Laboratorul 2. Semnale si sisteme.

1 Convolutii

In teoria semnalelor si a sistemelor convolutiile joaca un rol important deoarece definesc (in domeniul timp) o clasa importanta de sisteme liniare. Convolutia (produsul de convolutie) stabileste o relatie intre semnalul de intrare si cel de iesire prin intermediul *functiei pondere*, care descrie sintetic sistemul dinamic respectiv. Pentru semnale discrete definitia convolutiei este:

$$(h * u)(n) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)u(k), \qquad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

iar pentru semnale cu timp continuu:

$$(h * u)(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Calculul convolutiilor *discrete* se face retinand din suma seriei (1) numai un numar finit de termeni, sa zicem intre indicii de insumare $-M$ si M, rezultand urmatoarea formula de calcul:

$$(h * u)(n) \simeq \sum_{k=-M}^{M} h(n-k)u(k) \tag{3}$$

Calculul convolutiei *in cazul continuu* se poate efectua in maniera urmatoare, in doua etape:
1. Se aproximeaza integrala din (2) cu o integrala definita pe un interval marginit numit *orizont de timp* care se alege cu atat mai mare cu cat se doreste o precizie mai buna obtinandu-se formula de calcul

$$(h * u)(t) \simeq \int_{-M}^{M} h(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

2. Integrala definita (4) se aproximeaza printr-o suma finita. Pentru aceasta se aleg de exemplu $2n+1$ puncte in intervalul $[-M, M]$ notate $p_{-n}, p_{-n+1}, \ldots, p_{n-1}, p_n$. Uzual punctele se aleg echidistante, i.e. $\ell := | p_{k+1} - p_k | = \frac{2M}{2n+1}; \quad k = -n : n-1$), a.i. $p_{-n} = -M$, $p_n = M$ obtinandu-se o urmatoarea formula de calcul, similara cu cea de la calculul convolutiei discrete (3):

$$(h * u)(t) \simeq \sum_{k=-n}^{n} \Big(h(t-p_k)u(p_k) \Big) * \ell \tag{5}$$

unde $\ell := \frac{2M}{2n+1}$ este lungimea intervalului de esantionare.
Observatie: La calculul efectiv al convolutiilor cu ajutorul calculatorului, pot aparea urmatoarele tipuri de erori:

- **Erori de trunchiere** [semnale continue/discrete] - Din punct de vedere al calculului numeric semnalele cu suport infinit trebuie cu necesitate trunchiate rezultand semnale cu suport finit (orizont finit de timp.) Convolutiile calculate pe baza semnalelor trunchiate sufera asadar automat de *erori de trunchiere* (deoarece suma seriei se calculeaza pe baza unui numar *finit* de termeni), valorile semnaleleor in afara orizontului de timp (intervalului de trunchiere) fiind considerate zero. *Eroarea de trunchiere* este rezonabil de mica daca semnalele iau valori "mici" in afara intervalului de trunchiere.

- **Erori de esantionare** [semnale continue] - Pentru a calcula numeric convolutia unor semnale continue acestea trebuie discretizate (esantionate), astfel incat integrala de convolutie sa poata fi inlocuita cu o suma de convolutie. *Eroarea de esantionare* apare datorita faptului ca se pierde total informatia despre evolutia functiei intre doua momente succesive de esantionare. *Eroarea de esantionare* este *rezonabil* de mica daca intervalul de esantionare este *suficient* de mic.

- **Erori de rotunjire** [semnale continue/discrete]- datorate erorilor inerente de calcul in *format virgula mobila. Eroarea de rotunjire* poate fi facuta *rezonabil* de mica daca se foloseste o precizie numerica *suficient* de mare.

