

*Prelucrarea semnalelor*

*Capitolul 6: Cuantizare*

Bogdan Dumitrescu

Facultatea de Automatică și Calculatoare  
Universitatea Politehnica București

# Cuprins

---

- Cuantizare (scalară)
- Cuantizorul uniform: proprietăți, performanțe etc.
- Proiectarea unui cuantizor
  - Compandare
  - Algoritmul Lloyd-Max
- Cuantizare vectorială

## Cuantizare—definiții

- Fie  $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \dots, c_N\}$  o mulțime de  $N$  valori reale, numite *coduri*
- Mulțimea  $\mathcal{C}$  este numită *dicționar* (sau listă de coduri—engl. codebook)
- Cuantizorul  $q$  asociază un cod fiecărei valori  $x \in \mathbb{R}$ , i.e.  $q(x) = c_k$ , subînțelegând prin aceasta că numărul real  $x$  este "aproximat" prin codul  $c_k$  din dicționarul  $\mathcal{C}$
- Așadar, un *cuantizor* este o funcție  $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}$
- Presupunem, fără pierdere de generalitate, că dicționarul este ordonat, adică  $c_1 < c_2 < \dots < c_N$

## Celule Voronoi

- Fie  $q$  un cuantizor și  $\mathcal{C}$  dicționarul asociat. Mulțimea

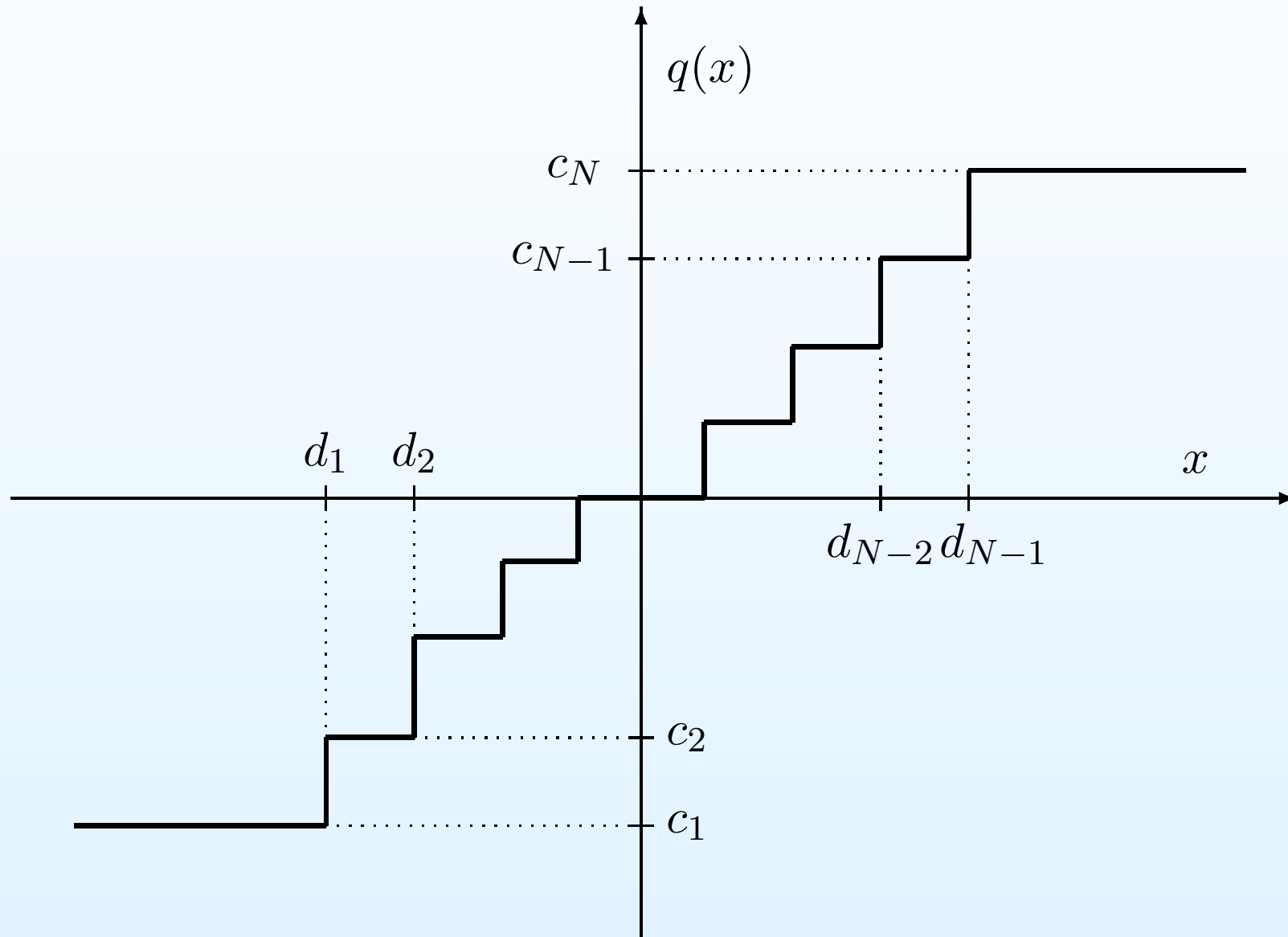
$$\mathcal{A}_k = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) = c_k\}$$

se numește *celulă Voronoi* asociată codului  $c_k$

- De obicei, fiecare celulă este un interval:  $\mathcal{A}_k = (d_{k-1}, d_k]$
- Valorile  $d_k$  se numesc *puncte de decizie* (de frontieră)
- Punem  $d_0 = -\infty$  și  $d_N = \infty$ , dacă aceste valori nu sunt finite prin natura semnalului care se cuantizează



## Graficul unui cuantizor



## Cuantizor = codor + decodor

- Cuantizorul poate fi privit ca fiind obținut din compunerea a două funcții: codor și decodor
- Notăm  $\mathcal{N} = 1 : N$  mulțimea primelor  $N$  numere naturale
- Un *codor* este o funcție  $q_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{N}$  și asociază unei valori  $x \in \mathbb{R}$  un indice în dicționar
- Un *decodor* este o funcție  $q_d : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$ , prin care un indice este transformat în codul corespunzător
- De multe ori, codorul este numit cuantizor
- Indicii produși de codor sunt transmiși sau memorați (digital)
- Refacerea codului (decodarea) se face ulterior (eventual la distanță)

## Rezoluția unui cuantizor

- Numărul de biți necesar reprezentării numerelor din  $\mathcal{N}$  (și deci din dicționarul  $\mathcal{C}$ ), i.e.

$$r = \log_2 N,$$

este numit *rezoluție* (sau rată de codare) a cuantizorului

- Rezoluția nu poate descrie singură performanțele cuantizorului
- Acestea depind și de proprietățile semnalului cuantizat
- Presupunem că semnalul cuantizat  $x$  este caracterizat de o densitate de probabilitate  $p(x)$ , i.e. are proprietăți statistice cunoscute

## Distorsiune

- Distorsiunea (eroarea pătratică) medie a unui cuantizor este

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} (x - q(x))^2 p(x) dx$$

- Când celulele Voronoi sunt intervale:

$$D = \sum_{k=1}^N \int_{d_{k-1}}^{d_k} (x - c_k)^2 p(x) dx$$

- Dacă interpretăm  $x$  ca pe un proces aleator:

$$D = E \{ (x[n] - q(x[n]))^2 \}$$

- Distorsiunea medie este ușor de calculat și utilizat, dar poate să nu corespundă percepției subiective pentru anumite semnale (audio, imagini etc.)



