LUCRARE DE LABORATOR #4

- TEOREMA MODULATIEI - SPECTRUL SEMNALULUI MODULAT
- PERECHILE FOURIER PENTRU FUNCTIILE ARMONICE
- GRADUL DE MODULATIE
- PUTEREA SEMNALULUI MODULAT
- MODULATIA DE PRODUS
- MODULATIA DE AMPLITUDINE CONVENTIONALA

1.TEOREMA MODULATIEI - SPECTRUL SEMNALULUI MODULAT

Fiind dat un semnal in domeniul timpului

$$y(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$$

transformatele Fourier satisfac relatia

$$Y(f) = \frac{1}{2}\left[X(f - f_0) + X(f + f_0)\right]$$

unde $Y(f) = F[y(t)]$ este transformata Fourier a semnalului $y(t)$,iar $X(f) = F[x(t)]$ este perechea Fourier a semnalului $x(t)$.

Regula practica este ca spectrul lui $x(t)$ este deplasat spre stanga si spre dreapa cu f_0 si inmultit cu un factor 2 (ca modul).

2.PERECHILE FOURIER PENTRU FUNCTIILE ARMONICE

(i) Fiind data o pereche Fourier (bilaterala)

$$x(t) \leftrightarrow X(f)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \quad e^{+j2\pi ft} df$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \quad e^{-j2\pi ft} dt$$

(ii)

$$F\left[e^{j2\pi f_0 t}\right] = \delta(f - f_0)$$

$$\Rightarrow$$

$$\cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2}\left[e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}\right]$$

$$F\left[\cos(2\pi f_0 t)\right] = \frac{1}{2}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right]$$

$$F\left[\cos(2\pi f_0 t + \varphi)\right] = \frac{1}{2}\left[\delta(f - f_0) \cdot e^{j\varphi} + \delta(f + f_0) \cdot e^{-j\varphi}\right]$$

(iii)

$$\sin\left(2\pi f_0 t\right)=\cos\left(2\pi f_0 t-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$F\left[\sin\left(2\pi f_0 t\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\delta\left(f-f_0\right)\cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}+\delta\left(f+f_0\right)\cdot e^{j\frac{\pi}{2}}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[-j\cdot\delta\left(f-f_0\right)+j\cdot\delta\left(f+f_0\right)\cdot e^{j\frac{\pi}{2}}\right]=\frac{1}{2j}\left[\delta\left(f-f_0\right)-\delta\left(f+f_0\right)\right]$$

(iv) Teorema modulatiei pentru un semnal purtatoare sinusoidal se formuleaza astfel

$$y(t)=x(t)\cdot\sin\left(2\pi f_0 t\right)$$

$$Y(f)=\frac{1}{2j}\left[X\left(f-f_0\right)-X\left(f+f_0\right)\right]$$

Regula practica fiind in acest caz formulata prin :

spectrul lui $x(t)$ este deplasat spre stanga cu f_0 si modificata faza cu $\frac{\pi}{2}$ si spectrul este deplasat spre dreapta cu f_0 si modificata faza cu $-\frac{\pi}{2}$.

3.GRADUL DE MODULATIE

Se defineste **valoarea medie patratica** (efectiva) a unui semnal periodic de perioada T

$$\left\langle u(t)\right\rangle=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt}$$

Observatii

(i) Valoarea medie patratica este numita in limba engleza root mean square si este abreviata rms.

(ii) Unitatea de masura este $V_{efectiv}$.

(iii) Sinusoida are o valoare medie patratica $\frac{A}{\sqrt{2}}$.

