

Universitatea "Politehnica" București  
Facultatea de Automatică și Calculatoare

# PRELUCRAREA SEMNALELOR:

breviar teoretic, probleme rezolvate, ghid Matlab

prof.dr.ing. Bogdan Dumitrescu

versiunea 6.0, mai 2006

# Prefață

Lucrarea de față este destinată studenților de anul IV ai Facultății de Automatică și Calculatoare, secția Automatică, care urmează cursul de Prelucrarea Semnalelor. După cum sugerează titlul, lucrarea urmărește mai multe scopuri.

În primul rând, ea constituie un suport teoretic condensat al informațiilor predate la curs; lipsesc deci explicațiile detaliate; lucrarea are mai degrabă un rol de fixare a cunoștințelor teoretice decât unul de inițiere.

Al doilea scop major este obișnuirea studentului cu rezolvarea de probleme. De aceea, fiecare secțiune conține atât probleme rezolvate, cât și probleme propuse cititorului. Problemele propuse au în general un nivel mediu de dificultate, sau chiar ușor. Lipsesc, sau sunt foarte rare, problemele grele.

În fine, lucrarea conține și informații despre funcțiile Matlab, în special din Signal Processing Toolbox, utile în contextul chestiunilor teoretice studiate. Informațiile sunt sumare, iar cititorul este invitat să le completeze utilizând programul Matlab.

Fiecare secțiune este organizată în ordinea: teorie, probleme rezolvate, probleme propuse, ghid Matlab; această din urmă parte poate lipsi, dacă secțiunea respectivă nu are implicații calculatorii.

Lucrarea este încă incompletă. Prima versiunea a ei, din decembrie 2002, conținea doar cinci capitole din cele cel puțin șapte proiectate (numărul de versiune de pe copertă are două cifre: prima este numărul de capitole, a doua reprezintă "ediția" curentă). Între timp, al șaselea capitol a fost scris, împreună cu numeroase corecturi și adăugiri. Sugestiile și corecturile cititorilor sunt binevenite.

## Versiuni

5.0: inițială.

5.1: nou: semnale aleatoare; corecturi: cap. 1, 2, 4.

5.2: corecturi și adăugiri: sect. 4.5.

5.3: nou: sect. 3.3; corecturi: cap. 5.

6.0: cap. 6, sect. 2.6; corecturi: cap. 1-5.

# Cuprins

<b>1</b>	<b>Semnale</b>	<b>3</b>
1.1	Semnale discrete . . . . .	3
1.2	Transformata Fourier . . . . .	11
1.3	Transformata Z . . . . .	21
1.4	Semnale aleatoare . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Sisteme</b>	<b>31</b>
2.1	Definiții și proprietăți de bază . . . . .	31
2.2	Sisteme liniare invariante în timp . . . . .	34
2.3	Reprezentarea în frecvență a sistemelor LIT . . . . .	40
2.4	Filtre de fază minimă . . . . .	51
2.5	Filtre cu fază liniară . . . . .	54
2.6	Implementarea filtrelor . . . . .	63
<b>3</b>	<b>Eșantionare</b>	<b>69</b>
3.1	Eșantionare (conversie analogic-numeric) . . . . .	69
3.2	Conversie numeric-analogic . . . . .	74
3.3	Schimbarea frecvenței de eşantionare . . . . .	80
3.3.1	Decimare . . . . .	81
3.3.2	Interpolare (discretă) . . . . .	83
3.3.3	Schimbarea frecvenței de eşantionare cu un factor rațional . . . . .	87
<b>4</b>	<b>Proiectarea filtrelor</b>	<b>91</b>
4.1	Specificarea performanțelor . . . . .	91
4.2	Proiectarea filtrelor FIR prin metoda ferestrei . . . . .	97
4.3	Proiectarea filtrelor FIR în sens CMMP . . . . .	105
4.4	Proiectarea filtrelor FIR în sens Chebyshev . . . . .	114
4.5	Proiectarea filtrelor IIR: metode de transformare . . . . .	119
4.5.1	Filtre analogice . . . . .	120
4.5.2	Transformarea biliniară . . . . .	122
4.5.3	Transformări discret-discret în frecvență . . . . .	125

<b>5</b>	<b>Analiza în frecvență a semnalelor</b>	<b>133</b>
5.1	Seria Fourier discretă . . . . .	133
5.2	Transformata Fourier discretă . . . . .	139
5.3	Transformata Fourier rapidă . . . . .	144
5.3.1	Decimare în timp . . . . .	144
5.3.2	Decimare în frecvență . . . . .	149
<b>6</b>	<b>Cuantizare</b>	<b>157</b>
6.1	Cuantizare scalară . . . . .	157
6.2	Proiectarea unui cuantizor . . . . .	164
6.3	Cuantizare vectorială . . . . .	173
<b>A</b>	<b>Semnale și sisteme analogice</b>	<b>179</b>
A.1	Semnale analogice . . . . .	179
A.2	Sisteme analogice . . . . .	181

# Capitolul 1

## Semnale

### 1.1 Semnale discrete

**Definiția 1.1** *Un semnal discret  $x$  este o funcție definită pe mulțimea numerelor întregi,  $x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ .*

Mulțimea  $\mathbb{Z}$  are semnificația de timp (discret). Notăm  $x[n]$  valoarea semnalului la momentul  $n$ ; numim  $x[n]$  și eșantionul  $n$  al semnalului. Printr-un abuz curent de notație, vom scrie și că întreg semnalul este  $x[n]$ , subînțelegând prin aceasta că  $n \in \mathbb{Z}$  este o variabilă liberă. Un exemplu de semnal discret este prezentat în figura 1.1. În practică apar îndeosebi semnale reale, i.e. care au valori în mulțimea numerelor reale, ca în definiția 1.1. Teoretic, semnalele complexe sunt foarte importante; un semnal complex este o funcție  $x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ . Prezentăm mai jos câteva posibile proprietăți ale semnalelor discrete.

**Definiția 1.2** *Un semnal  $x[n]$  este periodic de perioadă  $N$  sau  $N$ -periodic, dacă  $x[n] = x[n + kN]$ , pentru orice  $n, k \in \mathbb{Z}$ . În general, numim perioadă a semnalului cel mai mic  $N$  pozitiv cu proprietatea de mai sus.*

**Definiția 1.3** *Se spune că semnalul  $x[n]$  este absolut sumabil dacă*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty.$$

*Mulțimea tuturor semnalelor absolut sumabile este notată  $\ell_1$ .*

**Definiția 1.4** *Se spune că semnalul  $x[n]$  are energie finită dacă*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty.$$

*Mulțimea tuturor semnalelor de energie finită este notată  $\ell_2$ .*

*Suportul unui semnal.* Spunem că semnalul  $x[n]$  are suport  $\mathcal{T} \in \mathbb{Z}$  dacă  $x[n] = 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{T}$ , adică semnalul este nul în afara mulțimii suport. Semnalele pot avea:

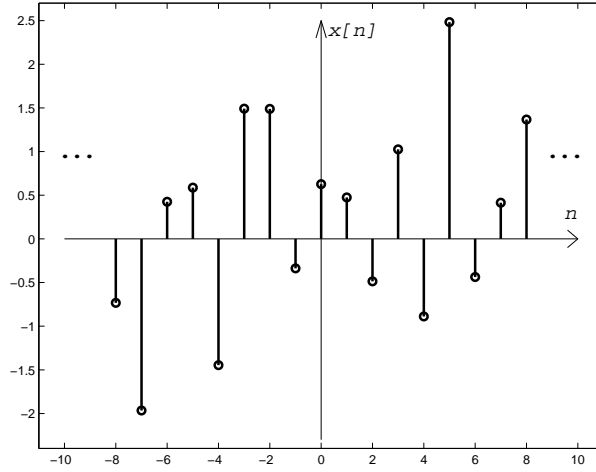


Figura 1.1: Un exemplu de semnal discret.

- suport finit, când  $\mathcal{T}$  este o mulțime finită, e.g.  $\mathcal{T} = 0 : M$ , unde  $M$  este un întreg pozitiv;
- suport infinit la dreapta, când  $x[n] = 0$  pentru  $n < M$ , cu  $M \in \mathbb{Z}$  fixat.
- suport infinit la stânga, când  $x[n] = 0$  pentru  $n > M$ , cu  $M \in \mathbb{Z}$  fixat.
- suport dublu infinit (sau infinit bilateral), când  $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$ .

Prezentăm în continuare câteva semnale extrem de folosite.

*Impuls unitate.* Semnalul impuls unitate, prezentat în figura 1.2a este definit de

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n = 0, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases} \quad (1.1)$$

Orice semnal  $x[n]$  poate fi descris ca o sumă infinită de impulsuri unitate (decalate în timp), anume

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - k]. \quad (1.2)$$

*Treaptă unitate.* Semnalul treaptă unitate, prezentat în figura 1.2b este definit de

$$u[n] = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n \geq 0, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases} \quad (1.3)$$

Aplicând relația (1.2) se observă că între treapta și impulsul unitate există relația

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n - k]. \quad (1.4)$$

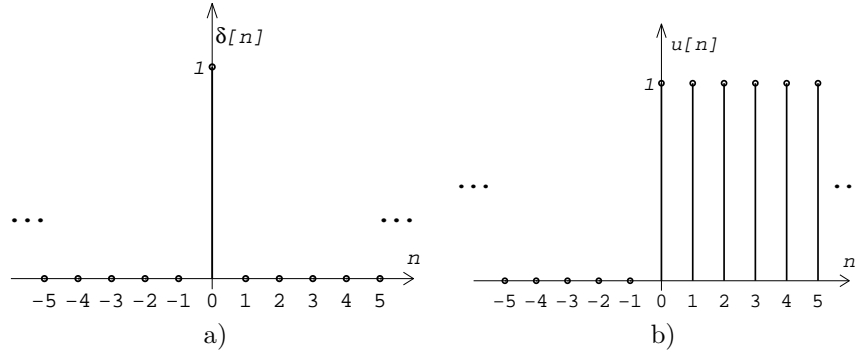


Figura 1.2: a) Impuls unitate; b) treapta unitate.

*Semnale sinusoidale.* Un semnal sinusoidal discret real are forma

$$x[n] = \sin(\omega n + \varphi). \quad (1.5)$$

Există o mare deosebire între sinusoidalele discrete și cele continue. Acestea din urmă, de forma  $x(t) = \sin(\Omega t + \varphi)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , sunt întotdeauna periodice, de perioadă  $T_0 = 2\pi/\Omega$ . Sinusoida discretă (1.5) este periodică doar dacă există un întreg  $k$  astfel încât

$$N = \frac{2\pi k}{\omega} \quad (1.6)$$

să fie întreg. Cu alte cuvinte, este necesar ca  $\pi/\omega$  să fie un număr rațional. În acest caz, perioada este cel mai mic întreg pozitiv  $N$  care satisface (1.6). Prezentăm în figura 1.3 semnalul  $\sin(\pi n/3)$ , a cărui perioadă este  $N = 6$ ; punctat, este figurată sinusoida continuă  $\sin(\pi t/3)$ , care trece prin aceleași puncte ca și cea discretă. O sinusoidă aperiodică este  $\sin n$ , desenată în figura 1.4.

Numim  $\omega$  din (1.5) *frecvența* semnalului sinusoidal. (Acesta este un abuz comun în prelucrarea semnalelor, deoarece termenul corespunzător din fizică este *pulsăția*. Abuzul este justificat de proporționalitatea dintre frecvență și pulsăție.) O proprietate esențială a semnalelor sinusoidale discrete este că semnale cu frecvențe diferite pot fi identice. (Spre deosebire, sinusoidalele continue cu frecvențe diferite sunt întotdeauna diferite.)

**Propoziția 1.5** *Două sinusoidale de forma (1.5), cu frecvențele  $\omega$  și  $\omega + 2k\pi$ , unde  $k$  este un întreg arbitrar, sunt identice.*

*Demonstrație.* În mod evident avem  $\sin((\omega + 2k\pi)n + \varphi) = \sin(\omega n + \varphi)$ . ■

Așadar, doar semnalele sinusoidale cu frecvențe  $\omega \in [-\pi, \pi]$  sunt distincte. Prezentăm în figura 1.5 sinusoidalele identice  $\sin(\pi n/4) = \sin(9\pi n/4)$ , precum și sinusoidalele continue diferite din care provin.

*Semnale sinusoidale complexe.* Un semnal sinusoidal discret complex are forma

$$x[n] = e^{j(\omega n + \varphi)} = \cos(\omega n + \varphi) + j \sin(\omega n + \varphi). \quad (1.7)$$

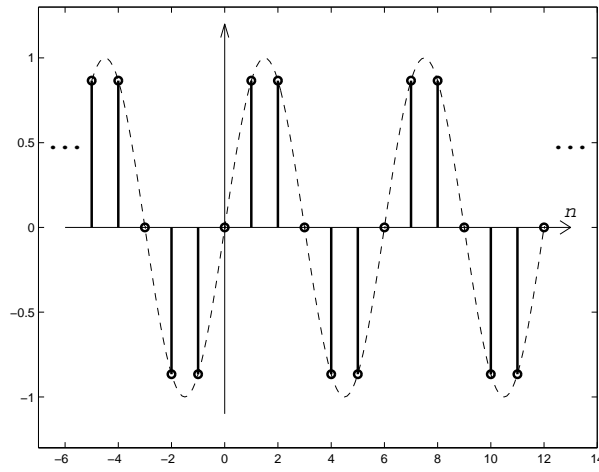


Figura 1.3: Semnalul  $\sin(\pi n/3)$ , de perioadă 6. Punctat, sinusoida continuă  $\sin(\pi t/3)$ .

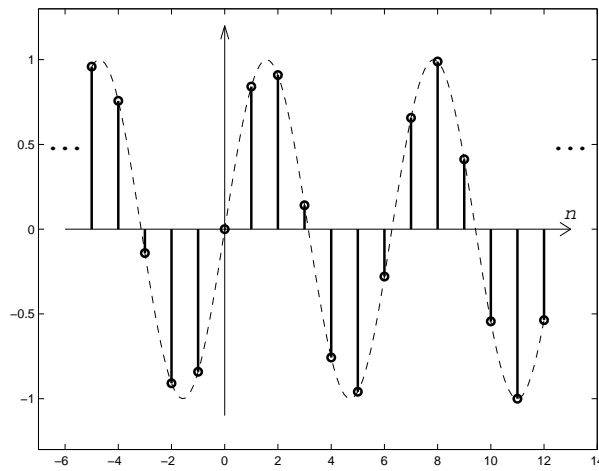


Figura 1.4: Semnalul aperiodic  $\sin n$ . Punctat, sinusoida continuă  $\sin t$ .



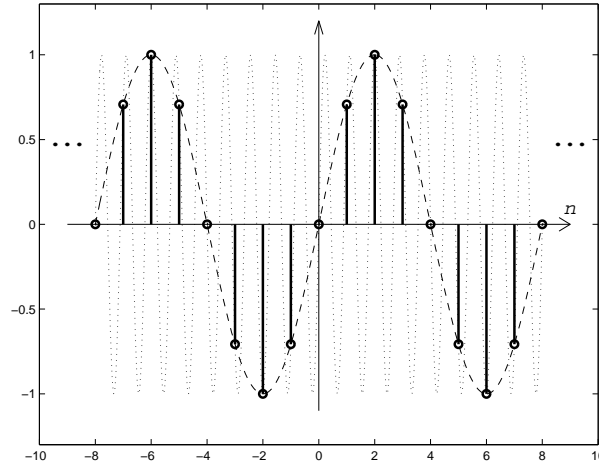


Figura 1.5: Sinusoidele identice  $\sin(\pi n/4) = \sin(9\pi n/4)$ . Punctat, sinusoidale continue diferite  $\sin(\pi t/4)$  și  $\sin(9\pi t/4)$ .

*Semnale exponențiale.* Un semnal discret exponențial are forma

$$x[n] = \alpha^n u[n], \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad (1.8)$$

cu  $u[n]$  treapta unitate definită în (1.3). Dacă  $|\alpha| < 1$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = 0$ . Dacă  $\alpha = 1$ , atunci  $x[n] = u[n]$  este treapta unitate. Dacă  $|\alpha| = 1$ , atunci se obține o sinusoidă (pentru  $n \geq 0$ ). În fine, dacă  $|\alpha| > 1$ , atunci semnalul este divergent (în sensul că nu există  $\lim_{n \rightarrow \infty} x[n]$ ).

