Prelucrarea semnalelor

Capitolul 2: Sisteme

Bogdan Dumitrescu

Facultatea de Automatică şi Calculatoare

Universitatea Politehnica Bucureşti

Sisteme discrete

- Sistem discret: transformă semnalul de intrare $x[n]$ într-un semnal de ieşire $y[n]$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\mathcal{S}} \longrightarrow y[n] = \mathcal{S}\{x[n]\}$$

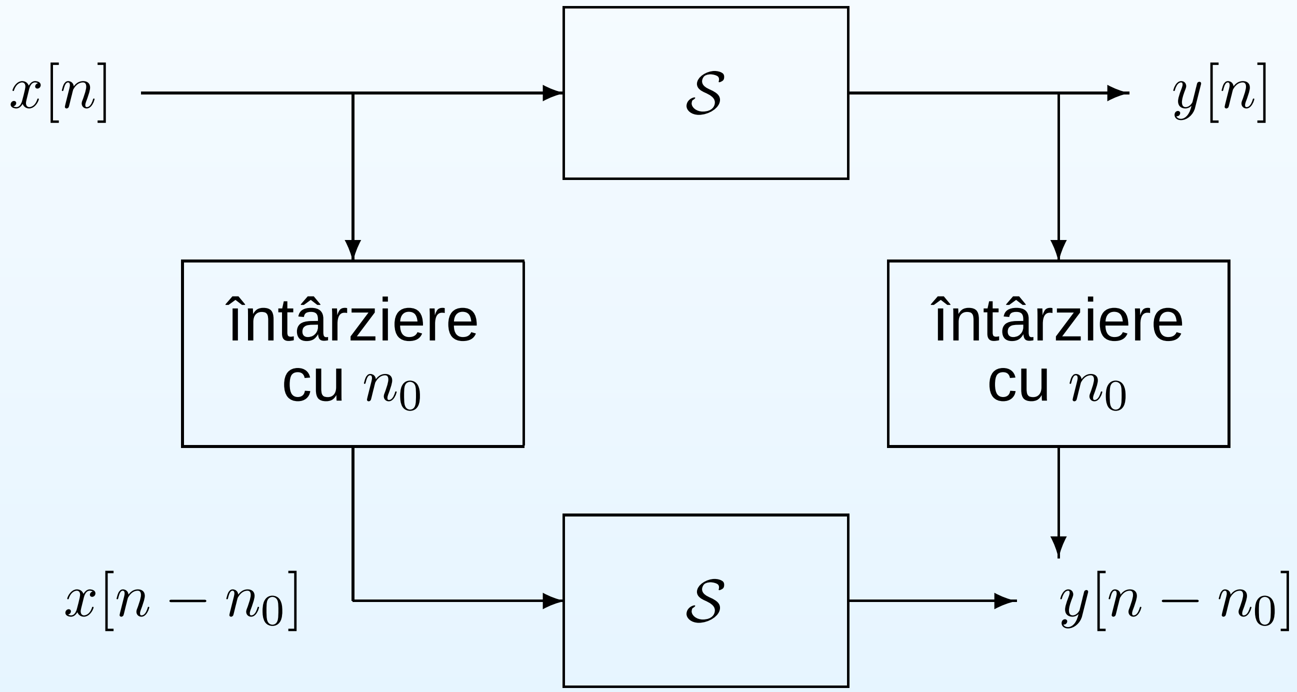
- În prelucrarea semnalelor, sistem $\equiv$ filtru

- *Liniaritate*

$$\mathcal{S}\{\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]\} = \alpha_1 \mathcal{S}\{x_1[n]\} + \alpha_2 \mathcal{S}\{x_2[n]\}$$

Invarianţă în timp

- *Invarianţă în timp:* sistemul transferă întârzierea intrării la ieşire. Operaţiile $\mathcal{S}$ şi "întârziere" comută



Stabilitate, cauzalitate

- *Cauzalitate:* valoarea curentă a ieşirii depinde doar de valoarea curentă şi de valori anterioare ale intrării
- Pentru orice semnal de intrare $x[n]$ şi orice $n_0 \in \mathbb{Z}$, valoarea $y[n_0]$ depinde doar de intrările $x[n]$, $n \leq n_0$
- *Stabilitate* în sens BIBO (Bounded Input, Bounded Output): dacă semnalul de intrare $x[n]$ este mărginit, atunci şi semnalul de ieşire este mărginit

Exemple

- Sistemul "medie pe două eşantioane"

$$y[n] = (x[n] + x[n-1])/2$$

  este liniar, invariant în timp, cauzal şi stabil
- *Decimatorul* $y[n] = x[Mn]$, cu $M \in \mathbb{Z}$, $M \geq 2$ (decimatorul extrage fiecare al M-lea eşantion al semnalului de intrare şi le elimină pe celelalte) este liniar şi stabil
- Nu este invariant în timp: decimând $x[n]$ şi $x[n-1]$ obţinem în general rezultate diferite
- Nu este cauzal: $y[1] = x[M]$, deci ieşirea la momentul $n = 1$ depinde de intrarea la momentul $M > 1$

Sisteme liniare invariante în timp

- *Răspunsul la impuls* al sistemului LIT $\mathcal{S}$ este $h[n] = \mathcal{S}\{\delta[n]\}$
- $h[n]$ se numeşte *secvenţă pondere* a sistemului
- Răspunsul la impuls al unui sistem LIT caracterizează complet funcţionarea sistemului
- Pentru intrarea $x[n]$, ieşirea $y[n] = \mathcal{S}\{x[n]\}$ este

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k] \quad (1)$$

- Demonstraţie:

$$y[n] = \mathcal{S}\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\mathcal{S}\{\delta[n-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

Sistem LIT cauzal

- Un sistem LIT este cauzal dacă şi numai dacă răspunsul său la impuls este nul pentru timp negativ:

$$h[n] = 0 \;\; \text{pentru } n < 0$$

- Demonstraţie: din (1) rezultă că $y[n]$ depinde doar de $x[k]$, cu $k \leq n$, dacă şi numai dacă $h[n-k] = 0$ pentru $k > n$, adică $h[n] = 0$, pentru $n < 0$.

Sistem LIT stabil (1)

- Un sistem LIT este stabil dacă şi numai dacă răspunsul său la impuls este absolut sumabil.
- *Demonstraţie:*
  ("$\Rightarrow$") presupunem că $h[n]$ nu este absolut sumabil. Fie

$$x[n] = \begin{cases} \frac{h^*[-n]}{|h[-n]|}, & \text{dacă } h[n] \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } h[n] = 0 \end{cases}$$

  În acest caz, pentru $y[0]$ obţinem valoarea

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|h[k]|^2}{|h[k]|} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|,$$

  care nu e mărginită, deci sistemul nu ar fi stabil

Sistem LIT stabil (2)

("$\Leftarrow$") Deoarece $h[n]$ este absolut sumabil, există M_h astfel încât

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| \leq M_h$$

Fie $x[n]$ o intrare mărginită, cu $|x[n]| \leq M_x$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Atunci

$$\begin{aligned} |y[n]| &= \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]||x[n-k]| \\ &\leq M_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \leq M_x M_h, \end{aligned}$$

şi deci ieşirea este mărginită, adică sistemul este stabil.

Răspunsul la impuls al unui sistem stabil are întotdeauna transformată Fourier

Funcţia de transfer a unui sistem LIT

- Funcţia de transfer a unui sistem LIT este transformata Z a răspunsului său la impuls

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n}$$

- Dacă $X(z)$, $Y(z)$ sunt transformatele Z ale intrării, respectiv ieşirii unui sistem LIT cu funcţia de transfer $H(z)$, atunci

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

Filtre FIR

- FIR = Finite Impulse Response = răspuns finit la impuls
- Funcţia de transfer este $H(z) = \sum_{n=0}^{M} h[n] z^{-n}$
- *Ordinul* (sau gradul) filtrului este M
- *Lungimea* (numărul de coeficienţi, mărimea suportului) este $M+1$
- Orice filtru FIR este stabil ($\sum_{n=0}^{M} |h[n]|$ finită)
- Pentru intrarea $x[n]$, ieşirea este $y[n] = \sum_{k=0}^{M} h[k] x[n-k]$
- Eşantionul curent al ieşirii depinde doar de cele mai recente $M+1$ eşantioane ale intrării

Filtre IIR — definiţii

- IIR = Infinite Impulse Response = răspuns infinit la impuls
- Interesante sunt cele cu funcţie de transfer raţională

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{n=0}^{M} b_n z^{-n}}{\sum_{n=0}^{N} a_n z^{-n}}$$

- De obicei punem $a_0 = 1$; numărul de coeficienţi este $M + N + 1$
- Ordinul filtrului este max(M, N)
- Daca $B(z) = b_0$, atunci filtrul se numeşte AR (autoregresiv)

Filtre IIR — stabilitate

- Reprezentare poli-zerouri:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1 - d_k z^{-1})}$$

- c_k sunt zerouri, d_k poli (în general complecşi)
- Filtrul IIR este stabil dacă toţi polii săi sunt în interiorul cercului unitate

Filtre IIR — ecuaţia cu diferenţe

- Ecuaţia cu diferenţe asociată filtrului este

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

- Eşantionul curent al ieşirii depinde de cele mai recente $M + 1$ eşantioane ale intrării, dar şi de precendentele N eşantioane ale ieşirii
- Dacă $x[n] = 0$ pentru $n < 0$, atunci ieşirea se poate calcula doar dacă se cunosc condiţiile iniţiale $y[-N]$, . . . , $y[-1]$

Răspunsul sistemelor LIT la sinusoide

- Sistem LIT stabil, cu funcţie de transfer $H(z)$; răspuns la impuls $h[n]$, a cărui TF este

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

- Dacă la intrarea sistemului se aplică sinusoida complexă $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, atunci ieşirea este sinusoida

$$y[n] = H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n} = |H(e^{j\omega_0})|e^{j(\omega_0 n + argH(e^{j\omega_0}))}$$

- Dem:
$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\omega_0(n-k)} \\ &= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right) e^{j\omega_0 n} = H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n} \end{aligned}$$

Răspunsul în frecvenţă al sistemelor LIT

- Pentru intrarea cu TF $X(e^{j\omega})$, ieşirea este

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

- Pentru o frecvenţă ω, valoarea $H(e^{j\omega})$ reprezintă factorul cu care sistemul amplifică componenta de frecvenţă ω a intrării
- $H(e^{j\omega})$ se numeşte *răspuns în frecvenţă* al sistemului
- În special pentru reprezentarea grafică a răspunsului în frecvenţă, se mai foloseşte denumirea de *caracteristică de frecvenţă* a sistemului

Cum desenăm caracteristica de frecvenţă

- Dacă $H(z)$ are coeficienţi reali, se reprezintă amplitudinea şi faza pentru $\omega \in [0, \pi]$; pentru $\omega \in [-\pi, 0]$ se ţine seama de simetrie (amplitudinea este pară, iar faza impară).
- Amplitudinea, in decibeli: $|H(e^{j\omega})|_{dB} = 20\log_{10}|H(e^{j\omega})|$
- Valoarea principală a fazei: $ARG[H(e^{j\omega})] \in [-\pi, \pi]$
- Frecvenţă normalizată: $\omega/\pi \in [0, 1]$

