❹.❷ Metoda Celor Mai Mici Pătrate

Analiza estimaţiei oferite de MCMMP pentru modelele ARX

☜ Cele mai folosite în Automatică.

$\mathcal{P}(\theta^*)$

$$A^*(q^{-1})y[n] = B^*(q^{-1})u[n] + v[n] \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \Leftrightarrow \qquad y[n] = \boldsymbol{\varphi}^T[n]\boldsymbol{\theta}^* + v[n] \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

polinoame cu parametri adevăraţi, avînd gradele ***na***, respectiv ***nb***

$$n\theta = na + nb$$

$$\mathcal{D}_N = \{(u[n], y[n])\}_{n\in\overline{1,N}}$$

date măsurate

$$\boldsymbol{\varphi}^T[n] \overset{def}{=} \left[-y[n-1]\; -y[n-2] \cdots -y[n-na] \;\middle|\; u[n-1]\; u[n-2] \cdots u[n-nb]\right]$$

☝ vectorul regresorilor

$$\boldsymbol{\theta}^T \overset{def}{=} \left[a_1\; a_2 \cdots a_{na} \;\middle|\; b_1\; b_2 \cdots b_{nb}\right]$$

☜ vectorul parametrilor necunoscuţi

☝ Aceşti vectori au cîte două componente.

$$\mathbf{R}_N = \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} y[n-i]y[n-j]\right]_{i,j\in\overline{1,na}}}_{r_y^N[i-j]} & \underbrace{\left[-\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} y[n-i]u[n-j]\right]_{\substack{i\in\overline{1,na}\\ j\in\overline{1,nb}}}}_{-r_{u,y}^N[i-j]} \\ \hline \underbrace{\left[-\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} u[n-i]y[n-j]\right]_{\substack{i\in\overline{1,nb}\\ j\in\overline{1,na}}}}_{-r_{y,u}^N[i-j]} & \underbrace{\left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} u[n-i]u[n-j]\right]_{i,j\in\overline{1,nb}}}_{r_u^N[i-j]} \end{array}\right] \qquad \mathbf{r}_N = \left[\begin{array}{c} \underbrace{\left[-\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} y[n-i]y[n]\right]_{i\in\overline{1,na}}}_{-r_y^N[i]} \\ \hline \underbrace{\left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} u[n-j]y[n]\right]_{j\in\overline{1,nb}}}_{r_{y,u}^N[j]} \end{array}\right]$$

☝ Matricea nu este neapărat simetrică.

- În cadrul matricii $\mathbf{R}_N$, indicele ***i*** parcurge liniile, iar indicele ***j*** parcurge coloanele.
- Pentru a evalua elementele matricii şi ale vectorului se apelează la convenţia prelungirii cu zeroruri a secvenţelor de date măsurate.

❹ Metode de identificare şi validare

❹.❷ Metoda Celor Mai Mici Pătrate

Analiza estimaţiei oferite de MCMMP pentru modelele ARX (continuare)

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_N = \mathbf{R}_N^{-1}\mathbf{r}_N = \left[\begin{array}{c|c} \left[r_y^N[i-j]\right]_{i,j\in\overline{1,na}} & \left[-r_{u,y}^N[i-j]\right]_{\substack{i\in\overline{1,na}\\ j\in\overline{1,nb}}} \\ \hline \left[-r_{y,u}^N[i-j]\right]_{\substack{i\in\overline{1,nb}\\ j\in\overline{1,na}}} & \left[r_u^N[i-j]\right]_{i,j\in\overline{1,nb}} \end{array}\right]^{-1} \left[\begin{array}{c} \left[-r_y^N[i]\right]_{i\in\overline{1,na}} \\ \hline \left[r_{y,u}^N[j]\right]_{j\in\overline{1,nb}} \end{array}\right]$$

$$\hat{\lambda}_N^2 = \frac{1}{\gamma_N}\sum_{n=1}^{N}\left(y[n]-\boldsymbol{\varphi}^T[n]\hat{\boldsymbol{\theta}}_N\right)^2 = \frac{1}{\gamma_N}\sum_{n=1}^{N}\left(y[n]-\boldsymbol{\varphi}^T[n]\mathbf{R}_N^{-1}\mathbf{r}_N\right)^2$$

← Dacă perturbaţia este un zgomot alb de medie nulă şi dispersie necunoascută.

