Universitatea "Politehnica" din Bucureşti
Facultatea de Automatică & Calculatoare

# Prelucrarea Semnalelor

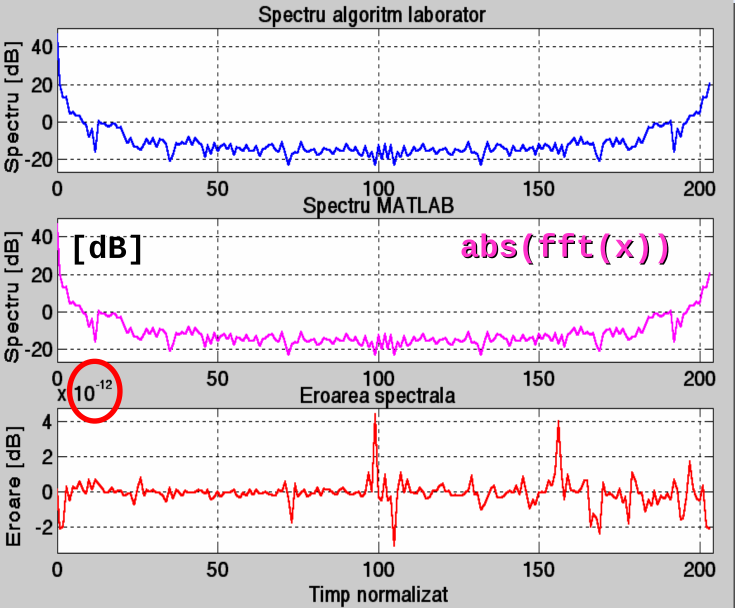
## • Lucrări de laborator •

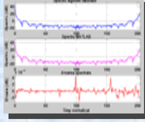
http://www.geocities.com/aplimathes/SISP


**Dan Ştefănoiu**
Profesor

Danny@router.indinf.pub.ro

http://www.geocities.com/dandusus/Danny.html



# Sumar

☞ **Bibliografie**

☞ ❶ Notaţii şi convenţii

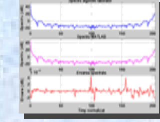
☞ ❷ Obiectivul lucrărilor de laborator

☞ ❸ Algoritmul lui Goertzel

❹ Algoritmul FFT bazat pe segmentarea semnalului în timp

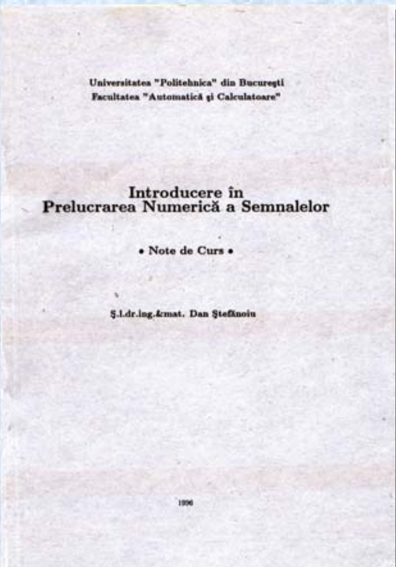
❺ Algoritmul FFT bazat pe segmentarea semnalului în frecvenţă

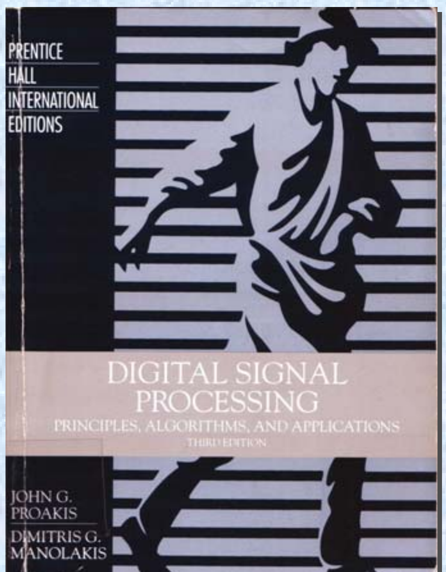
❻ Date de intrare, prezentarea rezultatelor şi punctaje



