

## SISTEME DE COMPRESIE PRIN TRANSFORMĂRI ORTOGONALE

### CONSIDERATII GENERALE

#### Principiul compresiei prin transformări ortogonale

Sistemele de compresie care folosesc tehnica transformărilor ortogonale permit reprezentarea semnalului  $x(t)$  generat de o sursă cu memorie (semnal ce poate fi reprezentat în spațiul primar  $X$  printr-un vector  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  de componente  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  **corelate**) într-un spațiu  $Y$  în care eșantioanele ce reprezintă componentele vectorului semnal  $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]$  sunt **necorelate**.

Dacă semnalul  $x(t)$  este staționar, eșantioanele din spațiul primar au aceeași dispersie  $\sigma^2$ . În spațiul transformat  $Y$  eșantioanele necorelate sunt caracterizate printr-o dispersie neuniformă, **energia semnalului fiind concentrată pe un număr redus de componente  $k$ ,  $k < n$** . Acest lucru permite **reducerea dimensiunilor spațiului transformat și transmiterea a numai  $k$  eșantioane necorelate**.

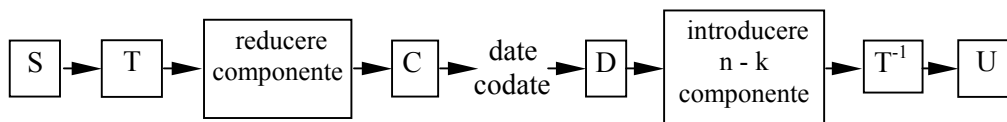


Fig. 3.1 Sistem de conversie prin transformări ortogonale

Sistemul de compresie ilustrat în figura 3.1 operează cu o **distorsiune totală  $D_k'$  care egalează suma dispersiilor componentelor neglijate**.

$$D'_k = \sum_{i=k+1}^n \sigma_i^2 \quad (3.1)$$

Reducerea componentelor din spațiul transformat se poate face fie prin omiterea componentelor a căror dispersie  $\sigma_i^2$  este mai mică decât un anumit prag  $\delta$ , fie neglijând un număr de componente (eșantioane) pentru care suma dispersiilor este mai mică decât o valoare  $D'_k$ . Neglijând componentele cu dispersii mici din spațiul transformat, se realizează o compresie de date mult mai eficientă decât cea obținută de sistemele care reduc eșantioanele semnalului în spațiul primar.

Din punct de vedere informațional, eșantioanele necorelate purtând mai multă informație decât cele corelate, cantitatea de informație conținută în cele  $k$  eșantioane transmise este mai mare decât informația conținută într-un număr egal de eșantioane din spațiul primar.

Dacă cuantizarea fiecărui eșantion se face cu  $\log_2 m$  biți / eșantion, rezultă un raport de compresie

$$r = \frac{n \log_2 m}{k \log_2 m} = \frac{n}{k} \quad (3.2)$$

Compresia prin transformări ortogonale se aplică cu succes la **semnale analogice cvasiperiodice** sau la **semnale cu distribuție spațială bidimensională**. În funcție de natura semnalului se pot utiliza transformări uni- sau bidimensionale.

## Transformări ortogonale unidimensionale

O transformare ortogonală unidimensională poate fi caracterizată de o matrice **T** care satisface relațiile  $\mathbf{T}\mathbf{T}^T = \mathbf{T}^T\mathbf{T} = \mathbf{I}$  și  $\mathbf{T}^T = \mathbf{T}^{-1}$ . Considerând semnalul staționar  $x(t)$ , reprezentat în spațiul primar  $X$  prin vectorul  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ , componentele vectorului  $Y$  în spațiul transformat se obțin din

$$\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{x} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T \quad (3.3)$$

Transformarea ortogonală **T** permite reprezentarea fiecărui eșantion (componentă) din vectorul  $Y$  ca o combinație liniară de componente ale vectorului  $\mathbf{x}$

$$y_k = \sum_{i=1}^n u_{ki} x_i \quad (3.4)$$

unde  $k = 1, \dots, n$ .

Inversa transformării **T** permite reprezentarea fiecărui eșantion (componentă) din vectorul  $\mathbf{x}$  ca o combinație liniară de componente ale vectorului  $\mathbf{y}$

$$x_i = \sum_{k=1}^n u_{ik} y_k \quad (3.5)$$

unde  $i = 1, \dots, n$ .

Elementele  $u_{ik}$  sunt elementele matricei de transformare  $T$ ; pentru transformări ortogonale ele formează un *sistem de funcții de bază ortonormale*, funcții care pot fi discrete sau continue, funcție de modul în care este reprezentat semnalul  $x(t)$ .

Transformarea ortogonală unidimensională optimă care asigură rata de compresie maximă este reprezentată de **transformarea Karhunen-Loève unidimensională**, care produce coeficienți necorelați în spațiul transformat.

Trebuie precizat faptul că dificultățile legate de aplicarea în practică a transformării Karhunen-Loève a determinat utilizarea în sisteme de compresie a unor transformări suboptimale care nu asigură decorelarea componentelor în spațiul transformat : de ex. transformarea cosinus.

## Transformări ortogonale bidimensionale

Pentru a utiliza corelația spațială existentă între elementele de imagine, atât pe direcția orizontală cât și pe direcția verticală, este avantajoasă păstrarea structurii bidimensionale a sub-matricelor în care a fost partiționată imaginea inițială și aplicarea unor **transformări bidimensionale**.

Considerăm o sub-matrice de elemente de imagine discretizate

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

unde  $x_{ij}$  reprezintă intensitatea luminoasă a pixelului  $M(i,j)$ .

Transformarea bidimensională este caracterizată de un tensor de ordin 4 notat

$$\mathbf{U} = \{U_{kl ij}, k, l, i, j = 1, \dots, n\} \quad (3.7)$$

Submatricea  $\mathbf{X}$  este transformată în submatricea  $\mathbf{Y}$  prin aplicarea transformării bidimensionale  $\mathbf{U}$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{UX} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Folosind transformarea  $\mathbf{U}$  fiecare element  $y_{kl}$  poate fi exprimat ca o combinație liniară de elemente ale matricei  $\mathbf{X}$ :

$$y_{kl} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_{klij} x_{ij} \quad (3.9)$$

unde  $k, l = 1, \dots, n$ .

Transformarea bidimensională inversă permite ca fiecare element  $x_{ij}$  să poată fi exprimat ca o combinație liniară de elemente ale matricei  $Y$

$$x_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n u'_{ijkl} y_{kl} \quad (3.10)$$

unde  $i, j = 1, \dots, n$ .

Relația 3.8 poate fi interpretată și ca o dezvoltare în serie a imaginii  $X_{N \times N}$  în funcție de un set  $n \times n$  de funcții de bază, definite de

$$U_{kl} = \begin{bmatrix} u_{kl11} & u_{kl12} & \cdots & u_{kl1n} \\ u_{kl21} & u_{kl22} & \cdots & u_{kl2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{kln1} & u_{kln2} & \cdots & u_{klnn} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

unde  $k, l = 1, \dots, n$ .

Cu notația 3.10 transformata directă bidimensională poate fi scrisă

$$Y = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n x_{kl} U_{kl} \quad (3.12)$$

Conform relațiilor 3.6 și 3.7, ponderile  $y_{kl}$  fiind date de 3.9, pot fi interpretate ca o măsură a corelației între elementele matricei imagine  $X$  și  $U_{kl}$ .

Pentru anumite funcții de bază, ordonând funcțiile în imaginea transformată  $Y$ , termenii  $y_{kl}$  sunt înșiruiți în ordinea descrescătoare a dispersiilor componentelor. În acest mod devine posibil ca de la un anumit rang  $k^2 < n \times n$  componentele  $y_{kl}$  să aibă o pondere nesemnificativă și să poată fi neglijate.

Imaginea transformată  $\hat{X}_k$  este reprezentată prin neglijarea termenilor nesemnificativi

$$\hat{X}_k = \sum_{k=1}^k \sum_{l=1}^k y_{kl} U_{kl} \quad (3.13)$$

Distorsiunea introdusă de procesul de compresie  $D'_{2k}$  va fi și în acest caz suma dispersiilor neglijate

$$D'_{2k} = \sum_{i=k+1}^n \sigma^2 y_{kl} \quad (3.14)$$

dacă setul de funcții de bază  $U_{kl}$  constituie un set de funcții ortonormate.

Implementarea acestor sisteme este deosebit de complexă, necesitând un număr mare de operații: înmulțiri și adunări pentru o imagine  $n \times n$ . Împărțirea imaginii în blocuri de dimensiuni mai mici permite reducerea numărului de operații dar invalidează ipoteza de staționaritate a semnalului prelucrat.

## TRANSFORMĂRI ORTOGONALE REPREZENTATIVE

### Transformarea Fourier (FT)

Transformarea Fourier oferă posibilitatea analizării conținutului frecvențial al unui semnal. Pentru aceasta, transformarea translatează funcția ce descrie comportarea temporală a semnalului într-o funcție de frecvență ce descrie comportarea semnalului în domeniul frecvenței. Informația frecvențială conținută de semnal este reprezentată prin coeficienții rezultați în urma aplicării transformării.

### Spectrul Fourier al semnalelor periodice

*Funcția spectru Fourier este legată de funcția semnal prin operația denumită transformata Fourier.* Transformata Fourier reprezintă operația analitică de trecere de la funcția semnal  $f(t)$  la funcția spectru Fourier  $F(f)$  și presupune dezvoltarea în *serie Fourier prin funcții armonice*. O funcție oarecare  $f(x)$  poate fi exprimată în serie Fourier utilizând o clasă de funcții mai generale și anume printr-un *sistem de funcții ortogonale*.

*Ortogonalitatea este echivalentă cu absența redundanței*, în sensul că fiecare dintre coeficienții Fourier reprezintă în mod unic aportul armonice de pulsație corespunzătoare în semnalul original  $x$ .

Un caz particular de sistem ortogonal normat îl constituie *sistemul trigonometric fundamental*:

$$1, \cos x, \sin x, \dots, \cos kx, \sin kx, \dots \quad (2.1)$$

Funcția semnal  $f(t)$  și funcția spectru  $F(f)$  sunt două moduri de reprezentare ale semnalului care exprimă mesajul transmis de sistemul în evoluție. Aceste transformări sunt legate între ele prin *transformarea Fourier bilaterală*.

O funcție periodică de perioadă  $T$  se poate scrie:

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos 2\pi k f_1 t + B_k \sin 2\pi k f_1 t] \quad (2.2)$$

unde  $f_1 = 1/T$ ;

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx ; \quad A_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt ; \quad (2.3)$$

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx; \quad A_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos 2\pi k f_1 t dt \quad (2.4)$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx; \quad B_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin 2\pi k f_1 t dt \quad (2.5)$$

Spectrul Fourier se exprimă sub forma:

$$F(f) = \frac{A_0}{2} \delta(0) + \sum_k M_k \delta(f - f_k), \quad f_k = k f_1; \quad M_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \quad (2.6)$$

Formula (2.6) are proprietatea că pune în evidență **amplitudinea liniei spectrale corespunzătoare armonice de ordinul  $k$** , însă pierde informația relativ la faza acesteia. Pentru a ține seama și de acest aspect este convenabil ca funcția spectrală să fie exprimată sub **formă complexă** și să se extindă domeniul de variație al variabilei independente  $f$  de la  $-\infty$  la  $\infty$ .

$$A_k \cos kx + B_k \sin kx = \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \left[ \frac{A_k}{\sqrt{A_k^2 + B_k^2}} \cos kx - \frac{-B_k}{\sqrt{A_k^2 + B_k^2}} \sin kx \right]$$

$$\sqrt{A_k^2 + B_k^2} \cos(kx + \varphi_k) = \frac{1}{2} \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \left[ e^{+j(kx + \varphi_k)} + e^{-j(kx + \varphi_k)} \right] \quad (2.7)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_k = -\frac{B_k}{A_k}; \quad \cos \varphi_k = \frac{A_k}{\sqrt{A_k^2 + B_k^2}}; \quad \sin \varphi_k = \frac{-B_k}{\sqrt{A_k^2 + B_k^2}} \quad (2.8)$$

Ținând seama că  $A_k = A_{-k}$ ,  $B_{-k} = -B_k$ ,  $\varphi_{-k} = -\varphi_k$ , repartizând liniile spectrale simetric față de originea axelor de coordonate, se obține:

$$f(x) = \frac{1}{2} A_0 + \left\{ \sum_{k=-1}^{-\infty} + \sum_{k=1}^{+\infty} \right\} \left[ \frac{1}{2} \sqrt{A_k^2 + B_k^2} e^{j(kx + \varphi_k)} \right]$$

unde pentru  $k=0$ , avem:  $B_0 = 0$ ,  $\varphi_0 = 0$ , iar

$$\frac{1}{2} \sqrt{A_k^2 + B_k^2} e^{j(kx + \varphi_k)} = \frac{1}{2} A_0,$$

rezultă

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \sqrt{A_k^2 + B_k^2} e^{j\varphi_k} e^{jkx} \quad (2.9)$$

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \sqrt{A_k^2 + B_k^2} e^{j\varphi_k} e^{j2\pi k f_1 t} \quad (2.10)$$

**Definind linia spectrală în repartizarea simetrică sub forma complexă:**

$$\bar{S}_k = \frac{1}{2} \sqrt{A_k^2 + B_k^2} e^{j\varphi_k} = S_k e^{j\varphi_k} \quad (2.11)$$

unde modulul liniei spectrale  $k$  este:

$$S_k = \frac{1}{2} \sqrt{A_k^2 + B_k^2} = \frac{1}{2} M_k \quad (2.12)$$

și faza aferentă este:

$$\varphi_k = \arctg\left(\frac{-B_k}{A_k}\right) = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{-B_k}{A_k}\right) \quad (2.13)$$

Se obține:

$$\bar{S}_k = \frac{1}{2} M_k e^{j\varphi_k} = \frac{1}{2} \left[ \frac{A_k}{M_k} + j \frac{-B_k}{M_k} \right] M_k = \frac{1}{2} [A_k - jB_k] \quad (2.14)$$

Considerând  $k \in [-\infty, +\infty]$

$$\begin{aligned} \bar{S}(kf_1) = S_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) [\cos 2\pi kf_1 t - j \sin 2\pi kf_1 t] dt \\ S(kf_1) &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j2\pi kf_1 t} dt \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(kf_1) e^{+j2\pi kf_1 t} \quad (2.16)$$

unde  $S(kf_1)$  este funcția spectrală a funcției periodice  $f(t)$ .

