Laboratorul 3. Răspunsul dinamic al sistemelor SISO

0.1 Scopul laboratorului

Studierea răspunsului dinamic (în domeniul timp) al sistemelor de convoluţie SISO, invariante în timp având transformata Laplace o funcţie raţională proprie.
Un astfel de sistem se poate descrie întotdeauna complet prin intermediul funcţiei de transfer :

$$H(s) = \frac{p(s)}{q(s)} \tag{1}$$

unde $p(s)$ şi $q(s)$ sunt polinoame cu coeficienţi reali cu $\partial p(s) \leq \partial q(s)$. Uzual $p(s)$ şi $q(s)$ sunt presupuse coprime a.i. rădăcinile lor au semnificaţia de zerouri, respectiv de poli ai sistemului $H(s)$.

0.2 Moduri de reprezentare a unui sistem SISO

Un sistem (1) se poate descrie prin intermediul funcţiei de transfer în mai multe moduri:

- Direct prin coeficienţii funcţiei raţionale:

$$H(s) = \frac{p_1 s^{m_p} + p_2 s^{m_p - 1} + \ldots + p_{m_p} s + p_{m_p+1}}{q_1 s^{n_q} + q_2 s^{n_q - 1} + \ldots + q_{n_q} s + q_{n_q+1}} \tag{2}$$

  unde $p_i, q_j \in R,\ i = 1 : m+1,\ j = 1 : n+1,\ m_p \leq n_q$

- In forma poli-zerouri:
  1. cu coeficienţi complecşi

  $$H(s) = k \frac{\prod_{i=1}^{n_p}(s - z_i)}{\prod_{j=1}^{n_q}(s - p_j)} \tag{3}$$

     unde $k \in R,\ z_i \in C,\ p_j \in C,\ i = 1 : n_p,\ j = 1 : n_q$.
  2. cu coeficienţi reali

  $$H(s) = k \frac{\prod_{i=1}^{n_{p1}}(s - z_i) \prod_{i=1}^{n_{p2}}(s^2 + 2\zeta_{z_i}\omega_{z_i} + \omega_{z_i}^2)}{\prod_{j=1}^{n_{q1}}(s - p_j) \prod_{i=1}^{n_{q2}}(s^2 + 2\zeta_{p_i}\omega_{p_i} + \omega_{p_i}^2)} \tag{4}$$

     unde $k \in R,\ z_i, p_j \in R,\ -1 \leq \zeta_{z_i} \leq 1,\ -1 \leq \zeta_{p_i} \leq 1,\ \omega_{z_i}, \omega_{p_i} \in R^+$.

In MATLAB un sistem se reprezintă sub forma unui obiect, putându-se folosi alternativ:

- sub formă de funcţie de transfer folosind funcţia `tf`:

  ```
  H=tf(num,den)
  ```

  unde **H** este numele variabilei de tip "sistem", iar **num** şi **den** sunt vectori ce conţin coeficienţii numărătorului, respectiv ai numitorului funcţiei de transfer, aceştia fiind aşezaţi în ordinea descrescătoare a puterilor coeficienţilor polinomiali:
  num=$[p_1\ p_2\ \ldots\ p_{m_p+1}]$
  den=$[q_1\ q_2\ \ldots\ q_{n_q+1}]$

- sub formă de funcţie de transfer în forma poli-zerouri folosind funcţia `zpk` :

  ```
  H=zpk(z,p,k)
  ```

  unde **z** şi **p** sunt vectori ce conţin zerourile, respectiv polii funcţiei de transfer, iar **k** este factorul de amplificare:

```
z=[z_1 z_2 ... z_m]
p=[p_1 p_2 ... p_n]
```

Exerciţiul 1. Folosind comenzile Matlab prezentate mai sus, scrieţi următoarele funcţii de transfer:

$$H_1(s) = \frac{s+5}{s\,(s+1)\,(s+2)}; \quad H_2(s) = \frac{3}{s^2-16}. \tag{5}$$

Rezolvare:

```
H_1=tf([1 5],[1 3 2 0])
H_1=zpk([-5],[0 -1 -2],1)
%ca obiect
s=tf('s');
H_1=(s+5)/(s*(s+1)*(s+2))
```

Se pot realiza conversii între cele două moduri de reprezentare a unui sistem cu ajutorul funcţiei MATLAB `tf2zpk`, cu sintaxa:

```
[z,p,k]=tf2zpk(num,den)
```

Exerciţiul 2. Efectuaţi conversia `tf2zpk` pentru funcţia de transfer: $H(s) = \frac{s+5}{s^2+3s+1}$.

0.3 Analiza răspunsului în timp al diverselor sisteme

Răspunsul în timp al unui sistem reprezintă dependenţa ieşirii sistemului de timp, considerată pentru un semnal de intrare specificat. Pentru clasele de sisteme studiate răspunsul în timp la un semnal precizat este unic.
Pentru analiza şi sinteza (proiectarea) sistemelor automate un rol esenţial este jucat de anumite *criterii de performanţă*. In etapa de proiectare aceste criterii de performanţă sunt folosite pentru a ajusta *parametrii sistemului* pentru a obţine o anumită comportare dorită . Sistemele automate sunt inerent dinamice şi de aceea criteriile de performanţă sunt adesea exprimate în termenii *răspunsului în timp* al sistemului la anumite semnale test de intrare. Semnalele test standard (impuls, treaptă, rampă, armonică) sunt o submulţime relativ restrânsă de semnale de intrare la care trebuie să lucreze un anumit sistem. Cu toate acestea, răspunsul în timp al sistemului la semnale complexe poate fi bine evaluat pe baza răspunsului la aceste semnale test standard.
Pentru clasa de sisteme de care ne ocupăm (sisteme de convoluţie cu funcţie de transfer raţională), răspunsul în timp $y(t)$ la semnalul de intrare $u(t)$ se poate obţine în două feluri:

- Prin produsul de convoluţie :
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)d\tau \tag{6}$$
unde $h(t)$ este funcţie de răspuns la impuls. Pentru calcularea numerică a convoluţiei (6) se folosesc modelele detaliate în **Laboratorul 2**.

- Prin transformata Laplace inversă :
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\cdot U(s)\}(t) \tag{7}$$
unde $H(s)$ este funcţia de transfer a sistemului, iar $U(s)$ şi $Y(s)$ sunt transformatele Laplace ale semnalelor de intrare, respectiv de ieşire. In majoritatea covârşitoare a situaţiilor se preferă a doua metodă întrucât calculul relativ complicat al integralei din (6) este redus în (7) la o simplă înmulţire în operaţional. Ca argumente suplimentare precizăm că sistemele sunt cel mai adesea modelate (descrise) prin intermediul funcţiei de transfer raţionale $H(s)$, iar răspunsul sistemelor se studiază la semnale test elementare $u(t)$ a căror transformată Laplace $U(s)$ este disponibilă în tabele, iar transformata Laplace inversă a lui $Y(s)$ se obţine prin descompunerea în fracţii simple şi folosirea formulelor de inversare standard.