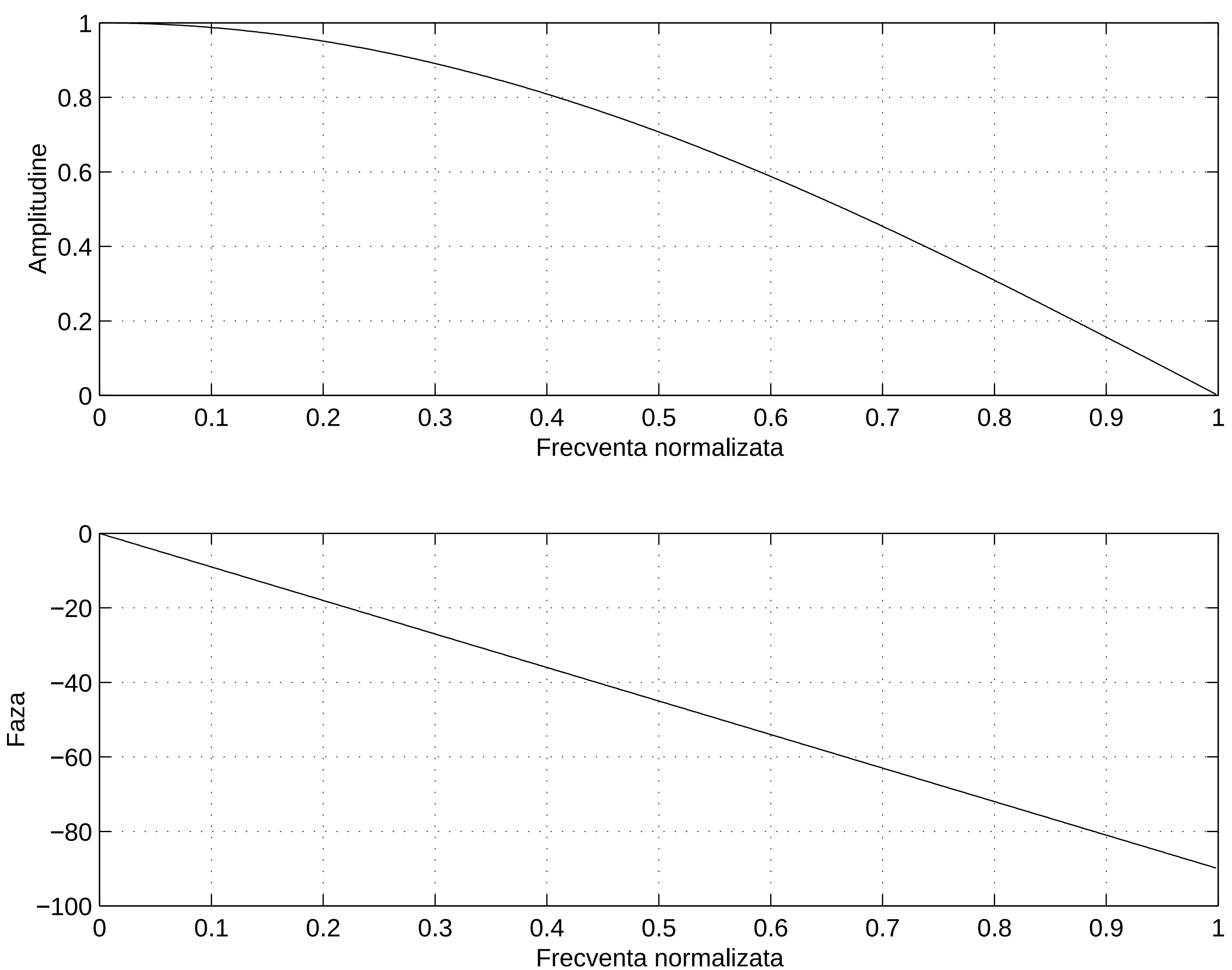
Exemplu de răspuns în frecvenţă

- Pentru sistemul $y[n] = (x[n] + x[n-1])/2$

$$H(\omega) = \frac{1 + e^{-j\omega}}{2} = e^{-j\omega/2} \frac{e^{j\omega/2} + e^{-j\omega/2}}{2} = e^{-j\omega/2} \cos(\omega/2)$$

- Amplitudine $|H(\omega)| = \cos(\omega/2)$
- Faza este liniară: $argH(\omega) = -\omega/2$
- Desenăm doar pentru $\omega \in [0, \pi]$

Exemplu de caracteristică de frecvenţă



Intepretare

- Sistemul $y[n] = (x[n] + x[n-1])/2$
- Pentru $x[n] = e^{j0n} = 1$, rezultă imediat $y[n] = 1$.
  Se observă că $H(e^{j0}) = 1$
- $x[n] = e^{j\pi n} = (-1)^n \Longrightarrow y[n] = ((-1)^n + (-1)^{n-1})/2 = 0$
  Se observă că $H(e^{j\pi}) = 0$
- Dacă $x[n] = e^{j\frac{\pi}{2}n}$, ţinând seama că

$$H(e^{j\frac{\pi}{2}n}) = e^{-j\frac{\pi}{4}}\cos(\tfrac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

  rezultă $y[n] = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{j(\frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{4})}$
- Luând partea reală, pentru $x[n] = \cos(\pi n/2)$ rezultă
  $y[n] = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{4})$
- Verificaţi prin calcul direct !

Sistemul medie pe M eşantioane (1)

- Sistem medie pe M eşantioane:

$$y[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x[n-k]$$

- Răspunsul în frecvenţă

$$\begin{aligned}
H(\omega) &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{-j\omega k} = \frac{1}{M} \frac{1 - e^{-j\omega M}}{1 - e^{-j\omega}} \\
&= \frac{1}{M} \frac{e^{-j\omega M/2}(e^{j\omega M/2} - e^{-j\omega M/2})}{e^{-j\omega/2}(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})} \\
&= \frac{1}{M} e^{-j\omega(M-1)/2} \frac{\sin(\omega M/2)}{\sin(\omega/2)}
\end{aligned}$$

Sistemul medie pe M eşantioane (2)

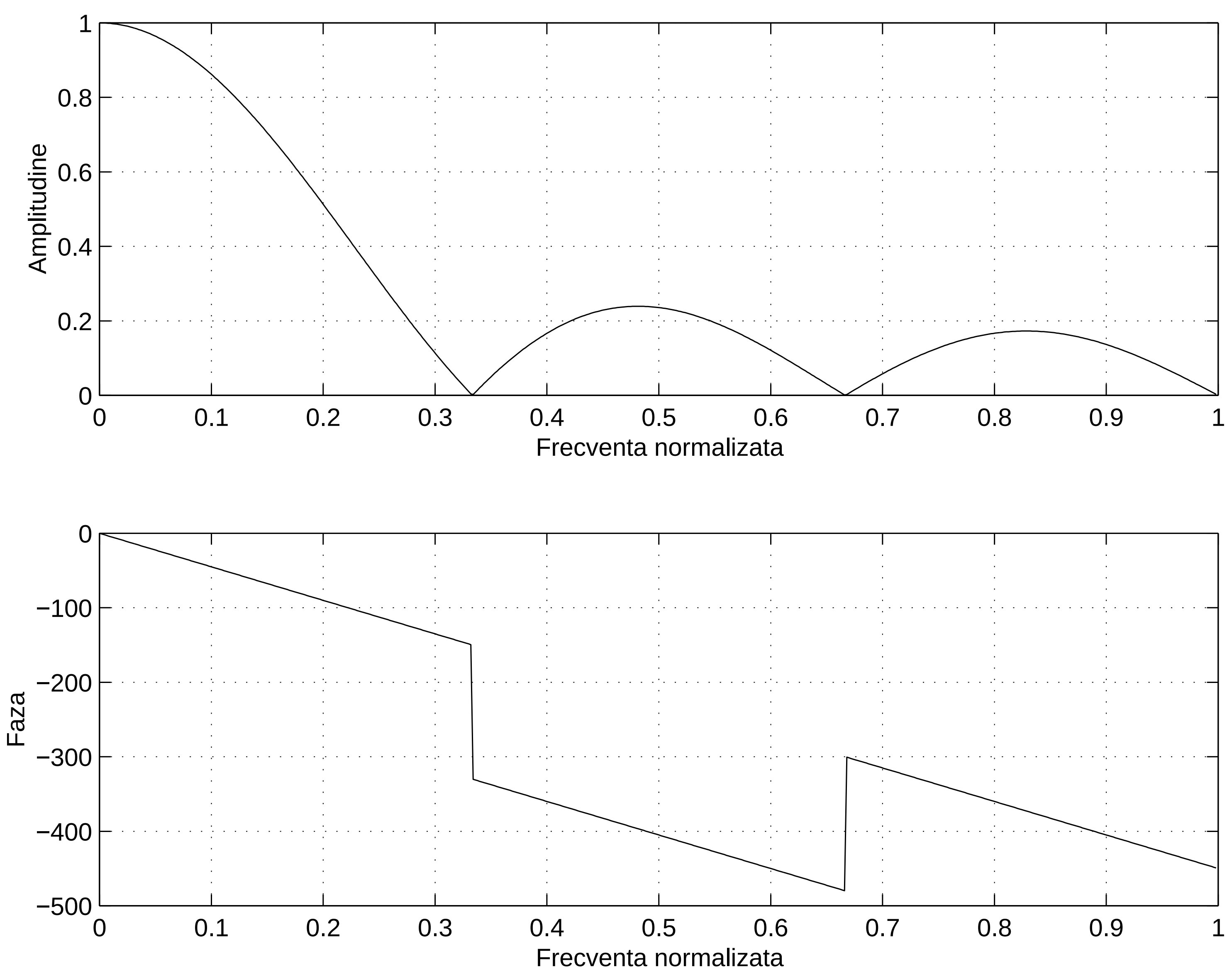
- Amplitudinea este

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{M}\left|\frac{\sin(\omega M/2)}{\sin(\omega/2)}\right|$$

- Când $\omega \in [0, \pi]$, observăm că $\sin(\omega/2) \geq 0$, dar că semnul lui $\sin(\omega(M+1)/2)$ variază
- Deoarece $-1 = e^{-j\pi}$, faza este