*Operații cu semnale.* Fie  $x[n]$ ,  $y[n]$  două semnale. Având în vedere că un semnal este o funcție, produsul unui semnal cu un scalar, i.e.  $\alpha x[n]$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , sau suma a două semnale, i.e.  $x[n] + y[n]$ , au definiții evidente. Alte operații de interes în prelucrarea semnalelor sunt următoarele.

**Definiția 1.6** *Convoluția semnalelor  $x[n]$ ,  $y[n]$  este semnalul*

$$x[n] * y[n] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k]. \quad (1.9)$$

**Definiția 1.7** *Modulația în timp a semnalelor  $x[n]$ ,  $y[n]$  este semnalul  $x[n]y[n]$  obținut prin înmulțirea eșantioanelor corespunzătoare aceluiași moment de timp. (Frecvent se spune că semnalul  $x[n]$  este modulat în timp prin semnalul  $y[n]$ , sau invers.)*

## Probleme rezolvate

**PR 1.1.1 a.** Ce perioadă are semnalul  $\sin(3\pi n/5)$  ?

**b.** Ce semnificație are numărul  $k$  din (1.6) ?

**c.** Dați un exemplu de semnal sinusoidal discret de perioadă 3.

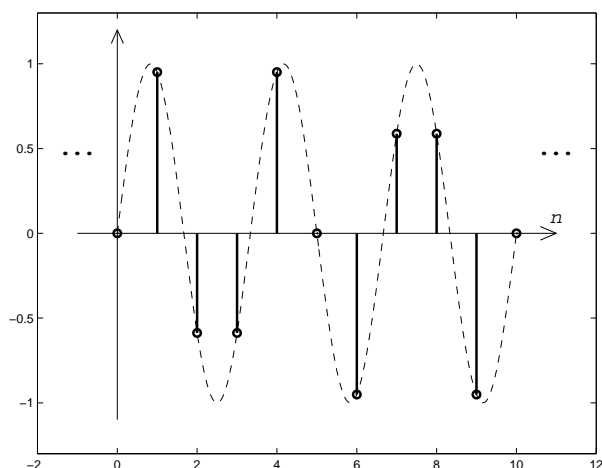


Figura 1.6: Semnalul  $\sin(3\pi n/5)$  are perioada  $N = 10$ . Unei perioade a semnalului îi corespund  $k = 3$  perioade ale semnalului continuu  $\sin(3\pi t/5)$ .

*Soluție. a.* Deoarece frecvența semnalului este  $\omega = 3\pi/5$ , se observă din (1.6) că cel mai mic  $k$  pentru care  $N$  este întreg este  $k = 3$ ; perioada semnalului este  $N = 10$ . Semnalul este ilustrat în figura 1.6.

*b.* Numărul  $k$  din (1.6) reprezintă numărul de perioade ale semnalului sinusoidal continuu  $x(t) = \sin(\omega t + \varphi)$  care corespund unei perioade a semnalului discret (1.5). Vezi și figura 1.6.

*c.* Alegând  $\omega = 2\pi/3$ , rezultă din (1.6) că  $N = 3$  pentru  $k = 1$ . ■

#### PR 1.1.2 Fie semnalele

$$x[n] = 2 \sin\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{4}\right), \quad y[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right).$$

Este  $x[n] + y[n]$  un semnal periodic ? Dacă da, care este perioada lui ?

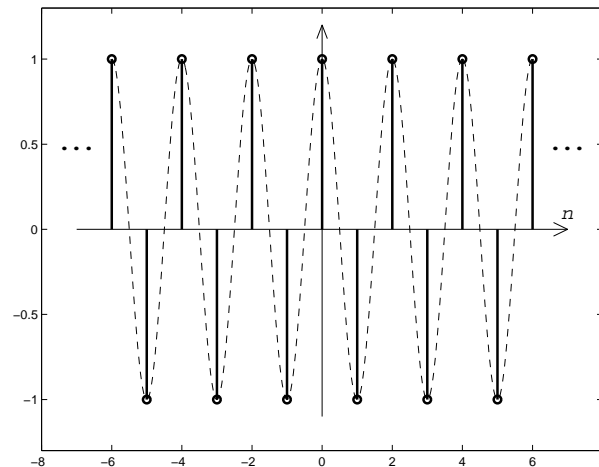
*Soluție.* Semnalul  $x[n]$  are perioadă 6, iar semnalul  $y[n]$  are perioadă 8. Suma a două semnale periodice este periodică, iar perioada sa este cel mai mic multiplu comun al perioadelor celor două semnale, în cazul nostru 24. ■

#### PR 1.1.3 a. Care este sinusoida discretă cu cea mai înaltă frecvență ?

*b.* Pot fi identice două sinusoid discrete cu aceeași frecvență, dar cu amplitudini diferite ? (Semnalul sinusoidal  $x[n] = a \sin(\omega n + \varphi)$ , cu  $a > 0$  are amplitudinea  $a$ .)

*Soluție. a.* Frecvența cea mai înaltă este  $\omega = \pi$ . Un semnal cu această frecvență este  $\cos(\pi n) = (-1)^n$ , desenat în figura 1.7.

*b.* Da, de exemplu  $\cos(\pi n) = 2 \cos(\pi n + \frac{\pi}{3})$ . ■

Figura 1.7: Semnalul  $\cos(\pi n)$  are frecvență maximă.

### Probleme propuse

**PP 1.1.1** Poate fi periodic un semnal cu suport finit ? Dar unul cu suport infinit la dreapta ?

**PP 1.1.2** Un semnal  $x[n]$  este întârziat cu  $n_0$  momente de timp (adică noul semnal este  $y[n] = x[n - n_0]$ ). Care din următoarele proprietăți ale semnalului  $x[n]$  se conservă după întârziere: a) periodicitate, b) formă sinusoidală, c) suport finit, d) suport infinit la dreapta ?

**PP 1.1.3** Aceeași întrebare pentru semnalul  $y[n] = x[-n]$  obținut prin inversarea sensului timpului.

**PP 1.1.4** Este un semnal constant periodic ? Dacă da, care este perioada sa ?

**PP 1.1.5** Care dintre semnalele impuls unitate (1.1), treaptă unitate (1.3), sinusoidal (1.5), exponențial (1.8) este absolut sumabil ?

**PP 1.1.6** Demonstrați că orice semnal absolut sumabil are energie finită, i.e. că este satisfăcută incluziunea  $\ell_1 \subset \ell_2$ .

Dați un exemplu de semnal cu energie finită care nu este absolut sumabil; demonstrați astfel că incluziunea de mai sus e strictă.

**PP 1.1.7** Demonstrați că operația de convoluție a semnalelor, definită de (1.9), este comutativă și asociativă.

**PP 1.1.8** Fie  $x[n]$  și  $y[n]$  două semnale periodice. Sunt periodice semnalele obținute prin convoluția sau modulația în timp a celor două semnale date ?

**PP 1.1.9** Fie  $x_1[n]$  și  $x_2[n]$  două semnale cu suport infinit la dreapta, anume  $M_1 : \infty$  și  $M_2 : \infty$ . Care este suportul convoluției lor  $x_1[n] * x_2[n]$  ? Caz particular:  $M_1 = M_2 = 0$ .

Formulați și rezolvați o problemă asemănătoare pentru semnale cu suport infinit la stânga.

Dacă  $x_1[n]$  are suport infinit la stânga iar  $x_2[n]$  suport infinit la dreapta, demonstrați că  $x_1[n] * x_2[n]$  are suport dublu infinit.

## Ghid Matlab

În Matlab se pot utiliza doar semnale cu suport finit, în variabile de tip vector; adoptăm convenția ca acești vectori să fie de tip linie. Pentru exemplificare vom considera suportul

```
>> n = 0:M
```

de lungime

```
>> L = length(n)
```

Semnalele definite în această secțiune, i.e. impuls unitate (1.1), treaptă unitate (1.3), sinusoidă reală (1.5), exponențial (1.8) se introduc simplu astfel

```
>> imp_unit = eye(1,L)           % impuls unitate
>> tr_unit  = ones(1,L)          % treapta unitate
>> sin_real = sin(w*n + phi)     % sinusoida reala
>> j = sqrt(-1)
>> sin_compl = exp( j*(w*n + phi)) % sinusoida complexa
>> e = ones(1,L)
>> e(2:end) = alfa
>> e = cumprod(e)                % semnal exponential
```

Desigur, înainte de executarea instrucțiunilor de mai sus, variabilele **w**, **phi**, **alfa** au primit valori numerice adecvate. Graficul unui semnal real se poate face cu funcția **plot**; tipică pentru semnale discrete este însă funcția **stem** (cu care au fost trasate graficele din această secțiune), apelată e.g. astfel

```
>> stem(n, sin_real)
```

Pentru a ilustra operațiile cu semnale, considerăm că **x1** și **x2** conțin două semnale cu același suport. Atunci, suma lor se scrie

```
>> xs = x1 + x2
```

modulația în timp (produsul la nivel de element) este

```
>> xm = x1 .* x2
```

iar convoluția lor este

```
>> xc = conv(x1,x2)
```

Atenție, semnalul **xc** obținut prin convoluție are alt suport decât **x1** și **x2**; de exemplu, dacă **x1** și **x2** au suport  $0 : M$ , atunci **xc** are suport  $0 : 2M$ .

## 1.2 Transformata Fourier

**Definiția 1.8** Transformata Fourier a unui semnal discret  $x[n]$  este funcția  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , definită de

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}. \quad (1.10)$$

Notăm pe scurt  $X(\omega) = TF(x[n])$ .

Din motive care vor fi evidente mai târziu, folosim și notația  $X(e^{j\omega})$  cu aceeași semnificație ca  $X(\omega)$ . Deocamdată vom utiliza mai ales notația din (1.10); în schimb, atunci când va fi vorba despre sisteme, cealaltă notație va prevala.

**Observația 1.9** Știm din Propoziția 1.5 că sinusoidalele cu frecvențe diferind cu  $2\pi$  sunt identice. În consecință, transformata Fourier  $X(\omega)$  este periodică cu perioada  $2\pi$  și de aceea este suficient să studiem transformata Fourier a unui semnal doar în intervalul  $\omega \in [-\pi, \pi]$ .

**Observația 1.10** Nu orice semnal  $x[n]$  are o transformată Fourier definită pe întreg intervalul  $[-\pi, \pi]$ , deoarece seria (1.10) poate fi divergentă. O condiție suficientă de convergență este următoarea.

**Propoziția 1.11** Dacă semnalul  $x[n]$  este absolut sumabil, atunci  $X(\omega)$  din (1.10) există pentru orice  $\omega$ . (Mai mult, seria (1.10) converge uniform către o funcție continuă în  $\omega$ .)

**Propoziția 1.12** Dacă  $x[n]$  este un semnal de energie finită, atunci seria (1.10) converge (i.e. transformata Fourier există) aproape peste tot. Mai precis, fie

$$X_M(\omega) = \sum_{n=-M}^M x[n]e^{-j\omega n}. \quad (1.11)$$

Atunci avem

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega) - X_M(\omega)|^2 d\omega = 0, \quad (1.12)$$

adică "energia" erorii de aproximare a lui  $X(\omega)$  prin  $X_M(\omega)$  tinde spre zero, dar eroarea nu se anulează neapărat peste tot. (Pe scurt,  $X_M(\omega)$  poate să nu converge peste tot la  $X(\omega)$ ; desigur, convergența nu e uniformă, în general.)

**Teorema 1.13** Transformata Fourier inversă, care asociază unei funcții  $X(\omega)$  semnalul  $x[n]$  (a cărei transformată Fourier este  $X(\omega)$ ) este

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega n} d\omega. \quad (1.13)$$

Forma transformatei Fourier inversă (1.13) sugerează semnificația transformatei Fourier a unui semnal:  $X(\omega)$ ,  $\omega \in [-\pi, \pi]$ , reprezintă conținutul în frecvență al semnalului  $x[n]$ . Funcția complexă  $X(\omega)$  este numită *spectrul* semnalului  $x[n]$ ; desigur,  $|X(\omega)|$  este amplitudinea (magnitudinea) spectrului, iar  $\arg X(\omega)$  este faza spectrului. De asemenea,  $|X(\omega)|^2$  este numită *densitate de energie spectrală*, din motive ce vor fi evidente mai jos, după prezentarea teoremei lui Parseval.

## Proprietăți ale transformatei Fourier

Vom enumera în continuare câteva proprietăți importante ale transformatei Fourier. Fie  $x[n]$ ,  $y[n]$  semnale complexe, iar  $X(\omega)$ ,  $Y(\omega)$  transformatele Fourier ale acestora.

*Liniaritate.* Pentru orice  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  avem

$$TF(\alpha x[n] + \beta y[n]) = \alpha \cdot TF(x[n]) + \beta \cdot TF(y[n]). \quad (1.14)$$

*Întârziere.* Fie  $n_0$  un întreg oarecare și  $y[n] = x[n - n_0]$ , i.e.  $y[n]$  este semnalul  $x[n]$  întârziat cu  $n_0$  momente de timp (o întârziere negativă este de fapt o anticipare). Relația între transformatele Fourier ale celor două semnale este

$$Y(\omega) = e^{-j\omega n_0} X(\omega). \quad (1.15)$$

*Complex conjugare.* Fie  $y[n] = x^*[n]$ . Atunci

$$Y(\omega) = X^*(-\omega). \quad (1.16)$$

*Simetrii ale TF pentru semnale reale.* Dacă semnalul  $x[n]$  este real, atunci au loc următoarele proprietăți de simetrie:

$$\begin{aligned} X(-\omega) &= X^*(\omega), \\ \operatorname{Re} X(\omega) &= \operatorname{Re} X(-\omega), \\ \operatorname{Im} X(\omega) &= -\operatorname{Im} X(-\omega), \\ |X(\omega)| &= |X(-\omega)|, \\ \arg X(\omega) &= -\arg X(-\omega). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Cu alte cuvinte,  $|X(\omega)|$  și  $\operatorname{Re} X(\omega)$  sunt funcții pare, iar  $\operatorname{Im} X(\omega)$  și  $\arg X(\omega)$  sunt funcții impare.

*Timă inversă.* Considerăm semnalul  $y[n] = x[-n]$  obținut prin inversarea sensului timpului pentru semnalul  $x[n]$ . Avem

$$Y(\omega) = X(-\omega). \quad (1.18)$$

*Derivare în frecvență:*

$$TF(nx[n]) = j \frac{dX(\omega)}{d\omega}. \quad (1.19)$$

*Teorema lui Parseval.* Forma generală a acestei teoreme este

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)Y^*(\omega)d\omega. \quad (1.20)$$

Termenul din stânga are semnificație de produs scalar în spațiul semnalelor; similar, termenul din dreapta are semnificație de produs scalar în spațiul funcțiilor definite pe intervalul  $[-\pi, \pi]$ . Punând  $y[n] = x[n]$  în (1.20) se obține egalitatea numită de obicei teorema lui Parseval

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega. \quad (1.21)$$

Așadar, energia în timp a semnalului este egală (modulo constanta  $1/2\pi$ ) cu energia în frecvență a acestuia. Termenul din dreapta justifică denumirea de densitate de energie spectrală atribuită lui  $|X(\omega)|^2$ .

*Convoluție.* Prin transformata Fourier, convoluția a două semnale este transformată în produs al transformatelor Fourier, i.e.

$$TF(x[n] * y[n]) = X(\omega) \cdot Y(\omega). \quad (1.22)$$

*Modulație în timp.* Avem

$$TF(x[n]y[n]) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\theta)Y(\omega - \theta)d\theta. \quad (1.23)$$

## Probleme rezolvate

**PR 1.2.1 a.** Demonstrați că dacă  $m$  este întreg, atunci

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega m} d\omega = 2\pi\delta[m] = \begin{cases} 2\pi, & \text{dacă } m = 0 \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases} \quad (1.24)$$

**b.** Demonstrați Teorema 1.13.

*Soluție. a.* Calculăm direct. Pentru  $m = 0$  obținem

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega m} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} d\omega = 2\pi$$

iar pentru  $m \neq 0$  avem

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega m} d\omega = \frac{1}{jm} e^{j\omega m} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2j \sin(m\pi)}{jm} = 0,$$

deoarece  $\sin(m\pi) = 0$  pentru orice  $m$  întreg.