Dacă funcţia de transfer $H(s)$ şi funcţia $U(s)$ există şi sunt funcţii raţionale, atunci $Y(s)$ există şi este funcţie raţională putând fi dată într-una dintre formele:

$$Y(s) = \frac{a(s)}{b(s)} = p(s) + \frac{q(s)}{r(s)} \tag{8}$$

unde $a,\ b,\ p,\ q,\ r$ sunt polinoame cu coeficienţi reali cu perechile $(a,\ b)$ şi $(q,\ r)$ coprime şi $\partial(r) > \partial(q)$. Partea polinomială $p(s)$ lipseşte dacă sistemul este strict propriu. Prin descompunerea în fracţii simple a părţii strict proprii se obţin expresiile explicite:

$$Y(s) = \sum_{i=0}^{n_p} p_i s^i + \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{m_i} \frac{A_{ij}}{(s-s_i)^j} \right) \tag{9}$$

unde $s_1, s_2, \ldots, s_k$ sunt rădăcinile (reale sau complexe) distincte ale lui r(s) şi m_i este multiplicitatea lui s_i, $i = 1 : k$, $n_p := \partial(a) - \partial(b)$. Coeficienţii reali sau complecşi A_{ij} sunt daţi de formula:

$$A_{ij} = \frac{1}{(m_i - k)!} \frac{d^{m_i - k}}{ds^{m_i - k}} \left[(s - s_i)^{m_i} \frac{q(s)}{r(s)} \right] |_{s=s_k} \tag{10}$$

unde $k = 1 : m_i$. Având în vedere că sistemele studiate au în general coeficienţi reali, ne interesează descompunerea în fracţii simple cu coeficienţi reali. In acest caz termenii din (9) corespunzători unor poli complex conjugaţi $\overline{s_i}$ cu multiplicitatea m_i se înlocuiesc cu

$$\sum_{j_1}^{m_i} \frac{B_{ij} + A_{ij}}{(s^2 + a_i s + b_i)^j} \tag{11}$$

unde $(s - s_i)(s - \overline{s_i}) = s^2 + a_i s + b_i$ şi $B_{ij},\ A_{ij},\ j = 1 : m_i$ sunt reali. Răspunsul în timp se obţine pe baza formulelor (9) - (11) ca sumă a transformatelor Laplace inverse ale unor elemente standard. Pe baza acestor formule şi a tabelelor de transformate Laplace inverse putem afirma că răspunsul în timp al unui sistem are o expresie generală complicată pe baza careia este dificil să formulăm specificaţii de proiectare. Din fericire, datorită liniarităţii sistemului, se observă pe baza formulelor (9) - (11) că răspunsul general se obţine prin superpoziţia răspunsurilor în timp ale unor sisteme mai simple (de ordinul I sau II). Din aceasta cauză este esenţială studierea în detaliu a comportării unor astfel de sisteme elementare la anumite semnale de test de intrare, cum ar fi:

- Impuls Dirac: $\delta(t)$
- Polinoame: $u(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} 1(t)$, $n \geq 1$ (uzual $n = 1$ (treaptă), $n = 2$ (rampă) , $n = 3$ (parabolă)
- Armonică : $u(t) = e^{j\omega t} 1(t)$, $\omega \geq 0$.

Având în vedere că orice specificaţie de proiectare asupra unui sistem automat nu se face decât după asigurarea stabilităţii sistemului vom fi interesaţi în majoritatea covârşitoare a cazurilor de răspunsul în timp al sistemelor *stabile* I/O.

Tabel cu transformatele Laplace ale semnalelor test	
Semnalul $y(t)$	$\mathcal{L}\{y(t)\}$
$\delta(t)$	1
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} 1(t)$	$\frac{1}{s^n}$
$e^{j\omega t} 1(t)$	$\frac{1}{s - j\omega}$

Sisteme elementare

- Element de ordinul I - $H(s) = \frac{K}{1+Ts}$; $K,\ T > 0$;
- Element de ordinul II - $H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$, $\omega_n > 0,\ 0 \leq \zeta \leq 1$;

- Element de ordinul II cu pol şi/sau zerou suplimentar - $H(s) = \frac{\frac{\omega_n^2}{z}(s+z)}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$, $\omega_n > 0,\ 0 \leq \zeta \leq 1$;

In continuare vom pune în evidenţă unele particularităţi ale răspunsului forţat al sistemelor liniare la anumite semnale test. Dacă sistemul este (extern) *strict stabil*, adică $\mathcal{P}[H(s)] \subset C_-$, atunci în cazul intrărilor polinomiale sau al celor armonice, răspunsul forţat al sistemului se desface în două componente: una tranzitorie şi cealaltă permanentă de acelaşi tip cu intrarea:

$$y_f(t) = y_p(t) + y_t(t). \tag{12}$$

Pentru intrări polinomiale: $u(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}1(t)$

$$y_p(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{H^{(i-1)}(0)}{(i-1)!} \cdot \frac{t^{n-i}}{(n-1)!},\ t \geq 0 \tag{13}$$

iar

$$y_t(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{H}(s)\}(t) \tag{14}$$

unde $\tilde{H}(s)$ rezultă din:

$$H(s) \cdot \frac{1}{s^n} = H(0) \cdot \frac{1}{s^n} + \frac{H'(0)}{1!} \cdot \frac{1}{s^{n-1}} + \ldots + \frac{H^{n-1}(0)}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{s} + \tilde{H}(s). \tag{15}$$

Componenta tranzitorie a răspunsului forţat are proprietatea că $\lim_{t\to\infty} y_t(t) = 0$.
Componenta permanentă se poate observa că este de tip polinomial (formula (13)). In cazul intrării particulare de tip treaptă unitară cu menţiunea ipotezei de stabilitate strictă , răspunsul forţat al sistemului se mai numeşte **răspuns indicial**, iar componenta permanentă este:

$$y_p(t) = H(0),\ t \geq 0. \tag{16}$$

Intrucât acestă componentă este constantă în timp, ea se mai numeşte **componentă staţionară** .

Pentru intrări armonice: $u(t) = e^{j\omega t}1(t) = (\cos\omega t + j\sin\omega t)1(t)$

$$y_p(t) = H(j\omega)e^{j\omega t},\ t \geq 0, \tag{17}$$

iar

$$y_t(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{H}(s)\}(t), \tag{18}$$

unde $\tilde{H}(s)$ rezută din:

$$H(s)\frac{1}{s-j\omega} = \frac{H(j\omega)}{s-j\omega} + \tilde{H}(s). \tag{19}$$

Din (17) rezultă că în regim permanent, intrarea armonică provoacă o ieşire de asemea armonică modificată însă ca amplitudine şi defazaj.

0.3.1 Sisteme de ordinul I

Forma generală este:

$$H(s) = \frac{K}{1+Ts} \tag{20}$$

cu $K,\ T \in R$. Uzual se ia $K > 0$, răspunsul în timp pentru $K < 0$ reducându-se la acest caz printr-o simplă simetrizare în raport cu abscisa.

