

Laboratorul 5

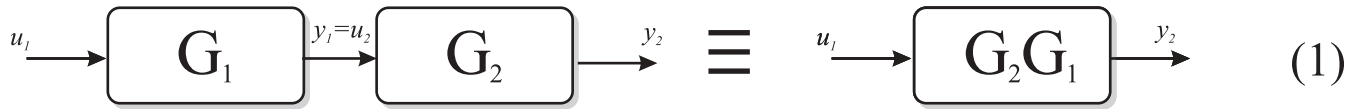
Conexiuni. Analiza stabilității în buclă închisă pe baza criteriului Nyquist. Specificații de proiectare formulate în frecvență

Scopul laboratorului: Conexiunea sistemelor (serie, paralel, reacție negativă); influența fiecărei conexiuni asupra stabilității. Stabilitatea sistemelor când se închide bucla. Analiza stabilității pe baza criteriului Nyquist. Analiza principalelor caracteristici în frecvență și calculul lor (Marginea de fază, Marginea de amplitudine, Frecvența de rezonanță, Banda de frecvență).

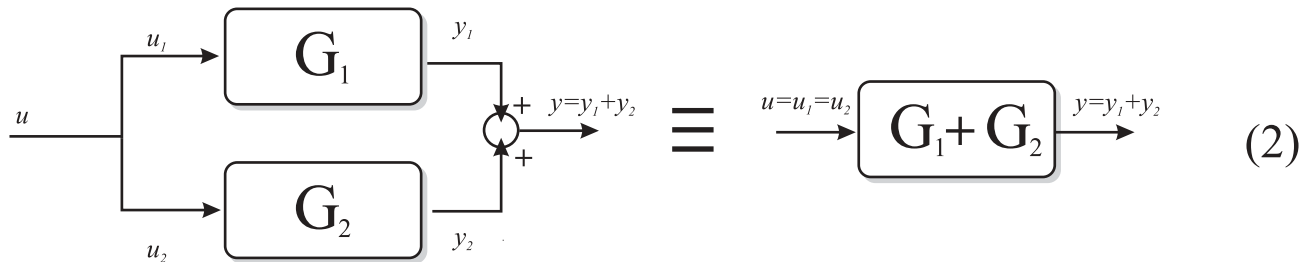
1 Conexiuni

Fie două sisteme G_1 și G_2 cu intrările u_i și y_i ; $i = 1, 2$.
Vom spune că cele două sisteme sunt conectate în:

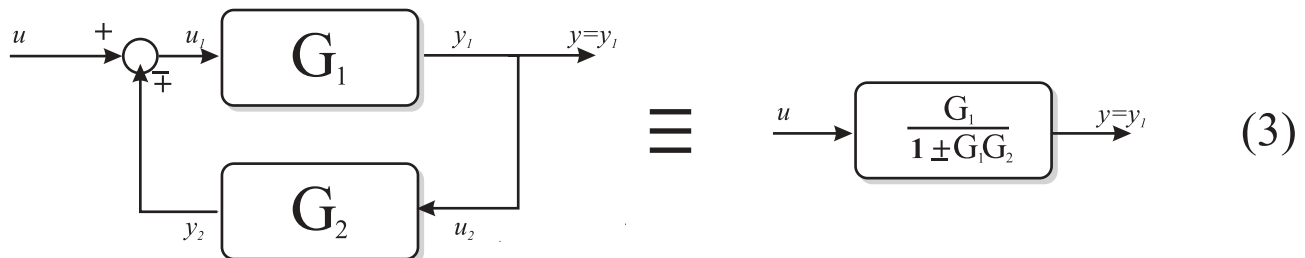
•**Serie** dacă $u_2 = y_1$



•**Paralel** dacă $u_1 = u_2 = u$ și $y = y_1 + y_2$



•**Reacție** dacă $u_1 = \pm y_2 + u, u_2 = y_1, y = y_1$



În ultima diagramă semnul "+" definește conexiunea în reacție pozitivă iar semnul "−" definește conexiunea în reacție negativă.

Cele 3 tipuri de conexiuni definesc fiecare câte un nou sistem, ale cărui proprietăți le punem în evidență în continuare.

Conexiunea serie

Sistemul rezultat este *intern asimptotic stabil* dacă și numai dacă sistemele componente sunt intern asimptotic stabile.

Exercițiul 1. Fie sistemele $H_1(s) = \frac{1}{s+1}$ și $H_2(s) = \frac{1}{s+3}$. Conectând cele două sisteme în serie, calculați funcția de transfer rezultantă. Sunt cele două sisteme intern asimptotic stabile? Dar sistemul rezultat?

Soluție:

```
s=tf('s');  
H1=1/(s+1);  
H2=1/(s+3);  
H=series(H1, H2);
```

Din punct de vedere al stabilității externe, sistemul rezultat prin înserierea a două sisteme care nu sunt extern strict stabile, poate fi extern strict stabil.

Exercițiul 2. Se consideră următoarele sisteme:

$$H_1(s) = \frac{s-1}{(s+2) \cdot (s-3)}; H_2(s) = \frac{s-3}{(s+1) \cdot (s-1)}$$

Verificați dacă fiecare sistem în parte este stabil. Sistemul rezultat este intern asimptotic stabil? Dar extern strict stabil? Sistemul rezultat din înserierea celor două sisteme este extern strict stabil?

Conexiunea paralel

Concluziile referitoare la stabilitatea internă și la cea externă din cazul conexiunii serie au aceeași valabilitate și în cazul conexiunii paralel.

Exercițiul 3. Fie funcțiile de transfer $H_1(s) = \frac{1}{s+5}$ și $H_2(s) = \frac{1}{s+7}$. Conectând cele două sisteme în paralel, calculați funcția de transfer rezultantă. Este sistemul rezultat intern stabil?

Soluție:

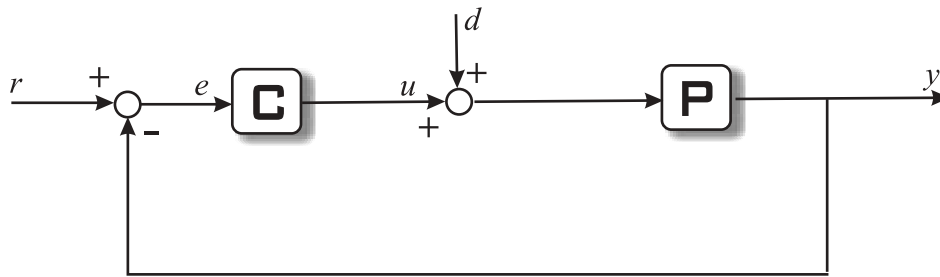
```
s=tf('s');  
H1=1/(s+5);  
H2=1/(s+7);  
H=parallel(H1, H2);
```

Conexiunea în reacție (FEEDBACK)

Conexiunea în reacție a adus foarte multe avantaje în domeniul automatizărilor. Pentru a înțelege ce înseamnă *feedback* și ce avantaje are parcurgeți următoarea problemă:

- Cum să menții apa la o anumită temperatură dorită.

Se măsoară temperatura apei și mărimea măsurată se trimite la intrare, unde se face o comparație cu temperatura dorită și pe baza acestei "eroi" se va ști când trebuie închis elementul electric pentru ca apa să nu devină prea fierbinte.



Proprietăți ale *feedback-ului*

- acțiunea comenzii este dependentă de ieșire;
- se măsoară ieșirea și semnalul rezultat se "transmite" la intrare ("*feed-back*") pentru a fi comparat cu referința;
- "*feed-back*" permite să reglăm ieșirea mult mai ușor;
- se poate controla precizia;
- reduce efectul perturbațiilor;
- face ca procesul să fie insensibil la variații mari ale perturbațiilor;
- perturbația poate fi rejectată;
- referința poate fi urmărită mult mai ușor;
- stabilizează un sistem instabil;

Exercițiul 4. Fie sistemul $H_1(s) = \frac{1}{s+1}$. Calculați funcția de transfer a sistemului în buclă închisă obținută prin aplicarea unei reacții negative lui $H_1(s)$.

Soluție:

```
s=tf('s');
H1=1/(s+1);
H=feedback(H1, 1);
```

Exercițiul 5. Fie sistemele $H_1 = k$ și $H_2 = \frac{1}{s-1}$. Cele două sisteme se înseriază și li se aplică la intrare un semnal de tip treaptă. Verificați dacă se poate determina k astfel încât sistemul rezultat să fie stabil. Aplicați o reacție negativă și comparați cele două răspunsuri (cel pe cale directă și cel al sistemului în buclă închisă). Încercați să închideți bucla cu o reacție pozitivă. Ce se întâmplă în acest caz cu stabilitatea sistemului?

