

Prelucrarea semnalelor

Capitolul 4: Proiectarea filtrelor

Bogdan Dumitrescu

Facultatea de Automatică și Calculatoare
Universitatea Politehnica București

Cuprins

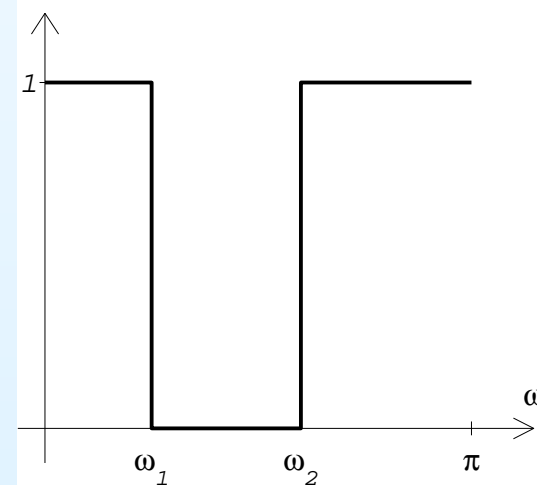
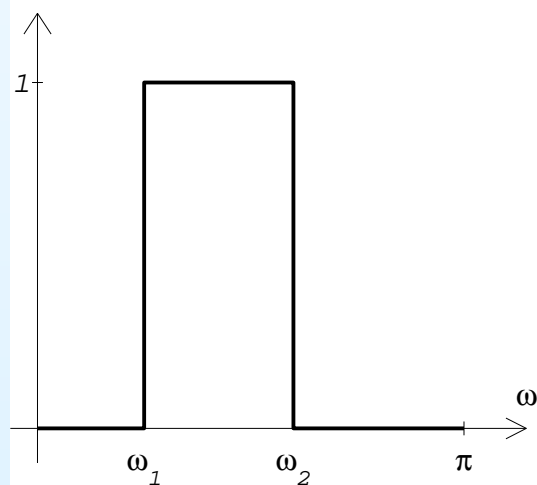
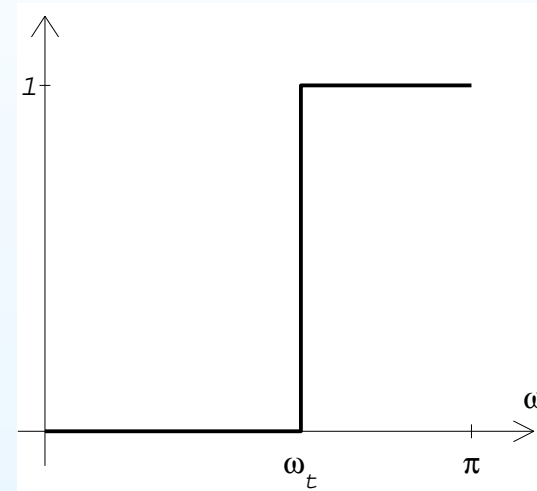
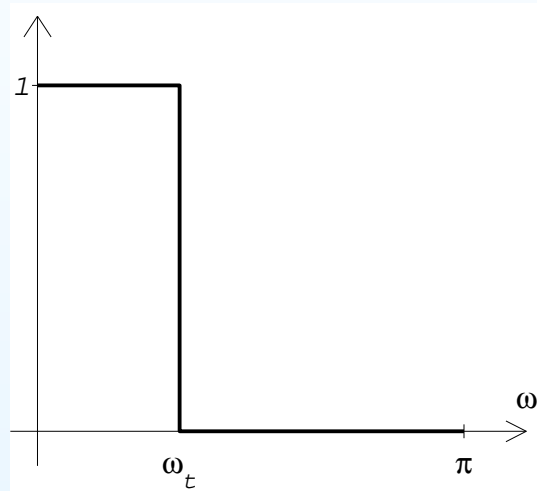
- Descrierea problemei de proiectare
- Metoda ferestrei
- Proiectarea filtrelor FIR în sens CMMP
- Proiectarea filtrelor FIR în sens Chebyshev (minimax)
- Proiectarea filtrelor IIR, metode de transformare

Obiective generale ale proiectării

- Scopul tipic al unui filtru digital este transformarea în *frecvență* a semnalului de intrare
- Un interval de frecvențe $[\omega_1, \omega_2]$ se numește *bandă de trecere* dacă semnalele sinusoidale cu aceste frecvențe sunt aproape nealterate de filtru ($|H(e^{j\omega})| \approx 1, \forall \omega \in [\omega_1, \omega_2]$)
- *Bandă de oprire (de tăiere, de stop)*: semnalele cu frecvențele respective sunt tăiate sau mult atenuate de filtru ($|H(e^{j\omega})| \approx 0, \forall \omega \in [\omega_1, \omega_2]$)
- Faza filtrului poate fi sau nu considerată în proiectare; de obicei, se preferă filtrele cu fază liniară

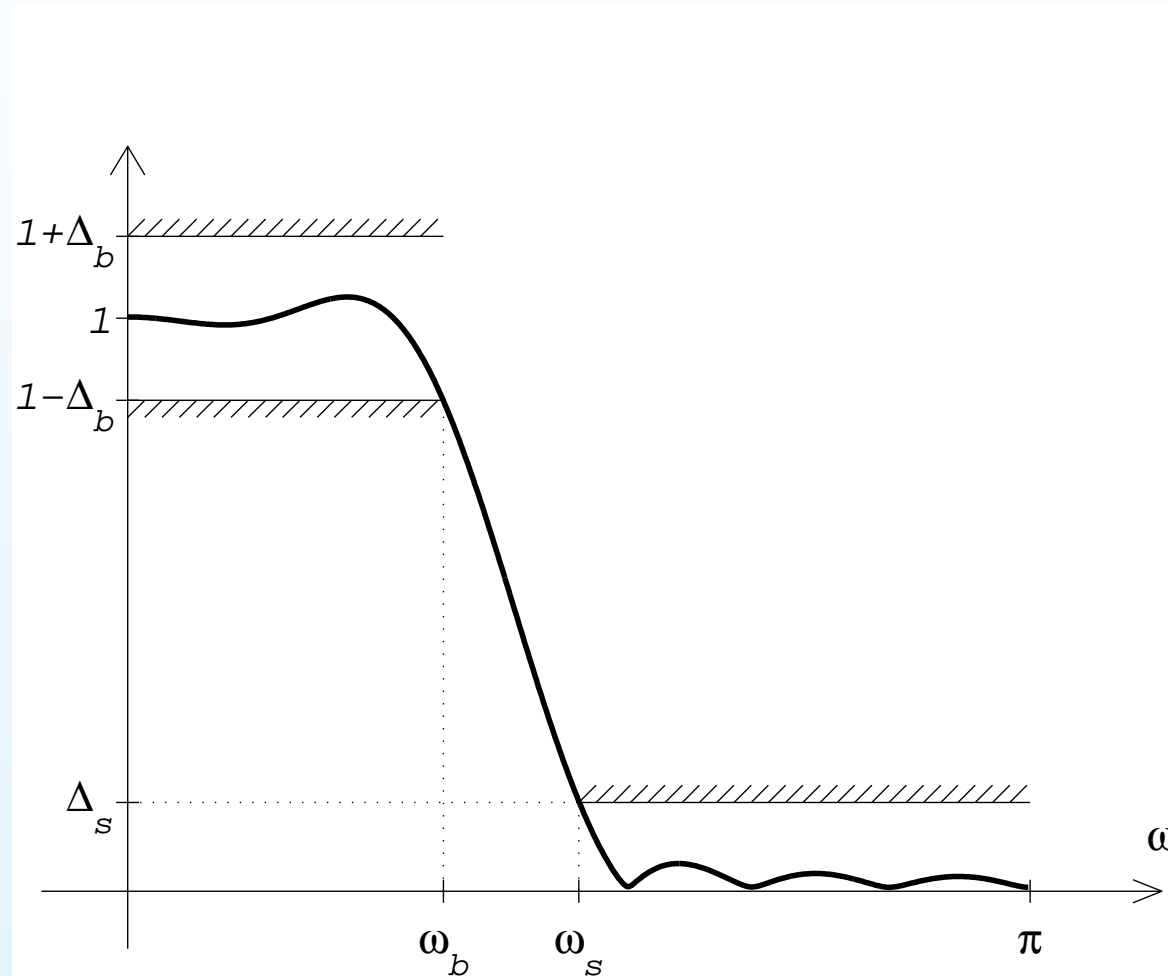
Filtre ideale

- Filtrele ideale sunt necauzale și au suport infinit
- Tipuri: trece-jos, trece-sus, trece-bandă, oprește-bandă



Răspuns cu toleranțe fixate (1)

- Se impun erori maxime în benzile de trecere și oprire



Răspuns cu toleranțe fixate (2)

- Datele de proiectare sunt (pentru filtru trece-jos):
 - Frecvențele ω_b , ω_s care definesc benzile de trecere și de oprire; există și o bandă de tranziție (ω_b, ω_s) , în care valoarea răspunsului este indiferentă
 - Toleranțele Δ_b în banda de trecere $[0, \omega_b]$ și Δ_s în banda de oprire $[\omega_s, \pi]$
- Ordinul filtrului poate fi precizat de la început sau se poate încerca găsirea unei soluții de ordin cât mai mic
- Dacă ordinul e fixat, este posibil să nu existe soluție
- Dispunând de o metodă de proiectare pentru ordin fixat (cazul tipic), ordinul minim se găsește prin încercări succesive (bisecție !)

Proiectare prin optimizare

- Se fixează ca obiectiv o caracteristică de frecvență, numită *răspuns dorit*
- Pentru un filtru trece-jos răspunsul dorit poate fi

$$D(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } \omega \in [0, \omega_b] \\ 0, & \text{pentru } \omega \in [\omega_s, \pi] \end{cases}$$

- Căutăm soluția într-o clasă de filtre de ordin M , notată $\mathcal{C}(M)$ (de exemplu, filtre FIR cu fază liniară, cu coeficienți simetrici, deci de tip I sau II)
- Scop: găsirea filtrului al cărui răspuns în frecvență $H(\omega)$ este cel mai apropiat de $D(\omega)$, pe mulțimea de frecvențe $\mathcal{F} = [0, \omega_b] \cup [\omega_s, \pi]$

Problema de optimizare în sens minimax (Chebyshev)

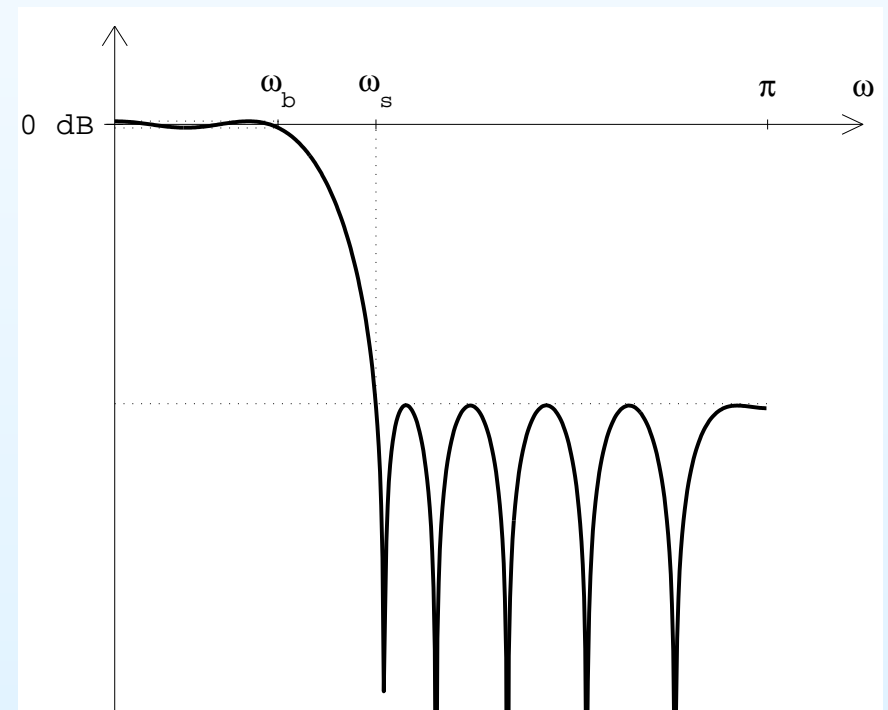
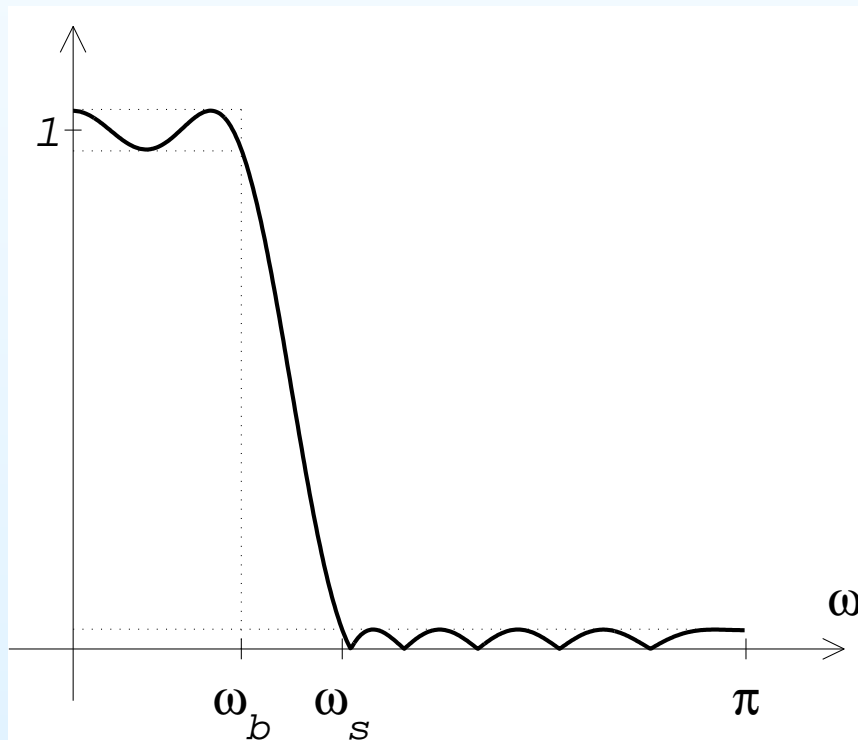
- **F_OPTINF.** Dându-se un răspuns dorit $D(\omega)$ pe o mulțime de frecvențe $\mathcal{F} \subset [0, \pi]$ și o clasă de filtre $\mathcal{C}(M)$, să se găsească filtrul $H(z)$ din clasa $\mathcal{C}(M)$ al cărui răspuns în frecvență $H(\omega)$ este cel mai aproape în amplitudine de $D(\omega)$, în norma infinit, i.e.

$$\min_{H \in \mathcal{C}(M)} \max_{\omega \in \mathcal{F}} |D(\omega) - |H(\omega)||$$

- Se minimizează eroarea maximă față de răspunsul dorit

Răspuns specific al unei soluții minimax

- Eroarea $|D(\omega) - |H(\omega)||$ maximă este atinsă pentru mai multe frecvențe
- Ondulațiile răspunsului au înălțimi egale în benzile de trecere și de oprire (filtru "equiripple")