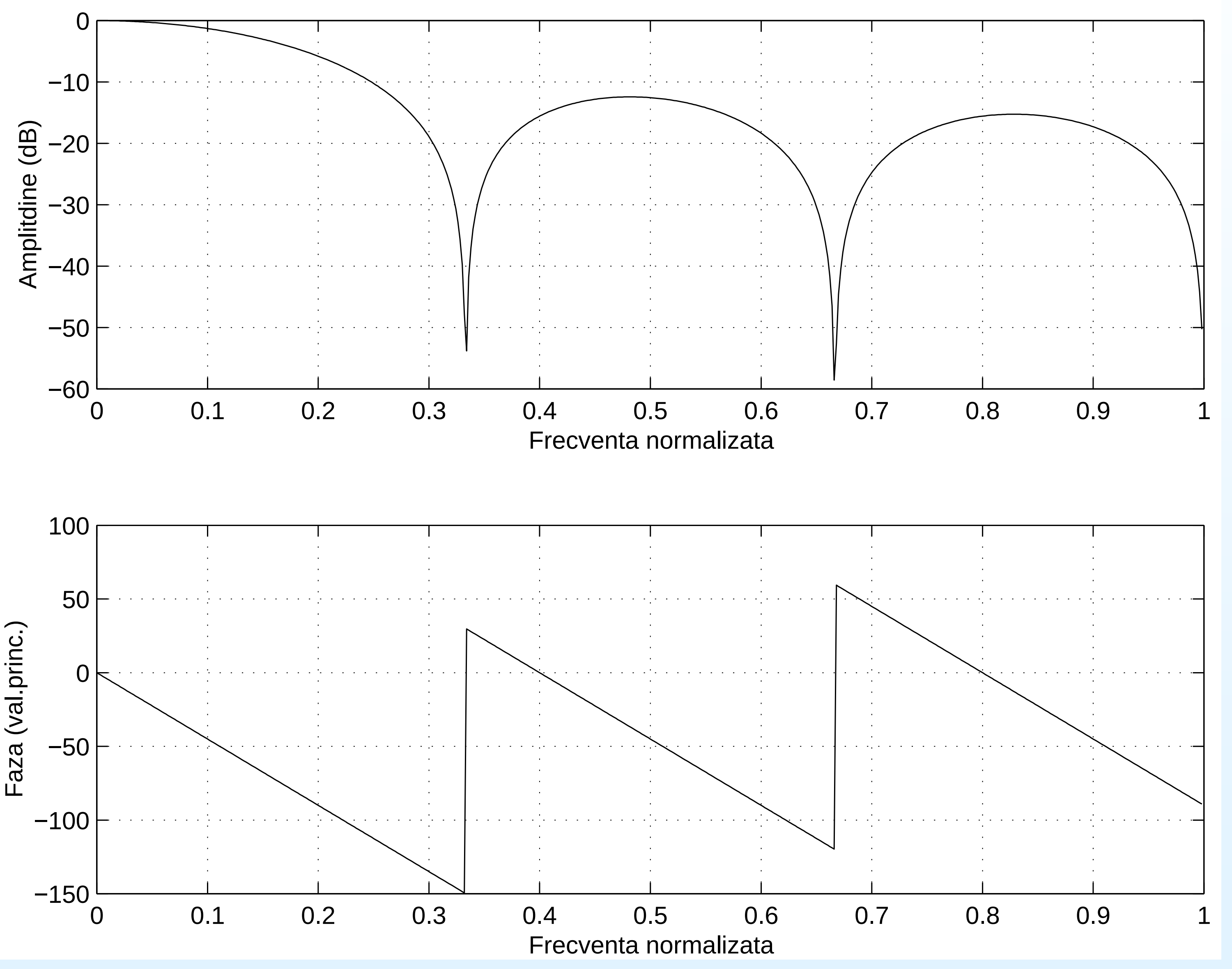
$$arg H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -\omega(M-1)/2, & \text{când } \sin(\omega M/2) \geq 0 \\ -\omega(M-1)/2 - \pi, & \text{când } \sin(\omega M/2 < 0 \end{cases}$$

Cazul M=6



Amplitudine
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
Frecventa normalizata
Faza
0
−100
−200
−300
−400
−500
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
Frecventa normalizata

Amplitudine în dB, valoare principală a fazei



Caracteristica de frecvenţă a filtrelor raţionale

- Filtru IIR (model poli-zerouri)

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1 - d_k z^{-1})}$$

- Amplitudinea în decibeli este

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega})|_{dB} &= 20 \log_{10} \left| \frac{b_0}{a_0} \right| + 20 \sum_{k=1}^{M} \log_{10} |1 - c_k e^{-j\omega}| \\ &- 20 \sum_{k=1}^{N} \log_{10} |1 - d_k e^{-j\omega}| \end{aligned}$$

- Faza este

$$\begin{aligned} arg[H(e^{j\omega})] &= arg\left(\frac{b_0}{a_0}\right) + \sum_{k=1}^{M} arg(1 - c_k e^{-j\omega}) \\ &- \sum_{k=1}^{N} arg(1 - d_k e^{-j\omega}) \end{aligned}$$

- Concluzie: studiem filtre cu un zero sau un pol

Filtre FIR de ordinul 1

- Filtrul este

$$H(z) = 1 - cz^{-1}, \quad c = re^{j\theta}, \quad r \in [0, 1], \; \theta \in [0, \pi]$$

- Amplitudinea răspunsului în frecvenţă:

$$|H(e^{j\omega})|^2 = |1 - re^{j(\theta-\omega)}|^2 = 1 + r^2 - 2r\cos(\omega - \theta)$$

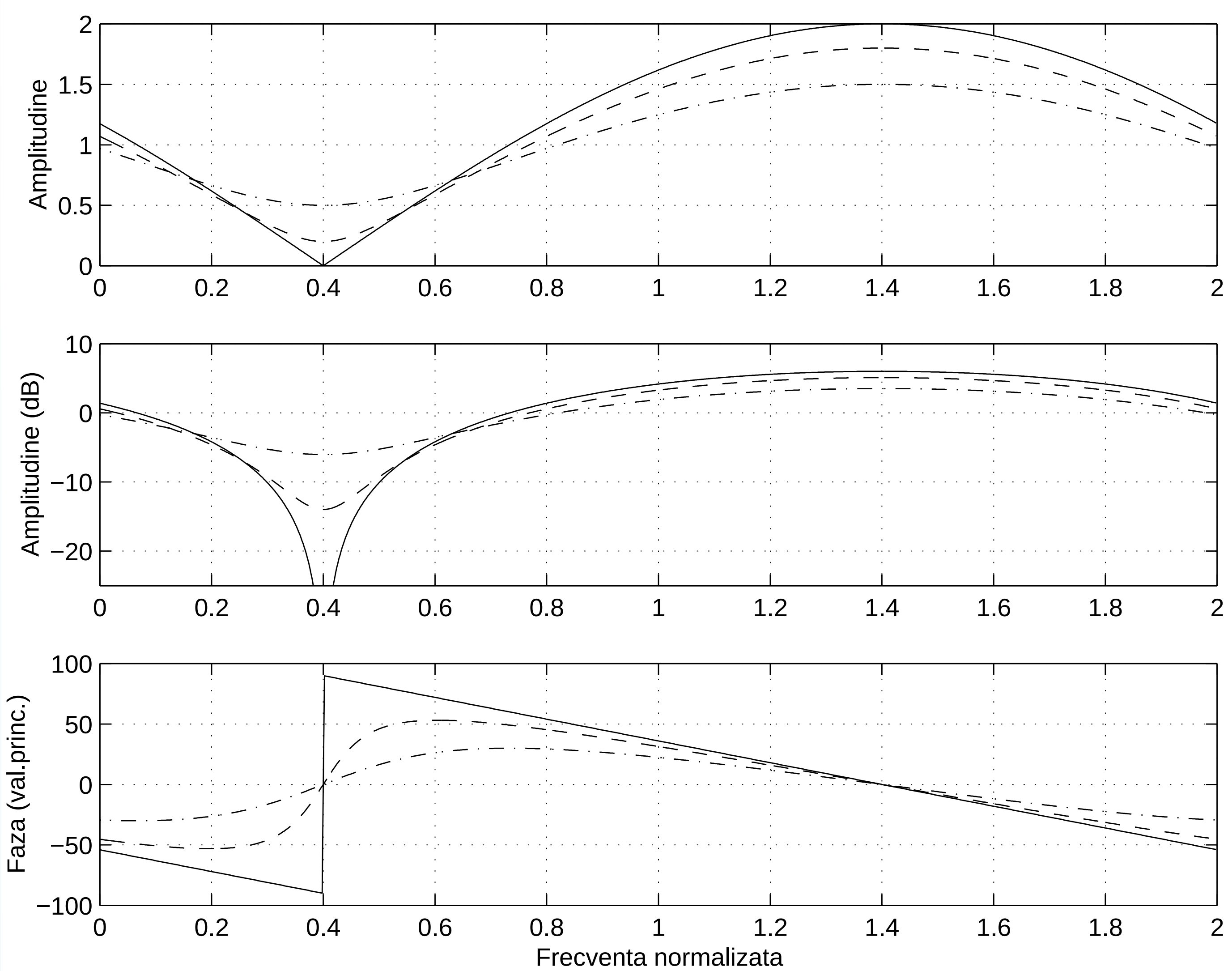
- ($|H(e^{j\omega})|_{dB} = 20\log_{10}|H(e^{j\omega})| = 10\log_{10}|H(e^{j\omega})|^2$)
- Valoarea maximă a amplitudinii este $(1 + r)$ pentru $\omega = \theta \pm \pi$
- Valoarea minimă este $(1 - r)$, pentru $\omega = \theta$

Efectul poziţiei zeroului

- r este mai aproape de 1 (i.e. zeroul este mai aproape de cercul unitate) $\Longrightarrow$ atenuarea în jurul frecvenţei $\omega = \theta$ este mai mare
- $r = 1$ (zero pe cerc) $\Longrightarrow H(e^{j\theta}) = 0$ ($|H(e^{j\theta})|_{dB} = -\infty$). Amplificarea filtrului la această frecvenţă este nulă; semnalele sinusoidale cu frecvenţa θ sunt tăiate complet
- $r \approx 0$ (zero aproape de origine) $\Longrightarrow$ variaţii mici ale amplitudinii

Exemplu FIR 1: $\theta = 0.4\pi$

- $r = 1$ (linie cont.), $r = 0.8$ (întreruptă), $r = 0.5$ (linie-punct)