Soluție:

```
function exe1(k)
s=tf('s');
P=1/(s-1);
C=k; Hd=series(P,C);
step(Hd,20)
```

```

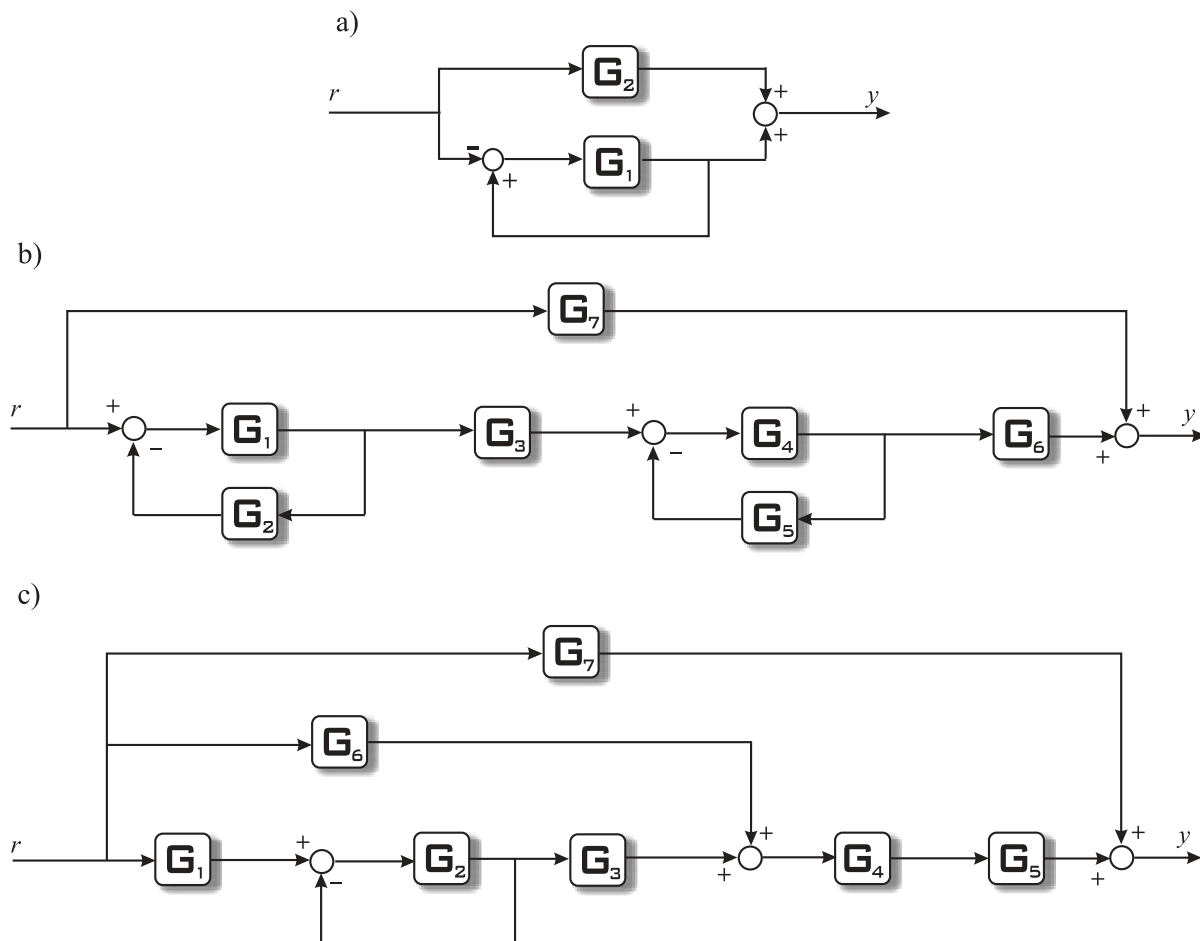
figure
Ho=P*C/(1+P*C);
step(Ho,20,'r')
figure
H1=feedback(Hd,-1) %functia de transfer in bucla inchisa cu reactie pozitiva;
step(H1)

```

Observație: Pentru orice valoare a lui k sistemul serie nu se stabilizează. Sistemul în buclă închisă cu reacție negativă se stabilizează și urmărește referința de tip treaptă, iar sistemul cu reacție pozitivă nu se stabilizează.

Exercițiul 6. Construiți modelul Simulink al sistemului de la problema precedentă și efectuați câteva simulări cu el.

Exercițiul 7. Folosind funcțiile Matlab **tf**, **series**, **parallel** și **feedback** găsiți funcția de transfer pentru următoarele diagrame bloc și desenați răspunsul acestor sisteme la o intrare de tip treaptă.



Soluții:

```

a) clear all;
s=tf('s');
G1=1/(s+1);

```

```

G2=1/(s+2);
Go=feedback(G1,-1)
G=parallel(G2,-Go)
step(G)

```

b)

```

s=tf('s');
G1=1/(s+1);
G2=1/(s+2);
G3=1/(s+3);
G4=1/(s+4);
G5=1/(s+5);
G6=1/(s+6);
G7=1/(s+7);
H1=feedback(G1,G2);
H2=feedback(G4,G5);
H3=series(H1,G3);
H4=series(H3,H2);
H5=series(H4,G6);
G=parallel(H5,G7);
step(G)

```

c)

```

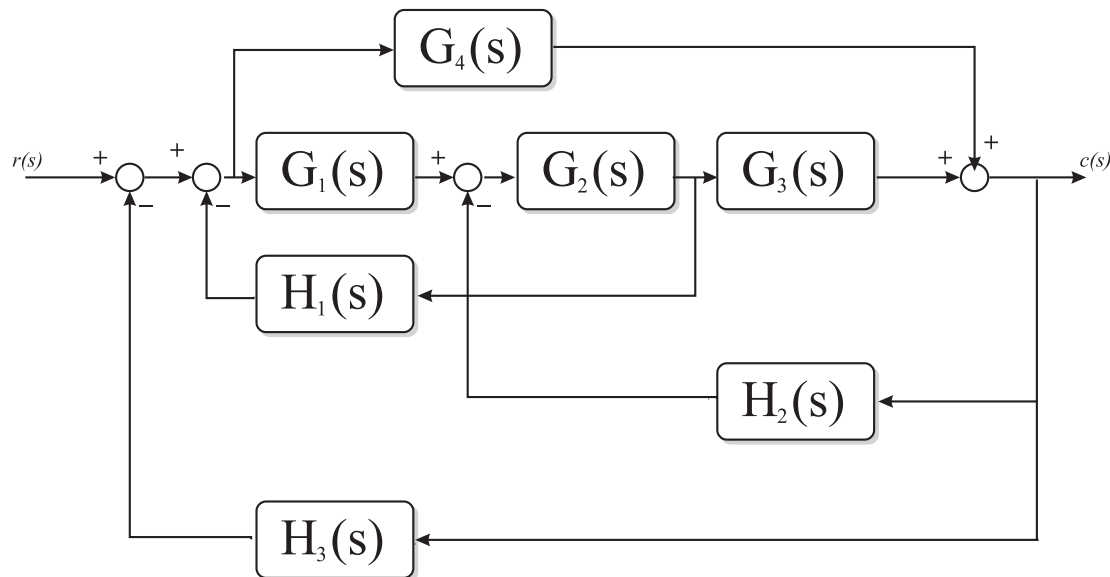
s=tf('s');
G1=1/(s+1);
G2=1/(s+2);
G3=1/(s+3);
G4=1/(s+4);
G5=1/(s+5);
G6=1/(s+6);
G7=1/(s+7);
H1=feedback(G2,1);
H2=series(G1,H1);
H3=series(H2,G3);
H4=parallel(H3,G6);
H5=series(H4,G4);
H6=series(H5,G5);
G=parallel(H6,G7)
step(G)

```

Calculul funcției de transfer prin *Regula lui Mason*

Exemplu de găsim a funcției de transfer a unui sistem reprezentat printr-o diagramă bloc, utilizând *Regula lui Mason*.

Problema



Formula lui Mason

$$M = \frac{\sum_j M_j \Delta_j}{\Delta}$$

unde:

M = este funcția de transfer a întregului sistem;

M_j = este funcția de transfer a unei căi directe din sistem;

j = un întreg care reprezintă numărul căii directe în sistem;

$\Delta_j = 1 - (\text{buclele rămase după eliminarea căii } j)$. Dacă nu mai sunt bucle rămase, atunci $\Delta_j = 1$

$\Delta = 1 - \sum (\text{amplificări bucle}) + \sum (\text{produsul amplificărilor buclelor care nu se ating, luate câte două}) - \sum (\text{produsul amplificărilor buclelor care nu se ating luate câte trei}) + \dots$

1. Găsirea căilor directe și a amplificărilor lor

O **cale directă** este o cale de la intrarea sistemului la ieșirea acestuia, care nu trece de mai multe ori prin același punct. În exemplul dat există două căi directe, deci avem pe rând $j = 1$ și $j = 2$. Cele două căi sunt:

$$M_1 = G_1 G_2 G_3 \text{ și } M_2 = G_4.$$

2. Găsirea buclelor și a amplificărilor lor

O **buclă** este o cale închisă, care pleacă dintr-un punct și ajunge în același punct, trecând prin punctele intermediare o singură dată. În exemplul nostru avem 5 bucle:

$$\begin{aligned} \text{Loop 1} &= -G_1 G_2 H_1; & \text{Loop 4} &= -G_4 H_3; \\ \text{Loop 2} &= -G_2 G_3 H_2; & \text{Loop 5} &= G_4 H_2 G_2 H_1; \\ \text{Loop 3} &= -G_1 G_2 G_3 H_3; \end{aligned}$$

3. Găsirea lui Δ_j

Dacă eliminăm din sistem calea $M_1 = G_1G_2G_3$ nu mai rămân bucle complete $\Rightarrow \Delta_1 = 1$.

Dacă eliminăm din sistem calea $M_2 = G_4$ nu mai rămân bucle complete $\Rightarrow \Delta_2 = 1$.

4. Găsirea lui Δ

Deoarece nu există în acest sistem perechi de bucle care să nu se intersecteze, Δ va fi $1 - \sum(\text{amplificări bucle})$:

$$\Delta = 1 - [(-G_1G_2H_1) + (-G_2G_3H_2) + (-G_1G_2G_3H_3) + (-G_4H_3) + (G_4H_2G_2H_1)]$$

Soluția

Aplicând *formula lui Mason* pentru diagrama bloc dată, obținem funcția de transfer:

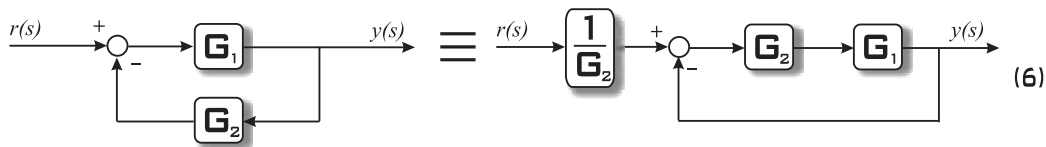
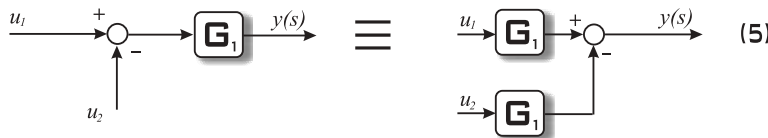
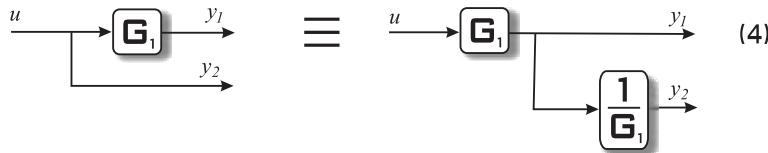
$$M = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_j M_j \Delta_j}{\Delta} = \frac{G_1G_2G_3 + G_4}{1 + G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3H_3 + G_4H_3 - G_4H_2G_2H_1}$$

Exercițiul 8. Construiți modelul SIMULINK al sistemelor b) și c) de la **Exercițiul 7** și comparați răspunsul obținut pentru o intrare treaptă cu cel obținut în Matlab.