☹ Vectorul regresorilor nu este perfect determinist.

☹ Mai mult, estimaţia vectorului parametrilor necunoscuţi este deviată.

⇒ Nu poate fi aplicată Teorema fundamentală a MCMMP pentru a testa consistența estimațiilor.

Cum poate fi testată consistenţa în cazul acestui model?

Prin relaxarea condiției a. din ipoteza Teoremei 2.

$$\lim_{N\to\infty}\mathbf{R}_N = \left[\begin{array}{c|c} \left[r_y[i-j]\right]_{i,j\in\overline{1,na}} & \left[-r_{u,y}[i-j]\right]_{\substack{i\in\overline{1,na}\\ j\in\overline{1,nb}}} \\ \hline \left[-r_{y,u}[i-j]\right]_{\substack{i\in\overline{1,nb}\\ j\in\overline{1,na}}} & \left[r_u[i-j]\right]_{i,j\in\overline{1,nb}} \end{array}\right] = E\{\boldsymbol{\varphi}[n]\boldsymbol{\varphi}^T[n]\}$$

$$\lim_{N\to\infty}\mathbf{r}_N = \left[\begin{array}{c} \left[-r_y[i]\right]_{i\in\overline{1,na}} \\ \hline \left[r_{y,u}[j]\right]_{j\in\overline{1,nb}} \end{array}\right] = E\{\boldsymbol{\varphi}[n]y[n]\}$$

IE

Analiza estimaţiei oferite de MCMMP pentru modelele ARX (continuare)

$$\theta^* = \Big(\underbrace{E\{\varphi[n]\varphi^T[n]\}}_{\lim\limits_{N\to\infty}\mathbf{R}_N}\Big)^{-1}\Big(\underbrace{E\{\varphi[n]y[n]\}}_{\lim\limits_{N\to\infty}\mathbf{r}_N} - E\{\varphi[n]v[n]\}\Big)$$

$$\lim_{N\to\infty}\hat{\theta}_N = \theta^* + \left(E\{\varphi[n]\varphi^T[n]\}\right)^{-1}\left(E\{\varphi[n]v[n]\}\right)$$

O condiţie suficientă de consistenţă

$$E\{\varphi[n]v[n]\} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} E\{v[n]y[n-i]\} = 0 & \forall\, i \in \overline{1,na} \\ E\{v[n]u[n-j]\} = 0 & \forall\, j \in \overline{1,nb} \end{cases}$$

- Mai precis, se poate demonstra rezultatul de mai jos.

Propoziţia 4

Pentru modelul ARX, următoarele 3 ipoteze se consideră verificate:

a. semnalul de intrare are ordin de persistenţă suficient de mare, astfel încît matricea $\mathbf{R}_N$ să fie inversabilă pentru toate dimensiunile orizontului de măsură suficient de mari;

b. perturbaţia v aparţine clasei $za(0,\lambda^2)$ (cu dispersia necunoscută λ^2);

c. semnalul de intrare (comandă sau referinţă) este necorelat cu perturbaţia ($E\{u[n]v[m]\} = 0,\ \forall\, n,m \in \mathbb{Z}$).

Atunci estimaţiile oferite de MCMMP sunt consistente.

- Se observă că numai una dintre cele două condiţii suficiente de consistenţă este precizată în cadrul propoziţiei.
- Intrarea ar trebui generată artificial, departe de sursa de perturbaţii care afectează ieşirea procesului, cu ordin de persistenţă cît mai mare.

☝ Ieşirea de la momente anterioare este necorelată cu zgomotul de la momentul curent datorită timpului mort intrinsec al procesului.

❹.❸ Metoda Variabilelor Instrumentale (MVI)

- Condiția ca perturbația să fie un zgomot alb rămîne restrictivă.
- Dacă nu se doreşte impunerea veunei condiții asupra perturbațiilor, atunci se operează o modificare asupra estimațiilor oferite de MCMMP.

Estimația oferită de Metoda Variabilelor Instrumentale (MVI)

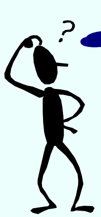
$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_N \overset{def}{=} \mathbf{R}_N^{-1}\mathbf{r}_N = \left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\zeta[n]\boldsymbol{\varphi}^T[n]\right)^{-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\zeta[n]y[n]\right)$$

Aceasta este o definiție.