## Raportul semnal-zgomot

- Presupunem că semnalul (variabila aleatoare)  $x$  are medie nulă
- Raportul semnal-zgomot (SNR—signal to noise ratio) asociat unui cuantizor

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{E\{x^2\}}{D} \quad [\text{dB}]$$

- Dacă semnalul nu are medie nulă, se folosește varianța în loc de  $E\{x^2\}$
- În general, despre cuantizoarele cu  $SNR > 10\text{dB}$  se spune că au rezoluție înaltă; pentru acestea sunt valabile rezultatele asimptotice prezentate mai departe

## Cuantizorul uniform

- Un cuantizor este *uniform* atunci când între codurile  $c_k$  și punctele de decizie  $d_k$  există relațiile

$$\begin{aligned}c_{k+1} - c_k &= \Delta, \\ d_k &= \frac{c_k + c_{k+1}}{2},\end{aligned}$$

unde  $\Delta > 0$  este pasul de cuantizare

- Distanța dintre punctele de decizie este tot

$$d_{k+1} - d_k = \Delta$$

- De obicei se presupune că semnalul  $x[n]$  ia valori într-un interval  $[a, b]$  și că  $d_0 = a$ ,  $d_N = b$ . Pasul de cuantizare este

$$\Delta = \frac{b - a}{N}$$

## Cuantizorul uniform—eroarea maximă

- Între cuantizoarele cu dicționar conținând  $N$  coduri, cuantizorul uniform *minimizează eroarea maximă*
- Dacă semnalul  $x$  ia valori în  $[a, b]$ , atunci eroarea maximă de cuantizare este cel puțin

$$\frac{b - a}{2N} = \frac{\Delta}{2},$$

adică eroarea maximă a cuantizorului uniform

## Cuantizorul uniform—distorsiunea medie

- Presupunem că semnalul de intrare este uniform distribuit în intervalul  $[a, b]$
- Densitatea de probabilitate asociată semnalului  $x$  este  $p(x) = 1/(b - a)$
- Eroarea de cuantizare  $\varepsilon = x - q(x)$  este uniform distribuită în intervalul  $[-\Delta/2, \Delta/2]$ , deci media sa este nulă:  $E\{\varepsilon\} = 0$
- Distorsiunea medie este

$$\begin{aligned} D &= \sum_{k=1}^N \int_{d_{k-1}}^{d_k} (x - c_k)^2 p(x) dx \\ &= \frac{N}{b-a} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \varepsilon^2 d\varepsilon = \frac{1}{\Delta} \left. \frac{\varepsilon^3}{3} \right|_{-\Delta/2}^{\Delta/2} = \frac{\Delta^2}{12} \end{aligned}$$

## Cuantizor uniform la rezoluție înaltă (1)

- Presupunem acum că semnalul de intrare  $x$  este distribuit în intervalul  $[a, b]$  cu o densitate de probabilitate oarecare  $p(x)$
- Ipoteză de rezoluție înaltă:
  - numărul  $N$  al nivelelor de cuantizare este mare
  - $p(x)$  este suficient de netedă
- Se poate considera că, pe fiecare interval de decizie (de lungime  $\Delta$ ),  $p(x)$  este constantă, mai precis  $p(x) = p_k$  pentru  $x \in [d_{k-1}, d_k]$
- Se observă că

$$\sum_{k=1}^N p_k \Delta = \int_a^b p(x) dx = 1$$

## Cuantizor uniform la rezoluție înaltă (2)

- Cu ipotezele precedente, distorsiunea medie este

$$\begin{aligned} D &= \sum_{k=1}^N \int_{d_{k-1}}^{d_k} (x - c_k)^2 p(x) dx = \sum_{k=1}^N p_k \int_{d_{k-1}}^{d_k} (x - c_k)^2 dx \\ &= \sum_{k=1}^N p_k \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \xi^2 d\xi = \frac{\Delta^3}{12} \sum_{k=1}^N p_k = \frac{\Delta^2}{12} \end{aligned}$$

- Se obține aceeași expresie a distorsiunii ca în cazul distribuției uniforme a semnalului de intrare

## Cuantizorul uniform—SNR la rezoluție înaltă

- Presupunem că semnalul de intrare are medie zero și varianță  $\sigma^2$ , ceea ce nu este restrictiv
- Semnalul  $x$  ia valori în intervalul  $[-a, a]$
- Densitatea de probabilitate  $p(x)$  este o funcție pară și constantă pe fiecare interval de decizie
- Deoarece  $N = 2^r$ , pasul de cuantizare este  $\Delta = 2a/2^r$
- Raportul semnal-zgomot are forma

$$\begin{aligned} SNR &= 10 \log_{10} \frac{\sigma^2}{D} = 10 \log_{10} \frac{12\sigma^2}{\Delta^2} = 10 \log_{10} \frac{12\sigma^2 2^{2r}}{4a^2} \\ &= 20r \log_{10} 2 + ct \approx 6r + ct \end{aligned}$$

- Concluzie: la rezoluție înaltă, *fiecare bit suplimentar* utilizat la cuantizare (i.e. dublarea dimensiunii  $N$  a dicționarului) *conduce la creșterea cu 6dB a SNR* a cuantizorului uniform

## Implementarea unui cuantizor (1)

- Considerăm un cuantizor definit de codurile  $c_k$ ,  $k = 1 : N$ , și punctele de decizie  $d_k$ ,  $k = 0 : N$
- Ne punem problema modului de calcul al codului  $c_k = q(x)$  (sau al indicelui  $k$  asociat), pentru o valoare oarecare (cunoscută)  $x$  a intrării
- Indicele  $k$  este cel pentru care

$$d_{k-1} \leq x < d_k$$

(În cazul în care  $x$  este chiar un punct de decizie, trebuie să evităm ambiguitatea alegerii, de aceea putem alege inegalitățile ca mai sus.)

- Căutarea secvențială în  $1 : N$  a indicelui  $k$  este inefficientă, deoarece implică  $N$  comparații în cazul cel mai defavorabil



## Implementarea unui cuantizor (2)

- Algoritmul cel mai eficient este cel bazat pe *dihotomie*
- Dacă  $x < d_{N/2}$ , soluția este în mulțimea  $0 : N/2 - 1$ ; altfel, soluția se află în  $N/2 : N - 1$
- Căutarea continuă asemănător, până când înjumătățirea repetată reduce la un singur indice mulțimea în care se caută
- Numărul de comparații este  $\lceil r \rceil = \lceil \log_2 N \rceil$
- Implementarea cuantizorului *uniform* cu  $x_0 = a$ ,  $x_N = b$ , este extrem de simplă, indicele  $k$  având expresia

$$k = \left\lfloor \frac{x - a}{b - a} N \right\rfloor + 1$$

(Pentru  $x = b$  formula dă valoarea incorectă  $k = N + 1$ , ceea ce se poate corecta ușor la implementare.)