Folosiți următoarele blocuri:

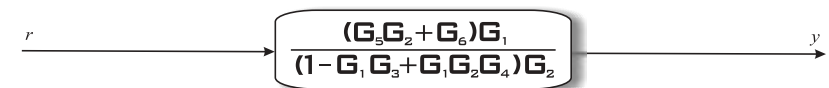
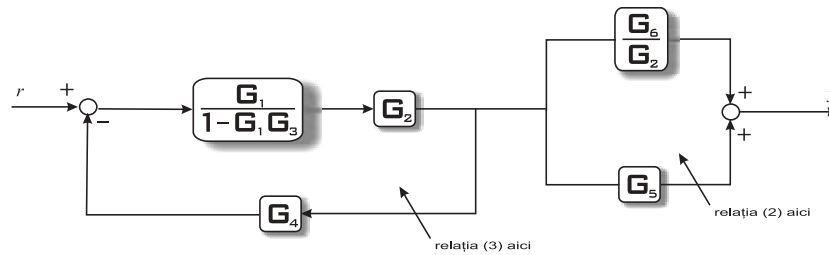
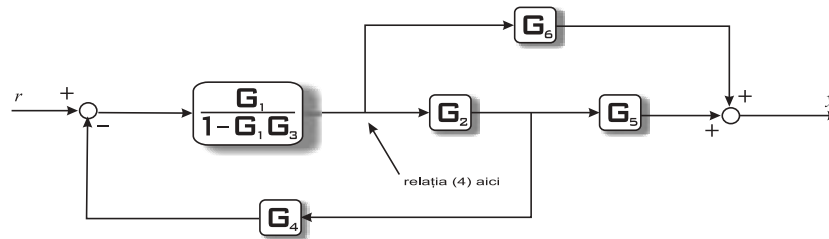
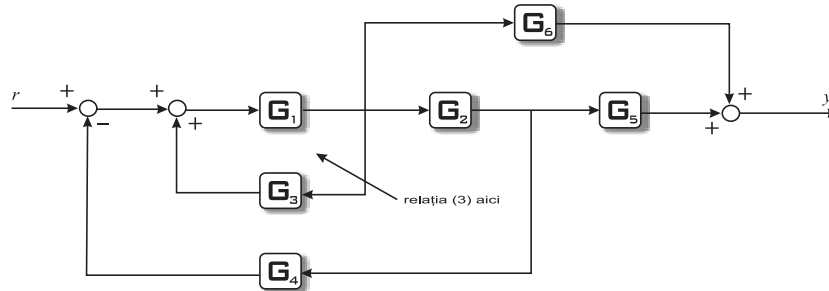
- *Transfer Fcn* din *Continuous*;
- *Sum* din *Math* (rubrica *list of signs* poate fi modificată);
- *Scope* din *Sinks*;
- *Step* din *Sources*.

Alte exemple de conexiuni:



Problemă rezolvată. Se cere calculul funcției de transfer de la r la y pe baza formulelor calculate din figurile (2),(3), și (4) pentru următoarea schemă:

- Relația (2) se referă la o reacție în paralel;
- Relația (3) se referă la o reacție feed-back pozitivă sau negativă;
- Relația (4) este o relație pe care o puteți calcula din exemplul (4) de la ”alte exemple conexiuni”.

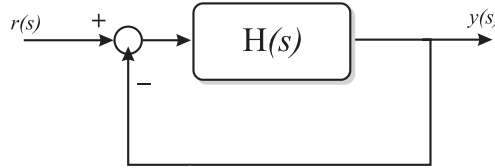


2 Analiza stabilității în buclă închisă utilizând *Criteriul Nyquist*

Criteriul Nyquist este o metodă tradițională de determinare a stabilității unui sistem în buclă închisă pe baza comportării locului de transfer al sistemului în buclă deschisă. În epoca modernă în care computerele personale au devenit spațiu comun oricărui inginer, importanța *criteriului Nyquist* în zona procedurală s-a micșorat păstrându-și totuși o importanță teoretică majoră.

În această secțiune vom studia aplicarea *criteriului Nyquist* asupra câtorva exemple relevante. Începem cu formularea exactă.

Fie sistemul:



Funcția de transfer în buclă închisă este: $H_0(s) = \frac{H(s)}{1+H(s)}$. Presupunem că $H(s)$ este ireductibilă (\star).

Pentru ca sistemul în buclă închisă să fie stabil trebuie să fie îndeplinită relația:

$$\mathcal{Z}[1 + H(s)] \in \mathcal{C}^-$$

Cu alte cuvinte, polii sistemului în buclă închisă trebuie să aibă partea reală mai mică decât zero.

Dacă se notează cu N_p numărul polilor situați în \mathcal{C}^+ ai lui $1+H(s)$, incluzând și ordinele de multiplicitate, atunci, aplicând funcției raționale $1+H(s)$ teorema variației argumentului, obținem:

$$\Delta \arg(1 + H(s))|_{s \in \Gamma} = 2\pi N_p$$

Fie Γ - contur închis fixat în \mathcal{C}^+ .

Sistemul în buclă închisă este intern asimptotic stabil $\Leftrightarrow \Delta$ - variația argumentului vectorului cu originea în punctul critic $(-1 + j0)$ și cu vârfurile pe ramurile continue ale locului de transfer, atunci când ω parcurge în sens crescător intervalul $(0, +\infty)$, este egală cu $(q_0 + 2N_p)\frac{\pi}{2}$, unde:

q_0 - numărul polilor de pe axa imaginară;

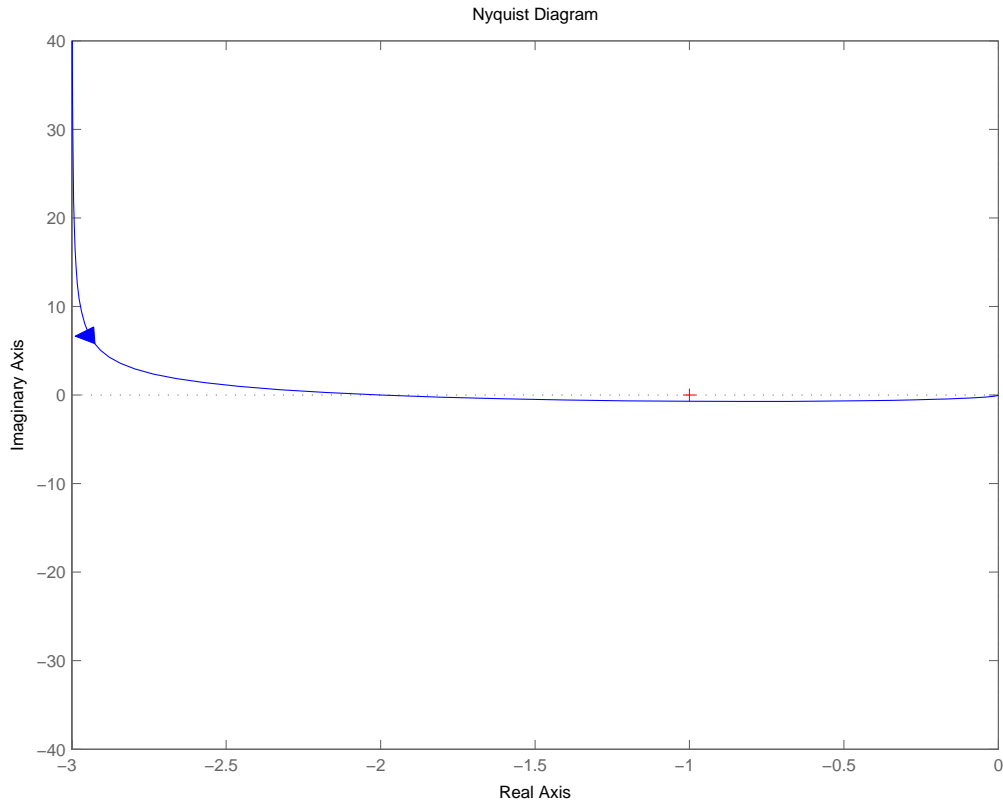
N_p - numărul polilor din \mathcal{C}^+ , incluzând ordinul de multiplicitate.

$$\Delta = (q_0 + 2N_p)\frac{\pi}{2}$$

Exercițiul 9. Fie funcția de transfer în buclă deschisă $H(s) = \frac{1+2s}{s(s-1)}$. Cu ajutorul programului **MATLAB** trasați locul de transfer și calculați polii sistemului. Aplicând *criteriul Nyquist* analizați stabilitatea sistemului în buclă închisă.