Problema de optimizare în sens CMMP

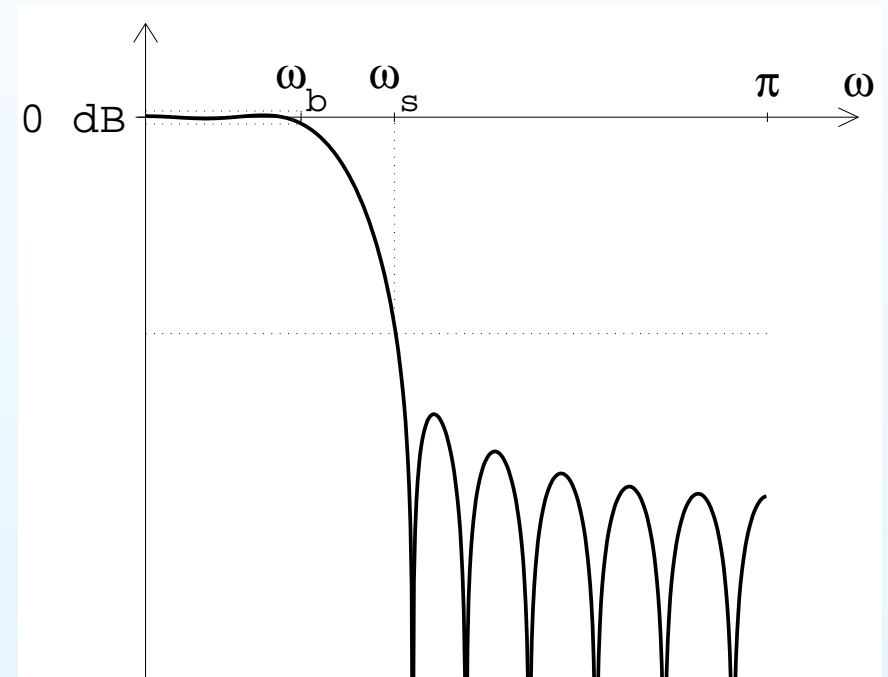
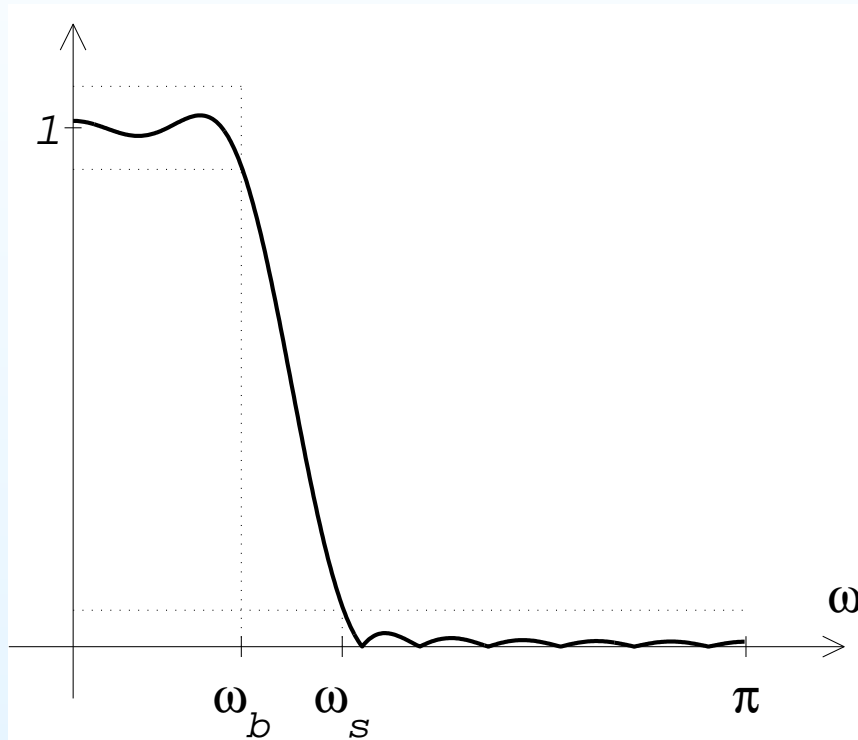
- **F_OPT2.** Dându-se un răspuns dorit $D(\omega)$ pe o mulțime de frecvențe $\mathcal{F} \subset [0, \pi]$ și o clasă de filtre $\mathcal{C}(M)$, să se găsească filtrul $H(z)$ din clasa $\mathcal{C}(M)$ al cărui răspuns în frecvență $H(\omega)$ este cel mai aproape în amplitudine de $D(\omega)$, în norma 2, i.e.

$$\min_{H \in \mathcal{C}(M)} \int_{\omega \in \mathcal{F}} [D(\omega) - |H(\omega)|]^2 d\omega$$

- Se minimizează energia erorii față de răspunsul dorit

Răspuns specific al unei soluții CMMP

- Ondulațiile sunt mai mari în apropierea benzii de tranziție



Alte moduri de formulare a optimizării

- Pentru a avea erori mai mici în anumite zone (de exemplu în banda de oprire), se poate introduce o *pondere* $p(\omega) > 0$, astfel încât problema de optimizare să fie

$$\min_{H \in \mathcal{C}(M)} \int_{\omega \in \mathcal{F}} p(\omega) [D(\omega) - |H(\omega)|]^2 d\omega$$

- În problemele **F_OPT2** și **F_OPTINF** se optimizează doar amplitudinea răspunsului în frecvență al filtrului $H(z)$. Pentru a optimiza întregul răspuns, se alege un răspuns dorit $D_c(\omega)$ complex:

$$\min_{H \in \mathcal{C}(M)} \int_{\omega \in \mathcal{F}} |D_c(\omega) - H(\omega)|^2 d\omega$$

- Utilizare tipică: filtre IIR cu fază cvasi-liniară

Optimizare pe o mulțime discretă de frecvențe

- Pentru simplificarea calculelor, problemele **F_OPT2** și **F_OPTINF** pot fi tratate aproximativ
- Mulțimea continuă de frecvențe \mathcal{F} se înlocuiește cu o grilă discretă de frecvențe $\mathcal{G}_L \subset \mathcal{F}$ având L puncte (în practică, de ordinul sutelor). De obicei frecvențele $\omega_k \in \mathcal{G}_L$ se aleg echidistante.
- **F_OPT2D**. Dându-se un răspuns dorit $D(\omega)$, mulțimea de frecvențe discrete $\mathcal{G}_L = \{\omega_1, \dots, \omega_L\}$ și o clasă de filtre $\mathcal{C}(M)$, să se rezolve

$$\min_{H \in \mathcal{C}(M)} \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L [D(\omega_k) - |H(\omega_k)|]^2$$

Proiectarea filtrelor FIR cu metoda ferestrei

- Metodă foarte simplă, fără optimizare
- Idee: modularea în timp a unui răspuns ideal (cu suport infinit) cu un semnal de tip "fereastră", care are suport finit
- Se proiectează un filtru FIR

$$H(z) = \sum_{n=0}^M h[n]z^{-n}$$

- *Date de proiectare:*
 - ordinul M al filtrului
 - amplitudinea răspunsului ideal în frecvență care trebuie aproximat; de exemplu, pentru un filtru trece-jos, se precizează frecvența ω_t care delimitează benzile de trecere și de oprire

Metoda ferestrei

1. Se ia întârzierea de grup $n_0 = M/2$ și se calculează răspunsul la impuls al filtrului ideal. De exemplu, pentru un filtru trece-jos, răspunsul ideal în frecvență este

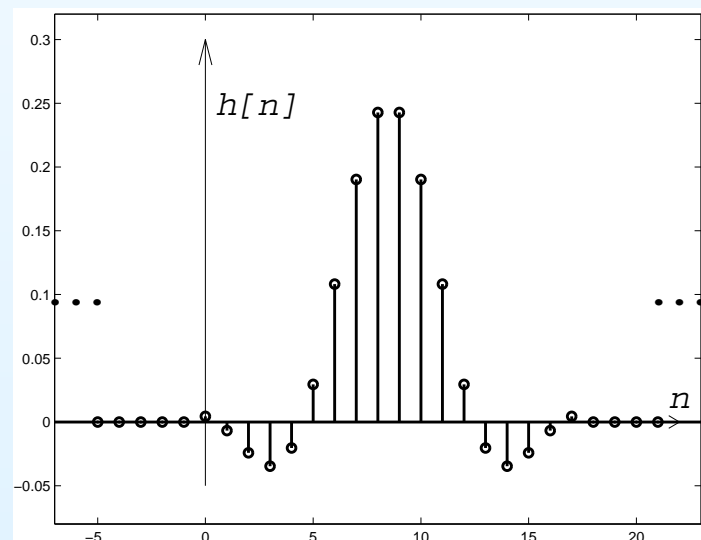
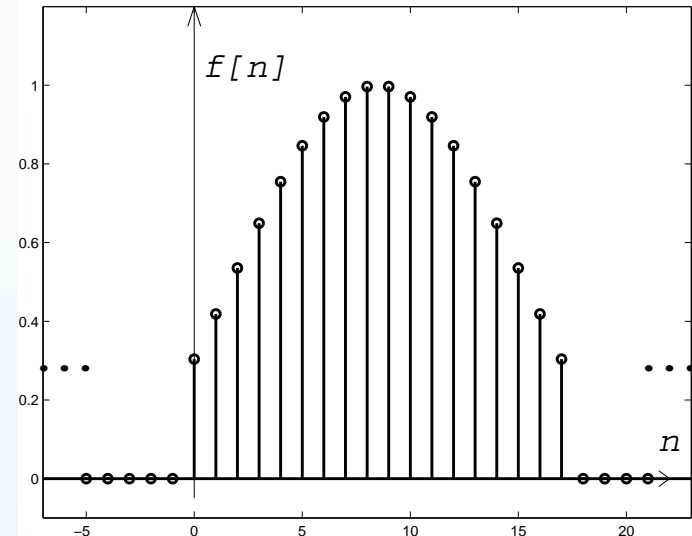
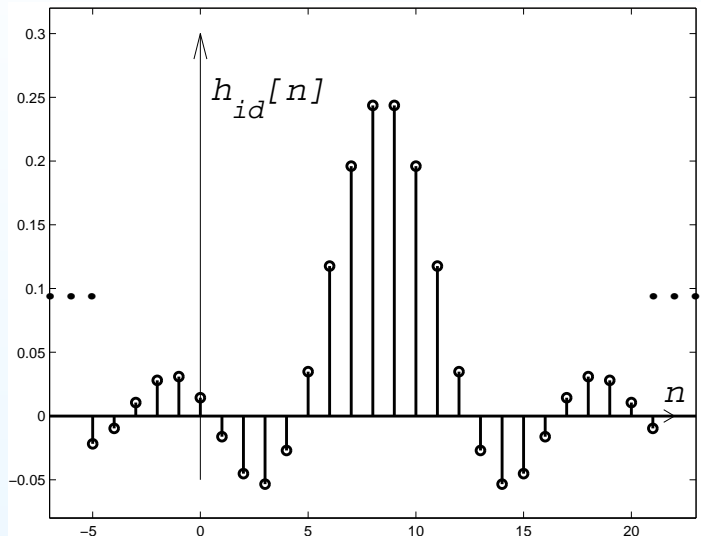
$$H_{id}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega n_0}, & \text{dacă } |\omega| \leq \omega_t \\ 0, & \text{dacă } \omega_t < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

iar răspunsul la impuls este $h_{id}[n] = \frac{\sin \omega_t(n - n_0)}{\pi(n - n_0)}$

2. Se alege o fereastră $f[n]$ cu suport $0 : M$
3. Se calculează coeficienții filtrului FIR modulând în timp răspunsul ideal $h_{id}[n]$ cu fereastra $f[n]$, i.e. prin relația

$$h[n] = h_{id}[n] \cdot f[n], \quad n = 0 : M$$

Exemplu



Rezultate

- După aplicarea algoritmului se trasează răspunsul în frecvență al filtrului FIR obținut și se verifică dacă este convenabil
- Dacă nu este convenabil, se poate mări ordinul M sau se poate alege o altă fereastră $f[n]$
- Răspunsul în frecvență al filtrelor ideale (cu benzi de trecere și de oprire) are fază liniară
- Dacă coeficienții ferestrei $f[n]$ sunt simetrici în raport cu mijlocul $M/2$ al suportului $0 : M$, atunci $H(z)$ rezultă un filtru cu fază liniară de tip I sau II
- Un filtru cu fază neliniară ar rezulta dacă s-ar alege o întârziere $n_0 \neq M/2$

Alegerea ferestrei

- Răspunsul în frecvență al filtrului $H(z)$ poate fi scris în funcție de răspunsurile în frecvență ale filtrului ideal și ferestrei

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{id}(e^{j\theta}) F(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

- $H(e^{j\omega}) = H_{id}(e^{j\omega})$ doar dacă $F(e^{j\omega}) = 2\pi\delta(\omega)$, adică (evident!) $f[n] = 1$
- Răspunsul în frecvență al ferestrei trebuie să fie o aproximație cât mai bună a impulsului unitate
- Această cerință este contradictorie cu suportul finit !!!

Ferestre uzuale (1)

- *Fereastra dreptunghiulară*

$$f_d[n] = \begin{cases} 1, & \text{dacă } 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

- Trunchierea răspunsului ideal $h_{id}[n]$ dă naștere fenomenului Gibbs, deci $|H(e^{j\omega})|$ are oscilații mari în apropierea frecvențelor de tranziție
- Ferestrele mai eficiente au valori mai mici la marginea suportului, pentru a preveni fenomenul Gibbs
- *Fereastra triunghiulară (Bartlett)*

$$f_t[n] = \begin{cases} 2n/M, & \text{dacă } 0 \leq n \leq M/2 \\ 2 - 2n/M, & \text{dacă } M/2 \leq n \leq M \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

Ferestre uzuale (2)

- *Fereastra Hanning:*

$$f_{Hann}[n] = \begin{cases} 0.5 - 0.5 \cos(2\pi \frac{n+1}{M+2}), & \text{dacă } 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

- *Fereastra Hamming:*

$$f_{Hamm}[n] = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos(2\pi n/M), & \text{dacă } 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

- *Fereastra Blackman:*

$$f_B[n] = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos(\frac{2\pi n}{M}) + 0.08 \cos(\frac{4\pi n}{M}), & \text{dacă } 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

Ferestre uzuale (3)