## Cuantizor neuniform—distorsiune

- Semnal de intrare cu densitatea de probabilitate constantă pe fiecare interval de decizie:  $p(x) = p_k, \forall x \in [d_{k-1}, d_k]$
- Se consideră un cuantizor oarecare (neuniform)
  - punctele de decizie  $d_k, k = 0 : N$ , sunt date
  - codurile sunt plasate (optim) la mijlocul intervalului de decizie  $c_k = (d_{k-1} + d_k)/2$
- Distorsiunea medie este

$$D = \sum_{k=1}^N p_k \int_{d_{k-1}}^{d_k} (x - c_k)^2 dx \stackrel{x = \xi + c_k}{=} \sum_{k=1}^N p_k \int_{-\Delta_k/2}^{\Delta_k/2} \xi^2 d\xi = \frac{1}{12} \sum_{k=1}^N p_k \Delta_k^3$$

- (Pentru cuantizorul uniform se obține  $D = \Delta^2/12$ )

## De ce cuantizare neuniformă ?

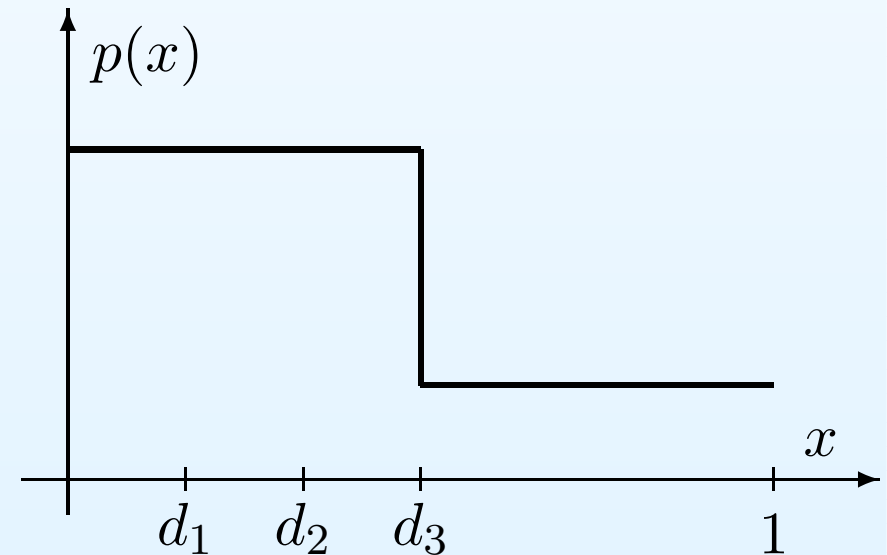
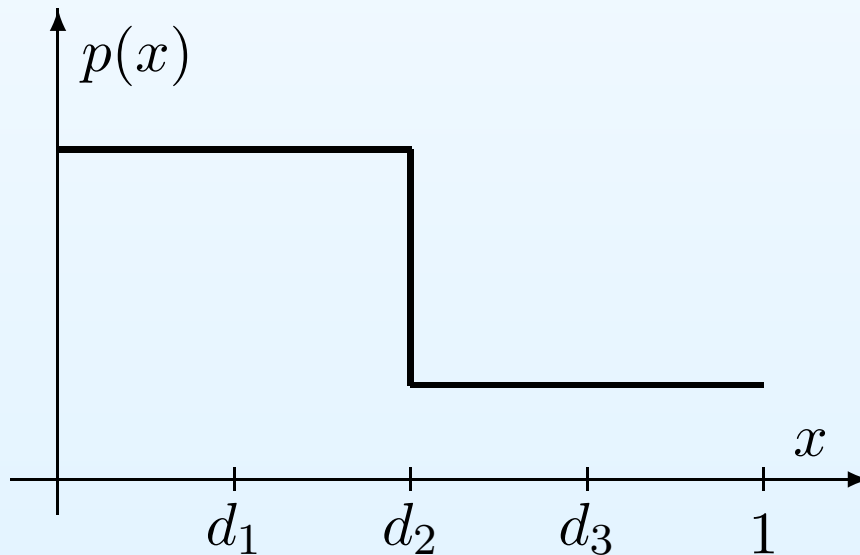
- Pentru distribuție uniformă a semnalului de intrare, cuantizorul uniform este optim, în sensul că are distorsiune medie minimă
- Dacă însă distribuția este neuniformă, este posibil ca alte cuantizoare, neuniforme, să fie optime
- Intuitiv, codurile trebuie să fie mai dese acolo unde probabilitatea intrării este mai mare și mai rare acolo unde probabilitatea e mică

## Exemplu (1)

- Fie un semnal de intrare cu densitatea de probabilitate

$$p(x) = \begin{cases} \alpha, & \text{dacă } x \in [0, 1/2] \\ \beta, & \text{dacă } x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

- Două cuantizoare, cel uniform și unul neuniform



## Exemplu (2)

- Pentru cuantizorul uniform,  $\Delta = 1/4$  și

$$D_1 = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{1}{192} = 0.005208$$

- Cuantizorul neuniform are punctele de decizie  $d_0 = 0, d_1 = 1/6, d_2 = 1/3, d_3 = 1/2, d_4 = 1$
- Codurile sunt plasate optim la mijlocul intervalelor de decizie
- Avem  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 1/6, \Delta_4 = 1/2$  și  $p_1 = p_2 = p_3 = \alpha, p_4 = \beta = 2 - \alpha$
- Distorsiunea medie este

$$D_2(\alpha) = \frac{1}{12} \sum_{k=1}^4 p_k \Delta_k^3 = \frac{54 - 25\alpha}{2592}$$

## Exemplu (3)

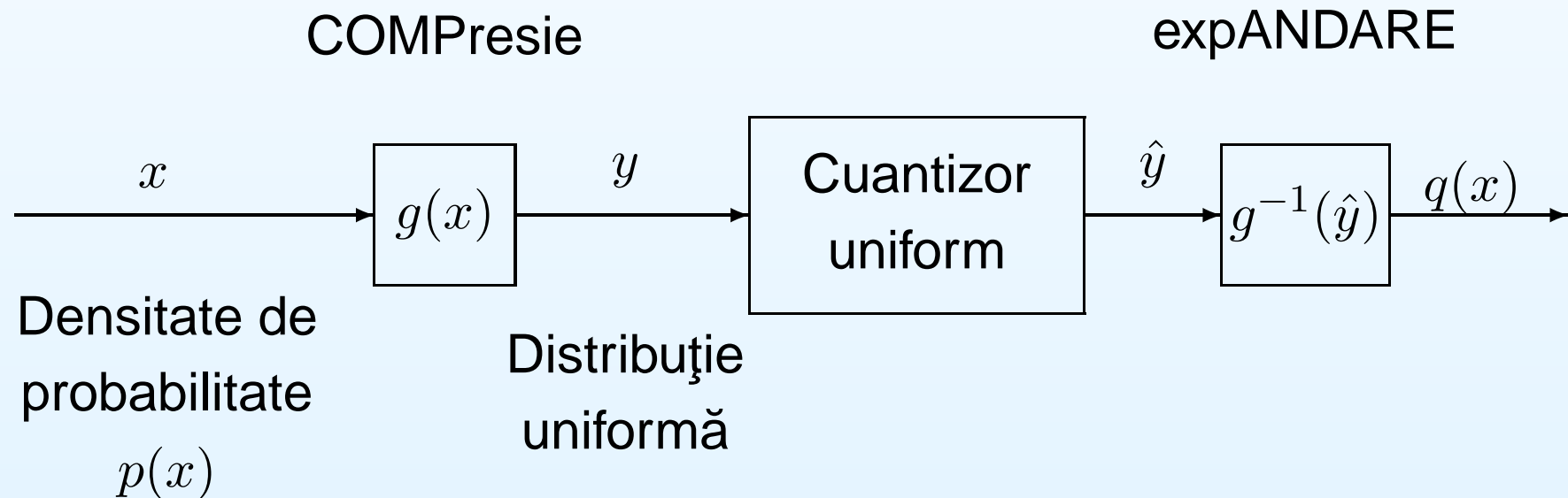
- Se obține  $D_2(\alpha) = D_1$  pentru  $\alpha = 1.62$ , deci  $D_2(\alpha) \leq D_1$  pentru  $\alpha \in [1.62, 2]$
- La limită, se obține  $D_2(2) = 0.001543$ , adică o valoare mult mai mică decât  $D_1$
- Exemplul arată că un cuantizor neuniform poate fi mai bun decât cel uniform
- Atenție: acest cuantizor nu este neapărat cel optim !