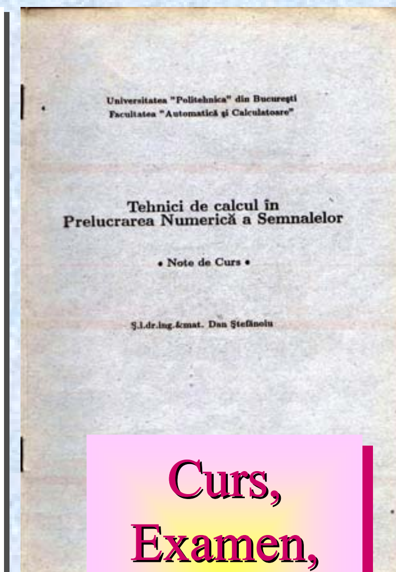
# Bibliografie


1. Oppenheim A.V., Schafer R. – *Digital Signal Processing*, Prentice Hall, NJ, USA, 1985.
2. Proakis J.G., Manolakis D.G. – *Digital Signal Processing – Principles, Algorithms and Applications*, Prentice Hall, NJ, USA, 1996.
3. Stănăşilă O., Stanomir D. – *Metode matematice în Teoria Semnalelor*, Editura Tehnică, 1980.
4. Ştefănoiu D. – *Introducere în Prelucrarea Numerică a Semnalelor*, Tipografia Universității "Politehnica" din Bucureşti, 1996.
5. Ştefănoiu D. – *Tehnici de calcul în Prelucrarea Numerică a Semnalelor*, Tipografia Universității "Politehnica" din Bucureşti, 1996.

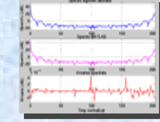






Curs & Examen

Curs, Examen, Lucrări de laborator



# ❶ Notații și convenții

- $q^{-1}$ → Operatorul de întîrziere cu un pas.
- $N$ → Numărul de eşantioane ale semnalului (şi ale *Transformatei Fourier Discrete* (TFD) asociate).

  → $N = 2^L$ (de regulă) • În caz contrar: Completare cu zerouri pîna la prima putere a lui 2 , superioară lui *N*.

- $x$ → Secvenţa discretă de semnal ce trebuie analizată. $\left(Supp\ \ x = \overline{0, N-1}\right)$
- $X$ → Transformata Fourier Discretă asociată lui $x$. $\left(Supp\ \ X = \overline{0, N-1}\right)$
- $u_0$ → Treapta unitară discretă.
- $$\delta_{N\mathbb{Z}}[k] \overset{def}{=} \begin{cases} 1 \ , \ k \in N\mathbb{Z} = \{0, \pm N, \pm 2N, \ldots\} \\ 0 \ , \ k \notin N\mathbb{Z} = \{0, \pm N, \pm 2N, \ldots\} \end{cases}$$

  → Impulsul unitar periodic.

- $$w_N^k \overset{def}{=} e^{-j\frac{2k\pi}{N}} = \cos\frac{2k\pi}{N} - j\sin\frac{2k\pi}{N}$$

  → Armonică elementară.

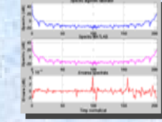
☝ minus

**Proprietăţi**

- Periodicitate: $w_N^k = w_N^{k \pm N}$ ; $w_N^{k(N+n)} = w_N^{kn}$
- Simetrie: $w_N^{k(N-n)} = \overline{w}_N^{kn}$
- Generarea impulsului unitar periodic:

$$\sum_{n=0}^{N-1} w_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \overline{w}_N^{kn} = N\delta_{N\mathbb{Z}}[k]$$

$$\forall\, k, n \in \mathbb{Z}$$



# ❷ Obiectivul lucrărilor de laborator

☞ *Implementarea unor algoritmi eficienți de calcul pentru următoarele formule duale de analiză-sinteză din Prelucrarea Semnalelor:*

**Analiză (TFD)**

$$X[k] \overset{def}{=} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] w_N^{nk}, \quad \forall k \in \overline{0, N-1}$$

**Sinteză (ITFD)**

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \overline{w}_N^{kn}, \quad \forall n \in \overline{0, N-1}$$

**Observații:**

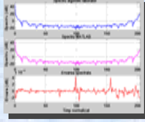
- Se poate verifica ușor că: ITFD(TFD($x$)) ≡ $x$.
- Se poate arăta că, pentru a calcula ITFD, este suficient să se utilizeze definiția TFD.
- Numărul de operații necesare calculului în implementarea directă a TFD:

$$\mathcal{O}_0[N] = \underbrace{\left[4N^2\right]_\bullet}_{\text{numărul de înmulțiri reale}} + \underbrace{\left[2N(2N-1)\right]_+}_{\text{numărul de adunări reale}} \sim 4N^2$$

numărul de înmulțiri reale — numărul de adunări reale

(pentru $x$ = secvență discretă complexă)

⇨ Reducerea numărului de operații folosind proprietățile armonicelor elementare.