Se defineste **gradul de modulatie** (modulation index) pentru un semnal modulat in amplitudine (clasica)

$$s(t)=\left[s_m(t)+A_c\right]\cdot\cos\left(2\pi f_c t\right)=A(t)\cdot\cos\left(2\pi f_c t\right)$$

ca fiind

$$m=\frac{\left\langle s_m(t)\right\rangle}{\left\langle A_c\cdot\cos\left(2\pi f_c t\right)\right\rangle}=\frac{\text{valoarea efectiva a semnalului modulat}}{\text{valoarea efectiva a purtatoarei nemodulate}}$$

O alta definitie a gradului de modulatie , utilizata pentru o determinare experimentala, este

$$m=\frac{\left|A(t)\right|_{\max}-\left|A(t)\right|_{\min}}{\left|A(t)\right|_{\max}+\left|A(t)\right|_{\min}}$$

Observatii

(i) Pentru un semnal sinusoidal de tip “ton” cele doua definitii coincid

$$m_1 = \frac{\frac{A_m}{\sqrt{2}}}{\frac{A_c}{\sqrt{2}}} = \frac{A_m}{A_c}$$

$$m_2 = \frac{A_m + A_c - \left(-A_m + A_c\right)}{A_m + A_c + \left(-A_m + A_c\right)} = \frac{2 \cdot A_m}{2 \cdot A_c}$$

(ii) Scriind semnalul modulat in amplitudine

$$s(t) = A_c\left[1 + m \cdot \frac{s_m(t)}{A_c}\right]\cos\left(2\pi f_c t\right)$$

se observa ca pentru a nu avea supramodulatie trebuie ca $m \le 1$.

(iii) Gradul de modulatie se exprima de obicei procentual. In practica, exista un compromis intre gradul de modulatie si eficenta transmiterii.

4.PUTEREA SEMNALULUI MODULAT

Puterea unui semnal se exprima in volti la patrat si nu in watii.

Eficienta unui sistem de modulatie este definita ca raportul dintre puterea semnalului care are continut informational propriu zis P_l si puterea totala transmisa P_t

$$\eta = \frac{P_l}{P_t}$$

Drept P_l se considera puterea semnalului din una din cele doua benzi laterale din semiplanul frecventelor pozitive (sunt redundante cele doua benzi).

Observatii

(i) Teorema Parceval arata ca puterea unui semnal poate fi calculata fie in domeniul timpului, fie in domeniul frecventa.

(ii) Puterea unei sinusoide se poate calcula in domeniul timpului ca $\frac{1}{2}A^2$ sau in domeniul frecventa ca $2 \cdot \left(\frac{A}{2}\right)^2$

Pentru cazul particular al unui semnal modulator de tip “ton “
puterea semnalului modulator

$$P_m = \frac{1}{2} \cdot A_m^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(mA_c\right)^2 = \frac{m^2 A_c^2}{2}$$

puterea purtatoarei

$$P_c = \frac{1}{2}\cdot A_c^2 = 2\cdot\left(\frac{A_c}{2}\right)^2$$

puterea dintr-o singura banda laterala

$$P_l = 2\cdot\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}A_m\right)\right]^2 = \frac{A_m^2}{8} = \frac{m^2 A_c^2}{8}$$

puterea totala a semnalulului modulat

$$P_t = 2\cdot P_l + P_c = \frac{m^2 A_c^2}{4} + \frac{A_c^2}{2}$$

Se obtine astfel eficienta modulatiei

$$\eta = \frac{\frac{m^2 A_c^2}{8}}{\frac{m^2 A_c^2}{4} + \frac{A_c^2}{2}} = \frac{m^2}{2\left(m^2+2\right)}$$

Se observa ca pentru un semnal modulator de tip “ton” $\eta_{\max} = 0{,}5$.

5. MODULATIA DE PRODUS

Se considera un semnal modulat avand expresia

$$s(t) = s_m(t)\cdot\cos(2\pi f_c t)$$

In aceasta expresie

$s(t)$ – semnalul modulat

$s_m(t)$ – semnalul modulator

f_c – frecventa purtatoarei

In domeniul timpului, semnalul modulat este o sinusoida a carei anvelopa este variabila in timp, in concordanta cu semnalul modulator. Trecerile prin zero ale semnalului modulat definesc “frecventa” acestuia si nu sunt modificate de semnalul modulator. Modificarea semnului semnalului modulator conduce la reversarea rapida a fazei semnalului purtator. Acesta este un efect caracteristic modulatiei de produs.