## Proiectarea unui cuantizor

- Date de proiectare:
  - distribuția semnalului de intrare, în formă analitică, sau prin date obținute experimental
  - dimensiunea dicționarului ( $N$ ) sau rezoluția  $r$
- Rezultatul proiectării:
  - dicționarul  $\mathcal{C}$  (codurile  $c_k$ ,  $k = 1 : N$ )
  - punctele de decizie  $d_k$ ,  $k = 0 : N$

## Compandare

- Semnalul  $x$ , cu densitate de probabilitate (neuniformă)  $p(x)$ , este transformat prin funcția  $g(x)$ , în încercarea de a obține un semnal  $y$  cu distribuție uniformă
- Proiectarea unui compandor se rezumă la găsirea funcției  $g$

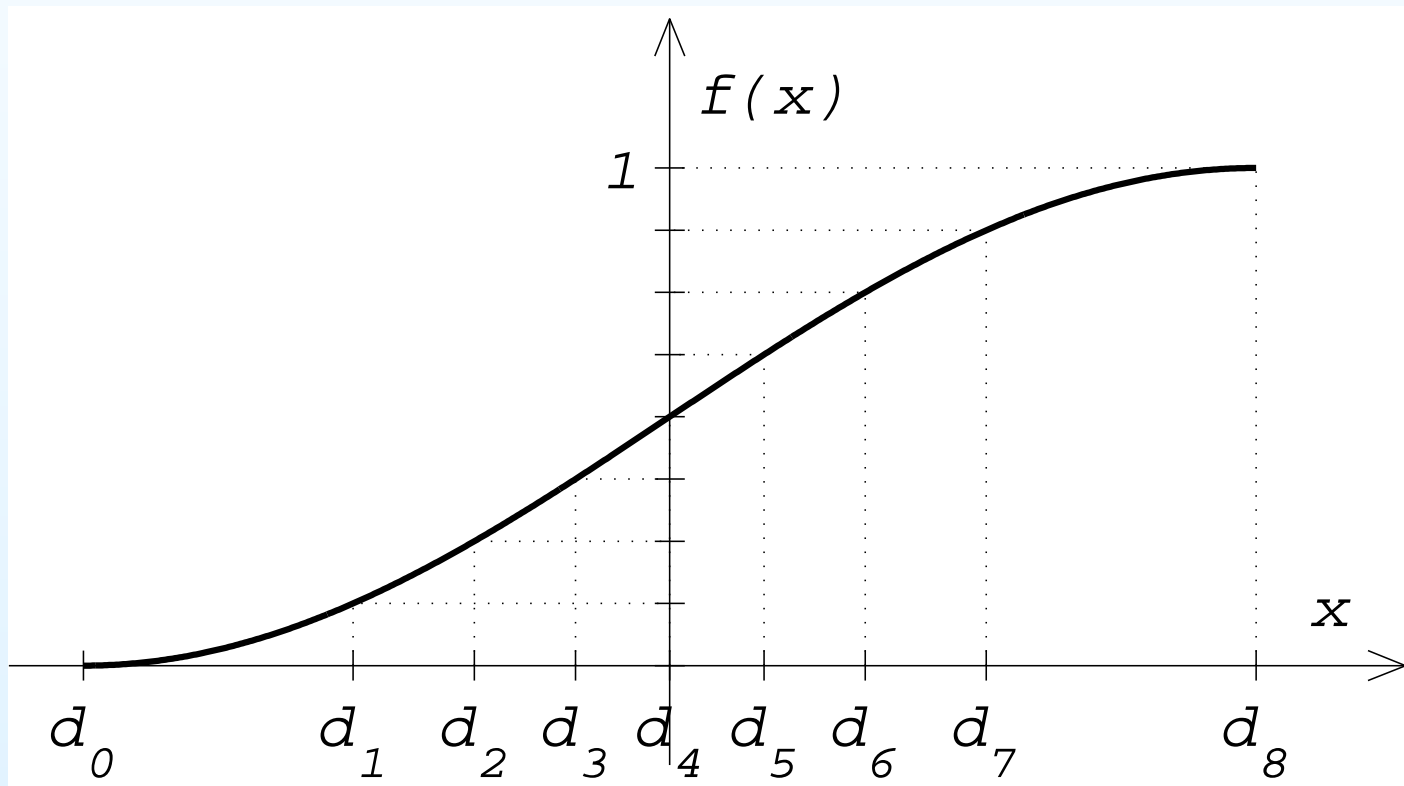




## Proiectarea unui compandor (1)

- Funcția cumulativă de probabilitate este

$$f(x_0) = \text{Prob}(x \leq x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} p(x) dx, \quad \text{cu } f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$



## Proiectarea unui compandor (2)

- Împărțim intervalul  $[0, 1]$  de pe axa verticală în  $N$  intervale egale ( $N = 8$  în figură), separate de punctele  $y_k = k/N$ ,  $k = 0 : N$
- Pe axa orizontală, definim punctele corespondente  $d_k \in \mathbb{R}$ ,  $f(d_k) = y_k$ ,  $k = 0 : N$
- Se observă că

$$\text{Prob}(d_{k-1} \leq x \leq d_k) = \int_{d_{k-1}}^{d_k} p(x)dx = f(d_k) - f(d_{k-1}) = \frac{1}{N}$$

- Alegând  $d_k$  drept puncte de decizie pentru un cuantizor al semnalului  $x$ , atunci probabilitatea ca  $x$  să aparțină unei celule Voronoi  $[d_{k-1}, d_k]$  este aceeași indiferent de celulă

## Proiectarea unui compandor (3)

- Concluzie: în schema de compandare alegem funcția  $g$  de compresie identică cu funcția de probabilitate  $f$
- Semnalul  $y = g(x)$  nu va avea neapărat distribuție uniformă, dar faptul că  $\text{Prob}(y_{k-1} \leq y \leq y_k) = 1/N$  asigură o bună aproximație a distribuției uniforme
- Compandorul obținut prin procedeul de mai sus nu este neapărat optim, deoarece densitatea de probabilitate în fiecare interval de decizie nu este constantă
- Compandorul realizează însă o bună aproximație a cuantizorului optim, în special la rezoluție înaltă

## Compandoare practice

- În cazul frecvent în care funcția de probabilitate  $f(x)$  nu este cunoscută analitic, dacă semnalul de intrare este staționar, se poate estima experimental  $f(x)$
- Când estimarea este imposibilă din considerente de timp real, se utilizează compresoare  $g(x)$  simple și robuste
- Graficul funcției  $g(x)$  are de obicei celule Voronoi mai mari pentru valori mari (și mai puțin frecvente) ale semnalului și celule mici pentru valori în preajma lui zero
- Un exemplu este legea- $\mu$  utilizată în telefonie digitală

$$g_{\mu}(x) = a \frac{\ln(1 + \mu|x|/a)}{\ln(1 + \mu)} \operatorname{sgn}(x) \in [-1, 1]$$

- Se presupune că semnalul este limitat la valori  $x \in [-a, a]$

## Condiții de optimalitate

- Presupunem cunoscute
  - $p(x)$ —densitatea de probabilitate a semnalului de intrare
  - $N$ —dimensiunea dicționarului
- Studiem relațiile dintre codurile  $c_k$  și punctele de decizie  $d_k$  pentru cuantizorul optim, cel pentru care distorsiunea medie este minimă

## Puncte de decizie optime pentru coduri date

- Presupunem fixate codurile  $c_k$ ,  $k = 1 : N$
- Dorim să aflăm punctele de decizie optime pentru aceste coduri
- Datorită formei cumulative a distorsiunii medii, putem reduce studiul la un singur interval  $[c_k, c_{k+1}]$
- Distorsiunea este minimizată dacă, pentru orice  $x \in [c_k, c_{k+1}]$ , valoarea  $q(x)$  este codul *cel mai apropiat* de  $x$
- Așadar punctul de decizie  $d_k$  se află la mijlocul intervalului  $[c_k, c_{k+1}]$ , i.e.