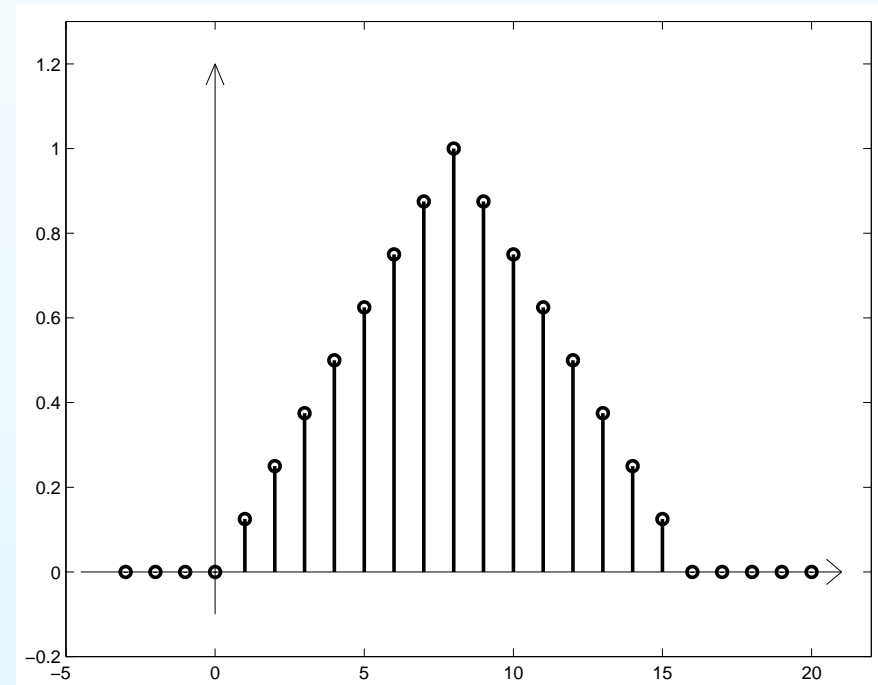
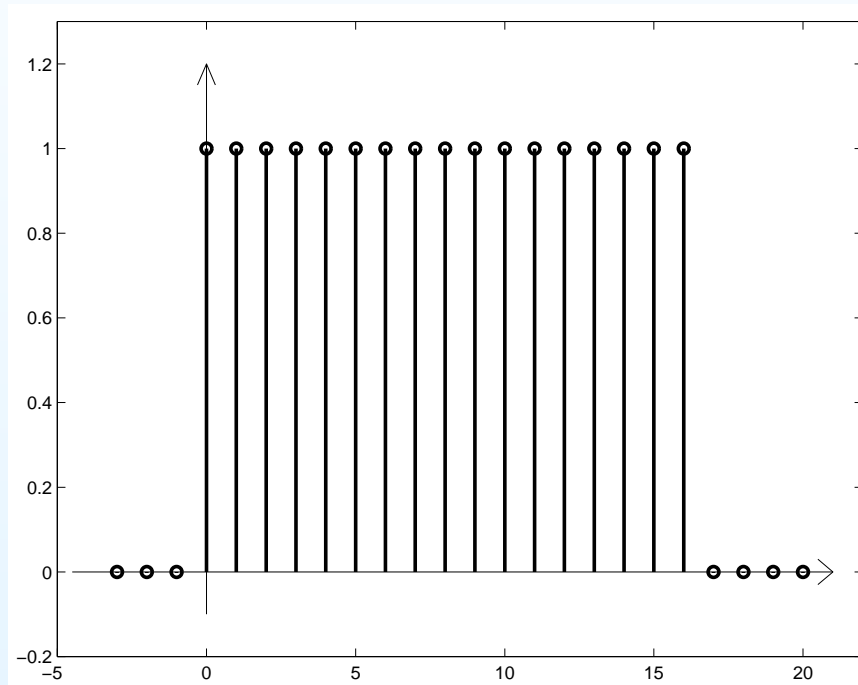
- *Fereastra Kaiser.*

$$f_B[n] = \begin{cases} \frac{I_0(\beta \sqrt{1 - [(n - n_0)/n_0]^2})}{I_0(\beta)}, & \text{dacă } 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

- $I_0(\cdot)$ este funcția Bessel de ordinul zero modificată
- Parametrul β permite varierea proprietăților ferestrei
- Pentru $\beta = 0$ se obține fereastra dreptunghiulară
- Cu cât β este mai mare, cu atât răspunsul în frecvență al ferestrei are atenuare mai mare, dar tranziție mai largă

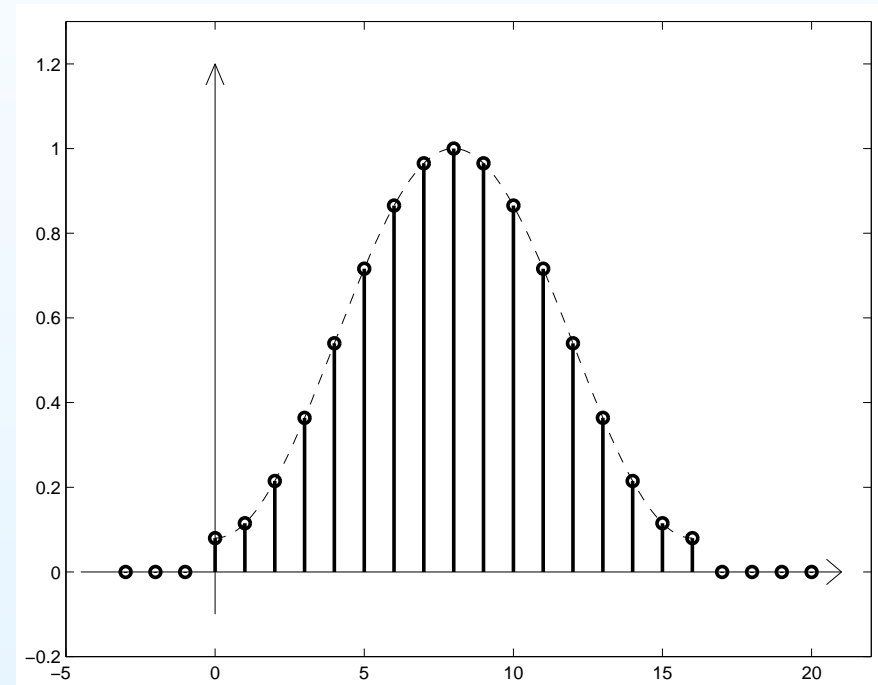
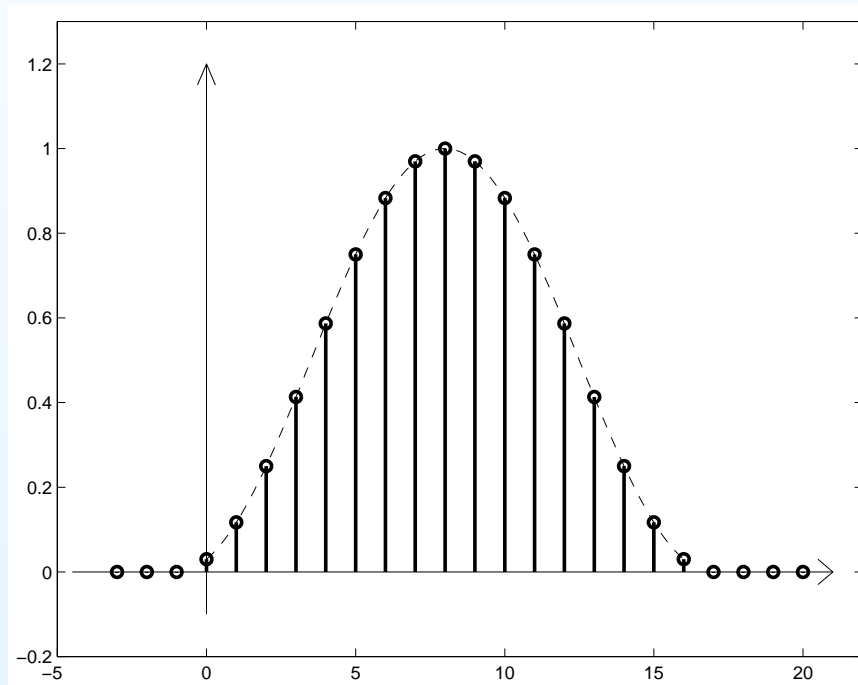
Răspunsuri la impuls ale ferestrelor (1)

- Ferestre dreptunghiulară (stânga), triunghiulară (dreapta)



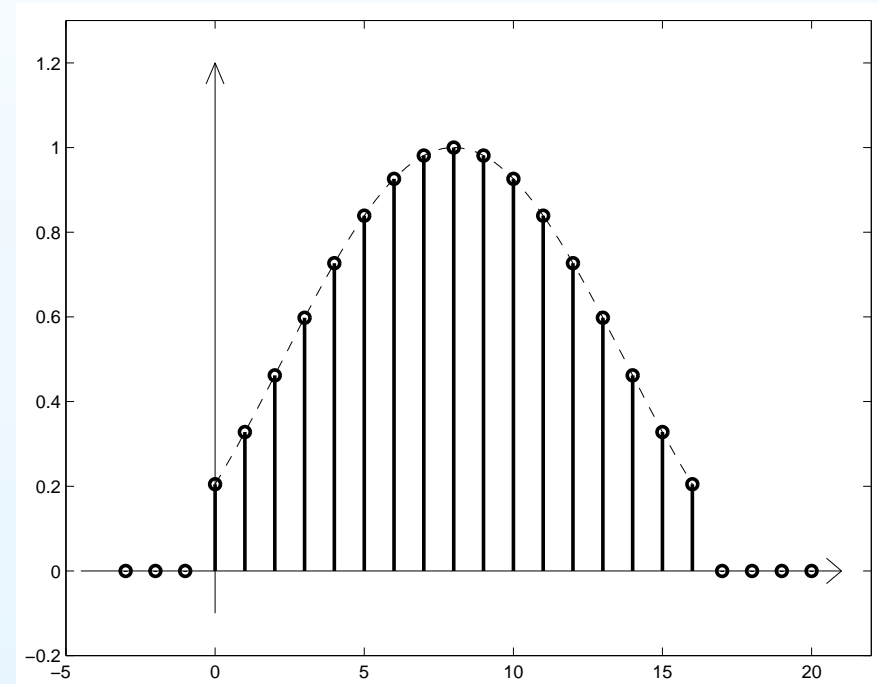
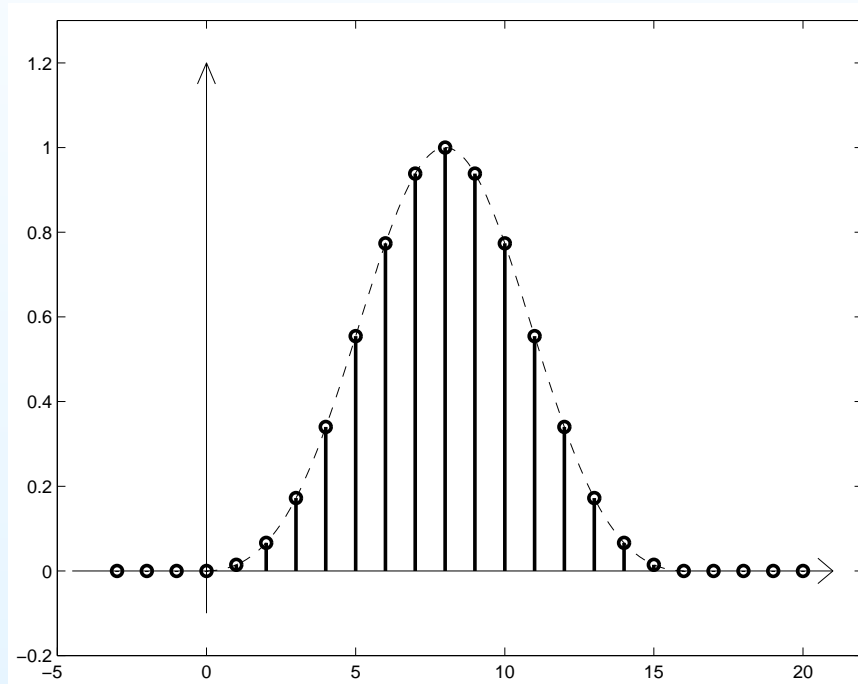
Răspunsuri la impuls ale ferestrelor (2)

- Ferestre Hanning (stânga), Hamming (dreapta)



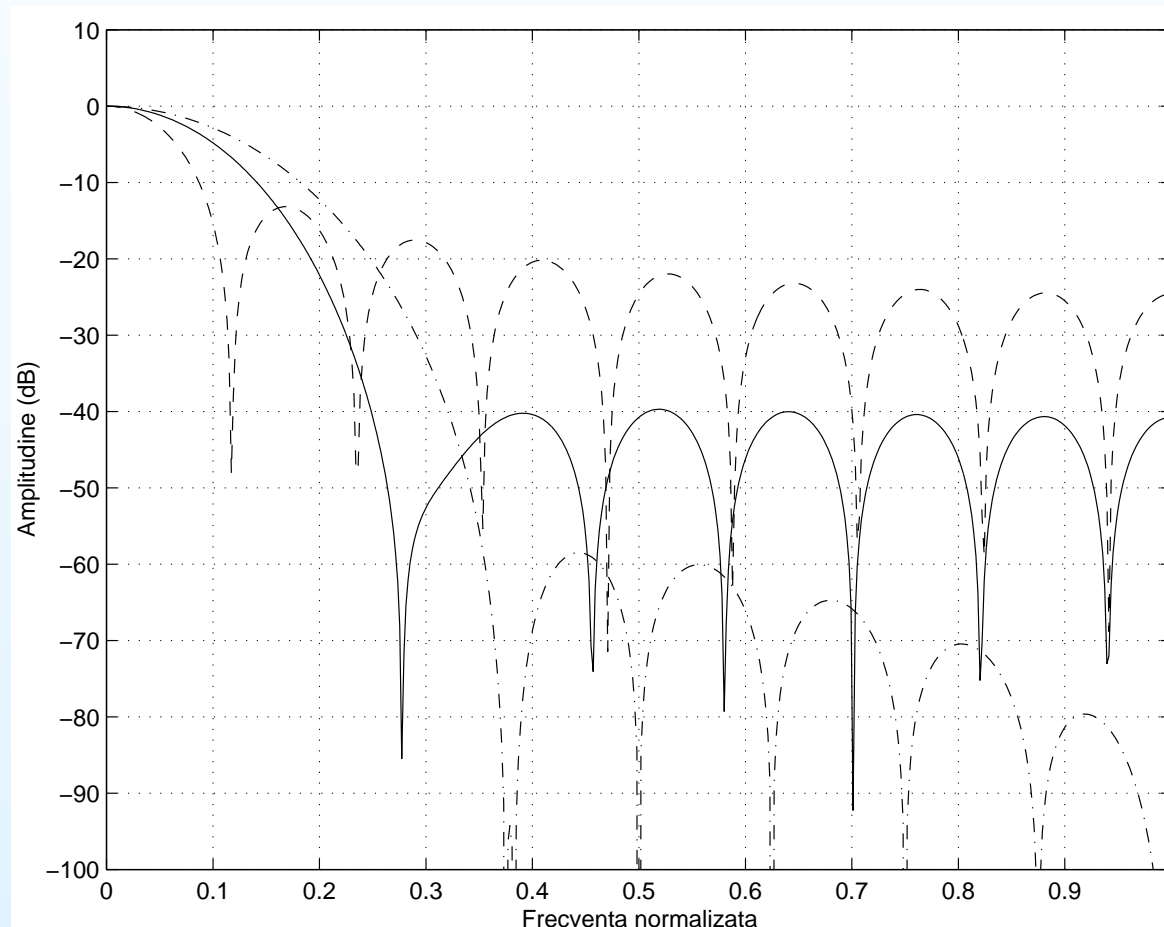
Răspunsuri la impuls ale ferestrelor (3)

- Ferestre Blackman (stânga), Kaiser cu $\beta = 3$ (dreapta)