Filtre FIR de ordinul 2

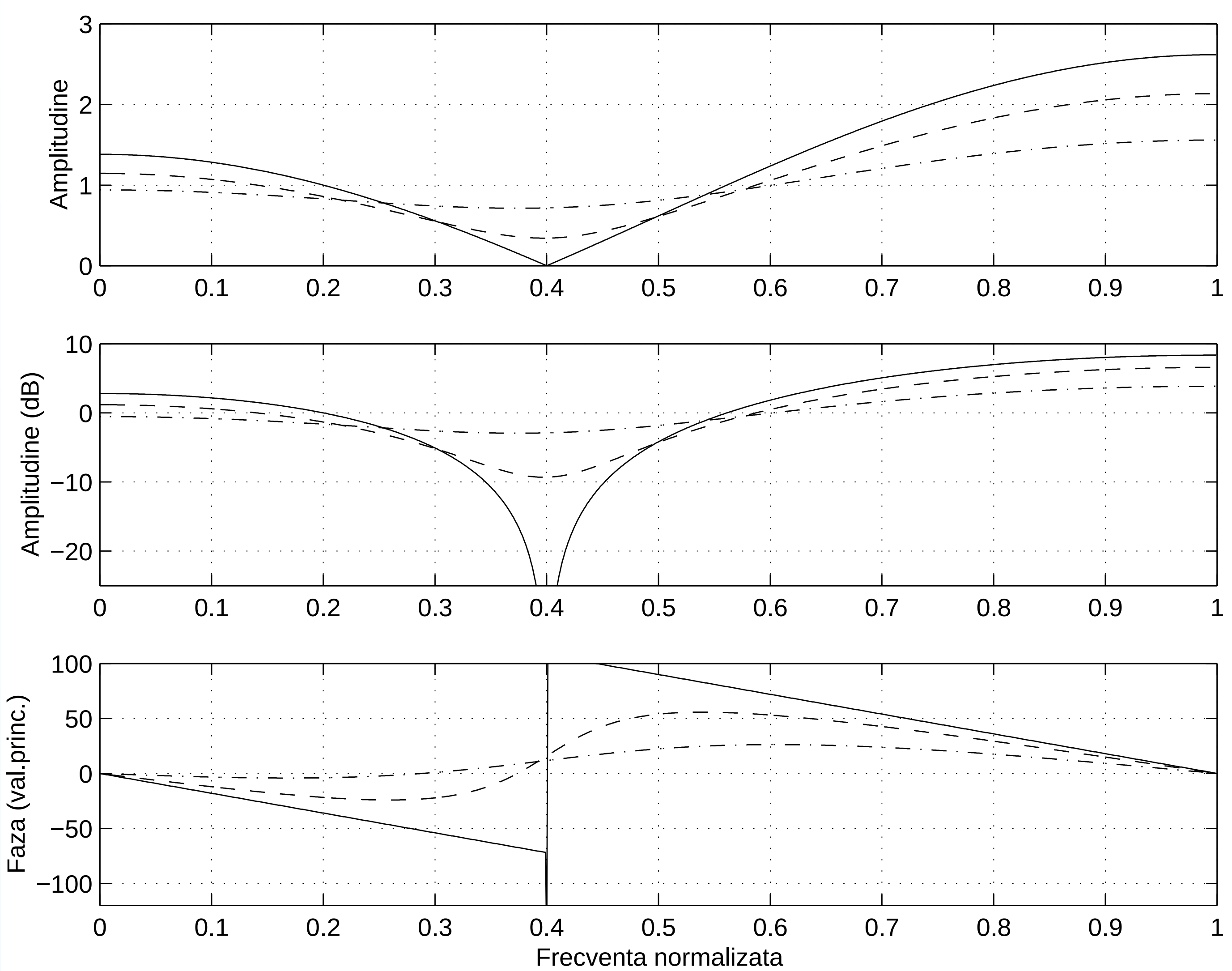
- Cazul interesant: coeficienţi reali, zerouri complex conjugate
- Zerourile sunt $c = re^{j\theta}$ şi $c^* = re^{-j\theta}$
- Funcţia de transfer este

$$H(z) = (1 - cz^{-1})(1 - c^* z^{-1}) = 1 - 2r\cos\theta \cdot z^{-1} + r^2 z^{-2}$$

- Amplitudinea răspunsului în frecvenţă, în decibeli, se obţine adunând două amplitudini ale unor filtre de ordinul 1 (cu zerourile c şi c^*)
- Similar, faza se obţine adunând fazele corespunzătoare factorilor de grad 1

Exemplu FIR 2: $\theta = 0.4\pi$

- $r = 1$ (linie cont.), $r = 0.8$ (întreruptă), $r = 0.5$ (linie-punct)



Filtre AR cu un singur pol

- Filtrul
$$H(z) = \frac{1}{1 - cz^{-1}}$$
este inversul unui filtru FIR de ordinul 1
- Atât amplitudinea în decibeli cât şi faza filtrului AR sunt opusele analoagelor lor pentru filtrul FIR
- Graficele amplitudinii şi fazei se obţin prin oglindirea faţă de abscisă a celor pentru FIR

Exemplu AR 1: $\theta = 0.4\pi$

- $r = 0.95$ (cont.), $r = 0.8$ (întrerupt), $r = 0.5$ (linie-punct)

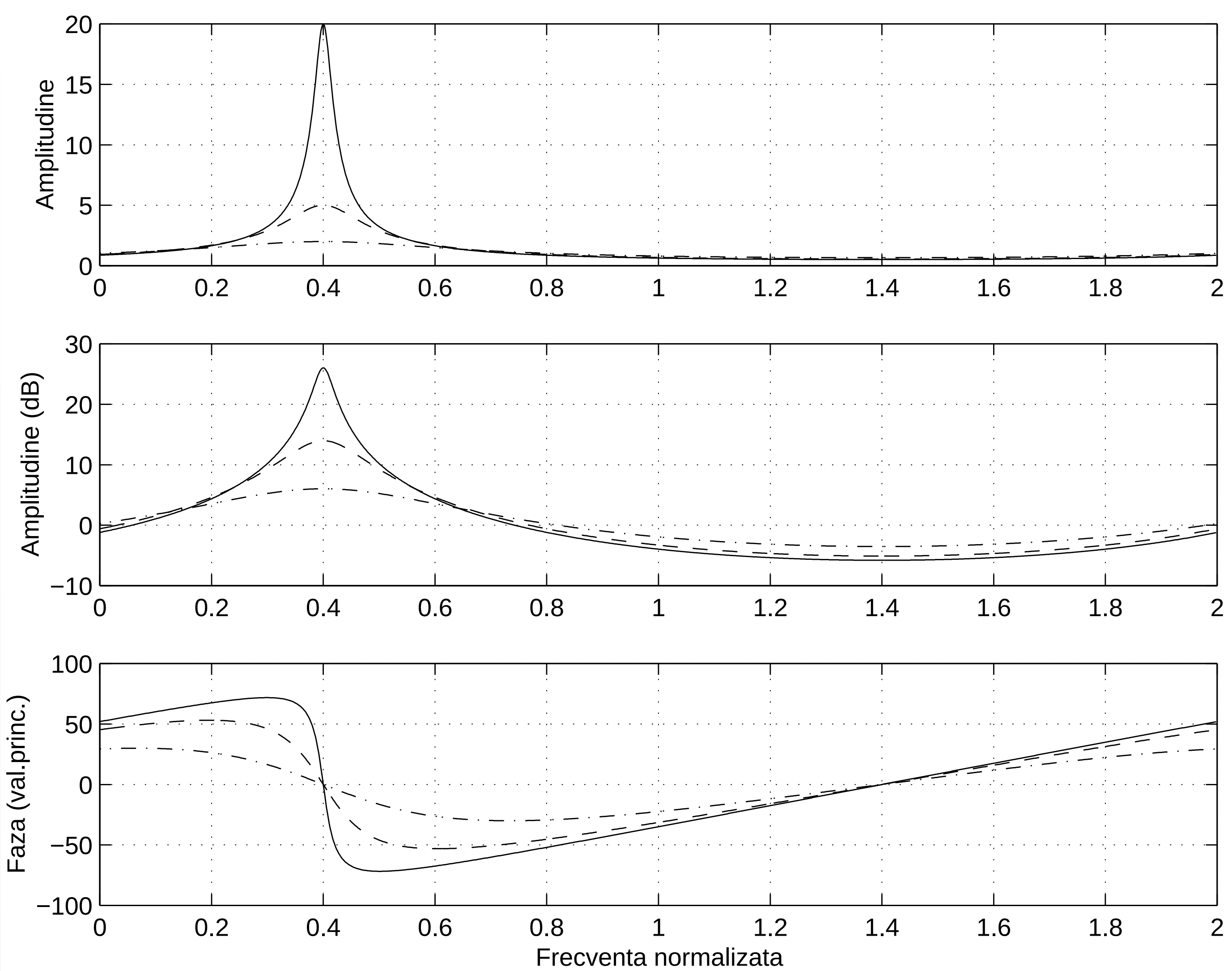
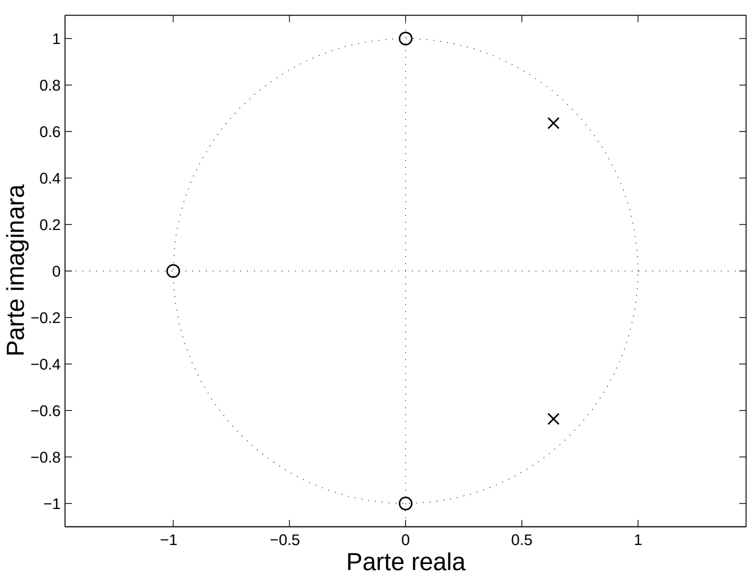
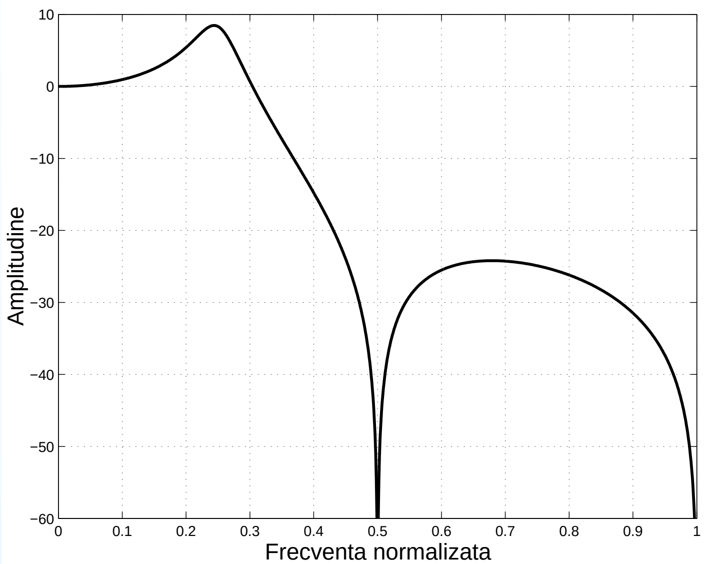


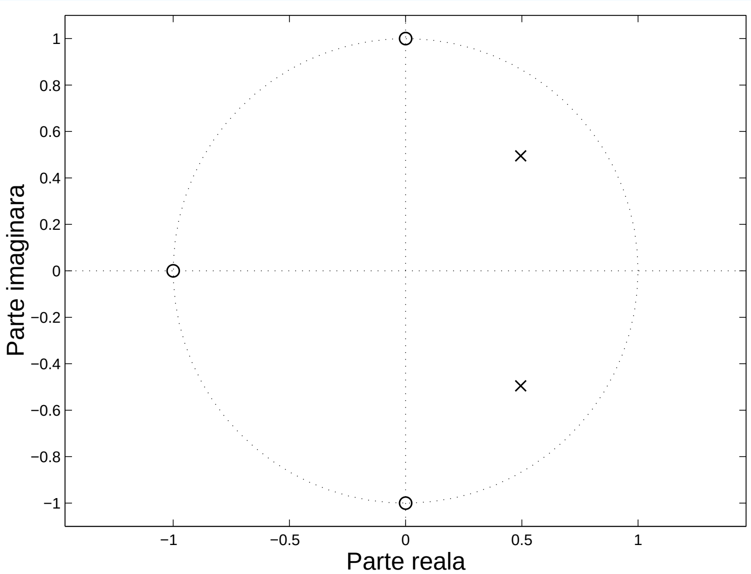
Diagrama poli-zerouri şi caracteristica de frecvenţă