Funcțiile  $S(kf_1)$  și  $f(t)$  formează o pereche Fourier. Funcția spectru se poate exprima sub forma:

$$S(kf) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \bar{S}_k \delta(f - kf_1) = \sum S_k e^{j\varphi_k} \delta(f - kf_1) \quad (2.17)$$

în care se evidențiază suma tuturor liniilor spectrale din reprezentarea simetrică a spectrului.

Dezvoltarea în serie Fourier se prezintă sub două forme: *bilaterală*, cu evidențierea frecvențelor negative și *unilaterală*, prin utilizarea numai a frecvențelor pozitive (reale). Introducerea liniilor spectrale negative s-a efectuat pentru a evidenția și *faza* armonicilor componente, pentru a lărgi conținutul informațional al analizei.

Funcțiile de timp  $f(t)$  periodice prezintă funcții spectrale caracterizate prin linii spectrale distincte, discrete, având teoretic o infinitate de linii simetric repartizate față de originea axei frecvențelor. Din punct de vedere practic, din această mulțime de linii, însemnate au componenta continuă, considerată de frecvență  $f=0$ , armonica fundamentală  $f_1$  și primele armonici superioare. Armonicile superioare sunt, de obicei invers proporționale cu puterea întâia sau a doua a ordinului armonicii, astfel că modulul armonicilor de ordin superior unei valori  $k$  devine neglijabil.

## Spectrul Fourier al semnalelor neperiodice



O funcție  $f(t)$  continuă pe intervalul  $t \in \left[-\frac{T}{2}; +\frac{T}{2}\right]$  se poate dezvolta în [serie Fourier](#) după relația:

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos 2\pi k f_1 t + B_k \sin 2\pi k f_1 t].$$

În cazul limită când  $T \rightarrow \infty$ ,  $t \in [-\infty, +\infty]$ , rezoluția spectrului  $\Delta f \rightarrow 0$  și spectrul se transformă dintr-un spectru discontinuu, corespunzător funcțiilor periodice, într-un spectru continuu, aparținând funcțiilor neperiodice, unde:

$$A_0 = 2f_1 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt;$$

$$A_k = 2f_1 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos 2\pi k f_1 t dt$$

$$B_k = 2f_1 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin 2\pi k f_1 t dt$$

Rezultă:

$$f(t) = f_1 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{\infty} 2f_1 \left\{ \cos 2\pi k f_1 t \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) \cos 2\pi k f_1 \tau d\tau + \sin 2\pi k f_1 t \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) \sin 2\pi k f_1 \tau d\tau \right\} \quad (2.18)$$

În procesul de trecere la limită  $T \rightarrow \infty$ ,  $f_1 \rightarrow 0$  și se obține relația (2.19) cunoscută sub numele de *integrala Fourier*:

$$f(t) = 2 \int_0^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos 2\pi f(t - \tau) d\tau \quad (2.19)$$

Această relație se mai poate scrie sub forma:

$$f(t) = 2 \int_0^{\infty} \{A(f) \cos 2\pi f t + B(f) \sin 2\pi f t\} df \quad (2.20)$$

unde:

$$A(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau \quad (2.20')$$

este transformata Fourier cosinus, iar

$$B(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin 2\pi f \tau d\tau \quad (2.20'')$$

este transformata Fourier sinus.

Pentru a evidenția și faza unei linii spectrale curențe  $f$ , relația (2.20), se poate scrie:

$$f(t) = 2 \int_0^{\infty} M(f) \cos[2\pi f t + \varphi(f)] df \quad (2.21)$$

unde modulul:

$$M(f) = \sqrt{A^2(f) + B^2(f)} \quad (2.22)$$

iar faza:

$$\operatorname{tg} \varphi(f) = -\frac{B(f)}{A(f)} \quad (2.23)$$

Prin înlocuirea spectrului unilateral cu cel simetric, se obține:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} M(f) e^{j\varphi(f)} e^{j2\pi ft} df$$

s-a ținut seama de:

$$\cos[2\pi ft + \varphi(f)] = \frac{1}{2} \{ e^{j[2\pi ft + \varphi(f)]} + e^{-j[2\pi ft + \varphi(f)]} \},$$

Transformata Fourier sau funcția spectru Fourier a semnalului  $f(t)$  este:

$$S(jf) = S(f) = M(f) e^{j\varphi(f)} = A(f) - jB(f) \quad (2.24)$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df \quad (2.25)$$

Punând variabila  $t$  în loc de  $\tau$  în relațiile (2.20') și (2.20'')

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos 2\pi ft dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin 2\pi ft dt$$

sau

$$S(jf) = S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (2.26)$$

Funcțiile  $f(t)$  și  $S(f)$  formează o pereche Fourier:

$$f(t) \leftrightarrow S(f)$$

Liniile spectrale în reprezentarea simetrică au amplitudinea jumătate față de amplitudinea respectivă din reprezentarea unilaterală, având avantajul că evidențiază și faza oscilației de frecvență oarecare  $f$ .

Funcția semnal  $f(t)$  și funcția spectru  $S(f)$  exprimă în două forme diferite unul și același fenomen fizic. Transformata Fourier exprimă faptul că valoarea lui  $S(f)$  pentru o valoare  $f_0$  necesită cunoașterea evoluției lui  $f(t)$  pe tot intervalul de timp  $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ .

Printr-un proces de filtraj fin se poate obține linia spectrală de o anumită frecvență.

În transformata inversă se determină funcția semnal  $f(t)$  cunoscând funcția spectru  $S(f)$ . Pentru determinarea valorii lui  $f(t)$  la momentul  $t_0$ , este necesar spectrul pentru toate frecvențele până la infinit. Printr-un proces de filtraj fin, se obține valoarea  $f(t_0)$ .

■

Transformarea Fourier descompune un semnal dat în funcții exponențiale complexe de frecvențe diferite. Modalitatea prin care este realizată această descompunere este definită de următoarele ecuații

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-2j\pi ft} dt \quad (3.15)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{2j\pi ft} df \quad (3.16)$$

unde  $t$  reprezintă timpul,  $f$  reprezintă frecvența, iar  $x$  reprezintă semnalul original ( $x$  reprezintă semnalul în domeniul timp iar  $X$  reprezintă semnalul în domeniul frecvență).

Ecuația (3.15) poartă numele de *transformarea Fourier a lui  $x(t)$* , iar ecuația (3.16) poartă numele de *transformarea Fourier inversă a lui  $X(f)$* , care conduce la  $x(t)$ .

Semnalul  $x(t)$ , este multiplicat cu un termen exponențial, la o anumită frecvență dată  $f$ , după care se integrează rezultatul pe întreg domeniul temporal.

Să observăm că termenul exponențial din ecuația (3.15) poate fi scris sub forma

$$\cos(2\pi ft) + j\sin(2\pi ft) \quad (3.17)$$

*Expresia conține o parte reală, cea cu cosinus de frecvență  $f$ , și o parte imaginară, cea cu sinus de frecvență  $f$ . Prin urmare ceea ce se realizează în esență este:*

- *se multiplică semnalul original cu o expresie complexă conținând sinusoidale și cosinusoidale de frecvență  $f$ ;*
- *se integrează acest produs (cu alte cuvinte se adună toate punctele din acest produs);*
- *dacă rezultatul acestei integrări este o valoare mare, se spune că semnalul  $x(t)$ , are o componentă spectrală dominantă la frecvența  $f$ ;*
- *dacă rezultatul integrării este o valoare mică, aceasta înseamnă că semnalul nu conține o componentă majoră de frecvență  $f$ ;*
- *dacă rezultatul integrării este zero, atunci semnalul nu conține componente de frecvență  $f$ .*

Modalitatea în care această operație de integrare se desfășoară este următoarea: semnalul original este multiplicat cu termenul sinusoidal de frecvență  $f$ ; dacă semnalul conține o componentă de frecvență  $f$  cu amplitudine mare, atunci aceea componentă și termenul sinusoidal vor coincide, iar produsul lor va conduce la o valoare (relativ) mare. Aceasta arată că semnalul  $x$  are o componentă majoră de frecvență  $f$ .

Dacă semnalul original nu conține o componentă de frecvență  $f$ , acest produs va lua valoarea zero, ceea ce arată că semnalul nu conține o componentă de frecvență  $f$ . Dacă componenta de frecvență  $f$  nu este o componentă majoră a semnalului  $x(t)$ , atunci acest produs va conduce la o valoare (relativ) mică. Aceasta înseamnă că în

semnalul  $x$  componenta de frecvență  $f$  are o amplitudine mică, cu alte cuvinte nu este o componentă majoră a semnalului  $x$ .

**IMPORTANT:** *Deoarece integrala este definită pe domeniul timp de la  $-\infty$  la  $+\infty$ , informația furnizată de aceasta, corespunde tuturor instanțelor de timp. Rezultă că o componentă cu frecvența  $f$  se va reflecta în rezultatul final în aceeași măsură indiferent de momentul de timp la care apare (indiferent că apare la momentul de timp  $t_1$  sau la momentul de timp  $t_2$ , componenta spectrală  $f$ , va afecta în același mod rezultatul integrării). Acesta este motivul pentru care utilizarea transformării Fourier nu este recomandată pentru semnale a căror frecvență variază în timp (semnale ne-staționare).*

Transformarea Fourier precizează dacă o anumită componentă de frecvență există sau nu în semnalul original; această informație este independentă de momentul de timp la care apare această componentă în semnalul original. Prin urmare, aplicarea transformării Fourier trebuie condiționată de staționaritatea semnalului original.

Pentru semnale *ne-staționare* utilizarea transformării Fourier este justificată doar în acele situații în care ne interesează doar identificarea componentelor spectrale, nu și momentul de timp la care acestea apar. Pentru localizarea în timp a acestor componente spectrale se aplică transformarea Fourier inversă, rezultând reprezentarea în timp a semnalului original.

Distincția între semnale staționare și semnale ne-staționare este greu de făcut în situații practice. De exemplu, majoritatea semnalelor biologice sunt ne-staționare: ECG - (electrical activity of the heart, electrocardiograph), EEG - (electrical activity of the brain, electroencephalograph), EMG - (electrical activity of the muscles, electromyogram).

*O soluție pentru această problemă ar putea fi dată dacă se presupune că o anumită porțiune din semnalul ne-staționar este staționară. Dacă această regiune, în care se presupune că semnalul este staționar, este prea mică, atunci vom urmări acest semnal prin ferestre mai înguste, suficient de înguste ca porțiunea de semnal cuprinsă în acestea să fie cu adevărat staționară.*

Această abordare a condus la o nouă versiune a transformării Fourier, cunoscută sub numele de **transformarea Fourier în timp scurt** (*The Short Time Fourier Transform* - STFT).

Diferența între STFT și FT este minoră: *la STFT semnalul original este divizat în porțiuni suficient de mici pentru a putea presupune că sunt staționare. În acest scop se definește o funcție fereastră, notată  $w$ . Lățimea acestei ferestre va fi egală cu porțiunea de timp pe care staționaritatea semnalului este validă.*

*Funcția fereastră este inițial poziționată în originea axei timpului ( $t = 0$ ). Presupunând că lățimea ferestrei este de  $T$  secunde, la  $t = 0$  funcția fereastră va acoperi  $T/2$  secunde (se presupune că unitățile de timp sunt exprimate în secunde). Funcția fereastră și semnalul sunt apoi înmulțite; astfel numai primele  $T/2$  secunde ale semnalului sunt alese, cu ponderarea potrivită a ferestrei (dacă fereastra este un dreptunghi, cu amplitudine 1, atunci produsul poate fi egal cu semnalul). Apoi se presupune că acest produs este un nou semnal pentru care se va calcula transformarea Fourier.*

*Rezultatul acestei transformări este transformata Fourier a primelor  $T/2$  secunde din semnalul original. Dacă această porțiune de semnal este staționară, așa cum se presupune, atunci rezultatul obținut este reprezentarea corectă în frecvență a primelor  $T/2$  secunde din semnal.*

*Pasul următor va consta în deplasarea acestei ferestre (cu un număr de  $t_1$  secunde) într-o nouă poziție, multiplicarea cu semnalul, și calculul transformatei Fourier a produsului obținut.*

Această procedură este aplicată succesiv până când este atins "capătul semnalului".

Deoarece această transformare este o funcție de timp și de frecvență (spre deosebire de FT care este o funcție doar de frecvență), ea va trebui să fie bi-dimensională (tri-dimensională, dacă se consideră și amplitudinea).

## Transformarea Fourier Discretă (Discrete Fourier Transform - DFT)

### A. Semnale periodice

Considerând transformata Fourier bilaterală a funcției periodice  $x(t)$ , cu  $f_1=1/T$ :

$$S(qf_1) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j2\pi qf_1 t} dt \quad (2.29)$$

unde  $q$  reprezintă indicele liniei spectrale.

Funcția semnal corespunzătoare este:

$$x(t) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} S(qf_1) e^{j2\pi qf_1 t} \quad (2.30)$$

unde  $S(qf_1)$  este de formă discretă:

$$S(qf_1) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} S_q e^{j\varphi} \delta(f - qf_1) \quad (2.31)$$

În cazul în care semnalul  $x(t)$  este eșantionat sub forma  $x_n=x(n)$ ,  $dt=T_e$ ,  $T=NT_e$ , coeficientul Fourier  $S(qf_1)$  devine:

$$S(qf_1) = S(q) = \frac{1}{NT_e} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{\frac{-j2\pi qn}{N} T_e}$$

Rezultă:

$$S(q) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{\frac{-j2\pi qn}{N}}, \quad q = 0, 1, 2, \dots, N/2-1 \quad (2.32)$$

$$q = -1, -2, \dots, -(N/2-1)$$

În baza teoremei eșantionării, pentru  $N$  eșantioane ale semnalului  $x(t)$  se pot evidenția în total  $(N/2-1)$  linii spectrale pozitive și tot atâtea negative, precum și linia  $q=0$  care corespunde componentei continue. Se observă că:

$$S(-q) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{\frac{j2\pi qn}{N}} \quad (2.33)$$

$$S(-q) = S(N-q) \quad (2.34)$$

Trecând liniile spectrale negative în domeniul pozitiv, ocupând spațiul de la  $N/2$  până la  $N-1$ , rezultă  $N$  linii spectrale, ca și numărul de eșantioane ale semnalului  $x(t)$ .

