❷ Modele de identificare

❷.❹ Modele parametrice

Clasa ARMAX

Modele particulare uzuale

ARX[na,nb,<nk>] ➔ Auto-Regresiv, cu control eXogen

$$\begin{cases} A(q^{-1})y[n] = B(q^{-1})u[n] + e[n] \\ E\{e[n]e[m]\} = \lambda^2\delta_0[n-m] \end{cases} \quad \forall n,m \in \mathbb{N}$$

$$C(q^{-1}) = 1$$

- Utilizat în special în comanda numerică a proceselor şi/sau reglarea automată.
- Deşi nu atît de precis ca alte modele, el este adesea preferat pentru simplitate şi pentru faptul că nu necesită metode de identificare complicate.
- În plus, modelul poate fi folosit şi în aplicaţii de timp real, beneficiind de metode de identificare adaptive extrem de eficiente.

AR[na] ➔ Auto-Regresiv

$$\begin{cases} A(q^{-1})y[n] = e[n] \\ E\{e[n]e[m]\} = \lambda^2\delta_0[n-m] \end{cases} \quad \forall n,m \in \mathbb{N}$$

$$B(q^{-1}) = 0 \qquad C(q^{-1}) = 1$$

- Utilizat în special în predicţia optimală a datelor (fiind un model de zgomot şi nu de date utile), în aplicaţii de predicţie a seriilor de timp, de estimare spectrală, de compresie a datelor, de prelucrare a semnalului vocal, de urmărire a ţintelor mobile, etc.
- În pofida preciziei sale modeste, este utilizat în atît de multe şi diverse aplicaţii, datorită manierei recursive în care se pot determina parametrii săi, chiar şi atunci cînd nu este implementat în timp real.

Algoritmul Levinson-Durbin

(care va fi prezentat şi în acest curs)

❷ Modele de identificare

❷.❹ Modele parametrice

Clasa ARMAX

Modele particulare uzuale (continuare)

MA[nc] ➔ Medie Alunecătoare

$$\begin{cases} y[n] = C(q^{-1})e[n] \\ E\{e[n]e[m]\} = \lambda^2\delta_0[n-m] \end{cases} \quad \forall\, n,m \in \mathbb{N}$$

$A(q^{-1}) = 1$ $B(q^{-1}) = 0$

- Model care se referă tot la perturbații.
- Utilitate redusă, din cauza preciziei extrem de scăzute sau a numărului mare de parametri necesari pentru a asigura o precizie satisfăcătoare.

ARMA[na,nc] ➔ Auto-Regresiv, de Medie Alunecătoare

$$\begin{cases} A(q^{-1})y[n] = C(q^{-1})e[n] \\ E\{e[n]e[m]\} = \lambda^2\delta_0[n-m] \end{cases} \quad \forall\, n,m \in \mathbb{N}$$

$B(q^{-1}) = 0$

- Model de perturbații mai precis, bazat pe un filtru care dispune atît de poli, cît şi de zerouri.
- Masiv integrat în aplicații abia în anii '90, datorită nivelului tehnologic care a permis implementarea acestora în variante eficiente.

OE[na,nb,<nk>] ➔ Output Error (eroare de ieşire)

$$\begin{cases} A(q^{-1})y[n] = B(q^{-1})u[n] + A(q^{-1})e[n] \\ E\{e[n]e[m]\} = \lambda^2\delta_0[n-m] \end{cases} \quad \forall\, n,m \in \mathbb{N}$$

$A(q^{-1}) = C(q^{-1})$

date măsurate | date simulate

$$\begin{cases} y[n] - \boxed{\dfrac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u[n]} = e[n] \\ E\{e[n]e[m]\} = \lambda^2\delta_0[n-m] \end{cases} \quad \forall\, n,m \in \mathbb{N}$$

eroare de ieşire

- Acest model este mai precis decît modelul ARX, dar metodele pentru determinarea parametrilor săi sunt mult mai complexe.