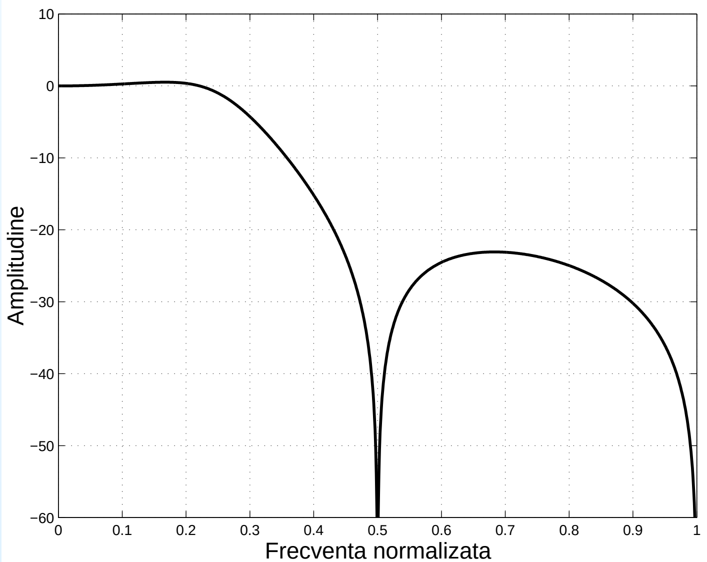
- Poziţia în planul complex a polilor şi zerourilor unui filtru dă informaţii importante despre caracteristica de frecvenţă a filtrului
- Un zero de fază θ situat în apropierea cercului unitate implică o atenuare mare a răspunsului la frecvenţa θ
- Un pol de fază θ implică o creştere a amplificării în preajma frecvenţei θ

Exemple


Parte imaginara
Parte reala
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
−1
−0.5
0
0.5
1


Amplitudine
Frecventa normalizata
10
0
−10
−20
−30
−40
−50
−60
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


Parte imaginara
Parte reala
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
−1
−0.5
0
0.5
1


Amplitudine
Frecventa normalizata
10
0
−10
−20
−30
−40
−50
−60
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

Filtrarea semnalelor aleatoare

- Sistem LIT stabil, cu răspuns la impuls $h[n]$ şi răspuns în frecvenţă $H(e^{j\omega})$
- Intrare: semnalul aleator $x[n]$ cu densitatea de putere spectrală $P_{xx}(\omega)$
- Atunci ieşirea $y[n]$ are densitatea de putere spectrală

$$P_{yy}(\omega) = P_{xx}(\omega)|H(e^{j\omega})|^2$$

- Puterea semnalului $x[n]$ într-o anume frecvenţă este multiplicată la ieşire cu pătratul amplitudinii răspunsului sistemului pentru acea frecvenţă
- Semnificaţia e aceeaşi ca pentru semnale deterministe

Demonstraţie (1)

- $r_{xx}[k] = E\{x[n]x[n-k]\}$, $k \in \mathbb{Z}$, sunt autocorelaţiile semnalului de intrare
- Ieşirea este

$$y[n] = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h[\ell]x[n-\ell]$$

- Autocorelaţiile ieşirii au expresia

$$\begin{aligned} r_{yy}[k] &\stackrel{def}{=} E\{y[n]y[n-k]\} \\ &= E\{\sum_{\ell} h[\ell]x[n-\ell] \sum_{i} h[i]x[n-k-i]\} \\ &= \sum_{\ell}\sum_{i} h[\ell]h[i]r_{xx}[k+i-\ell] \end{aligned}$$

Demonstraţie (2)

- Densitatea de putere spectrală a ieşirii este

$$
\begin{aligned}
P_{yy}(\omega) &\stackrel{def}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{yy}[k] e^{-j\omega k} \\
&= \sum_{k} \sum_{\ell} \sum_{i} h[\ell] h[i] r_{xx}[k+i-\ell] e^{-j\omega k} \\
&= \sum_{\ell} h[\ell] e^{-j\omega \ell} \sum_{i} h[i] e^{j\omega i} \sum_{k} r_{xx}[k+i-\ell] e^{-j\omega(k+i-\ell)} \\
&= H(\omega) H^*(\omega) P_{xx}(\omega) \\
&= |H(\omega)|^2 P_{xx}(\omega)
\end{aligned}
$$

Filtru trece-tot

- Un filtru trece-tot de ordin N are funcţia de transfer

$$H_T(z) = \frac{\prod_{k=1}^{N}(z^{-1} - c_k^*)}{\prod_{k=1}^{N}(1 - c_k z^{-1})}$$

- Polii $c_k \in \mathbb{C}$, $k = 1 : N$, au modul subunitar, deci filtrul este stabil
- Răspunsul în frecvenţă are modul constant $|H_T(e^{j\omega})| = 1$
- Demonstraţie:

$$|e^{-j\omega} - c_k^*| = |e^{-j\omega}(1 - c_k^* e^{j\omega})| = |1 - c_k e^{-j\omega}|$$

Filtre de fază minimă (1)

- Un filtru IIR de fază minimă are zerourile şi polii situaţi în interiorul cercului unitate
- *Orice filtru stabil* $H(z)$ *de fază* neminimă *poate fi exprimat ca produs între un filtru de fază minimă şi unul trece-tot* $H(z) = H_m(z)H_T(z)$
- Demonstraţie: dacă $H(z)$ are un singur zero în afara cercului unitate, atunci se poate scrie sub forma $H(z) = \tilde{H}_m(z)(z^{-1} - c^*)$, cu $|c| < 1$, unde $\tilde{H}_m(z)$ este un filtru de fază minimă. Atunci avem

$$H(z) = \underbrace{\tilde{H}_m(z)(1 - cz^{-1})}_{\text{fază minimă}} \underbrace{\frac{z^{-1} - c^*}{1 - cz^{-1}}}_{\text{trece-tot}}$$

Dacă $H(z)$ are mai multe zerouri în afara cercului: demonstraţie similară

Filtre de fază minimă (2)

- Concluzie: *amplitudinea răspunsului în frecvenţă al unui filtru* $H(z)$ *este identică cu cea a filtrului de fază minimă corespunzător*, i.e. $|H(e^{j\omega})| = |H_m(e^{j\omega})|$
- Între fazele celor două filtre există relaţia

$$arg H(e^{j\omega}) \leq arg H_m(e^{j\omega}), \quad \forall \omega \in [0, \pi]$$

  (Atenţie, faza este de obicei negativă.)
- Pentru răspunsurile la impuls este valabilă relaţia

$$\sum_{k=0}^{n} |h[k]|^2 \leq \sum_{k=0}^{n} |h_m[k]|^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Filtre cu fază liniară (1)

- De ce fază liniară ?
- Sistemul de întârziere cu n_0 eşantioane este $y[n] = x[n - n_0]$
- Funcţia de transfer este $H(z) = z^{-n_0}$
- Răspuns în frecvenţă $H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0}$
- Amplitudinea este $|H(e^{j\omega})| = 1$
- Faza este $arg H(e^{j\omega}) = -n_0\omega$, deci liniară
- Filtrele cu faza liniară sunt interesante pentru că acţionează doar asupra amplitudinii spectrului semnalului, modificările fazei reprezentând o simplă întârziere

Filtre cu fază liniară (2)

- În sens strict, un filtru are fază liniară dacă

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{-j\omega n_0}, \quad n_0 \in \mathbb{R}$$

- Un filtru are *fază liniară generalizată* dacă

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega}) e^{-j\omega n_0 - j\alpha}, \quad n_0 \in \mathbb{R}, \; \alpha \in \mathbb{R}$$

- $A(e^{j\omega}) \in \mathbb{R}$ (deci nu este amplitudine)
- Întârzierea de grup (group delay) a unui filtru este

$$grdH(e^{j\omega}) = -\frac{d}{d\omega} argH(e^{j\omega})$$

- Întârzierea de grup a unui filtru cu faza liniară generalizată este constantă (şi pozitivă, de obicei)

Filtre ideale

- Un filtru ideal trece-jos are răspunsul în frecvenţă

$$H_{TJi}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega n_0}, & \text{dacă } |\omega| \leq \omega_t \\ 0, & \text{dacă } \omega_t < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

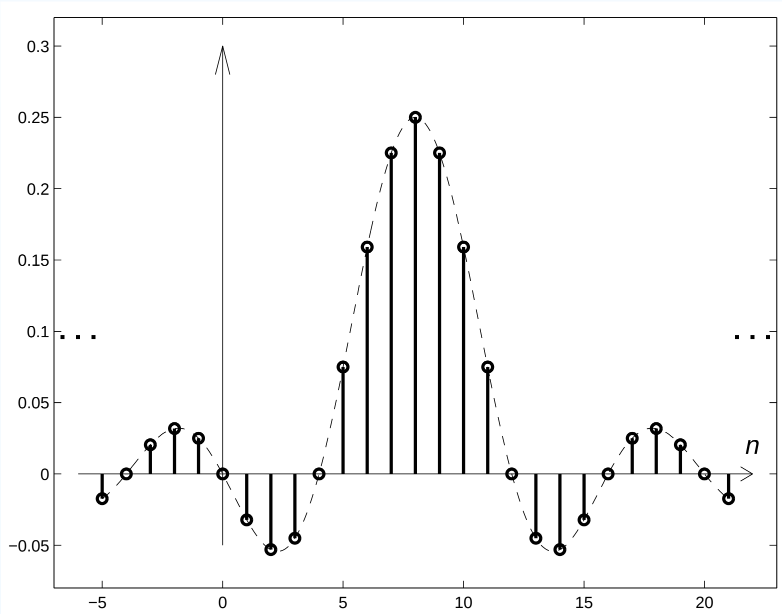
- $n_0 \in \mathbb{R}$ este întârzierea de grup
- ω_t este frecvenţa de tăiere
- Răspunsul la impuls

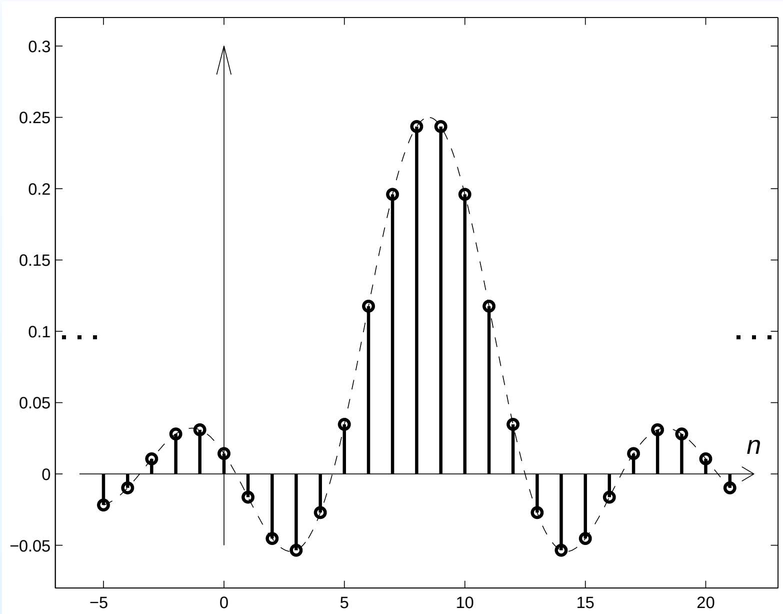
$$h_{TJi}[n] = \frac{\sin \omega_t (n - n_0)}{\pi (n - n_0)}$$