Se notează:

$W = e^{-j2\pi/N}$ , rezulta  $W^{qn} = W^p$  cu  $p = qn$ , se obține:

$$S(q) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W^{qn} \quad (2.35)$$

unde:

$$S(q) = \text{Re}[S(q)] - j \text{Im}[S(q)]$$

având modulul:

$$M(q) = \sqrt{\operatorname{Re}^2[S(q)] + \operatorname{Im}^2[S(q)]}$$

și faza:  $\Phi(q) = \arctan g \frac{-\operatorname{Im}[S(q)]}{\operatorname{Re}[S(q)]}$

Scriind relația (2.35) sub forma matriceală, se obține:

$$\begin{bmatrix} S(0) \\ S(1) \\ S(2) \\ \vdots \\ S(N-1) \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W & W^2 & \dots & W^{N-1} \\ 1 & W^2 & W^4 & \dots & W^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W^{N-1} & W^{2(N-1)} & \dots & W^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

sau:

$$\mathbf{S} = \mathbf{F} \mathbf{x} \quad (2.36)$$

## B. Semnale neperiodice

În cazul funcțiilor neperiodice, se poate utiliza transformata Fourier unilaterală cunoscută sub denumirea de integrala Fourier:

$$x(t) = 2 \int_0^{\infty} \{A(f) \cos 2\pi f t + B(f) \sin 2\pi f t\} df$$

Prin operația de discretizare,  $f = q\Delta f$ ,  $\Delta f = \frac{1}{T}$ , se obțin  $Q$  linii spectrale discrete,  $q = 0, 1, 2, \dots, Q-1$ , unde  $Q = N/2$ .

Rezultă:

$$x(n) = 2 \sum_{q=0}^{N-1} A(q) \cos \frac{\pi q n}{Q} + B(q) \sin \frac{\pi q n}{Q} \quad (2.37)$$

unde:

$$A(q) = T_e \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos \frac{\pi q n}{Q}, \quad B(q) = T_e \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sin \frac{\pi q n}{Q} \quad (2.38)$$

Amplitudinea liniei spectrale este:

$$M = 2\sqrt{A^2(q) + B^2(q)}$$

$$x(n) = \Delta f \sum_{q=0}^{Q-1} X(q) e^{-j2\pi q n / N}$$

$$X(q) = T_e \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{\frac{-j2\pi q n}{N}}$$

$$S(q) = X(q) \Delta f = X(q) / T \text{ rezulta}$$

$$S(q) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{\frac{-j2\pi q n}{N}}$$

adică aceeași relație utilizată la analiza semnalelor periodice.

■

Forma continuă a transformatei Fourier este

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (3.19)$$

Prin discretizarea semnalului  $x(t)$  se obține secvența:

$$x(t) \rightarrow x(n\Delta t) = x(n) \quad (3.20)$$

care conduce la

$$\omega t \rightarrow 2\pi k \Delta f n \Delta t \quad (3.21)$$

dar

$$\Delta f = \frac{1}{N\Delta t} \quad (3.22)$$

prin urmare

$$\omega t \rightarrow \frac{2\pi nk}{N} \quad (3.23)$$

Se obține astfel o secvență  $x(n)$  care, introdusă în formula transformării Fourier, continue conduce la

$$X(k) = X(k\Delta\omega) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} \quad (3.24)$$

Însumarea realizată astfel reprezintă echivalentul unei integrări continue; ea a primit numele de Transformare Fourier Discretă (Discrete Fourier Transform - DFT). Pentru a simplifica formula aceasta se rescrie sub forma

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} \quad (3.25)$$

unde  $W_N^{nk} = e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}$  se numește factor de ponderare (twiddle factor).



## Transformarea DFT pe porțiuni

Transformarea Fourier realizează o reprezentare amplitudine-frecvență a unui anumit semnal, precizând doar dacă o anumită componentă de frecvență există sau nu în semnalul original și suprimând orice informație despre momentul de timp la care apare respectiva componentă. Acesta este motivul pentru care transformarea Fourier se pretează analizei semnalelor staționare. Transformarea Fourier poate fi utilizată pentru analizarea unui semnal nestaționar dacă interesează doar ce componente spectrale conține acel semnal nu și momentele de timp la care acestea apar.

Pentru obținerea unei reprezentări timp-frecvență s-a trecut la analiza spectrală a unor porțiuni de semnal a căror poziționare pe axa timpului să ofere analizei localizarea în timp a spectrului.

Transformarea Fourier pe intervale scurte de timp (*Short Time Fourier Transform – STFT*) a apărut din necesitatea *localizării în timp* a componentelor spectrale ce compun un semnal. Deși oferă informații despre localizarea în timp STFT prezintă o serie de neajunsuri ce vor fi prezentate în continuare, neajunsuri ce justifică apariția unei noi abordări în analiza semnalelor: analiza multirezolitivă.

Principial STFT determină prin analiză Fourier componentele spectrale ale mai multor segmente temporale ale semnalului. Selectarea segmentelor se face prin utilizarea unei funcții numită funcție fereastră, de unde și denumirea alternativă de Transformare Fourier cu Ferestre (*Windowed Fourier Transform*).

*Explicit STFT se determină prin aplicarea Transformării Fourier spectrul semnalului obținut prin convoluția în domeniul timp a semnalului analizat cu funcția de fereastră. Funcția fereastră este deplasată pe axa timpului și pentru fiecare poziție se determină spectrul semnalului convolutat, obținându-se astfel spectrul semnalului pentru diferite momente de timp. Convoluția din domeniul timp devine înmulțire în domeniul frecvenței, astfel că alegerea funcției fereastră  $w$  trebuie să ofere o bună localizare a spectrului în timp simultan cu minimizarea efectelor convoluției asupra spectrului semnalului.*

Modificarea spectrului prin convoluție echivalează cu pierderea localizării semnalului în domeniul frecvență.

Calitățile unei funcții fereastră sunt însă limitate de Principiul de Incertitudine al lui Heisenberg. Originar din fizică, acest principiu se aplică și în analiza semnalelor și afirmă că nu se poate determina exact ce componentă spectrală există la un moment dat, ci doar ce componente spectrale există într-un interval de timp. O bună localizare în domeniul timp „se plătește” printr-o slabă localizare în domeniul frecvenței și invers.

*În practică sunt utilizate mai multe funcții fereastră special proiectate pentru a conserva cât mai bine spectrul semnalului. Pentru aceasta Transformarea Fourier a unei funcții fereastră trebuie să fie o funcție a cărei energie este concentrată în jurul lui 0. Pentru evaluarea gradului de concentrare a energiei în jurul lui 0 se utilizează trei parametri descriși pe baza notațiilor din figura 2.5.*

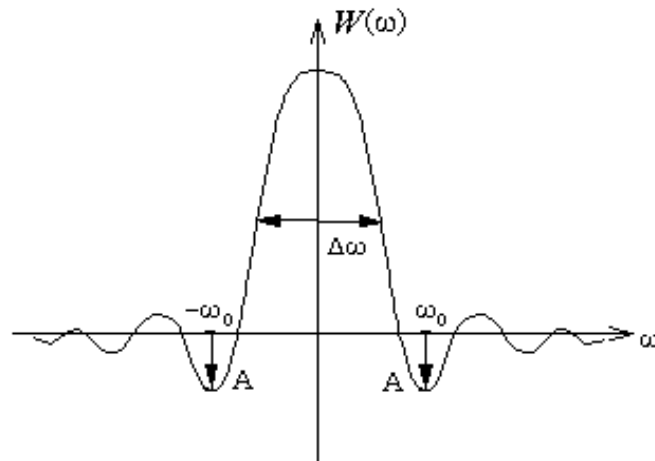


Figura 2.5. Fereastră Fourier

#### Parametrii ferestrei Fourier

- Lărgimea medie de bandă  $\Delta\omega$

$$\frac{|W(\Delta\omega/2)|^2}{|W(0)|^2} = \frac{1}{2} \quad (2.48)$$

- Amplitudinea maximă  $A$  a primilor lobi laterali (aflați la frecvență  $\pm\omega_0$ ), măsurată în decibeli:

$$A = 10 \log_{10} \frac{|W(\omega_0)|^2}{|W(0)|^2} \quad (2.49)$$

- Exponentul  $p$  ce descrie gradul de descreștere al transformării Fourier la frecvențe mari:

O concentrare bună a energiei în jurul frecvenței 0 este descrisă de valori mici ale  $\Delta\omega$  și  $A$  și valori mari pentru  $p$ . Tabelul 2.1. prezintă valori ale celor trei parametri pentru câteva funcții fereastră uzuale.

Fereastră	$w(t)$	$\Delta\omega$	$A$	$p$
Dreprunghiulară	1	0,89	-13 db	0
Hamming	$0,54 + 0,46 \cos(2\pi t)$	1,36	-43 db	0
Gaussiană	$\exp(-18t^2)$	1,55	-55 db	0
Hanning	$\cos^2(\pi t)$	1,44	-32 db	2

■

Există anumite proprietăți ale DFT care conduc la rezultate incorecte în anumite situații practice. Pentru îmbunătățirea acestor rezultate se propune utilizarea unei funcții pondere (sau funcție fereastră) notată  $w(n)$ . (vezi transformarea *STFT* din subcapitolul anterior).

$$\hat{X}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} w(n)x(n)W_N^{nk} \quad (3.27)$$

$$\hat{X}(k) = W(k) * X(k) \quad (3.28)$$

*Dacă se împarte direct semnalul din domeniul timp, aceasta va conduce la apariția unor ondulații în domeniul frecvență. Una dintre variantele posibile ar fi ajustarea funcției fereastră cu ajutorul căreia se împarte semnalul, cu o funcție care să conducă la mai puține ondulații în domeniul frecvență. Ondulațiile apar atunci când se realizează convoluția între reprezentările în frecvență ale semnalului original și ale funcției fereastră; deci reprezentarea în frecvență a funcției fereastră trebuie să aibă cât mai puține ondulații fără ca aceasta să altereze prea mult forma sa rectangulară.*

Cele mai utilizate astfel de funcții fereastră sunt :

### 1. Funcția dreptunghiulară

Funcția fereastră dreptunghiulară este aceeași cu cea utilizată pentru a produce un semnal de lungime finită dintr-un semnal definit pe un domeniu infinit. Reprezentarea funcției fereastră dreptunghiulară este făcută în fig. 3.2., iar în fig. 3.3. este indicată reprezentarea în frecvență.

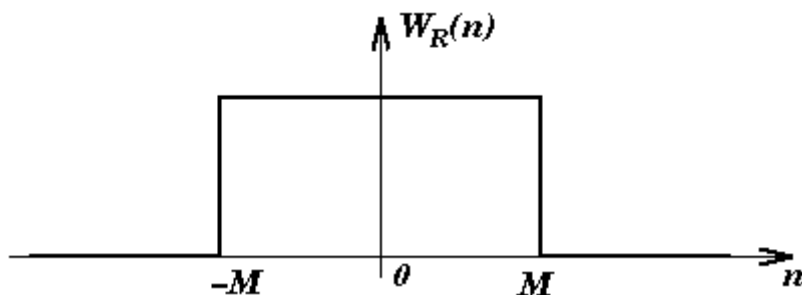


Fig. 3.2 Funcția fereastră dreptunghiulară în domeniul timp

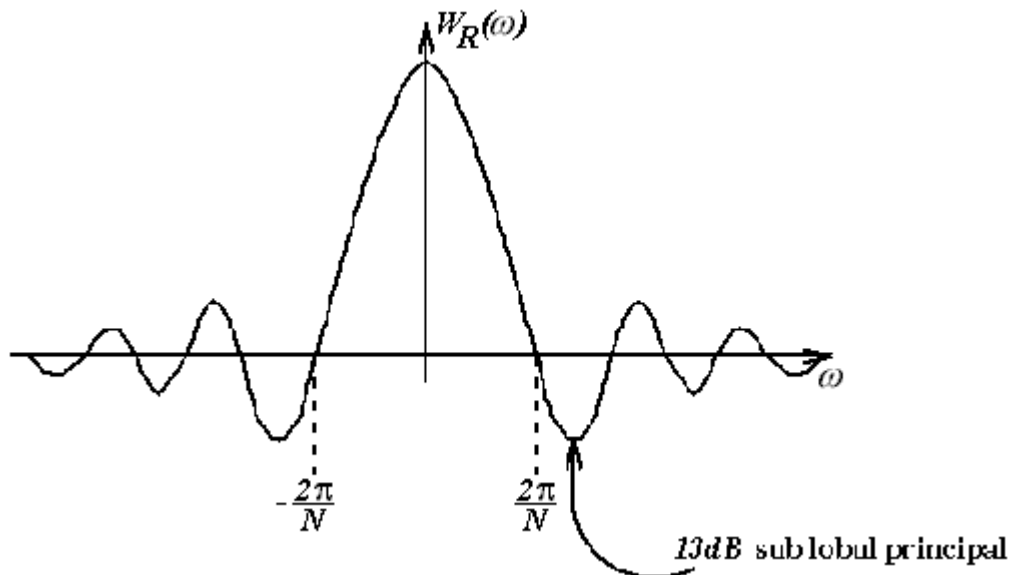


Fig. 3.3 Funcția fereastră dreptunghiulară în domeniul frecvență

*O funcție fereastră ideală ar trebui să aibă întreaga energie concentrată în lobul principal, iar scăderea la zero să se facă fără oscilații. Figura ilustrează foarte clar comportarea diferită a acestei funcții fereastră.*

## 2. Funcția Hanning/Hamming

Cele două funcții fereastră au la bază aceeași funcție; le deosebește doar valoarea parametrului  $\alpha$ :