Răspunsul la impuls- Fie sistemul descris de funcţia de transfer:

$$H(s) = \frac{1}{s+\sigma}. \tag{21}$$

Aplicând transformarea Laplace inversă rezultă următoarea expresie pentru funcţia pondere $h(t)$ a sistemului :

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}(t) = e^{-\sigma t}1(t). \tag{22}$$

Dacă $\sigma > 0 \rightarrow$ *polul* $s = -\sigma < 0 \rightarrow$ sistemul e **stabil**;
Dacă $\sigma < 0 \rightarrow$ *polul* $s = -\sigma > 0 \rightarrow$ sistemul e **instabil**.

Exerciţiul 3. Trasaţi răspunsul la impuls pentru $H(s)$, considerând mai întâi valori $\sigma > 0$ şi apoi valori $\sigma < 0$.

Rezolvare:

```
%varianta I
function ex3(sigma)
H=tf(1,[1 sigma]);
impulse(H)

%varianta II
figure (1)
hold on
for alfa=4:4:8
    H=tf(1,[1 alfa]);
    impulse(H);
end
hold off

figure (2)
hold on
for alfa=-8:4:-4
    H=tf(1,[1 alfa]);
    impulse(H);
end
hold off
```

Observaţia 1. Dacă $\sigma > 0$, cu cât σ creşte, cu atât funcţia pondere scade mai repede. Dacă $\sigma < 0$, cu cât σ creşte în modul, cu atât funcţia pondere creşte mai repede.

Exerciţiul 4. Trasaţi dependenţa răspunsului la impuls parametrizată funcţie de poziţia polului $s = -\frac{1}{T}$ (se ia K fixat, de exemplu $K = 4$ şi se trasează cu **mesh**).

Rezolvare:

```
t=1:0.01:30;
for T=1:1:21
H=tf([4],[T 1]);
[y,t]=impulse(H,t);
z(T,:)=y';
end
T=1:1:21
mesh(t,T,z)
```

Exerciţiul 5. Rulaţi programul de mai jos reprezentând răspunsul la impuls al unui sistem de ordinul I şi concluzionaţi de pe graficul obţinut care este funcţia de transfer (vezi figura).

Rezolvare:

```
H=tf([1],[7 1])
hold on
impulse(H)
K=1;
T=7;
t=0:0.01:T;
for i=1:length(t);
x(i)=K/T-(K/(T*T))*t(i);
end
plot(t,x,'r')
hold off
grid
```

Observaţia 2: Cunoscând răspunsul la impuls al unui sistem de ordinul I se pot obţine coeficienţii K şi T conform figurii de mai jos:

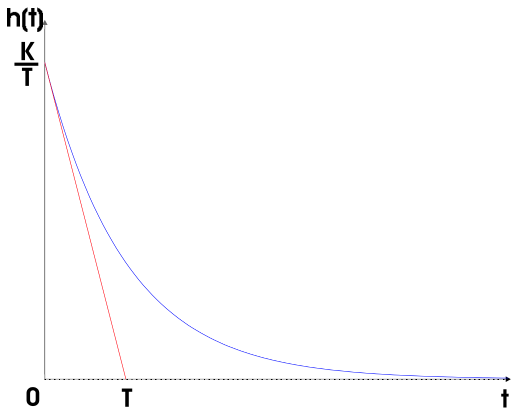


Figura 1: Răspunsul la impuls al unui sistem la ordinul I

Răspunsul la treaptă unitară pentru un sistem de ordinul I în forma generală este:

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{K}{s(1+Ts)}\} = K(1-e^{-\frac{t}{T}}),\ t \geq 0. \tag{23}$$

Se constată imediat că $y_p(t) = H(0) = K,\ t \geq 0$ este componenta permanentă , iar $y_t(t) = -Ke^{-\frac{t}{T}}$ este componenta tranzitorie.

Exerciţiul 6. Trasaţi răspunsul la treaptă parametrizat cu polul stabil ($K > 0,\ T > 0$). (Indicaţie: folosiţi `mesh`)

Rezolvare:

```
t=1:0.01:30;
for T=1:1:21
H=tf([1],[T 1]);
[y,t]=step(H,t);
z(T,:)=y';
end T=1:1:21
mesh(t,T,z)
```

Observaţia 3: Cu cât T este mai mic, cu atât sistemul răspunde mai rapid la treaptă .
Exerciţiul 7 . Din răspunsul la treaptă al unui sistem de ordinul I determinaţi cât sunt T şi K).

Rezolvare:

```
H=tf([6],[5 1])
hold on
step(H)
K=6;
T=5;
t=0:0.01:T;
for i=1:length(t)
x(i)=K/T*t(i);
end
plot(t,x,'r')
hold off
grid
```

Observaţia 4: Cunoscând răspunsul la treptă al unui sistem de ordinul I se pot obţine coeficienţii K şi T conform figurii de mai jos:

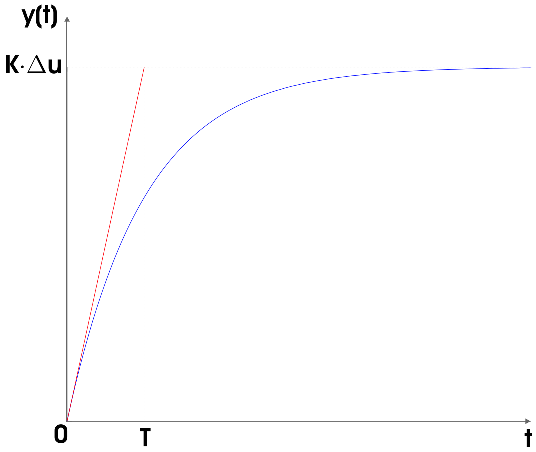


Figura 2: Răspunsul la treapta al unui sistem de ordinul I

Răspunsul la rampă unitară pentru un sistem de ordinul I ın forma generală este:

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{K}{s^2(1+Ts)}\} = K(t - T + Te^{-\frac{t}{T}}),\ t \geq 0. \tag{24}$$

Cum $H(0) = K$ şi $H'(0) = -KT$ se constată direct că $y_p(t) = H(0)t + H'(0) = Ht - KT$ este componenta permanentă , iar $y_t(t) = KTe^{-\frac{t}{T}}$ este componenta tranzitorie.

Exerciţiul 8 . Trasaţi un răspuns la rampă (cazul stabil), punând în evidenţă răspunsul permanent şi tranzitoriu, K şi T de pe grafic.