In domeniul frecventa (vezi teorema modulatiei)

$$S(f) = \frac{1}{2}\left[S_m(f - f_c) + S_m(f + f_c)\right]$$

Se evidentiaza urmatoarele proprietati

(i) translatarea spectrului semnalului modulator cu f_c la stanga si la dreapta

(ii) banda necesara semnalului modulat este dublul benzii semnalului modulator

(iii) cele doua jumatatii ale spectrului situate de-o parte si de alta a frecventei purtatoarei contin aceasi informatie (sunt redundante)

(iv) frecventa purtatoarei nu conduce a o linie spectrala (un Dirac) decat daca semnalul modulator are componenta continua
(v) daca frecventa purtatoarei este suficient de ridicata si largimea de banda a semnalului $s_m(t)$ este suficient de mica (semnal de banda ingusta) nu are loc suprapunerea celor doua spectre in regiunea din proximitatea frecventei zero.

Observatie

Daca semnalul este $s(t) = s_m(t) \cdot \sin(2\pi f_c t)$
spectrul generat este $S(f) = \dfrac{1}{2j}\left[S_m(f - f_c) - S_m(f + f_c)\right]$

6. MODULATIA DE AMPLITUDINE CONVENTIONALA

Se considera un semnal modulat in amplitudine avand expresia

$$s(t) = \left[s_m(t) + A_c\right]\cos\left(2\pi f_c t\right)$$

unde A_c este amplitudinea purtatoarei (nemodulate).
Daca indicele de modulatie $m > 1$ deci $s_m(t) < -A_c$ are loc reversarea fazei purtatoarei si se produce o pierdere ireversibila de informatie.
In domeniul frecventa spectrul semnalului modulat este (conform teoremei modulatiei)

$$S(f) = \frac{1}{2}\left[S_m(f - f_c) + S_m(f + f_c)\right] + \frac{1}{2}\left[\delta\left(f - f_c\right) + \left[\delta\left(f + f_c\right)\right]\right]$$

Se constata ca largimea de banda necesara transmiterii este de doua ori largimea de banda a semnalului modulator.

Problema 1

Un semnal modulat in amplitudine este definit prin relatia

$$s(t) = \left[10 + 3\cos\left(2\pi 10^3 t\right)\right]\cos\left(2\pi 10^7 t\right) \quad [V]$$

Sa se determine:

(a) Amplitudinea si frecventa purtatoarei
(b) Amplitudinea si frecventa semnalului modulator
(c) Gradul de modulatie
(d) Puterea in benzile laterale si puterea totala a semnalului
(e) Eficienta