- pentru  $\alpha = 0.5$  se obține funcția fereastră HANNING;
- pentru  $\alpha = 0.54$  se obține funcția fereastră HAMMING;

Reprezentarea funcțiilor fereastră Hanning/Hamming este făcută în fig. 3.4., iar în fig. 3.5. este indicată reprezentarea în frecvență

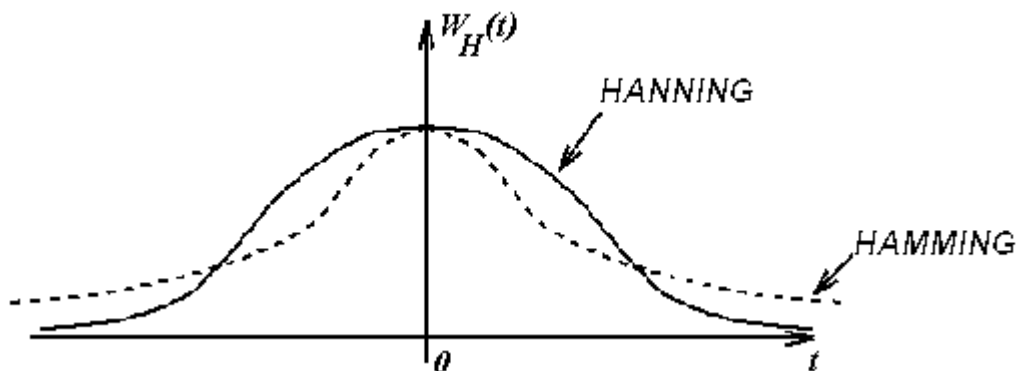


Fig. 3.4 Funcțiile fereastră Hanning/Hamming în domeniul timp

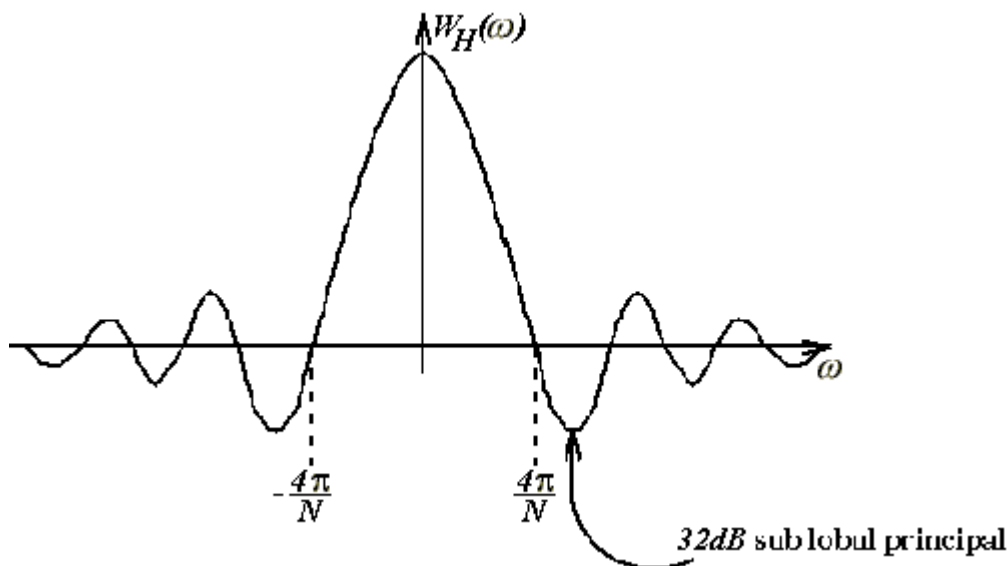


Fig. 3.5 Funcțiile fereastră Hanning/Hamming în domeniul frecvență

*Așa cum reiese din figură, această funcție fereastră are un lob principal mai mare (-32 dB), ceea ce înseamnă că se concentrează mai multă energie în lobul principal și mai puțină în acele oscilații. Aceasta înseamnă că în convoluția semnalului original cu funcția fereastră vor apare mai puține oscilații, deci ponderarea semnalului original este mai bine făcută.*

Funcția care definește aceste două ferestre este dată de

$$W(n) = \begin{cases} \alpha + (1 - \alpha) \cos \frac{2n\pi}{N} & -M < n < M \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \quad (3.29)$$

### 3. Funcția Kaiser

Funcția fereastră Kaiser-Bessel este o funcție Bessel modificată. Această funcție este definită printr-o însumare infinită, cu toate că sunt necesari numai 25 de termeni pentru a produce un rezultat mulțumitor. Ecuația care definește această funcție este

$$W(n) = \begin{cases} \frac{I_0 \left[ \alpha \sqrt{1 - \left( \frac{n}{M} \right)^2} \right]}{I_0(\alpha)} & -M < n < M \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \quad (3.30)$$

unde

$$I_0 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{k!} \left( \frac{x}{2} \right)^k \right]^2 \quad (3.31)$$

Variabila  $\alpha$  este cea care controlează raportul dintre dimensiunea lobilor secundari (dimensiunea oscilațiilor), și lățimea lobului central.

## Transformarea Fourier Rapidă (Fast Fourier Transform-FFT)

Metoda discretă de dezvoltare Fourier (DFT – Discret Fourier Transform) necesită un număr proporțional de  $N \times N$  operații multiplicare mediere, în timp ce metoda de transformare rapidă Fourier (FFT – Fast Fourier Transform) necesită un volum de operații proporțional cu  $N \log_2 N$ , ceea ce reprezintă o reducere substanțială a numărului de operații.

Fie  $x[n]$  un semnal cu suport 0:  $N-1$ . Transformata sa Fourier (TF) este:

$$S(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\omega n}$$

Această expresie poate fi utilizată pentru evaluarea spectrului în orice punct  $\omega \in [0, 2\pi]$ .

Transformata Fourier discretă (DFT) permite un mod de calcul mai eficient, prin care *se obține spectrul doar în  $N$  puncte echidistante*. DFT a semnalului  $x[n]$  cu suport 0:

$N-1$  este secvența :

$$S[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] w_N^{kn}, \quad k=0 : N-1, \quad w_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \quad (2.39)$$

*se notează*  $S[k] = TFD_N(x[n])$

Dacă  $x[n]$  este un semnal cu suport 0:  $N-1$  și  $S[k] = TFD_N(x[n])$  atunci are loc egalitatea

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S[k] w_N^{-kn} \quad \text{este transformata Fourier discretă inversă}$$

(TFDI).

Transformata Fourier rapidă (FFT) reprezintă o clasă de algoritmi rapizi de calcul al DFT pentru semnale cu suport finit. Algoritmii FFT se bazează pe ideea de reducere a calculului  $S[k] = TFD_N(x[n])$  la calculul unor DFT de lungime mai mică. Pentru simplificare, se consideră cazul în care  $N$  este o putere a lui 2. În acest caz decimarea este de fapt înjumătățire iar calculul  $S[k] = TFD_N(x[n])$  se reduce la calculul a două transformări  $S[k] = TFD_{N/2}(x[n])$ . Ideea este de a aplica recursiv procedeul de decimare pentru calculul fiecărei DFT de lungime mai mică.

**Algoritmul FFT cu decimare în timp:**

$$\begin{aligned} S[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] w_N^{kn} = \sum_{n \text{ par}}^{N-1} x[n] w_N^{kn} + \sum_{n \text{ impar}}^{N-1} x[n] w_N^{kn} = \\ &= \sum_{m=0}^{N/2-1} x[2m] w_N^{2km} + \sum_{m=0}^{N/2-1} x[2m+1] w_N^{k(2m+1)} \\ &= \sum_{m=0}^{N/2-1} x[2m] w_{N/2}^{km} + w_N^k \sum_{m=0}^{N/2-1} x[2m+1] w_{N/2}^{km} \end{aligned} \quad (2.40)$$

$TFD_N$  se calculează ca sumă a două DFT a unor semnale cu suport 0:  $N/2 - 1$ , formate din esantioane pare, respectiv impare ale semnalului  $x[n]$ . Notând  $x_p[m] = x[2m]$  și

$$x_i[m] = x[2m+1] \text{ și } U[k] = TFD_{N/2}(x_p[m]), \quad V[k] = TFD_{N/2}(x_i[m])$$

rezultă:  $S[k] = U[k] + w_N^k V[k]$   $k=0: N-1$  (Lema Danielson-Lanczos)

Funcția recursivă care calculează DFT este următoarea:

Funcția  $S = FFT(x, N)$

1. dacă  $N=1$  atunci

$S=x$

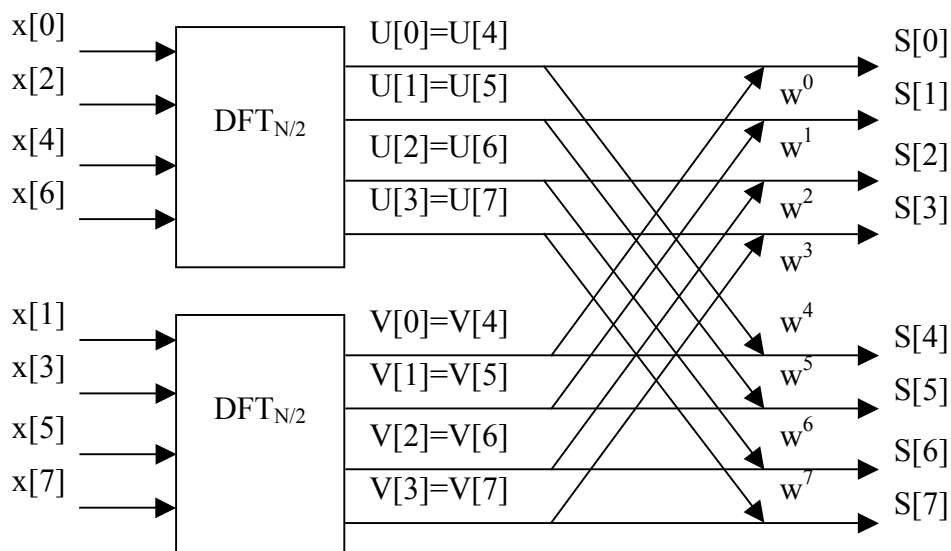
2. altfel

$x_p[m] = x[2m]$ ,  $x_i[m] = x[2m+1]$ , pentru  $m=0: N/2-1$

Calculează  $U = FFT(x_p, N/2)$ ,  $V = FFT(x_i, N/2)$  – apel recursiv

$S[k] = U[k] + w_N^k V[k]$ ,  $k=0: N/2-1$

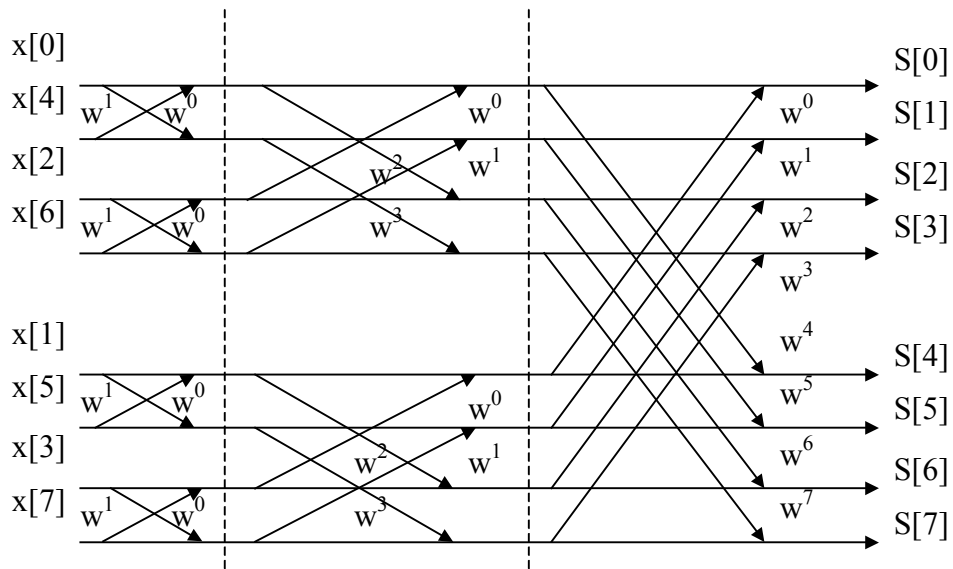
$S[k] = U[k - N/2] + w_N^k V[k - N/2]$ ,  $k=N/2: N-1$



**Figura 2.1** Calculul unei DFT de lungime  $N=8$  utilizând două DFT de lungime  $N/2=4$ .

În implementările practice ale algoritmului FFT nu se folosesc apeluri recursive ci variante iterative echivalente.





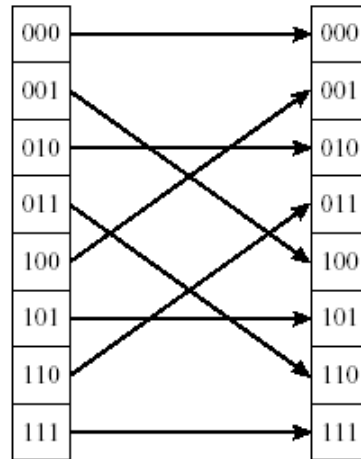
**Figura 2.2** Schema completa de calcul al DFT de lungime  $N=8$  (decimare in timp)

În Fig 2.2 liniile punctate separă etapele de calcul, în fiecare etapă se combină DFT de lungime mai mică pentru a obține un număr de două ori mai mic de DFT de lungime dublă. Numărul de etape este  $\log_2 N$ .

Eșantioanele semnalului de intrare sunt ordonate după numerele obținute prin inversarea biților indicilor.: 000, 100, 010, 110, 001, 101, 011, 111. (ordine bit inversă a indicilor)

În concluzie, algoritmul FFT cuprinde două părți.

1. se ordonează eșantioanele semnalului de intrare în *ordinea bit-inversă a indicilor*
2. se implementează *lema Danielson-Lanczos*



**Figura 2.3** Ordonarea esantioanelor semnalului de intrare in ordinea bit-inversa a indicilor

■

Din formula ce definește DFT se observă că aplicarea ei este destul de complicată; sunt necesare multe adunări și înmulțiri cu numere complexe.