# ❸ Algoritmul lui Goertzel

## ❸.❶ Prima variantă de calcul a TFD

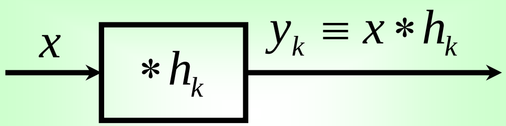
- **Exprimare echivalentă a TFD**

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\overline{w}_N^{k(N-n)}, \quad \forall k \in \overline{0, N-1}$$

$$\left( w_N^{kN} = 1 \quad \forall k \in \overline{0, N-1} \right)$$

periodicitate sumă de convoluţie

Ieşirea la momentul $N$ a unui sistem liniar




$$h_k[p] \overset{def}{=} \overline{w}_N^{kp} u_0[p], \ \forall p \in \mathbb{Z}$$

$$\left( Supp\ x = \overline{0, N-1} \right)$$

$$y_k[p] = \sum_{n \geq 0} x[n] h_k[p-n] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\overline{w}_N^{k(p-n)}, \quad \forall p \in \overline{0, N-1}$$

$$X[k] = y_k[N], \quad \forall k \in \overline{0, N-1}$$

- **Funcţia de transfer a sistemului**

$$H_k(z) \overset{def}{=} \sum_{p \geq 0} h_k[p] z^{-p} = \sum_{p \geq 0} \left( \overline{w}_N^{k} z^{-1} \right)^p = \frac{1}{1 - \overline{w}_N^{k} z^{-1}}, \quad \forall k \in \overline{0, N-1}$$

$$|z| > 1$$

**Ecuaţia recusivă a ieşirii**

$$y_k[n] - \overline{w}_N^{k} y_k[n-1] = x[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Teorema întîrzierii

$$z^{-1}\mathscr{Z}(f)(z) = \mathscr{Z}(q^{-1} f)(z)$$

**Ecuaţia recusivă a TFD**

$$\begin{cases} y_k[0] = x[0] \\ y_k[1] = \overline{w}_N^{k} y_k[0] + x[1] \\ \vdots \\ y_k[N] = \overline{w}_N^{k} y_k[N-1] + x[N] = \overline{w}_N^{k} y_k[N-1] = X[k] \end{cases}$$

$$\forall k \in \overline{0, N-1}$$

# ❸ Algoritmul lui Goertzel

## ❸.❷ A doua variantă de calcul a TFD (îmbunătățită)

- **Exprimare echivalentă ecuației recursive anterioare**

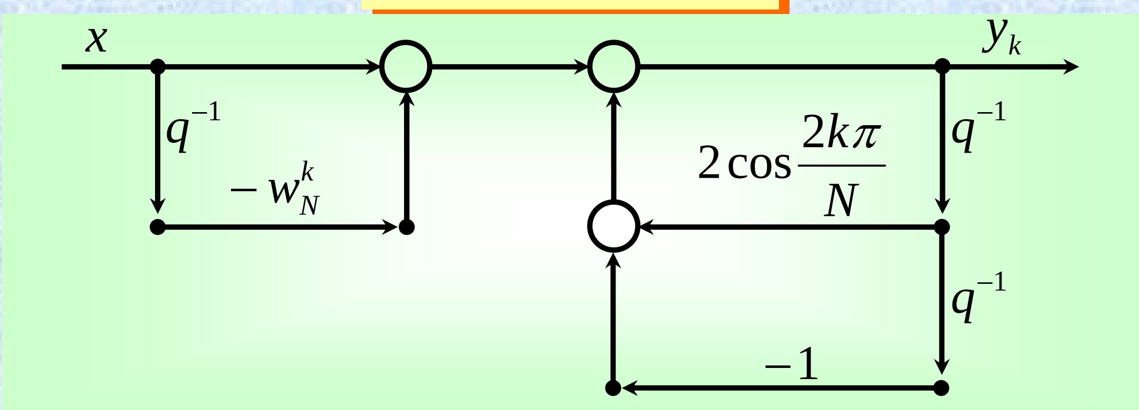
$$\left(1-\overline{w}_N^k q^{-1}\right) y_k[n] = x[n], \quad \forall n \in \overline{0,N}, \ \forall k \in \overline{0,N-1}$$

înmulțire forțată cu $\left(1-w_N^k q^{-1}\right)$

$$\left(1-2\cos\frac{2k\pi}{N}q^{-1}+q^{-2}\right) y_k[n] = \left(1-w_N^k q^{-1}\right)x[n], \quad \forall n \in \overline{0,N}, \ \forall k \in \overline{0,N-1}$$

$$y_k[n] = 2y_k[n-1]\cos\frac{2k\pi}{N} - y_k[n-2] + x[n] - w_N^k x[n-1], \quad \forall n \in \overline{0,N}, \ \forall k \in \overline{0,N-1}$$