**b.** Substituim (1.10) în (1.13), apoi utilizăm (1.24) și obținem

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n} d\omega &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-k)} d\omega = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k] = x[n]. \end{aligned}$$

Ultima egalitate este (1.2). Așadar funcția (1.13) este inversa funcției (1.10). ■

**PR 1.2.2 a.** Calculați transformata Fourier a semnalului exponențial definit de (1.8), cu  $|\alpha| < 1$ .

**b.** Calculați transformata Fourier a semnalului  $y[n] = -\alpha^n u[-n-1]$ , cu  $|\alpha| > 1$ .

*Soluție. a.* Folosim definiția (1.10) și obținem

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha e^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}.$$

În calculul sumei progresiei geometrice de mai sus am ținut seama că  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha e^{-j\omega})^n = 0$ , deoarece rația  $\alpha e^{-j\omega}$  are modul subunitar.

b. Aplicând din nou definiția (1.10) obținem

$$Y(\omega) = - \sum_{n=-\infty}^{-1} \alpha^n e^{-j\omega n} = - \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha^{-1} e^{j\omega})^n = - \left( \frac{1}{1 - \alpha^{-1} e^{j\omega}} - 1 \right) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}.$$

De data aceasta avem  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha^{-1} e^{-j\omega})^n = 0$ . Atenție, semnalele  $x[n] = \alpha^n u[n]$  și  $y[n] = -\alpha^n u[-n-1]$  nu au transformate Fourier identice, deoarece ele sunt definite pentru valori diferite ale parametrului  $\alpha$ . În primul caz avem  $|\alpha| < 1$ , în al doilea  $|\alpha| > 1$ . De altfel, două semnale nu pot avea aceeași transformată Fourier, deoarece TF este o bijectie. ■

**PR 1.2.3** Considerăm semnalul  $x[n]$  al cărui spectru, ilustrat în figura 1.8, este

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } |\omega| \leq \omega_t, \\ 0, & \text{pentru } \omega_t < |\omega| \leq \pi, \end{cases}$$

unde  $\omega_t$  este dat. Așadar, semnalul  $x[n]$  are un spectru ideal de joasă frecvență. Calculați  $x[n]$  folosind transformata Fourier inversă (1.13).

*Soluție.* Introducem funcția sinc (numită și *nucleul Dirichlet*; ea va apărea de multe ori în continuare):

$$\text{sinc } \omega = \frac{\sin \omega}{\omega}. \quad (1.25)$$

Folosind transformata Fourier inversă obținem

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_t}^{\omega_t} e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi j n} e^{j\omega n} \Big|_{-\omega_t}^{\omega_t} \\ &= \frac{\sin(\omega_t n)}{\pi n} = \frac{\omega_t}{\pi} \text{sinc}(\omega_t n). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Un exemplu de astfel de semnal este prezentat în figura 1.8. Se observă că semnalul are suport dublu infinit. Am obținut deci egalitatea

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega_t n)}{\pi n} e^{-j\omega n} = \frac{\omega_t}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(\omega_t n) e^{-j\omega n}. \quad (1.27)$$

■

**PR 1.2.4 (Fenomenul Gibbs)** Se consideră semnalul  $x[n]$  definit de (1.26), cu spectrul ideal de joasă frecvență din figura 1.8. Scrieți un program Matlab care să deseneze modulul spectrului semnalului

$$x_M[n] = \begin{cases} x[n], & \text{pentru } n = -M : M, \\ 0, & \text{altfel;} \end{cases}$$

cu alte cuvinte, seria (1.27) se trunchiază ca în (1.11).



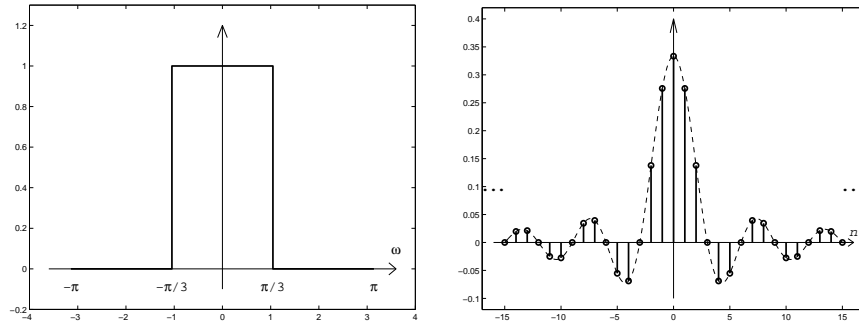


Figura 1.8: Spectru de joasă frecvență ideal, cu  $\omega_t = \pi/3$  (stânga). Semnalul corespunzător (dreapta).

Observați că, pe măsură ce  $M$  crește, spectrul  $X_M(\omega)$  se apropie de caracteristica ideală, mai puțin în apropierea frecvenței  $\omega_t$ . Aceasta este o ilustrare a convergenței transformatei Fourier conform Propoziției 1.12 și se numește fenomenul Gibbs. (De asemenea, demonstrați că semnalul (1.26) are energie finită.)

*Soluție.* Programul este prezentat în figura 1.9, în două variante. Prima este cea naivă, în care seria (1.27) se trunchiază pur și simplu. Singurul artificiu de calcul este utilizarea simetriei transformatei Fourier pentru semnale reale (prima relație din (1.17)). Observăm că spectrul este calculat într-un număr de puncte `np`, pentru comoditate alese echidistante. De asemenea, trebuie precizată explicit valoarea  $x[0] = \omega_t/\pi$  care rezultă din (1.26) pentru  $n = 0$ ; în Matlab (și în orice alt limbaj de programare care utilizează formatul virgulă mobilă pentru numere reale), calculul direct al lui  $x[0]$  duce la operația  $0/0$ , al cărui rezultat este `NaN` ("not a number", simbolul pentru rezultate nedeterminate în standardul virgulă mobilă).

A doua variantă de program utilizează proprietățile semnalului (1.26) pentru un calcul mai rapid. Observăm că semnalul (1.26) este par, adică  $x[-n] = x[n]$ . În acest caz se poate demonstra ușor că  $X(\omega)$  este real (și deci par), și că

$$X(\omega) = \frac{\omega_t}{\pi} + 2 \sum_{n=1}^M \frac{\sin(\omega_t n)}{\pi n} \cos(\omega n).$$

(Vezi problema **PP1.2.4** pentru mai multe amănunte.)

Transformata Fourier  $X(\omega)$  calculată de programul de mai sus este prezentată în figura 1.10, pentru  $M = 3, 10, 30, 100$  și  $\omega_t = \pi/3$ . Fenomenul Gibbs este evident, eroarea absolută în jurul frecvenței  $\omega = \omega_t$  rămânând mare chiar pentru valori foarte mari ale lui  $M$ , pentru care  $x[n]$  este foarte mic (spre exemplu  $x[100] = -0.0028$ , dar eroarea absolută maximă este aproape 0.09).

În sfârșit, pentru a demonstra că semnalul (1.26) are energie finită este suficient să observăm că  $|x[n]| < 1/n$ , pentru  $n > 0$ , și deci  $\sum_{n=1}^{\infty} |x[n]|^2 < \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ ; seria din termenul drept este convergentă. În plus, avem  $x[-n] = x[n]$ . ■

**PR 1.2.5 (Transformata Fourier a semnalelor sinusoidale complexe)** Semnalul sinusoidal complex  $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ , unde  $\omega_0 \in [-\pi, \pi]$  este dat, nu are energie

```

function [X,w] = tf_jf(wt, M, np)
% calculeaza transformata Fourier a semnalului ideal
% de joasa frecventa trunchiat la intervalul -M:M
% wt    - frecventa maxima (banda de frecvente este [0,wb])
% M     - limita suportului semnalului
% np    - numarul de frecvente (echidistante) in care se calculeaza
%        transformata Fourier

if nargin < 3
    np = 200;
end

%-----
% VARIANTA 1
n = -M:M;
x = sin(wt*n)./(pi*n);
x((1+end)/2) = wt/pi;

w = 0:2*pi/np:pi;

for k = 1 : length(w)
    X(k) = sum( x .* exp(-j*w(k)*n) );
end

X = [ conj(X(end:-1:2)) X ];
w = [ -w(end:-1:2) w ];

%-----
% VARIANTA 2
n = (1:M)';
x = sin(wt*n)./(pi*n);

w = 0:2*pi/np:pi;
X = x' * cos(n*w);
X = 2*X + wt/pi;

X = [ X(end:-1:2) X ];
w = [ -w(end:-1:2) w ];

```

Figura 1.9: Program de calcul al modulului transformatei Fourier (1.27) trunchiată la suportul  $-M : M$ .

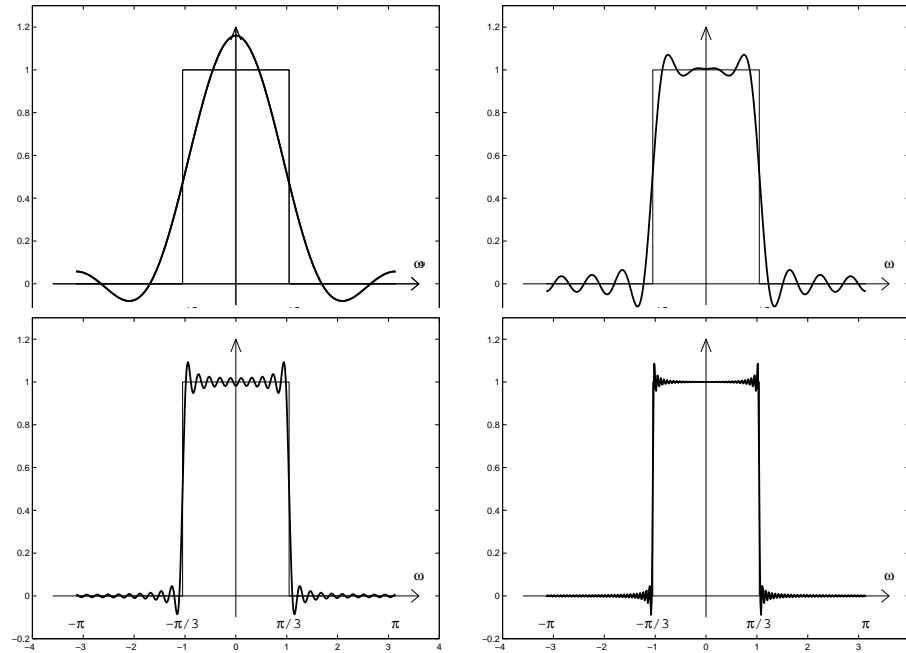


Figura 1.10: Modulul transformatei Fourier (1.27) trunchiată la suportul  $-M : M$ , pentru  $M = 3, 10, 30, 100$ .

finită și seria (1.10) nu este convergentă. Totuși, putem asocia o transformată Fourier acestui semnal, anume

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \delta(2\pi\ell + \omega - \omega_0). \quad (1.28)$$

Notăm  $\delta(\omega)$  impulsul Dirac situat în origine. Observăm că  $X(\omega)$  este periodică și că restricția la intervalul  $[-\pi, \pi]$  este impulsul  $2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ .

Interpretare: semnalul sinusoidal are un spectru nenul într-o singură frecvență (în care se concentrează toată energie sa). Un spectru de acest tip se numește și spectru de linii (una singură, în cazul de față).

Demonstrați, folosind definiția (1.13), că semnalul sinusoidal  $x[n]$  se obține aplicând transformata Fourier inversă funcției (spectru)  $X(\omega)$ .

*Soluție.* Demonstrația este banală, ținând seama de proprietățile impulsului Dirac:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega n} d\omega = e^{j\omega_0 n}.$$

■

**PR 1.2.6** Demonstrați proprietățile (1.14–1.23) ale transformatei Fourier.

*Soluție.* Liniaritatea (1.14) este evidentă.

*Întârziere.* Luând  $y[n] = x[n - n_0]$  și aplicând definiția (1.10) obținem

$$Y(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n - n_0]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega(n+n_0)} = e^{-j\omega n_0} X(\omega).$$

*Complex conjugare.* Luăm  $y[n] = x^*[n]$  și obținem

$$Y(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]e^{-j\omega n} = \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{j\omega n} \right)^* = X^*(-\omega).$$

*Simetriile TF pentru semnale reale* rezultă din (1.16), ținând seama că  $x^*[n] = x[n]$ . Așadar avem  $X(\omega) = X^*(-\omega)$ , ceea ce implică toate relațiile (1.17).

*Derivare în frecvență.* Avem

$$\frac{dX(\omega)}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-jnx[n]e^{-j\omega n}),$$

de unde (1.19) rezultă imediat.

*Teorema lui Parseval.* Folosim definiția TF și proprietatea (1.24):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)Y^*(\omega)d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} y^*[k]e^{j\omega k} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[k] \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(k-n)} d\omega \\ &\stackrel{(1.24)}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n]. \end{aligned}$$

*Convoluție.* Transformata Fourier a semnalului  $x[n] * y[n]$  definit în (1.9) este

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k]e^{-j\omega n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j\omega k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n-k]e^{-j\omega(n-k)} = X(\omega)Y(\omega),$$

ceea ce demonstrează (1.22).

*Modulație în timp.* Relația (1.23) se demonstrează înlocuind  $X(\theta)$  și  $Y(\omega - \theta)$  cu definiția (1.10). ■

## Probleme propuse

**PP 1.2.1** Calculați transformata Fourier a semnalului

$$x[n] = \begin{cases} 1, & \text{pentru } n = 0 : M, \\ 0, & \text{altfel,} \end{cases}$$

unde  $M$  este un întreg pozitiv dat.

**PP 1.2.2** Calculați transformata Fourier a semnalului  $x[n] = \alpha^{|n|}$ , cu  $|\alpha| < 1$ .

**PP 1.2.3** Calculați transformata Fourier a semnalului  $x[n] = n\alpha^n u[n]$ , unde  $|\alpha| < 1$ . (Observați că  $x[n]$  este absolut sumabil.)

**PP 1.2.4 a.** Fie  $x[n]$  un semnal complex cu proprietatea  $x[-n] = x^*[n]$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ ; spunem că un astfel de semnal este par. Observați că  $x[0] \in \mathbb{R}$ . Demonstrați că transformata sa Fourier este reală, mai precis că

$$X(\omega) = x[0] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} (x[n] e^{-j\omega n}).$$

Demonstrați că, dacă  $x[n]$  este un semnal real par, i.e. are proprietatea  $x[-n] = x[n]$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ , atunci transformata sa Fourier este

$$X(\omega) = x[0] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} x[n] \cos(\omega n).$$

**b.** Fie  $x[n]$  un semnal complex cu proprietatea  $x[-n] = -x^*[n]$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ ; spunem că un astfel de semnal este impar. Observați că  $x[0] \in j\mathbb{R}$  (i.e. este pur imaginar). Demonstrați că transformata sa Fourier este pur imaginară, mai precis că

$$X(\omega) = 2j \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} (x[n] e^{-j\omega n}).$$

Demonstrați că, dacă  $x[n]$  este un semnal real impar, i.e. are proprietatea  $x[-n] = -x[n]$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ , atunci transformata sa Fourier este

$$X(\omega) = -2j \sum_{n=1}^{\infty} x[n] \sin(\omega n).$$

**PP 1.2.5** Fie  $x[n]$  un semnal complex și  $X(\omega) = TF(x[n])$ . Calculați, în funcție de  $X(\omega)$ , transformata Fourier a semnalului  $y[n] = x^*[n_0 - n]$ , unde  $n_0 \in \mathbb{Z}$  este dat.

**PP 1.2.6** Calculați transformatele Fourier ale semnalelor  $\cos(\omega_0 n)$  și  $\sin(\omega_0 n)$ , unde  $\omega_0 \in [-\pi, \pi]$  este dat. (Indicație: utilizați (1.28).)

**PP 1.2.7** Se consideră semnalul constant  $x[n] = 1$ . Demonstrați că transformata sa Fourier, definită pe intervalul  $[-\pi, \pi]$ , este impulsul centrat în origine  $2\pi\delta(\omega)$ . (Indicație: folosiți transformata Fourier inversă.) Se obține așadar relația

$$2\pi\delta(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega n}.$$

Desigur, semnalul  $x[n]$  nu are energie finită. Fenomenul Gibbs apare și în acest caz; desenați graficul sumei trunchiate

$$\sum_{n=-M}^M e^{-j\omega n},$$

pentru diverse valori ale lui  $M$ . Veți obține aproximări ale impulsului unitate (în frecvență, adică într-un domeniu continuu). Aceste aproximări vor avea oscilații mari în apropierea frecvenței  $\omega = 0$ .

**PP 1.2.8** Fie  $x[n]$  un semnal cu energie finită și  $X(\omega)$  transformata sa Fourier. Definim semnalul

$$r[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x^*[n-k] \quad (1.29)$$

și notăm  $R(\omega)$  transformata sa Fourier.

- a. Demonstrați că are loc egalitatea  $R(\omega) = |X(\omega)|^2$ .
- b. Observați că  $r[0] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$  este energia semnalului  $x[n]$ . Din transformata Fourier inversă

$$r[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} R(\omega)e^{j\omega k} d\omega,$$

deduceți teorema lui Parseval.