❷ Modele de identificare

❷.❹ Modele parametrice

Clasa ARMAX

Modele particulare uzuale (continuare)

FIR[nb,<nk>] ➔ **F**inite **I**mpulse **R**esponse
(cu răspuns finit la impuls / secvență pondere de durată finită)

$$\begin{cases} y[n] = B(q^{-1})u[n] + e[n] \\ E\{e[n]e[m]\} = \lambda^2\delta_0[n-m] \end{cases} \quad \forall\, n,m \in \mathbb{N}$$

$$A(q^{-1}) = 1 \qquad C(q^{-1}) = 1$$

$$y[n] = b_1 u[n-nk] + b_2 u[n-nk-1] + \cdots + b_{nb} u[n-nk-nb+1] + e[n] \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$h[0] \qquad h[1] \qquad h[nb-1]$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{nb-1} h[k]\left(q^{-nk}u\right)[n-k] + e[n] \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

- Precizia modelului este redusă, dar el este adesea utilizat pentru a detecta ordinul minim de persistență al intrării necesar pentru obținerea de date corecte şi consistente (cu ajutorul ecuației Wiener-Hopf).
- Modelele din clasa ARMAX se pot exprima şi cu ajutorul secvențelor pondere (prin tehnica împărțirii infinite).

☝ Deşi modelul ARX este de tip IIR, el nu necesită decît un număr finit de parametri.

$$H(q^{-1}) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} = \sum_{n\geq 0} h[n]q^{-n}$$

$$G(q^{-1}) = \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} = \sum_{n\geq 0} g[n]q^{-n}$$

- Acestea pot fi de tip:

FIR ➔ **F**inite **I**mpulse **R**esponse
(cu răspuns finit la impuls)

IIR ➔ **I**nfinite **I**mpulse **R**esponse
(cu răspuns infinit la impuls)

❷ Modele de identificare

❷.❹ Modele parametrice

Clase uzuale de modele liniare

ARMAX | RSISO | De stare

Clasa RSISO

Modele de tip SISO Raționale

RSISO[na,nb,nc,nd,nf,<nk>]

indici structurali (na, nb, nc, nd, nf) — întîrziere intrinsecă (nk)

$$\begin{cases} A(q^{-1})y[n] = \dfrac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})}u[n] + \dfrac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}e[n] \\ E\{e[n]e[m]\} = \lambda^2\delta_0[n-m] \end{cases} \quad \forall\, n,m \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 + a_1 q^{-1} + \cdots + a_{na} q^{-na} \\ B(q^{-1}) &= (b_1 q^{-1} + \cdots + b_{nb} q^{-nb})q^{1-nk} \\ C(q^{-1}) &= 1 + c_1 q^{-1} + \cdots + c_{nc} q^{-nc} \end{aligned}$$

polinoame

+

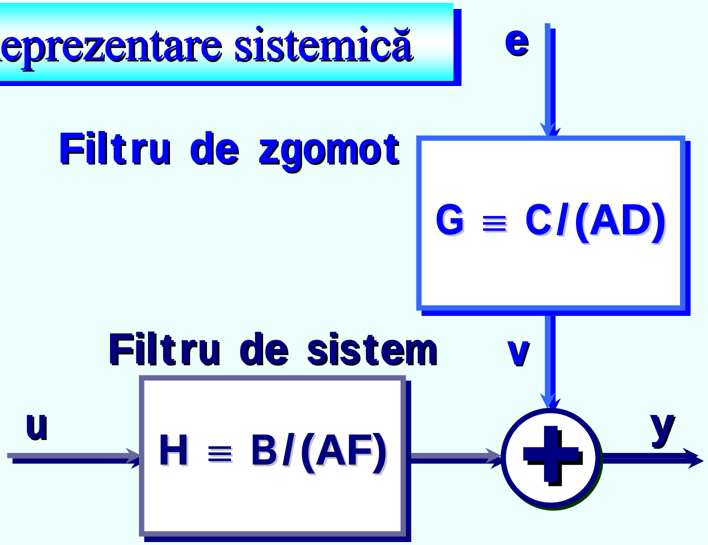
$$\begin{aligned} D(q^{-1}) &= 1 + d_1 q^{-1} + \cdots + d_{nd} q^{-nd} \\ F(q^{-1}) &= 1 + f_1 q^{-1} + \cdots + f_{nf} q^{-nf} \end{aligned}$$

polinoame coprime

$(D,F) = 1$

(cmmdc)

Reprezentare sistemică



$$H(q^{-1}) \overset{def}{=} \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})F(q^{-1})} \qquad G(q^{-1}) \overset{def}{=} \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})D(q^{-1})}$$

- Se elimină restricția impusă în cadrul clasei ARMAX ca ambele filtre (de sistem și de zgomot) să aibă aceiași poli.