$$d_k = (c_k + c_{k+1})/2, \quad k = 1 : N - 1$$

## Coduri optime pentru puncte de decizie date

- Presupunem fixate punctele de decizie  $d_k, k = 0 : N$
- Dorim să aflăm codurile optime pentru aceste puncte de decizie
- Din nou, putem reduce studiul la o singură celulă Voronoi (dată)  $[d_{k-1}, d_k]$ , pentru care căutăm codul optim, anume valoarea  $c_k$  care minimizează distorsiunea

$$D_k = \int_{d_{k-1}}^{d_k} (x - c_k)^2 p(x) dx \quad (1)$$

## Lemă

- Fie  $\xi$  o variabilă aleatoare
- Constanta  $\alpha$  care minimizează eroarea pătratică medie  $E\{(\xi - \alpha)^2\}$  este  $\alpha = E\{\xi\}$ , adică media variabilei
- *Demonstrație:* notăm  $\mu = E\{\xi\}$  media variabilei aleatoare
- Observăm că avem

$$E\{(\xi - \alpha)^2\} = E\{(\xi - \mu + \mu - \alpha)^2\} = E\{(\xi - \mu)^2\} + (\mu - \alpha)^2,$$

deoarece  $E\{(\xi - \mu)\} = 0$

- În dreapta expresiei de mai sus, primul termen este constant, deci minimul se obține luând  $\alpha = \mu$



## Codul optim: centroidul celulei Voronoi (1)

- Valoarea  $c_k$  care minimizează distorsiunea este centrul de masă (centroidul) celulei Voronoi  $\mathcal{A}_k = [d_{k-1}, d_k]$ , i.e.

$$c_k = E\{x \mid x \in \mathcal{A}_k\} = \frac{\int_{d_{k-1}}^{d_k} xp(x)dx}{\int_{d_{k-1}}^{d_k} p(x)dx} \quad (2)$$

- *Demonstrație.* Notăm

$$p_k = \text{Prob}(x \in \mathcal{A}_k) = \int_{d_{k-1}}^{d_k} p(x)dx$$

probabilitatea ca semnalul de intrare să ia valori în celula Voronoi considerată

## Codul optim: centroidul celulei Voronoi (2)

- Distorsiunea pe  $[d_{k-1}, d_k]$  poate fi scrisă în forma

$$D_k = p_k \int_{d_{k-1}}^{d_k} (x - c_k)^2 \frac{p(x)}{p_k} dx = p_k E\{(x - c_k)^2 \mid x \in \mathcal{A}_k\},$$

deoarece  $p(x)/p_k$  are semnificație de densitate de probabilitate a semnalului  $x$ , atunci când considerăm doar valorile din celula Voronoi  $\mathcal{A}_k$

- Folosind Lema, obținem

$$c_k = E\{x \mid x \in \mathcal{A}_k\} = \int_{d_{k-1}}^{d_k} x \frac{p(x)}{p_k} dx,$$

de unde rezultă imediat (2)

## Observații

- Condițiile (1) și (2) sunt necesare pentru optimalitate, dar nu neapărat suficiente
- Ele sunt satisfăcute și de minime locale ale distorsiunii medii, nu doar de minimul global
- Pentru o densitate uniformă de probabilitate a intrării în intervalul  $[a, b]$ , cuantizorul uniform satisface condițiile de optimalitate. Relația (1) este evident adevărată, iar (2) devine

$$c_k = \frac{\int_{d_{k-1}}^{d_k} \frac{x}{b-a} dx}{\int_{d_{k-1}}^{d_k} \frac{1}{b-a} dx} = \frac{\int_{d_{k-1}}^{d_k} x dx}{d_k - d_{k-1}} = \frac{d_k^2 - d_{k-1}^2}{2(d_k - d_{k-1})} = \frac{d_{k-1} + d_k}{2}$$

## Algoritmul Lloyd-Max

0. Se dă numărul de nivele de cuantizare  $N$ . Se alege un dicționar inițial  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_N\}$ . Se alege o toleranță  $\epsilon$ . Se inițializează pasul de iterare  $i = 0$
1. Se calculează punctele de decizie optime  $d_k$ ,  $k = 1 : N - 1$ , pentru codurile  $c_k$ , conform relației (1)
2. Se calculează codurile optime  $c_k$ ,  $k = 1 : N$ , pentru punctele de decizie  $d_k$ , conform relației (2)
3. Calculează distorsiunea medie curentă

$$D^{(i)} = \sum_{k=1}^N \int_{d_{k-1}}^{d_k} (x - c_k)^2 p(x) dx$$

4. Dacă

$$\frac{D^{(i-1)} - D^{(i)}}{D^{(i)}} < \epsilon,$$

atunci stop. Altfel, se pune  $i \leftarrow i + 1$  și se reia de la pasul 1

## Algoritmul Lloyd-Max—comentarii

- Distorsiunea scade la fiecare pas: pentru e.g. puncte de decizie date, noile coduri minimizează distorsiunea, așadar produc o distorsiune mai mică decât codurile de la iterația anterioară
- Algoritmul converge către un punct staționar, care este un minim local (nu neapărat cel global)
- Inițializări diferite ale algoritmului pot produce rezultate diferite

## Exemplu (1)

- Studiem evoluția algoritmului Lloyd-Max pentru
  - intrare uniform distribuită  $x \in [0, 1]$
  - dimensiunea dicționarului  $N = 2$
- Singurul punct de decizie care se modifică în algoritm este  $d_1$  (celelalte sunt  $d_0 = 0, d_2 = 1$ )
- Pentru coduri date, punctul optim de decizie este  $d_1 = (c_1 + c_2)/2$
- Pentru  $d_1$  dat, ținând seama de distribuția uniformă, codurile optime sunt

$$c_1 = d_1/2, \quad c_2 = (d_1 + 1)/2$$

## Exemplu (2)

- Evoluția algoritmului Lloyd-Max este următoarea

Inițializare	$c_1 = 0.3, c_2 = 0.7$	$c_1 = 0.2, c_2 = 0.7$
Iterația 1	$d_1 = 0.5$ $c_1 = 0.25, c_2 = 0.75$	$d_1 = 0.45$ $c_1 = 0.225, c_2 = 0.725$
Iterația 2	idem	$d_1 = 0.475$ $c_1 = 0.2375, c_2 = 0.7375$
Iterația 3		$d_1 = 0.4875$ etc.