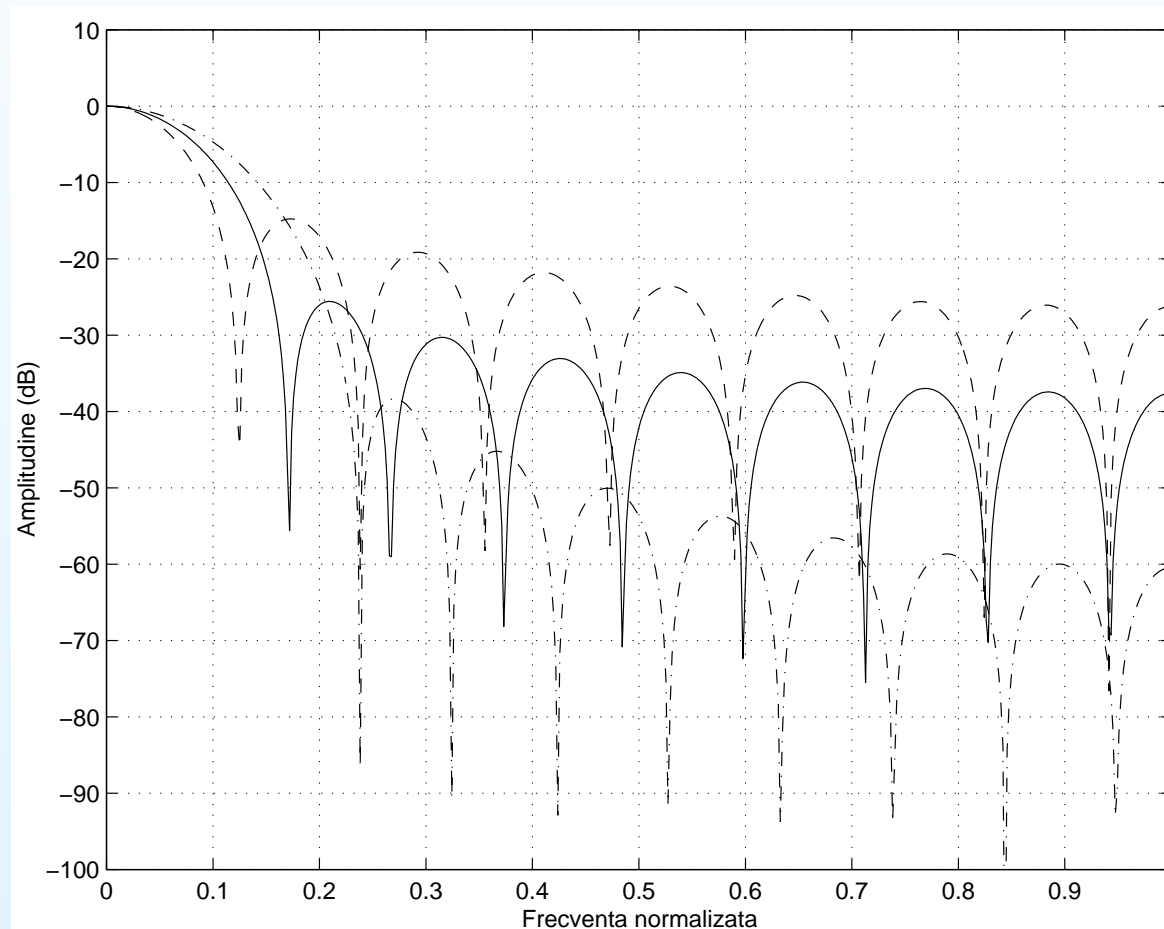
Caracteristici de frecvență ale ferestrelor (1)

- Ferestre dreptunghiulară (linie întreruptă), Hamming (linie continuă) și Blackman (linie-punct), pentru $M = 16$



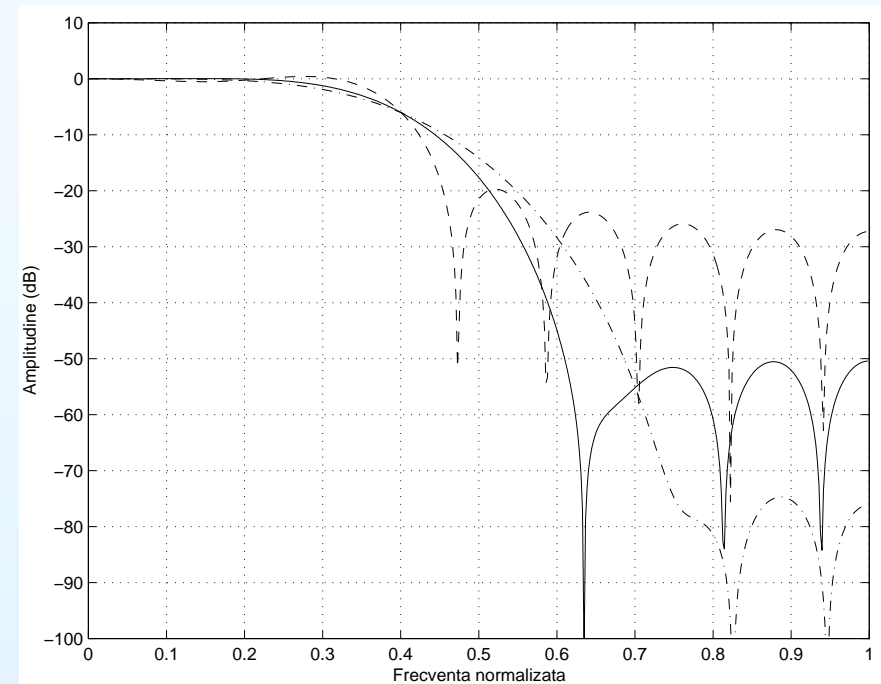
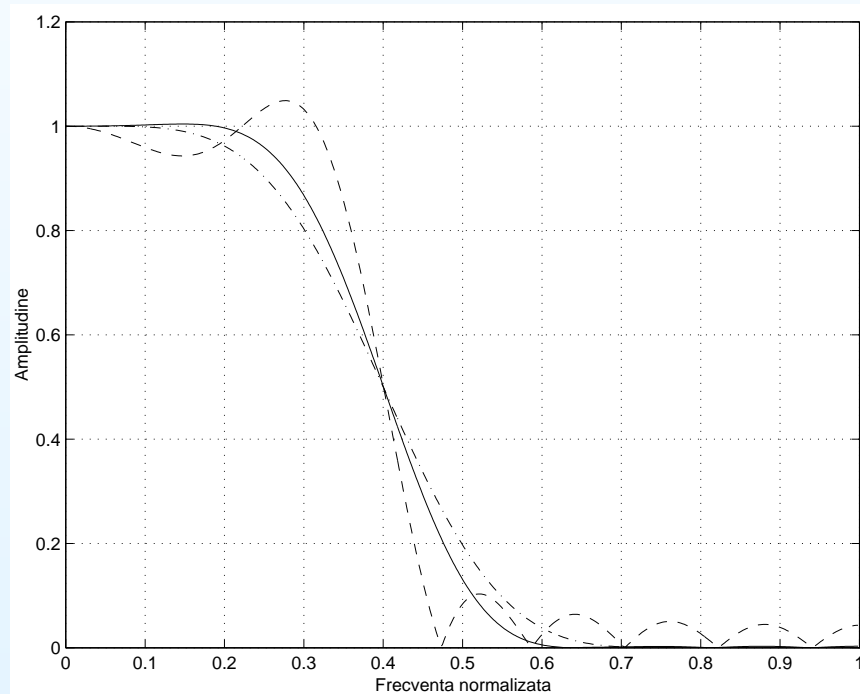
Caracteristici de frecvență ale ferestrelor (2)

- Ferestre Kaiser cu $\beta = 1$ (linie întreruptă), $\beta = 3$ (linie continuă) și $\beta = 5$ (linie-punct), pentru $M = 16$



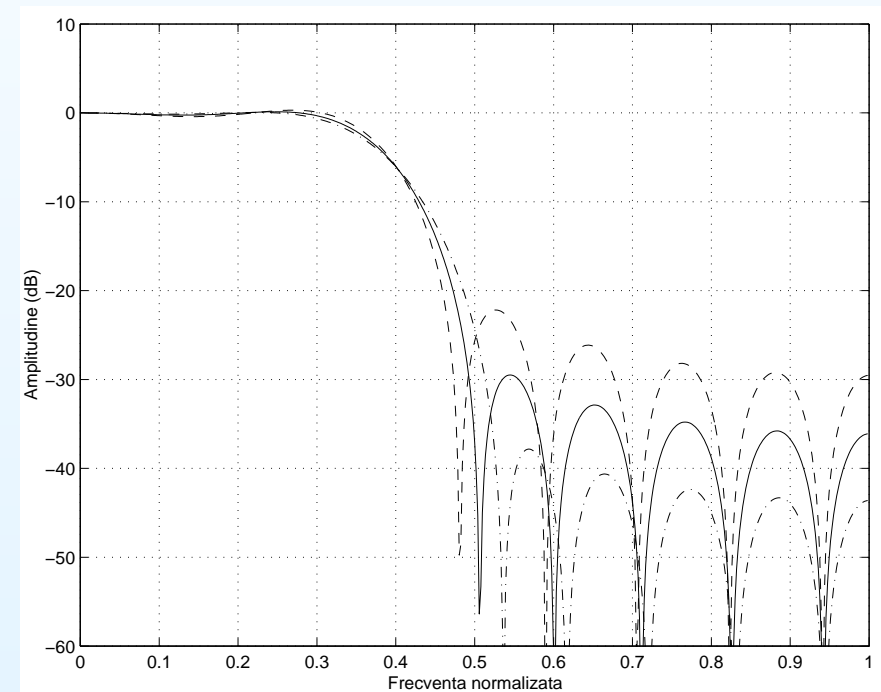
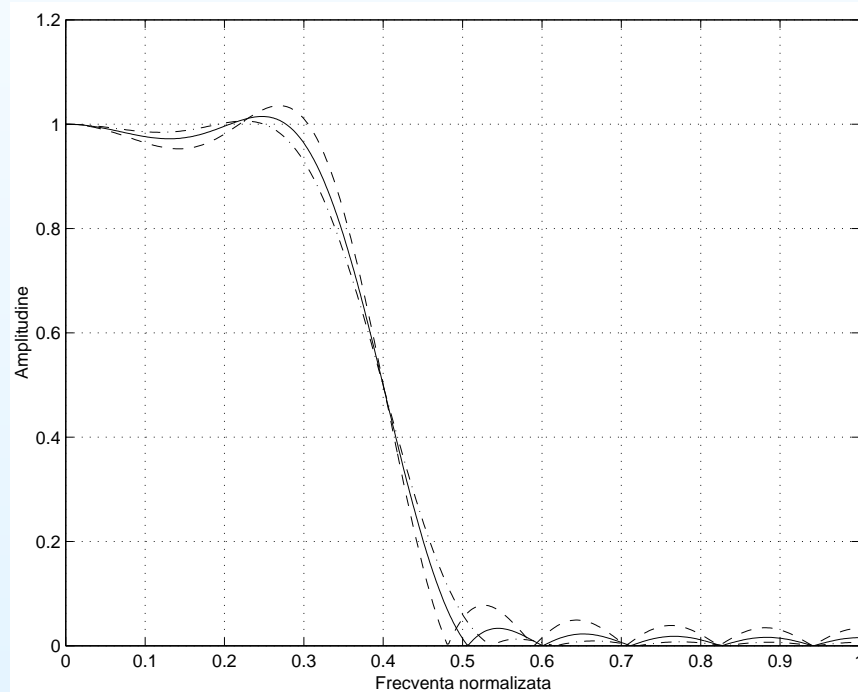
Filtre FIR proiectate cu metoda ferestrei (1)

- Ferestre dreptunghiulară (linie întreruptă), Hamming (linie continuă) și Blackman (linie-punct)



Filtre FIR proiectate cu metoda ferestrei (2)

- Ferestre Kaiser cu $\beta = 1$ (linie întreruptă), $\beta = 2.1$ (linie continuă) și $\beta = 3$ (linie-punct)



Exemplu de proiectare

- Dorim un filtru trece-jos, cu $\omega_b = 0.3\pi$ și $\omega_s = 0.5\pi$
- Cu metoda ferestrei, vrem să proiectăm un filtru de ordin $M = 16$, cu erori cât mai mici în benzile de trecere și oprire
- Luăm $\omega_t = 0.4\pi$ (empiric !) și încercăm mai multe ferestre

| | drept. | Hann. | Hamm. | Black. | Kaiser $\beta = 1$ | Kaiser $\beta = 2.1$ | Kaiser $\beta = 3$ |
|------------|--------|-------|-------|--------|-----------------------|-------------------------|-----------------------|
| Δ_b | 0.057 | 0.116 | 0.130 | 0.194 | 0.047 | 0.0336 | 0.068 |
| Δ_s | 0.103 | 0.119 | 0.131 | 0.197 | 0.078 | 0.0336 | 0.060 |

- Metoda ferestrei este utilă atunci când specificațiile sunt vagi iar optimalitatea nu este necesară

Proiectare în sens CMMP: filtre FIR cu fază neliniară

- Răspunsul dorit $D_c(\omega)$ este complex
- Criteriul de optimizare este

$$\min_{H \in \mathcal{C}(M)} \int_{\omega \in \mathcal{F}} |D_c(\omega) - H(\omega)|^2$$

- Nu există nici o restricție asupra coeficienților filtrului (e.g. de tip fază liniară): $\mathcal{C}(M)$ e mulțimea filtrelor FIR de ordin M

Transformarea problemei (1)

- Răspunsul în frecvență al filtrului poate fi scris

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^M h[n] e^{-j\omega n} = h^T e(\omega)$$

- Vectorul coeficienților filtrului

$$h = [h[0] \ h[1] \ \dots \ h[M]]^T \in \mathbb{R}^{M+1}$$

conține variabilele problemei de optimizare

- Vectorul

$$e(\omega) = [1 \ e^{-j\omega} \ \dots \ e^{-j\omega M}]^T \in \mathbb{C}^{M+1}$$

este cunoscut pentru orice frecvență ω

Transformarea problemei (2)

- Pătratul erorii poate fi scris în forma

$$\begin{aligned}|H(e^{j\omega}) - D_c(\omega)|^2 &= [h^T e(\omega) - D_c(\omega)][e^H(\omega)h - D_c^*(\omega)] \\ &= h^T e(\omega)e^H(\omega)h - 2\text{Re}[e^H(\omega)D_c(\omega)]h + |D_c(\omega)|^2\end{aligned}$$

- Matricea

$$e(\omega)e^H(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & e^{j\omega} & \dots & e^{j\omega M} \\ e^{-j\omega} & 1 & \ddots & e^{j\omega(M-1)} \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ e^{-j\omega M} & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} = C(\omega) + jS(\omega)$$

are structură Toeplitz hermitică

Transformarea problemei (3)

- Partea reală este o matrice Toeplitz simetrică

$$C(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\omega) & \dots & \cos(\omega M) \\ \cos(\omega) & 1 & \ddots & \cos(\omega(M-1)) \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \cos(\omega M) & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

- Partea imaginară este o matrice Toeplitz antisimetrică

$$S(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & \sin(\omega) & \dots & \sin(\omega M) \\ -\sin(\omega) & 0 & \ddots & \sin(\omega(M-1)) \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ -\sin(\omega M) & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Transformarea problemei (4)

- Deoarece $S(\omega)^T = -S(\omega)$, rezultă $h^T S(\omega)h = 0$
- Notând $g^T(\omega) = \text{Re}[e^H(\omega)D_c(\omega)]$ putem scrie

$$|H(e^{j\omega}) - D_c(\omega)|^2 = h^T C(\omega)h - 2g^T(\omega)h + |D_c(\omega)|^2$$

- Notăm

$$P = \int_{\omega \in \mathcal{F}} C(\omega)d\omega, \quad q = \int_{\omega \in \mathcal{F}} g(\omega)d\omega$$

- Matricea P este pozitiv definită

Problema de optimizare CMMP

- Criteriul de optimizare în sens CMMP capătă forma

$$\min_{h \in \mathbb{R}^{M+1}} h^T P h - 2q^T h$$

- Vectorul coeficienților filtrului optim este

$$\boxed{h = P^{-1}q}$$

- Demonstrație: pentru a minimiza criteriul

$V(h) = h^T P h - 2q^T h$ anulăm gradientul $\frac{\partial V(h)}{\partial h} = 2Ph - 2q$, de unde rezultă $h = P^{-1}q$. Acest h corespunde într-adevăr unui punct de minim deoarece Hessianul $\frac{\partial^2 V(h)}{\partial h^2} = 2P$ este pozitiv definit.