## Ghid Matlab

Transformata Fourier a unui semnal cu suport finit se poate calcula într-un mod similar programului din figura 1.9. Deci, luând o grilă de frecvențe

```
>> w = 0:pas:pi
```

unde, e.g. `pas=0.01`, transformata Fourier a semnalului `x` cu suportul

```
>> n = 0:M
```

se poate calcula simplu prin

```
>> X = x * exp(-j*n'*w)
```

Amplitudinea transformatei Fourier se desenează cu

```
>> plot(w, abs(X))
```

iar faza prin

```
>> plot(w, angle(X))
```

De exemplu, pentru problema **PP1.2.1**, făcând abstracție de formula simplă cerută acolo, transformata Fourier se poate calcula astfel

```
>> M = 10 % o valoare intreaga oarecare
>> w = 0 : pi/200 : pi % sunt de fapt 201 puncte
>> x = ones(1, M+1) % semnalul
>> X = x' * exp(-j*(0:M)'*w) % transformata Fourier
```

O altă variantă de calcul presupune utilizarea funcției `freqz`, care va fi discutată mai în detaliu în capitolul 2. Transformata Fourier se calculează pe grila de frecvențe `w` prin apelul

```
>> X = freqz(x, 1, w)
```

De asemenea, transformata Fourier se poate calcula eficient (pe o anumită grilă de frecvențe), cu funcția `fft`. Aceasta va fi discutată după prezentarea transformatei Fourier discrete și a algoritmilor rapizi de implementare a acesteia, în capitolul 5.

## 1.3 Transformata Z

**Definiția 1.14** Transformata Z (bilaterală) a unui semnal discret  $x[n]$  este funcția  $X : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}. \quad (1.30)$$

Folosim și notația  $X(z) = TZ(x[n])$ .

Observăm că transformata Fourier (1.10) este un caz particular al transformatei Z, pentru  $z = e^{j\omega}$ . Notația  $X(e^{j\omega})$  pentru transformata Fourier (spre deosebire de notația naturală  $X(\omega)$ ) subliniază această legătură.

**Observația 1.15** Pentru marea majoritate a semnalelor, transformata Z există (în sensul că seria (1.30) converge) într-o anumită regiune a planului complex (care nu conține neapărat cercul unitate), numită regiune de convergență. Așadar semnale care nu au transformată Fourier pot avea transformată Z. Vezi problema **PR1.3.1** pentru un exemplu.

**Observația 1.16** Mai multe semnale pot avea aceeași transformată Z, dar regiuni de convergență disjuncte. Exemple de astfel de semnale sunt prezentate în problemele **PR1.3.1** și **PR1.3.2**.

**Teorema 1.17** Transformata Z inversă, care asociază unei funcții  $X(z)$  semnalul  $x[n]$  (a cărui transformată Z este  $X(z)$ ) este

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z)z^{n-1}dz. \quad (1.31)$$

Integrala se calculează pe un contur închis în jurul originii în planul complex, parcurs în sens invers acelor de ceas; conturul este situat în regiunea de convergență a transformatei Z pentru semnalul  $x[n]$ .

Așadar transformata Z inversă nu depinde doar de  $X(z)$  ci și de regiunea de convergență a transformatei. În aceste condiții, transformata Z este unică.

Teorema de mai sus are puțină utilitate practică, datorită dificultății calculării integralei (1.31). De obicei, recuperarea unui semnal a cărui transformată Z este cunoscută se face utilizând transformate Z elementare (unele prezentate în tabelul 1.1) și proprietăți ale transformatei Z (prezentate mai jos).

### Proprietăți ale transformatei Z

Vom enumera în continuare câteva proprietăți importante ale transformatei Z. Fie  $x[n]$ ,  $y[n]$  semnale și  $X(z)$ ,  $Y(z)$  transformatele lor Z.

*Liniaritate.* Pentru orice  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  avem

$$TZ(\alpha x[n] + \beta y[n]) = \alpha \cdot TZ(x[n]) + \beta \cdot TZ(y[n]). \quad (1.32)$$

	Semnal	Transformata Z
Impuls unitate întârziat:	$\delta[n - n_0]$	$z^{-n_0}$
Treaptă unitate:	$u[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$
Exponențială:	$\alpha^n u[n]$	$\frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$
Sinus:	$\sin(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{\sin \omega_0 \cdot z^{-1}}{1 - 2 \cos \omega_0 \cdot z^{-1} + z^{-2}}$
Cosinus:	$\cos(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{1 - \cos \omega_0 \cdot z^{-1}}{1 - 2 \cos \omega_0 \cdot z^{-1} + z^{-2}}$

Tabelul 1.1: Transformate Z ale unor semnale uzuale.

*Întârziere.* Fie  $n_0$  un întreg oarecare și  $y[n] = x[n - n_0]$ , i.e. semnalul  $x[n]$  întârziat. Relația dintre transformatele Z ale celor două semnale este

$$Y(z) = z^{-n_0} X(z). \quad (1.33)$$

În cazul în care  $n_0 = 1$ , relația de mai sus este  $Y(z) = z^{-1} X(z)$ , adică întârzierea cu un moment de timp corespunde unei înmulțiri cu  $z^{-1}$ . De aceea,  $z^{-1}$  se numește și operator de întârziere cu un pas (eșantion).

*Înmulțirea cu o exponențială.* Fie  $x[n]$  un semnal oarecare și  $y[n] = \alpha^n x[n]$ , cu  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Atunci avem

$$Y(z) = X(z/\alpha). \quad (1.34)$$

*Timp invers.* Considerăm semnalul  $y[n] = x[-n]$  obținut prin inversarea sensului timpului pentru semnalul  $x[n]$ . Avem

$$Y(z) = X(z^{-1}). \quad (1.35)$$

*Derivare după  $z$ :*

$$TZ(nx[n]) = -z \frac{dX(z)}{dz}. \quad (1.36)$$

*Convoluție.* Prin transformata Z, convoluția a două semnale este transformată în produs al transformatelor Z, i.e.

$$TZ(x[n] * y[n]) = X(z) \cdot Y(z). \quad (1.37)$$

## Probleme rezolvate

**PR 1.3.1** Calculați transformata Z a semnalului exponențial definit de (1.8). Care este regiunea de convergență a transformatei Z a acestui semnal ?

*Soluție.* Aplicând (1.30) obținem

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}.$$



Seria de mai sus converge dacă rația  $\alpha z^{-1}$  are modul subunitar, deci în regiunea inelară (infinită) a planului complex în care  $|z| > |\alpha|$ . Așadar, când  $|\alpha| > 1$ , transformata Z a semnalului exponențial există într-o zonă a planului complex, în timp ce transformata Fourier nu există. ■

**PR 1.3.2** Calculați transformata Z a semnalului  $y[n] = -\alpha^n u[-n-1]$  și determinați regiunea de convergență a acesteia.

*Soluție.* Aplicând (1.30) obținem

$$Y(z) = - \sum_{n=-\infty}^{-1} \alpha^n z^{-n} = - \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha^{-1} z)^n = - \left( \frac{1}{1 - \alpha^{-1} z} - 1 \right) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}.$$

Convergența are loc când  $|\alpha^{-1} z| < 1$ , i.e.  $|z| < |\alpha|$ . Regiunile de convergență ale semnalelor  $y[n]$  (din această problemă) și  $x[n]$  (din problema precedentă) sunt disjuncte; transformatele Z ale semnalelor sunt identice. ■

**PR 1.3.3** Determinați semnalul a cărui transformată Z este

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}}.$$

*Soluție.* Scriem numitorul ca produs a doi factori și descompunem în fracții simple:

$$\frac{1}{1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}} = \frac{1}{(1 - z^{-1})(1 - 0.5z^{-1})} = \frac{2}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}.$$

Din problema **PR1.3.1** observăm că

$$X_1(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad X_2(z) = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}$$

sunt transformatele Z ale treptei unitate  $x_1[n] = u[n]$ , respectiv exponențialei  $x_2[n] = 0.5^n$ . Regiunile de convergență ale transformatelor sunt  $|z| > 1$ , respectiv  $|z| > 0.5$ . Ținând seama de proprietățile de liniaritate (1.32) și întârziere (1.33), semnalul a cărui transformată Z este  $X(z)$  este

$$\begin{aligned} x[n] &= 2x_1[n] + 4x_1[n-1] - x_2[n] - 2x_2[n-1] \\ &= (2 - 0.5^n)u[n] + 2(2 - 0.5^{n-1})u[n-1]. \end{aligned}$$

Mai sus am presupus că regiunea de convergență a transformatei Z este  $|z| > 1$  adică intersecția regiunilor de convergență considerate pentru  $X_1(z)$  și  $X_2(z)$ . Putem însă considera alte două regiuni, pentru care se obțin semnale diferite (cititorul este rugat să completeze detaliile).

Dacă regiunea de convergență este  $|z| < 0.5$ , atunci conform **PR1.3.2**, semnalul a cărui transformată Z este  $X(z)$  este

$$x[n] = (-2 + 0.5^n)u[-n-1] + 2(-2 + 0.5^{n-1})u[-n].$$

Dacă regiunea de convergență este  $0.5 < |z| < 1$ , atunci obținem

$$x[n] = -2u[-n-1] - 4u[-n] - 0.5^n u[n] - 2 \cdot 0.5^{n-1} u[n-1].$$

În acest caz am folosit **PR1.3.2** pentru  $X_1(z)$  și **PR1.3.1** pentru  $X_2(z)$ .

Așadar există trei semnale a căror transformată Z este  $X(z)$ , dar cu regiuni de convergență disjuncte două câte două. ■

## Probleme propuse

**PP 1.3.1** Demonstrați proprietățile (1.32–1.37) ale transformatei Z.

**PP 1.3.2** Ce semnal are transformata Z egală cu  $(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})(1 - 2z^{-1})$  ?

**PP 1.3.3** Se cunoaște transformata Z a unui semnal  $x[n]$ . Care este transformata Z a semnalului  $y[n] = x[n_0 - n]$ , unde  $n_0 \in \mathbb{Z}$  este dat ?

**PP 1.3.4** Calculați transformatele Z și stabiliți regiunile lor de convergență pentru semnalele de mai jos:

$$\begin{aligned} x_1[n] &= \begin{cases} 1, & \text{pentru } n = 0 : M \text{ (cu } M \in \mathbb{N}), \\ 0, & \text{altfel,} \end{cases} \\ x_2[n] &= n\alpha^n u[n], \\ x_3[n] &= \alpha^n u[n-1], \\ x_4[n] &= \alpha^n \cos(\omega_0(n-1))u[n-1] \\ x_5[n] &= \cos(\omega_0 n)u[n-1] \\ x_6[n] &= u[-n+1]. \end{aligned}$$

## 1.4 Semnale aleatoare

Până acum am discutat doar despre semnale deterministe. În practică apar însă de multe ori semnale cu caracter aleator; caracterizarea lor este subiectul acestei secțiuni.

O *variabilă aleatoare* reală  $\xi$  este caracterizată de funcția de *densitate de probabilitate*  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , cu proprietatea

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\xi) d\xi = 1. \quad (1.38)$$

Probabilitatea ca valoarea variabilei aleatoare să se afle într-un interval precizat  $[\xi_1, \xi_2]$  este

$$\text{Prob}(\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} p(\xi) d\xi.$$

*Speranța matematică (expectația).* Fie  $\xi$  și  $\eta$  două variabile aleatoare legate prin relația  $\eta = f(\xi)$ , unde  $f$  este o funcție precizată. Atunci speranța matematică (expectația) a variabilei  $\eta$  este

$$E\{\eta\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) p(\xi) d\xi. \quad (1.39)$$

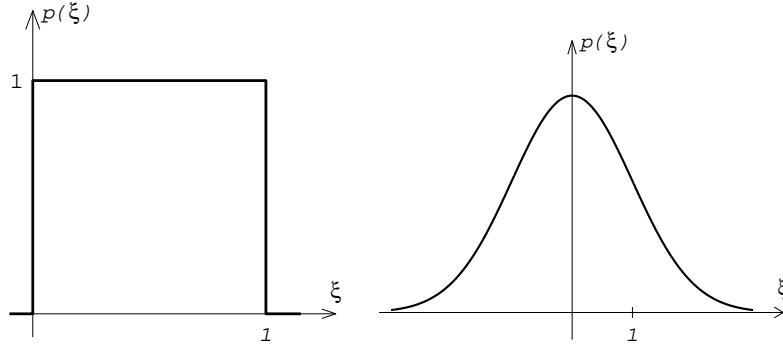


Figura 1.11: Densități de probabilitate uniformă (stânga) și gaussiană  $\mathcal{N}(0, 1)$  (dreapta).

Aceasta are semnificația de medie a valorilor variabilei  $\eta$  peste toate valorile posibile ale variabilei  $\xi$ , luând în considerare probabilitățile asociate acestor valori. Operatorul  $E\{\cdot\}$  se mai numește și operator de mediere.

Media  $\mu$  a variabilei aleatoare  $\xi$  se obține punând  $\eta = \xi$  în (1.39), adică este definită prin

$$\mu = E\{\xi\} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi p(\xi) d\xi. \quad (1.40)$$

Varianța  $\sigma^2$  a variabilei aleatoare  $\xi$  este definită prin

$$\sigma^2 = E\{(\xi - \mu)^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \mu)^2 p(\xi) d\xi. \quad (1.41)$$

**Definiția 1.18** O variabilă aleatoare cu distribuție uniformă în intervalul  $[0, 1]$  are densitatea de probabilitate

$$p(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } \xi \in [0, 1], \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases} \quad (1.42)$$

**Definiția 1.19** O variabilă aleatoare cu distribuție gaussiană (sau normală) de medie  $\mu$  și varianță  $\sigma^2$  are densitatea de probabilitate

$$p(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\xi - \mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (1.43)$$

De obicei, această distribuție este notată  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .

Graficele densităților de probabilitate ale variabilelor uniformă și gaussiană sunt prezentate în figura 1.11.

**Definiția 1.20** Un proces aleator  $x[n]$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , este un șir de variabile aleatoare. Un semnal aleator, notat tot  $x[n]$ , este o realizare a procesului aleator, în sensul că, la fiecare moment de timp  $n$ , se consideră o singură valoare a variabilei aleatoare corespunzătoare.

**Definiția 1.21** Autocorelațiile unui proces aleator reprezintă speranțele matematice ale produselor variabilelor aleatoare (la diferite momente de timp):

$$E\{x[n]x[n-k]\} = r[n, k], \quad n, k, \in \mathbb{Z}.$$

Se observă imediat că  $r[n, k] = r[n, -k]$ .

Cele mai simple, dar extrem de utile, procese aleatoare sunt cele ale căror proprietăți nu se modifică în timp. În această lucrare va fi vorba doar despre astfel de procese, definite ca mai jos.

**Definiția 1.22** Un proces aleator  $x[n]$  este staționar (în sens larg) dacă variabilele aleatoare  $x[n]$  au aceeași medie, i.e.

$$E\{x[n]\} = \mu, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (1.44)$$

iar autocorelațiile

$$E\{x[n]x[n-k]\} = r[k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (1.45)$$

depind doar de "distanța"  $k$  între momentele de timp. (Evident, avem  $r[k] = r[-k]$ .)

Autocovarianțele unui proces aleator staționar sunt autocorelațiile procesului  $x[n] - \mu$ , i.e.

$$E\{(x[n] - \mu)(x[n-k] - \mu)\} = \rho[k].$$

Pentru procese cu medie nulă, avem  $r[k] = \rho[k]$ .

**Definiția 1.23** Un zgomot alb de medie nulă și varianță  $\sigma^2$  este un proces aleator  $w[n]$  pentru care

$$\begin{aligned} E\{w[n]\} &= 0, \\ E\{w[n]w[n-k]\} &= \sigma^2\delta[k]. \end{aligned} \quad (1.46)$$

*Estimarea mediei și a autocorelațiilor.* În aplicațiile practice, dispunem de o realizare finită a unui proces aleator, adică de un semnal aleator cu suport finit  $x[n]$ ,  $n = 0 : N-1$ . Presupunând că procesul este staționar, se pune problema să estimăm valorile mediei (1.44) și autocorelațiilor (1.45). Pentru medie, cea mai naturală estimatie este

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]. \quad (1.47)$$

Pentru autocorelații se folosesc estimatia nedeviată

$$\hat{r}[k] = \frac{1}{N-k} \sum_{n=k}^{N-1} x[n]x[n-k], \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad (1.48)$$

(numele provine din faptul că  $E\{\hat{r}[k]\} = r[k]$ , vezi problema **PR1.4.3**; o estimatie este nedeviată dacă expectația sa este egală cu valoarea adevărată), dar mai ales cea deviată

$$\hat{r}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=k}^{N-1} x[n]x[n-k], \quad 0 \leq k \leq N-1. \quad (1.49)$$

Pentru  $k < 0$ , în (1.48) și (1.49) se ia  $\hat{r}[k] = \hat{r}[-k]$ .

