\varphi}[n]y[n]\} - E\{\boldsymbol{\varphi}[n]v[n]\}\right)$$

Formulele de implementare ale MCMMP

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{r} = \left(\sum_{n=1}^{N}\varphi[n]\varphi^T[n]\right)^{-1}\left(\sum_{n=1}^{N}\varphi[n]y[n]\right)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_N = \mathbf{R}_N^{-1}\mathbf{r}_N = \left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\varphi[n]\varphi^T[n]\right)^{-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\varphi[n]y[n]\right)$$

$$\mathcal{V}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N\right) = N\sigma^2_{N,y} - \mathbf{r}_N^T\mathbf{R}_N^{-1}\mathbf{r}_N$$

Teorema fundamentală a MCMMP (continuare)

Teorema 2 (Teorema fundamentală a MCMMP)

Următoarele 3 ipoteze se consideră verificate:

a. **matricea Φ este perfect deterministă;**

b. **matricea $\mathbf{R}$ (sau $\mathbf{R}_N$) este strict pozitiv definită (adică inversabilă) pentru toate dimensiunile orizontului de măsură suficient de mari;**

c. **perturbaţia v aparţine clasei $za(0,\lambda^2)$ (adică este un zgomot alb de medie nulă şi dispersie necunoscută λ^2).**

MCMMP oferă 3 estimaţii remarcabile:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_N = \left(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi}\right)^{-1}\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{Y}$$

vectorul parametrilor

$$\hat{v}[n] \overset{def}{=} y[n] - \boldsymbol{\varphi}^T[n]\hat{\boldsymbol{\theta}}_N \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

zgomotul perturbator

$$\hat{\lambda}^2_{\gamma_N} \overset{def}{=} \frac{1}{\gamma_N}\sum_{n=1}^{N}\hat{v}^2[n] = \frac{1}{\gamma_N}\sum_{n=1}^{N}\left(y[n] - \boldsymbol{\varphi}^T[n]\hat{\boldsymbol{\theta}}_N\right)^2$$

dispersia zgomotului perturbator

$$\gamma_N \in \{N - n\theta, N\}$$

Acestea verifică următoarele proprietăţi:

1. **Estimaţia vectorului parametrilor adevăraţi este nedeviată.**
2. **Matricea de auto-covarianţă a erorii de estimare pentru vectorul parametrilor adevăraţi este egală cu:**

$$\mathbf{P}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N) = \lambda^2\mathbf{R}^{-1} = \lambda^2\left(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi}\right)^{-1}$$

3. **Estimaţia vectorului parametrilor adevăraţi este consistentă.**

Teorema fundamentală a MCMMP (continuare)

Teorema 2 (Teorema fundamentală a MCMMP – continuare)

4. Fie Γ clasa estimaţiilor nedeviate ale lui θ^* care se pot exprima ca transformări liniare deterministe ale vectorului de date de ieşire măsurate $\mathbf{Y}$. Atunci, estimaţia vectorului parametrilor adevăraţi aparţine lui Γ şi, în plus, face parte dintre cele mai eficiente estimaţii din această clasă.
5. Ambele estimaţii ale dispersiei zgomotului alb sunt consistente (deci şi asimptotic nedeviate).
6. Pentru $\gamma_N = N$, estimaţia dispersiei zgomotului alb este deviată, dar, pentru $\gamma_N = N\text{-}n\theta$, ea este nedeviată.

Demonstraţie

- Înainte de a demonstra concluziile teoremei, sunt necesare cîteva calcule preliminare.
- Va fi dedusă relaţia care există între vectorul parametrilor adevăraţi şi cel al parametrilor estimaţi.

$$\mathbf{V} \overset{def}{=} [v[1]\;\; v[2]\;\; \cdots\;\; v[N]]^T \in \mathbb{R}^N$$

➔ Vectorul global al perturbaţiilor.

$\mathcal{P}(\theta^*)$

$$y[n] = \boldsymbol{\varphi}^T[n]\boldsymbol{\theta}^* + v[n] \quad \forall n \in \overline{1,N}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{Y} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\theta}^* + \mathbf{V}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_N = \left(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi}\right)^{-1}\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{Y}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_N = \left(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi}\right)^{-1}\boldsymbol{\Phi}^T(\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\theta}^* + \mathbf{V}) = \boldsymbol{\theta}^* + \left(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi}\right)^{-1}\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{V}$$