Soluție:

```
s=tf('s');
H=(1+2*s)/(s*(s-1));
nyquist(H)
```



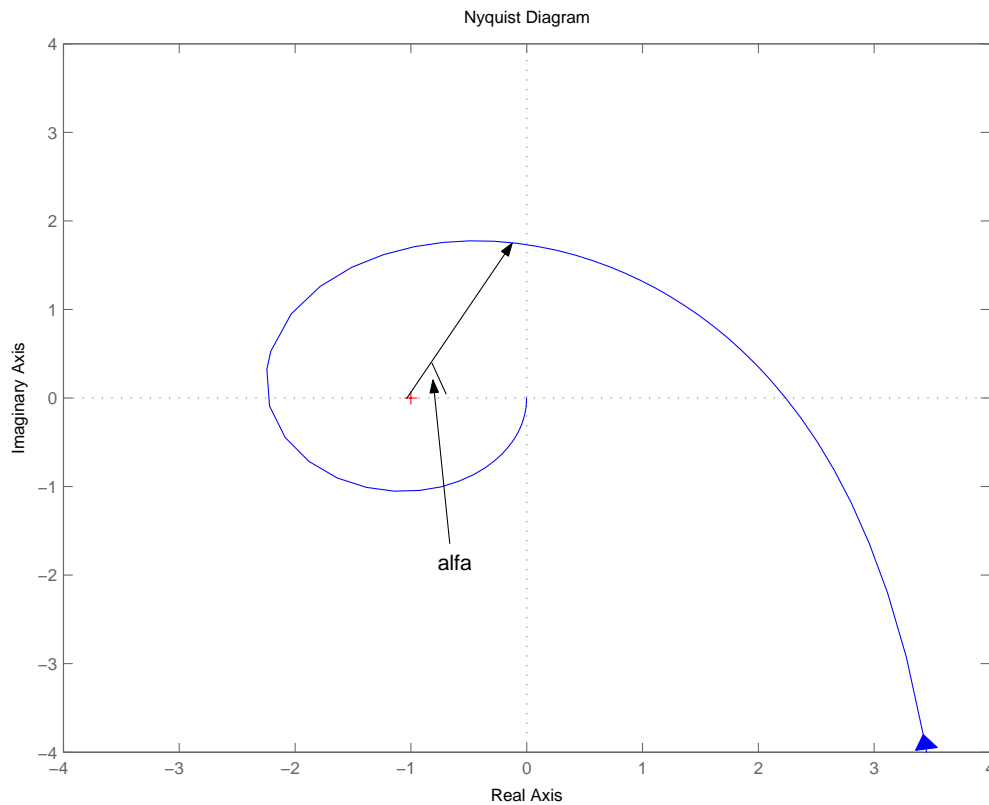
Observație: Din locul de transfer rezultat se va observa că $\Delta = 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$, dacă $\omega \in (0, \infty)$. De asemenea, $q_0 = 1$, $N_p = 1$ și deci $(q_0 + 2N_p)\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$ constatându-se că este verificat *criteriul Nyquist* și deci sistemul în buclă închisă este intern asimptotic stabil.

Exercițiul 10. Enunțul de la problema precedentă aplicați-l și pentru funcțiile de transfer în buclă deschisă $H_1(s) = \frac{1-s}{s^2(s+1)}$; $H_2(s) = \frac{5s^2+2s+1}{s(s-1)^2}$.

Soluție:

```
s=tf('s');
H2=(5*s^2+2*s+1)/(s*(s-1)^2);
nyquist(H2)
```

Observație: Din inspectarea funcției de transfer se vede că $q_0 = 1$, $N_p = 2$. Deci $(q_0 + 2N_p)\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$. Urmărind variația lui α , acesta variază de la $\frac{-\pi}{2}$ la 2π , deci $\Delta = \frac{5\pi}{2}$. Pentru funcția de transfer $H_1(s)$ variația argumentului este $-\pi$, iar $q_0 = 2$ și $N_p = 0$, de unde rezultă că sistemul în buclă închisă nu este stabil conform criteriului Nyquist (verificați în Matlab).



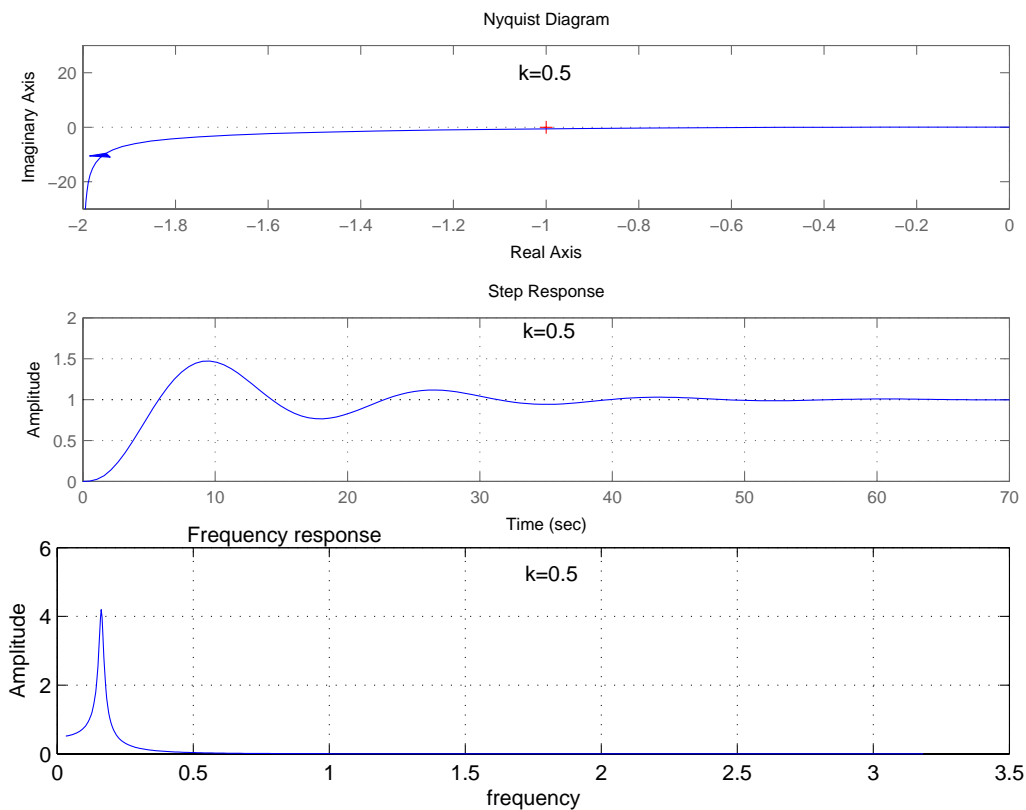
Criteriul lui Nyquist

- Dacă sistemul deschis este stabil, funcția H_d are toți polii situați în semiplanul stâng, sistemul fiind format din elemente stabile. Condiția necesară și suficientă ca sistemul închis să fie stabil, este ca locul de transfer pentru valori crescătoare ale pulsației ($\omega = 0 \dots \infty$) să lase în stânga punctul critic de coordonate $(-1, 0)$ sau acest punct să nu se găsească în interiorul caracteristicii amplitudine-fază trasată cu ambele ramuri pentru ω de la $-\infty \dots + \infty$.
- Dacă sistemul deschis este instabil, H_d are un număr p de poli în semiplanul drept al planului complex. Condiția necesară și suficientă pentru ca un sistem liniar și continuu să fie stabil în stare închisă este ca punctul $(-1, 0)$ să fie înconjurat în sens antiorar de caracteristica amplitudine-fază a sistemului deschis de un număr de ori egal cu numărul de poli situați în semiplanul drept al funcției de transfer a sistemului deschis.

Exercițiul 11. Fie un sistem în buclă deschisă cu funcția de transfer $H(s) = \frac{k}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$. Pentru diferite valori ale lui k , ($T_1 = 1, T_2 = 3$) trasați hodograful și răspunsul sistemului în buclă închisă la o intrare treaptă. Explicați ce se întâmplă cu stabilitatea sistemului dacă îl mărim pe k .

Soluție:

```
function ex20(k)
s=tf('s');
T1=1;
T2=3;
H=k/(s*(T1*s+1)*(T2*s+1));
Ho=feedback(H,1);
subplot(3,1,1);
nyquist(H);
subplot(3,1,2);
step(Ho);
subplot(3,1,3);
[G,w]=freqs([k],[3 4 1 1]);
plot(w/pi,abs(G));
```



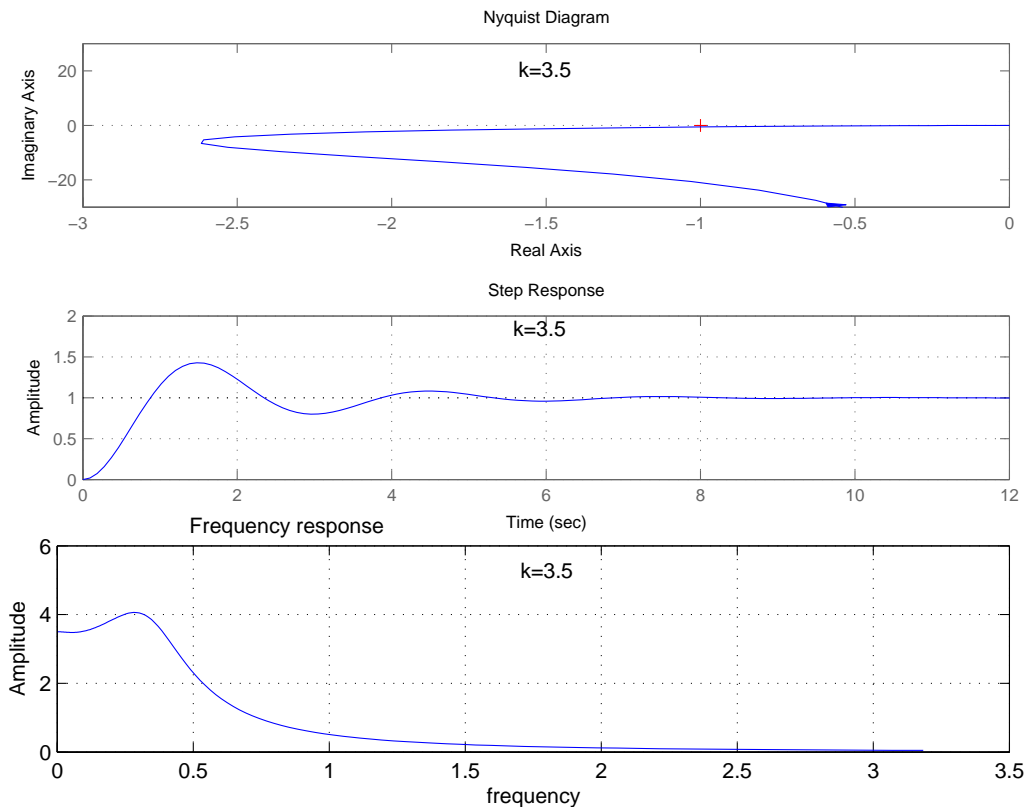
Observație: Pentru valori "mici" ale lui k ($0 < k < \frac{T_1+T_2}{T_1T_2}$), se va observa că hodo-graful intersectează axa negativă într-un punct relativ îndepărtat față de punctul critic. Pentru $k = 1$ (sistem stabil) se va observa, de asemenea, că valoarea M_r a răspunsului în frecvență va crește pentru valori mari ale lui k .