*Densitate de putere spectrală.* Considerăm un proces aleator staționar  $x[n]$  cu medie nulă și dorim să descriem distribuția în frecvență a energiei sale. Deoarece orice semnal  $x[n]$ , realizare a procesului, are energie infinită, nu putem folosi transformata Fourier pentru a calcula densitatea de energie spectrală  $|X(\omega)|^2$ . În schimb, putem evalua densitatea de putere spectrală, care se poate defini în două moduri, ambele inspirate de rezultate pentru semnale deterministe.

Pornind de la similaritatea dintre "autocorelațiile deterministe" (1.29) și cele aleatoare (1.45), densitatea de putere spectrală  $P(\omega)$  se definește ca transformata Fourier a secvenței de autocorelații

$$P(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r[k]e^{-j\omega k}. \quad (1.50)$$

O definiție echivalentă se obține aplicând relația generală "putere = energie/timp" și ținând seama de definiția densității de energie spectrală (vezi paragraful de după Teorema 1.13)

$$P(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{2N+1} \left| \sum_{n=-N}^N x[n]e^{-j\omega n} \right|^2 \right\}. \quad (1.51)$$

În definiția de mai sus, suma este o trunchiere de lungime  $2N+1$  a transformatei Fourier, împărțirea cu  $2N+1$  transformă energia în putere, iar operatorul  $E\{\cdot\}$  face medierea pe ansamblul realizărilor.

## Probleme rezolvate

**PR 1.4.1** Fie  $\xi$  o variabilă aleatoare cu media  $\mu$  și varianța  $\sigma^2$ . Demonstrați că:

**a.**  $E\{af(\xi) + bg(\xi)\} = aE\{f(\xi)\} + bE\{g(\xi)\}$ , pentru orice constante  $a, b$  și funcții  $f, g$ . În particular,  $E\{a\} = a$ .

**b.**  $E\{\xi - \mu\} = 0$ .

**c.**  $\sigma^2 = E\{\xi^2\} - \mu^2$ ;

*Soluție.* **a, b.** Se aplică definiția (1.39) și se folosește liniaritatea operatorului de integrare.

**c.** Avem  $\sigma^2 = E\{(\xi - \mu)^2\} = E\{\xi^2\} - 2\mu E\{\xi\} + \mu^2 = E\{\xi^2\} - \mu^2$ . Am folosit liniaritatea operatorului de mediere demonstrată mai sus. ■

**PR 1.4.2** Calculați media și varianța unei variabile aleatoare uniform distribuite în intervalul  $[0, 1]$ , i.e. cu densitatea de probabilitate (1.42). Ce valori au media și varianța în cazul în care variabila este uniform distribuită în intervalul  $[a, b]$ , unde  $a < b$  sunt constante reale.

*Soluție.* Media este

$$\mu = \int_0^1 \xi d\xi = 1/2,$$

iar varianța (aplicând punctul **c** de la problema precedentă) este

$$\sigma^2 = \int_0^1 \xi^2 d\xi - \mu^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Pentru o variabilă  $\xi$  uniform distribuită în intervalul  $[a, b]$ , densitatea de probabilitate este  $p(\xi) = 1/(b-a)$ . Media și varianța sunt

$$\mu = \frac{a+b}{2}, \quad \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Calcululele sunt lăsate cititorului. ■

**PR 1.4.3** Demonstrați că estimațiile (1.47) și (1.48) ale mediei, respectiv autocorelațiilor, sunt nedeviate, i.e.  $E\{\hat{\mu}\} = \mu$ , respectiv  $E\{\hat{r}[k]\} = r[k]$ .

*Soluție.* Aplicând operatorul de mediere în (1.47) obținem

$$E\{\hat{\mu}\} = E\left\{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\right\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} E\{x[n]\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu = \mu.$$

Pentru autocorelații demonstrația este similară. ■

**PR 1.4.4** Care este densitatea de putere spectrală a zgomotului alb (1.46) ?

*Soluție.* Ținând seama de definiția (1.50) a densității de putere spectrală și de expresiile autocorelațiilor (1.46), se obține imediat  $P(\omega) = \sigma^2$ . Așadar spectrul zgomotului alb este constant (zgomotul alb conține toate frecvențele cu putere egală, de aici numele său, prin analogie cu lumina). ■

## Probleme propuse

**PP 1.4.1** Considerăm o variabilă aleatoare  $\xi$  cu distribuție "triunghiulară", a cărei densitate de probabilitate are expresia:

$$p(\xi) = \begin{cases} 1 - |\xi|, & \text{pentru } |\xi| \leq 1, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Verificați valabilitatea relației (1.38). Calculați media (1.40) și varianța (1.41) variabilei aleatoare  $\xi$ .

**PP 1.4.2 a.** Dându-se o variabilă aleatoare cu distribuție uniformă în intervalul  $[0, 1]$ , cum se poate obține o variabilă cu distribuție uniformă în intervalul  $[a, b]$  ?

**b.** Dându-se o variabilă aleatoare cu distribuție gaussiană  $\mathcal{N}(0, 1)$ , cum se poate obține o variabilă cu distribuție  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$  ?

**PP 1.4.3** Fie  $w[n]$  un proces de tip zgomot alb pentru care, la fiecare moment de timp  $i$ , variabila aleatoare  $w[i]$  are distribuție uniformă în intervalul  $[-1, 1]$ .

**a.** Calculați varianța  $\sigma^2$  a zgomotului alb (vezi (1.46)).

**b.** Considerăm procesul aleator

$$u[n] = \begin{cases} w[n], & \text{pentru } n \text{ par,} \\ -w[n], & \text{pentru } n \text{ impar.} \end{cases}$$

Este acesta un zgomot alb ?

**c.** Considerăm procesul aleator

$$v[n] = \begin{cases} w[n], & \text{pentru } n \text{ par,} \\ 2w[n], & \text{pentru } n \text{ impar.} \end{cases}$$

Este acest proces staționar ?

**PP 1.4.4** Demonstrați că densitatea de putere spectrală  $P(\omega)$  a unui proces aleator real este pozitivă, pară (i.e.  $P(-\omega) = P(\omega)$ ) și periodică cu perioada  $2\pi$ .

## Ghid Matlab

Matlab posedă generatoare de numere (aproximativ) aleatoare. Un semnal aleator cu distribuție uniformă în intervalul  $[0, 1]$ , de lungime  $N$ , se poate genera cu

```
>> x = rand(1,N)
```

Un semnal aleator cu distribuție gaussiană de medie nulă și varianță egală cu 1 se poate genera cu

```
>> x = randn(1,N)
```

Media (1.47) a unui semnal aleator se calculează cu

```
>> mean(x)
```

Autocorelațiile nedeviate (1.48) se calculează cu

```
>> r = xcorr(x, 'unbiased')
```

iar cele deviate (1.49) cu

```
>> r = xcorr(x, 'biased')
```

În ambele cazuri, vectorul de autocorelații  $\mathbf{r}$  are lungimea  $2N - 1$ ; de altfel, aceasta este lungimea maximă permisă de suportul finit al semnalului, după cum se vede din (1.48) și (1.49).

Autocovarianțele se estimează cu funcția `xcov`. Atenție, în această funcție nu se folosește media exactă a procesului (care este necunoscută), ci estimăția ei (1.47).





## Capitolul 2

# Sisteme

### 2.1 Definiții și proprietăți de bază

În cea mai generală accepțiune, un sistem discret transformă un semnal de intrare  $x[n]$  într-un semnal de ieșire  $y[n]$ , așa cum este ilustrat în figura 2.1. Notăm  $y[n] = \mathcal{S}\{x[n]\}$  transformarea produsă de sistemul  $\mathcal{S}$ ; numim  $y[n]$  și răspuns al sistemului la intrarea  $x[n]$ . În prelucrarea semnalelor, sistemele sunt numite deseori *filtre*. Enumerăm în continuare patru proprietăți fundamentale ale sistemelor.

**Definiția 2.1 (Liniaritate)** *Un sistem  $\mathcal{S}$  este liniar dacă pentru orice semnale de intrare  $x_1[n]$ ,  $x_2[n]$  și orice scalari  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  are loc egalitatea*

$$\mathcal{S}\{\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]\} = \alpha_1 \mathcal{S}\{x_1[n]\} + \alpha_2 \mathcal{S}\{x_2[n]\}. \quad (2.1)$$

**Definiția 2.2 (Invariantă în timp)** *Sistemul  $\mathcal{S}$  este invariant în timp dacă pentru orice semnal de intrare  $x[n]$ , cu ieșirea corespunzătoare  $y[n] = \mathcal{S}\{x[n]\}$ , și orice întârziere  $n_0 \in \mathbb{Z}$ , aplicând semnalul  $x[n - n_0]$  la intrarea sistemului se obține ieșirea  $y[n - n_0]$ . (Altfel spus, întârziind cu  $n_0$  semnalul de intrare, se obține o ieșire întârziată tot cu  $n_0$ , conform schemei din figura 2.2, în care operațiile  $\mathcal{S}$  și "întârziere" comută.)*

**Definiția 2.3 (Cauzalitate)** *Sistemul  $\mathcal{S}$  este cauzal dacă, luând orice semnal de intrare  $x[n]$ , cu ieșirea corespunzătoare  $y[n] = \mathcal{S}\{x[n]\}$ , pentru orice  $n_0 \in \mathbb{Z}$ , valoarea  $y[n_0]$  depinde doar de intrările  $x[n]$ ,  $n \leq n_0$ . (Altfel spus, valoarea curentă a ieșirii depinde doar de valoarea curentă și de valori anterioare ale intrării.)*

**Definiția 2.4 (Stabilitate)** *Sistemul  $\mathcal{S}$  este stabil în sens BIBO (Bounded Input, Bounded Output—Intrare Mărginită, Ieșire Mărginită) dacă, pentru orice semnal de intrare  $x[n]$  mărginit, în sensul că există  $M_x$  astfel încât  $|x[n]| \leq M_x$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ , semnalul de ieșire  $y[n] = \mathcal{S}\{x[n]\}$  este și el mărginit, i.e. există  $M_y$  astfel încât  $|y[n]| \leq M_y$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ .*

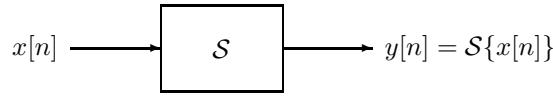
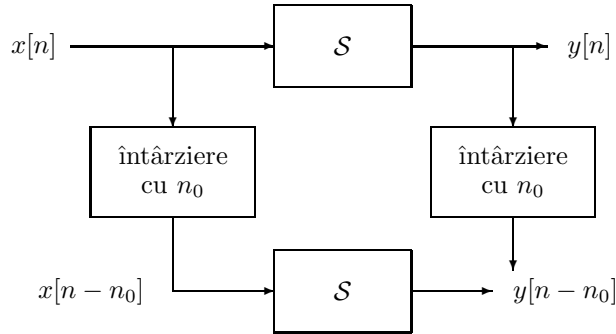


Figura 2.1: Un sistem discret.

Figura 2.2: Un sistem invariant în timp transferă întârzierea intrării la ieșire (operațiile  $S$  și "întârziere" comută).

### Probleme rezolvate

**PR 2.1.1** Caracterizați următoarele sisteme din punctul de vedere al liniarității, invarianței în timp, cauzalității și stabilității.

- Sistemul "medie pe două eșantioane", descris de relația  $y[n] = (x[n] + x[n - 1])/2$ .
- Decimatorul, descris de  $y[n] = x[Mn]$ , unde  $M \geq 2$  este un întreg pozitiv fixat. (Decimatorul extrage fiecare al  $M$ -lea eșantion al semnalului de intrare și le elimină pe celelalte.)
- Acumulatorul, descris de  $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$ .

*Soluție.* **a.** Sistemul este liniar, invariant în timp, cauzal și stabil. Deși banale, prezentăm mai jos demonstrațiile.

Fie  $y_1[n] = (x_1[n] + x_1[n - 1])/2$  și  $y_2[n] = (x_2[n] + x_2[n - 1])/2$  răspunsurile la intrările  $x_1[n]$ , respectiv  $x_2[n]$ . Dacă intrarea este  $\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]$ , atunci ieșirea este  $y[n] = (\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n] + \alpha_1 x_1[n - 1] + \alpha_2 x_2[n - 1])/2 = \alpha_1 y_1[n] + \alpha_2 y_2[n]$ , ceea ce demonstrează liniaritatea.

Dacă intrarea este  $x[n - n_0]$ , atunci ieșirea este  $(x[n - n_0] + x[n - n_0 - 1])/2 = y[n - n_0]$ , deci sistemul e invariant în timp.

$y[n]$  depinde doar de  $x[n]$  și de  $x[n - 1]$ , deci sistemul e cauzal.

Dacă  $|x[n]| \leq M_x$ , atunci  $|y[n]| \leq (|x[n]| + |x[n - 1]|)/2 \leq M_x$ , deci sistemul este stabil.

**b.** Decimatorul este evident liniar și stabil.

Nu este invariant în timp. Fie  $M = 2$  și semnalul de intrare  $x[n] = n$ . Atunci ieșirea este  $y[n] = x[2n] = 2n$ . Întârziem intrarea cu un eșantion; la intrarea

$x_1[n] = x[n-1]$  ieșirea este  $y_1[n] = x_1[2n] = x[2n-1] = 2n-1$ . Pe de altă parte, avem  $y[n-1] = 2(n-1) = 2n-2 \neq y_1[n]$ .

De asemenea, nu este cauzal, deoarece e.g.  $y[1] = x[M]$ , deci ieșirea la momentul  $n=1$  depinde de intrarea la momentul  $M > 1$ .

c. Acumulatorul este evident liniar, invariant în timp și cauzal.

Nu este stabil: pentru intrarea treaptă  $x[n] = u[n]$  se obține  $y[n] = (n+1)u[n]$ , care este un semnal nemărginit. ■

## Probleme propuse

**PP 2.1.1** Considerăm sistemul cu intrarea  $x[n]$  și ieșirea

$$y[n] = \begin{cases} x[n/2], & \text{dacă } n \text{ este par,} \\ x[(n-1)/2], & \text{altfel.} \end{cases}$$

a. Desenați un exemplu de semnale de intrare și ieșire.

b. Caracterizați sistemul din punctul de vedere al liniarității, invarianței în timp, cauzalității și stabilității.

**PP 2.1.2** Aceleași cerințe ca la problema anterioară, pentru sistemul cu intrarea  $x[n]$  și ieșirea  $y[n] = x[N-n]$ , unde  $N$  este un întreg dat.

**PP 2.1.3** Aceleași cerințe ca la problema anterioară, pentru sistemul cu intrarea  $x[n]$  și ieșirea  $y[n]$ , funcționând după legea  $y[n] = ny[n-1] + x[n]$ .

**PP 2.1.4** Demonstrați că dacă un sistem este liniar, atunci intrarea nulă  $x[n] = 0$  produce ieșirea nulă  $y[n] = 0$ . Arătați printr-un contraexemplu că reciproca nu este adevărată.

**PP 2.1.5** Fie  $\mathcal{S}$  un sistem invariant în timp.

a. Demonstrați că aplicând lui  $\mathcal{S}$  o intrare constantă se obține o ieșire constantă.

b. Demonstrați că aplicând lui  $\mathcal{S}$  o intrare periodică se obține o ieșire periodică, cu aceeași perioadă.

c. Arătați prin contraexemple că reciprocele afirmațiilor de mai sus nu sunt adevărate.

**PP 2.1.6** La intrarea unui sistem  $\mathcal{S}$  se aplică un semnal cu suport finit. Se constată că ieșirea este mărginită. Este sistemul stabil ?

**PP 2.1.7** Un sistem anticauzal are proprietatea că ieșirea  $y[n]$  depinde doar de intrări  $x[m]$ , cu  $m \geq n$ . Dați un exemplu de astfel de sistem.

**PP 2.1.8** Un sistem poate avea (sau nu) oricare dintre cele patru proprietăți descrise mai sus (liniaritate, invarianță în timp, cauzalitate, stabilitate) independent de celelalte. În total, sunt 16 combinații posibile ale acestor proprietăți. Dați câte un exemplu de sistem pentru fiecare combinație. (Notă: în problema **PR2.1.1** sunt deja prezentate trei astfel de exemple; vă mai rămân deci 13.)