Algoritmul de proiectare

0. *Date de proiectare*: ordinul M al filtrului, răspunsul ideal în frecvență $D_c(\omega)$ (cu valori complexe) care trebuie aproximat și mulțimea de frecvențe \mathcal{F} pe care se face aproximația
1. Se calculează matricea P și vectorul q

$$P = \int_{\omega \in \mathcal{F}} C(\omega) d\omega, \quad q = \int_{\omega \in \mathcal{F}} g(\omega) d\omega$$

2. Se calculează $h = P^{-1}q$

Exemplu de proiectare: filtru FIR trece-jos (1)

- Datele de proiectare sunt ordinul filtrului M , frecvențele ω_b și ω_s , întârzierea de grup n_0 și răspunsul dorit

$$D_c(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega n_0}, & \text{dacă } |\omega| \leq \omega_b \\ 0, & \text{dacă } \omega_s < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

- Pentru a construi matricea P , ținem seama că

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \cos(n\omega) d\omega = \frac{\sin(n\omega_2)}{n} - \frac{\sin(n\omega_1)}{n} = \omega_2 \text{sinc}(n\omega_2) - \omega_1 \text{sinc}(n\omega_1)$$

- Deoarece $\mathcal{F} = [0, \omega_b] \cup [\omega_s, \pi]$, elementul de pe diagonală n a matricei Toeplitz P este

$$p_n = \omega_b \text{sinc}(n\omega_b) - \omega_s \text{sinc}(n\omega_s) + \pi \delta[n]$$

Exemplu de proiectare: filtru FIR trece-jos (2)

- Elementele vectorului q sunt

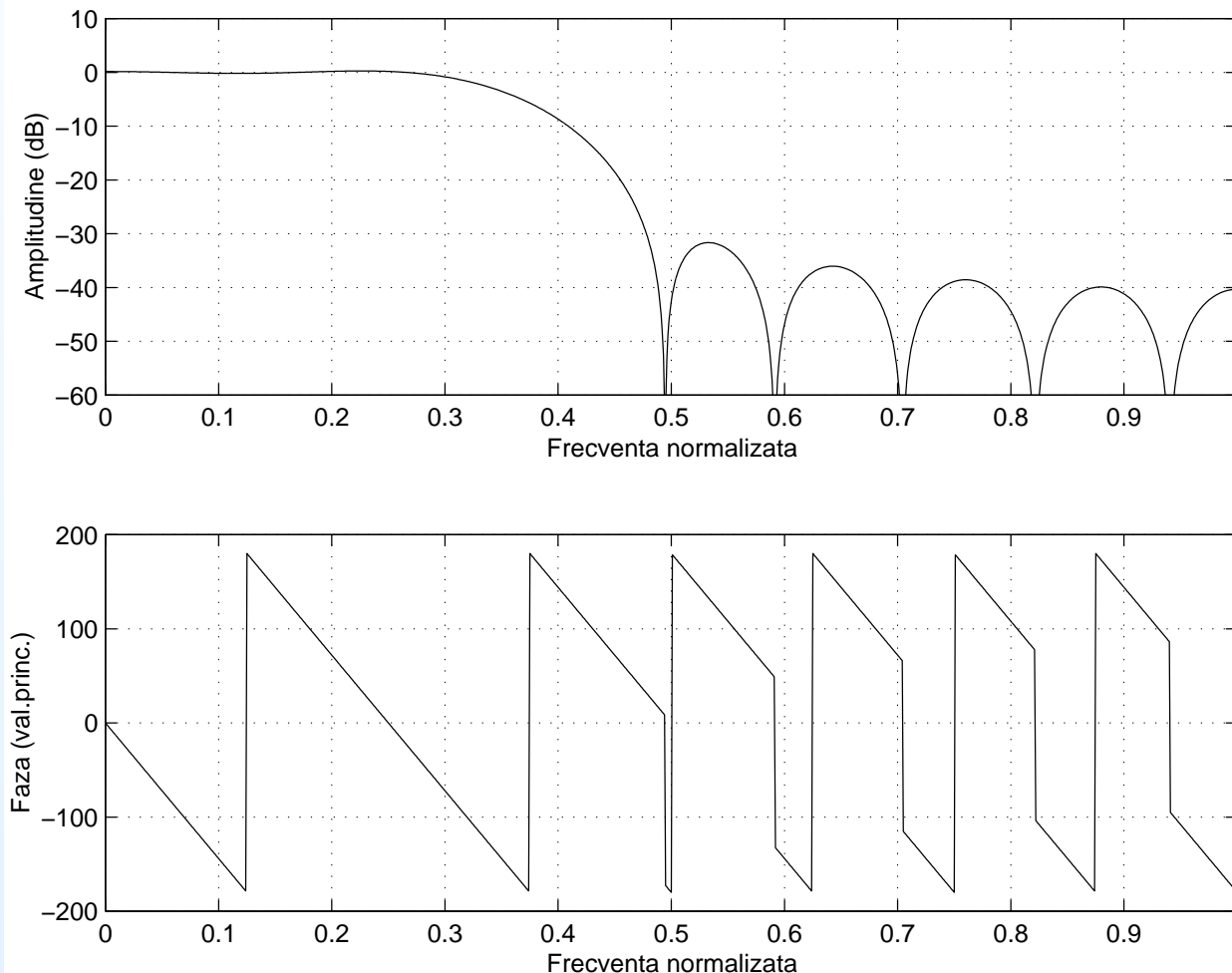
$$\begin{aligned} q_n &= \int_{\omega \in \mathcal{F}}^{\omega_b} \operatorname{Re}[e^{jn\omega} D_c(\omega)] d\omega = \int_0^{\omega_b} \operatorname{Re}[e^{j(n-n_0)\omega}] \\ &= \int_0^{\omega_b} \cos(n - n_0)\omega = \omega_b \operatorname{sinc}(n - n_0)\omega_b \end{aligned}$$

- Programul Matlab:

```
T = (0:M)';  
p = wb*sinc(T*wb) - ws*sinc(T*ws) + eye(size(T));  
P = toeplitz(p);  
q = wb*sinc((T-n0)*wb);  
h = P \ q;
```

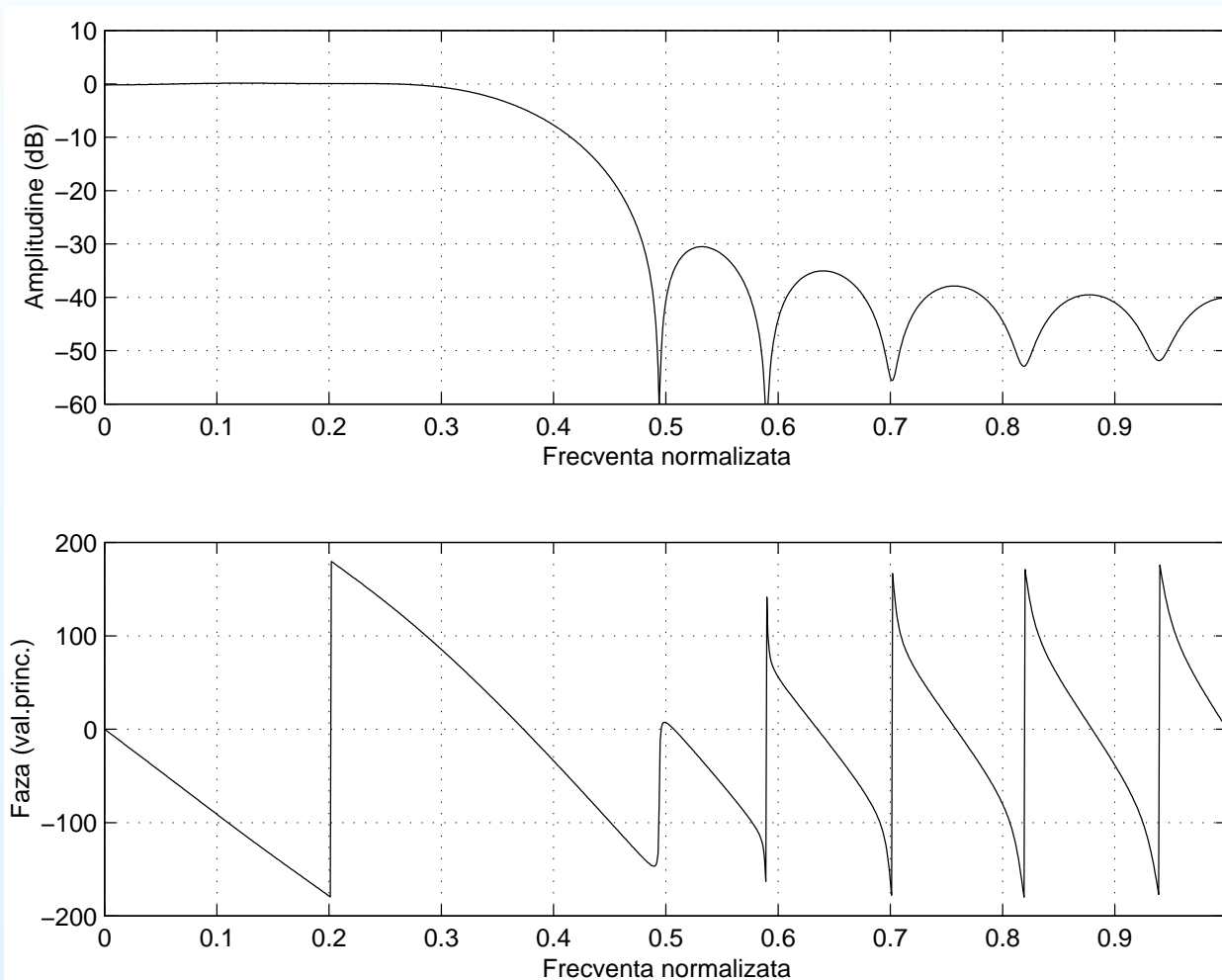
Exemplu de proiectare: filtru FIR trece-jos (3)

- $M = 16$, $\omega_b = 0.3\pi$, $\omega_s = 0.46\pi$, $n_0 = 8$
- Pentru $n_0 = M/2$ filtrul optim are fază liniară !



Exemplu de proiectare: filtru FIR trece-jos (4)

- $M = 16$, $\omega_b = 0.3\pi$, $\omega_s = 0.46\pi$, $n_0 = 5$



Alte probleme de proiectare CMMP

- Pentru *filtre FIR cu fază liniară* de ordin M :

$$H(e^{j\omega}) = h^T c(\omega) e^{-j\omega M/2}$$

- De exemplu, pentru filtrele de tip I:

$$h = [h[\frac{M}{2}] \ h[\frac{M}{2} - 1] \ \dots \ h[1] \ h[0]]^T \in \mathbb{R}^{\frac{M}{2}+1},$$

$$c(\omega) = [1 \ 2 \cos \omega \ \dots \ 2 \cos(\omega(\frac{M}{2} - 1)) \ 2 \cos(\omega \frac{M}{2})]^T \in \mathbb{R}^{\frac{M}{2}+1}$$

- Problema de optimizare CMMP se formulează și se rezolvă asemănător, utilizând doar coeficienții distincți ai filtrului
- *Problema F_OPT2D*: matricea P și vectorul q nu sunt calculate prin integrare, ci printr-o sumă finită
- De exemplu $P = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L C(\omega_k)$

Proiectarea filtrelor FIR în sens Chebyshev

- Ne ocupăm doar de filtre FIR cu fază liniară (pentru care proiectarea este mai simplă)
- Problema: **F_OPTINF**
- Algoritm: Parks-McClellan
- Discutăm doar elementele esențiale ale metodei
- Considerăm doar filtre de tip I, al căror răspuns în frecvență are partea reală ($K = M/2$)

$$H_r(\omega) = \sum_{n=0}^K g_n \cos(n\omega) = \sum_{n=0}^K f_n (\cos \omega)^n$$

- Algoritmul folosește noțiuni de aproximare polinomială

Proprietățile filtrului optim

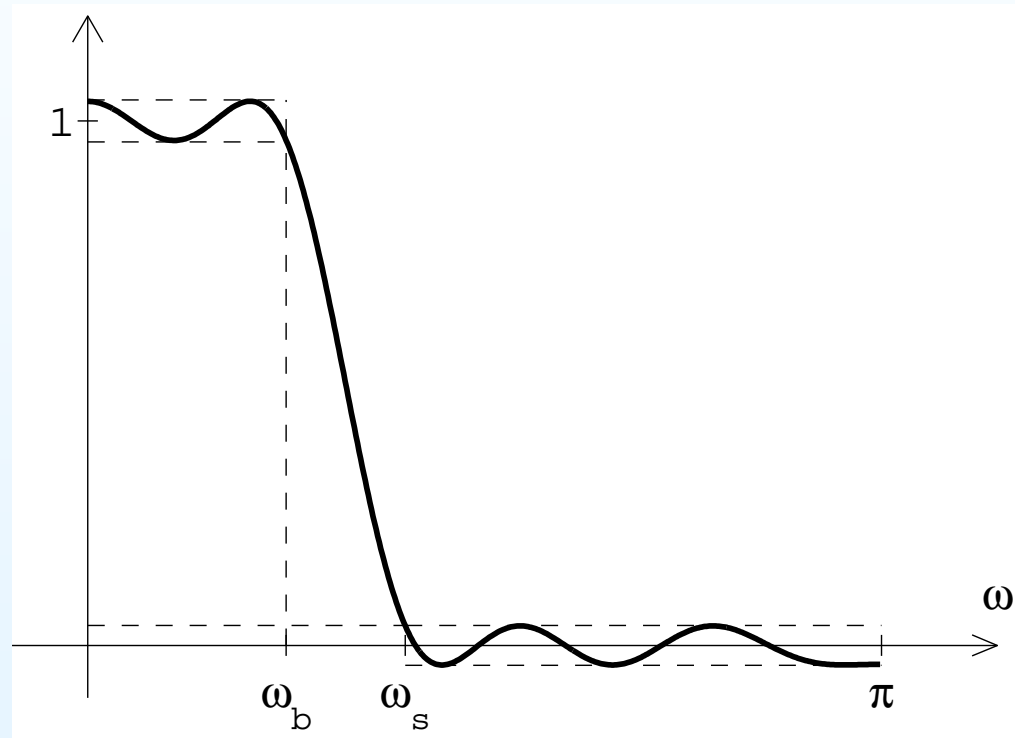
- Eroarea cu care răspunsul filtrului aproximează răspunsul dorit este $E(\omega) = D(\omega) - H_r(\omega)$
- Pentru un filtru optim, funcția $E(\omega)$ are un număr de extreme locale, toate cu aceeași amplitudine Δ
- *Teoremă de alternanță*: pentru soluția unei probleme **F_OPTINF**, funcția eroare $E(\omega)$ are $L \geq K + 2$ extreme locale în frecvențele $\omega_1, \dots, \omega_L$, cu aceeași amplitudine și cu semne alternante, i.e.

$$E(\omega_k) = (-1)^k \Delta, \quad k = 1 : L,$$

unde Δ este valoarea maximă a erorii (egală cu norma infinit, sau Chebyshev, a funcției $E(\omega)$)

Exemplu de filtru optim

- Pentru $M = 16$, $K = 8$ un exemplu de $H_r(\omega)$ optim este



- Valoarea maximă a erorii este atinsă în $K + 2 = 10$ puncte

Algoritmul Parks-McClellan (Remez)

1. Se aleg $K + 2$ frecvențe $\omega_k \in [0, \pi]$, $k = 1 : K + 2$. Se alege o toleranță ε .
2. Se rezolvă sistemul $E(\omega_k) = (-1)^k \Delta$, $k = 1 : K + 2$, necunoscutele fiind coeficienții f_0, \dots, f_K și valoarea Δ .
3. Se calculează punctele de extrem $\omega'_k \in [0, \pi]$, $k = 1 : L$, ale răspunsului $H_r(\omega)$ obținut, și se rețin $K + 2$ dintre ele, cele pentru care eroarea $|D(\omega'_k) - H_r(\omega'_k)|$ are valorile cele mai mari.
4. Dacă $|\omega_k - \omega'_k| \leq \varepsilon$, $k = 1 : K + 2$, atunci soluția a fost obținută. Altfel, se pune $\omega_k \leftarrow \omega'_k$, $k = 1 : K + 2$, și se reia de la pasul 2.