Pentru valori mai mari decât 1 ale lui k se va observa că sistemul intră în instabilitate.

Dacă funcției de transfer îi mai adăugăm un zero, $H(s) = \frac{k(1+T_d s)}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$, ieșirea sistemul răspunde mult mai repede, iar pentru k putem alege valori dintr-un interval mult mai mare pentru ca sistemul să rămână stabil.

Soluție:

```
function ex20(k)
s=tf('s');
T1=1;
T2=3;
Td=4;
H=k*(Td*s)/(s*(T1*s+1)*(T2*s+1));
Ho=feedback(H,1);
subplot(3,1,1);
nyquist(H);
subplot(3,1,2);
step(Ho);
subplot(3,1,3);
[G,w]=freqs([k*Td k],[3 4 5 1]);
plot(w/pi,abs(G));
```



Observație: Sistemul va fi stabil $\Leftrightarrow 0 < k < \frac{T_1+T_2}{T_1T_2-T_d(T_1+T_2)}$. Zeroul introdus îmbunătățește stabilitatea sistemului. El are efectul de a mări banda de frecvență rezultând un interval mult mai mare în care k poate varia.

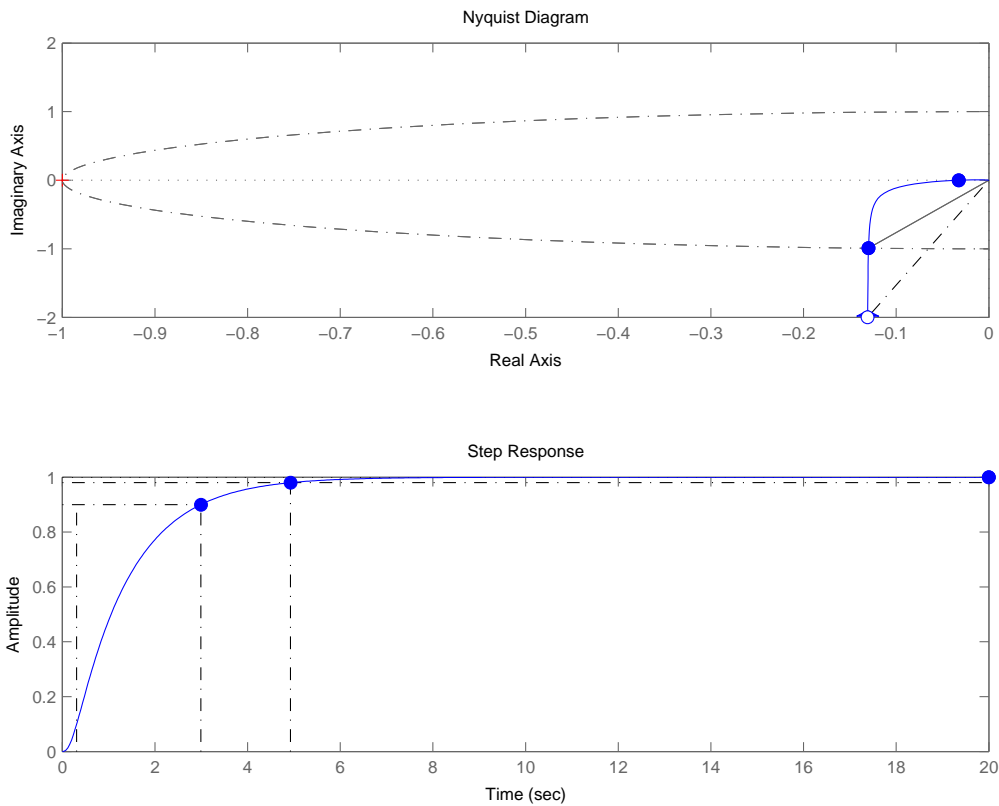
Exercițiul 12. Funcția de transfer pe calea directă a unui sistem de reglare a nivelului lichidului într-o incintă este:

$$G(s) = \frac{k_a k_i n k_I N}{s(R_a J s + k_i k_b)(A s + k_0)}$$

cu următorii parametri: $k_a = 50$; $k_i = 10$; $k_I = 50$; $J = 0,006$; $k_b = 0,0706$; $n = 0,01$; $R_a = 10$. Valorile parametrilor A, N, k_0 sunt variabile. Pentru $A = 10$ și $k_0 = 100$ desenați diagrama Nyquist a lui $G(j\omega)$ pentru $\omega \in (0, +\infty)$ cu N - variabil. Găsiți valoarea maximă a lui N a.î. sistemul în buclă închisă să fie stabil ($N \in \mathbb{Z}$).

Soluție:

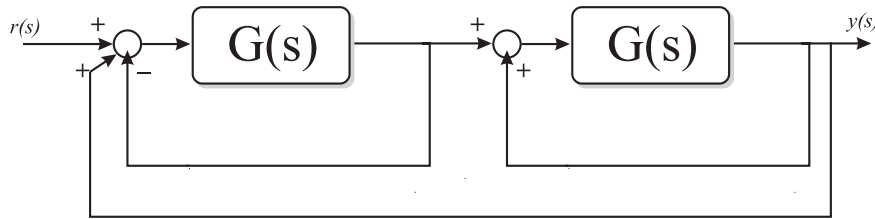
```
function ex21a(N)
ka=50;
ki=10;
kI=50;
J=0.006;
kb=0.0706;
n=0.01;
Ra=10;
A=10;
k0=100;
s=tf('s');
G=ka*ki*n*kI*N/(s*(Ra*J*s+ki*kb)*(A*s+k0));
nyquist(G);
step(feedback(G,1),20)
```



Observație: Cu cât valoarea lui N este mai mică ($N=0.2$), cu atât hodograful se îndepărtează de punctul critic, și urmărind criteriul Nyquist (sistemul în buclă deschisă fiind stabil, iar punctul critic negăsinduse în interiorul hodografului pentru acele valori

mici ale lui N , sistemul în buclă închisă este stabil). Pentru valori ale lui N în intervalul $(0,1)$ sistemul atinge performanțe foarte bune, ca de exemplu suprareglajul este 0. Pentru a vedea aceste performanțe, în fereastra care afișează răspunsul la o intrare treaptă dați click pe butonul drept al mouse-ului și alegeți "Characteristics".

Exercițiul 13. Se consideră următoarea schemă bloc:

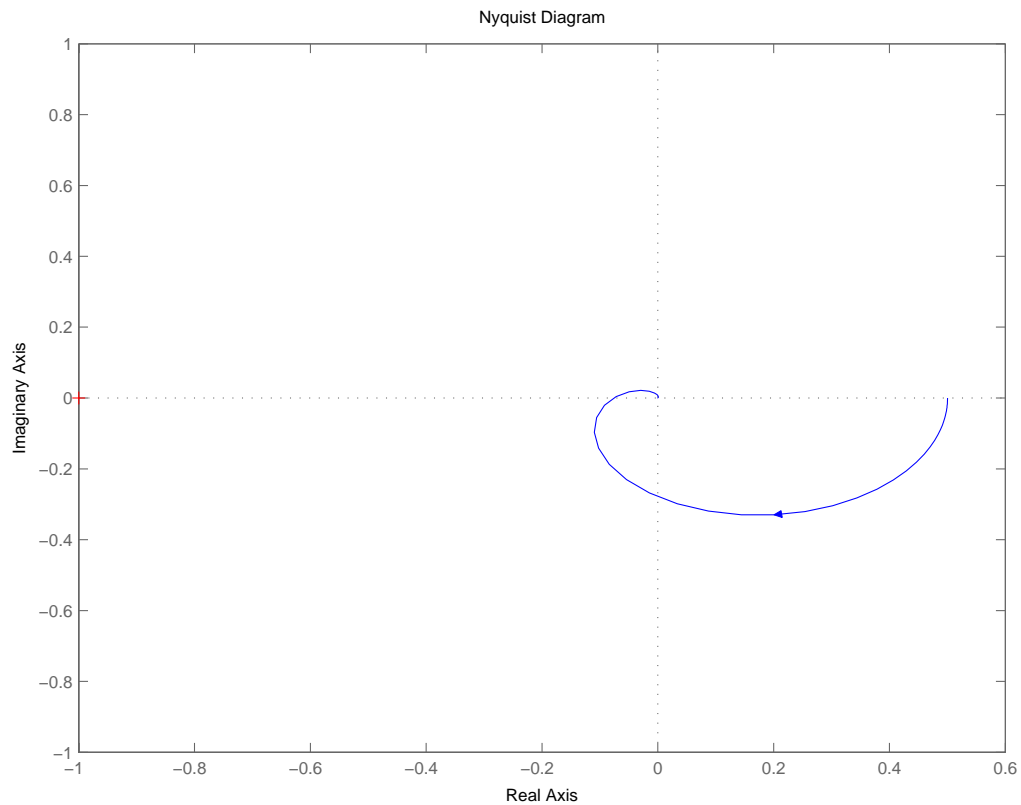


unde $G(s) = \frac{k}{(s+4)(s+5)}$. Aplicând *criteriul Nyquist* de stabilitate, determinați valorile lui k pentru care sistemul este stabil.

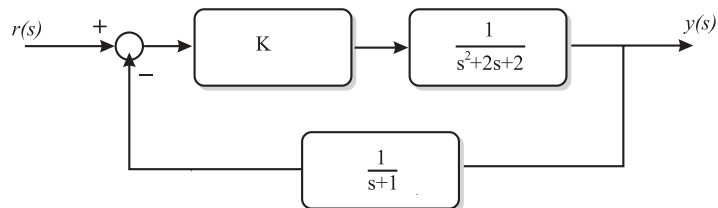
Soluție:

```
function ex22(k)
s=tf('s');
G=k/((s+4)*(s+5));
H1=feedback(G,1);
H2=feedback(G,-1);
Hd=series(H1,H2)
H0=feedback(Hd,-1);
nyquist(Hd)
figure
step(H0,40)
```

Observație: Pentru $k=11,55$ se obțin cele mai bune performanțe ale sistemului (pentru a le vedea care sunt acestea, în fereastra care afișează răspunsul la o intrare treaptă dați click pe butonul drept al mouse-ului și alegeți "Characteristics"), sistemul în buclă închisă fiind stabil, acest lucru putând fi observat din caracteristica Nyquist.



