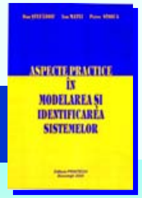
❺ Exerciții rezolvate

Exercițiul 4.1



Arătați că între criteriile FPE şi AIC există următoarea corelație, pentru $N >> n\theta$:

$$AIC_N[n\theta] \cong \ln\left(FPE_N[n\theta]\right)$$

$\forall n\theta \in \mathbb{N}^*$

Soluție

$$AIC_N[n\theta] \triangleq \ln\left(\hat{\lambda}_N^2[n\theta]\right) + \frac{2n\theta}{N} \quad \Bigg| \quad FPE_N[n\theta] \triangleq \hat{\lambda}_N^2[n\theta]\,\frac{N+n\theta}{N-n\theta}$$

$$\ln\left(FPE_N[n\theta]\right) = \ln\left(\hat{\lambda}_N^2[n\theta]\right) + \ln\left(\frac{N+n\theta}{N-n\theta}\right) =$$

Dezvoltare TAYLOR de ordin I.

$$= \ln\left(\hat{\lambda}_N^2[n\theta]\right) + \ln\left(1 + \underbrace{\frac{2n\theta}{N-n\theta}}_{<<1}\right) \cong$$

$$\cong \ln\left(\hat{\lambda}_N^2[n\theta]\right) + \frac{2n\theta}{N-n\theta} \underset{N>>n\theta}{\cong} AIC_N[n\theta].$$

❺ Exerciții rezolvate

Exercițiul 4.2

Fie procesul stocastic descris de următoarea ecuație (de tip AR[1]):

$$\mathcal{P}: \quad y[n] + a y[n-1] = v[n] \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

unde v este un zgomot alb de medie nulă şi dispersie λ^2.
Procesul furnizează numai date de ieşire pe un orizont finit de măsură (de durată N).

a. **Să se estimeze parametrii necunoscuți (coeficienți şi dispersie de zgomot) pentru următoarele modele, folosind MCMMP şi setul de date măsurate:**

$$\mathcal{M}_1: \quad y[n] + a_{11} y[n-1] = \varepsilon[n, a_{11}]$$

$$\mathcal{M}_2: \quad y[n] + a_{21} y[n-1] + a_{22} y[n-1] = \varepsilon[n, a_{21}, a_{22}]$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*$$

În aceste ecuații, ε este eroarea dintre model şi proces, cu proprietatea: $\varepsilon[n,a]=v[n]$, respectiv $\varepsilon[n,a,0]=v[n]$.

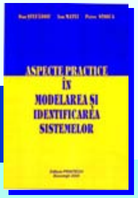
b. **Să se teseteze consistența estimațiilor obținute la punctul precedent (pentru coeficienți şi dispersii de zgomot).**

c. **Potrivit Teoremei fundamentale a MCMMP, dispersia erorii de estimație a coeficienților necunoscuți este dată în general de:**

$$E\left\{ \left(\hat{\theta}_N - \theta^*\right)\left(\hat{\theta}_N - \theta^*\right)^T \right\} = \lambda^2 \left[\sum_{n=1}^{N} \varphi[n]\varphi^T[n] \right]^{-1}$$

❺ Exerciții rezolvate

Exercițiul 4.2 (continuare)



Folosind această proprietate, să se evalueze dispersiile erorilor de estimare ale parametrului a din cele 2 modele, notate cu $\sigma_N^2[1]$, respectiv $\sigma_N^2[2]$.

(Pentru modelul al doilea, vectorul parametrilor adevărați este $\theta^*=[a\ 0]^T$.)

Arătați că: $\lim\limits_{N\to\infty}(N\sigma_N^2[1]) \le \lim\limits_{N\to\infty}(N\sigma_N^2[2])$. **Ce semnificație are această inegalitate?**

Soluție

$$\mathcal{P}:\ y[n] + a\,y[n-1] = v[n] \quad , \quad v = z.a(0,\lambda^2)$$

a)
$$\begin{cases} \mathcal{M}_1:\ y[n] + a_{11}y[n-1] = \varepsilon[n,a_{11}] \\ \mathcal{M}_2:\ y[n] + a_{21}y[n-1] + a_{22}y[n-1] = \varepsilon[n,a_{21},a_{22}] \end{cases} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$$