Ideea care stă la baza transformării FFT este principiul "*divide et impera*"; semnalul original ce conține  $N$  eșantioane este împărțit în  $(N/2)$  secvențe. Transformarea DFT necesită  $(N-1)^2$  înmulțiri și  $N(N-1)$  adunări în mulțimea numerelor complexe; transformarea FFT împarte semnalul în serii de câte 2 eșantioane; acestea necesită o înmulțire și 2 adunări după care se recombina punctele rezultate.

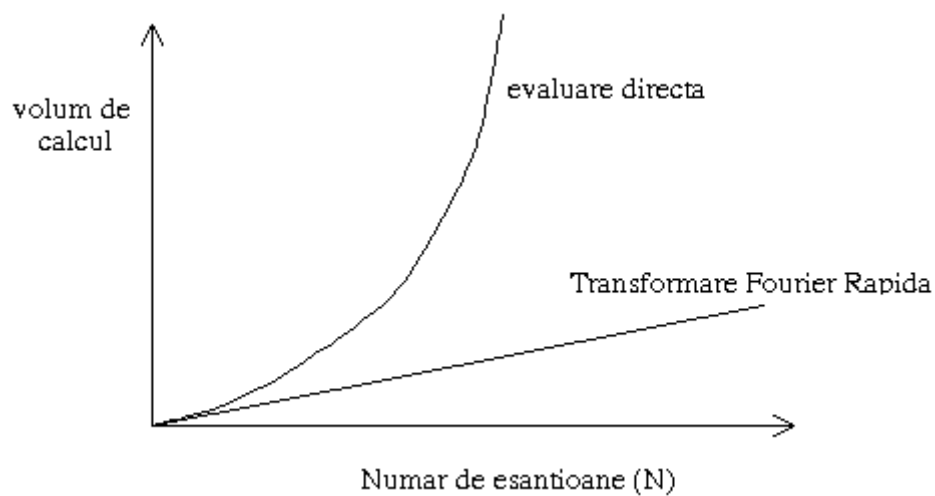


Fig. 3.6 Comparație între FFT și DFT

Figura 3.6 ilustrează comparația dintre volumul de calcul necesar pentru transformarea Fourier rapidă și cel necesar unei evaluări directe a transformării Fourier discretă.

## Transformarea cosinus discretă (Discrete Cosinus Transform – DCT)

Transformata Cosinus Discretă (DCT) asociată unui semnal unidimensional discret  $x$  se notează cu  $S$  și se definește astfel:

$$S[k] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos \frac{(2n+1)k\pi}{N}, \quad \forall k \in 0, \dots, N-1 \quad (2.41)$$

DCT poate fi definită atât pentru semnale unidimensionale, cât și pentru semnale bidimensionale. DCT constituie practic o versiune a DFT.

Deoarece  $DFT(x)$  are valori complexe, o informație completă este furnizată de *spectru și fază cumulate*. În plus, spectrul nu poate conduce la recuperarea în mod univoc a semnalului original. Aceste inconveniente au condus la definirea unor transformări înrudite cu DFT, care să aibă valori *reale* și să *conserve inversabilitatea*, cel puțin pe o clasă suficient de largă de semnale.

Considerând:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} S[k] \cos \frac{(2n+1)k\pi}{N} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \cos \frac{(2m+1)k\pi}{N} \cos \frac{(2n+1)k\pi}{N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \sum_{k=0}^{N-1} \cos \frac{(2m+1)k\pi}{N} \cos \frac{(2n+1)k\pi}{N} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{N-1} x[m] (\delta_0[N-m-n-1] + \delta_0[m-n]) \\ &= \frac{x[N-n-1] + x[n]}{2} \quad \forall n \in 0, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (2.42)$$

Relația (2.42) arată că dacă semnalul original este simetric față de axa mediană a suportului său:  $x[n] = x[N-n-1] \quad \forall n \in 0, \dots, N-1$ , atunci el poate fi recuperat în mod unic din valorile DCT asociate:

$$x[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} S[k] \cos \frac{(2n+1)k\pi}{N} \quad \forall n \in 0, \dots, N-1 \quad (2.43)$$

Dacă  $x$  nu are această proprietate de simetrie, atunci prin operația de *simetrizare*.

$$\tilde{x}[n] = \begin{cases} x[n] & n \in 0, \dots, N-1 \\ x[2N-n-1] & n \in N, \dots, 2N-1 \end{cases} \quad (2.44)$$

rezultă:

$$\tilde{S}[k] = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{n=0}^{2N-1} \tilde{x}[n] \cos \frac{(2n+1)k\pi}{2N} \quad \forall k \in 0, \dots, N-1 \quad (2.45)$$

$$\tilde{x}[k] = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{k=0}^{2N-1} \tilde{S}[k] \cos \frac{(2n+1)k\pi}{2N} \quad \forall n \in 0, \dots, N-1 \quad (2.46)$$

Proprietatea de inversabilitate a transformatei este importantă în algoritmul de decompresie. Dublarea dimensiunii semnalului original prin simetrizare nu este dezavantajoasă pentru compresie deoarece DCT posedă o proprietate de antisimetrie care permite reținerea doar a unei jumătăți din numărul valorilor sale.

$$\begin{aligned}
S[k] &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos \frac{(2n+1)k\pi}{N} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{N-1} S[p] \cos \frac{(2n+1)p\pi}{N} \cos \frac{(2n+1)k\pi}{N} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} S[p] \sum_{n=0}^{N-1} \cos \frac{(2n+1)k\pi}{N} \cos \frac{(2n+1)p\pi}{N} = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{N-1} S[p] (\delta_0[k] \delta_0[p] - \delta_0[N-k-p] + \delta_0[k-p]) \\
&= S[0] \delta_0[k] + \frac{1}{2} (S[k] - S[N-k]) u_0[k-1]
\end{aligned} \tag{2.47}$$

unde  $u_0$  este treapta unitară discretă.

- pentru  $k=0$ , relația (2.47) revine la  $S[0] = S[0]$
- pentru  $k \in 0, \dots, N-1$ , relația (2.47) se verifică dacă și numai dacă:

$$S[k] = \frac{1}{2} (S[k] - S[N-k]) \text{ rezultă } S[k] = -S[N-k]$$

În cazul semnalelor simetrizate, din cele  $2N$  valori ale transformatei se rețin doar primele  $N$ . ( $S[0] \dots S[N-1]$ ), deoarece se constată că:  $S[N] = -S[N]$  iar  $S[N+k] = -S[N-k]$ .

■

Transformarea cosinus discretă unidimensională (*Discret Cosinus Transform - DCT*) are relațiile de transformare directă și inversă

$$S[k] = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] \cos \frac{(2n+1)k\pi}{2N} \quad \forall k \in 0, \dots, N-1 \quad (2.45)$$

$$x[k] = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{S}[k] \cos \frac{(2n+1)k\pi}{2N} \quad \forall n \in 0, \dots, N-1 \quad (2.46)$$

Transformarea cosinus discretă bidimensională convertește un bloc pătrat de eşantioane de dimensiune  $n \times n$  într-un bloc pătrat de eşantioane de frecvență de aceeași dimensiune. Pentru cazul unui bloc  $8 \times 8$  de eşantioane spațiale se consideră ca eşantionul din stânga-sus are coordonatele (0,0) iar ultimul eşantion are coordonatele (7,7) asociat eşantionul din dreapta-jos. Punctului de coordonate (x,y) îi este asociată valoarea eşantionului  $f(x,y)$ . Transformarea DCT produce un nou bloc  $8 \times 8$  de eşantioane transformate (u,v) folosind formula

$$F(u, v) = \frac{1}{4} C(u) C(v) \left[ \sum_{x=0}^7 \sum_{y=0}^7 f(x, y) \cos \frac{(2x+1)u\pi}{16} \cos \frac{(2y+1)v\pi}{16} \right] \quad (3.50)$$

unde

$$C(z) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{daca } z = 0 \\ 1 & \text{daca } z \neq 0 \end{cases} \quad (3.51)$$

Se obțin astfel frecvențele spațiale  $F(u,v)$  care indică viteza de variație a eşantioanelor într-un punct dat. Fiecare componentă transformată conține informație referitoare la modul de variație al eşantionelor din cadrul blocului. Spre exemplu:

- $F(0,0)$  indică valoarea medie a blocului  $8 \times 8$
  - $F(1,0)$  indică viteza lentă de variație (frecvențele joase)
  - $F(7,7)$  indică viteza de variație cea mai mare în ambele direcții (frecvențe înalte)
- Coeficientul (0,0) este denumit coeficient de curent continuu și reprezintă valoarea medie a blocului.

Mulți dintre acești coeficienți sunt nuli sau au valori foarte aproape de zero. Compresia bazată pe transformata DCT este posibilă prin neglijarea coeficienților nuli sau aproape nuli.

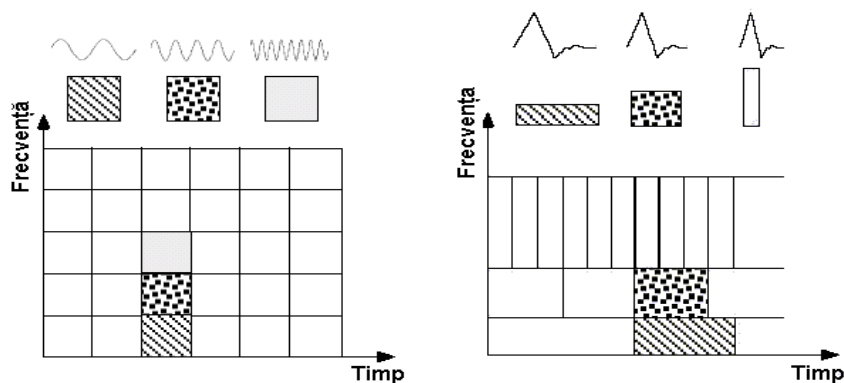
## Transformarea undină discretă (Discret Wavelet Transform-DWT)

### Transformarea Undină

Transformarea Undină a apărut ca răspuns la problemele ridicate de Transformarea Fourier legate de reprezentarea semnalelor în spațiul frecvență-timp. Soluția este utilizarea unei funcții de fereastră scalabilă. Ca și în analiza Fourier fereastra este deplasată de-a lungul semnalului și pentru fiecare poziție se determină spectrul. *Deosebirea constă în faptul că acest proces este repetat de mai multe ori, utilizându-se de fiecare dată o formă scalată a funcției fereastră inițiale (numită funcție de analiză undină), rezultând astfel o colecție de reprezentări timp-frecvență ale semnalului, fiecare având altă rezoluție, de unde și numele de Analiză multirezolitivă (Multiresolution Analysis – MRA).*

În contextul utilizării Transformării Undine se utilizează termenul de reprezentare *timp-scală*. Scala este strict legată de lărgimea ferestrei de observație: o scală mare corespunde selectării informațiilor globale ale semnalului, pe când o scală mică selectează detalii. Așa cum este definită, ea poate fi văzută ca inversul frecvenței: frecvențele mici (respectiv scalele mari) descriu caracteristici generale ale semnalului, pe când frecvențele mari (respectiv scalele mici) descriu comportări locale ale semnalului, detalii concentrate în general pe durate mici de timp.

*Această reprezentare se pretează cu succes la analizarea semnalelor ce conțin frecvențe înalte pentru perioade scurte de timp și frecvențe joase pentru perioade mai lungi de timp, semnale des întâlnite în practică.*



**Figura 2.6.** Rezoluția timp-frecvență oferită de analiza de tip Fourier (A) și respectiv analiza multirezolitivă (B).

Studierea Transformării Undine Continue (Continuous Wavelet Transform – CWT) ajută la înțelegerea aspectelor legate de analiza multirezolitivă a semnalelor. *Principala caracteristică a CWT este că funcția fereastră este modificată pe măsură ce transformarea este calculată pentru fiecare componentă spectrală. Formal, Transformarea Undină Continuă este descrisă prin relația (2.51)*

$$\gamma(s, \tau) = \int f(t) \Psi_{s, \tau}^*(t) dt \quad (2.51)$$

*Ecuția descrie descompunerea funcției  $f(t)$  într-un set de funcții de bază  $\psi(s, \tau)$  numite undine. Aceste funcții sunt generate dintr-o singură funcție prototip, așa numita funcție undină mamă, prin scalare și translație:*

$$\Psi_{s, \tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi\left(\frac{t - \tau}{s}\right) \quad (2.52)$$

*unde  $s$  este factorul de scalare și  $\tau$  factorul de translație.* Factorul  $\frac{1}{\sqrt{s}}$  este introdus pentru normalizarea energiei între diferite scalări.

*Transformarea inversă este descrisă de:*

$$f(t) = \frac{1}{C} \iint \gamma(s, \tau) \Psi_{s, \tau}(t) d\tau ds \quad (2.53)$$

unde  $C$  este constanta de normalizare definită astfel:

$$C = \int \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega, \quad (2.54)$$

iar  $\psi(\omega)$  reprezintă transformarea Fourier a lui  $\psi(t)$ .