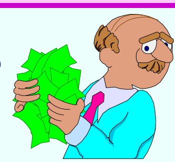
- Nu s-a utilizat nici un raționament pentru deducerea ei.
- Definiția este corectă numai dacă matricea $\mathbf{R}_N$ este inversabilă.

vectorul variabilelor instrumentale $\zeta[n]\in\mathbb{R}^{n\theta}$

☝ Ales liber de către utilizator, astfel încît definiția să fie corectă.



Dar consistența?



Această proprietate trebuie studiată în manieră riguroasă.

Se pot deduce mai întîi condițiile generale de consistență.

$$E \;\; \zeta[n]\times \;\; y[n]=\boldsymbol{\varphi}^T[n]\boldsymbol{\theta}^* + v[n]$$

$$\boldsymbol{\theta}^* = \left(E\{\zeta[n]\boldsymbol{\varphi}^T[n]\}\right)^{-1}\left(E\{\zeta[n][n]y[n]\} - E\{\zeta[n][n]v[n]\}\right)$$

IE

$$\boldsymbol{\theta}^* = \lim_{N\to\infty}\hat{\boldsymbol{\theta}}_N - \left(E\{\zeta[n]\boldsymbol{\varphi}^T[n]\}\right)^{-1}\left(E\{\zeta[n]v[n]\}\right)$$

$$\begin{cases}\det\left(E\{\zeta[n]\boldsymbol{\varphi}^T[n]\}\right)\neq 0\\ E\{\zeta[n]v[n]\}=0\end{cases}\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$$

☝ Instrumentele trebuie să fie necorelate cu perturbațiile.

④.③ Metoda Variabilelor Instrumentale

Analiza estimaţiei oferite de MVI pentru modelele ARX

$\mathcal{P}(\theta^*)$

$A^*(q^{-1})y[n] = B^*(q^{-1})u[n] + v[n]$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Updownarrow$

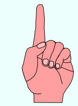
$y[n] = \varphi^T[n]\theta^* + v[n]$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\varphi^T[n] \stackrel{def}{=} \left[-y[n-1]\ -y[n-2] \cdots -y[n-na] \mid u[n-1]\ u[n-2] \cdots u[n-nb] \right]$$

$$\theta^T \stackrel{def}{=} \left[a_1\ a_2 \cdots a_{na} \mid b_1\ b_2 \cdots b_{nb} \right]$$

Cum se poate construi vectorul variabilelor instrumentale în cazul modelelor ARX?

Pentru a realiza necorelarea cu perturbaţiile, se încearcă utilizarea **doar a intrării** (**nu şi a ieşirii**).



$n\theta = na + nb$

3 tipuri de vectori ai instrumentelor

nefiltrat

$$\zeta[n] \stackrel{def}{=} \left[u[n-1]\ \ u[n-2]\ \cdots\ u[n-na-nb] \right]^T$$

parţial filtrat

$$\zeta[n] \stackrel{def}{=} \left[\boxed{u_f[n-1]\ \ u_f[n-2]\ \cdots\ u_f[n-na]} \mid u[n-1]\ \ u[n-2]\ \cdots\ u[n-nb] \right]^T;$$

☝ Pe poziţia componentei AR.

$$\zeta[n] \stackrel{def}{=} \left[u[n-1]\ \ u[n-2]\ \cdots\ u[n-na] \mid \boxed{u_f[n-1]\ \ u_f[n-2]\ \cdots\ u_f[n-nb]} \right]^T;$$

☝ Pe poziţia componentei X.

(total) filtrat

$$\zeta[n] \stackrel{def}{=} \left[u_f[n-1]\ \ u_f[n-2]\ \cdots\ u_f[n-na-nb] \right]^T$$