**Schema de calcul**



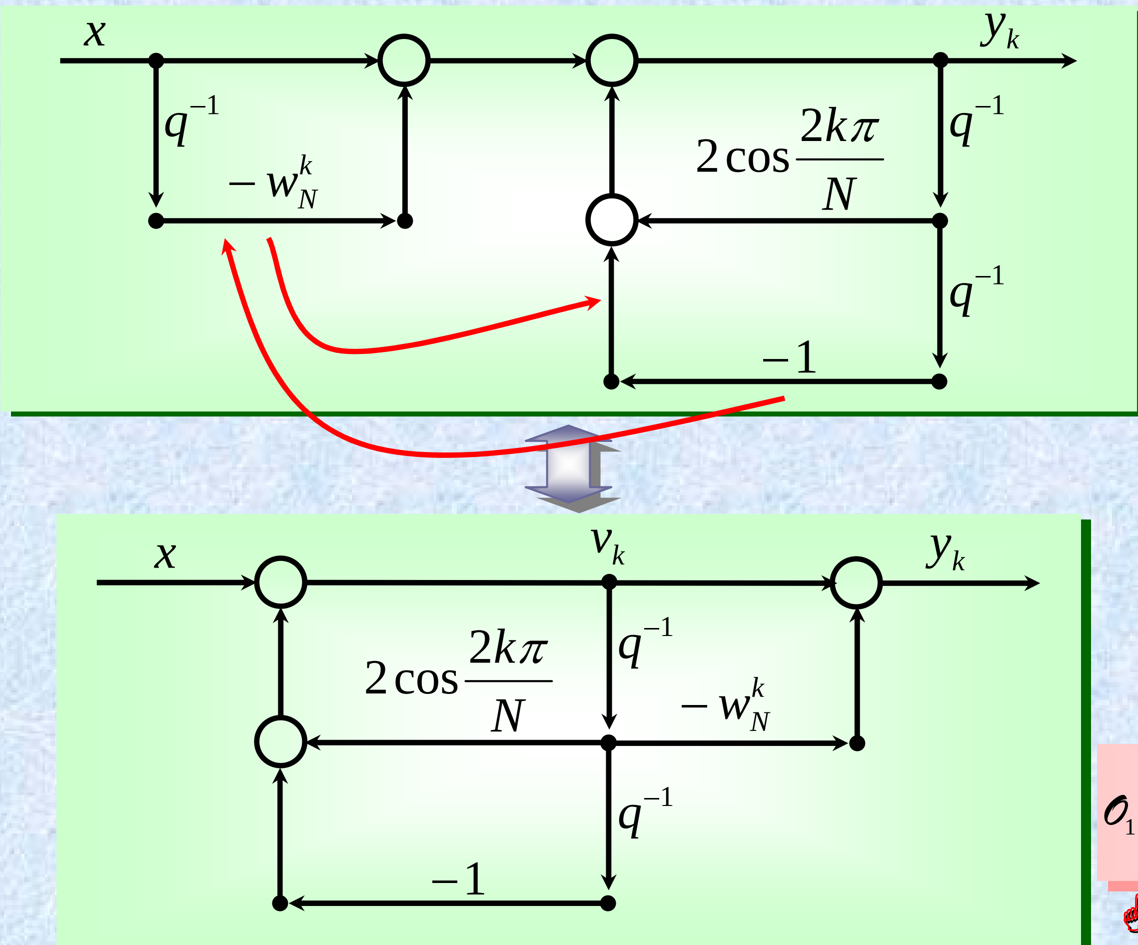

**Inițializare**

$$y_k[-1] = y_k[-2] = 0$$
$$\forall k \in \overline{0,N-1}$$

# ❸ Algoritmul lui Goertzel

## ❸.❸ Varianta eficientă de calcul a TFD

**Schema anterioară de calcul se poate transforma echivalent, folosind *Teorema lui TELLEGEN*.**




### Algoritmul lui Goertzel

$$\begin{cases} v_k[-2] = v_k[-1] = 0 \\ \vdots \\ v_k[n] = 2\cos\dfrac{2k\pi}{N} v_k[n-1] - v_k[n-2] + x[n] \\ \vdots \\ v_k[N] = 2\cos\dfrac{2k\pi}{N} v_k[N-1] - v_k[N-2] \end{cases}$$

$$X[k] = y_k[N] = v_k[N] - w_N^k v_k[N-1]$$

$$\forall k \in \overline{0, N-1}$$

### Număr de operații

$$\mathcal{O}_1[N] = \left[\left\lceil \frac{N-1}{2} \right\rceil (2N+5)\right]_{\bullet} + \left[4N(N+1)\right]_{+} \sim N^2$$

☝ de 4 ori mai mic