Solutie

(a) $s(t) = \left[s_m(t) + A_c\right]\cos 2\pi f_c t$

$$A_c = 10V$$

$$f_c = 10^7\,Hz = 10\,MHz$$

(b) $s_m(t) = A_m \cos 2\pi f_m t$

$A_m = 3V \qquad f_m = 10^3\, Hz = 1kHz$

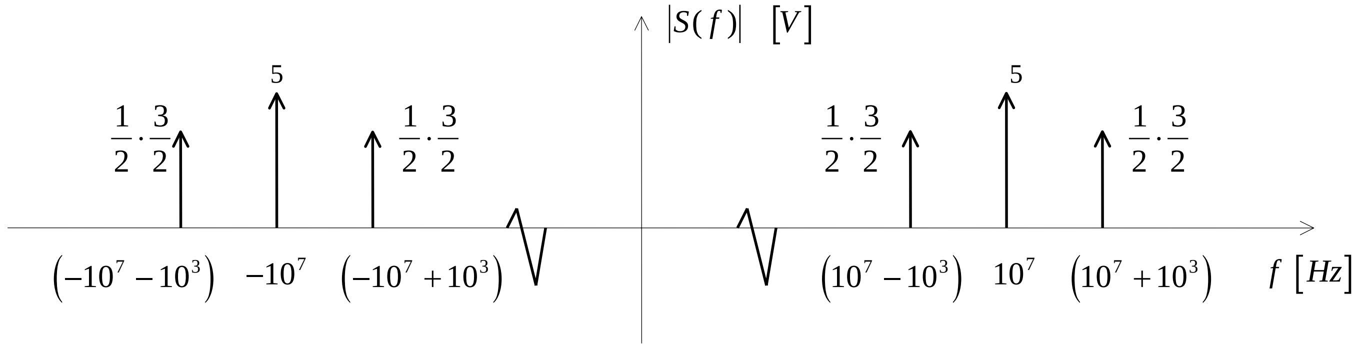
Observatie

Se constata ca $f_m << f_c$, conditie care este impusa de
- separarea comoda in frecventa la receptie
- necesitatea unei esantionari suficient de rapide a semnalului modulat

$$\frac{f_c}{f_m} > 10$$

(c) $m = \dfrac{A_m}{A_c} = \dfrac{3}{10} = 0{,}3 = 30\%$

(d) Spectrul semnalului modulat (teorema modulatiei sau transformarea produselor de cosinusuri in sume) contine



$$P_c = 2 \cdot (5)^2 = 50\, V^2$$

$$P_e = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{8} V^2$$

$$P_t = 50 + 2 \cdot \frac{9}{8} = 52{,}25\, V^2$$

(e) $\eta = \dfrac{\frac{9}{8}}{52{,}25} = 2{,}2\%$

Problema 2

Un semnal AM este definit prin relatia

$$s(t) = \left[10 + 3\cos(2\pi 100 t) + 4\sin(2\pi 200 t)\right] \cos 2\pi 10^6\, t$$