Rezolvare:

```
%luati ca exemplu K=1, T=0.8
function ex8(K,T)
hold on
H=tf(K,[T 1]);
H1=tf(1,[1 0 0]);
impulse(series(H1,H),5)
t=0:0.01:5*T;
for i=1:length(t)
x(i)=-K*T+K*t(i);
```

```
end
plot(t,x,'r') %raspunsul permanent
t=0:0.01:5*T; for i=1:length(t) z(i)=K*T*exp(-t(i)/T); end
plot(t,z,'g') %raspunsul tranzitoriu
hold off
grid
```

Observaţia 5: Cunoscând răspunsul la rampă al unui sistem de ordinul I se pot obţine coeficienţii K şi T conform figurii de mai jos:

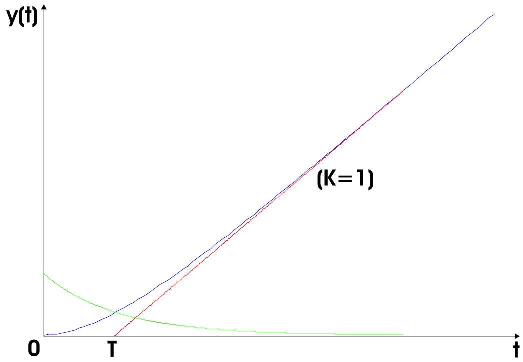


Figura 3: Răspunsul la rampa al unui sistem de ordinul I

Răspunsul la intrare armonică pentru un sistem de ordinul I ın forma generală este:

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{K}{(s-j\omega)(1+Ts)}\} = \frac{K}{1+jT\omega}[e^{j\omega T} - e^{-\frac{t}{T}}],\ t \geq 0 \tag{25}$$

Pentru $\tan\alpha = T\omega$ obţinem:

$$y_f(t) = \frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}[\cos(\omega t-\alpha) - e^{-\frac{t}{T}}\cos\alpha + j(\sin(\omega t-\alpha) - e^{-\frac{t}{T}}\sin\alpha)],\ t \geq 0 \tag{26}$$

unde partea reală a răspunsului corespunde intrării $1(t)\cos(\omega t)$, iar partea imaginară corespunde intrării $1(t)\sin(\omega t)$. Componenta permanentă "sinusoidală " este

$$y_p(t) = \frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}\sin(\omega t-\alpha) \tag{27}$$

evidenţiindu-se modificarea de amplitudine şi defazaj.

Exerciţiul 9. Trasaţi un răspuns la armonică (cazul stabil), punând în evidenţă răspunsul permanent/tranzitoriu, K şi T de pe grafic.

Rezolvare:

```
function ex9(K,T,w)
H=tf([K],[T 1]);
t=0:0.1:10;
u=exp(-w*i*t);
[y,l]=lsim(H,u,t);
plot(t,y)
hold on
y_p=K/sqrt(1+T*T*w*w)*sin(w*t-atan(T*w));
plot(t,y_p,'r')
hold off
```

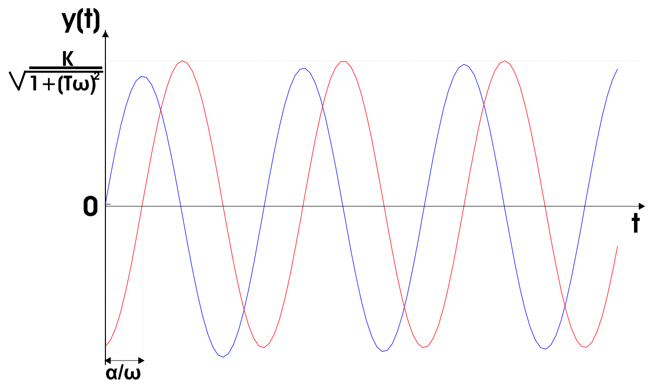


Figura 4: Răspunsul la armonica al unui sistem de ordinul I

Observaţia 6: Cunoscând răspunsul la intrare armonică al unui sistem de ordinul I se pot obţine coeficienţii K şi T conform figurii de mai jos:

0.3.2 Sisteme de ordinul II cu poli reali

Forma generală este:

$$H(s) = \frac{K}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)} \tag{28}$$

cu $K,\ T_1,\ T_2 \in R$, ($T_1 \geq 0,\ T_2 \geq 0$ pentru sisteme stabile).
Răspunsul la impuls- Aplicând transformata Laplace inversă se obţine următoarea funcţie pondere:

$$\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = h(t) = \begin{cases} K(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2})(e^{-\frac{1}{T_1}t} - e^{-\frac{1}{T_2}t}), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \tag{29}$$

Exerciţiul 10. Trasaţi răspunsul la impuls - $h(t)$ -, pentru exemplul de mai jos, considerând pentru p_1 şi p_2 valorile: $-10, -2, 0, 2, 10$:

$$H(s) = \frac{1}{(s+p_1)(s+p_2)}.$$

Rezolvare:

```
function ex10(p1,p2)
s=tf('s');
H=1/((s+p1)*(s+p2))
impulse(H)
```

Observaţia 7. Dacă sistemul este stabil (polii sunt negativi) funcţia pondere descreşte cu atât mai repede cu cât polii sunt plasaţi mai la stânga. Dacă sistemul este instabil (polii sunt pozitivi) funcţia pondere creşte exponenţial la infinit.

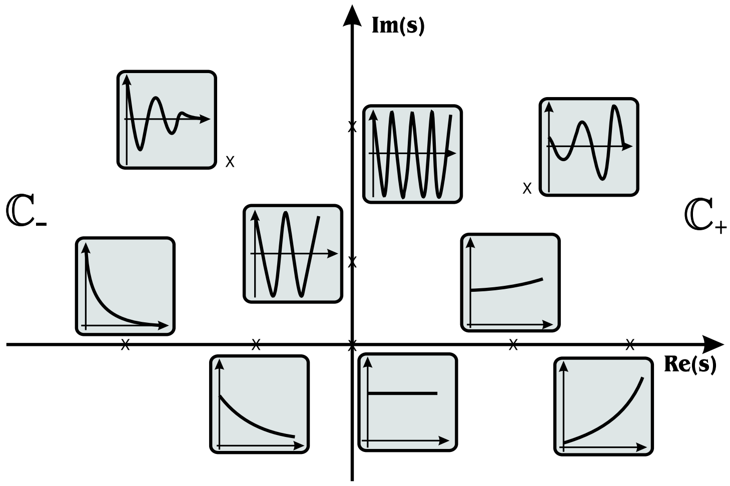


Figura 5: Răspunsul la impuls pentru diverse sisteme de ordin II

Răspunsul la treaptă unitară pentru un sistem de ordinul II cu poli reali este :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{K}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}\} = K\left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2}e^{-\frac{1}{T_1}t} - \frac{T_2}{T_2 - T_1}e^{-\frac{1}{T_2}t}\right). \tag{30}$$

Exerciţiul 11. Se ia $K > 0$, $T_2 = \alpha T_1$ şi se studiază răspunsul în timp la impuls şi treaptă parametrizat cu α . Se observă că este importantă poziţia relativă a polilor (poli dominanţi). Se iau două situaţii distincte când $T_1 > 0$, $T_2 > 0$.