Exercitiul 1. Calculati si reprezentati grafic convolutiile urmatoarelor perechi de semnale. Identificati si evaluati *eroarea de trunchiere* alegand orizonturi de timp diferite. Pentru convolutiile in timp continuu identificati si evaluati *eroarea de esantionare* alegand diferite intervale de esantionare pentru un orizont de timp fixat.

a) $h(n) = \mathbf{1}(n),\ n \in \mathbb{Z},\ u = h;$

unde $\mathbf{1}(n) \triangleq \begin{cases} 1, & \text{pentru } n \geq 0\ ; \\ 0, & \text{in rest.} \end{cases}$

b) $h = a^{|n|},\ u(n) = a^{|n|},\ n \in \mathbb{Z},\ a = 0.9;$

c) $h = \Delta,\ u(n) = a^{|n|},\ n \in \mathbb{Z},\ a = 0.9;$

unde $\Delta(n) \triangleq \begin{cases} 1, & \text{pentru } n = 0\ ; \\ 0, & \text{in rest.} \end{cases}$

d) $h(t) \triangleq rect(t), t \in \mathbb{R},\ h = u;$

unde $rect(t) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } \mid t \mid \leq \frac{1}{2}\ ; \\ 0, & \text{, in rest.} \end{cases}$

e) $h(t) = e^{\alpha t}\mathbf{1}(t),\ \ u(t) = e^{\beta t}\mathbf{1}(t),\ \ t \in \mathbb{R},\ \ \alpha = \beta = -1.$

Sursele `Matlab` pentru acest exercitiu sunt:

```
******* cont_conv.m*******
 function y=cont_conv(h,u,N)

%N este vectorul cu numarul de puncte al diviziunii
M=10; %orizontul de timp
l=(2*M)./N;% lungimea intervalului de esantionare
x=0.1:0.1:M; for i=1:length(N)
    disp('Numarul de puncte al diviziunii este:')
    N(i)
     for t=0.1:0.1:M
         y(round(t*10))=0;
```

```
        j=-M;

        while(j<=M)
            y(round(t*10))=y(round(t*10))+feval(h,(t-j))*feval(u,j);
            j=j+l(i);

        end

    end
    y
    figure;
    plot(x,y);
    disp('Apasati orice tasta!');
    pause;
end
%************************************
% Serban SABAU , 16 oct. 2003
%last line of cont_conv.m ***********

**********discr_conv.m********
 function y=discr_conv(h,u,M)
%y este produsul de convolutie dintre h si u.
%M este un vector de intregi, cu semnificatia orizontului de timp.
clc; for i=1:length(M)
    disp('Orizontul de timp este:')
    -M(i)
     M(i)
     for n=1:30
         y(n)=0;
         for j=-M(i):M(i)
             y(n)=y(n)+feval(h,(n-j))*feval(u,j);
         end
     end
     y
     figure;
     stem(y);
     disp('Apasati orice tasta!');
     pause;
 end

*********Delta.m***********
 function f=Delta(n) if n==0
    f=1;
else
    f=0;
end
```

```
********discr_step.m*********

 function f=discr_step(n) if n<0
    f=0;
else
    f=1;
end

************exp_neg.m*******
 function f=exp_neg(t) if  t>=0
    f=exp(-t);
else
    f=0;
end

************rect.m***********
 function f=rect(t) if abs(t)<=(1/2)
    f=1;
else
    f=0;
end

*******Ex1_a.m********
 clc;
 M=[50 100 150];
discr_conv(@discr_step,@discr_step,M)


********Ex1_b.m*******
 clc;
 M=[30 100 200];
  discr_conv(@exp_baza_a,@exp_baza_a,M)

*******Ex1_c.m*********
clc
M=[30 150 200];
discr_conv(@Delta,@exp_baza_a,M)

*******Ex1_d.m*************
clc;
N=[20  80 350 ];
cont_conv(@rect,@rect,N)


********Ex1_e.m*******

clc;
```

```
N=[20  80 350 ];
cont_conv(@exp_neg,@exp_neg,N)
h=tf([1],[1 1]);
figure;
impulse(series(h,h));
```

2 Aproximari ale functiei δ

Semnalul δ (impulsul Dirac) si derivatele sale nu sunt functii in sensul uzual al definitiei (i.e. nu sunt functii regulate ci functii generalizate). Exemplele urmatoare ilustreaza diverse *posibilitati de aproximare* a lui δ prin intermediul unor functii regulate.