*Teoria transformărilor undine operează doar cu proprietățile generale ale funcțiilor undine, definind un cadru general de lucru în care proiectarea funcțiilor este lăsată la dorințele și nevoile fiecăruia.*

Există totuși proprietăți pe care funcțiile undine trebuie să le îndeplinească. Condiția principală este *condiția de admisibilitate: funcțiile undine trebuie să aibă energie finită și medie temporală nulă*. Condiția de medie temporală nulă derivă din condiția de existență a transformării inverse:

$$C < +\infty \quad \Rightarrow \quad \int \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} < +\infty \quad (2.55)$$

*și garantează că funcțiile undine pot reconstrui un semnal fără pierdere de informație.* Condiția de admisibilitate impune ca transformarea Fourier a lui  $\psi(t)$  să fie nulă la frecvență zero:



$$\left| \Psi(\omega) \right|^2 \Big|_{\omega=0} = 0 \quad (2.56)$$

*ceea ce face ca funcțiile undine să aibă un spectru de tip filtru trece-bandă.*

O caracteristică importantă a funcțiilor undine este numărul de momente de anulare. O funcție  $\psi(t)$  are  $n$  momente de anulare dacă

$$M_p = \int_{-\infty}^{+\infty} t^p \Psi(t) dt = 0 \quad \text{pentru } 0 \leq p < n \quad (2.57)$$

Prin descompunerea în serie Taylor la  $t = 0$  (și considerând pentru simplitate  $\tau = 0$ ) se obține:

$$\gamma(s, 0) = \frac{1}{\sqrt{s}} \left[ \sum_{p=0}^n f^{(p)}(0) \int \frac{t^k}{p!} \Psi\left(\frac{t}{s}\right) dt + O(n+1) \right] \quad (2.58)$$

cu  $f^{(p)}$  derivata de ordin  $p$  a lui  $f$  și  $O(n+1)$  restul de termeni ai

descompunerii. Ținând cont de definiția momentului, relația (2.58) poate fi scrisă astfel:

$$\gamma(s, 0) = \frac{1}{\sqrt{s}} \left[ f(0) M_0 s + \frac{f^{(1)}(0)}{1!} M_1 s^2 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} M_2 s^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} M_n s^{n+1} + O(s^{n+2}) \right] \quad (2.59)$$

Condiția de admisibilitate asigură  $M_0 = 0$ . Dacă și celelalte momente  $M_1, M_2, \dots, M_n$  ale funcției undine  $\psi(t)$  sunt nule, atunci coeficienții transformării  $\gamma(s, \tau)$  vor scădea rapid odată cu scăderea scalei de analiză pentru semnale netede. Numărul de momente de anulare se mai numește și ordinul de aproximare. Pentru o transformare de ordin  $N$  eroarea de aproximare pentru scala  $s$  scade proporțional cu  $s^{-N}$ .

*Utilizarea Transformării Undine Continue în această formă nu se pretează unei utilizări practice din următoarele motive:*

- *Caracterul continuu al deplasării și scalării funcțiilor undine face ca acestea să compună o bază cvasi-ortogonală și deci valorile coeficienților obținuți să aibă un grad mare de redundanță.*
- *Numărul funcțiilor undine folosite este infinit.*
- *Pentru cele mai multe funcții Transformarea Undină nu are soluții analitice și face imposibilă utilizarea unor algoritmi rapizi.*

Primul pas în depășirea acestor neajunsuri este introducerea *Funcțiilor Undine Discrete*. Acestea sunt de fapt funcții continue pe porțiuni, obținute însă prin deplasări și scalări discrete, adică:

$$\Psi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{s_0^j}} \Psi\left(\frac{t - k\tau_0 s_0^j}{s_0^j}\right) \quad (2.60)$$

unde  $j, k$  sunt întregi,  $s_0 > 1$  este un pasul de dilatare fixat, iar factorul de translație  $\tau_0$  depinde de  $s_0$ . Reprezentarea unui semnal continuu cu ajutorul funcțiilor undine discrete oferă o serie de coeficienți undini. *Condiția necesară reconstrucției semnalului este ca energia semnalului să se situeze între două limite pozitive*

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j,k} \left| \langle f, \Psi_{j,k} \rangle \right|^2 \leq B\|f\|^2 \quad (2.61)$$

unde  $\|f\|^2$  este energia lui  $f(t)$ ,  $A > 0$ ,  $B < \infty$ .

*Alegerea corespunzătoare a funcției undine mamă face ca funcțiile obținute prin scalarea și translatarea acesteia să formeze o bază ortonormală, adică:*

$$\int \Psi_{j,k}(t) \Psi_{m,n}^*(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{dacă } j = m \text{ și } k = n \\ 0 & \text{altfel} \end{cases} \quad (2.62)$$

*Astfel orice semnal poate fi recompus prin combinația lineară formată din coeficienții undini și funcțiile undine ce formează baza ortonormală:*

$$f(t) = \sum_{j,k} \gamma(j,k) \Psi_{j,k}(t) \quad (2.63)$$

*Pentru limitarea numărului de funcții undine utilizate trebuie limitat numărul de translații și de scalări ale funcției undine mamă, ținându-se cont de modul în care este afectată calitatea transformării.*

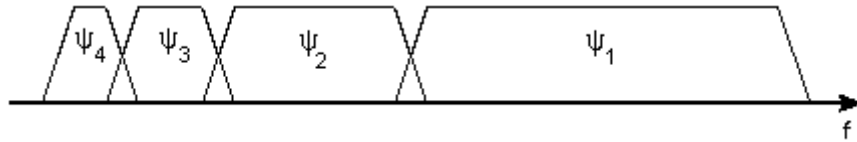
Numărul de translații necesare se determină ușor, fiind limitat de durata semnalului. Determinarea numărului de scalări necesare unei analize bune a semnalului impune analizarea funcțiilor undine dintr-o perspectivă frecvențială.

*Condiția de admisibilitate impune funcțiilor undine să aibă un spectru de tip trece bandă. Modificarea spectrului funcțiilor undine datorate scalării acestora în domeniul timp este descrisă formal de relația*

$$F\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (2.64)$$

Conform (2.64), dacă o funcție undină  $\psi_{j,k}(t)$  are spectrul de lărgime  $B$  centrat la frecvența  $\omega_j$ , atunci funcția  $\psi_{j+1,k}(t)$ , obținută prin dilatarea lui  $\psi_{j,k}(t)$  cu factorul de scală  $s_0$  va avea spectrul centrat pe  $\omega_{j+1} = \omega_j / s_0$  și de lărgime  $B / s_0$ .

Așa cum semnalul este analizat pe întreaga durată prin translatarea funcției undine mamă, spectrul semnalului este acoperit prin dilatări ale acesteia. Printr-o alegere corespunzătoare a funcției undine mamă spectrele versiunilor dilatate ale acesteia pot forma un spectru continuu, ca în figura 2.7:



**Figura 2.7.** Spectre undine contigue obținute prin scalarea funcției undine mamă în domeniul timp

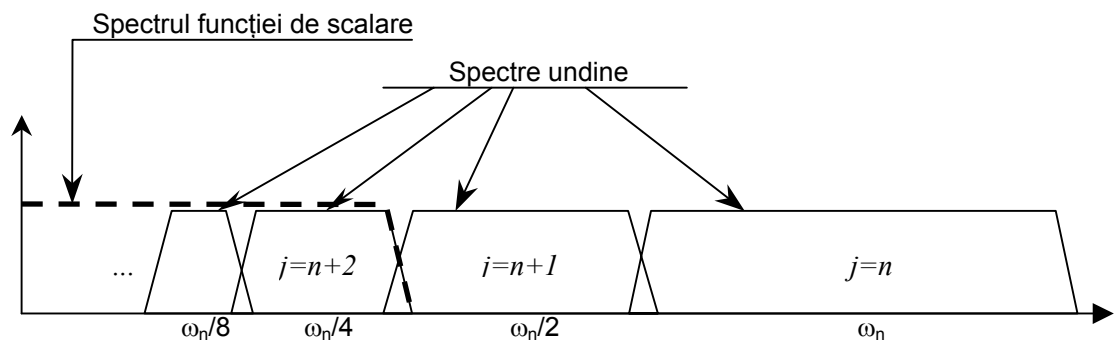
*În cazul unei eșantionări diadice a factorului de scalare fiecare nouă funcție undină obținută prin dilatare acoperă jumătate din spectrul rămas neacoperit către frecvențe mici. Astfel este nevoie de un număr infinit de funcții undine pentru acoperirea întregului spectru al semnalului.*

*Soluția este utilizarea unei funcții care să aibă un spectru de tip filtru trece-jos cu care să se analizeze spectrul de frecvențe mici al semnalului. Ideea utilizării unei astfel de funcții i-a aparținut lui Stéphane Mallat; acesta a numit-o funcție de scalare. Fiind un semnal cu spectru de tip trece jos funcția de scalare  $\varphi(t)$  admite o descompunere în componente undine:*

$$\varphi(t) = \sum_{j,k} \gamma(j,k) \Psi_{j,k}(t) \quad (2.65)$$

*Printr-o alegere corespunzătoare a funcției de scalare spectrul ei se poate încadra exact în banda de frecvențe mici neacoperită datorită impunerii unui număr finit de funcții undine. Astfel numărul infinit de funcții undine (începând de la o scală  $j$ ) necesar analizei frecvențelor joase este înlocuit prin funcția de scalare (figura 2.8).*

$$\varphi(t) = \sum_{j,k} \gamma(j,k) \Psi_{j,k}(t) \quad (2.66)$$



**Figura 2.8.** Limitarea numărului funcțiilor undine prin utilizarea funcției de scalare

*Utilizarea funcției de scalare introduce o pierdere de informație – nu din punct de vedere al reprezentării semnalului (întrucât acesta poate fi reconstruit fără pierderi), ci din punct de vedere al analizei undine, anumite informații despre caracteristicile semnalului pentru scale mari (frecvențe mici) fiind eliminate. Prin urmare lărgimea de bandă a funcției de scalare*

este un parametru ce intervine în acuratețea analizei undine. Cu cât aceasta este mai redusă, cu atât transformarea surprinde mai bine caracteristicile semnalului la frecvențe mici, însă și numărul de coeficienți crește.

Condiția de admisibilitate pentru funcția de scalare poate fi formulată similar cu condiția de admisibilitate pentru funcțiile undine:

$$\int \varphi(t) dt = 1 \quad (2.67)$$

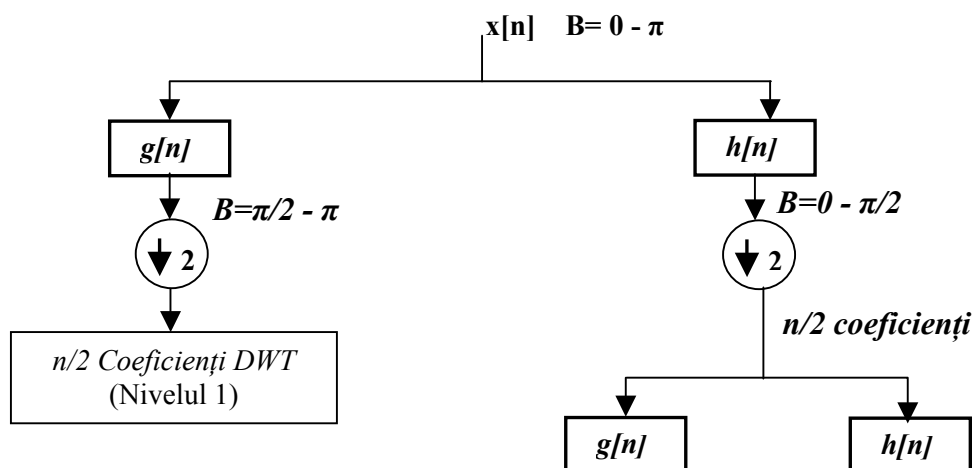
sau, altfel spus, momentul zero al funcției de scalare nu poate fi moment de anulare.

*Sintetizând putem spune că dacă funcțiile undine se comportă ca filtre de tip trece-bandă, iar funcția de scalare se comportă ca un filtru de tip trece jos, atunci o serie de funcții undine împreună cu o funcție de scalare formează un banc de filtre. Privind Transformata Undină ca un banc de filtre, aplicarea ei echivalează cu trecerea semnalului prin acest banc.*

Analizarea a unui semnal prin utilizarea unui banc de filtre era deja folosită în prelucrarea de semnale și cunoscută sub numele de codare în sub-bandă (subband coding). Această perspectivă asupra transformării undine conduce la o implementare rapidă bazată pe utilizarea filtrelor digitale: Transformarea Undină Discretă (Discrete Wavelet Transform – DWT).

*DWT analizează semnalul original pe diferite benzi de frecvență cu rezoluții diferite prin descompunerea acestuia într-o aproximare grosieră și una detaliată. Analiza se realizează prin aplicarea succesivă a două filtre: un filtru trece-sus (corespunzător funcțiilor undine) și un filtru trece-jos (corespunzător funcțiilor de scalare), fiecare acoperind jumătate din spectrul semnalului.*

*Pe fiecare nivel de descompunere se realizează filtrarea și subeșantionarea cu factor 2 (înjumătățirea numărului de componente) a semnalului. Ieșirea subeșantionată a filtrului trece-sus reprezintă coeficienții transformării pe nivelul curent. Ieșirea subeșantionată a filtrului trece jos este reintrodusă în secvența de filtrare pentru un nou nivel de descompunere. Operația de subeșantionare cu factor 2 are efectul creșterii scalei de analiză, ducând la înjumătățirea rezoluției în domeniu timp (prin dublarea scalei) și dublarea rezoluției în domeniul frecvență (prin înjumătățirea spectrului). Figura 2.9 ilustrează această procedură de filtrare repetată. Semnalul original este notat cu  $x[n]$ , filtrul trece-jos cu  $h[n]$ , iar filtrul trece-sus cu  $g[n]$  [1]. Lățimea de bandă a semnalului la fiecare nivel este notată în figură cu  $B$ .*



**Figura 2.9.** Filtrarea și subeșantionarea succesivă din cadrul procedurii DWT

Schema prezentată mai sus a fost propusă de Stephane Mallat, el fiind cel ce a descoperit legăturile existente între codarea în sub-bandă și baze ortonormale construite cu funcții undine. *Schema descrie un algoritm rapid de implementare a Transformării Undine Discrete, motiv pentru care a fost numit și Transformarea Undină Rapidă (Fast Wavelet Transform).* Se poate observa că schema a fost dezvoltată fără să se specifice o funcție undină sau o funcție de scalare.

■

Transformarea undină discretă (*Discrete Wavelet Transform-DWT*) apare în anul 1976 când Croiser, Esteban, și Galand găsesc o tehnică de decompunere a semnalelor discrete. Lucrând independent de aceștia, Crochiere, Weber, și Flanagan dezvoltă o tehnică similară pentru codarea semnalelor vocale. Această tehnică va primi denumirea de *codarea în sub-bandă (analysis subband coding)*. În 1983, Burt definește o tehnică foarte apropiată de aceasta; numele ei este *codare piramidală (pyramidal coding)*; cunoscută și sub numele de *analiză la rezoluții multiple (multiresolution analysis)*. Îmbunătățirea schemei de codare în sub-banda este făcută de Vetterli și Le Gall, în 1989.

