# Identificarea Sistemelor

## Subiecte Aplicații

**40 puncte**

**90 minute**

**A#1**

**5 p**

În unele publicații de specialitate, funcția de auto-covarianță este exprimată folosind o variantă modificată a Ipotezei Ergodice, după cum urmează:

$$r_y[k] \overset{def}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} y[n]y[n-k]$$

Cu această definiție, demonstrați următoarea identitate, pentru orice secvență discretă care admite Transformată Fourier:

$$\left|Y(e^{j\omega})\right|^2 = \phi_y(\omega)\,, \quad \forall\,\omega\in\mathbb{R}\,.$$

(Au fost folosite notațiile cunoscute.) Ce semnificație credeți că are această identitate?

`(Exercițiul 2.17)`

**A#2**

**10 p**

Fie un FTJ discret cu pulsația de tăiere $\omega_c \in (0,\pi)$. Acesta este stimulat cu armonica elementară $u[n] \overset{def}{=} e^{j\omega_u n}$, $\forall\, n\in\mathbb{Z}$, unde $\omega_u \in (0,\pi]$. Evaluați spectrul semnalului de ieşire în funcție de cele două pulsații ($\omega_c$ şi $\omega_u$), apoi comentați rezultatul obținut.

`(Exrcițiul 3.2)`

**Indicație**

- Pentru a evalua spectrul semnalului de ieşire, se poate folosi următoarea identitate, obținută prin extinderea definiției OF la clasa semnalelor discrete periodice:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pm j\omega n} = 2\pi\delta_0(\omega)\,, \quad \forall\,\omega\in\mathbb{R} \text{ (impulsul Dirac).}$$

**A#3**

**25 p**

Fie $\mathcal{C}_N = \{(x_n, y_n)\}_{n\in\overline{1,N}}$ o mulțime de $N$ perechi de coordonate planare nenegative (adică situate în primul cadran al spațiului bidimensional). Se consideră de asemenea ecuația generală a unei elipse centrate în origine:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\,,$$

unde $a > 0$ şi $b > 0$ sunt semi-axele acesteia. Se doreşte determinarea elipsei care se situează cel mai aproape de toate punctele din plan definite prin coordonatele $\mathcal{C}_N$, în sensul minimizării erorii pătratice globale:

$$\mathcal{V}(\boldsymbol{\theta}) \overset{def}{=} \sum_{n=1}^{N} \varepsilon^2[n,\boldsymbol{\theta}],$$

cu $\varepsilon[n,\boldsymbol{\theta}]$ – distanța Euclidiană dintre punctul de coordonate $(x_n, y_n)$ şi punctul de pe elipsă coliniar cu acesta şi cu originea. Evident, în acest context, $\boldsymbol{\theta}^T = [a \;\; b]$. Determinați sistemul de ecuații verificat de semi-axele elipsei şi arătați că acestea sunt de asemenea soluții ale ecuației:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{x_n^2 + y_n^2}{ux_n^2 + vy_n^2} = \sum_{n=1}^{N} \frac{x_n^2 + y_n^2}{\sqrt{ux_n^2 + vy_n^2}},$$

unde: $u = 1/a^2$ şi $v = 1/b^2$ sunt două transformări inversabile în primul cadran.

**(Exercițiul 4.3)**

**Indicație**

- Scrieți ecuațiile pentru rezolvarea problemei de optimizare:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg\min_{\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{R}_+^2} \mathcal{V}(\boldsymbol{\theta}),$$

apelînd la MCMMP, după exprimarea convenabilă a distanței $\varepsilon[n,\boldsymbol{\theta}]$ în funcție de datele $\mathcal{C}_N$ şi parametrii $\boldsymbol{\theta}^T = [a \;\; b]$. Pentru simplificarea acestor ecuații, se recomandă utilizarea transformărilor inversabile din enunț.