Exercitiul 2. Trasati graficul urmatoarelor aproximatii ale functiei δ pentru diverse valori $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $d_n(t) = \begin{cases} n, & \text{pentru} \quad -\frac{1}{2n} \leq t \leq \frac{1}{2n} \ ; \\ 0, & \text{in rest.} \end{cases}$

b) $d_n(t) = n\, trian(n\, t), \quad t \in \mathbb{R}$ unde

$$trian(t) \triangleq \begin{cases} 1- \mid t \mid, & \text{pentru} \mid t \mid \leq 1 \ ; \\ 0, & \text{in rest.} \end{cases}$$

c) $d_n(t) = bell(nt), \quad t \in \mathbb{R}$ unde

$$bell(t) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Sursele `Matlab` pentru acest exercitiu sunt:

```
******d_n.m*****
%functia de la exemplul Exercitiul2 a)
function y=d_n(n,t) if abs(t)<=1/(2*n)
    y=n;
else
    y=0;
end

*****trian.m**********
%functia de la exemplul Exercitiul2 b)
function y=trian(n,t)
%intoarce trian(nt)
if abs(t)<=1/(n)
    y=1-abs(n*t);
else
    y=0
end

*******belll.m**************
```

```
 function f=belll(t)
f=(1/sqrt(2*pi))*exp(-(t^2)/2);


*******Ex2_a.m************
 hold on
  for n=1:3:78
    l=1/(n*200);% 20 de puncte in intervalul -1/2n, 1/2n
    t=-1/(2*n):l:1/(2*n);
    for i=1:length(t)
        y(i)=d_n(n,t(i));
    end
    plot(t,y);
end
hold off


*****Ex2_b.m***********

hold on
for n=1:3:43
    l=1/(n*100);%(2/n)/200 distanta dintre puncte in intervalul -1/n, 1/n
    t=-1/(n):l:1/(n);
    for i=1:length(t)
        y(i)=n*trian(n,t(i));
    end
    plot(t,y);
end
hold off

*********Ex2_c.m***********
hold on
 for n=1:3:19
    t=-5:0.1:5;
    for i=1:length(t)
        y(i)=n*belll(n*t(i));
    end
    plot(t,y);
end
hold off
```

Exercitiul 3. Vizualizati grafic aproximatiile derivatelor $\delta^{(1)}$, $\delta^{(2)}$, $\delta^{(3)}$ obtinute prin derivarea sirului de functii de la puntul **c)**.

Sursele `Matlab` pentru acest exercitiu sunt:

```
******belll_1.m***********
function f=belll_1(t)
f=(1/sqrt(2*pi))*exp(-(t^2)/2)*t;

*****belll_2.m**********
function f=belll_2(t)
f=(-1/sqrt(2*pi))*exp(-(t^2)/2)*(1-t^2);

******belll_3.m**********
function f=belll_2(t)
f=(1/sqrt(2*pi))*exp(-(t^2)/2)*(3-t^2)*t;

*******Ex3_a.m************
hold on
for n=1:3:19
    t=-5:0.1:5;
    for i=1:length(t)
        y(i)=n*belll_1(n*t(i));
    end
    plot(t,y);
end
hold off


*****Ex3_b.m**********

hold on
for n=1:3:80
    t=-5:0.1:5;
    for i=1:length(t)
        y(i)=n^2*belll_2(n*t(i));
    end
    plot(t,y);
end
hold off


*****Ex3_c.m*********

hold on
for n=1:3:12
    t=-5:0.1:5;
    for i=1:length(t)
        y(i)=n*belll_3(n*t(i));
    end
    plot(t,y);
end
```

```
hold off
```