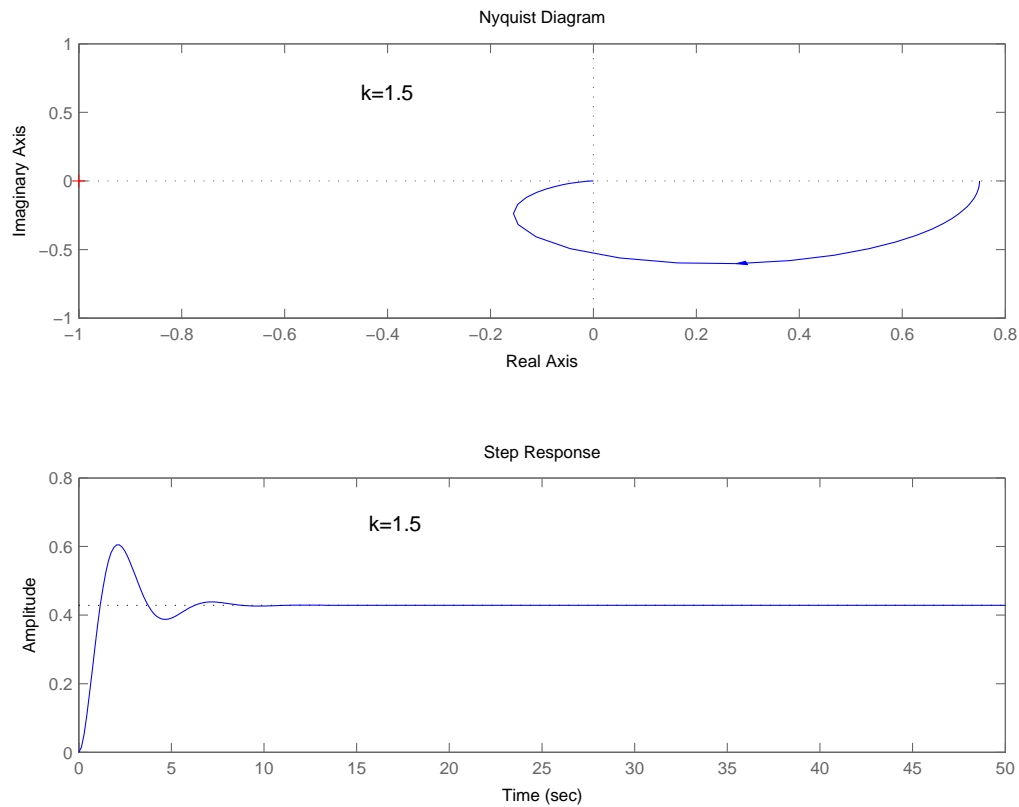
Exercițiul 14. Desenați diagrama Nyquist pentru sistemul din următoarea figură și determinați valorile lui k pentru care sistemul este stabil.



Soluție:

```
function ex23(k)
s=tf('s');
C=k;
P=1/(s^2+2*s+2);
F=1/(s+1);
Hd=P*C;
H0=feedback(Hd,F);
subplot(2,1,1);
nyquist(Hd);
subplot(2,1,2)
step(H0)
```


Observație: Pentru $k=1.5$ sistemul este stabil, însă se pot obține performanțe mult mai bune (suprareglaj mult mai mic) pentru valori mai mici ale lui k ($k=0.01$).



Exercițiul 15. Determinați stabilitatea următoarelor sisteme: $H_1(s) = \frac{1}{s^2(s+p)}, p > 0$, $H_2(s) = \frac{1}{s^4(s+p)}, p > 0$ și $H_3(s) = \frac{e^{-2s}}{s+p}$.

Soluție:

```
function ex15(p)
s=tf('s');
H1=1/(s^2*(s+p));
nyquist(H1);

function ex15(p)
s=tf('s');
H2=1/(s^4*(s+p));
nyquist(H2);

function ex15(p)
s=tf('s');
H3=tf([1],[1 p], 'Inputdelay',2)
nyquist(H3);
```

Observație: Se observă că pentru valori pozitive ale lui p conform criteriului Nyquist, sistemul $H_1(s)$ în buclă închisă este instabil (punctul critic se află în interiorul hodografului). Pentru sistemul $H_2(s)$ conform criteriului Nyquist sistemul în buclă închisă este

stabil. Pentru $H_3(s)$ sistemul în buclă închisă este instabil pentru $p < 0.4$ și stabil pentru $p > 0.4$.

3 Specificații de proiectare formulate în frecvență

$$(M_A, M_F, \omega_r, M_V, \omega_B)$$

Întocmai precum stabilitatea unui sistem în buclă închisă se poate pune în evidență prin *criteriul Nyquist* pe baza locului de transfer și performanțele unui sistem se pot evidenția prin intermediul diagramelor frecvențiale. Introducem următoarele criterii de performanță:

a) Marginea de amplitudine și Marginea de fază

Aceste două mărimi se definesc pentru un sistem având funcția de transfer în buclă deschisă $H(s)$ și care este intern stabil în buclă închisă (cu reacție negativă).

•Marginea de amplitudine (superioară):

$$M_{As} = \frac{1}{|H(j\omega_{180})|}$$

unde *frecvența de tăiere a fazei* ω_{180} este frecvența pentru care locul Nyquist al lui $H(j\omega)$ taie axa reală între -1 și 0 , i.e., $\arg H(j\omega_{180}) = -180^\circ$.

Observații:

- Dacă sunt mai multe puncte de tăiere în intervalul $(-1, 0)$ în definiție se ia cea mai mare valoare $|H(j\omega_{180})|$;
- Dacă nu există nici un punct de tăiere în intervalul $(-1, 0)$ se pune $M_{As} = \infty$;
- M_{As} este **factorul maxim cu care poate crește amplificarea în buclă deschisă** $|H(j\omega)|$ fără ca sistemul în buclă închisă să-și piardă stabilitatea (fiind deci o măsură a marginii de stabilitate sau robusteții). Mai exact, sistemul kH este intern stabil în buclă închisă $\forall k$ cu $1 \leq k < M_{As}$. Tipic, impunem pentru proiectare

$$M_{As} > 2.$$

•Marginea de amplitudine (inferioară):

$$M_{Ai} = \frac{1}{|H(j\hat{\omega}_{180})|}$$

unde *frecvența de tăiere a fazei* $\hat{\omega}_{180}$ este frecvența pentru care locul Nyquist al lui $H(j\omega)$ taie axa reală între $-\infty$ și -1 .

Observații:

- Dacă sunt mai multe puncte de tăiere în intervalul $(-\infty, -1)$ în definiție se ia cea mai mică valoare a lui $|H(j\hat{\omega}_{180})|$;
- Dacă nu există nici un punct de tăiere în intervalul $(-\infty, -1)$ (situația tipică pentru tandemuri sistem/regulator relativ simple) se pune $M_{Ai} = 0$;

- M_{Ai} indică **cu cât poate scădea amplificarea în buclă deschisă** $|H(j\omega)|$ fără ca sistemul în buclă închisă să-și piardă stabilitatea (fiind deci o măsură a marginii de stabilitate sau robusteții). Mai exact, sistemul kH este intern stabil în buclă închisă $\forall k$ cu $M_{Ai} < k \leq 1$. Tipic, impunem pentru proiectare

$$M_{Ai} < 0,5.$$

•**Marginea de fază:**

$$M_F = \arg H(j\omega_t) + 180^0$$

unde *frecvența de tăiere a amplitudinii* ω_t este a.î. $|H(j\omega_t)| = 1$.

Observații:

- Dacă sunt mai multe puncte de tăiere în definiție se ia cea mai mică valoare a lui $\arg H(j\omega_t)$;
- M_F arată câtă fază negativă se poate adăuga lui $H(j\omega)$ fără ca sistemul în buclă închisă să-și piardă stabilitatea (fiind deci o măsură a marginii de stabilitate sau robusteții stabilității). Mai exact, sistemul $He^{-j\Phi}$ este intern stabil în buclă închisă $\forall \Phi$ cu $0 \leq \Phi < M_F$. M_F este unghiul minim cu care se rotește $H(j\omega)$ pentru a trece prin punctul critic (măsurat în mod uzual în grade). Tipic, impunem pentru proiectare:

$$M_F > 30^0.$$

Observații:

- Definiția marginii de fază este adecvată atunci când $\arg H(j\omega_t)$ este mai mare decât -180^0 , ceea ce corespunde unei tăieri a cercului unitate în cadranul III sau IV. Explicați ce se întâmplă dacă tăierea are loc în cadranele I sau II;
- Marginea de amplitudine și de fază sunt indicatori tradiționali de robustețe a stabilității. Ei măsoară distanța de la punctul critic la locul Nyquist în anumite "direcții" specifice: amplitudine și fază. Dacă oricare dintre aceste margini este relativ mică atunci **sistemul este aproape de instabilitate**;
- În teoria modernă se consideră că marginile de amplitudine și fază **nu sunt indicatori satisfăcători** ai marginii de stabilitate întrucât există sisteme care **au margini de amplitudine și fază relativ bune însă își pierd stabilitatea la perturbații combinate relativ mici!** Ele sunt înlocuite eficient de marginea vectorială.

b) Marginea vectorială

$$M_V = \inf_{\omega} |1 + H(j\omega)|$$

Observații:

- Marginea vectorială este distanța minimă de la punctul critic $(-1, 0)$ la locul Nyquist. În plus, ținând cont că

$$\inf_{\omega} |1 + H(j\omega)| = \left[\sup_{\omega} \frac{1}{|1 + H(j\omega)|} \right]^{-1} = \|S\|_{\infty}^{-1}$$

obținem formula de calcul:

$$M_V = \|S\|_{\infty}^{-1};$$

- Marginea vectorială este un indice sintetic al marginii de stabilitate ce înlocuiește cu succes marginea de amplitudine și marginea de fază, eliminând toate neajunsurile legate de punctele multiple de tăiere, etc. Tipic, se impune:

$$M_V > 0.5;$$

- Marginea vectorială și deci cuantificarea marginii de stabilitate se reduce până la urmă la o condiție de normă de tipul $\|S\|_{\infty} < 2$! Mai mult, dacă se consideră că incertitudinile apar la anumite frecvențe pe care le modelăm printr-o pondere frecvențială W_S atunci condiția de margine de robustețe se rescrie din nou în forma standard

$$\|SW_S\|_{\infty} < 1$$

în care s-a introdus în W_S și factorul 0,5;

- Există o relație strânsă între M_V , M_F și M_A precum urmează:

$$M_A \geq \frac{1}{1 - M_V}, \quad M_F \geq 2 \arcsin \frac{M_V}{2} \geq M_V [\text{rad}]$$

Deci $M_V = 0.5$ garantează automat $M_A \geq 2$ și $M_F \geq 29^\circ$.