Exerciţiul 12. Se iau doi poli stabili a.i. $T_2 = 10T$ şi se figurează răspunsurile (pe acelaşi grafic) datorate lui T_1, lui T_2 şi ambilor, observându-se când este important fiecare în parte. Se studiază răspunsul la impuls şi la treaptă .

Rezolvare:

```
function grad2(K,T1,alpha)
s=tf('s');
H=K/((T1*s+1)*(alpha*T1*s+1));
H1=K/(alpha*T1*s+1);
H2=K/(T1*s+1)
figure(1)
hold on
impulse(H)
impulse(H1,'r')
impulse(H2,'g')
hold off
figure(2)
hold on
step(H)
step(H1,'r')
step(H2,'g')
hold off
```

Observaţia 8. Din răspunsul în timp al acestor sisteme se observă că polul $-\frac{1}{\alpha T_1}$ este pol dominant, adică răspunsul sistemului este puternic influenţat de prezenţa acestui pol. De asemenea se poate observa că $-\frac{1}{\alpha T_1}$ este un pol lent şi $-\frac{1}{T_1}$ este un pol rapid (acesta are un raspuns mult mai rapid). In practică pentru un α suficient de mare, prezenţa acestui pol se poate neglija.

0.3.3 Sisteme de ordinul II cu poli complecşi

Forma generală este:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s+\zeta\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})^2}, \qquad \begin{array}{lcl} \sigma & := & \zeta\omega_n, \\ \omega_d & := & \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}, \\ \sin\theta & := & \zeta = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2+\omega_d^2}}, \\ s_{1,2} & := & -\sigma \pm j\omega_d, \end{array} \tag{31}$$

unde:

$$\begin{array}{lcl} \omega_n & = & \text{pulsaţie naturală;} \\ \zeta & = & \text{coeficient de amortizare;} \\ \omega_d & = & \text{pulsaţie amortizată.} \end{array}$$

cu $0 \le \zeta \le 1$, $\omega_n > 0$. Polii acestui sistem sunt: $-\zeta\omega_n \pm \omega_n j\sqrt{1-\zeta^2}$.

Răspunsul la impuls se obţine aplicând transformata Laplace inversă a funcţiei de transfer $H(s)$:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}(t) = \frac{\omega_n\, e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t)\, 1(t). \tag{32}$$

Răspunsul la treaptă unitară este dat de

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t). \tag{33}$$

Observaţia 9. Dacă $\zeta = 0$ rezultă $\theta = 0$ şi $\omega_d = \omega_n$. In acest caz avem un *răspuns oscilant*. Dacă $\zeta < 1$ apare un *răspuns amortizat* , iar dacă $\zeta = 1$ un *răspuns aperiodic*.

Observaţia 10. Deoarece $\theta = \arcsin\zeta$, este sugestivă vizualizarea polilor complex conjugaţi în plan pentru diverse valori ale lui ζ:

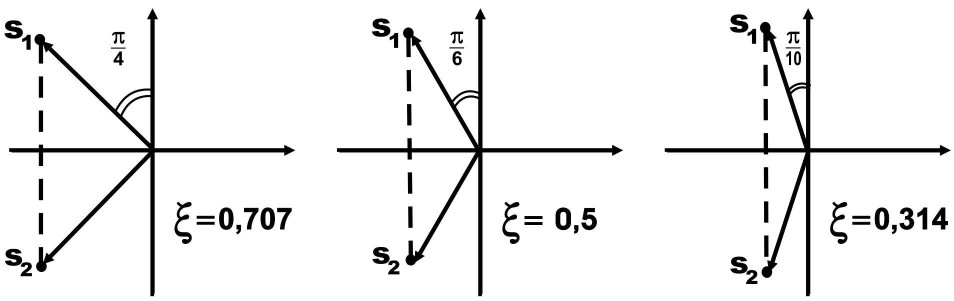


Figura 6: Poli complex conjugaţi

Observaţia 11. Se remarcă faptul că valoarea finală a răspunsului sistemului (adică valoarea de regim staţionar) coincide cu valoarea semnalului treaptă aplicat la intrare.

Exerciţiul 13. Să se traseze răspunsul la impuls, treaptă unitară şi armonică faţă de $\omega_n t$, şi nu faţă de t , şi parametrizate faţă de factorul ζ. Observaţi ce se în tâmplă în următoarele cazuri: $\zeta < 0$, $\zeta = 0$, $\zeta = 1$, $\zeta = 0.707 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, , $\zeta > 1$. Consideraţi de asemenea şi cazul în care armonica are pulsaţia egală cu pulsaţia naturală a sistemului şi $\zeta = 0$.

Rezolvare:

```
function ex13(zeta,w_n)
H=tf([w_n*w_n],[1 2*zeta*w_n w_n*w_n]);
figure(1)
[y,t]=impulse(H);
plot(w_n*t,y)
figure(2)
[y,t]=step(H);
plot(w_n*t,y)
figure(3)
t=0:0.1:10;
w=5;
%u=exp(-w*i*t);
u=cos(-w_n*t);
[y,l]=lsim(H,u,t);
plot(t,y)
```

Observaţia 12. Se remarcă faptul că răspunsul elementului de ordinul II cu $\zeta = 0$, deci pur oscilant, pentru o intrare armonică de tipul $\cos \omega_n t$, de pulsaţie naturală identică cu cea a elementului, are punctele de extrem situate pe conul din figura următoare.

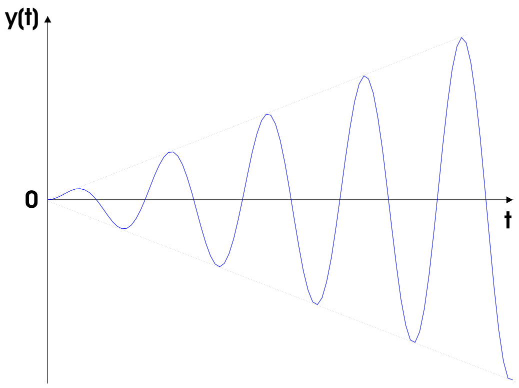


Figura 7: Conul

Exerciţiul 14. Să se traseze pe acelaşi grafic răspunsul unui sistem de ordinul II de forma: $H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$ pentru $\zeta = 0.5$, $\omega_n = 1$ şi curba pe care se găsesc punctele de extrem.