Exercitiul 4. Pentru orice functie regulata $\Phi(t)$ continua in 0 avem relatia

$$\Phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\Phi(t)\mathrm{d}t \tag{6}$$

Scopul acestui exercitiu este sa verificati calitatea aproximatiilor functiei δ de la **Exercitiul 2** prin evaluarea erorii (reziduului) cu care este satisfacuta relatia (6) atunci cand $\delta(t)$ este inlocuit cu o aproximatie $d_n(t)$. Mai precis calculati eroarea

$$\varepsilon_\Phi(n) = \int_{-\infty}^{\infty} d_n(t)\Phi(t)\mathrm{d}t - \Phi(0)$$

pentru aproximatiile lui δ de la **Exercitiul 2** si functia $\Phi(t)$ continua in zero:

$$\Phi(t) = \begin{cases} 4\left(\frac{1}{4} - t^2\right), & \text{pentru } -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}\,; \\ 0 & \text{in rest.} \end{cases} \tag{7}$$

si aratati grafic ca $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_\Phi(n) = 0$.

Sursele `Matlab` pentru acest exercitiu sunt:

```
*******Phi.m*******
function y=Phi(t)
if abs(t)<=(1/2)
    y=1-4*(t^2);
else
    y=0;
end

**********Ex4a.m**********

clc;
%Phi(0)=1
i=1;%numarul de n-uri iterate
for n=2:15:900

    M=1/2*n; %orizontul de timp (pe care d_n nu e zero)
    N=100;%nr. de puncte al diviziunii
    l=2*M/N;
     j=-M;
    epsilon(i)=0;
    while(j<=M)
        epsilon(i)=epsilon(i)+d_n(n,j)*Phi(j)-1;
        j=j+l;
    end
    i=i+1;
end

    disp('Evolutia erorii odata cu cresterea lui n:')
```

```
    epsilon


*********Ex4b.m****************

clc;
%Phi(0)=1
i=1;%numarul de n-uri iterate
for n=2:15:500

    M=1/n; %orizontul de timp (pe care trian nu e zero)
    N=100;%nr. de puncte al diviziunii
    l=2*M/N;
     j=-M;
    epsilon(i)=0;
    while(j<=M)
        epsilon(i)=epsilon(i)+n*trian(n,j)*Phi(j)-1;
        j=j+l;
    end
    i=i+1;
end

    disp('Evolutia erorii odata cu cresterea lui n:')
    epsilon


*********Ex4c.m**************

clc;
%Phi(0)=1
i=1;%numarul de n-uri iterate
for n=2:15:900

    M=3/n; %orizontul de timp sub care se afla graficul lui bell(nt)
    N=30;%nr. de puncte al diviziunii
    l=2*M/N;
     j=-M;
    epsilon(i)=0;
    while(j<=M)
        epsilon(i)=epsilon(i)+n*belll(n*j)*Phi(j)-1;
        j=j+l;
    end
    i=i+1;
end

    disp('Evolutia eroarii odata cu cresterea lui n:')
    epsilon
```

Exercitiul 5. Folosind aproximatia **c)** verificati numeric ca:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(k)}(t)\Phi(t)\mathrm{d}t = (-1)^k \Phi^{(k)}(0)$$

pentru $k = 1, 2, 3$.
Folositi functia $\Phi(t)$ data in (7) pentru a reprezenta grafic eroarea.
Indicatie:

$$\varepsilon_{\Phi}^{(k)}(n) = \int_{-\infty}^{\infty} d_n^{(k)}(t)\Phi(t)\mathrm{d}t - (-1)^k \Phi^{(k)}(0)$$

pentru diverse valori ale lui $n \in \mathbb{N}^*$.
Exercitiul 6. Folosind aproximatia **c)** verificati numeric ca:

$$\delta * \delta^{'} = \delta^{'}$$

$$\delta^{'} * \delta^{'} = \delta^{''}$$

Sursele `Matlab` pentru acest exercitiu sunt:

```
%Calculeaza convolutia \delta*\delta'  ; Exercitiul 6.;
%dupa care afiseaza n*bell(nt) ca aproximatie a lui \delta'

clear all; N=[120] hold on
n=80;%calculam n*bell(nt) ca aproximatie a lui delta
%N este vectorul cu numarul de puncte al diviziunii
M=5; %orizontul de timp
l=(2*M)./N;% lungimea intervalului de esantionare
x=0.1:0.1:M; for i=1:length(N)
    disp('Numarul de puncte al diviziunii este:')
    N(i)
     for t=0.1:0.1:M
         y(round(t*10))=0;
         j=-M;

         while(j<=M)
             y(round(t*10))=y(round(t*10))+n^2*belll(n*(t-j))*belll_1(n*j);
             j=j+l(i);

         end

     end
     y

     hold on;
     plot(x,y);
```

```
    for t=0.1:0.1:M
        y(round(t*10))=0;
        j=-M;

        while(j<=M)
            y(round(t*10))=y(round(t*10))+n^2*belll(n*(-t-j))*belll_1(n*j);
            j=j+l(i);

        end

    end
    plot(-x,y);

    disp('Apasati orice tasta!');
    pause;
end

hold off

figure;

 t=-5:0.1:5;
   for i=1:length(t)
       y(i)=n*belll_1(n*t(i));
   end
   plot(t,y);
%***************************************************
%**** Serban SABAU  16 oct. 2003 *****************
%*********last line of Ex6_a.m *******************
```

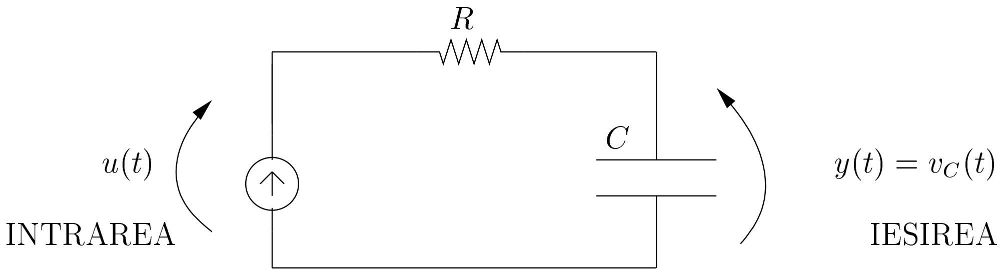
Exercitiul 7 Reluati **Exercitiile 4** si **5** pentru diverse alte functii $\Phi(t)$ construite de voi. $\Phi(t)$ trebuie sa fie regulată, continuă in zero si derivabilă in zero de cite ori este necesar.

3 Raspunsul unui circuit RC

Circuitul RC din figura se asimileaza cu un sistem dinamic a carui intrare (comanda) este tensiunea sursei $u(t)$ si a carui iesire (marime masurata) $y(t)$ este tensiunea pe condensator.

Circuitul este descris de urmatoarea ecuatie diferentială:

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}u(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$



Solutia acestei ecuatii in conditii initiale nule ($u(0) = 0, \;\; y(0) = 0$) este

$$y(t) = \frac{1}{RC}\int_0^t e^{-\frac{(t-\tau)}{RC}}u(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad t \in \mathbb{R}$$

care se mai poate scrie sub forma unui produs de convolutie $= h * u$, unde

$$h(t) = \frac{1}{RC}\, e^{-\dfrac{t}{RC}}\, \mathbf{1}(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

se numeste *functia pondere* a sistemului (cu intrarea u si iesirea y)
Definitie. Raspunsul in frecventa al circuitului cu functia pondere $h(t)$ de mai sus, este prin definitie $\hat{h}(\omega) := \dfrac{1}{1 + jRC\omega}$
Raspunsul sistemelor de convolutie la intrari armonice. Fie sistemul de convolutie avand *raspunsul in frecventa* $\hat{h}(\omega)$. Atunci pentru intrarea armonica

