

# 5 Exerciții rezolvate

## Soluție (Exercițiul 2.3)

•  $\boxed{\text{SNR} \triangleq \frac{r_y[0]}{r_e[0]} = \frac{\sigma_y^2}{\lambda^2}} \Rightarrow$  trebuie evaluate  
dispersiile  $\sigma_y^2$   
în ambele cazuri

■ Mai întâi : - se calculează  $r_{uy}[k]$   
pentru cazul  $u =$  treaptă unitară.

ARX:  $r_{uy}[k] = E\left\{u[n] \left( \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u[n-k] + \frac{1}{A(q^{-1})} e[n-k] \right)\right\} =$   
 $= b \sum_{m \geq 1} (-a)^{m-1} r_u[m+k] + \sum_{m \geq 0} (-a)^m r_{ue}[m+k]$   
 $\forall k \in \mathbb{Z}.$

•  $r_u[k] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-k} \sum_{n=0}^{N-k-1} u[n] u[n+k] = 1, \forall k \in \mathbb{Z}$   
 •  $r_{ue}[k] = E\{u[n] e[n-k]\} = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$   
 $\uparrow$   
 $\boxed{u[n] = 1, \forall n \geq 0}$   
 $\boxed{E\{e[n]\} = 0}$

$\rightarrow r_{uy}[k] = b \sum_{m \geq 1} (-a)^{m-1} =$

Stabilitate  $|a| < 1 \rightarrow \frac{b}{1+a}, \forall k \in \mathbb{Z}$

# 5 Exerciții rezolvate

## Soluție (Exercițiul 2.3)

**[OE]:**  $r_{uy}[k] = E \left\{ u[n] \left( \frac{B(g^*)}{A(g^*)} u[n-k] + e[n-k] \right) \right\} = \dots =$   
 $= \frac{b}{1+a}, \forall k \in \mathbb{Z} \text{ (la fel).}$

ca mai sus  
↓

- Se ~~evaluează~~  $r_{yy}[0] = \sigma_y^2$  plecând de la ecuațiile recurente generale particularizate în cazul  $u = \text{treaptă unitară}$ .

**[ARX]:**  $r_{yy}[k] + a r_{yy}[k-1] = \frac{b^2}{1+a} + \lambda^2 \delta_0[k], \forall k \geq 0$

$$\begin{cases} r_{yy}[0] + a r_{yy}[1] = \frac{b^2}{1+a} + \lambda^2 \\ r_{yy}[1] + a r_{yy}[0] = \frac{b^2}{1+a} \end{cases} \quad | \times (-a)$$

$$(1-a^2) r_{yy}[0] = b^2 \frac{1-a}{1+a} + \lambda^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_y^2 = r_{yy}[0] = \frac{b^2}{(1+a)^2} + \frac{\lambda^2}{1-a^2} \geq 0$$

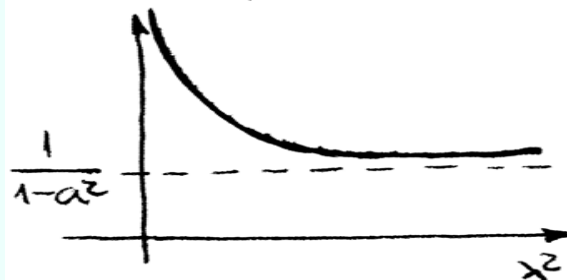
$$\boxed{\text{SNR}_{\text{ARX}} = \frac{1}{1-a^2} + \frac{b^2}{\lambda^2(1+a)^2} > 1}$$

↑  
>1

↑  
>0



SNR<sub>ARX</sub>



## 5 Exerciții rezolvate

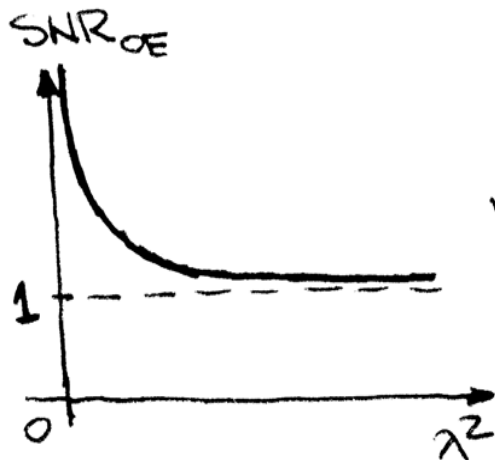
### Soluție (Exercițiul 2.3)

$$\boxed{\text{OE}}: r_y[k] + a r_y[k-1] = \frac{b^2}{1+a} + \lambda^2 \delta_0[k] + \lambda^2 a \delta_0[k-1] \quad \forall k \geq 0$$

$$\begin{cases} r_y[0] + a r_y[-1] = \frac{b^2}{1+a} + \lambda^2 \\ r_y[1] + a r_y[0] = \frac{b^2}{1+a} + a \lambda^2 \end{cases} \quad | \times (-a)$$

$$(1-a^2) r_y[0] = b^2 \frac{1-a}{1+a} + (1-a^2) \lambda^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_y^2 = r_y[0] = \frac{b^2}{(1+a)^2} + \lambda^2$$



$$\boxed{\text{SNR}_{\text{OE}} = 1 + \frac{b^2}{\lambda^2 (1+a)^2} > 1}$$

↑  
> 0

# 5 Exerciții rezolvate

## Exercițiul 2.4



**Deduceți relațiile generale ale densităților spectrale de putere ale ieșirilor modelelor ARX[1,1] și OE[1,1]. Deduceți răspunsurile ideale în frecvență ale sistemelor reprezentate de cele 2 modele.**

**Soluție**

● ARX [1,1]

$$r_y[k] = E \{ y[k] y[k-1] \} = E \left\{ \left( \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u[k] + \frac{1}{A(z^{-1})} e[k] \right) \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u[k-1] + \frac{1}{A(z^{-1})} e[k-1] \right) \right\}$$

► notație naturală :

$$H(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \quad \sum_{k \geq 0} h_k z^{-k} \quad (h_0=0) \quad (\text{system})$$

$$G(z^{-1}) = \frac{1}{A(z^{-1})} \quad \sum_{k \geq 0} g_k z^{-k} \quad (g_k=1) \quad (\text{egomot})$$

$$r_y[k] = E \{ (H(z^{-1}) u[k] + G(z^{-1}) e[k]) \times (H(z^{-1}) u[k-1] + G(z^{-1}) e[k-1]) \} =$$

$$= \sum_{l \geq 0} \sum_{m \geq 0} h_l h_m r_u[k+m-l] + \\ + \sum_{l \geq 0} \sum_{m \geq 0} h_l g_m r_{ue}[k+m-l] + \\ + \sum_{l \geq 0} \sum_{m \geq 0} h_l g_m r_{eu}[k+l-m] + \\ + \sum_{l \geq 0} \sum_{m \geq 0} g_l g_m r_e[k+m-l]$$