Rezolvare:

```
%luati ca exemplu zeta=0.2 si w_n=3
function ex14(zeta,w_n)
H=tf([w_n*w_n],[1 2*zeta*w_n w_n*w_n]);
step(H)
hold on
k=0:0.1:50;
y=1-exp(-zeta*w_n*k);
plot(k,y,'r')
```

```
k=0:0.1:50;
y=1+exp(-zeta*w_n*k);
plot(k,y,'g')
```

0.4 Specificaţii de performanţă asupra răspunsului în timp

Multe specificaţii de performanţă ale unui sistem (automat) sunt formulate în funcţie de răspunsul acestora la un semnal treaptă unitară . Definirea acestor indicatori de performanţă se face folosind răspunsul tipic la treaptă unitate al unui sistem de ordinul II stabil ca în figura de mai jos:

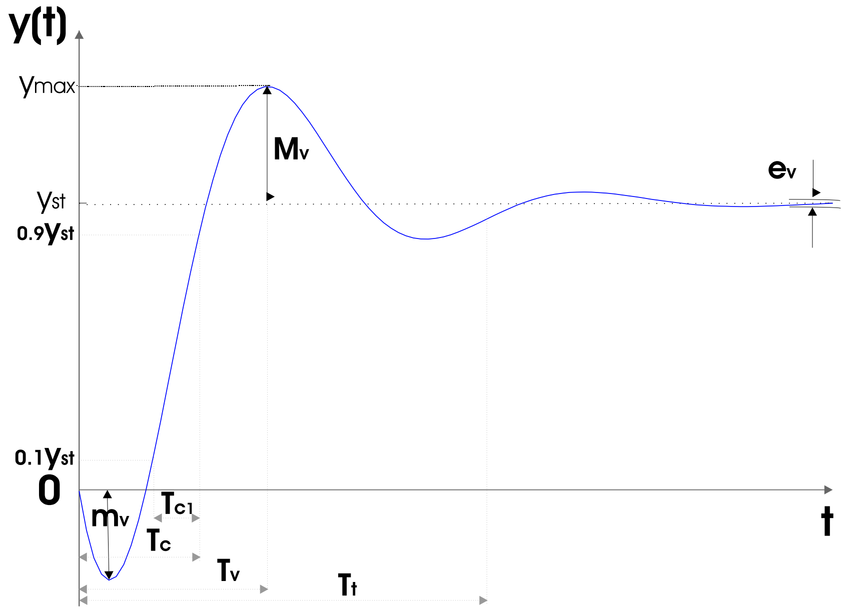


Figura 8: Parametrii de răspuns dinamic

Indici ce măsoară viteza de răspuns:
T_c, T_{c_1}: timpi de creştere (timpul în care ieşirea ajunge la 0-100% ,respectiv 10%-90% din valoarea finală);
T_v: timp de vârf (timpul la care ieşirea ajunge la y_{max}).
Indici ce măsoară calitatea urmăririi treptei:
M_v: suprareglaj;
T_t: timp tranzitoriu ($|y(t) - y_st(t)| < \delta \cdot y_st, \, pentru t > T_t$);
e_s: eroarea staţionară .
Formulele acestea sunt valabile exclusiv pentru sistemele de ordinul II. Cu toate acestea ele se folosesc în general pentru o evaluare aproximativă în practică a oricăror sisteme în general.
Evaluări bazate pe sistemul de ordinul II:
Se pot scrie următoarele expresii aproximative:

$$T_{c_1} \cong \frac{2.16\zeta + 16}{\omega_n} \cong \frac{1.8}{\omega_n} \, (pentru \, 0.3 \leq \zeta \leq 0.8) \tag{34}$$

Din calcule rezultă următoarele expresii exacte:

$$T_v = \frac{\pi}{\omega\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{35}$$

$$M_v = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}, \; 0 \leq \zeta < 1, \; uzual \; M_v = \frac{Y_{max} - Y_{st}}{Y_{st}} \tag{36}$$

$$T_t = \frac{4.6}{M_v},\ \delta = 1\% \quad (37)$$

$$T_t = \frac{4}{M_v},\ \delta = 2\% \quad (38)$$

In mod uzual dorim ca răspunsul unui sistem de urmărire la o intrare treaptă să satisfacă simultan cerinţele:

- să fie rapid (T_v, T_c, T_{c_1} mici) ;
- să urmărească cât mai fidel semnalul treaptă (M_v mic şi T_t mic).

Aceste cerinţe sunt însă contradictorii aşa cum ilustrează exerciţiile următoare.

Exerciţiul 15. Figuraţi pe acelaşi grafic dependenţele $M_v(\zeta)$, $(\omega_n T_t)(\zeta)$, $(\omega_n T_{c_1})(\zeta)$ şi $(\omega_n T_v)(\zeta)$ (aceştia se numesc timpi normalizaţi).

Rezolvare

```
clc;
clear all;

%graficul Mv(zeta)
zeta=0:0.002:1;
hold on
for i=1:length(zeta)
Mv=exp((-pi*zeta(i))/(sqrt(1-zeta(i)^2)));
plot(zeta(i),Mv);
end
xlabel('zeta');
ylabel('Mv(zeta)');
hold off

%graficul w_n*Tt(zeta)
figure;
zeta=0.1:0.002:1;
hold on
for i=1:length(zeta)
Tt=4/zeta(i);
plot(zeta(i),Tt);
end
xlabel('zeta');
ylabel('w_n*Tt(zeta)');
hold off

%graficul w_n*Tt(zeta)
figure;
zeta=0:0.002:0.96;
hold on
for i=1:length(zeta)
Tt=pi/(sqrt(1-zeta(i)^2));
plot(zeta(i),Tt);
end
xlabel('zeta');
ylabel('w_n*Tt(zeta)');
hold off

%graficul aproximatiilor lui w_n*Tc
```

```
%aproximatie pe intervalul (0.3,0.8)
figure;
zeta=0:0.002:1;
hold on
for i=1:length(zeta)
Tc=2.16*zeta(i)+0.6;
plot(zeta(i),Tc);
end
for i=1:length(zeta)
Tc=1.8;
plot(zeta(i),Tc);
end
xlabel('zeta');
ylabel('w_n*Tc(zeta)');
hold off
```

Exerciţiul 16. Figuraţi pe acelaşi grafic dependenţa $\omega_n T_{c_1}$ de ζ şi aproximaţia liniară . Evaluaţi intervalul pe care această aproximaţie este corectă .

Rezolvare

```
clc;
clear all;


%graficul aproximatiilor lui w_n*Tc
%aproximatie pe intervalul (0.3,0.8)
figure;
zeta=0:0.002:1;
hold on
for i=1:length(zeta)
Tc=2.16*zeta(i)+0.6;
plot(zeta(i),Tc);
end
for i=1:length(zeta)
Tc=1.8;
plot(zeta(i),Tc);
end
xlabel('zeta');
ylabel('w_n*Tc(zeta)');



%graficul folosind rutina de calcul a lui Tc
k=1
for zeta=0:0.025:1
w_n=1;
num=[1];
den=[1  2*zeta*w_n  w_n^2];

Yp=polyval(num,0)/polyval(den,0);   % regimul permanent.
H=tf(num,den);
[y,t]=step(H);
n=length(t);
uu=t(n)/n;
```

```
%Calculul lui Tc
for i=1:length(t)
    if y(i)>=0.1*Yp
        t_i=i; break
    end
end


for j=i:length(t)
    if y(j)>=0.9*Yp
        t_f=j; break
    end

end

Tc=(t_f-t_i)*uu;
a(k)=zeta;
b(k)=Tc;
k=k+1;

end
plot(a,b,'bp-');
```

Observaţia 13. Aproximaţia liniară este bună pe intervalul $0.3 \div 0.8$.

