Sumar

✓ **Bibliografie**

✓ ⓿ Organizarea temelor de laborator

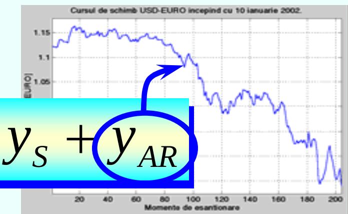
✓ ⑧ Modelarea şi predicţia seriilor de timp

- ✓ ⑧.① Estimarea modelului polinomial al tendinţei
- ✓ ⑧.② Estimarea componentei sezoniere
- ☞ ❽.❸ Estimarea componentei nedeterministe (aleatoare)
- ❽.❹ Predicţia seriei de timp

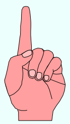
❽ Modelarea şi predicţia seriilor de timp

❽.❸ Estimarea componentei aleatoare

Componentă aleatoare → Model nedeterminist asociat perturbaţiilor care corup seria de timp.



$$y_{\mathcal{M}} \equiv y_T + y_S + y_{AR}$$



În exprimarea modelului de identificare asociat, maniera de eşantionare a datelor nu este esenţială.

renotare

$$v[n] \leftarrow v(t_n) \quad \forall n \in \overline{1,N}$$

(pentru uşurinţa exprimării modelului)

Clasa ARMAX

AR[na] ➔ Auto-Regresiv

$$y_{AR} \equiv v - e$$

☝ Valorile zgomotului alb sunt de asemenea necunoscute.

zgomot alb

$$\begin{cases} A(q^{-1})y[n] = e[n] \\ E\{e[n]e[m]\} = \lambda^2\delta_0[n-m] \end{cases} \quad \forall n,m \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} v[n] + a_1 v[n-1] + \cdots + a_{na} v[n-\boxed{na}] = e[n] \\ E\{e[n]e[m]\} = \lambda^2\delta_0[n-m] \end{cases} \quad \forall n,m \in \mathbb{N}$$

dispersie (necunoscută)

parametri (necunoscuţi)

ordinul modelului (necunoscut)

- Utilizat în special în predicţia optimală a datelor, fiind un model de zgomot şi nu de date utile.

Cum poate fi determinat modelul?

Folosind Metoda Celor Mai Mici Pătrate (MCMMP).

domeniul de stabilitate

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_N = \arg\min_{\boldsymbol{\theta}\in\mathcal{S}} \mathcal{V}_N(\boldsymbol{\theta})$$

$$\mathcal{V}_N(\boldsymbol{\theta}) \overset{def}{=} \sum_{n=1}^{N}\left(v[n] - y_{AR}[n]\right)^2 \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in \mathcal{S}$$

Curs IS ➔

❽ Modelarea şi predicţia seriilor de timp

❽.❸ Estimarea componentei aleatoare

MCMMP

Estimaţie consistentă

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,na} = \mathbf{R}_{N,na}^{-1}\,\mathbf{r}_{N,na}$$

vector de covarianţe

$$\mathbf{r}_{N,na} \overset{def}{=} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\varphi}_{na}[n]v[n] = \left[-\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} v[n]v[n-i] \right]_{i\in\overline{1,na}}$$

matrice ~Toeplitz simetrică (echilibrată numeric)

$$\mathbf{R}_{N,na} \overset{def}{=} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\varphi}_{na}[n]\boldsymbol{\varphi}_{na}^{T}[n] = \left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} v[n-i]v[n-j] \right]_{i,j\in\overline{1,na}}$$

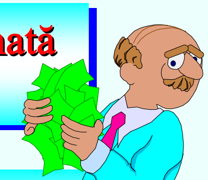
vectorul regresorilor

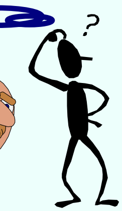
$$\boldsymbol{\varphi}_{na}^{T}[n] \overset{def}{=} \left[-v[n-1] \quad \cdots \quad -v[n-na] \right]$$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{bmatrix} r_v^N[0] & r_v^N[1] & r_v^N[2] & \cdots & r_v^N[na-1] \\ r_v^N[1] & r_v^N[0] & r_v^N[1] & \cdots & r_v^N[na-2] \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ r_v^N[na-2] & \cdots & r_v^N[1] & r_v^N[0] & r_v^N[1] \\ r_v^N[na-1] & \cdots & r_v^N[2] & r_v^N[1] & r_v^N[0] \end{bmatrix}$$

Ce importanţă are faptul că matricea este Toeplitz simetrică?