Explicații

- Algoritmul se bazează pe "forțări" succesive ale relației $E(\omega_k) = (-1)^k \Delta$ care caracterizează filtrul optim
- După ce la pasul 1 se alege un set arbitrar de frecvențe ω_k , nu se obține eroarea Δ minimă
- De aceea, punctele de extrem ω'_k , calculate la pasul 3, sunt diferite de punctele inițiale ω_k
- Algoritmul converge !
- Numeroase detalii de implementare: de exemplu, la proiectarea unui filtru trece-jos, frecvențele ω_b și ω_s fac parte întotdeauna din setul de frecvențe ω_k

Rezolvarea problemei **F_OPTINF**D

- Date fiind o mulțime discretă de frecvențe $\mathcal{G}_L = \{\omega_1, \dots, \omega_L\}$ și un răspuns dorit $D_r(\omega)$ *real*, problema de proiectare a unui filtru FIR cu fază liniară

$$\min_h \max_{k=1:L} |D(\omega_k) - c^T(\omega_k)h|$$

- Vectorul h conține coeficienții distincți ai filtrului, vezi pag. 41
- Problema de optimizare se poate transforma într-o problemă de *programare liniară*
- Aceasta se rezolvă cu algoritmi standard (de exemplu funcția lp din Matlab)

Transformarea problemei (1)

- Introducem variabila suplimentară

$$\Delta = \max_{k=1:L} |D(\omega_k) - c^T(\omega_k)h|$$

care are semnificație de eroare maximă de aproximare pe mulțimea de frecvențe \mathcal{G}_L

- Putem așadar scrie

$$-\Delta \leq c^T(\omega_k)h - D(\omega_k) \leq \Delta, \quad k = 1 : L,$$

sau

$$D(\omega_k) - \Delta \leq c^T(\omega_k)h \leq D(\omega_k) + \Delta, \quad k = 1 : L$$

Transformarea problemei (2)

- Problema de optimizare capătă forma

$$\begin{array}{ll} \min_{h, \Delta} & \Delta \\ \text{cu restricțiile} & c^T(\omega_k)h - \Delta \leq D(\omega_k), \quad k = 1 : L \\ & -c^T(\omega_k)h - \Delta \leq -D(\omega_k), \quad k = 1 : L \end{array}$$

- Vectorul variabilelor problemei de optimizare este

$$\xi = \begin{bmatrix} h \\ \Delta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{M'+1}$$

unde M' este numărul de coeficienți distincți ai filtrului

Transformarea problemei (3)

- Notăm

$$\Psi = \begin{bmatrix} c^T(\omega_1) & -1 \\ \vdots & \vdots \\ c^T(\omega_L) & -1 \\ -c^T(\omega_1) & -1 \\ \vdots & \vdots \\ -c^T(\omega_L) & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2L \times (M'+1)}, \quad \beta = \begin{bmatrix} D(\omega_1) \\ \vdots \\ D(\omega_L) \\ -D(\omega_1) \\ \vdots \\ -D(\omega_L) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2L}$$

$$\gamma = [0 \ \dots \ 0 \ 1]^T \in \mathbb{R}^{M'+1}$$

Programul liniar pentru rezolvarea **F_OPTINF**

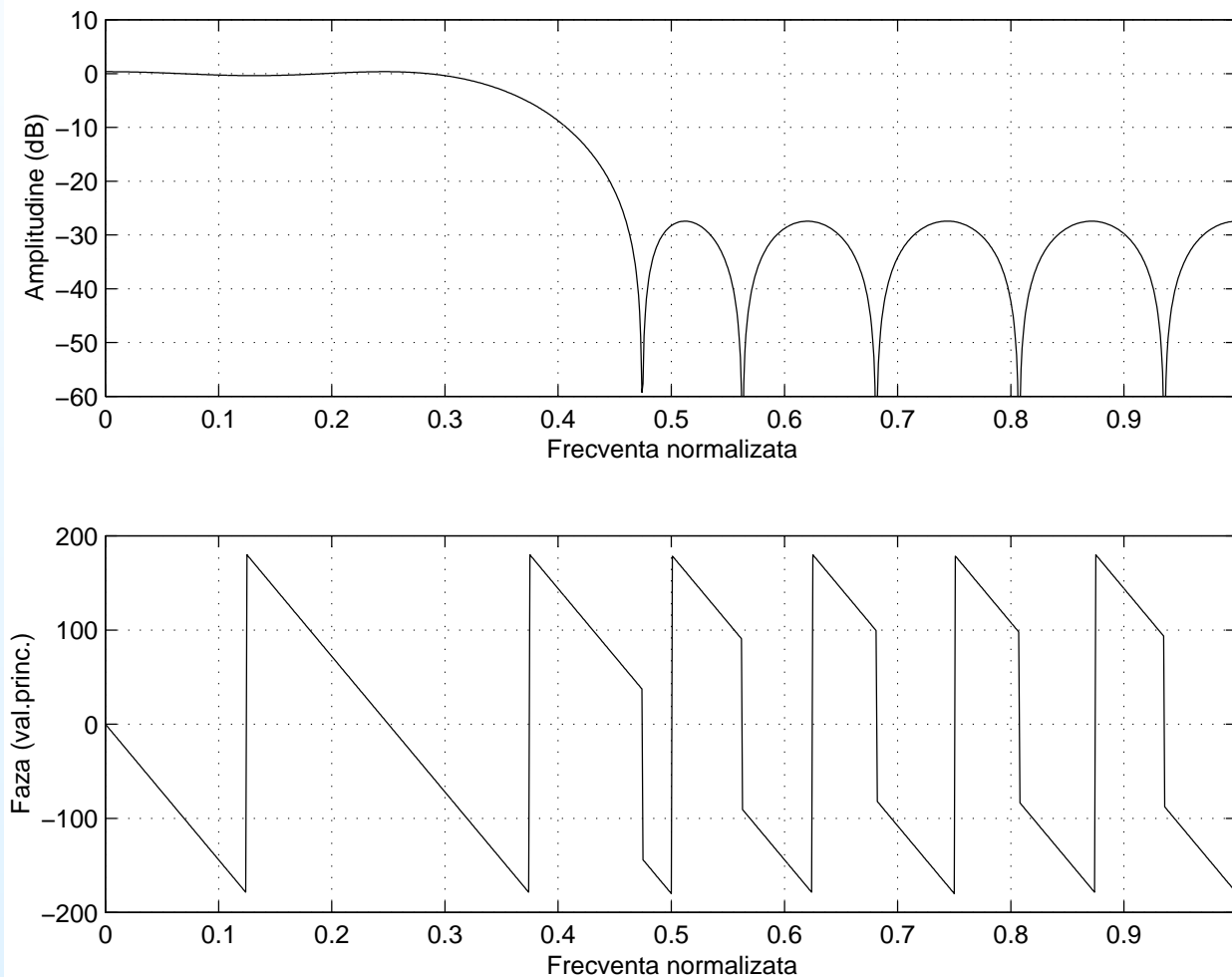
- Problema de optimizare este echivalentă cu programul liniar

$$\begin{aligned} & \min_{\xi \in \mathbb{R}^{M'+1}} \quad \gamma^T \xi \\ & \text{cu restricțiile} \quad \Psi \xi \leq \beta \end{aligned}$$

- Numele de program liniar provine din faptul că atât criteriul cât și restricțiile sunt liniare în variabila vectorială ξ
- Notăția $\Psi \xi \leq \beta$ are semnificația că fiecare element al vectorului $\Psi \xi$ este mai mic sau egal cu elementul corespunzător al vectorului β
- Cu cât L este mai mare (discretizare mai fină), cu atât soluția programului este mai aproape de soluția problemei **F_OPTINF**

Exemplu de proiectare: filtru FIR trece-jos

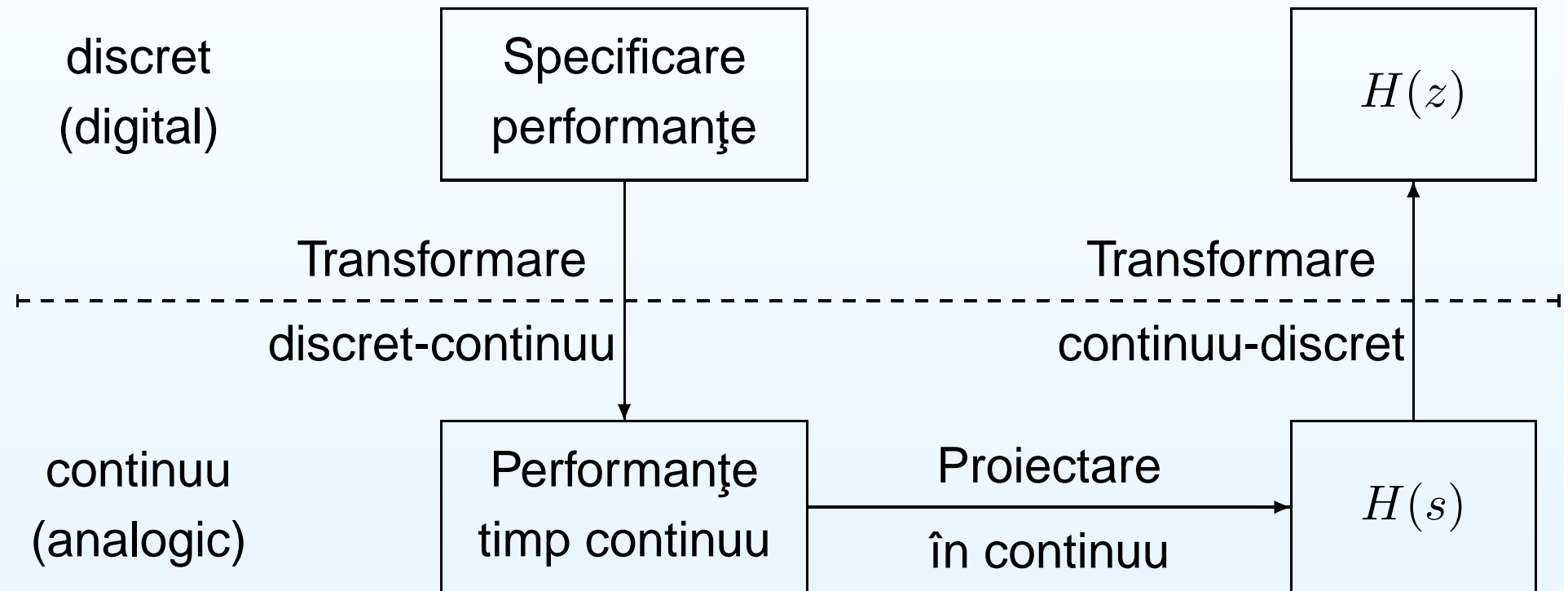
- $M = 16$, $\omega_b = 0.3\pi$, $\omega_s = 0.46\pi$, $L = 100$



Proiectarea filtrelor IIR prin metode de transformare

- Filtrele analogice au fost primele utilizate în aplicații practice, cu decenii bune înaintea celor digitale
- Metodele de proiectare a filtrelor analogice erau deja bine dezvoltate atunci când a apărut necesitatea proiectării filtrelor digitale
- Metodă simplă de proiectare: transformarea (printr-o funcție adecvată a) filtrelor analogice în filtre digitale
- Filtrele analogice sunt IIR, deci în mod natural se obțin filtre digitale IIR
- Dacă $H(s)$ și $G(z)$ sunt funcții de transfer în continuu, respectiv discret, răspunsurile în frecvență sunt $H(j\Omega)$, respectiv $G(e^{j\omega})$
- Transformarea continuu-discret este $z = f(s)$. Cu ea se transformă $H(s)$ în $H(z)$