☝ Pot exista, însă, poli comuni.

❷ Modele de identificare

❷.❹ Modele parametrice

Clasa RSISO

Modele particulare uzuale

ARMAX[na,nb,nc,<nk>] ⟺ **RSISO[na,nb,nc,0,0,<nk>]** $D(q^{-1})=1$ $F(q^{-1})=1$

☝ Clasa RSISO include clasa ARMAX, fiind mai generală (bogată) decît aceasta.

Modelele clasei ARMAX sunt şi modele ale clasei RSISO.

- În aplicații sunt însă utilizate şi modele de tip RSISO care nu fac parte din clasa ARMAX.

FIFN[nb,nc,nd,nf,<nk>] ➔ **F**iltered **I**nput **F**iltered **N**oise (intrare şi zgomot filtrate independent)

BJ[nb,nc,nd,nf,<nk>] ➔ **B**ox **J**enkins (denumire echivalentă)

$$\begin{cases} y[n] = \dfrac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})}u[n] + \dfrac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}e[n] \\ E\{e[n]e[m]\} = \lambda^2\delta_0[n-m] \end{cases} \quad \forall\, n,m \in \mathbb{N}$$

$A(q^{-1})=1$

- Filtrul de sistem şi filtrul de zgomot nu au poli comuni, fapt care justifică prima denumire a modelului.
- Decuplarea dintre partea utilă şi cea parazită este necesară în aplicațiile unde sursa de zgomot este independentă de proces.

- În mod normal, acest model de identificare ar fi cel mai recomandat în majoritatea aplicațiilor, dacă implementarea sa nu ar fi atît de dificilă, din cauza complextății ridicate.

❷ Modele de identificare

❷.❹ Modele parametrice

Clase uzuale de modele liniare

ARMAX | RSISO | De stare

Clasa modelelor de stare

$$
\begin{cases}
\mathbf{x}[n+1] \equiv \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}[n] + \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{u}[n] + \mathbf{E}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{w}[n] \\
\mathbf{y}[n] \equiv \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}[n] + \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{e}[n] \\
E\{\mathbf{e}[n]\mathbf{e}^T[m]\} = \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{e}}(\boldsymbol{\theta})\delta_0[n-m] \\
E\{\mathbf{w}[n]\mathbf{w}^T[m]\} = \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{w}}(\boldsymbol{\theta})\delta_0[n-m] \\
E\{\mathbf{e}[n]\mathbf{w}^T[m]\} = \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{e},\mathbf{w}}(\boldsymbol{\theta})\delta_0[n-m]
\end{cases}
$$

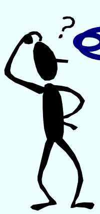
$\forall\, n,m \in \mathbb{N}$

- Vectorul parametrilor necunoscuţi include coeficienţii matricilor implicate în ecuaţiile modelului.
- Rareori zgomotul intern ($\boldsymbol{w}$) şi cel extern ($\boldsymbol{e}$) apar împreună într-un model de stare.
- În general modelele cu două surse de zgomot sunt evitate, încercîndu-se echivalarea lor cu ajutorul unor modele avînd o singură sursă de zgomot.

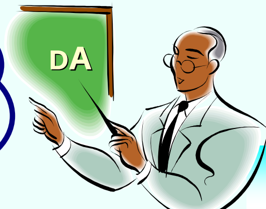
- **Dacă este totuşi necesară prezenţa ambelor zgomote, se presupune că ele sunt necorelate.**

$\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{e},\mathbf{w}}(\boldsymbol{\theta}) \equiv \mathbf{0}$

- **Complexitatea modelelor de stare este, în general, ridicată.**



Este acesta un caz particular al modelului general de identificare?