## 2.2 Sisteme liniare invariante în timp

În restul capitolului ne ocupăm doar de sisteme liniare și invariante în timp (LIT), care au o importanță majoră în teoria și practica prelucrării semnalelor. Fie  $\mathcal{S}$  un sistem LIT și  $h[n] = \mathcal{S}\{\delta[n]\}$  răspunsul la impuls al sistemului ( $h[n]$  se mai numește și secvență pondere a sistemului).

**Propoziția 2.5** *Răspunsul la impuls  $h[n]$  al unui sistem LIT  $\mathcal{S}$  caracterizează complet funcționarea sistemului. Dacă  $x[n]$  este un semnal de intrare oarecare, atunci ieșirea  $y[n] = \mathcal{S}\{x[n]\}$  este dată de relația*

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k], \quad (2.2)$$

adică este convoluția dintre semnalul de intrare și răspunsul la impuls al sistemului.

*Demonstrație.* Deoarece sistemul este invariant în timp, avem  $h[n-k] = \mathcal{S}\{\delta[n-k]\}$ . Folosind expresia (1.2) pentru semnalul de intrare, obținem

$$y[n] = \mathcal{S}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right\} \stackrel{\text{lin.}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\mathcal{S}\{\delta[n-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k].$$

Expresia din dreapta din (2.2) rezultă datorită comutativității convoluției. ■

Prezentăm în continuare caracteristicile răspunsului la impuls atunci când sistemul LIT este cauzal sau stabil.

**Propoziția 2.6** *Un sistem LIT este cauzal dacă și numai dacă răspunsul său la impuls este nul pentru timp negativ, i.e.  $h[n] = 0$  pentru  $n < 0$ .*

*Demonstrație.* Din (2.2) rezultă că  $y[n]$  depinde doar de  $x[k]$ , cu  $k \leq n$ , dacă și numai dacă  $h[n-k] = 0$  pentru  $k > n$ , adică  $h[n] = 0$ , pentru  $n < 0$ . ■

**Propoziția 2.7** *Un sistem LIT este stabil dacă și numai dacă răspunsul său la impuls este absolut sumabil.*

*Demonstrație.* (" $\Rightarrow$ ") Folosim reducerea la absurd: presupunem că  $h[n]$  nu este absolut sumabil. Construim semnalul de intrare

$$x[n] = \begin{cases} \frac{h^*[-n]}{|h[-n]|}, & \text{dacă } h[n] \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } h[n] = 0. \end{cases}$$

În acest caz, pentru  $y[0]$  obținem valoarea

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|h[k]|^2}{|h[k]|} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|,$$

care nu e mărginită, deci sistemul nu ar fi stabil.

("⇐") Deoarece  $h[n]$  este absolut sumabil, există  $M_h$  astfel încât  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| \leq M_h$ . Fie  $x[n]$  o intrare mărginită, pentru care  $|x[n]| \leq M_x, \forall n \in \mathbb{Z}$ . Atunci avem

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| |x[n-k]| \leq M_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \leq M_x M_h,$$

și deci ieșirea este mărginită, adică sistemul este stabil. ■

**Definiția 2.8** Funcția de transfer a unui sistem LIT este transformata Z a răspunsului său la impuls

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}. \quad (2.3)$$

**Propoziția 2.9** Fie  $X(z), Y(z)$  transformatele Z ale semnalelor de intrare, respectiv ieșire ale unui sistem LIT cu funcția de transfer  $H(z)$ . Atunci este adevărată relația

$$Y(z) = H(z)X(z). \quad (2.4)$$

*Demonstrație.* Aplicăm transformata Z relației (2.2), unde termenii din dreapta reprezintă o convoluție, deci (2.4) rezultă imediat din (1.37). ■

Sistemele (filtrele) se împart în două mari categorii, după suportul răspunsului lor la impuls, care poate fi finit sau infinit. În primul caz, filtrele sunt numite FIR (Finite Impulse Response—"răspuns finit la impuls"; păstrăm abrevierea din engleză deoarece s-a consacrat și în română). În cazul suportului infinit, filtrele sunt numite IIR (Infinite Impulse Response). Prezentăm în continuare câteva caracteristici importante ale celor două tipuri de filtre.

## Filtre FIR

Un filtru FIR are funcția de transfer

$$H_1(z) = \sum_{n=-M_1}^{M_2} h[n]z^{-n}. \quad (2.5)$$

Este evident că suportul răspunsului la impuls este  $-M_1 : M_2$ , i.e. finit.

Dacă filtrul FIR este *cauzal*, atunci, ținând seama de Propoziția 2.6, funcția sa de transfer este

$$H(z) = \sum_{n=0}^M h[n]z^{-n}. \quad (2.6)$$

Această formă va fi folosită în continuare, având în vedere că, luând  $M = M_1 + M_2$ , avem  $H(z) = z^{-M_1} H_1(z)$  (o simplă întârziere face filtrul (2.5) cauzal).

Numim  $M$  *ordinul* (sau *gradul*) filtrului. Observăm că un filtru de ordin  $M$  are  $M + 1$  coeficienți (în general) nenuli: *lungimea* filtrului este  $M + 1$ .

**Propoziția 2.10** Orice filtru FIR este stabil.

*Demonstrație.* Deoarece suma  $\sum_{n=0}^M |h[n]|$  are un număr finit de termeni, ea este finită, deci filtrul e stabil. ■

Dacă la intrarea filtrului FIR cauzal (2.6) se aplică semnalul  $x[n]$ , atunci, conform cu (2.2), ieșirea  $y[n]$  este

$$y[n] = \sum_{k=0}^M h[k]x[n-k], \quad (2.7)$$

adică eșantionul curent  $n$  al ieșirii depinde doar de cele mai recente  $M+1$  eșantioane ale intrării. Să notăm că filtrele FIR mai sunt numite, în anumite contexte (e.g. în identificarea sistemelor), și sisteme MA (Moving Average—”medie alunecătoare”), deoarece formula (2.7) poate fi interpretată în sens larg ca o medie (ponderată) a celor mai recente eșantioane ale intrării.

Datorită simplității lor, a implementării facile, stabilității implicite și, după cum vom vedea mai târziu, a metodelor rapide de proiectare, filtrele FIR sunt extrem de utilizate în practică.

(Mai observăm că o funcție de transfer ca (2.6), formată numai din numitor, nu există pentru sistemele continue.)

## Filtre IIR

Între filtrele IIR sunt interesante cele care au o funcție de transfer rațională, i.e.

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{n=0}^M b_n z^{-n}}{\sum_{n=0}^N a_n z^{-n}}, \quad (2.8)$$

unde de obicei  $a_0 = 1$  (în caz contrar, se împart și numitorul și numărătorul la  $a_0$ ). Filtrul (2.8) este cauzal; filtre IIR necauzale se obțin înmulțind  $H(z)$  cu  $z^m$ , cu  $m > 0$ . Observăm că, în general, gradul numărătorului poate fi diferit de gradul numitorului. Ordinul filtrului este  $\max(M, N)$ .

Funcția de transfer  $H(z)$  este reprezentată în (2.8) cu ajutorul coeficienților. O reprezentare echivalentă este forma poli-zerouri, în care avem

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}. \quad (2.9)$$

În formula de mai sus,  $c_k$ ,  $k = 1 : M$ , sunt zerourile funcției de transfer, iar  $d_k$ ,  $k = 1 : N$ , sunt polii funcției, i.e. rădăcinile polinoamelor  $B(z)$ , respectiv  $A(z)$ , din (2.8). Pentru evitarea ambiguităților, precizăm că rădăcinile polinomului  $A(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^{-n}$  sunt soluțiile ecuației  $A(z) = 0$  sau, echivalent, ale ecuației

$z^N A(z) = 0$ , adică  $\sum_{n=0}^N a_n z^{N-n} = 0$ . (Mai riguros este să se considere numărul de poli egal cu cel de zerouri; în acest caz, dacă  $M > N$  se adaugă  $M - N$  poli la valorile  $d_k$ , iar dacă  $M < N$  se adaugă  $N - M$  zerouri la valorile  $c_k$ ; polii sau zerourile suplimentari sunt plasați în origine.)

În general, polii și zerourile au valori complexe. Dacă funcția de transfer are coeficienți reali (cazul obișnuit), atunci valorile complexe apar în perechi complex conjugate.

**Propoziția 2.11** *Un filtru IIR este stabil dacă toți polii săi sunt în interiorul cercului unitate.*

Putem asocia filtrului IIR (2.8) o ecuație cu diferențe, care rezultă imediat din (2.4), ținând seama de semnificația de operator de întârziere a lui  $z^{-1}$ :

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]. \quad (2.10)$$

Cu  $a_0 = 1$ , relația precedentă poate indica un mod recurent de calcul al ieșirii

$$y[n] = - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]. \quad (2.11)$$

Așadar, eșantionul curent al ieșirii depinde de cele mai recente  $M + 1$  eșantioane ale intrării, dar și de precedentele  $N$  eșantioane ale intrării.

Presupunând de exemplu că semnalul de intrare satisface  $x[n] = 0$  pentru  $n < 0$ , observăm că ieșirea se poate calcula cu ajutorul recurenței (2.11) doar dacă se cunosc valorile  $y[-N], \dots, y[-1]$ , care au rol de condiții inițiale. Ecuația cu diferențe (2.11) este un model mai general decât funcția de transfer (2.8); deoarece funcția de transfer este cauzală, este clar că modelele (2.8) și (2.11) sunt echivalente dacă  $y[n] = 0$  pentru  $n < 0$ , deci condițiile inițiale pentru (2.11) sunt nule.

Un caz particular de filtru IIR este cel de forma

$$H(z) = \frac{1}{A(z)}, \quad (2.12)$$

numit și filtru AR (AutoRegresiv); numele este natural dacă observăm că ecuația cu diferențe asociată filtrului este

$$y[n] = - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + x[n], \quad (2.13)$$

adică, lăsând  $x[n]$  la o parte, semnalul  $y[n]$  se obține combinând versiuni întârziate (regresate) ale lui însuși.

## Probleme rezolvate

**PR 2.2.1** Care sunt răspunsurile la impuls ale sistemelor din problema **PR2.1.1** ?

*Soluție.* Sistemul "medie pe două eșantioane" are răspunsul  $h[0] = h[1] = 1/2$  și zero în rest.

Răspunsul la impuls al decimatorului este  $\delta[n]$ . Atenție însă, acest sistem nu e invariant în timp, deci rezultatele din această secțiune nu i se aplică.

Acumulatorul are răspunsul la impuls  $h[n] = u[n]$ . ■

**PR 2.2.2** Semnalul  $x[n] = (-1)^n$  se aplică la intrarea filtrului  $H(z) = (1 + z^{-1})/2$ . Care este semnalul de ieșire ?

*Soluție.*  $y[n] = (x[n] + x[n-1])/2 = ((-1)^n + (-1)^{n-1})/2 = 0$ . ■

**PR 2.2.3** La intrarea filtrului FIR (2.6) se aplică un semnal  $x[n]$  cu suport  $0 : L$ , unde  $L$  este un întreg pozitiv dat. Ce suport are semnalul de ieșire ?

*Soluție.* Din (2.7) rezultă că eșantionul curent al ieșirii  $y[n]$  depinde doar de cele mai recente  $M + 1$  eșantioane ale intrării. Printre acestea trebuie să se găsească cel puțin unul nenul; ultimul moment de timp la care se întâmplă aceasta este  $L + M$ , adică  $y[n] = 0$  pentru  $n > L + M$ . Cum  $y[n] = 0$  pentru  $n < 0$  (datorită cauzalității), rezultă că suportul semnalului de ieșire este  $0 : L + M$ .

Altă soluție: deoarece  $Y(z) = H(z)X(z)$ , iar  $H(z)$  și  $X(z)$  sunt polinoame de grad  $M$ , respectiv  $L$  (în  $z^{-1}$ ), rezultă că  $Y(z)$  este un polinom de grad  $L + M$ . Așadar, suportul lui  $y[n]$  este  $0 : L + M$ . ■

## Probleme propuse

**PP 2.2.1** Demonstrați că răspunsul la impuls al unui sistem stabil are întotdeauna transformată Fourier (în sensul că (1.10) converge pentru orice  $\omega$ ).

**PP 2.2.2** Calculați ieșirea filtrului  $H(z) = 1 - 2z^{-1}$  atunci când intrarea este semnalul cu suport  $n = 0 : 3$  ale cărui eșantioane nenule au valorile, în ordine, 1, -1, 1, 2.

**PP 2.2.3** Dați un exemplu de filtru IIR necauzal, dar stabil.

**PP 2.2.4** Scrieți ecuația cu diferențe asociată acumulatorului, descris de relația intrare-ieșire  $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$ .

**PP 2.2.5** Scrieți ecuația cu diferențe corespunzătoare filtrului

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1} + z^{-2}}.$$

Care sunt polii și zerourile acestui filtru ?

**PP 2.2.6** Demonstrați că filtrul IIR cu funcția de transfer  $H(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}}$  este instabil calculând răspunsul acestuia la impuls.

**PP 2.2.7** Care este mulțimea polinoamelor de gradul doi cu coeficienți reali, de forma  $A(z) = 1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}$ , care au rădăcinile în interiorul cercului unitate ? (Aceste polinoame pot fi numitoare ale unor filtre IIR stabile.)



## Ghid Matlab

Un polinom  $A(z)$  se reprezintă în Matlab printr-un vector linie în care coeficienții sunt așezați în ordine descrescătoare a puterilor lui  $z$ . De exemplu, polinomul  $A(z) = 1 - 0.7z^{-1} + 0.1z^{-2}$  se reprezintă prin vectorul

```
>> a = [1 -0.7 0.1]
```

De asemenea, un polinom monic (i.e. al cărui prim coeficient este 1) se poate reprezenta printr-un vector coloană conținând rădăcinile polinomului. Așadar  $A(z) = 1 - 0.7z^{-1} + 0.1z^{-2} = (1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.2z^{-1})$  se poate reprezenta prin vectorul

```
>> ra = [0.5; 0.2]
```

Rădăcinile unui polinom se calculează din coeficienți prin

```
>> ra = roots(a)
```

iar coeficienții se calculează din rădăcini prin

```
>> a = poly(ra)
```

Un filtru IIR se reprezintă prin două polinoame, unul pentru numărător, altul pentru numitor. Modelul uzual presupune reprezentarea polinoamelor prin coeficienți, ca în (2.8). De exemplu, filtrul IIR

$$H(z) = \frac{2 + z^{-1}}{1 - 0.7z^{-1} + 0.1z^{-2}}$$

se reprezintă prin

```
>> b = [2 1], a = [1 -0.7 0.1]
```

Modelul poli-zero-uri (2.9) doi vectori conținând rădăcinile polinoamelor  $B(z)$  și  $A(z)$  și un scalar conținând amplificarea  $b_0/a_0$ . Conversia între modelele (2.8) și (2.9) se face prin funcțiile

```
>> [rb, ra, k0] = tf2zp(b, a)
>> [b, a] = zp2tf(rb, ra, k0)
```

Desigur, pentru un filtru FIR se ia

```
>> a = 1
```

Calculul ieșirii unui filtru IIR, atunci când la intrare se aplică un semnal  $x[n]$  cu suport finit, se face utilizând ecuația cu diferențe (2.11). Presupunând condiții inițiale nule și semnalul de intrare memorat într-un vector  $\mathbf{x}$ , ieșirea se calculează cu

```
>> y = filter(b, a, x)
```

Semnalul de ieșire are același suport ca semnalul de intrare.

## 2.3 Reprezentarea în frecvență a sistemelor LIT

**Propoziția 2.12** Considerăm un sistem LIT stabil, al cărui răspuns la impuls este  $h[n]$ . Fie  $H(z)$  funcția sa de transfer și

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} \quad (2.14)$$

transformata Fourier a răspunsului la impuls. Dacă la intrarea sistemului se aplică semnalul sinusoidal complex  $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ , atunci ieșirea este semnalul sinusoidal

$$y[n] = H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n} = |H(e^{j\omega_0})|e^{j(\omega_0 n + \arg H(e^{j\omega_0}))}. \quad (2.15)$$

*Demonstrație.* Pornim de la (2.2) și obținem

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\omega_0(n-k)} = \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega_0 k} \right) e^{j\omega_0 n},$$

i.e. chiar (2.15). ■

**Observația 2.13** Relația (2.15) spune că răspunsul unui sistem LIT la intrare sinusoidală de frecvență  $\omega_0$  (de amplitudine 1 și fază nulă) este tot o sinusoidă, cu aceeași frecvență, a cărei amplitudine și fază depind de valoarea, la frecvența  $\omega_0$ , a transformatei Fourier (2.14) a răspunsului la impuls  $h[n]$ . Mai precis, amplitudinea ieșirii este  $|H(e^{j\omega_0})|$ , iar faza  $\arg H(e^{j\omega_0})$ .