Semnalul filtrat

$$u_f[n] \stackrel{def}{=} \frac{D(q^{-1})}{C(q^{-1})} u[n] \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

polinoame

Exemple

$$\begin{cases} C(q^{-1}) = 1 \\ D(q^{-1}) = q^{-nd} \end{cases};$$

$$u_f[n] \stackrel{def}{=} -\frac{\hat{B}(q^{-1})}{\hat{A}(q^{-1})} u[n+nk] \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

estimate cu MCMMP

❹.❸ Metoda Variabilelor Instrumentale

Analiza estimaţiei oferite de MVI pentru modelele ARX (continuare)

$$\zeta[n] \overset{def}{=} \left[u[n-1]\ \ u[n-2]\ \ \cdots\ \ u[n-na-nb]\right]^T$$ (nefiltrat)

$$\mathbf{R}_N \overset{def}{=} \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\left[-\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}u[n-i]y[n-j]\right]_{i,j\in\overline{1,na}}}_{-r_{y,u}^N[i-j]} & \underbrace{\left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}u[n-i]u[n-j]\right]_{\substack{i\in\overline{1,na}\\ j\in\overline{1,nb}}}}_{r_u^N[i-j]} \\ \hline \underbrace{\left[-\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}u[n-na-i]y[n-j]\right]_{\substack{i\in\overline{1,nb}\\ j\in\overline{1,na}}}}_{-r_{y,u}^N[na+i-j]} & \underbrace{\left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}u[n-na-i]u[n-j]\right]_{i,j\in\overline{1,nb}}}_{r_u^N[na+i-j]} \end{array}\right] \qquad \mathbf{r}_N \overset{def}{=} \left[\begin{array}{c} \underbrace{\left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}u[n-i]y[n]\right]_{i\in\overline{1,na}}}_{r_{y,u}^N[i]} \\ \hline \underbrace{\left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}u[n-na-j]y[n]\right]_{j\in\overline{1,nb}}}_{r_{y,u}^N[na+j]} \end{array}\right]$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_N = \mathbf{R}_N^{-1}\mathbf{r}_N = \left[\begin{array}{c|c} \left[-r_{y,u}^N[i-j]\right]_{i,j\in\overline{1,na}} & \left[r_u^N[i-j]\right]_{\substack{i\in\overline{1,na}\\ j\in\overline{1,nb}}} \\ \hline \left[-r_{y,u}^N[na+i-j]\right]_{\substack{i\in\overline{1,nb}\\ j\in\overline{1,na}}} & \left[r_u^N[na+i-j]\right]_{i,j\in\overline{1,nb}} \end{array}\right]^{-1} \left[\begin{array}{c} \left[r_{y,u}^N[i]\right]_{i\in\overline{1,na}} \\ \hline \left[r_{y,u}^N[na+j]\right]_{j\in\overline{1,nb}} \end{array}\right]$$

$$\hat{\lambda}_N^2 = \frac{1}{\gamma_N}\sum_{n=1}^{N}\left(y[n]-\boldsymbol{\varphi}^T[n]\hat{\boldsymbol{\theta}}_N\right)^2 = \frac{1}{\gamma_N}\sum_{n=1}^{N}\left(y[n]-\boldsymbol{\varphi}^T[n]\mathbf{R}_N^{-1}\mathbf{r}_N\right)^2$$

⇐ Dacă perturbaţia este un zgomot alb de medie nulă şi dispersie necunoascută.

Condiţiile generale de consistenţă

$$\begin{cases} \det\left(E\{\zeta[n]\boldsymbol{\varphi}^T[n]\}\right) \neq 0 \\ E\{\zeta[n]v[n]\} = 0 \end{cases} \quad \forall\, n\in\mathbb{N}^*$$

- Datorită formei vectorului instrumentelor, a doua condiţie este automat verificată dacă intrarea este produsă departe de sursa perturbaţiilor.

☝ Nu este necesar ca zgomotul să fie alb.

Analiza estimaţiei oferite de MVI pentru modelele ARX (continuare)

Este bine defnită estimaţia oferită de MVI?

Pentru anumite semnale de intrare, da.

Teorema 3 (Teorema fundamentală a MVI pentru modelele ARX)

Pentru modelul ARX[na,nb], următoarele 3 ipoteze se consideră verificate:

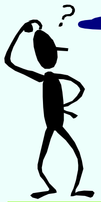
- **a. modelul este parsimonios:** $(A^*, B^*) = 1$ **(polinoamele adevărate sunt coprime) ;**
- **b. semnalul de stimul** u **aparține clasei** $za(0, \lambda_u^2)$ **(adică este un zgomot alb de medie nulă şi dispersie cunoscută).**
- **c. perturbația** v **nu este corelată cu semnalul de stimul:** $E\{u[n]v[m]\} = 0$, $\forall\, n, m \in \mathbb{N}^*$**.**

Dacă se alege un vector al instrumentelor de tip nefiltrat, atunci estimația oferită de MVI pentru vectorul parametrilor adevărați ai modelului este bine definită şi consistentă.