Schema de proiectare



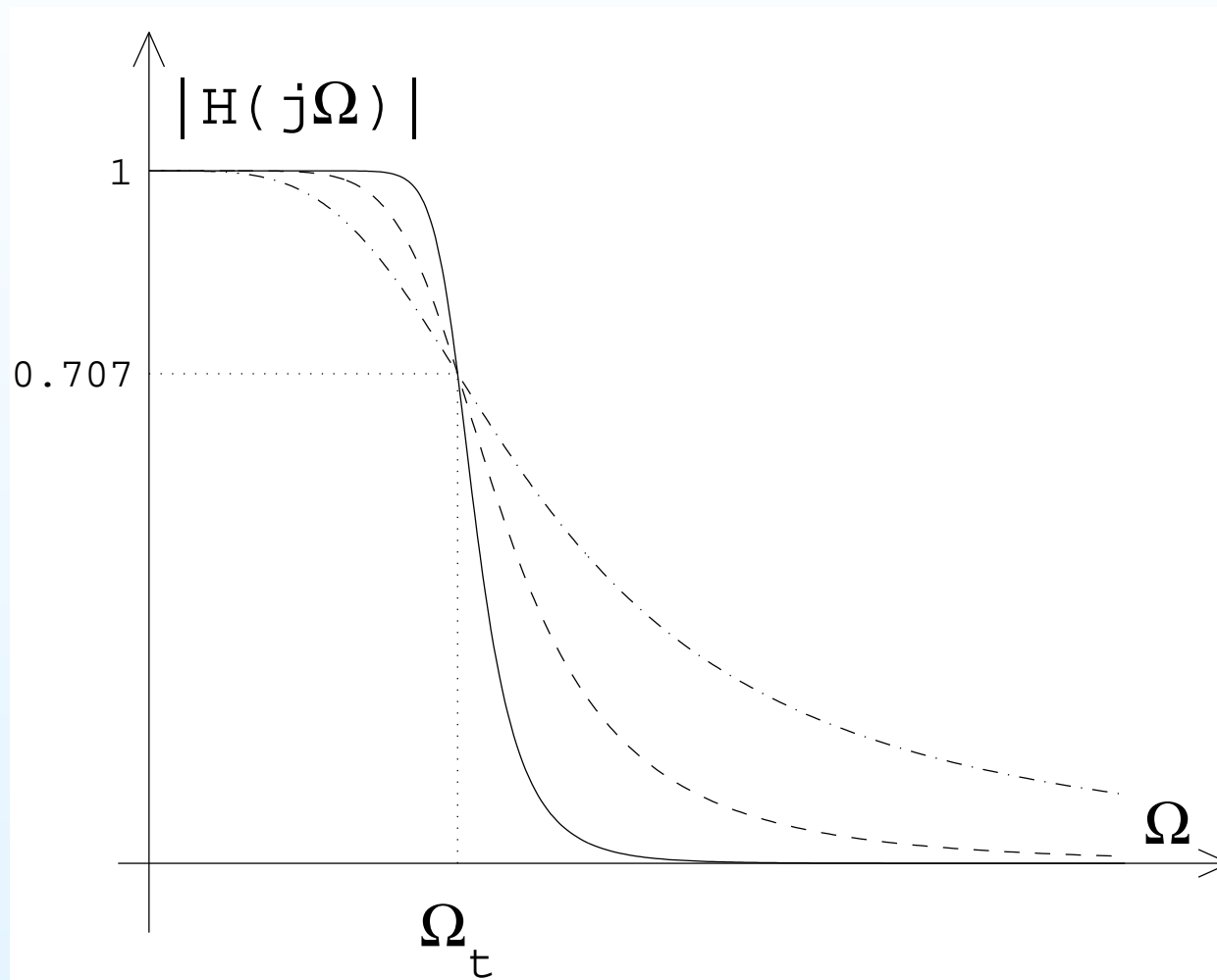
Filtrul Butterworth (analogic)

- Este definit de ordinul său N și de o frecvență de tăiere Ω_t
- Răspunsul în frecvență al filtrului este

$$|H(j\Omega)|^2 = H(j\Omega)H(-j\Omega) = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_t)^{2N}}$$

- Amplitudinea răspunsului în frecvență al filtrului Butterworth este descrescătoare
- $|H(j\Omega_t)| = 1/\sqrt{2}$, $H(0) = 1$
- Avantaj pentru proiectare: răspunsul în frecvență are o formă analitică simplă

Caracteristica de frecvență a filtrului Butterworth



Funcția de transfer a filtrului Butterworth

- Funcția de transfer se determină punând $s = j\Omega$

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + (s/j\Omega_t)^{2N}}$$

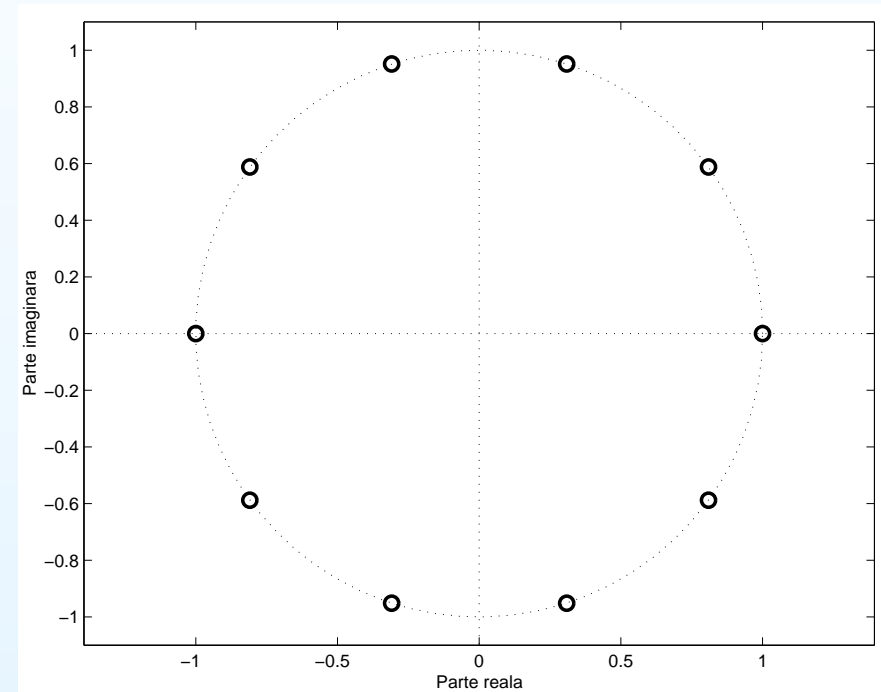
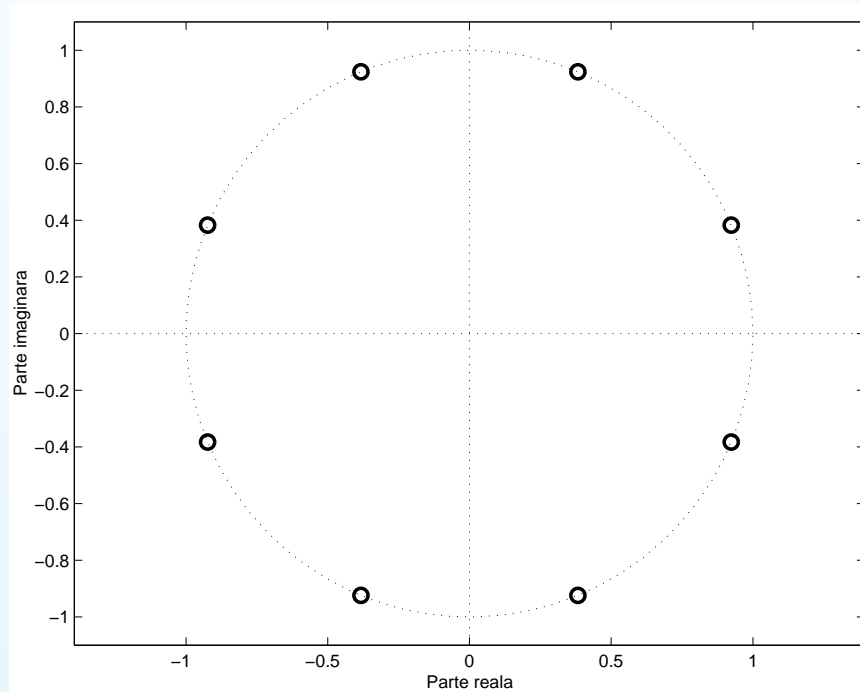
- Cei $2N$ poli ai funcției $H(s)H(-s)$ sunt definiți de $(-1)^{1/2N}j\Omega_t$, deci au forma

$$s_k = \Omega_t \exp\left(-j\frac{\pi}{2N}(2k - 1 + N)\right), \quad k = 0 : 2N - 1$$

- Polii sunt plasați echidistant pe un cerc de rază Ω_t centrat în origine, simetric față de axa imaginară
- Pentru $H(s)$ se iau polii cu parte reală negativă, astfel încât $H(s)$ să fie o funcție de transfer stabilă

Exemple de poli

- $N = 4$ (stânga), $N = 5$ (dreapta)



Filtre Chebyshev

- Filtrele Chebyshev de tip I (ordin N)

$$|H(j\Omega)|^2 = H(j\Omega)H(-j\Omega) = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2(\Omega/\Omega_b)}$$

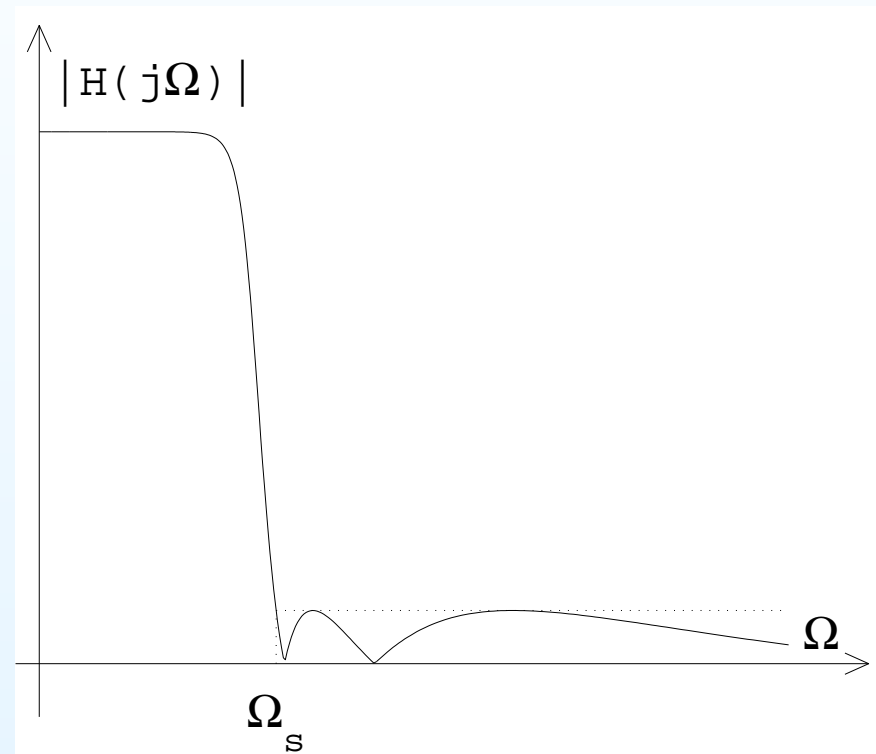
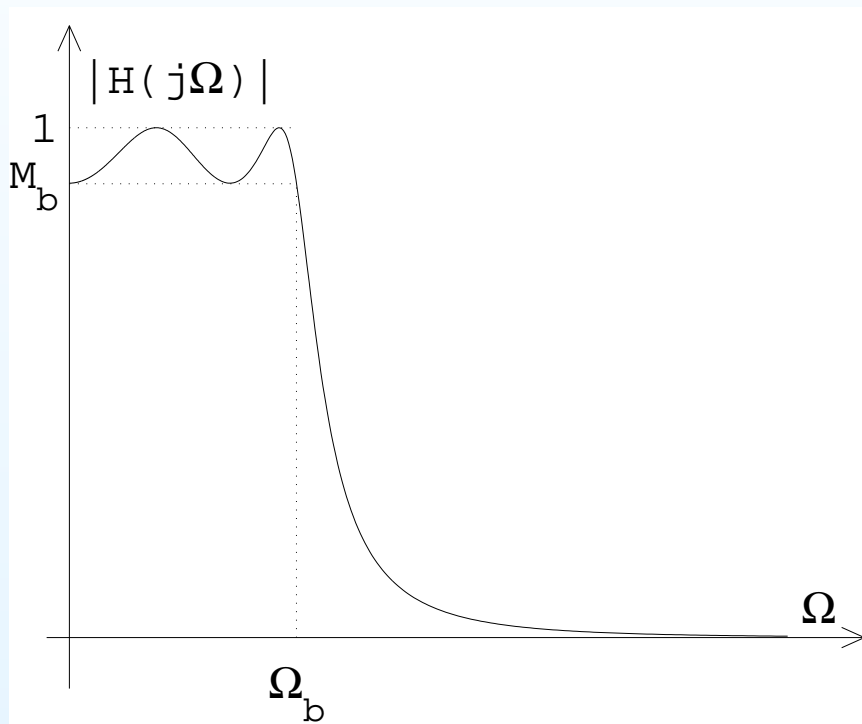
- $T_N(x)$ este polinomul Chebyshev de ordinul N

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1}(x)), & \text{pentru } |x| \leq 1 \\ \cosh(N \cosh^{-1}(x)), & \text{pentru } |x| > 1 \end{cases}$$

- Răspunsul are ondulații egale în banda de trecere și este descrescător în banda de oprire
- Parametrul ϵ dictează înălțimea ondulațiilor
- Filtrul Chebyshev de tipul II se obține printr-o transformare a celui de tip I și are ondulații egale în banda de oprire

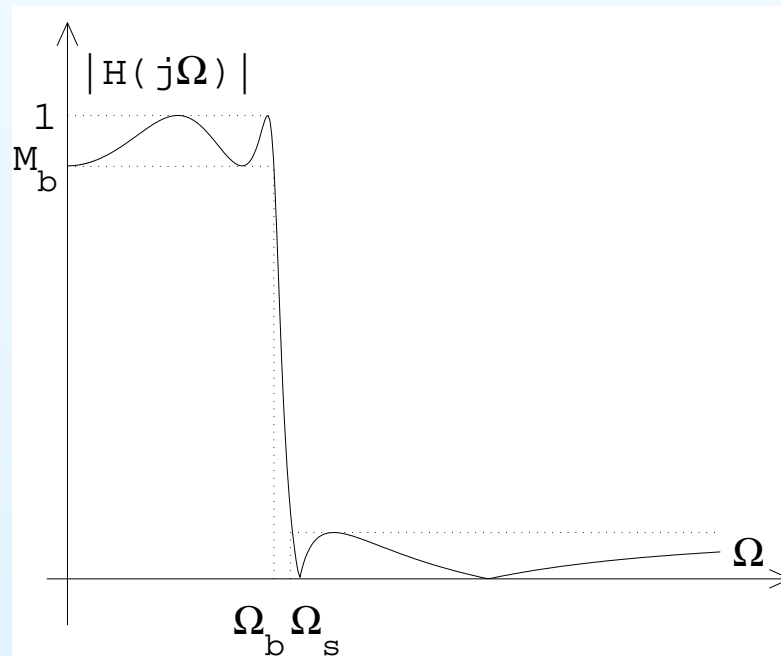
Răspunsuri în frecvență

- Stânga: tip I, $N = 4$. Dreapta: tip II, $N = 6$



Filtrul eliptic

- $|H(j\Omega)|^2 = H(j\Omega)H(-j\Omega) = \frac{1}{1 + \epsilon^2 U_N^2(\Omega/\Omega_b)}$
- $U_N(\cdot)$ este funcția Jacobi eliptică de ordinul II
- Ondulații egale în banda de trecere și în cea de oprire
- Caracteristică de frecvență pentru $N = 4$



Proprietățile unei transformări continuu-discret

- O transformare continuu-discret $z = f(s)$ trebuie să aibă următoarele proprietăți:
 - să fie biunivocă
 - să transforme semiplanul complex stâng în discul unitate, astfel încât un filtru analogic stabil să fie transformat într-un filtru digital stabil și reciproc;
 - să transforme axa imaginară în cercul unitate, astfel încât răspunsul în frecvență $H(j\Omega)$ al unui filtru analogic să-și păstreze alura în transformatul său digital $H(e^{j\omega})$ (notăm $H(s)$ filtrul analogic și, cu aceeași literă, $H(z) = H(f(s))$ filtrul digital)

Transformarea biliniară (1)

- Transformarea *biliniară* este definită prin $z = \frac{1 + s}{1 - s}$
- Transformarea inversă este $s = \frac{z - 1}{z + 1} = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$
- Înlocuind $s = j\Omega$ și $z = e^{j\omega}$ rezultă