Exerciţiul 17. Figuraţi pentru ζ fixat (de exemplu 0.3) dependenţa răspunsului în timp de ω_n. Trageţi concluzii privind $M_v(\omega_n)$, $T_{c_1}(\omega_n)$, $T_t(\omega_n)$, $T_v(\omega_n)$ şi apoi confirmaţi figurând pe acelaşi grafic (mai multe ferestre) aceste dependenţe.

Rezolvare

```
clc;
clear all;

zeta=0.3; %fixat


%graficul Mv(w_n)
w_n=0.2:0.1:15;
hold on
for i=1:length(w_n)
Mv=exp((-pi*zeta)/(sqrt(1-zeta^2)));
plot(w_n(i),Mv);
end
xlabel('w_n');
ylabel('Mv(w_n)');
hold off



%graficul Tv(w_n)
figure;
w_n=0.2:0.1:15;
hold on
for i=1:length(w_n)
Tv=pi/w_n(i)*(sqrt(1-zeta^2));
plot(w_n(i),Tv);
```

```
end
xlabel('w_n');
ylabel('Tv(w_n)');
hold off


%graficul Tt(w_n)
figure;
w_n=0.2:0.1:15;
hold on
for i=1:length(w_n)
Tv=4/w_n(i)*zeta;
plot(w_n(i),Tv);
end
xlabel('w_n');
ylabel('Tt(w_n)');
hold off


%graficul Tc(w_n) folosind aproximatia liniara
figure;
w_n=0.2:0.1:15;
hold on
for i=1:length(w_n)
Tc=(2.16*zeta+0.6)/w_n(i);
plot(w_n(i),Tc);
end
xlabel('w_n');
ylabel('Tc(w_n)');


%graficul folosind rutina de calcul a lui Tc
k=1
for w_n=0.2:0.5:15.2
zeta=0.2;
num=[1];
den=[1  2*zeta*w_n w_n^2];

Yp=polyval(num,0)/polyval(den,0);   % regimul permanent.
H=tf(num,den);
[y,t]=step(H);
n=length(t);
uu=t(n)/n;



%Calculul lui Tc
for i=1:length(t)
    if y(i)>=0.1*Yp
        t_i=i; break
    end
end


for j=i:length(t)
    if y(j)>=0.9*Yp
        t_f=j; break
```

```
    end

end

Tc=(t_f-t_i)*uu;
a(k)=w_n;
b(k)=Tc;
k=k+1;

end
plot(a,b,'r:');


hold off
```

Observaţia 14. Suprareglajul nu depinde de ω_n .

Formulele date admit şi o formă de sinteză în care valorile dorite sunt specificate şi se cere determinarea sistemului ce le satisface. Dacă prezicăm T_c, M_v, T_t, atunci obţinem forma de sinteză :

$$\omega_n \geq \frac{1.8}{T_{c_1}}, \tag{39}$$

$$\zeta \geq \zeta(M_v), \tag{40}$$

$$\sigma \geq \frac{4.6}{T_t}. \tag{41}$$

Exerciţiul 18. Figuraţi în plan zona în care trebuie să fie plasaţi polii unui sistem pentru a îndeplini următoarele cerinţe:$T_{c_1} < 0.6$, $M_v < 10\%$, $T_t < 3s$.

Rezolvare

```
%Se dau Tc, Mv, Tt ;

clc;
clear all;

Tc=0.6;
Tt=3;
Mv=0.1;

hold on;

w_n=1.8/Tc;
alpha=pi/2:0.01:3*pi/2;
x=w_n*cos(alpha);
y=w_n*sin(alpha);

plot(x,y);

sigma=4.6/Tt;
y=-5:0.01:5;
for i=1:length(y)
    plot(-sigma, y(i))
end
```

```
zeta_=-(log(Mv))/sqrt((pi^2+(log(Mv))^2))

m=tan(pi/2-asin(zeta_));
x=-3.5:0.01:0;
y=m*x;
plot(x,y);


m=-tan(pi/2-asin(zeta_));
y=m*x; plot(x,y);

disp('Am trasat domeniul specificat prin cerintele de performanta.
Apasati orice tasta.')
pause;


%Exemplu de poli alesi astfel incat sa ineplineasca cerintele:

plot(-4,1,'r+');
plot(-4,-1,'r+');

disp('Poli alesi in interiorul domeniului, trasati cu rosu.Apasati
orice tasta.')
pause;

num=[17];
den=[1 8 17];
hold off

figure(2);
H=tf(num, den);
step(H);

disp('Poli alesi in afara domeniului, trasati cu verde.Apasati
orice tasta.');
pause;

figure(1);
hold on;
plot(-1,1,'gp');
plot(-1,-1,'gp');
hold off;

num=[2];
den=[1 2 2];
hold off

figure(3);
H=tf(num, den);
step(H);
```

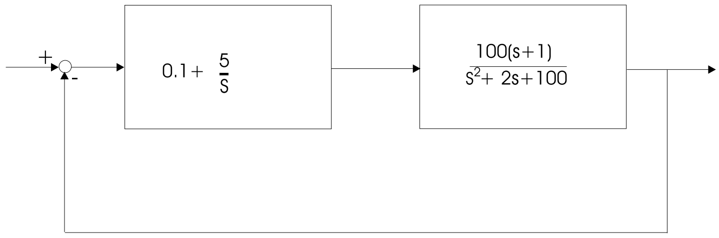
Observaţia 15: Matlab oferă informaţii despre timpul tranzitoriu, timpul de creştere, eroarea stionară şi suprareglaj. Trebuie doar să daţi right click pe figura care reprezintă răspunsul la treaptă dorit şi să selectaţi "Characteristics"¿"Peak Response", "Settling Time", "Rise Time", "Steady State".

Exerciţiul 19. Se dă sistemul cu funcţia de transfer $G(s) = \frac{50}{s(s+5)}$ conectat în buclă închisă negativă . Determinaţi grafic M_v, T_v, T_c, T_t şi figuraţi aceste valori.

Indicaţie:

```
H=tf([50],[1 5 0]);
step(feedback(H,1))
```

Exerciţiul 20. Se dă schema următoare:



Aproximaţi cu un sistem de ordinul II şi estimaţi valorile T_t, T_v, M_v şi comparaţi cu cele obţinute din graficul răspunsului la treaptă al sistemului original. Explicaţi diferenţele. Comparaţi grafic răspunsurile pentru sistemul original şi cel aproximat.