Relația dintre marginea de fază și ξ (pentru un sistem de ordinul 2,

$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$) este:

$$M_F = \arctan \frac{2\xi}{\sqrt{1 + 4\xi^4 - 2\xi^2}}.$$

c) Lărgimea de Bandă și Frecvența de Tăiere

- Lărgimea de bandă se poate defini ca intervalul de frecvențe $[\omega_1, \omega_2]$ în care controlul (reglarea) este "efectiv(ă)";
- Adesea dorim control bun la $\omega = 0$ și atunci automat $\omega_1 = 0$ rezultând că lărgimea de bandă este $\omega_B = \omega_2$.

Se definesc câteva frecvențe esențiale:

Lărgimea de bandă (în buclă închisă, în raport cu S): cea mai mică ω_B la care $|S(j\omega)|$ taie (în sens crescător) $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$ (≈ -3 db);

Lărgimea de bandă (în raport cu T): cea mai mare ω_{BT} la care $|T(j\omega)|$ taie (în sens descrescător) $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$ (≈ -3 db);

Frecvența de tăiere (a amplitudinii): cel mai mic ω_t la care $|H(j\omega)|$ taie (în sens descrescător) 1 (= 0 db);

Frecvența de tăiere (a fazei): cea mai mică frecvență ω_{180} la care locul Nyquist $H(j\omega)$ taie axa reală în intervalul $(-1, 0)$.

Observații:

- Lărgimea de bandă în termenii lui S indică frecvența până la care **în mod convențional se consideră că are loc urmărirea referinței și rejectia perturbației** (modulul funcției de transfer corespunzătoare $r \rightarrow e$ și $d_0 \rightarrow y$ care este S devine mai mare de 0,707);
- Lărgimea de bandă în termenii lui T indică frecvența până la care în mod convențional se consideră că sistemul în buclă închisă mai reacționează la o sinusoidă (modulul funcției de transfer intrare - ieșire care este T scade sub 0,707);
- Indicatorul tradițional de lărgime de bandă în automatică este ω_{BT} (cu geneza din electronică - de exemplu proiectarea amplificatoarelor audio). Acest indicator este neadecvat însă în multe cazuri (așa cum vom vedea mai jos) a.î. în teoria modernă se folosește uzual noțiunea de lărgime de bandă definită în termenii lui S . În multe situații $\omega_B \approx \omega_{BT}$. Când acest lucru nu se întâmplă situația este în general precum urmează: până la ω_B avem $|S| < 0,707$ și controlul este efectiv îmbunătățind performanța. În intervalul $[\omega_B, \omega_{BT}]$ controlul încă afectează răspunsul dar nu îmbunătățește performanța, cel mai adesea chiar o degradează pentru că $|S| > 1$. În final, la frecvențe mai mari de ω_{BT} avem că $S \approx 1$ și controlul nu are nici o influență asupra răspunsului;
- Pentru sistemele care au $M_F < 90^\circ$ avem că:

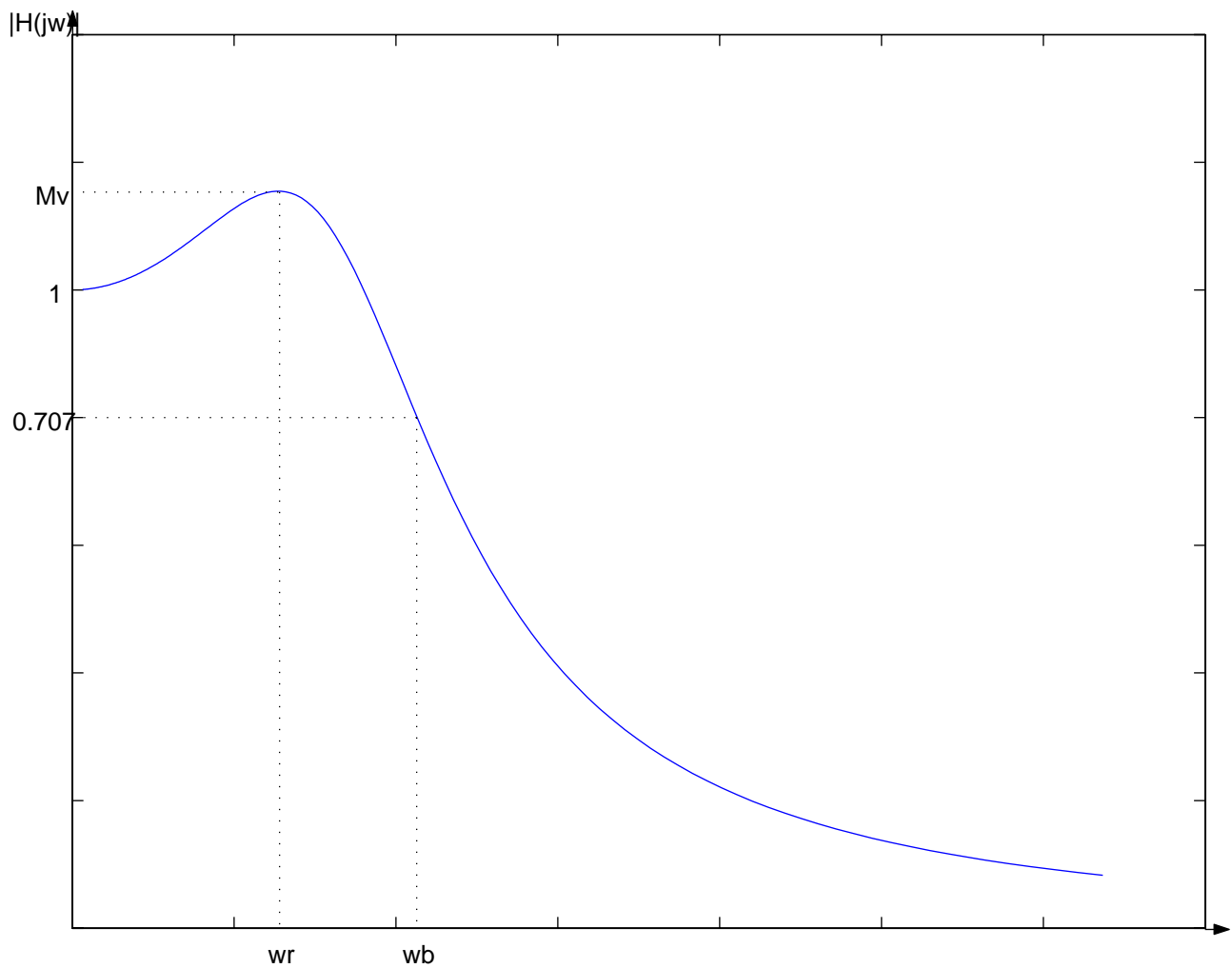
$$\omega_B < \omega_t < \omega_{BT}.$$

De aceea adeseori ω_t este folosit ca definiție a lărgimii de bandă (se calculează și relativ ușor);

- În concluzie, ω_B și ω_t **sunt indicatori relativ buni ai lărgimii de bandă pe când ω_{BT} poate fi înșelător în anumite situații** (în special în studiul sistemelor de ordin superior). Motivul este că vrem $T \approx 1$ pentru performanță bună dar nu este suficient ca $|T| \approx 1$; trebuie considerată și faza. Pe de-altă parte, pentru performanță bună cerem $S \approx 0$ și pentru aceasta este suficient ca $|S| \approx 0$ indiferent de fază.

d) Frecvența de rezonanță (ω_r). Banda de frecvență (ω_B)

- ω_r - frecvența de rezonanță este frecvența la care se obține M_v ;
- M_v - valoarea maximă a modului funcției $H(j\omega)$ (maximul se obține pentru $\omega = \omega_r$).



e) M_v, ω_r, ω_B pentru un sistem de ordinul 2:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

$$M_v = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}; \xi \leq 0,707$$

$$\omega_B = \omega_n \sqrt{(1 - 2\xi^2) + \sqrt{\xi^4 - 4\xi^2 + 2}}$$

Observație:

- Valoarea maximă de rezonanță, M_v , a răspunsului în frecvență a unui sistem în buclă închisă depinde doar de ξ . Când ξ este zero, M_v este infinit. Când ξ este negativ sistemul este instabil, valoarea lui M_v nu mai are nici un efect. Când ξ crește, valoarea lui M_v descrește.

- Banda de frecvență depinde direct proporțional de w_n . w_b crește și descrește liniar cu w_n . Banda de frecvență descrește cu creșterea lui ξ pentru un w_n fixat. Banda de frecvență și timpul de creștere sunt invers proporționale.
- Banda de frecvență și M_v sunt proporționale pentru $0 < \xi < 0.707$.
- Cu cât banda de frecvență este mai mare cu atât sistemul va răspunde mai rapid.
- Creșterea lui w_n conduce la creșterea lui w_b și la descreșterea timpului de creștere.
- Creșterea lui ξ conduce la descreșterea lui w_b și la o valoare mai mare a timpului de creștere.

f) Efectul unui zerou adăgat funcției de transfer pe calea directă:

$$H_d(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)}; \quad H_d(s) = \frac{\omega_n^2(1 + Ts)}{s(s + 2\xi\omega_n)}$$

$$H_0(s) = \frac{\omega_n^2(1 + Ts)}{s^2 + (2\xi\omega_n + T\omega_n^2)s + \omega_n^2}$$

$$\omega_B = \sqrt{-b + \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4\omega_n^4}}$$

unde

$$b = 4\xi^2\omega_n^2 + 4\xi\omega_n^3T - 2\omega_n^2 - \omega_n^4T^2$$

Observație:

- Cu cât este mai mare ω_B , cu atât sistemul va răspunde mai rapid;
- Efectul zeroului este de a crește ω_B .

g) Efectul unui pol (adăugat la funcția de transfer în buclă deschisă):

$$H_d(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)(1 + Ts)}$$

Observație:

- Efectul polului este de a micșora ω_B și de a conduce sistemul în buclă închisă la instabilitate;
- Cu cât ω_B este mai mic cu atât t_c este mai mare;
- Cu cât M_v este mai mare cu atât suprareglajul sistemului crește.