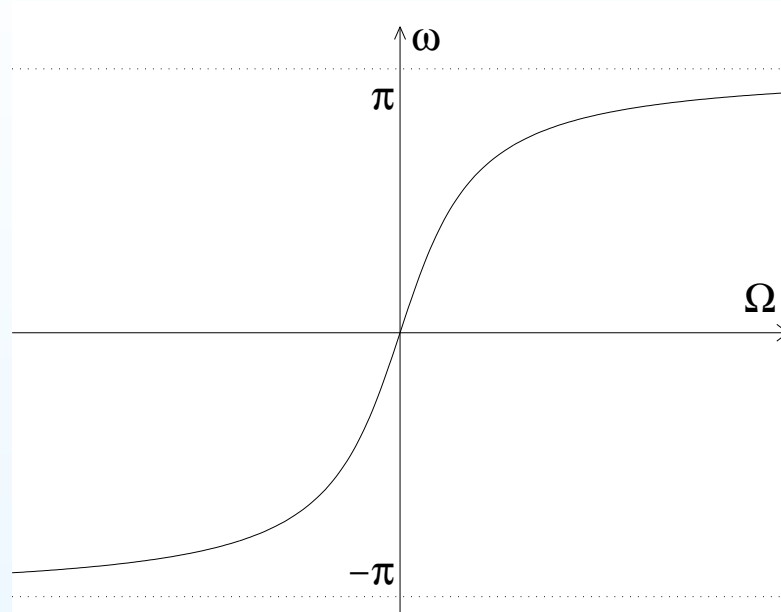
$$e^{j\omega} = \frac{1 + j\Omega}{1 - j\Omega}$$

- Transformarea continuu-discret a frecvențelor este

$$\omega = 2\arctan\Omega, \quad \Omega = \tan\frac{\omega}{2}$$

- Transformarea este neliniară

Transformarea biliniară (2)



- Transformarea biliniară transformă semiplanul complex stâng în discul unitate
- Notăm $s = u + jv$. Dacă $Re(s) = u < 0$, atunci $(1 + u)^2 < (1 - u)^2$ și deci

$$|z|^2 = \left| \frac{1 + s}{1 - s} \right|^2 = \frac{(1 + u)^2 + v^2}{(1 - u)^2 + v^2} < 1$$

Filtrul Butterworth discret

- Fiind o funcție crescătoare, transformarea în frecvență $\omega = 2\arctg\Omega$ păstrează forma răspunsului în frecvență al unui filtru analogic
- Filtrul Butterworth analogic se transformă în

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\operatorname{tg}(\omega/2)}{\operatorname{tg}(\omega_t/2)} \right)^{2N}}, \quad \omega_t = 2\arctg\Omega_t$$

Filtrul Butterworth discret: proiectare

- Date de proiectare: $\omega_b, \omega_s, \Delta_b, \Delta_s$
- Etapa 1: transpunem cerințele de proiectare în domeniul continuu

$$\Omega_b = tg \frac{\omega_b}{2}, \quad \Omega_s = tg \frac{\omega_s}{2}$$

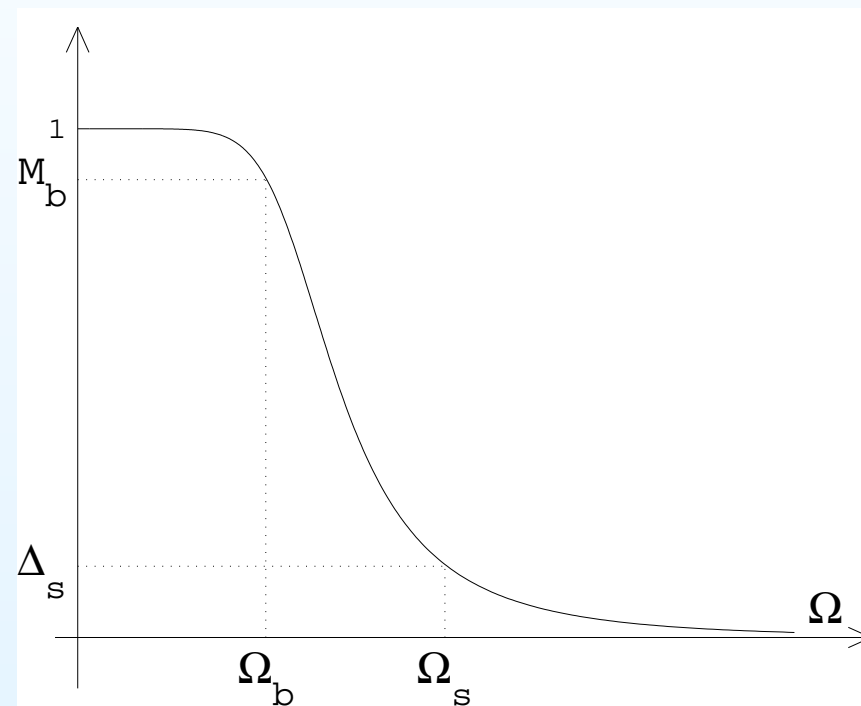
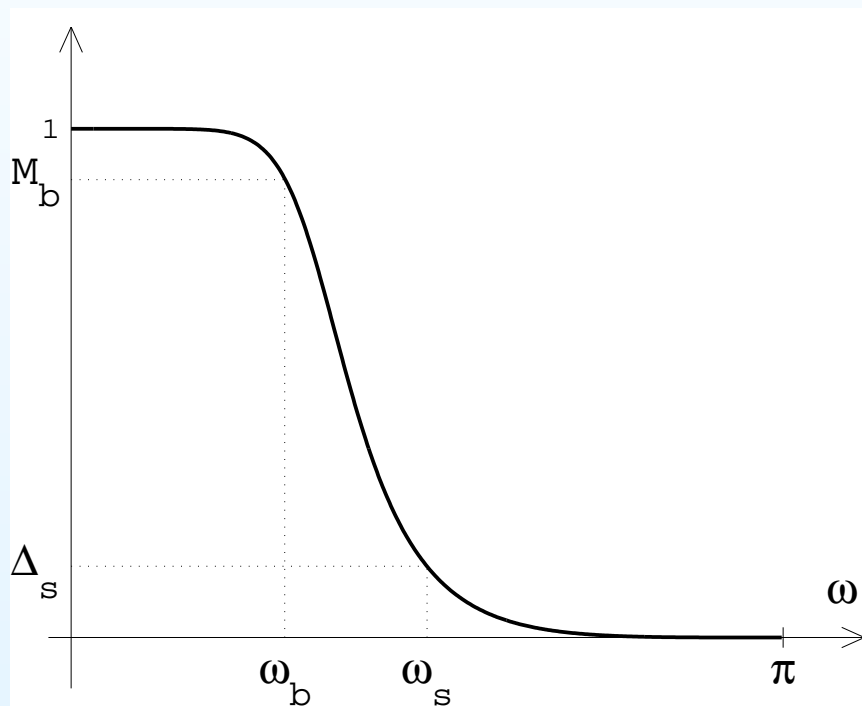
- Etapa 2: găsim un filtru Butterworth $H(s)$ pentru care

$$|H(\Omega_b)| \geq 1 - \Delta_b, \quad |H(\Omega_s)| \leq \Delta_s$$

- (Detalii în Lab. 6 sau în carte)
- Etapa 3: filtrul discret $H(z)$ se obține aplicând transformarea biliniară filtrului analogic $H(s)$

Caracteristici de frecvență

- Filtru Butterworth discret (stânga), analogic (dreapta)
($M_b = 1 - \Delta_b$)



Transformări discret-discret în frecvență

- Filtrele IIR analogice discutate sunt de tip trece-jos, iar prin transformarea biliniară se obțin filtre digitale trece-jos
- Pentru a proiecta altfel de filtre digitale (trec-sus, trec-bandă etc.), se pot utiliza transformări în frecvență, care obțin filtrul dorit dintr-unul trece-jos
- O astfel de transformare $Z = G(z)$ trebuie
 - să fie inversabilă
 - să transforme discul unitate în el însuși (să se conserve stabilitatea)
 - să transforme cercul unitate în el însuși
- Toate transformările de acest tip sunt funcții trec-tot !

Transformare trece-jos \longrightarrow trece-sus

- Transformarea este trece-tot de ordinul 1

$$Z^{-1} = -\frac{z^{-1} - c}{1 - cz^{-1}}, \quad c \in \mathbb{R}, \quad |c| < 1$$

- Pe cercul unitate ($z = e^{j\omega}$, $Z = e^{j\theta}$):

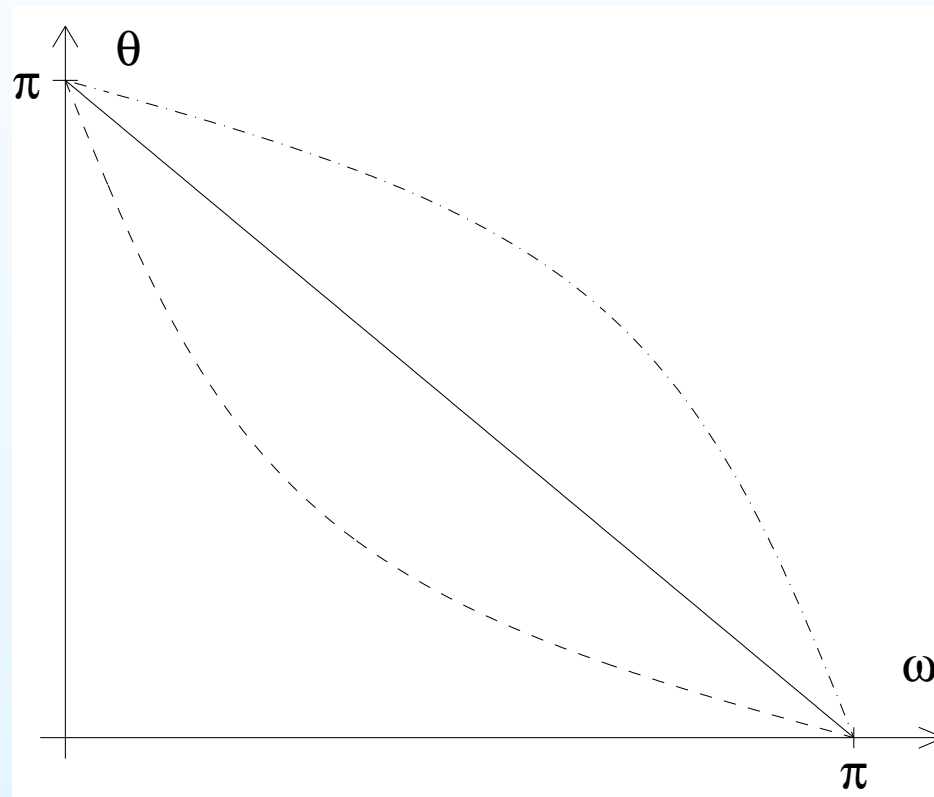
$$e^{-j\theta} = -\frac{e^{-j\omega} - c}{1 - ce^{-j\omega}} = \frac{2c - (1 + c^2) \cos \omega + j(c^2 - 1) \sin \omega}{1 + c^2 - 2c \cos \omega}$$

- Transformarea în frecvență este

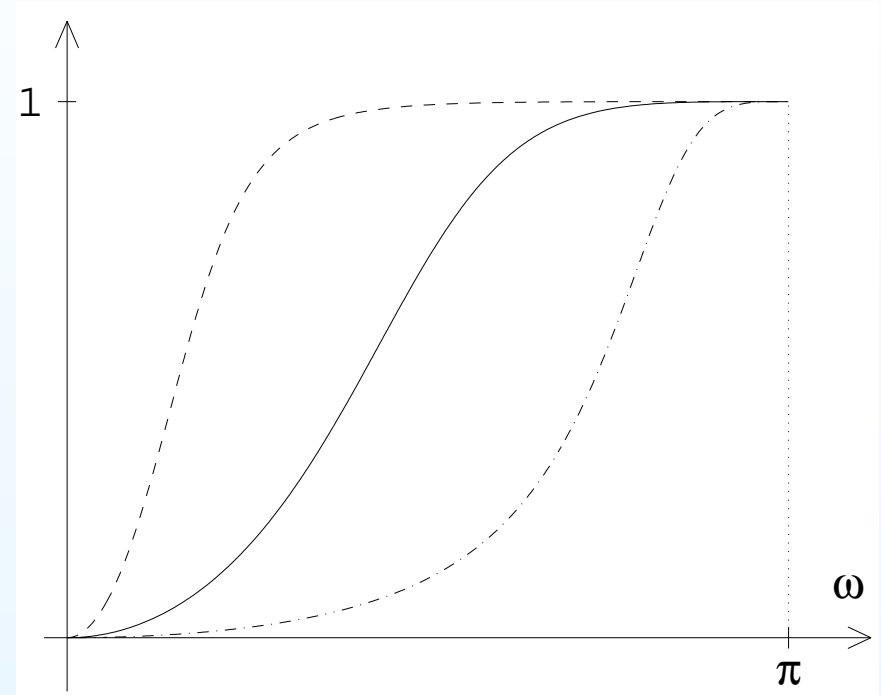
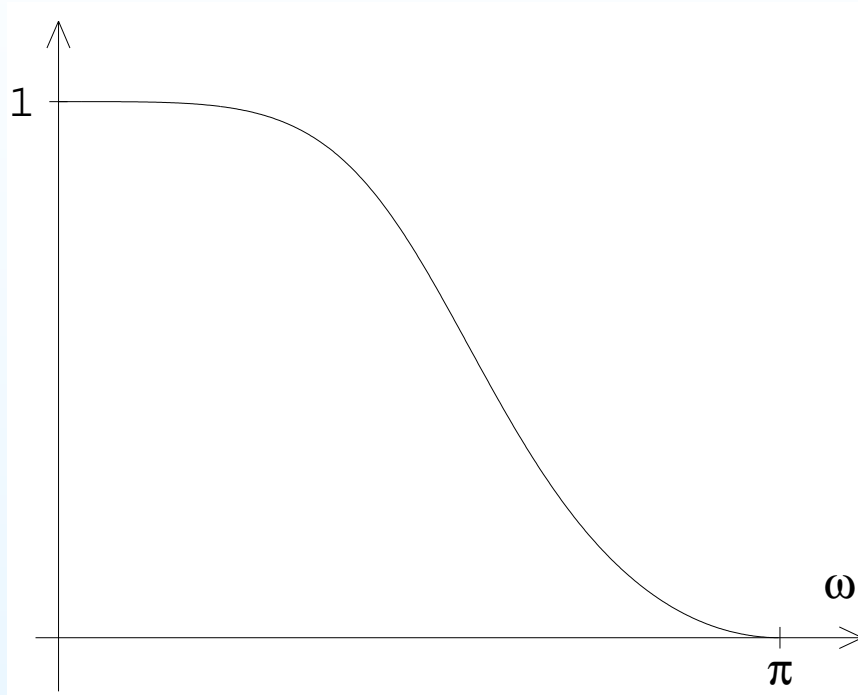
$$\theta = \arctg \left[\frac{(1 - c^2) \sin \omega}{2c - (1 + c^2) \cos \omega} \right]$$

Graficul transformării în frecvență

- $c = 0$ (linie continuă), $c = -0.5$ (linie-punct), $c = 0.5$ (linie întreruptă)



Exemplu de filtre trece-sus



- Pentru $c = 0$, rezultă $Z = -z$, $\theta = \pi - \omega$
- Răspunsul în frecvență al filtrului trece-sus este obținut prin oglindire față de verticala care trece prin $\pi/2$