Indicaţie:

```
H1=tf([0.1 5],[1 0]);
H2=tf([100 100],[1 2 100]);
figure(1)
step(feedback(series(H1,H2),1))
a=roots([1 12 610 500])
figure(2)
hold on plot(a(1),'+')
plot(a(2),'r+')
plot(a(3),'g+')
hold off
figure(1)
hold on
H3=tf([abs(a(1))*abs(a(1))],[1 -2*real(a(1)) abs(a(1))*abs(a(1))])
step(H3)
hold off
```

0.5 Efectul zerourilor şi polilor suplimentari asupra răspunsului sistemului de ordin 2

0.5.1 Efectul unui zerou

In această secţiune studiem comportarea răspunsului în timp al unui sistem având un zerou finit şi doi poli complex conjugaţi. Pentru a face clară dependenţa răspunsului funcţie de poziţia relativă a zeroului faţă de poli parametrizăm sistemul de forma:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2(1 + \frac{s}{\zeta\omega_n\alpha})}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \tag{42}$$

unde $\alpha \in \mathbf{R^n}$.
Zeroul suplimentar este $z = -\zeta\omega_n\alpha = -\alpha\sigma$.

Răspunsul la treaptă unitară este dat de:

$$y(t) = 1 - \frac{\sqrt{\rho^2 - 2\zeta\rho + 1}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t + \alpha), \qquad t \geq 0, \tag{43}$$

unde $\rho = \frac{1}{\zeta\alpha}$.

Exercițiul 21. Trasați graficul răspunsului la impuls și la treaptă pentru $\zeta = 0.5, \omega_n = 1$ parametrizat funcție de α ($\alpha > 0$) și cu timp normalizat.

Rezolvare:

```
function zerou(zeta,alfa,w_n)
s=tf('s');
H=w_n^2*(1+(s/(zeta*w_n*alfa)))/(s^2+2*zeta*w_n*s+w_n^2);
figure(1)
[y,t]=step(H);
plot(w_n*t,y)
figure(2)
[y,t]=impulse(H);
plot(w_n*t,y)

**********************************************************
          varianta cu mesh
**********************************************************
function zeroumesh(zeta,w_n)
t=1:0.01:30;
for alfa=1:21
s=tf('s');
H=w_n^2*(1+(s/(zeta*w_n*alfa)))/(s^2+2*zeta*w_n*s+w_n^2);
[y,t]=impulse(H,t);
z(alfa,:)=y';
end
alfa=1:21;
figure(1)
mesh(w_n*t,alfa,z)
t=1:0.01:30;
for alfa=1:21
s=tf('s');
H=w_n^2*(1+(s/(zeta*w_n*alfa)))/(s^2+2*zeta*w_n*s+w_n^2);
[y,t]=step(H,t);
z(alfa,:)=y';
end
alfa=1:21;
figure(2)
mesh(w_n*t,alfa,z)
```

Exercițiul 22. Trasați graficul răspunsului la impuls și la treaptă pentru $\zeta = 0.5, \omega_n = 1$ parametrizat funcție de α ($\alpha < 0$) și cu timp normalizat.
Se verifică afirmațiile de mai sus ?

Observația 16: Distingem 2 cazuri principale:

- Când $\alpha > 0$ (zerou stabil) suprareglajul crește semnificativ dacă $\alpha \simeq 1 \div 4$. Dacă $\alpha \gg 1$ suprareglajul rămâne aproape neschimbat. Timpul tranzitoriu nu este influențat semnificativ de zeroul suplimentar.

- Când $\alpha < 0$ (zerou instabil) suprareglajul scade semnificativ dacă $|\alpha| \simeq 1 \div 4$. In acest caz observăm că :

$$\tan\beta = \frac{dy(t)}{dt}(0) = \frac{\omega_n}{\zeta\alpha} < 0, \tag{44}$$

adică panta graficului este negativă şi astfel răspunsul în timp va scădea într-o primă fază şi apoi va creşte. Dacă apar mai multe zerouri instabile, răspunsul sistemului va avea forma din figura următoare:

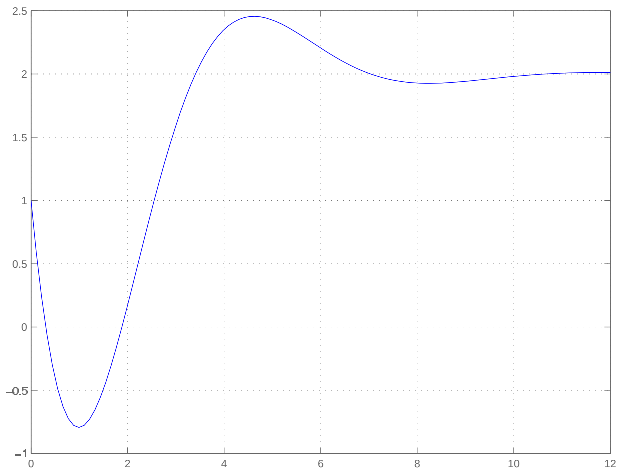


Figura 9: Graficul răspunsului la treaptă al unui sistem de ordinul II având două zerouri instabile

Se observă că răspunsul sistemului taie de două ori (adică exact numărul de zerouri instabile) axa $Y = 0$.

0.5.2 Efectul unui pol suplimentar

In această secţiune vom studia comportarea răspunsului în timp al unui sistem stabil având doi poli complex conjugaţi şi un pol finit. Pentru acest lucru vom parametriza sistemul în forma:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(1 + \frac{s}{\zeta\omega_n\alpha})}. \tag{45}$$

Polul suplimentar este $p = -\zeta\omega_n\alpha = \alpha\sigma$.

Exerciţiul 23 . Trasaţi graficul răspunsului la impuls şi la treaptă pentru $\zeta = 0.5, \omega_n = 1$ parametrizat funcţie de α ($\alpha > 0$) şi cu timp normalizat.

Rezolvare:

```
function pol(zeta,alfa,w_n)
s=tf('s');
H=w_n^2/((s^2+2*zeta*w_n*s+w_n^2)*(1+(s/(zeta*w_n*alfa))));
figure(1)
[y,t]=step(H);
plot(w_n*t,y)
figure(2)
[y,t]=impulse(H);
plot(w_n*t,y)
```

```
*****************************************************
          varianta cu mesh
*****************************************************
function polmesh(zeta,w_n)
t=1:0.01:30;
for alfa=1:10
s=tf('s');
H=w_n^2/((s^2+2*zeta*w_n*s+w_n^2)*(1+(s/(zeta*w_n*alfa))));
[y,t]=impulse(H,t);
z(alfa,:)=y';
end
alfa=1:10;
figure(1)
mesh(w_n*t,alfa,z)
t=1:0.01:30;
for alfa=1:10
s=tf('s');
H=w_n^2/((s^2+2*zeta*w_n*s+w_n^2)*(1+(s/(zeta*w_n*alfa))));
[y,t]=step(H,t);
z(alfa,:)=y';
end
alfa=1:10;
figure(2)
mesh(w_n*t,alfa,z)
```

Observaţia 17: Suprareglajul este practic neschimbat pentru valori $\alpha \simeq 1 \div 4$, iar timpul tranzitoriu este puternic dependent de α. Suprareglajul scade cu cât α e mai mic (poate să şi dispară). In acest caz se poate observa că timpul de creştere scade o data cu creşterea lui α .