Mai mult, dacă intrarea  $x[n]$  este un semnal oarecare, a cărui transformată Fourier  $X(e^{j\omega})$  există, atunci ieșirea are transformata Fourier  $Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$ . Așadar, spectrul semnalului de ieșire este, la fiecare frecvență  $\omega$ , produsul dintre valoarea spectrului intrării la frecvența  $\omega$  și  $H(e^{j\omega})$ .

Denumirea de *filtru* ca sinonim pentru *sistem*, utilizată în prelucrarea semnalelor, provine din proprietatea sistemelor de a modifica spectrul semnalelor de intrare, de a trata în mod diferit semnale de frecvențe diferite, pe scurt de a filtra semnale.

**Definiția 2.14** Transformata Fourier (2.14) a răspunsului la impuls a unui sistem se numește răspuns în frecvență al sistemului. De asemenea, în special pentru reprezentarea grafică a răspunsului în frecvență, se folosește denumirea de caracteristică de frecvență a sistemului.

**Observația 2.15** Dacă  $H(z)$  are coeficienți reali, se reprezintă amplitudinea  $|H(e^{j\omega})|$  și faza  $\arg H(e^{j\omega})$  pentru  $\omega \in [0, \pi]$ ; pentru  $\omega \in [-\pi, 0]$  se ține seama de proprietățile de simetrie (1.17) (amplitudinea este pară, iar faza impară). În cazul funcțiilor de transfer cu coeficienți complecși, mai rar utilizate în practică, se ia  $\omega \in [-\pi, \pi]$ .

Amplitudinea se măsoară deseori în decibeli (dB), caz în care se reprezintă grafic funcția  $|H(e^{j\omega})|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |H(e^{j\omega})|$ . Amplitudinea  $|H(e^{j\omega})|_{\text{dB}}$  este numită și amplificare, iar opusul ei,  $-|H(e^{j\omega})|_{\text{dB}}$ , atenuare. (Denumirile sunt naturale având în vedere (2.15).)

Deoarece exponențiala complexă este o funcție periodică, de perioadă  $2\pi$ , faza se poate reprezenta doar cu valori în intervalul  $[-\pi, \pi]$ , prin adunarea sau scăderea

în mod adecvat a unor multipli de  $2\pi$ ; se obține astfel *valoarea principală* a fazei, notată  $\text{ARG}[H(e^{j\omega})]$ . Aceasta este folosită întotdeauna atunci când faza unui filtru este calculată numeric.

În unele lucrări, precum și în funcțiile Matlab dedicate reprezentării caracteristicilor de frecvență, frecvența este normalizată la intervalul  $[0, 1]$ , în sensul că în loc de  $\omega \in [0, \pi]$ , se folosește frecvența normalizată  $\omega/\pi \in [0, 1]$ .

*Interpretare pentru procese aleatoare.* Răspunsul în frecvență al unui sistem LIT arată și felul în care sistemul filtrează o intrare care reprezintă un proces aleator.

**Propoziția 2.16** *Considerăm un sistem LIT stabil, cu răspunsul la impuls  $h[n]$  și răspunsul în frecvență  $H(e^{j\omega})$ , la intrarea căruia se află un semnal aleator  $x[n]$  cu densitatea de putere spectrală  $P_{xx}(\omega)$  (vezi definiția acesteia în (1.50)). Atunci ieșirea  $y[n]$  a sistemului are densitatea de putere spectrală*

$$P_{yy}(\omega) = P_{xx}(\omega)|H(e^{j\omega})|^2. \quad (2.16)$$

*Așadar, puterea semnalului  $x[n]$  într-o anumită frecvență este multiplicată la ieșire cu pătratul amplitudinii răspunsului sistemului pentru acea frecvență.*

*Demonstrație.* Notând  $r_{xx}[k] = E\{x[n]x[n-k]\}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , autocorelațiile semnalului de intrare, și ținând seama că ieșirea este

$$y[n] = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h[\ell]x[n-\ell],$$

autocorelațiile ieșirii au expresia (mai departe ometem limitele de sumare, care sunt  $-\infty$  și  $\infty$ )

$$\begin{aligned} r_{yy}[k] &\stackrel{\text{def}}{=} E\{y[n]y[n-k]\} \\ &= E\left\{\sum_{\ell} h[\ell]x[n-\ell] \sum_i h[i]x[n-k-i]\right\} \\ &= \sum_{\ell} \sum_i h[\ell]h[i]r_{xx}[k+i-\ell]. \end{aligned}$$

Deci, densitatea de putere spectrală a ieșirii este

$$\begin{aligned} P_{yy}(\omega) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{yy}[k]e^{-j\omega k} \\ &= \sum_k \sum_{\ell} \sum_i h[\ell]h[i]r_{xx}[k+i-\ell]e^{-j\omega k} \\ &= \sum_{\ell} h[\ell]e^{-j\omega\ell} \sum_i h[i]e^{j\omega i} \sum_k r_{xx}[k+i-\ell]e^{-j\omega(k+i-\ell)} \\ &= H(\omega)H^*(\omega)P_{xx}(\omega) \end{aligned}$$

ceea ce demonstrează (2.16). ■

## Caracteristica de frecvență a filtrelor raționale

În cazul filtrelor IIR raționale (de acum înainte vom subînțelege că filtrele IIR de care discutăm sunt raționale), caracteristica de frecvență se poate trasa mai ușor atunci când funcția de transfer se reprezintă în forma poli-zero-uri (2.9). Această reprezentare are avantajul că poate fi analizată prin studierea caracteristicilor de frecvență ale funcțiilor de transfer de grad 1. Mai precis, amplitudinea în decibeli este

$$|H(e^{j\omega})|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \left| \frac{b_0}{a_0} \right| + 20 \sum_{k=1}^M \log_{10} |1 - c_k e^{-j\omega}| - 20 \sum_{k=1}^N \log_{10} |1 - d_k e^{-j\omega}|, \quad (2.17)$$

iar faza se poate scrie ca

$$\arg|H(e^{j\omega})| = \arg\left(\frac{b_0}{a_0}\right) + \sum_{k=1}^M \arg(1 - c_k e^{-j\omega}) - \sum_{k=1}^N \arg(1 - d_k e^{-j\omega}). \quad (2.18)$$

Se observă deci că în (2.17) și (2.18) apar sume ale amplitudinilor, respectiv fazelor unor termeni elementari de gradul 1 (dar cu coeficienți complecși, în general). Mai mult, singura diferență între efectul polilor și cel al zerourilor este semnul termenilor corespunzători. De aceea, este justificat studiul funcției de transfer cu un singur zero, efectuat în continuare.

*Filtrul FIR de ordinul 1.* Studiem caracteristica de frecvență a filtrului

$$H(z) = 1 - cz^{-1}, \quad c = re^{j\theta}, \quad r \in [0, 1], \quad \theta \in [0, \pi]. \quad (2.19)$$

Așadar, zero-ul  $c$  este în general complex, de modul  $r$  și fază  $\theta$ . Restricția modulului la valori subunitare va fi justificată ulterior. Ca și restricția asupra fazei, ea nu limitează generalitatea concluziilor.

Amplitudinea răspunsului în frecvență al filtrului (2.19) este

$$|H(e^{j\omega})|^2 = |1 - re^{j(\theta-\omega)}|^2 = 1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \theta).$$

(Am ridicat la pătrat pentru simplitatea calculelor. În decibeli, amplitudinea originală se obține simplu ca  $|H(e^{j\omega})|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |H(e^{j\omega})| = 10 \log_{10} |H(e^{j\omega})|^2$ .) Se observă că valoarea maximă a amplitudinii este  $(1+r)$  pentru  $\omega = \theta \pm \pi$ , iar valoarea minimă este  $(1-r)$ , pentru  $\omega = \theta$ . Prezentăm în figura 2.3 amplitudinea pentru  $\theta = 0$  (deci zero real) și trei valori  $r = 0.5, 0.8, 1$ . Pentru comparație, în graficul de sus amplitudinea este reprezentată adimensional, iar în cel din mijloc în decibeli. (Amintim că  $20 \log_{10} 2 \approx 6$  și că, evident,  $20 \log_{10} 1 = 0$ ,  $20 \log_{10} 0.2 \approx -14$ .) Frecvența este normalizată, deci 2 înseamnă de fapt  $2\pi$ . Grafice similare sunt prezentate în figura 2.4, pentru  $\theta = 0.4\pi$ .

Observăm că cu cât  $r$  este mai aproape de 1 (i.e. zero-ul este mai aproape de cercul unitate), cu atât atenuarea în jurul frecvenței  $\omega = \theta$  este mai mare. În particular, atunci când  $r = 1$ , deci zero-ul este pe cerc, avem  $H(e^{j\theta}) = 0$  (și  $|H(e^{j\theta})|_{\text{dB}} = -\infty$ ), deci amplificarea filtrului la această frecvență este nulă; semnalele sinusoidale cu frecvența  $\theta$  sunt tăiate complet de filtru.

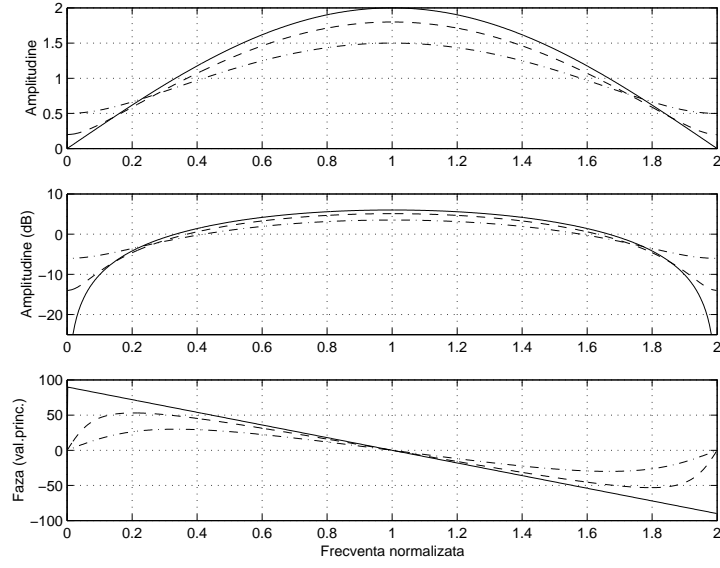


Figura 2.3: Caracteristica de frecvență a filtrului (2.19), pentru  $\theta = 0$ ,  $r = 1$  (linie continuă),  $r = 0.8$  (linie întreruptă),  $r = 0.5$  (linie-punct).

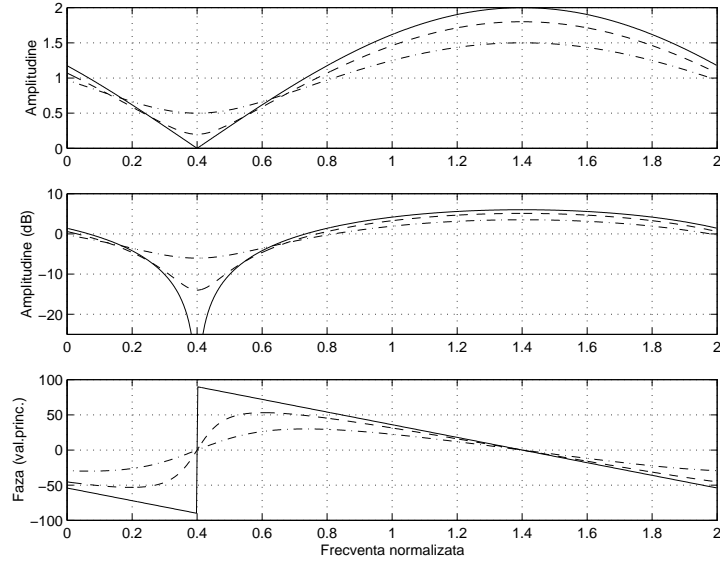


Figura 2.4: Caracteristica de frecvență a filtrului (2.19), pentru  $\theta = 0.4\pi$ ,  $r = 1$  (linie continuă),  $r = 0.8$  (linie întreruptă),  $r = 0.5$  (linie-punct).

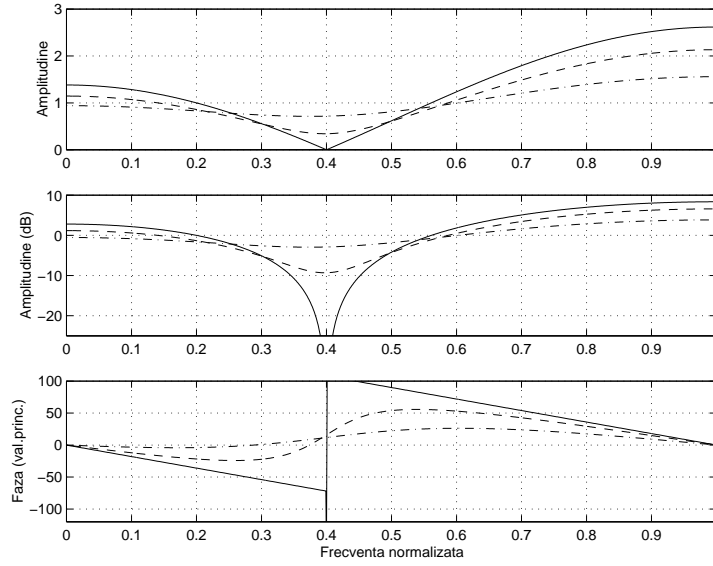


Figura 2.5: Caracteristica de frecvență a filtrului (2.20), pentru  $\theta = 0.4\pi$ ,  $r = 1$  (linie continuă),  $r = 0.8$  (linie întreruptă),  $r = 0.5$  (linie-punct).

Deoarece răspunsul în frecvență al filtrului (2.19) este

$$H(e^{j\omega}) = 1 - r \cos(\omega - \theta) + jr \sin(\omega - \theta),$$

valoarea principală a fazei este

$$\text{ARG}[H(e^{j\omega})] = \arctg\left(\frac{r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)}\right).$$

În partea de jos a figurilor 2.3 și 2.4 sunt prezentate grafice de fază respectând expresia de mai sus; faza este măsurată în grade.

*Filtrul FIR de ordinul 2.* În general, funcțiile de transfer ale filtrelor au coeficienți reali. De aceea este interesant să studiem răspunsul în frecvență al unui filtru FIR de ordinul 2, cu zerouri complex conjugate. Așadar, zerourile sunt  $c = re^{j\theta}$  și  $c^* = re^{-j\theta}$ , iar funcția de transfer are forma

$$H(z) = (1 - cz^{-1})(1 - c^*z^{-1}) = 1 - 2r \cos \theta \cdot z^{-1} + r^2 z^{-2}. \quad (2.20)$$

Amplitudinea răspunsului în frecvență, în decibeli, se obține adunând două amplitudini de tipul celor prezentate în figurile 2.3 și 2.4, corespunzătoare valorilor  $\theta$  și  $-\theta$ . Similar, faza se obține adunând fazele corespunzătoare factorilor de grad 1 ai lui (2.20). Prezentăm caracteristica de frecvență a filtrului (2.20) în figura 2.5, pentru  $\theta = 0.4\pi$ . Deoarece coeficienții filtrului sunt reali, graficul amplitudinii este simetric față de  $\omega = 0$  și deci este suficientă desenarea lui pentru intervalul  $[0, \pi]$  (normalizat  $[0, 1]$ ).

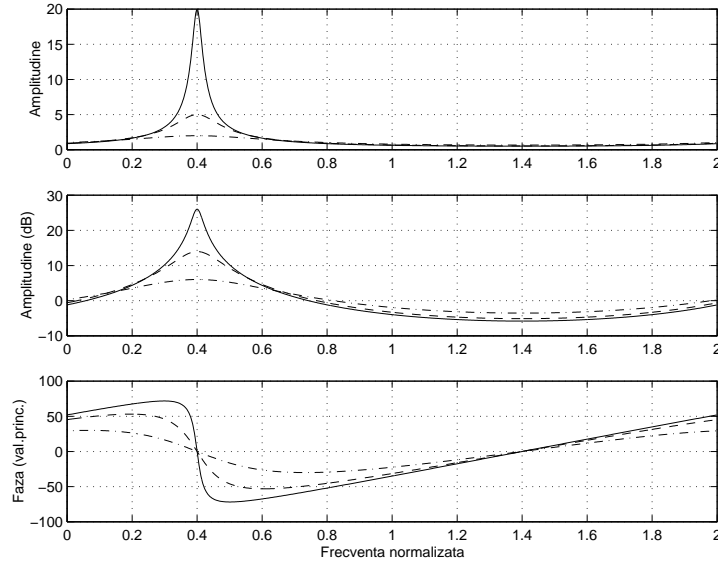


Figura 2.6: Caracteristica de frecvență a filtrului (2.21), pentru  $\theta = 0.4\pi$ ,  $r = 0.95$  (linie continuă),  $r = 0.8$  (linie întreruptă),  $r = 0.5$  (linie-punct).