- Răspunsul la impuls are suport infinit şi este necauzal
- Dacă $2n_0 \in \mathbb{Z}$, răspunsul este simetric, altfel nu

Filtre ideale cu răspunsuri la impuls simetrice

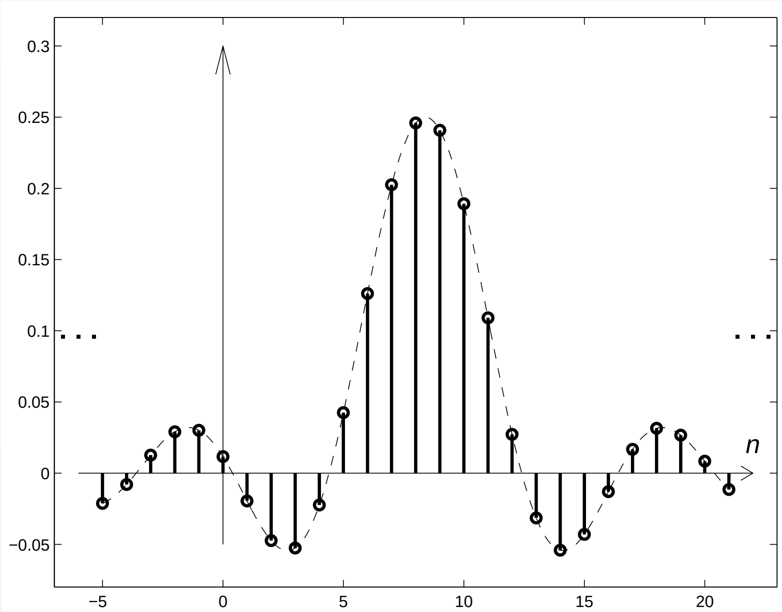
- $\omega_t = \pi/4$, $n_0 = 8$ (stânga), $n_0 = 8.5$ (dreapta)





Filtru ideal cu răspuns la impuls asimetric

- $\omega_t = \pi/4$, $n_0 = 8.4$



Filtre FIR cu fază liniară

- Dintre filtrele raţionale, fază liniară se poate obţine doar cu filtre FIR
- Filtrul FIR

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M} h[n] z^{-n}$$

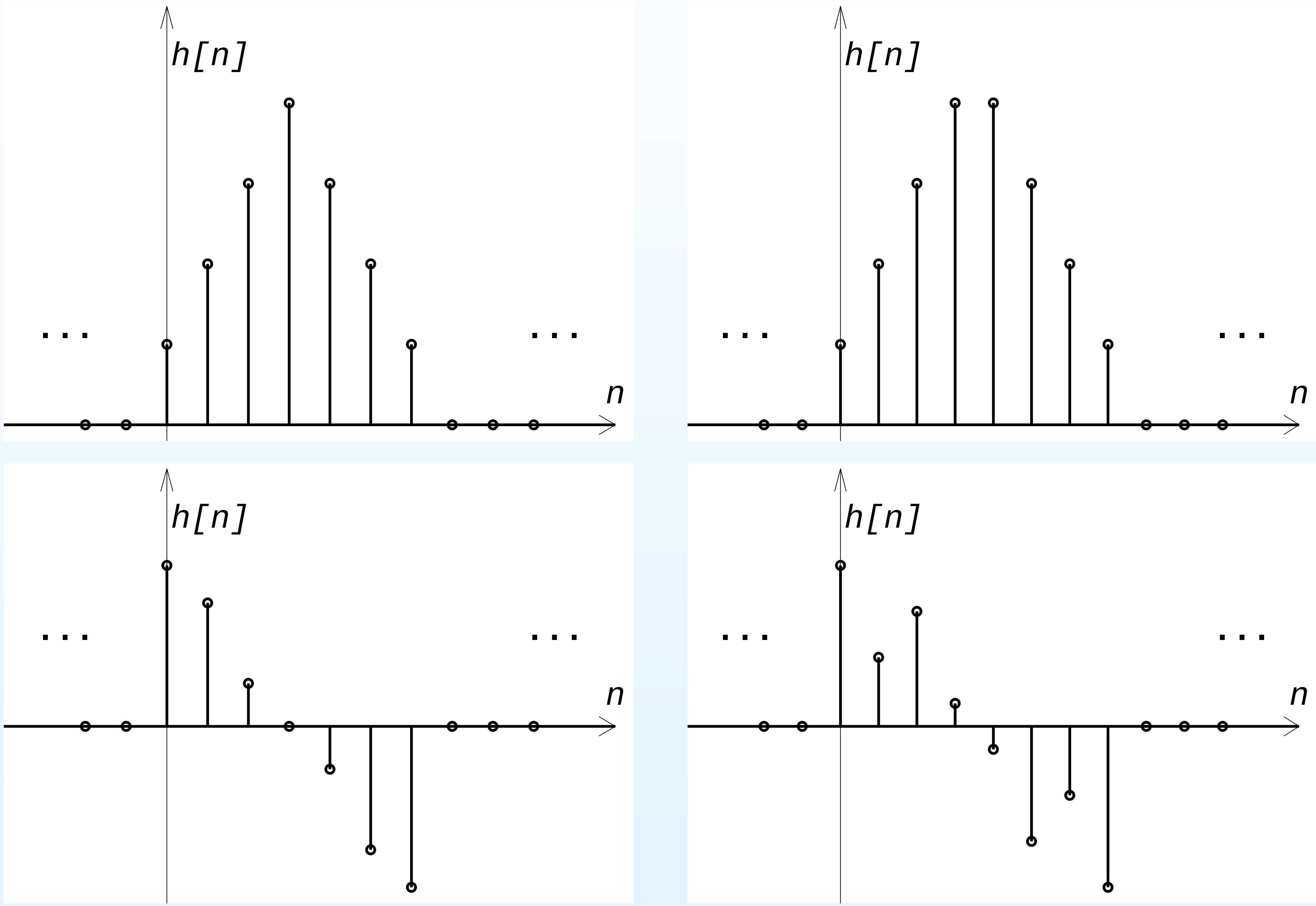
  este simetric dacă vectorul coeficienţilor săi (răspunsul său la impuls) este simetric, i.e. $h[n] = h[M - n]$
- $H(z)$ este antisimetric dacă $h[n] = -h[M - n]$
- *Un filtru FIR are fază liniară generalizată dacă şi numai dacă este simetric sau antisimetric*

Tipuri de filtre FIR cu fază liniară

- Filtrele FIR cu fază liniară sunt de patru tipuri, după simetria coeficienţilor şi paritatea ordinului filtrului
- În mod tradiţional, tipurile sunt numerotate de la I la IV

	M par	M impar
$H(z)$ simetric ($h[n] = h[M-n]$)	I	II
$H(z)$ antisimetric ($h[n] = -h[M-n]$)	III	IV

Exemple de răspunsuri la impuls



Tipul I

- Când M este par, numărul de coeficienţi ai filtrului este impar, deci funcţia de transfer are forma

$$H(z) = h[0]+h[1]z^{-1}+\ldots+h[\tfrac{M}{2}]z^{-\frac{M}{2}}+\ldots+h[1]z^{-(M-1)}+h[0]z^{-M}$$

- Răspunsul în frecvenţă este

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= e^{-j\omega\frac{M}{2}}\Big(h[\tfrac{M}{2}] + h[\tfrac{M}{2}-1](e^{j\omega}+e^{-j\omega}) + \ldots \\ &\quad + h[0](e^{j\omega\frac{M}{2}} + e^{-j\omega\frac{M}{2}})\Big) \\ &= e^{-j\omega\frac{M}{2}}\left(2h[0]\cos(\omega\tfrac{M}{2}) + \ldots + 2h[\tfrac{M}{2}-1]\cos\omega + h[\tfrac{M}{2}]\right) \end{aligned}$$

- Întârzierea de grup este

$$grdH(e^{j\omega}) = M/2$$

Poziţia zerourilor

- Din simetria coeficienţilor rezultă

$$
\begin{aligned}
H(z) &= \sum_{n=0}^{M} h[n]z^{-n} = z^{-M} \sum_{n=0}^{M} h[M-n]z^{M-n} \\
&= z^{-M} \sum_{n=0}^{M} h[n]z^{n} = z^{-M} H(z^{-1})
\end{aligned}
$$

- Dacă c este un zero al lui $H(z)$, atunci şi $1/c$ este zero
- Orice zero în interiorul cercului unitate este însoţit de unul în afara cercului
- Coeficienţi reali: zerourile c, c^*, $1/c$, $1/c^*$ apar împreună
- Zerourile de pe cercul unitate sunt perechi ($1/c = c^*$)
- Dacă zerourile sunt reale şi pe cercul unitate, adică sunt egale cu 1 sau -1, atunci ele sunt duble

Tipul II

- Funcţia de transfer are forma

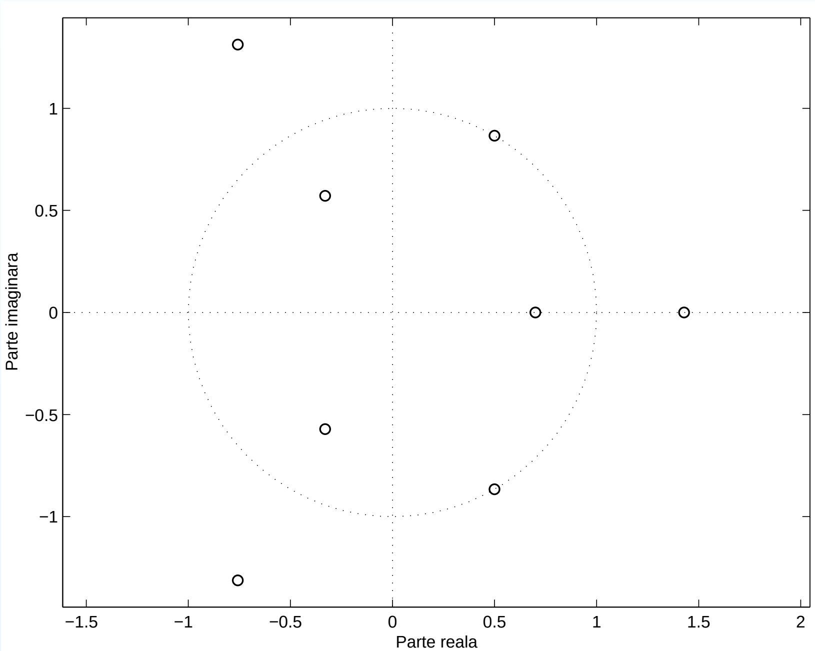
$$H(z) = h[0]+\ldots+h[\tfrac{M-1}{2}]z^{-\frac{M-1}{2}}+h[\tfrac{M-1}{2}]z^{-\frac{M+1}{2}}+\ldots+h[0]z^{-M}$$