Exercițiul 16. Pe baza observațiilor de mai sus analizați următorul sistem $H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$. Observați cum se modifică M_v , w_b în funcție de w_n și ξ

Soluție:


```

function ex14(wn,teta)
s=tf('s')
H=wn^2/(s^2+2*teta*wn*s+wn^2)
[M,P,W]=bode(H);
Mv=20*log10(max(M))
wb=wn*sqrt((1-2*teta^2)+sqrt(teta^4-4*teta^2+2))
[H,w]=freqs([wn^2],[1 2*teta*wn wn^2]);
plot(w/pi,abs(H));

```

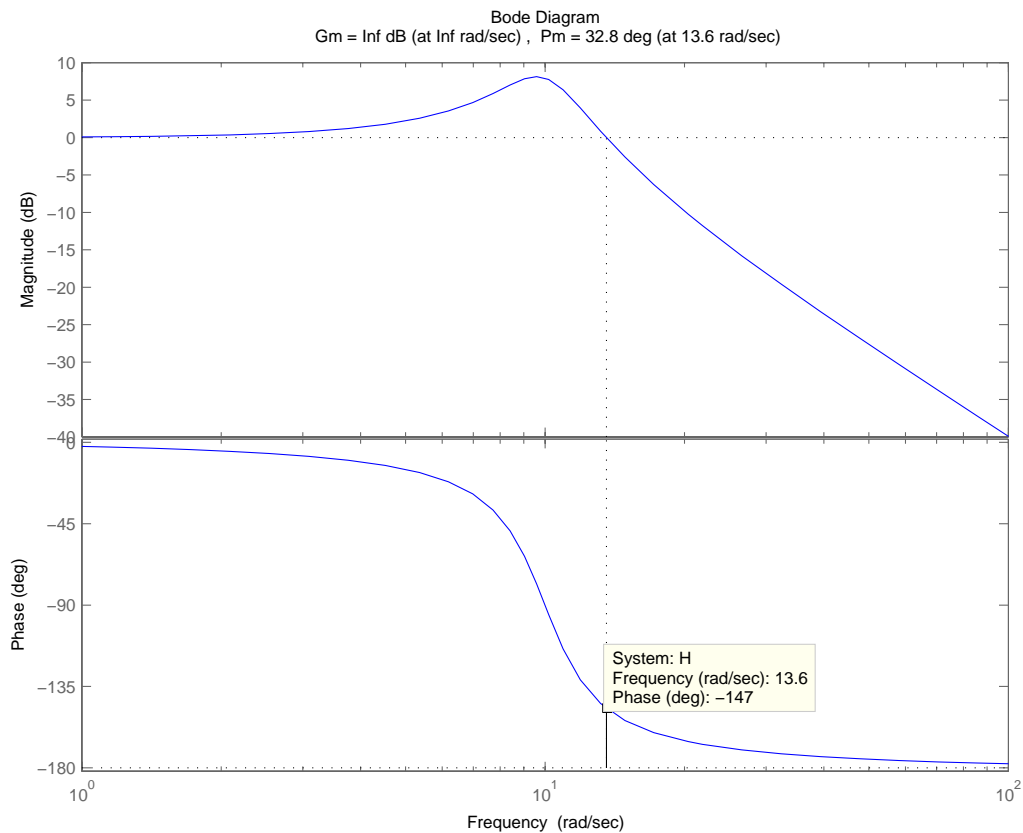
Exercițiul 17. Fie $G(s) = \frac{100}{s^2+4s+100}$. Folosind MATLAB, verificați că M_A este ∞ și M_F este $\simeq 32.8^0$.

Soluție:

```

s=tf('s');
H=100/(s^2+4*s+100);
[Ma,Mf,wcg,wcp]=margin(H)
margin(H)

```



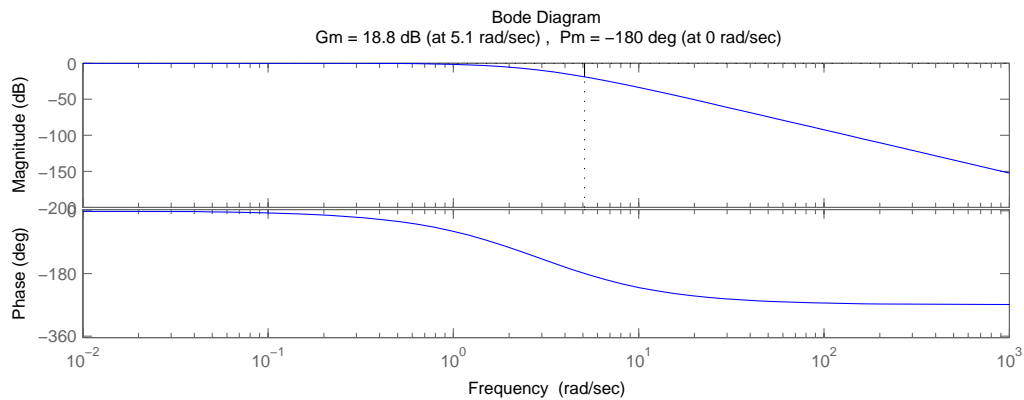
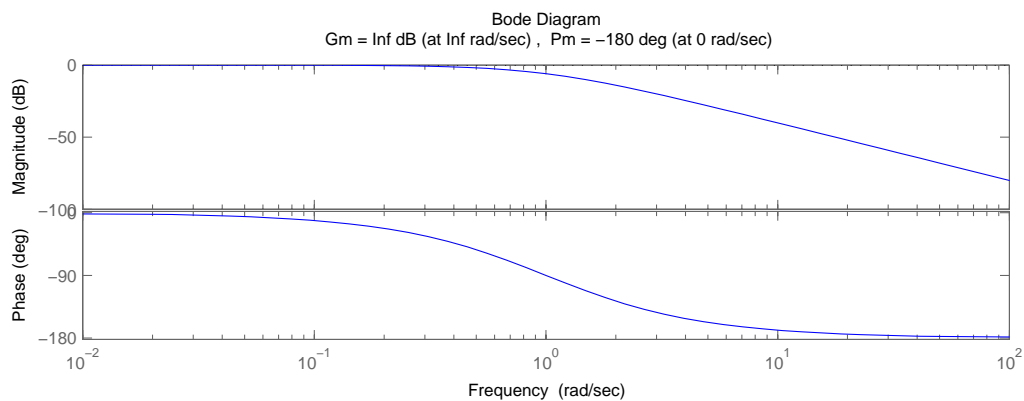
Funcția *margin* din *MATLAB* returnează M_A și M_F ale unui sistem dat.

Exercițiul 18. Calculați M_A, M_F pentru:

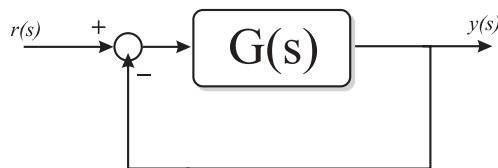
$$G_1(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}; \quad G_2(s) = \frac{24}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24}$$

Soluție:

```
s=tf('s');  
G1=1/(s^2+2*s+1);  
G2=24/(s^3+9*s^2+26*s+24)  
[Ma1,Mf1,wcg1,wcp1]=margin(G1)  
[Ma2,Mf2,wcg2,wcp2]=margin(G2)  
subplot(2,1,1)  
margin(G1)  
subplot(2,1,2)  
margin(G2)
```



Exercițiul 19. Se consideră diagrama:



$$G(s) = \frac{ke^{-Ts}}{s+1}$$

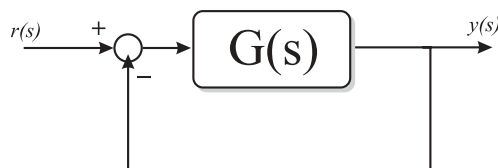
- a) Pentru $T = 0,1 \text{ sec}$ găsiți k a.î. $M_F = 45.0193^0$ (folosiți funcția **margin**);
 b) Desenați graficul lui $M_F(T)$ pentru k găsit la punctul a) și $0 \leq T \leq 0,25$.

Soluție:

- a)
- ```
s=tf('s');
G1=1/(s^2+2*s+1);
G2=24/(s^3+9*s^2+26*s+24)
[Ma1,Mf1,wcg1,wcp1]=margin(G1)
[Ma2,Mf2,wcg2,wcp2]=margin(G2)
subplot(2,1,1)
margin(G1)
subplot(2,1,2)
margin(G2)
```
- b)
- ```
k=9.02
s=tf('s');
for T=0:0.1:0.25
G=tf([k],[1 1],'Inputdelay',T);
[Ma,Mf]=margin(G)
margin(G)
figure
end
```

Observație: La punctul a) se observă că pentru $k = 9.02$, $M_A \simeq 45^0$. La punctul b) cu cât T (timpul mort) este mai mare, sistemul intră în instabilitate.

Exercițiul 20. Se consideră sistemul din figura de mai jos, unde $G(s) = \frac{100}{s(s+6)}$:



Determinați amplitudinea de rezonanță M_V , frecvența de rezonanță și lărgimea de bandă ω_B a sistemului în buclă închisă. Figurați și diagramele Bode.

Soluție:

```
w=logspace(-1,3);  
H=zpk([], [0 -6], 100);  
T=feedback(H,1);  
bode(T,w)  
[M,P,W]=bode(T);  
Mv=20*log10(max(M))
```

Exercițiul 21. Calculați M_A și M_F pentru sistemul: $H(s) = \frac{1}{s(s+p_1)(s+p_2)}$, unde $p_1 = 1$ și $p_2 = 0.5$.

Soluție:

```
s=tf('s');  
p1=1;  
p2=0.5;  
H=1/(s*(s+p1)*(s+p2))  
[Ma,Mf]=margin(H)  
margin(H)
```