În primul rînd, matricea este **unic determinată de prima sa linie ori coloană**.

matrice Toeplitz simetrică (mai precisă)

☝ Diagonalele sunt constante acum.

În al doilea rînd, matricea poate fi inversată **mai eficient** decît în cazul general (cînd se foloseşte **procedura lui Gauss**).

$$r_v^N[k] \overset{def}{=} \frac{1}{N-k}\sum_{n=k+1}^{N} v[n]v[n-k]$$

$\forall\, k \in \mathbb{N}$

auto-covarianţă estimată

Algoritmul Levinson-Durbin

1/Precizie

$$\hat{\lambda}_{N,na}^{2} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(v[n] - \boldsymbol{\varphi}_{na}^{T}[n]\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,na} \right)^{2}$$

❽ Modelarea şi predicţia seriilor de timp

❽.❸ Estimarea componentei aleatoare

Algoritmul Levinson-Durbin (ALD)

Procedură recursivă de determinare a parametrilor modelului AR[na] cu ajutorul modelului AR[na-1].

Date de intrare

$\mathcal{Z}_N = \{v[n]\}_{n\in\overline{1,N}}$ (zgomotul colorat rezidual)

na (ordinul modelului auto-regresiv)

Iniţializare

☝ Pentru uşurinţă, se renunţă la indicele N din notaţia parametrilor.

① Se evaluează valorile secvenţei de auto-covarianţă a zgomotului: $r_v^N[0]$ $r_v^N[1]$ $\cdots$ $r_v^N[na]$

② Se estimează parametrii modelului de ordin 1: $\hat{a}_{1,1} = -\dfrac{r_v^N[1]}{r_v^N[0]} \overset{def}{=} \hat{\boldsymbol{\theta}}_1$ $\quad \hat{\lambda}_1^2 = r_v^N[0]\left(1-\hat{a}_{1,1}^2\right)$

Buclă iterativă

Pentru $p\in\overline{2,na}$

Modelul este stabil. $|k_p|\le 1$

① Se evaluează cîştigul: $k_p = -\dfrac{1}{\hat{\lambda}_{p-1}^2}\left(r_v^N[p]+\hat{a}_{p-1,1}\, r_v^N[p-1]+\cdots+\hat{a}_{p-1,p-1}\, r_v^N[1]\right)$

② Se reactualizează vectorul curent al parametrilor: $\hat{\boldsymbol{\theta}}_p = \begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{\theta}}_{p-1}\\ 0\end{bmatrix} + k_p \begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{\theta}}_{p-1}^R\\ 1\end{bmatrix}$

$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{p-1}^R = \begin{bmatrix}\hat{a}_{p-1,p-1}\\ \hat{a}_{p-1,p-2}\\ \vdots\\ \hat{a}_{p-1,1}\end{bmatrix}$ vector răsturnat

③ Se reactualizează dispersia zgomotului alb: $\hat{\lambda}_p^2 = \hat{\lambda}_{p-1}^2\left[1-k_p^2\right]$

Date de ieşire

$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{na}$ ⇨ Parametrii estimaţi ai modelului AR[na].

$\hat{\lambda}_{na}^2$ ⇨ Dispersia estimată a zgomotului alb.

❽ Modelarea şi predicţia seriilor de timp

❽.❸ Estimarea componentei aleatoare

Cum se poate determina ordinul modelului?