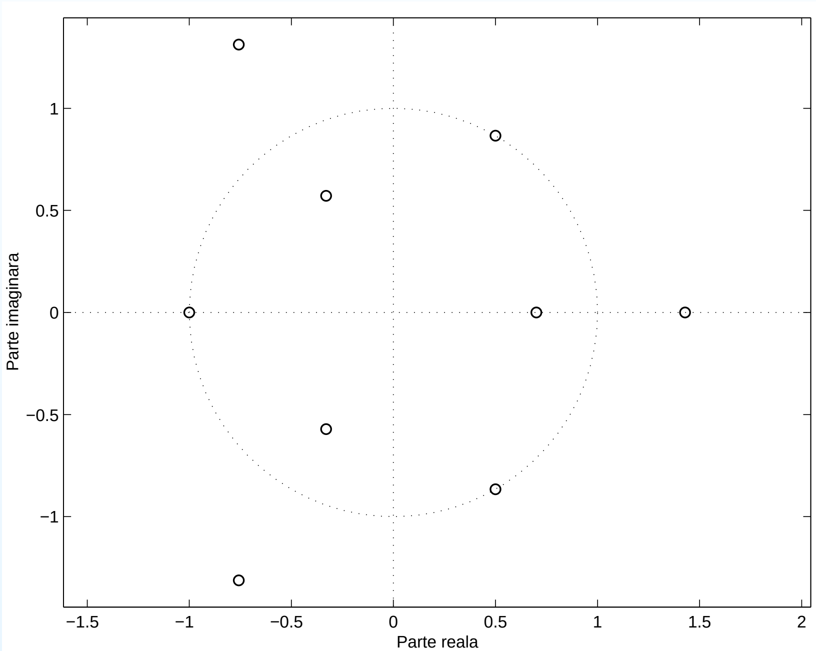
- Răspunsul în frecvenţă este

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\frac{M}{2}}\left(2h[0]\cos(\omega\tfrac{M}{2}) + \ldots + 2h[\tfrac{M-1}{2}]\cos(\tfrac{\omega}{2})\right)$$

- Întârzierea de grup este $M/2$
- Simetriile poziţiilor zerourilor: ca la tipul I, cu o singură excepţie
- $H(-1) = (-1)^M H(-1) = -H(-1)$, deci $H(-1) = 0$
- -1 este întotdeauna un zero al filtrului, de multiplicitate impară

Exemplu zerouri tip I (stânga) şi II (dreapta)





Tipul III

- Numărul coeficienţilor este impar, iar antisimetria implică $h[\frac{M}{2}] = -h[\frac{M}{2}]$
- Coeficientul central este nul, deci funcţia de transfer este

$$H(z) = h[0] + \ldots + h[\tfrac{M}{2} - 1]z^{-(\frac{M}{2}-1)} - h[\tfrac{M}{2} - 1]z^{-(\frac{M}{2}+1)} - \ldots - h[0]z^{-M}$$

- Ţinând seama că $j = e^{j\pi/2}$, răspunsul în frecvenţă este

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j(\omega\frac{M}{2} - \frac{\pi}{2})}\left(2h[0]\sin(\omega\frac{M}{2}) + \ldots + 2h[\frac{M}{2} - 1]\sin\omega\right)$$

- Întârzierea de grup este $M/2$
- Filtru cu coeficienţi antisimetrici: $H(z) = -z^{-M}H(z^{-1})$
- $H(1) = -H(1)$, $H(-1) = -H(-1)$ deci 1 şi -1 sunt întotdeauna zerouri ale filtrului (de multiplicitate impară)

Tipul IV

- Funcţia de transfer are forma

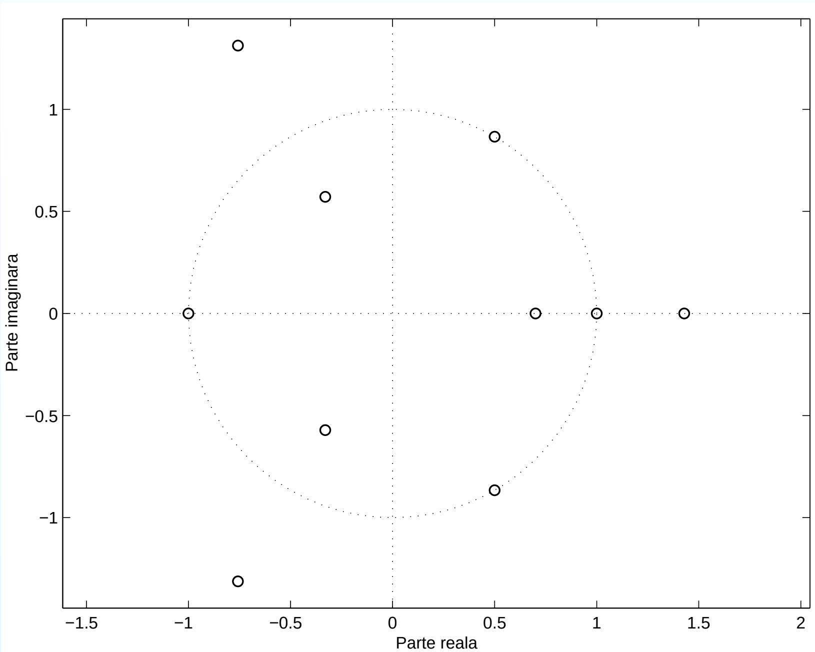
$$H(z) = h[0]+\ldots+h[\frac{M-1}{2}]z^{-\frac{M-1}{2}} - h[\frac{M-1}{2}]z^{-\frac{M+1}{2}} - \ldots - h[0]z^{-M}$$

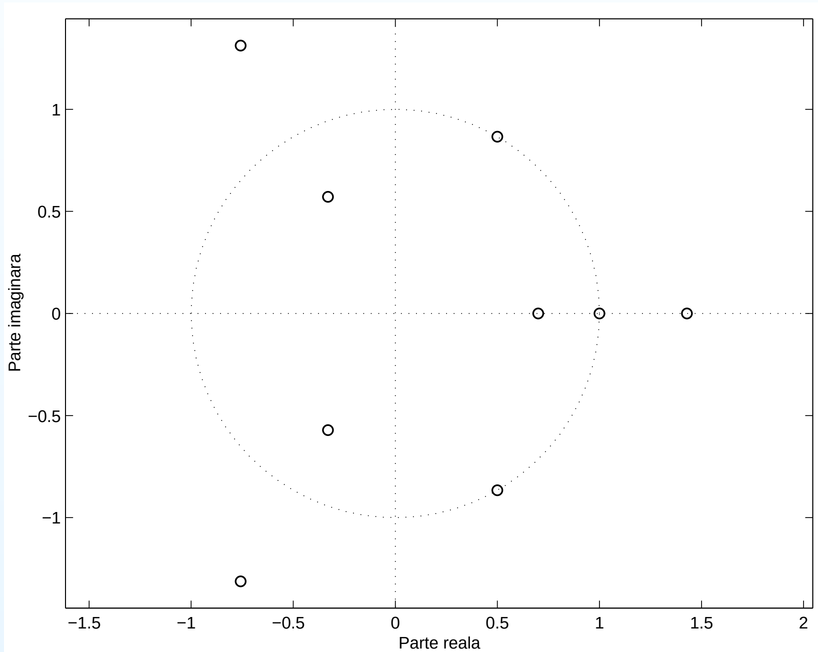
- Răspunsul în frecvenţă este

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j(\omega\frac{M}{2}-\frac{\pi}{2})}\left(2h[0]\sin(\omega\frac{M}{2}) + \ldots + 2h[\frac{M-1}{2}]\sin(\frac{\omega}{2})\right)$$

- Întârzierea de grup este $M/2$
- $H(1) = -H(1)$, deci 1 este întotdeauna zero ale filtrului (de multiplicitate impară)
- Spre deosebire de tipul III, -1 nu este neapărat zero al filtrului

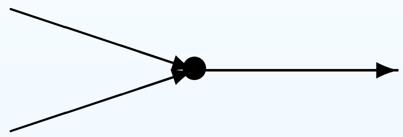
Exemplu zerouri tip III (stânga) şi IV (dreapta)





Implementarea filtrelor digitale

- Implementarea filtrelor digitale implică trei operaţii de bază: adunare, înmulţire, şi întârziere cu un pas

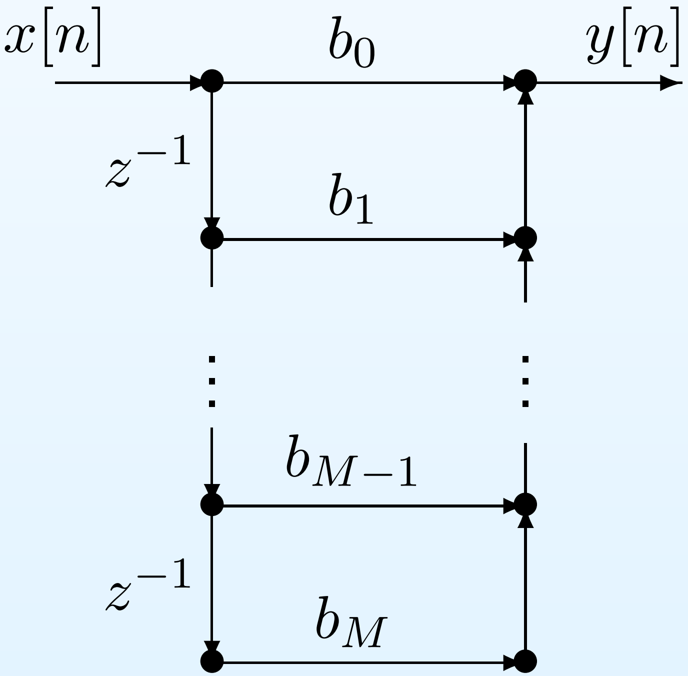
Sumator	
Multiplicator	$\xrightarrow{b_k}$
Întârziere cu un pas	$\xrightarrow{z^{-1}}$

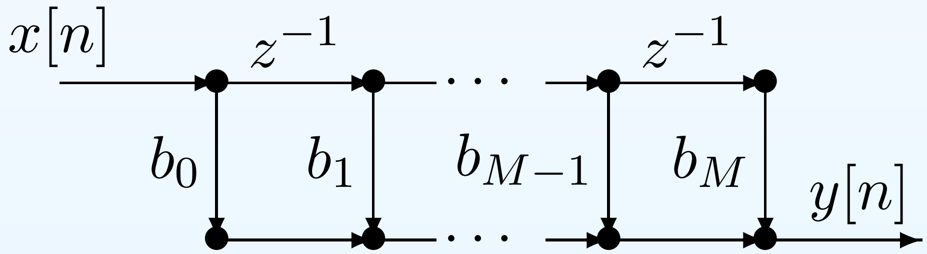
- Implementarea în formă *directă* se face pe baza ecuaţiilor cu diferenţe care descriu funcţionarea filtrelor