- Pentru ambele inițializări, algoritmul converge la codurile optime; cuantizorul optim este cel uniform
- Prima inițializare: convergență într-o singură iterație
- A doua inițializare: convergență asimptotică

## Proiectare utilizând date empirice

- În forma dată anterior, algoritmul Lloyd-Max se bazează pe cunoașterea densității de probabilitate  $p(x)$  a semnalului de intrare
- Presupunem acum că dispunem doar de  $M$  eșantioane ale semnalului de intrare, anume  $x_\ell$ ,  $\ell = 1 : M$ ; notăm  $\mathcal{X}$  mulțimea acestor eșantioane
- Numărul  $M$  este suficient de mare în raport cu  $N$
- Structura algoritmului Lloyd-Max rămâne aceeași, dar calculul codurilor trebuie adaptat structurii discrete a celulelor Voronoi



## Condiții de optimalitate pentru date empirice

- Pentru coduri fixate, o celulă Voronoi care respectă condiția de optimalitate (1) este mulțimea finită

$$\mathcal{A}_k = \{x_\ell \in \mathcal{X}, \ell = 1 : M \mid |x_\ell - c_k| \leq |x_\ell - c_i|, i = 1 : N, i \neq k\} \quad (3)$$

- Așadar celula asociată codului  $c_k$  conține eșantioanele din  $\mathcal{X}$  care sunt mai aproape de acest cod decât de oricare altul
- Centrul de masă al unei celule se calculează în mod natural prin media eșantioanelor din celula respectivă

$$c_k = \frac{1}{|\mathcal{A}_k|} \sum_{x_\ell \in \mathcal{A}_k} x_\ell \quad (4)$$

## Algoritmul Lloyd-Max—date empirice

0. Se dau  $M$  eșantioane ale semnalului de intrare,  $x_\ell$ ,  $\ell = 1 : M$ . Se alege un dicționar inițial  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_N\}$
1. Se stabilesc celulele Voronoi discrete conform relației (3)
2. Se recalculează codurile  $c_k$ ,  $k = 1 : N$ , conform relației (4)
3. Se repetă pașii 1 și 2 până când distorsiunea

$$D = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N \sum_{x_\ell \in \mathcal{A}_k} (x_\ell - c_k)^2$$

nu mai scade semnificativ

## Exemplu (1)

- Studiem evoluția algoritmului Lloyd-Max atunci când se cunosc  $M = 6$  eșantioane ale intrării

$$\mathcal{X} = \{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$$

- Presupunem că, atunci când un eșantion este egal depărtat de două coduri, el face parte din celula Voronoi a codului mai mare

## Exemplu (2)

Inițializare	$c_1 = 0.3, c_2 = 0.7$	$c_1 = 0.2, c_2 = 0.5$
Iterația 1	$\mathcal{A}_1 = \{0, 0.2, 0.4\}$ $\mathcal{A}_2 = \{0.6, 0.8, 1\}$ $c_1 = 0.2, c_2 = 0.8$	$\mathcal{A}_1 = \{0, 0.2\}$ $\mathcal{A}_2 = \{0.4, 0.6, 0.8, 1\}$ $c_1 = 0.1, c_2 = 0.7$
Iterația 2	idem	idem

- Pentru ambele inițializări, algoritmul converge într-o iterație, dar la cuantizoare diferite
- Pentru a doua inițializare, după iterația 1, eșantionul 0.4 este egal depărtat de codurile  $c_1 = 0.1, c_2 = 0.7$ . Dacă schimbăm regula adoptată și includem acest eșantion în celula  $\mathcal{A}_1$  (a codului mai mic), atunci rezultatul se schimbă și obținem aceleași coduri ca pentru prima inițializare

## Cuantizare vectorială—definiții (1)

- Un cuantizor vectorial este o funcție  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{C}$ , unde  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$  este un dicționar cu  $N$  elemente
- Spre deosebire de cuantizarea scalară, unde fiecare element al intrării este cuantizat separat, acum se cuantizează simultan  $n$  valori ale intrării, sub forma unui vector în  $\mathbb{R}^n$
- Codul  $q(x) = c_k$ ,  $k = 1 : N$ , este și el un vector de dimensiune  $n$
- Pentru reprezentarea unui cod sunt necesari  $\log_2 N$  biți. Deoarece un cod reprezintă  $n$  valori ale intrării, rezoluția unui cuantizor vectorial este

$$r = (\log_2 N)/n$$

## Cuantizare vectorială—definiții (2)

- Celula Voronoi asociată codului  $c_k$  este

$$\mathcal{A}_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) = c_k\} \subset \mathbb{R}^n$$

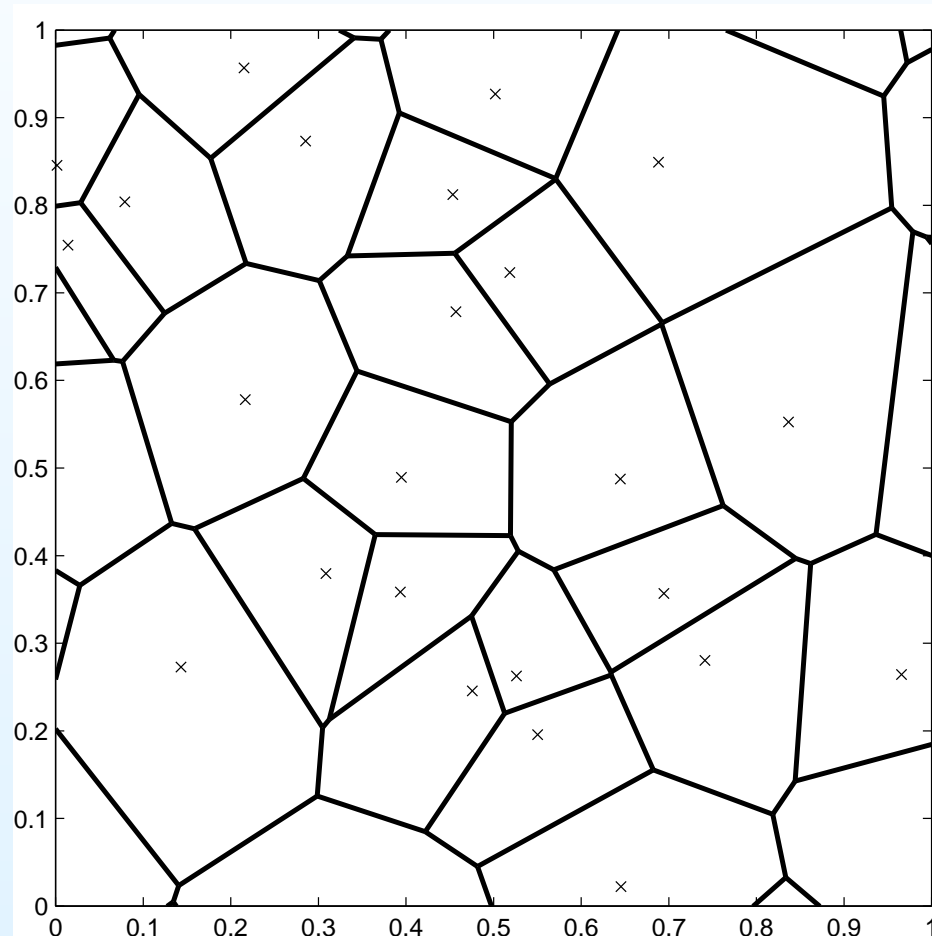
- Un cuantizor ale cărui celule Voronoi sunt convexe se numește *regulat*
- Distorsiunea medie a unui cuantizor vectorial este

$$D = \int_{\mathbb{R}^n} \|x - q(x)\|^2 p(x) dx = \sum_{k=1}^N \int_{\mathcal{A}_k} \|x - c_k\|^2 p(x) dx,$$

unde  $p(x)$  este densitatea de probabilitate a seturilor de  $n$  valori ale intrării. Norma utilizată este cea euclidiană

## Cuantizor 2D cu coduri aleatoare

- Celulele Voronoi sunt optime ! (vom vedea mai târziu condițiile de optimalitate)