TS

$$\mathbf{H}(q^{-1},\boldsymbol{\theta}) \overset{def}{=} \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})\left(q\mathbf{I} - \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\right)^{-1}\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})$$

$\mathbf{G}(q^{-1},\boldsymbol{\theta})$

Factorizare spectrală +
Predicţie de stare prin filtrare Kalman

❷ Modele de identificare

❷.❹ Modele parametrice

Forma de regresie liniară

$$y[n] = \boxed{\varphi^T[n]}\,\theta + e[n] \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

☝ Ieşirea depinde liniar de vectorul parametrilor necunoscuţi.

Vectorul regresorilor

Format din date măsurate şi, eventual, estimate.

ARMAX[na,nb,nc]

$$\varphi^T[n] \overset{def}{=} \Big[-y[n-1]\; -y[n-2] \cdots -y[n-na] \;\Big|\; u[n-1]\; u[n-2] \cdots u[n-nb] \;\Big|\; \ldots$$

3 componente, ca şi vectorul parametrilor

$$\ldots \boxed{e[n-1]\; e[n-2] \cdots e[n-nc]}\Big]$$

$$\theta^T \overset{def}{=} \big[a_1\; a_2 \cdots a_{na} \;\big|\; b_1\; b_2 \cdots b_{nb} \;\big|\; c_1\; c_2 \cdots c_{nc}\big] \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

☝ Ultima componentă nu este măsurabilă.

Dar poate fi estimată, fapt care complică metoda de identificare şi reduce precizia modelului.

Exerciţiu

- **Să se indice toate modelele din clasa ARMAX pentru care vectorul regresorilor conține numai componente măsurabile.**

Stabilitatea modelelor parametrice raţionale

- Testarea stabilităţii revine adesea la verificarea proprietăţii unui polinom de a avea zerourile în interiorul discului unitar din planul complex.

$$A(z^{-1}) = 1 + a_{M,1}z^{-1} + \cdots + a_{M,M}z^{-M} = z^{-M}\left(z^M + a_{M,1}z^{M-1} + \cdots + a_{M,M}\right)$$

- Acest lucru se poate realiza cu ajutorul Criteriului de stabilitate Schür-Cohn.

Polinomul reciproc

$$\tilde{A}(z^{-1}) \overset{def}{=} z^{-M}A(z^{+1}) = z^{-M} + a_{M,1}z^{1-M} + \cdots + a_{M,M}$$

Coeficient de reflexie

$$k_M \overset{def}{=} a_{M,M}$$

Sisteme continue

Criteriul Hurwitz

❷ Modele de identificare

❷.❹ Modele parametrice

Criteriul de stabilitate Schür-Cohn (Sisteme discrete)

Date de intrare $A(z^{-1}) = 1 + a_{M,1}z^{-1} + \cdots + a_{M,M}z^{-M}$ (coeficienţii polinomului)

Iniţializare

- $m = M$ (primul indice)
- $k_M = a_{M,M}$ (primul coeficient de reflexie)
- $A_M(z^{-1}) = A(z^{-1})$ (primul polinom furnizor de coeficient de reflexie)

Buclă iterativă

Cît timp $|k_m| < 1$ & $m > 0$

① Dacă $m > 1$

a. Se evaluează polinomul următor, care foloseşte atît polinomul curent, cît şi polinomul reciproc asociat:

$$A_{m-1}(z^{-1}) = \frac{A_m(z^{-1}) - k_m \tilde{A}_m(z^{-1})}{1 - k_m^2} = a_{m-1,0} + a_{m-1,1}z^{-1} + \cdots + a_{m-1,m-1}z^{1-m}$$

$a_{m-1,0} = 1$

b. Se extrage coeficientul următor de reflexie: $k_{m-1} = a_{m-1,m-1}$

② Se decrementează indicele curent: $m \leftarrow m - 1$

Test final

- $m > 0$ ⇒ $|k_m| \geq 1$ ⇒ ☹ Polinomul este instabil.
- $m = 0$ ⇒ $\{|k_i|\}_{i \in \overline{1,M}} \subset [0,1)$ ⇒ ☺ Polinomul este stabil.

☝ Toţi coeficienţii de reflexie se situează în discul unitar.