Ideea de bază este aceeași cu cea utilizată la transformarea undină continuă. *Utilizând tehnici bazate pe filtre digitale, se obține o reprezentare în planul timp-scală (frecvență) a semnalului digital inițial.* Transformarea undină continuă reprezintă o corelare între forma de undă la diferite scale și semnalul original. *Pentru a calcula transformarea undină continuă, se modifică scala ferestrei de analiză, se deplasează această fereastră în timp, se multiplică cu semnalul, și se integrează pe întregul interval de timp.*

*În cazul semnalului discret, analiza semnalului la diferite scale se va face utilizând filtre cu frecvențe de tăiere diferite. Semnalul este trecut printr-o serie de filtre trece-sus pentru a se analiza componentele de înaltă frecvență ale acestuia; apoi el este trecut printr-o serie de filtre trece-jos pentru a analiza componentele de joasă frecvență ale acestuia.*

*Scala este modificată prin operații de supra-eșantionare și sub-eșantionare.*

*Sub-eșantionarea* unui semnal se realizează prin reducerea ratei de eșantionare, sau înlăturarea anumitor eșantioane din semnal. Sub-eșantionarea cu un factor  $n$  reduce numărul eșantioanelor din semnal de  $n$  ori.

*Supra-eșantionarea* unui semnal se realizează prin creșterea ratei de eșantionare a unui semnal adăugând noi eșantioane semnalului considerat. De exemplu, "supra-eșantionarea cu 2 a unui semnal" înseamnă adăugarea unui nou eșantion, de obicei un zero sau o valoare interpolată, între oricare două eșantioane ale semnalului. "Supra-eșantionarea cu un factor  $n$  a unui semnal" înseamnă creșterea numărului eșantioanelor din semnal cu un multiplu de  $n$ .

În forma sa standard, transformarea undină discretă utilizează o eșantionare a coeficienților DCWT după un grid diadic:  $s_0 = 2$  și  $\tau_0 = 1$ ,  $s_j = 2^j$  and  $\tau_j = k \cdot 2^j$ .

Deoarece semnalul este o funcție discretă definită pe domeniul timp, termenul funcție și termenul secvență vor fi utilizați cu același înțeles. Secvența se notează cu  $x[n]$ , unde  $n$  este un întreg. *Acest semnal (secvență) este trecut printr-un filtru digital trece-jos la jumătate de bandă având răspunsul la impuls  $h[n]$ . Filtrarea unui semnal corespunde operației matematice de convoluție a semnalului cu răspunsul la impuls al filtrului. Operația de convoluție în domeniul discret este definită astfel*

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] \quad (3.42)$$

Un filtru digital trece-jos la jumătate de bandă este un filtru care înlătură toate frecvențele mai mici decât jumătate din cea mai înaltă frecvență prezentă în semnal. De exemplu pentru un semnal având o componentă maximă de frecvență 1000 Hz, filtrul digital trece-jos la jumătate de bandă va elimina toate componentele cu frecvență mai mare de 500 Hz.

În cazul semnalelor discrete, frecvența este exprimată în radiani. Se spune de pildă că frecvența de eșantionare a unui semnal este  $2\pi$  radiani; în baza teoremei de eșantionare componenta de frecvență maximă din semnal este  $\pi$  radiani. Cu toate acestea, se utilizează Hz în multe situații pentru a specifica faptul că este vorba de o frecvență.

*După ce semnalul este trecut printr-un filtru trece-jos la jumătate de bandă, jumătate dintre eșantioane vor fi eliminate; deci componenta de frecvență maximă din semnal are acum  $\pi/2$  radiani față de  $\pi$  radiani cât avea înainte. Prin eliminarea din doi în doi a eșantioanelor se realizează o sub-eșantionare cu 2, adică semnalul va fi caracterizat de doar de jumătate din numărul eșantioanelor. Scala semnalului este astfel dublată. Deci filtrarea trece-jos elimină informația de înaltă frecvență, dar nu modifică scala. Scala este modificată numai de către procesul de sub-eșantionare.*

*Pe de altă parte, rezoluția depinde de cantitatea de informație conținută în semnal; prin urmare operațiile de filtrare vor afecta rezoluția. Filtrul trece-jos la jumătate de bandă înlătură jumătate dintre frecvențe, fenomen ce poate fi privit ca pierderea a jumătate din cantitatea de informație. Prin urmare prin operația de filtrare cantitatea de informație este înjumătățită. Cu toate acestea, rezoluția nu este afectată de operația de sub-eșantionare executată după filtrare pentru că eliminarea a jumătate dintre componentele de frecvență face să devină redundante jumătate din numărul total de eșantioane; deci acestea pot fi eliminate fără nici un risc de pierdere de informație.*

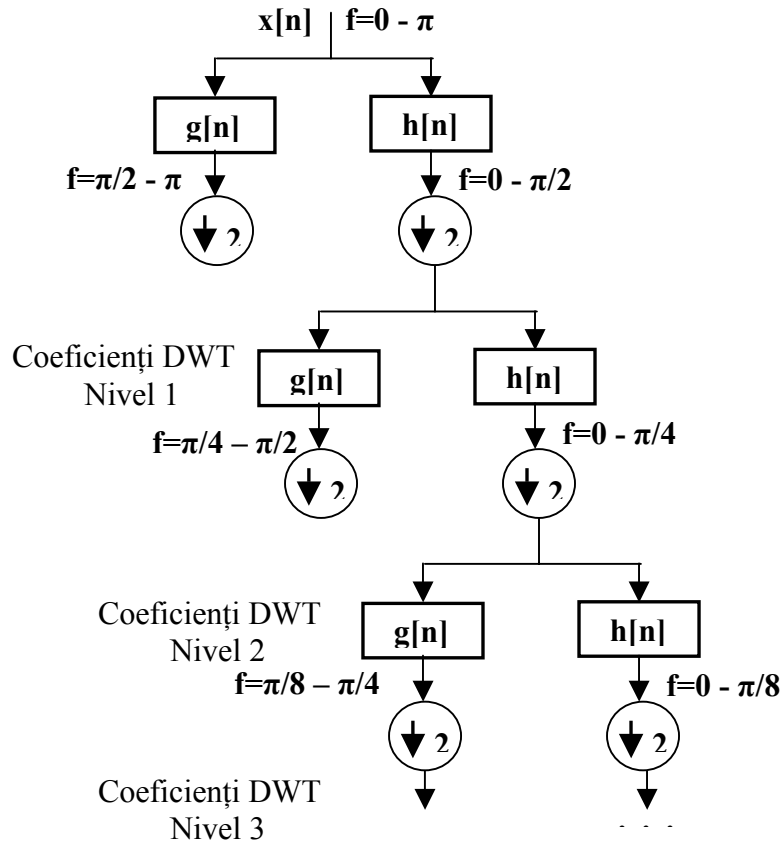
*Prin urmare, prin filtrarea trece jos se înjumătățește frecvența, dar scala rămâne nemodificată. Semnalul este apoi sub-eșantionat cu factor 2 deoarece jumătate dintre eșantioane au devenit redundante. În urma acestei operații de sub-eșantionare scala se dublează. Această procedură se exprimă matematic în cadrul ecuației 3.43*

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[2n-k] \quad (3.43)$$

*Modalitatea practică de calcul a transformării DWT este următoarea: DWT analizează semnalul original pe diferite porțiuni din axa frecvențelor (benzi de frecvență) cu rezoluții diferite prin descompunerea acestuia într-o aproximare grosieră și una detaliată; DWT aplică 2 seturi de funcții, numite respectiv funcții de scalare și funcții undine, care sunt asociate cu filtrul trece-jos respectiv cu filtrul trece-sus. Descompunerea semnalului în benzi diferite de frecvență se obține prin aplicarea succesivă a filtrelor trece-sus și trece-jos asupra semnalului reprezentat în domeniul timp.*

Semnalul original  $x[n]$  este trecut mai întâi printr-un filtru trece-sus la jumătate de bandă  $g[n]$  și apoi printr-un filtru trece-jos  $h[n]$ . După filtrare, ținând seama de teorema eșantionării jumătate din eșantioane pot fi eliminate, deoarece

componentă cu frecvență cea mai înaltă prezentă în semnal are acum  $\pi/2$  radiani față de  $\pi$  cât avea inițial. Prin urmare semnalul poate fi sub-eșantionat cu factor 2, păstrând



eșantioanele din 2 în 2. Acesta constituie o descompunere pe un nivel și poate fi exprimată matematic sub forma

$$y_{high}[k] = \sum_n x[n]g[2k - n] \quad (3.44)$$

$$y_{low}[k] = \sum_n x[n]h[2k - n]$$

unde  $y_{high}[k]$  și  $y_{low}[k]$  sunt ieșirile din filtrele trece-sus și respectiv trece-jos, după sub-eșantionarea cu 2.

*Această descompunere va avea ca efect înjumătățirea rezoluției în domeniul timp, deoarece semnalul original este acum caracterizat prin jumătate din numărul inițial de eșantioane. Pe de altă parte, această operație dublează rezoluția în domeniul frecvență, deoarece acum banda de frecvență a semnalului este doar jumătate din cea anterioară. Procedura de mai sus, cunoscută de asemenea sub*



numele de codarea în sub-bandă, poate fi aplicată în mod repetat pentru a obține descompuneri mai rafinate. **La fiecare nivel, filtrarea și eșantionarea vor conduce la înjumătățirea numărului de eșantioane (adică înjumătățirea rezoluției în domeniul timp) și la înjumătățirea benzii de frecvență (adică dublarea rezoluției în domeniul frecvență).**

### EXEMPLUL 3.1

Dacă semnalul original  $x[n]$  are 512 eșantioane, banda de frecvență  $(0 \div \pi)$  rad/s. La primul nivel de descompunere, semnalul este trecut prin cele două filtre trece-sus și trece-jos, iar apoi este sub-eșantionat cu 2. La ieșirea din *filtrul trece-sus* mai rămân 256 eșantioane, în banda de frecvență  $(\pi/2 \div \pi)$  rad/s. Aceste 256 eșantioane *constituie coeficienții DWT de pe primul nivel*. Ieșirea filtrului trece-jos este reprezentată tot de 256 eșantioane, dar banda de frecvență este acum  $(0 \div \pi/2)$  rad/s. Acest semnal este acum trecut prin aceleași două filtre trece-sus și trece-jos pentru o nouă descompunere. La ieșirea celui de-al doilea filtru trece-jos se obțin după sub-eșantionare, 128 de eșantioane în banda de frecvență  $(0 \div \pi/4)$  rad/s; la ieșirea celui de-al doilea filtru trece-sus se obțin după sub-eșantionare 128 de eșantioane în banda de frecvență  $(\pi/4 \div \pi/2)$  rad/s. *Semnalul obținut la ieșirea celui de-al doilea filtru trece-sus reprezintă al doilea nivel al coeficienților DWT.*

Rezoluția în domeniul timp a acestui semnal este jumătate din rezoluția semnalului obținut pe nivelul 1; rezoluția sa în domeniul frecvență este dublă față de rezoluția semnalului obținut pe nivelul 1. Deci rezoluția în domeniul timp a semnalului de pe nivelul 2 de descompunere este de 4 ori mai mică față de rezoluția în domeniul timp a semnalului original; analog rezoluția în domeniul frecvență a crescut de 4 ori în raport cu aceea a semnalului original.

Semnalul de la ieșirea filtrului trece-jos este trecut printr-o nouă secvență de filtre pentru a obține descompuneri mai rafinate ale semnalului. Procesul de descompunere este continuat până când rămân doar *două eșantioane*. În cazul acestui exemplu vor fi doar 8 nivele de descompunere, fiecare înjumătățind numărul de eșantioane de pe nivelul anterior. *Transformarea DWT a semnalului original se obține prin concatenarea tuturor coeficienților începând cu primul nivel de descompunere. Deci semnalul transformat va avea același număr de coeficienți ca și semnalul original.*

*Frecvențele cele mai importante din semnalul original vor apare sub forma celor mai mari amplitudini în acea regiune a semnalului transformat DWT care include acele frecvențe particulare. Diferența dintre această transformare și transformarea Fourier este dată de faptul că localizarea acestor frecvențe în timp nu va fi pierdută. Cu toate acestea, localizarea în timp va avea o rezoluție ce depinde de nivelul pe care aceasta apare. Dacă informația importantă din semnalul original se găsește în zona frecvențelor înalte, localizarea în timp a acestor frecvențe va fi mai precisă, deoarece ele sunt caracterizate printr-un număr mai mare de eșantioane. Dacă informația importantă din semnalul original se găsește în zona frecvențelor foarte*

joase, localizarea în timp nu va fi foarte precisă, deoarece descrierea semnalului la aceste frecvențe este făcută cu un număr mai mic de eșantioane. În concluzie procedura expusă mai sus oferă rezoluție bună în domeniul timp la frecvențe înalte, și o bună rezoluție în domeniul frecvență la frecvențe mici. Majoritatea semnalelor întâlnite în practică sunt bine descrise astfel.

*Benzile de frecvență care nu sunt foarte proeminente în semnalul original vor avea o amplitudine foarte mică; partea din semnalul DWT care le conține poate fi eliminată fără o pierdere semnificativă de informație, ceea ce permite compresia datelor din semnalul original.*

## Transformarea Karhunen-Loève

Transformarea Karhunen-Loève este cunoscută și sub alte nume: "analiza componentelor principale" (*principal component analysis*), "transformata Hotelling" (*Hotelling transform*) sau "abordarea folosind vectorii proprii" (*eigenvector approach*).

Fundamentarea matematică a acestei transformări este dată de proprietățile statistice ale vectorilor asupra cărora operează.

Se pleacă de la un set de valori aleatoare:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Vectorul medie a acestor valori este definit de:

$$m_x = E\{x_j\}$$

unde  $E(x)$  este operatorul de mediere statistică. Vectorul medie  $m_x$  se calculează pe componente

$$m_x = \begin{bmatrix} m_{x1} \\ m_{x2} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

unde  $m_{xi} = E(x_i)$ .