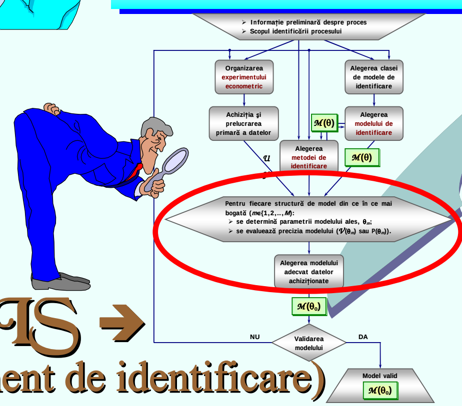
Se apelează la strategia generală prezentată în cursul de IS.

Pentru fiecare structură de model din ce în ce mai bogată ($m \in \{1,2,\ldots,M\}$):
- se determină parametrii modelului ales, θ_m;
- se evaluează precizia modelului ($\mathcal{V}(\theta_m)$).

Alegerea modelului adecvat datelor achiziţionate

Ordinul maxim al modelului.

$$Na = 100$$



Curs IS ➔
(experiment de identificare)

Teste (criterii) de adecvanţă

AR[na]

Pentru fiecare indice structural:

Valorile modelului se estimează recursiv, aproximînd zgomotul alb.

$$y_{AR}[n] = -\hat{a}_{na,1} v[n-1] - \cdots - \hat{a}_{na,na} v[n-na]$$

Primii paşi.

$$y_{AR}[1] = 0$$

$$y_{AR}[2] = -\hat{a}_{na,1} v[1]$$

$$y_{AR}[3] = -\hat{a}_{na,1} v[2] - \hat{a}_{na,2} v[1]$$

$\vdots$

Criteriul utilizat în alegerea structurii modelului componentei aleatoare

Calitatea predicţiei

$$\mathrm{PQ}_K[p,P,na]$$

Definit în final, pentru toate cele 3 modele componente.

Care este tema de laborator?

Implementarea algoritmului de estimare a parametrilor modelului nedeterminist, bazat pe ALD.

❽ Modelarea şi predicţia seriilor de timp

❽.❸ Estimarea componentei aleatoare

☞ Paşii principali ai algoritmului de modelare

Date de intrare
- $\mathcal{Z}$ (zgomotul colorat)
- na (ordinul modelului AR; implicit: $na = 1$)

Iniţializare Determinarea lungimii zgomotului colorat. ⇨ N

Se estimează vectorul parametrilor necunoscuţi şi dispersia zgomotului alb rezidual, prin implementarea ALD. $\hat{\theta}^{AR}_{N,na}$ $\hat{\lambda}^{2}_{N,na}$

Se evaluează componenta aleatoare pe orizontul de măsură (recursiv). y_{AR}

Se estimează zgomotul alb rezidual. $\hat{e}(t_n) = v(t_n) - y_{AR}(t_n)$ $\forall n \in \overline{1,N}$

Date de ieşire $\hat{e}$ $\hat{\lambda}^{2}_{N,na}$ y_{AR} $\hat{\theta}^{AR}_{N,na}$

Rutină ce trebuie proiectată

```
>> [e,lambda2,yAR,theta_AR] = stochastic(v,na);
```

- e — vectorul zgomotului alb rezidual
- lambda2 — dispersia zgomotului alb rezidual
- yAR — vectorul modelului AR
- theta_AR — vectorul parametrilor modelului AR
- v — vectorul de date care conţine zgomotul colorat
- na — ordinul modelului AR

❽ Modelarea şi predicţia seriilor de timp

❽.❸ Estimarea componentei aleatoare

Programul de test al rutinei `stochastic` — **ISLAB_8C**

☞ **Paşi principali**

- Se introduce numărul fişierului care conţine zgomotul colorat. `nts`
- Se încarcă zgomotul colorat în spaţiul de lucru. • cu ajutorul funcţei: `eval`
- Se apelează rutina `stochastic`.
- Se trasează graficele zgomotului colorat şi al componentei aleatoare (în aceeaşi fereastră).
- Se trasează graficul zgomotului alb rezidual (cu precizarea dispersiei estimate pe grafic).

☝ Graficele trebuie trasate cu axele corect scalate şi marcate, cu titluri sugestive şi legendă de discriminare (dacă este cazul).

Mini-programe MATLAB.

STnts_v.M

nts∈{1,2,3,...,15}