❺ Exerciții rezolvate

Exercițiul 3.3

Este posibilă utilizarea MCMMP pentru a determina parametrii necunoscuți ai modelului OE[1,1]? Dacă nu, argumentați răspunsul. Dacă da, determinați ecuațiile de estimare a parametrilor necunoscuți (coeficienți & dispersie zgomot alb). Tot în acest caz, studiați consistența estimațiilor.

Indicație

Se recomandă exprimarea formei de regresie liniară grupînd termenii după coeficienții necunoscuți. Se va observa cum zgomotul afectează direct datele de ieşire.

Soluție

- Forma de regresie liniară:

$$y[n] = \varphi^T[n]\theta + e[n]$$

$$\begin{cases} \varphi^T[n] = \left[e[n-1] - y[n-1] \;\vdots\; u[n-1] \right] \\ \theta^T = \left[a \;\vdots\; b \right] \end{cases}$$

* MCMMP se poate aplica dacă se poate măsura separat zgomotul alb. De asemenea, dacă se poate estima zgomotul alb.

* Vom considera cazul în care zgomotul alb este estimat printr-o metodă oarecare și vom nota prin $\{\hat{e}[n]\}_{n=\overline{1,N}}$ valorile sale estimate.

❺ Exerciții rezolvate

Soluție (Exercițiul 3.3)

• Estimația CMMP:

$$\hat{\theta}_N = \underbrace{\left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\varphi[n]\varphi^T[n]\right]^{-1}}_{R_N^{-1}}\underbrace{\left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\varphi[n]y[n]\right]}_{r_N^{-1}}$$

• Deoarece

$$r_{ey}[k] = E\{e[n]y[n-k]\} = E\left\{e[n]\left(\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u[n-k] + e[n-k]\right)\right\} =$$

$$= \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}r_{eu}[k] + \lambda^2\delta_0[k], \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

ieșirea este practic necorelată cu zgomotul alb dacă intrarea este necorelată cu zgomotul alb.

• Cu notațiile din $\boxed{\text{Ex } 3.1}$, se pot exprima R_N și r_N astfel:

$$R_N = \begin{bmatrix} r_{\hat{e}y}^{N-1}[0] & + r_{\hat{e}u}^{N-1}[0] - r_{yu}^{N-1}[0] \\ \hline + r_{\hat{e}u}^{N-1}[0] - r_{yu}^{N-1}[0] & r_u^{N-1}[0] \end{bmatrix}; \quad r_N = \begin{bmatrix} r_{\hat{e}y}^{N-1}[-1] - r_y^{N-1}[1] \\ \hline r_{yu}^{N-1}[1] \end{bmatrix}$$

❺ Exerciții rezolvate

Soluție (Exercițiul 3.3)

- Rezultă:

$$\Delta_N = r^{N-1}_{\hat{e}-y}[0]\, r^{N-1}_{u}[0] - \left(r^{N-1}_{\hat{e}u}[0] - r^{N-1}_{yu}[0]\right)^2$$

$$\hat{a}_N = \frac{r^{N-1}_{u}[0]\left(r^{N-1}_{y\hat{e}}[1] - r^{N-1}_{y}[1]\right) + r^{N-1}_{yu}[1]\left(r^{N-1}_{yu}[0] - r^{N-1}_{\hat{e}u}[0]\right)}{\Delta_N} =$$

$$= \frac{r^{N-1}_{yu}[0]\, r^{N-1}_{yu}[1] - r^{N-1}_{u}[0]\, r^{N-1}_{y}[1] + r^{N-1}_{u}[0]\, r^{N-1}_{y\hat{e}}[1] - r^{N-1}_{yu}[1]\, r^{N-1}_{\hat{e}u}[0]}{\Delta_N}$$

$$\hat{b}_N = \frac{\left(r^{N-1}_{yu}[0] - r^{N-1}_{\hat{e}u}[0]\right)\left(r^{N-1}_{y\hat{e}}[1] - r^{N-1}_{y}[1]\right) + r^{N-1}_{\hat{e}-y}[0]\, r^{N-1}_{yu}[1]}{\Delta_N} =$$

$$= \frac{r^{N-1}_{\hat{e}-y}[0]\, r^{N-1}_{yu}[1] - r^{N-1}_{y}[1]\, r^{N-1}_{yu}[0] + r^{N-1}_{yu}[0]\, r^{N-1}_{y\hat{e}}[1] - r^{N-1}_{\hat{e}u}[0]\, r^{N-1}_{y\hat{e}}[1] + r^{N-1}_{\hat{e}u}[0]\, r^{N-1}_{y}[1]}{\Delta_N}$$

Soluție (Exercițiul 3.3)

- Limite pt. $N\to\infty$:

$$a_N \to \frac{r_{yu}[0]r_{yu}[1]-r_u[0]r_y[1]+r_u[0]r_{ye}[1]-r_{yu}[1]r_{eu}[0]}{r_{e-y}[0]r_u[0]-(r_{eu}[0]-r_{yu}[0])^2}$$

$$b_N \to \frac{r_{e-y}[0]r_{yu}[1]-r_y[1]r_{yu}[0]+r_{yu}[0]r_{ye}[1]-r_{eu}[0]r_{ye}[1]+r_{eu}[0]r_y[1]}{r_{e-y}[0]r_u[0]-(r_{eu}[0]-r_{yu}[0])^2}$$

- Evaluări auxiliare:

$$r_{ye}[k] = E\{y[n]e[n-k]\} = E\left\{\left(\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u[n]+e[n]\right)e[n-k]\right\} =$$

$$= \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}r_{ue}[k] + \lambda^2\delta_0[k], \quad \forall k\in\mathbb{Z}$$

$$\Downarrow$$

$$r_{ye}[1] = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}r_{ue}[1]$$

❺ Exerciții rezolvate

Soluție (Exercițiul 3.3)

$$r_{e-y}[0] = E\{(e[n]-y[n])^2\} = \lambda^2\delta_0[0] - 2\, r_{ye}[0] + r_y[0] =$$

$$= r_y[0] - \lambda^2 - 2\,\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}\, r_{ue}[0]$$

$$r_y[k] = E\{y[n]\,y[n-k]\} = E\left\{\left(\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u[n]+e[n]\right)\left(\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u[n-k]+e[n-k]\right)\right\} =$$

$$= \lambda^2\delta_0[k] + \dots$$ (expresie complexă în cazul general)

$$r_{yu}[k] = E\{y[n]\,u[n-k]\} = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}\, r_u[k] + r_{eu}[k], \quad \forall k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow r_{yu}[0/1] = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}\, r_u[0/1] + r_{eu}[0/1]$$

- Limite teoretice:

$$\theta = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \left[E\{\varphi[n]\varphi^T[n]\}\right]^{-1}\left[E\{\varphi[n]\,y[n]\}\right] -$$

$$-\left[E\{\varphi[n]\varphi^T[n]\}\right]^{-1}\left[E\{\varphi[n]\,e[n]\}\right]$$

$$E\{\varphi[n]\varphi^T[n]\} = \begin{bmatrix} r_{e-y}[0] & r_{eu}[0]-r_{yu}[0] \\ r_{eu}[0]-r_{yu}[0] & r_u[0] \end{bmatrix}$$

$$E\{\varphi[n]\,y[n]\} = \begin{bmatrix} r_{ye}[1]-r_y[1] \\ r_{yu}[1] \end{bmatrix}$$