$$u(t) = \alpha_u \cos(\omega t + \Phi_u)$$

unde $\alpha_u \geq 0$, $\Phi_u \in \mathbb{R}$ si respectiv $t \in \mathbb{R}$ rezulta iesirea:

$$y(t) = \alpha_y \cos(\omega t + \Phi_y) \tag{8}$$

unde

$$\alpha_y = \mid \hat{h}(\omega) \mid \alpha_u \;\text{ respectiv}$$
$$\Phi_y = \Phi_u + \arg\big(\hat{h}(\omega)\big) \tag{9}$$

Exercitiul 8.

a) Determinati si trasati graficul lui $y(t)$ (tensiunea pe condensator) calculand convolutia lui $u(t)$ cu $h(t)$, unde

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } 1 \leq t < 2 \,; \\ 0, & \text{in rest.} \end{cases} \tag{10}$$

$$\text{si} \quad RC = 1 \,.$$

b) Determinati si trasati grafic raspunsul tensiunii $z(t)$ pe rezistenta, la intrarea (10) folosind ca

$$z = g * u$$

unde g este *functia pondere* a sistemului cu intrarea u si iesirea z:

$$g(t) = 1 - \frac{1}{RC}\, e^{-\dfrac{t}{RC}}\, \mathbf{1}(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Verificati numeric ca $y + z = u$ si explicati discrepantele.

c) Calculati si reprezentati grafic raspunsul sistemului de convolutie definit de h la intrari de tip treapta respectiv de tip rampa. Semnalul de tip treapta este definit

$$\mathbf{1}(t) \triangleq \begin{cases} 1, & \text{pentru } t \geq 0 \,; \\ 0, & \text{pentru } \ t < 0. \end{cases}$$

iar semnalul rampa:

$$rampa(t) \triangleq \begin{cases} t, & \text{pentru } t \geq 0 \,; \\ 0, & \text{pentru } \ t < 0. \end{cases}$$

d) Stiind ca $RC = 1$ Calculati raspunsul circuitului la intrarea armonica $u(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ unde $\omega_0 := 2\pi f_0$ iar $t \in \mathbb{R}$ pentru $2\pi RC = \dfrac{1}{f_0}$. Figurati grafic u si y.

Indicatie. Se foloseste (8) si (9).

e) Calculati raspunsul circuitului la intrarea

$$u(t) = \cos(2\pi f t) + \frac{1}{4}\cos(2\pi \tilde{f} t) \ \ t \in \mathbb{R}$$

cu $2\pi f RC = 1$ si $2\pi \tilde{f} RC = 3$. Figurati grafic u si y.

Indicatie. Se foloseste proprietatea de liniaritate a sistemelor de convolutie.

4 Conexiunea serie a doua elemente diferentiale.

Fie sistemul

$$y(n) = u(n) - u(n-1), \quad n \in \mathbb{Z} \tag{11}$$

Exercitiul 9.

a) Determinati raspunsul indicial prin calculul lui y la intrarea $\Delta(n)$ si figurati-l grafic.

b) Calculati raspunsul la impuls al sistemului serie format din doua sisteme diferentiale (11) in doua moduri:

   i) Determinati raspunsul celui de-al doilea sistem la raspunsul primului sistem la intrare impuls.

   ii) Determinati convolutia raspunsului elementului diferential cu el insusi.

c) Confirmati numeric si explicati de ce raspunsul la treapta al conexiunii serie este egal cu raspunsul la impuls al elemetului diferential.

d) Figurati/Calculati *raspunsul in frecventa*

$$h(\omega) = 1 - e^{-j\omega}, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

al elementului diferential.

e) Figurati/Calculati *raspunsul in frecventa* al sistemului serie prin doua metode

i) Produs de functii raspuns.

ii) Raspunsul produsului de convolutie.