Matricea de covariație a vectorului  $\mathbf{x}$  este o matrice pătratică de dimensiune  $n \times n$

$$\mathbf{C}_x = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ \sigma_{1n} & \cdots & \sigma_{n,n} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

unde  $\sigma_{i,j} = \mathbf{cov}(x_i, x_j)$  reprezintă covariația variabilelor aleatoare  $x_i, x_j$ . Dacă cele două variabile aleatoare sunt *necorelate*, covariația lor este zero.

Matricea de covariație a oricărui vector aleator este simetrică și pozitiv semidefinită.

Dacă există  $M$  variabile aleatoare, componente ale unui vector  $\mathbf{x}$ , vectorul medie  $m_x$  poate fi aproximat prin

$$m_x = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M x_k \quad (3.35)$$

iar matricea de covariație poate fi aproximată prin

$$C_x = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M x_k x_k^T - m_x m_x^T \quad (3.36)$$

Deoarece matricea este reală și pozitiv semidefinită, se pot găsi întotdeauna  $n$  vectori proprii ortonormali. **Se poate găsi astfel o bază în raport cu care elementele matricei să fie cât mai simple posibil.** Baza astfel obținută definește un sistem de coordonate a cărei origine este centrul setului de valori aleatoare ce definesc axele și ale cărei axe sunt pe direcțiile vectorilor proprii ai matricei  $C_x$ .

Pentru a găsi vectorii proprii ai lui  $C_x$  trebuie soluționată ecuația

$$\det(C_x - \lambda I) = 0 \quad (3.37)$$

unde  $I$  este matricea unitate de ordin  $n$ .

Soluționarea acestei ecuații va conduce la vectorii proprii și valorile proprii corespunzătoare. Se notează cu  $e_i$  vectorii proprii și cu  $\lambda_i$  valorile proprii corespunzătoare,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Presupunem valorile proprii aranjate în ordine descrescătoare  $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$ ,  $\forall i = 1, \dots, n-1$ .

Se definește matricea  $A$  de dimensiune  $n \times n$  având liniile formate cu vectorii proprii ai lui  $C_x$  (prima linie conține vectorul propriu corespunzător celei mai mari valori proprii, iar ultima linie conține vectorul corespunzător celei mai mici valori proprii).

Se poate construi un vector  $y$  sub forma

$$y = A \cdot m_x$$

**Această ecuație poartă numele de transformare Hotelling.** Vectorul rezultat are proprietatea că  $m_y = 0$ . Matricea de covarianță a lui  $y$  poate fi obținută în funcție de  $A$  și  $C_x$  astfel

$$C_y = A C_x A$$

unde  $C_y$  este matrice diagonală, având elementele nenule egale cu valorile proprii ale lui  $C_x$ .

Una dintre cele mai importante proprietăți ale transformării Hotelling este posibilitatea reconstrucției lui  $x$  pe baza lui  $y$ . Deoarece liniile lui  $C_x$  sunt vectori ortonormali,  $A^{-1} = A^T$ , deci

$$C_y = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

$$x = A^T y + m_x \quad (3.39)$$

Dacă ordonăm mulțimea vectorilor proprii ai lui  $C_x$  după valorile proprii corespunzătoare și utilizăm primii  $k$  vectori din mulțimea ordonată, va rezulta o matrice  $A_k$  iar vectorii  $y$  vor rezulta de dimensiune  $k$ .

Vectorul reconstruit de  $A_k$  este:

$$\hat{x} = A_k^T y + m_x \quad (3.40)$$

Eroarea introdusă de acest proces se numește eroare medie pătratică (*mean square error- $e_{ms}$* ) și poate fi evaluată cu precizie

$$e_{ms} = \sum_{j=1}^n \lambda_j - \sum_{j=1}^k \lambda_j = \sum_{j=k+1}^n \lambda_j \quad (3.41)$$

Minimizarea acestei erori se face prin selecția celor  $k$  vectori proprii astfel încât ei să corespundă celor mai mari valori proprii  $\lambda_i$ . Prin urmare transformarea Hotelling este optimă în sensul că ea *minimizează eroarea pătratică medie între vectori și aproximațiile lor*.

## DETERMINAREA UNEI TRANSFORMĂRI ORTOGONALE OPTIME

Se propune determinarea unei transformări ortogonale ce permite reprezentarea semnalului și conduce la realizarea unui optim în raport cu criteriul considerat. Fie  $\mathbf{T}$  transformarea ortogonală dată de

$$\mathbf{T}^T = [\boldsymbol{\varphi}_1 \ \boldsymbol{\varphi}_2 \ \dots \ \boldsymbol{\varphi}_n] \quad (3.52)$$

unde  $\boldsymbol{\varphi}_i$  sunt vectori  $n$  dimensionali. Se consideră că vectorii bazei  $\{\boldsymbol{\varphi}_i\}$  sunt reali și ortonormați, adică

$$\boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{\varphi}_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (3.53)$$

Pentru fiecare vector  $\mathbf{x}$  aparținând unei clase date, se obține

$$\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{x} \quad (3.54)$$

unde  $\mathbf{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$  iar  $\mathbf{y}^T = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n]$ .

Din ecuațiile 3.52 și 3.53 rezultă că  $\mathbf{T}^T \mathbf{T} = \mathbf{I}$ ; prin urmare

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}^T \mathbf{y} = [\boldsymbol{\varphi}_1 \ \boldsymbol{\varphi}_2 \ \dots \ \boldsymbol{\varphi}_n] \mathbf{y} \quad (3.55)$$

care conduce la

$$\mathbf{x} = y_1 \boldsymbol{\varphi}_1 + y_2 \boldsymbol{\varphi}_2 + \dots + y_n \boldsymbol{\varphi}_n = \sum_{i=1}^n y_i \boldsymbol{\varphi}_i \quad (3.56)$$

Se dorește păstrarea doar a unui subset  $[y_1 \ y_2 \ \dots \ y_m]$  dintre cele  $n$  componente ale lui  $\mathbf{y}$  astfel încât cu ajutorul acestor componente rămase  $\mathbf{x}$  să poată fi estimat. Pentru aceasta, cele  $n-m$  componente rămase se vor înlocui cu constante  $b_i$ .

$$\hat{\mathbf{x}}(m) = \sum_{i=1}^m y_i \boldsymbol{\varphi}_i + \sum_{i=m+1}^n b_i \boldsymbol{\varphi}_i \quad (3.57)$$

unde  $\hat{\mathbf{x}}(m)$  reprezintă estimția lui  $\mathbf{x}$ .

Eroarea introdusă prin neglijarea celor  $n-m$  termeni poate fi reprezentată sub forma

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}(m) \quad (3.58)$$

unde  $\Delta \mathbf{x}$  este un vector de eroare. Prin urmare se obține

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \sum_{i=1}^m y_i \boldsymbol{\varphi}_i - \sum_{i=m+1}^n b_i \boldsymbol{\varphi}_i \quad (3.59)$$

Din 3.56 și 3.59 rezultă că

$$\Delta \mathbf{x} = \sum_{i=m+1}^n (y_i - b_i) \boldsymbol{\varphi}_i \quad (3.60)$$

Prin urmare eroarea medie pătratică este dată de

$$\varepsilon(m) = E\{\|\Delta \mathbf{x}\|^2\} \cdot E\{(\Delta \mathbf{x})^T (\Delta \mathbf{x})\} \quad (3.61)$$

Înlocuind ecuația 3.60 în ecuația 3.61 se obține

$$\varepsilon(m) = E\left\{\sum_{i=m+1}^n \sum_{j=m+1}^n (y_i - b_i)(y_j - b_j) \boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{\varphi}_j\right\} \quad (3.62)$$

care după simplificare conduce la

$$\varepsilon(m) = \sum_{j=m+1}^n E\{(y_i - b_i)^2\} \quad (3.63)$$

Din ecuația 3.63 rezultă că pentru valori distincte ale lui  $\boldsymbol{\varphi}_i$  respectiv  $b_i$  se obțin valori distincte ale lui  $\varepsilon(m)$ . Se caută acele valori  $\boldsymbol{\varphi}_i$  respectiv  $b_i$  care minimizează  $\varepsilon(m)$ ; procesul se desfășoară în doi pași:

**Pas 1: Valoarea optimă a lui  $b_i$**

$$\frac{\partial}{\partial b_i} E\{(y_i - b_i)^2\} = -2[E\{y_i\} - b_i] = 0 \quad (3.64)$$

care conduce la

$$b_i = E\{y_i\}$$

Acum, din ecuațiile (3.53) și (3.55) se obține

$$y_i = \boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{x} \quad (3.65)$$

Prin urmare se determina că

$$b_i = \boldsymbol{\varphi}_i^T E\{X\} = \boldsymbol{\varphi}_i^T \bar{\mathbf{x}} \quad (3.66)$$

Deoarece cantitatea  $y_i \cdot b_i$  din ecuația 3.63 este un scalar, se poate scrie  $\varepsilon(m)$  în forma ilustrată de ecuația 3.67

$$\varepsilon(m) = \sum_{i=m+1}^n \{(y_i - b_i)(y_j - b_j)^T\} \quad (3.67)$$

Substituind  $y_i = \boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{x}$  și  $b_i = \boldsymbol{\varphi}_i^T \bar{\mathbf{x}}$  în ecuația 3.65 obținem

$$\varepsilon(m) = \sum_{i=m+1}^n \boldsymbol{\varphi}_i^T E \left\{ (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \right\} \boldsymbol{\varphi}_i \quad (3.68)$$

Deoarece  $\Sigma_x = E \{ (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \}$  este matricea de covarianță a lui  $\mathbf{x}$ , rezultă

$$\varepsilon(M) = \sum_{i=M+1}^N \Phi_i^T \Sigma_x \Phi_i \quad (3.69)$$

### **Pas 2: Valoarea optimă a lui $\boldsymbol{\varphi}_i$**

Pentru a obține valoarea minimă a lui  $\boldsymbol{\varphi}_i$  trebuie minimizat  $\varepsilon(m)$  în raport cu  $\boldsymbol{\varphi}_i$  satisfacând constrângerea  $\boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{\varphi}_i = 1$ . Se utilizează metoda multiplicatorilor lui Lagrange pentru a minimiza

$$\hat{\varepsilon}(m) = \varepsilon(m) - \sum_{i=m+1}^n \beta_i [\boldsymbol{\varphi}_i^T - \boldsymbol{\varphi}_i] \quad (3.70)$$

în raport cu  $\boldsymbol{\varphi}_i$  unde  $\beta_i$  reprezintă multiplicatorii Lagrange.

care conduce la

$$\Sigma_x \boldsymbol{\varphi}_i = \beta_i \boldsymbol{\varphi}_i \quad (3.71)$$

Prin definiție, ecuația 3.71 implică faptul că  $\boldsymbol{\varphi}_i$  este un vector de valori proprii al matricei de covarianță  $\Sigma_x$  și  $\beta_i$  este valoarea proprie cu numărul  $i$ . Înlocuind  $\beta_i$  cu  $\lambda_i$ , și substituind ecuația 3.74 în 3.73, *minimul* în sensul metodei celor mai mici pătrate este dat de

$$\varepsilon_{\min}(m) = \sum_{i=m+1}^n \lambda_i \quad (3.72)$$

Dezvoltarea definită în ecuația 3.56 este exprimată în funcție de vectorii proprii ai matricii de covarianță. Această descompunere se numește *descompunere Karhunen-Loève*. Componentele  $\boldsymbol{\varphi}_i$  din ecuația 3.52 ce definește  $\mathbf{T}$ , sunt vectori proprii ai matricii de covarianță  $\Sigma_x$ . Transformarea  $\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{x}$  se numește transformarea Karhunen-Loève (KLT).

Problema minimizării lui  $\varepsilon(m)$  este cunoscută în literatura de specialitate sub numele de analiza factorială sau problema convergenței stocastice. În analiza acestei probleme teoria statistică pune în evidență următoarele rezultate:



- în reprezentarea semnalelor utilizând criteriul erorii pătratice medii, transformarea Karhunen-Loève este transformarea optimă;
- deoarece  $\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{x}$ , matricea de covarianță  $\mathbf{\Sigma}_x$  este dată de:

$$\mathbf{\Sigma}_x = \mathbf{T}\mathbf{\Sigma}_x\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}\mathbf{\Sigma}_x\mathbf{T}^T \quad (3.76)$$

Deoarece  $\mathbf{T}$  este alcătuită din vectori proprii ai lui  $\mathbf{\Sigma}_x$  rezultă că

$$\mathbf{\Sigma}_y = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \quad (3.77)$$

unde  $\lambda_i$   $i = 1, 2, \dots, n$  sunt valorile proprii ale lui  $\mathbf{\Sigma}_x$ . Cum  $\mathbf{\Sigma}_y$  este o matrice diagonală, componentele vectorului transformat sunt necorelate<sup>[45]</sup>.

#### ***Criteriul dispersiei***

Ecuția 3.70 ilustrează faptul că eficacitatea unei componente  $y_i$  a vectorului transformat  $\mathbf{y}$  în a reprezenta vectorul inițial  $\mathbf{x}$ , este determinată de valorile proprii corespunzătoare. Dacă o anumită componentă  $y_k$  este îndepărtată, valoarea erorii medii pătratice crește cu  $\lambda_k$ , valoarea proprie corespunzătoare. Rezultă că vor fi selectate un număr de  $m$  componente  $y_i$  caracterizate de cele mai mari valori proprii, iar restul componentelor  $y_i$  vor fi înlocuite cu valori constante  $b_i$  pentru  $i = m+1, m+2, \dots, n$ . (Deoarece  $b_i = \phi_i^T \bar{\mathbf{x}}$  se observă că se pot reduce componentele  $y_i$  rămase la zero dacă datele inițiale sunt pre-procesate astfel încât  $\bar{\mathbf{x}} = 0$ ).

Deoarece componentele diagonalei principale a lui  $\mathbf{\Sigma}_y$  sunt vectori proprii, ei corespund dispersiilor componentelor  $y_i$  ale vectorului transformat. Pentru orice alte transformări,  $\mathbf{\Sigma}_y$  are termenii de pe diagonala principală diferiți de zero. Prin urmare un criteriu fezabil de selecție a componentelor transformate este acela de a reține acele  $m$  componente cu cea mai mare varianțe; acest proces de selecție se va numi *criteriul varianței (dispersiei)*.