Filtre FIR, forma directă

- Ecuaţia cu diferenţe corespunzătoare filtrului FIR $B(z)$ este

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b[k]x[n-k]$$

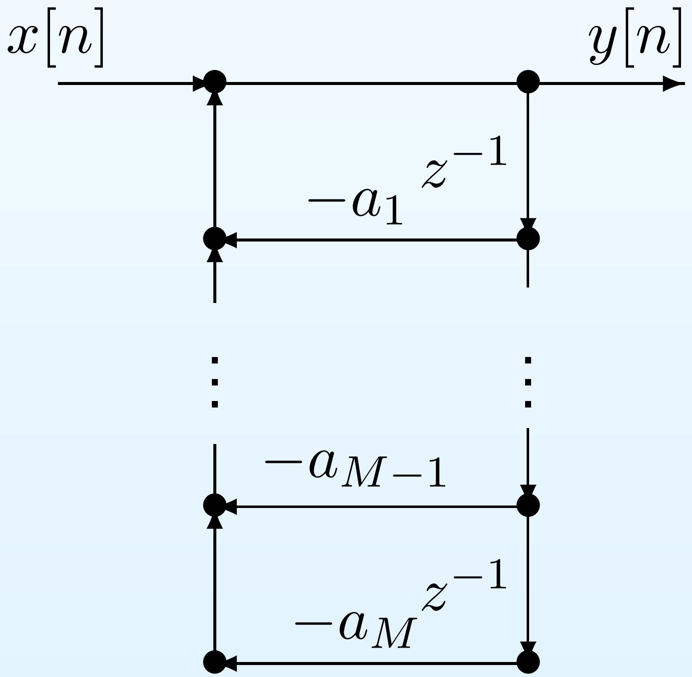




Filtre AR, forma directă

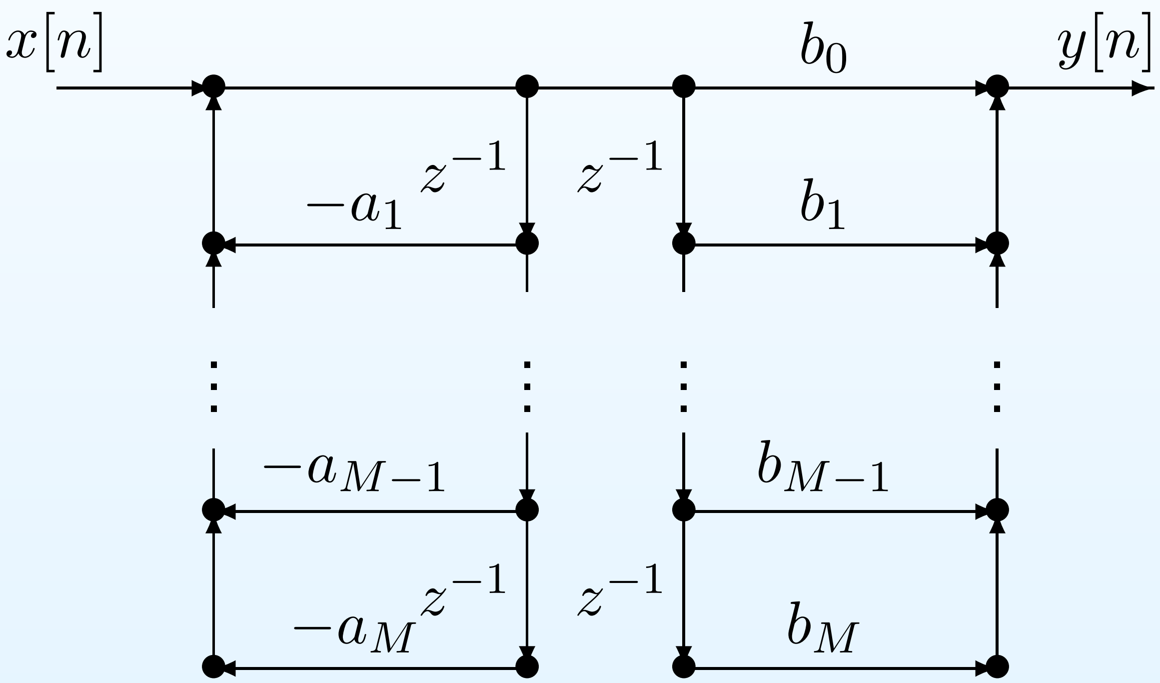
- Pentru filtrul AR $1/A(z)$, ecuaţia cu diferenţe este

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + x[n]$$



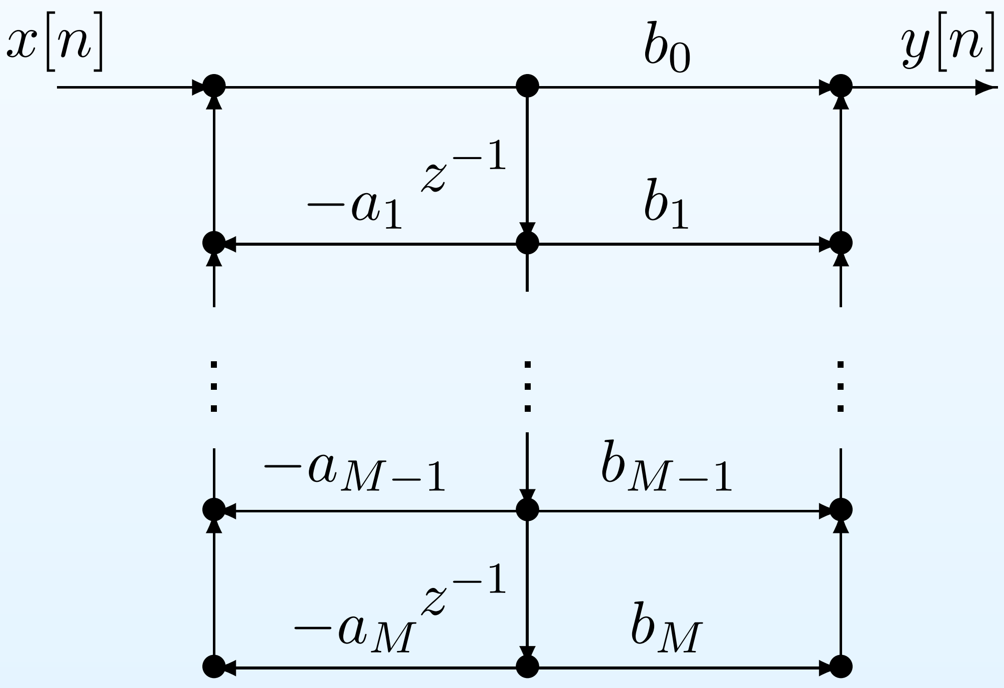
Filtre IIR, forma directă

- Filtrul IIR este produsul dintre $1/A(z)$ şi $B(z)$
- Implementarea se face prin înserierea schemelor respective



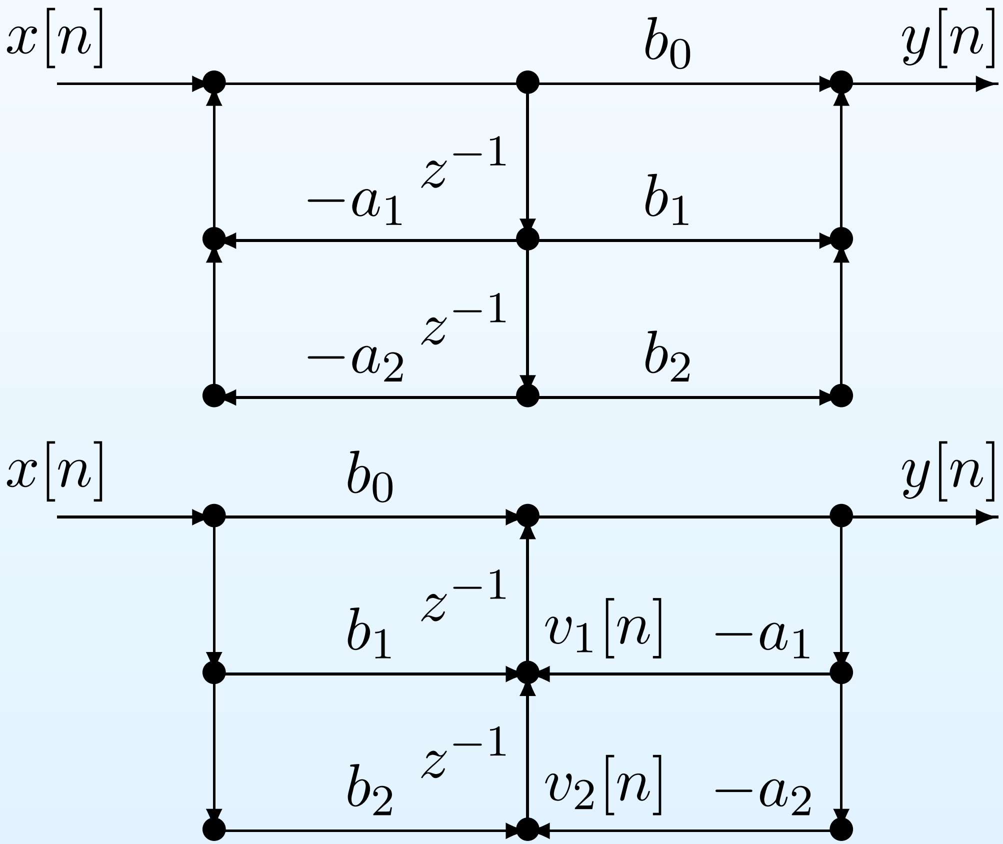
Filtre IIR, forma directă eficientă

- Cele două coloane descendente din mijloc sunt identice iar elementele de întârziere sunt duplicate inutil
- Schema eficientă:



Filtre IIR, forma transpusă (1)

- Forma transpusă a unei scheme se obţine astfel
  1. se schimbă sensul tuturor arcelor
  2. se permută între ele intrarea şi ieşirea



Filtre IIR, forma transpusă (2)

- Demonstrăm echivalenţa doar pe cazul particular al unui filtru IIR de ordinul 2

$$\begin{aligned} y[n] &= b_0 x[n] + v_1[n-1] \\ &= b_0 x[n] + b_1 x[n-1] - a_1 y[n-1] + v_2[n-2] \\ &= b_0 x[n] + b_1 x[n-1] - a_1 y[n-1] + b_2 x[n-2] - a_2 y[n-2] \end{aligned}$$

- Aceasta este ecuaţia cu diferenţe pentru filtru

Filtre IIR, implementare cu secţiuni de ordinul 2

- Funcţia de transfer a unui filtru IIR cu coeficienţi reali se poate scrie în forma ($M = N$ par)

$$H(z) = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{k=1}^{N/2} (1 - c_k z^{-1})(1 - c_k^* z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N/2} (1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})}$$

- Am grupat polii şi zerourile în perechi complex conjugate
- Schema de implementare este o conexiune serie a $N/2$ filtre de ordinul 2
- Avantaj: robusteţe (la perturbaţii ale coeficienţilor)

Filtre FIR cu fază liniară

- Filtrul FIR de tip II are ecuaţia cu diferenţe

$$\begin{aligned} y[n] &= b_0(x[n] + x[n-M]) + b_1(x[n-1] + x[n-M+1]) + \ldots \\ &+ b_{\frac{M-1}{2}}\left(x\left[n - \tfrac{M-1}{2}\right] + x\left[n - \tfrac{M+1}{2}\right]\right) \end{aligned}$$

- Numărul de înmulţiri este doar $(M+1)/2$