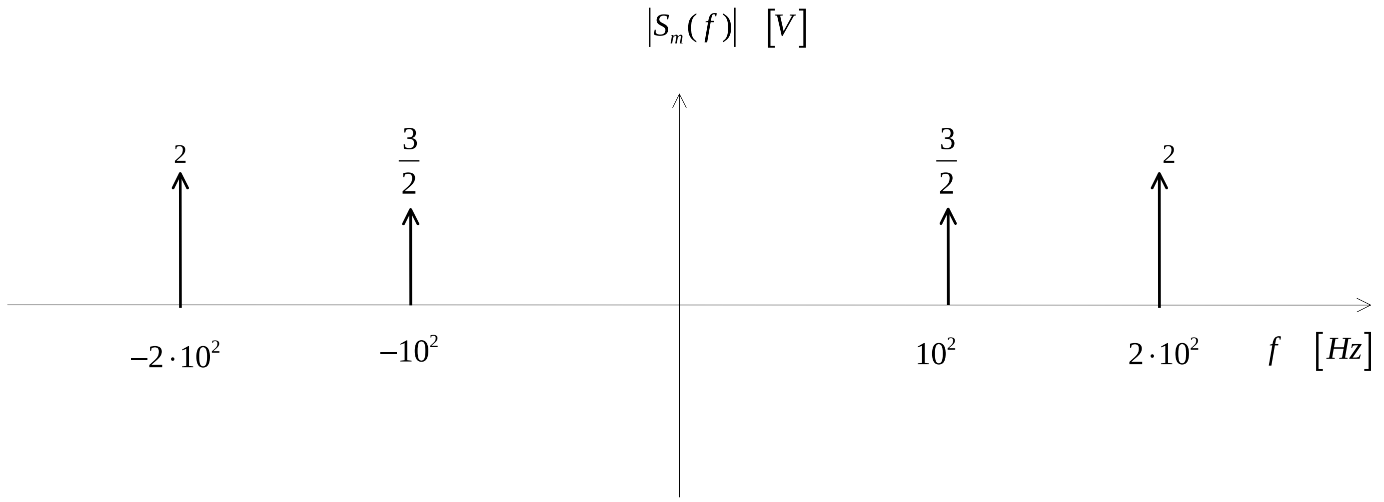
Sa se determine

(a) Spectrul semnalului modulator

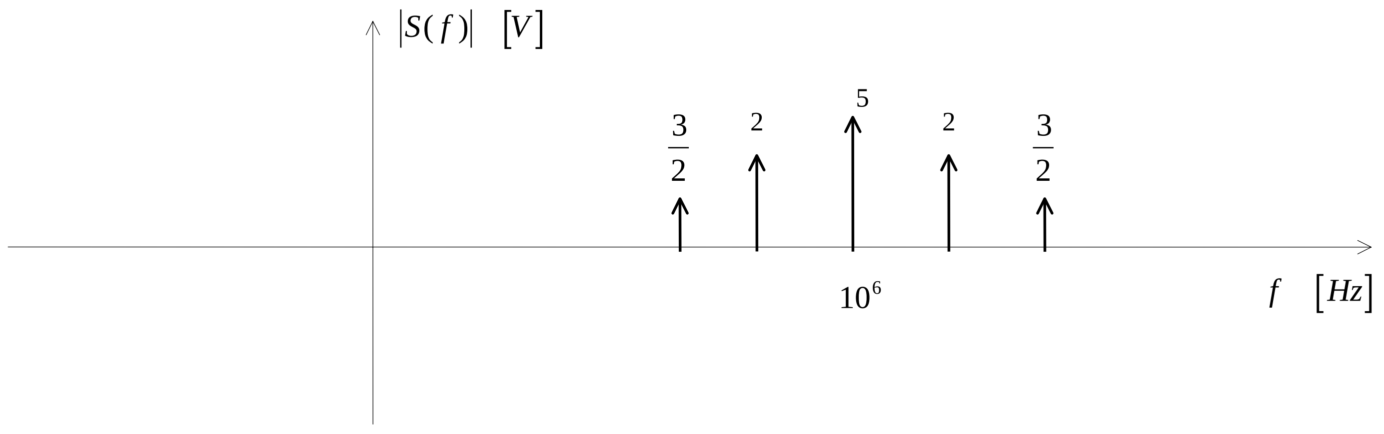
(b) Spectrul semnalului modulat
(c) Gradul de modulatie
(d) Puterea purtatoarei si puterea in banda laterala
(e) Puterea totala a semnalului modulat

Solutie

(a)



(b)



(c) $A(t) = 10 + 3\cos(2\pi 100t) + 4\sin(2\pi 200t)$

$$A'(t) = 2\pi 100(-3\sin 2\pi 100\,t + 8\cos 2\pi 100\,t) = 2\pi 100(-3\sin\alpha + 8\cos 2\alpha) \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha \begin{cases} 0{,}6 \\ -0{,}8 \end{cases}$$

Se obtin

$$A_{\max} = 10 + 3\cdot\sqrt{1-0{,}36} + 4\cdot 2\cdot 0{,}6\cdot\sqrt{1-0{,}36} \approx 16{,}24\,V$$

$$A_{\min} = 10 - 3\cdot\sqrt{1-0{,}64} + 4\cdot 2\cdot(-0{,}8)\cdot\sqrt{1-0{,}64} \approx 4{,}36\,V$$

$$m = \frac{16{,}24 - 4{,}36}{16{,}24 + 4{,}36} \approx 0{,}576 \approx 58\%$$

(d) $$P_c = 2 \cdot 5^2 = 50\,V^2$$

$$P_l = 2\left[\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1^2\right] = \frac{25}{8} V^2 \approx 3{,}125 V^2$$

(e) $$P_t = P_c + 2P_l = 50 + \frac{25}{4} = \frac{225}{4} V^2 = 56{,}250\,V^2$$