• MCMMP & $\mathcal{M}_1$

$$\theta = a_{11} \quad ; \quad \varphi[n] = -y[n-1]$$

$$\hat{\theta} = \hat{a}_{11} = \left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\varphi[n]\varphi^T[n]\right)^{-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\varphi[n]y[n]\right) \cong$$

$$\cong \left(\frac{1}{N-1}\sum_{n=2}^{N}y^2[n-1]\right)^{-1}\left(\frac{-1}{N-1}\sum_{n=2}^{N}y[n]y[n-1]\right) =$$

$$= -\frac{r_y^{N-1}[1]}{r_y^{N-1}[0]} \quad \text{(cu notații naturale)}$$

Soluție (Exercițiul 4.2)

$$\hat{\lambda}^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(y[n] - \varphi^T[n]\hat{\theta}\right)^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(y[n] - \frac{r_y^{N-1}[1]}{r_y^{N-1}[0]}\,y[n-1]\right)^2 =$$

(cu $y[0]=0$)

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} y^2[n] + \left(\frac{r_y^{N-1}[1]}{r_y^{N-1}[0]}\right)^2 \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} y^2[n-1] - \frac{2 r_y^{N-1}[1]}{r_y^{N-1}[0]}\,\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} y[n] \times y[n-1] =$$

$$= r_y^N[0] + \frac{N-1}{N}\,\frac{\left(r_y^{N-1}[1]\right)^2}{r_y^{N-1}[0]} - 2\,\frac{N-1}{N}\,\frac{\left(r_y^{N-1}[1]\right)^2}{r_y^{N-1}[0]} =$$

$$= r_y^N[0] - \frac{N-1}{N}\left(r_y^{N-1}[1]\right)^2 / r_y^{N-1}[0]$$

MCMMP & $\mathcal{M}_2$

$$\theta^T = [a_{21} \quad a_{22}]$$

$$\varphi^T[n] = [-y[n-1] \quad -y[n-2]]$$

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix}\hat{a}_{21}\\ \hat{a}_{22}\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} r_y^N[0] & r_y^N[1] \\ r_y^N[1] & r_y^N[0]\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} r_y^N[1] \\ r_y^N[2]\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{r_y^N[1]\,r_y^N[2] - r_y^N[0]\,r_y^N[1]}{\left(r_y^N[0]\right)^2 - \left(r_y^N[1]\right)^2} \\[2ex] \dfrac{\left(r_y^N[1]\right)^2 - r_y^N[0]\,r_y^N[2]}{\left(r_y^N[0]\right)^2 - \left(r_y^N[1]\right)^2} \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \hat{a}_{21} = \dfrac{r_y^N[1]\left(r_y^N[2] - r_y^N[0]\right)}{\left(r_y^N[0]\right)^2 - \left(r_y^N[1]\right)^2} \\[2ex] \hat{a}_{22} = \dfrac{\left(r_y^N[1]\right)^2 - r_y^N[0]\,r_y^N[2]}{\left(r_y^N[0]\right)^2 - \left(r_y^N[1]\right)^2} \end{cases}$$

$$\hat{\lambda}^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(y[n] - \varphi^T[n]\hat{\theta}\right)^2$$

Soluție (Exercițiul 4.2)

b) $\mathcal{M}_1$: $$a_{11}^* = -\frac{r_y[1]}{r_y[0]} + \frac{r_{vy}[1]}{r_y[0]} = -\frac{r_y[1]}{r_y[0]} = a$$

$$\lim_{N\to\infty} \hat{a}_{11} = -\frac{r_y[1]}{r_y[0]} = a$$

($r_{vy}[1] = 0$ deoarece $y[n-1]$ depinde cel mult de $v[n-1]$, nu și de $v[n]$)

$$(\lambda^*)^2 = E\{v^2[n]\} = E\{(y[n] + a_{11}^* y[n-1])^2\} =$$

$$= r_y[0] + (a_{11}^*)^2 r_y[0] + 2a_{11}^* r_y[1] =$$

$$= \left(1 + \frac{r_y^2[1]}{r_y^2[0]}\right) r_y[0] - \frac{2 r_y^2[1]}{r_y[0]} =$$

$$= \frac{r_y^2[0] - r_y^2[1]}{r_y[0]}$$

$$\lim_{N\to\infty} \hat{\lambda}^2 = r_y[0] - \underbrace{\cancel{\left(\frac{N-1}{N}\right)}}_{1} \frac{r_y^2[1]}{r_y[0]} = (\lambda^*)^2$$

– Ambele estimații sunt consistente.