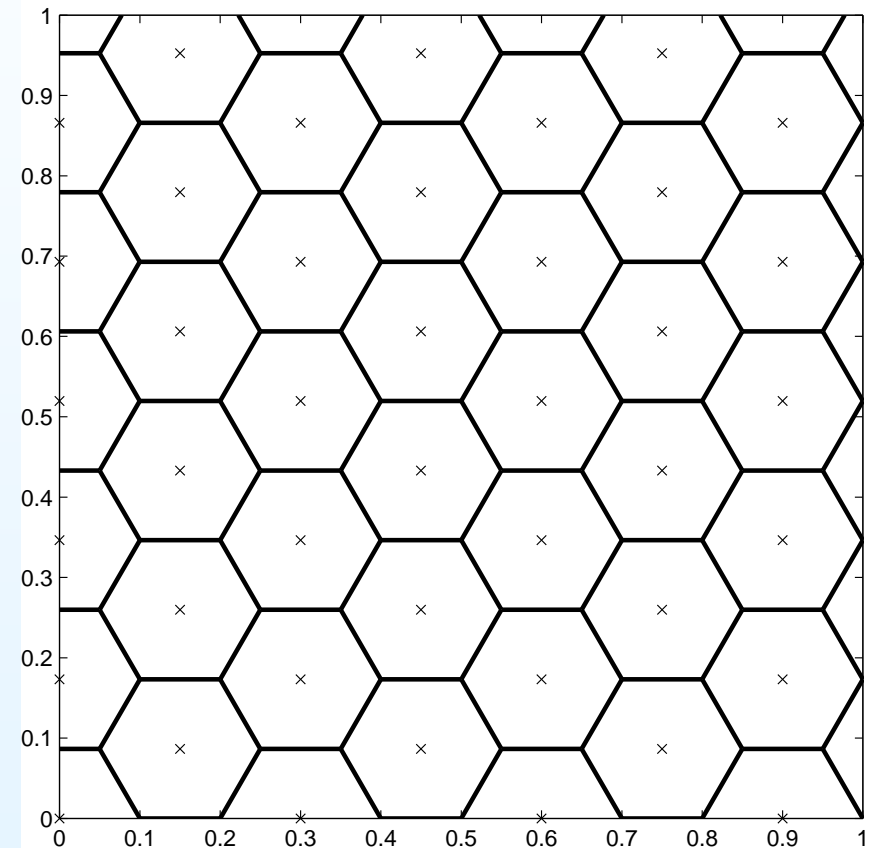
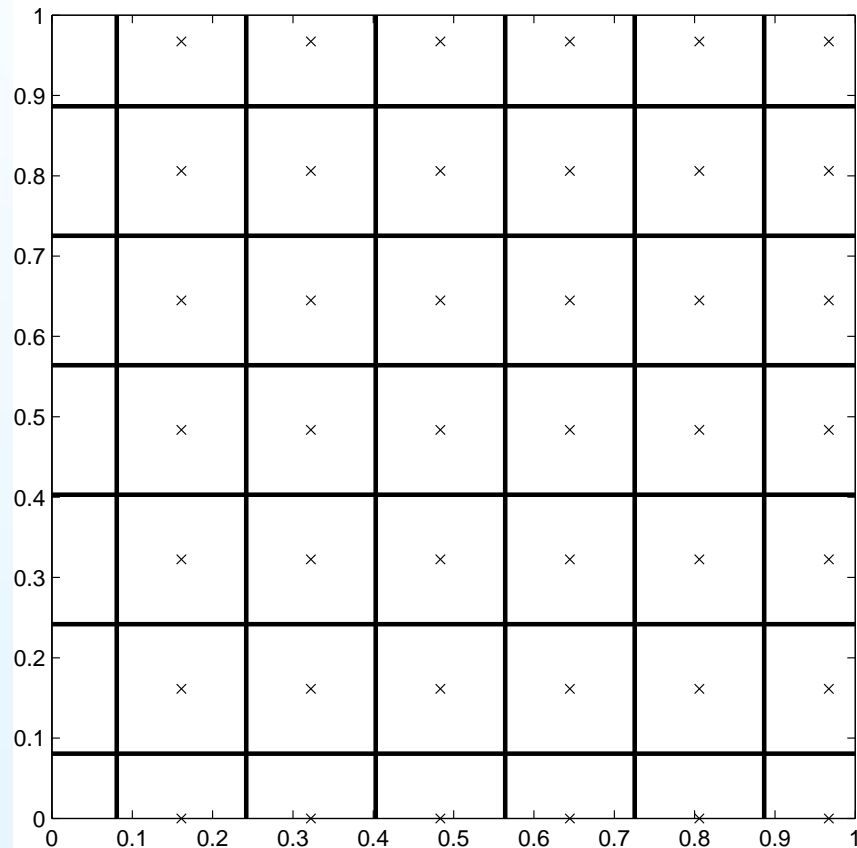


## Comparație între cuantizarea vectorială și cea scalară

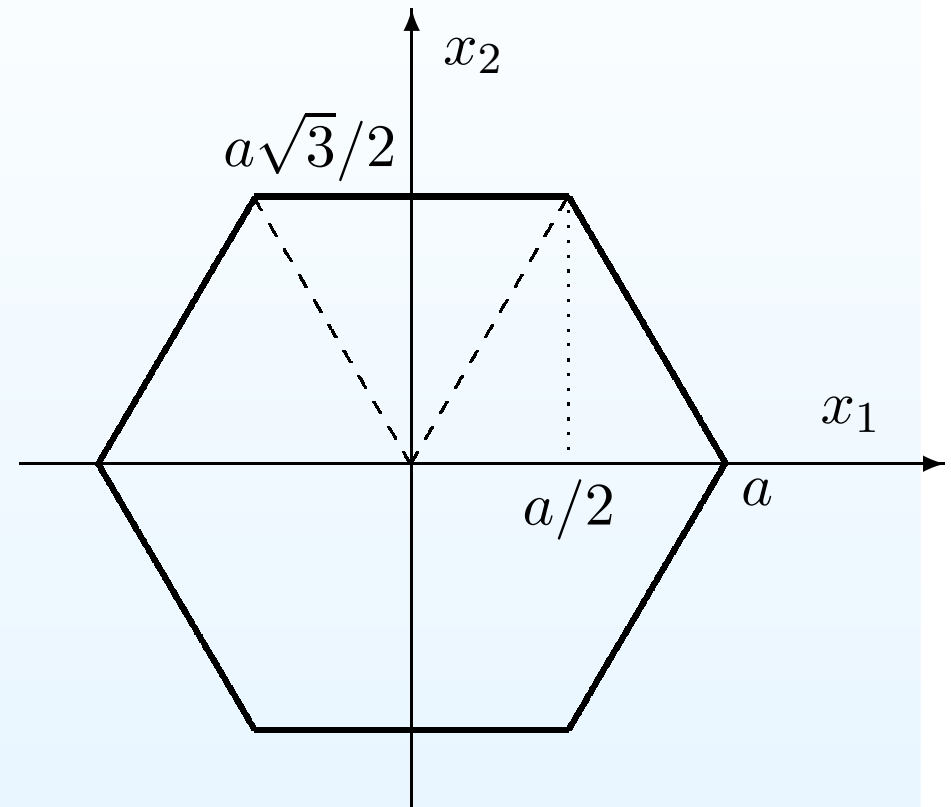
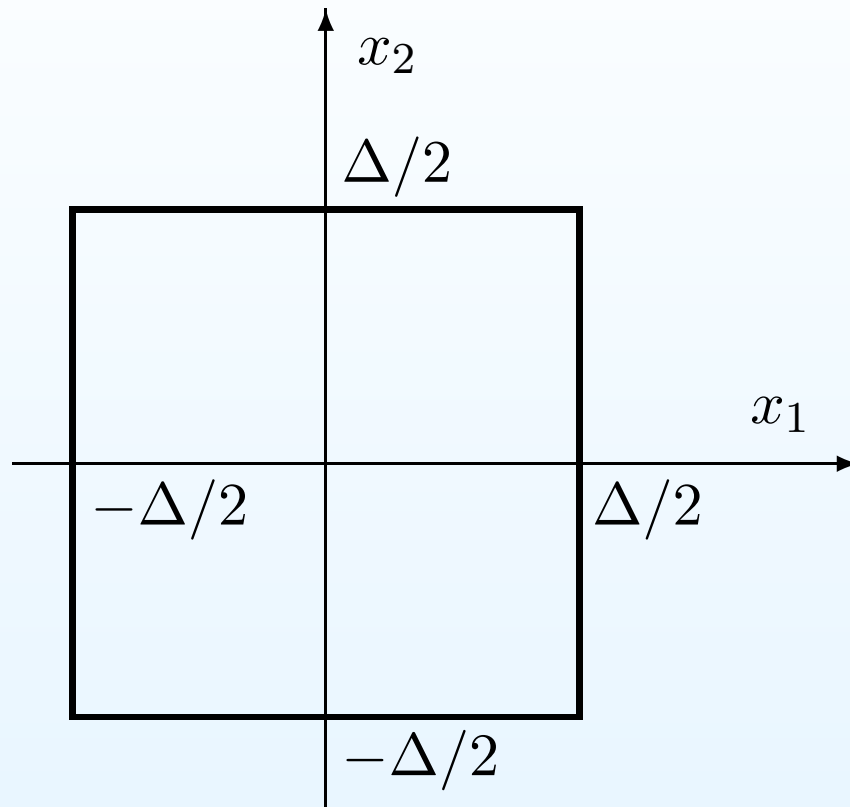
- Cuantizarea vectorială permite obținerea unor distorsiuni mai mici decât cea scalară, la rezoluții egale
- Ilustrăm această afirmație în cazul  $n = 2$ , pentru cazul simplu în care semnalul de intrare este uniform distribuit
- Comparăm două cuantizoare
  - cuantizor uniform 2D
  - cuantizor cu celule hexagonale