- Acest rezultat arată că modelele de tip ARX pot fi identificate cu succes şi în cazul cînd perturbaţiile nu pot fi caracterizate statistic.
- Condiția de neautocorelare a perturbațiilor se transferă acum intrării, care poate fi controlată.
- În practică, intrarea de tip zgomot alb nu poate fi generată, dar semnalele care o aproximează (SPAB, SPA) sunt frecvent utilizate în conjuncție cu MVI, fără a pierde buna definire a estimației aferente.

Analiza estimației oferite de MVI pentru modelele ARX (continuare)

Cît de eficientă este estimația oferită de MVI?



Pentru testarea eficienței, este necesară evaluarea matricii de auto-covarianță a erorii de estimare.

Aceasta se realizează în demonstrația rezultatului care urmează.

Teorema 4 (Eficiența estimației oferite de MVI pentru modelele ARX)

Se consideră că modelul ARX[na,nb] verifică următoarele ipoteze:

- **a.** **modelul este parsimonios:** $(A^*,B^*)=1$ **(polinoamele adevărate sunt coprime);**
- **b.** **intrarea** ***u*** **este un semnal de stimul cu ordin de persistență suficient de mare (cel puțin na+nb) astfel încît estimațiile oferite de MVI cu vectori ai instrumentelor construiți folosind numai acest semnal să fie corect definite;**
- **c.** **perturbația** ***v*** **aparține clasei** $za(0,\lambda^2)$ **(adică este un zgomot alb de medie nulă şi dispersie necunoscută** λ^2**), nefiind corelată cu semnalul de stimul:**

$$E\{u[n]v[m]\}=0\,,\quad \forall\, n,m\in\mathbb{N}^*.$$

- **d.** **perturbația** ***v*** **este independentă statistic de semnalul de stimul.**

Atunci cea mai eficientă estimație (corect definită) oferită de MVI se obține pentru următorul vector al instrumentelor, parțial filtrat:

$$\zeta[n]\overset{def}{=}\Big[u_f[n-1]\ \ u_f[n-2]\ \cdots\ u_f[n-na]\ \ \big|\ \ u[n-1]\ \ u[n-2]\ \cdots\ u[n-nb]\Big]^T\,,$$

unde: $$u_f[n]\overset{def}{=}-\frac{B^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})}u[n]\quad \forall\, n\in\mathbb{N}^*\,.$$

❹ Metode de identificare şi validare

❹.❸ Metoda Variabilelor Instrumentale

Analiza estimaţiei oferite de MVI pentru modelele ARX (continuare)

Teorema 4 O estimaţie cu eficienţă satisfăcătoare se obţine folosind un filtru determinat prin MCMMP.

$$u_f[n] \overset{def}{=} \frac{\hat{B}(q^{-1})}{\hat{A}(q^{-1})} u[n] \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

☝ Cele două polinoame se pot estima şi folosind MVI cu un vector al instrumentelor nefiltrat.

- În cadrul Teoremei 4, se revine la ipoteza perturbaţiilor de tip zgomot alb, de aceea valoarea sa este destul de limitată.
- Cu toate acestea, dacă se verifică ipotezele Teoremei 4, se poate arăta că estimaţiile oferite de MCMMP şi MVI sunt la fel de eficiente.
- În cazul zgomotelor colorate:
  - ☹ Estimaţiile oferite de MCMMP sunt mai lent convergente (mai puţin eficiente) decît cele oferite de MVI.

    ☝ Deoarece Estimatorul Markov este neimplementabil.
  - ☹ Estimaţiile oferite de MVI pot să nu fie consistente către valorile adevărate ale parametrilor.

    ☝ Deoarece procesul nu poate fi stimulat cu un zgomot alb.
- În aplicaţiile unde este necesară identificarea unui model de tip ARX:
  - ☺ Atît estimaţiile oferite de MCMMP cît şi cele oferite de MVI sunt implementabile.
  - ☹ Asigurarea condiţiilor de consistenţă nu este uşor de realizat, deoarece se bazează pe neautocorelarea fie a perturbaţiilor, fie a intrărilor.
- În general, MCMMP este utilizată cînd procesul nu poate fi stimulat cu un SPA(B), altfel se recurge la MVI.