## Două cuantizoare 2D



## Celule Voronoi pentru cuantizare 2D



## Cuantizorul uniform 2D (1)

- Cuantizorul scalar uniform este optim
- Cuantizând câte două valori simultan (dar independent) cu acest cuantizor, obținem un cuantizor 2D
- Celulele Voronoi sunt pătrate
- Notăm cu  $\Delta$  distanța dintre două coduri, care este și latura celulei Voronoi
- Presupunem că toate celulele, inclusiv cele de la margine, au aceeași formă
- Deoarece fiecare celulă are arie  $\Delta^2$ , rezultă că  $p(x) = 1/(N\Delta^2)$

## Cuantizorul uniform 2D (2)

- Forma identică a celulelor permite limitarea studiului la o singură celulă, cea din jurul codului  $c_k = 0$
- Distorsiunea medie este

$$\begin{aligned} D_{uni} &= N \int_{\mathcal{A}_k} (x - c_k)^2 \frac{1}{N \Delta^2} dx \\ &= \frac{1}{\Delta^2} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} (x_1^2 + x_2^2) dx_1 dx_2 \\ &= \frac{\Delta^2}{6} \end{aligned}$$

- Valoarea de două ori mai mare decât cea a cuantizorului uniform scalar se explică prin lipsa normalizării cu  $n$  a distorsiunii

## Cuantizorul cu celule hexagonale

- Considerăm o celulă Voronoi cu latura  $a$  (egală cu raza cercului circumscris)
- Aria acestei celule este  $A = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$
- Densitatea de probabilitate uniformă are valoarea  $p(x) = 1/(NA)$
- Presupunând celula centrată în origine, putem calcula distorsiunea pe cele 6 triunghiuri echilaterale formate de două raze (ale cercului circumscris) și o latură
- Distorsiunea medie este

$$D_{hex} = 6N \int_0^{a\sqrt{3}/2} \int_{-x_2/\sqrt{3}}^{x_2/\sqrt{3}} (x_1^2 + x_2^2) \frac{1}{NA} dx_1 dx_2 = \frac{5a^2}{12}$$

## Comparație

- Pentru a compara distorsiunile cuantizoarelor hexagonal și uniform, este necesar ca ariile celulelor Voronoi să fie egale, i.e.

$$\Delta^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$

- Raportul distorsiunilor este

$$\frac{D_{hex}}{D_{uni}} = \frac{\frac{5a^2}{12}}{\frac{3\sqrt{3}a^2}{2 \cdot 6}} = \frac{5}{3\sqrt{3}} = 0.9623$$

- Cuantizorul hexagonal oferă un câștig de aproape 4% în distorsiune
- În 2D, cuantizorul hexagonal este optim !
- Pentru  $n$  mai mare, cuantizarea vectorială oferă îmbunătățiri mai mari

## Implementarea unui cuantizor vectorial

- Implementarea unui cuantizor vectorial este mai dificilă decât cea a unui scalar
- Dihotomia nu mai este posibilă și, pentru un dicționar oarecare, doar căutarea exhaustivă poate produce codul cel mai apropiat de intrarea  $x \in \mathbb{R}^n$
- Dacă însă dicționarul are o structură regulată, precum în cazul celulelor hexagonale, atunci se pot concepe algoritmi eficienți de căutare
- În general, cuantizoarele vectoriale utilizate în practică folosesc o structură a codurilor care le face neoptimale, dar (relativ) ușor de utilizat

## Celule Voronoi optime pentru coduri date

- Presupunând că dicționarul este cunoscut, distorsiunea este minimizată dacă, pentru  $x \in \mathbb{R}^n$  dat, valoarea  $q(x)$  este codul cel mai apropiat de  $x$
- Celula Voronoi optimă asociată codului  $c_k$  este

$$\mathcal{A}_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - c_k\| \leq \|x - c_i\|, i = 1 : N\}$$

- Celulele Voronoi optime au formă poliedrală
- Dacă  $\mathcal{A}_k$  și  $\mathcal{A}_i$  sunt celule vecine, atunci granița dintre ele este hiperplanul ortogonal pe mijlocul segmentului ce unește codurile  $c_k$  și  $c_i$
- Celulele Voronoi sunt evident convexe



## Coduri optime pentru celule Voronoi date

- Presupunem acum că celulele Voronoi sunt cunoscute și vrem să determinăm codurile optime corespunzătoare
- Similar cu cazul scalar, codul optim asociat celulei  $\mathcal{A}_k$  este centrul de masă (centroidul) celulei respective, i.e.

$$c_k = \frac{1}{\text{vol } \mathcal{A}_k} \int_{\mathcal{A}_k} xp(x)dx = E\{x \mid x \in \mathcal{A}_k\}$$

## Algoritmul Lloyd generalizat—date empirice

0. Se dau  $M$  eșantioane ale semnalului de intrare,  $x_\ell$ ,  $\ell = 1 : M$ . Se alege un dicționar inițial  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_N\}$

1. Se stabilesc celulele Voronoi discrete

$$\mathcal{A}_k = \{x_\ell \in \mathcal{X}, \ell = 1 : M \mid \|x_\ell - c_k\| \leq \|x_\ell - c_i\|, i = 1 : N, i \neq k\}$$

2. Se recalculează codurile  $c_k$ ,  $k = 1 : N$ , ca fiind centrele de masă ale celulelor Voronoi

$$c_k = \frac{1}{|\mathcal{A}_k|} \sum_{x_\ell \in \mathcal{A}_k} x_\ell$$

3. Se repetă pașii 1 și 2 până când distorsiunea nu mai scade

$$D = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N \sum_{x_\ell \in \mathcal{A}_k} \|x_\ell - c_k\|^2$$

## Comentarii

- Algoritmul converge, dar șansa de a se termina într-un minim local este mult mai mare decât în cazul scalar
- Pentru evitarea acestei situații se folosesc diverse stratageme
- Algoritmul Linde-Buzo-Gray: se pornește cu un număr mic de coduri, iar celulele Voronoi cu multe elemente sunt "sparte" în două pe măsură ce iterațiile avansează