*Filtre AR cu un singur pol.* Caracteristica de frecvență a filtrului

$$H(z) = \frac{1}{1 - cz^{-1}}, \quad (2.21)$$

i.e. a inversului filtrului (2.19)—al cărui răspuns în frecvență se presupune cunoscut—se obține imediat. Atât amplitudinea în decibeli cât și faza filtrului (2.21) sunt opusele analogelor lor pentru filtrul (2.19). Exemple de răspuns în frecvență al filtrului (2.21) sunt prezentate în figura 2.6; pentru comparație, revedeți figura 2.4, pentru filtrele FIR cu un singur zero; graficele din figura 2.6 se obțin prin oglindirea față de abscisă a celor din figura 2.4. (De notat că nu am reprezentat răspunsul filtrului (2.21) cu  $r = 1$ , care are un pol pe cercul unitate, i.e. este instabil.)

*Legătura dintre diagrama poli-zero și caracteristica de frecvență.* Din cele prezentate mai sus rezultă că poziția în planul complex a polilor și zerourilor unui filtru dă informații importante despre caracteristica de frecvență a filtrului. Influența polilor și zerourilor este cu atât mai mare cu cât sunt mai aproape de cercul unitate. În linii mari, un zero de fază  $\theta$  situat în apropierea cercului unitate implică o atenuare mare a răspunsului la frecvența  $\theta$ . Dimpotrivă, un pol de fază  $\theta$  înseamnă o amplificare mare la frecvența  $\theta$ , sau, în orice caz, o creștere a amplificării în preajma frecvenței  $\theta$ . Pentru ilustrare, prezentăm în figura 2.7 caracteristicile de frecvență a două filtre IIR cu doi poli și trei zerouri. Zerourile filtrelor sunt identice și se află pe cercul unitate, având valorile  $j = e^{j\pi/2}$ ,  $-j = e^{-j\pi/2}$  și  $-1 = e^{j\pi}$ . În consecință, amplitudinea răspunsului în frecvență este nulă la frecvențele  $\pi/2$  și  $\pi$ . Pentru primul filtru (graficele de sus), polii (complex conjugați) au modul 0.9 și argument  $\pi/4$ . Deoarece polii sunt aproape de cercul unitate, amplitudinea răspunsului în

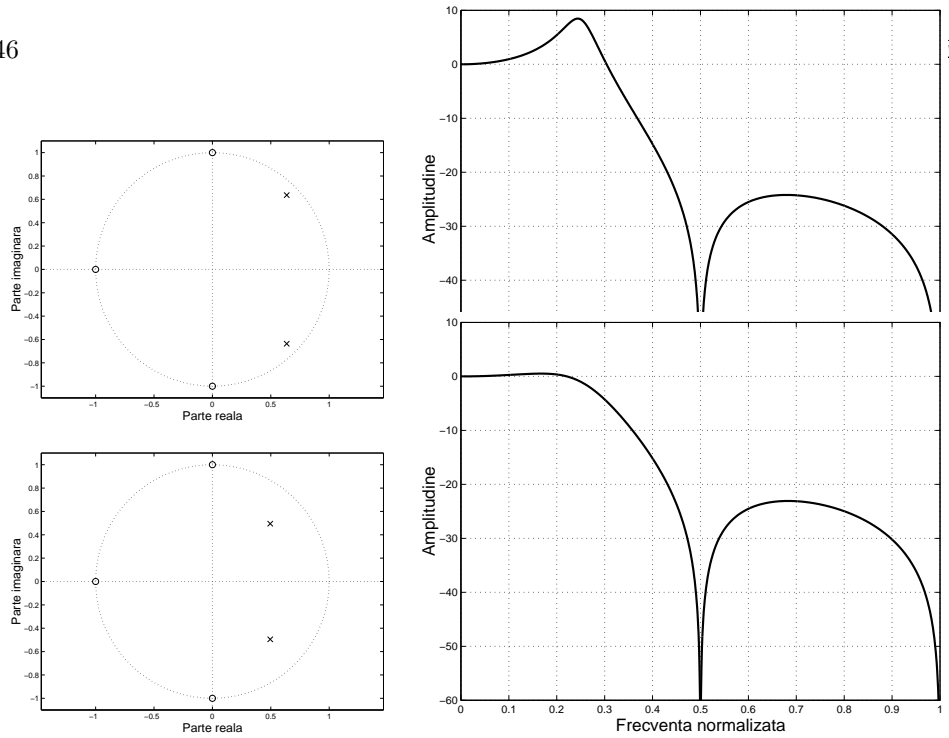


Figura 2.7: Diagrame poli-zero (stânga) și caracteristici de frecvență (dreapta) pentru două filtre IIR cu doi poli și trei zero-uri.

frecvență are valori mari în jurul frecvenței  $\pi/4$ . Pentru al doilea filtru, modulul polilor este 0.7, iar efectul lor e mai puțin sesizabil. Deși amplitudinea răspunsului în frecvență nu mai este mare la  $\omega = \pi/4$ , totuși polii au ca efect palierul aproape orizontal în intervalul  $[0, \pi/4]$ . (Anticipând capitolul despre proiectarea filtrelor, observăm că al doilea filtru are o caracteristică de tip trece-jos; modulul polilor a fost ales special pentru a o obține.)

## Probleme rezolvate

**PR 2.3.1** Fie sistemul "întârziere pură" descris de  $y[n] = x[n - n_0]$ , unde  $n_0$  este un întreg pozitiv. Reprezentați caracteristica sa de frecvență.

*Soluție.* Funcția de transfer este  $H(z) = z^{-n_0}$ , deci  $H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0}$ . Amplitudinea este  $|H(e^{j\omega})| = 1$ , iar faza  $\arg H(e^{j\omega}) = -\omega n_0$  este liniară în  $\omega$ . (Reprezentarea grafică rămâne cititorului.) ■

**PR 2.3.2** Considerăm  $H(z) = (1 + z^{-1})/2$ , filtrul FIR "medie pe două eșantioane".

- Reprezentați caracteristica sa de frecvență.
- Care este răspunsul filtrului la intrarea  $x[n] = \cos(\omega_0 n)$ , cu  $\omega_0 \in [-\pi, \pi]$  dat? Exemplu numeric:  $\omega_0 = \pi/3$ .



*Soluție. a.* Avem

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 + e^{-j\omega}}{2} = e^{-j\omega/2} \left( \frac{e^{j\omega/2} + e^{-j\omega/2}}{2} \right) = \cos(\omega/2) \cdot e^{-j\omega/2}$$

și deci pentru  $\omega \in [0, \pi]$  obținem

$$|H(e^{j\omega})| = \cos(\omega/2), \quad \arg H(e^{j\omega}) = -\omega/2.$$

Caracteristica de frecvență este prezentată în figura 2.8. Remarcați normalizarea frecvenței (abscisa 1 înseamnă  $\omega = \pi$ ) și reprezentarea fazei în grade (nu radiani).

**b.** Deoarece

$$\cos(\omega_0 n) = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}),$$

răspunsul filtrului este

$$y[n] = \frac{1}{2} (H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n} + H(e^{-j\omega_0})e^{-j\omega_0 n}).$$

Deoarece  $H(z)$  are coeficienți reali și deci  $H(e^{-j\omega_0}) = H^*(e^{j\omega_0})$ , obținem

$$y[n] = \operatorname{Re} (H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n}) = |H(e^{j\omega_0})| \cos(\omega_0 n + \arg H(e^{j\omega_0})),$$

adică un rezultat similar cu (2.15). (Atenție, dacă funcția de transfer are coeficienți complecși, rezultatul nu mai e același.)

Dacă  $\omega_0 = \pi/3$ , ieșirea pentru filtrul considerat este

$$y[n] = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{3}n - \frac{\pi}{6}\right),$$

i.e. semnalul de intrare a fost atenuat și defazat. ■

**PR 2.3.3** Semnalul  $x[n] = (-1)^n$  se aplică la intrarea filtrului  $H(z) = (1 + z^{-1})/2$ . Care este semnalul de ieșire ?

*Soluție.* Cititorul atent a observat că această problemă este identică cu **PR2.2.2**. Prezentăm aici altă soluție. Observăm că  $x[n] = (-1)^n = \cos(\pi n)$ , adică  $x[n]$  este un semnal sinusoidal de frecvență  $\pi$ . Pe de altă parte, avem  $H(e^{j\pi}) = H(-1) = 0$ , ceea ce înseamnă că semnalul de frecvență  $\pi$  este tăiat complet de filtru, deci ieșirea este nulă. ■

**PR 2.3.4** Considerăm filtrul FIR ”medie pe  $M + 1$  eșantioane”, care are funcția de transfer

$$H(z) = \frac{1}{M+1} \sum_{n=0}^M z^{-n}. \quad (2.22)$$

Reprezentați caracteristica sa de frecvență.

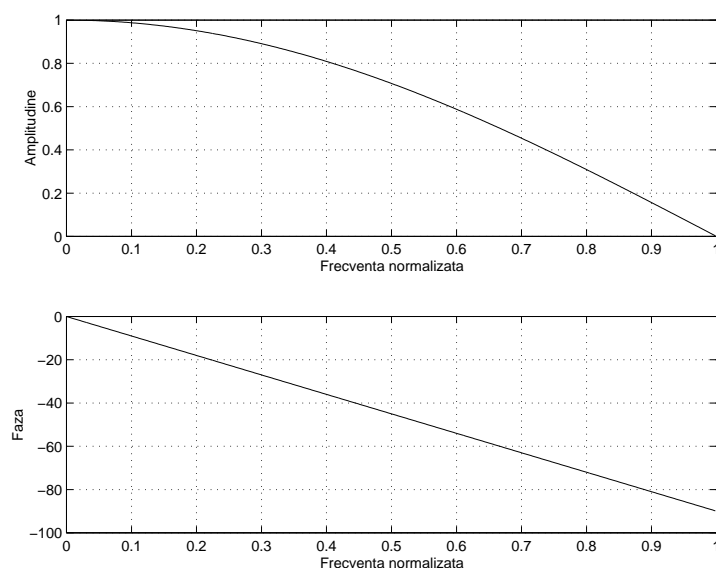


Figura 2.8: Caracteristica de frecvență a filtrului  $H(z) = (1 + z^{-1})/2$ .

*Soluție.* Utilizând formula pentru suma unei progresii geometrice, obținem

$$\begin{aligned}
 H(e^{j\omega}) &= \frac{1}{M+1} \sum_{n=0}^M e^{-j\omega n} = \frac{1}{M+1} \frac{1 - e^{-j\omega(M+1)}}{1 - e^{-j\omega}} \\
 &= \frac{1}{M+1} \frac{e^{-j\omega(M+1)/2} (e^{j\omega(M+1)/2} - e^{-j\omega(M+1)/2})}{e^{-j\omega/2} (e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})} \\
 &= \frac{1}{M+1} \frac{\sin(\omega(M+1)/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}.
 \end{aligned}$$

În mod evident, amplitudinea este

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{M+1} \left| \frac{\sin(\omega(M+1)/2)}{\sin(\omega/2)} \right|.$$

În reprezentarea fazei apare un fenomen specific. Când  $\omega \in [0, \pi]$ , observăm că  $\sin(\omega/2) \geq 0$ , dar că semnul lui  $\sin(\omega(M+1)/2)$  variază. În concluzie, deoarece  $-1 = e^{-j\pi}$ , faza este

$$\arg H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -\omega M/2, & \text{când } \sin(\omega(M+1)/2) \geq 0, \\ -\omega M/2 - \pi, & \text{când } \sin(\omega(M+1)/2) < 0. \end{cases}$$

Graficele amplitudinei și fazei sunt prezentate în figura 2.9, pentru  $M = 5$ , în două variante; prima este cea "teoretică", în care formulele de mai sus sunt utilizate ca atare; a doua este cea "inginerască", în care amplitudinea este reprezentată în decibeli, iar faza prin valoarea sa principală. În reprezentarea fazei, am ținut seama că  $\sin(3\omega) < 0$  pentru  $\omega \in [\pi/3, 2\pi/3]$ , de unde discontinuitățile graficului. ■

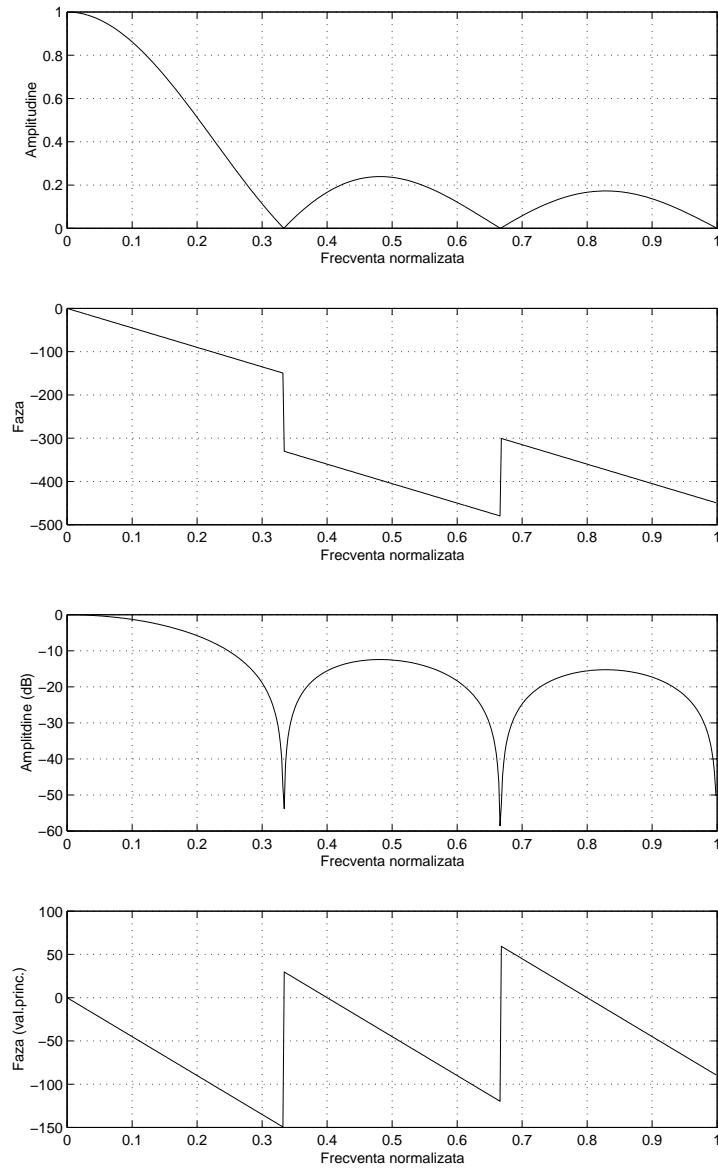


Figura 2.9: Caracteristica de frecvență a filtrului  $H(z) = \frac{1}{M+1} \sum_{n=0}^M z^{-n}$ , pentru  $M = 5$ . Sus, reprezentarea "teoretică" amplitudine-fază. Jos, reprezentarea "inginerească": amplitudine în dB și valoarea principală a fazei.

### Probleme propuse

**PP 2.3.1** Reprezentați caracteristica de frecvență a filtrului FIR  $H(z) = (1 - z^{-1})/2$ .

Care este ieșirea sa atunci când la intrare sunt semnalele a)  $x[n] = 1$ , b)  $x[n] = (-1)^n$  ?

**PP 2.3.2** Desenați caracteristica de frecvență a filtrului  $H(z) = 1 - 0.5z^{-1} + 0.25z^{-2}$  și comparați rezultatul obținut cu cel din figura 2.5.

**PP 2.3.3 a.** Presupunem că se cunosc graficele (amplitudine și fază) răspunsului în frecvență al unui filtru  $H(z)$ . Cum se pot trasa rapid graficele răspunsului în frecvență al filtrului  $H^2(z)$  ?

**b.** Presupunem că se cunosc graficele răspunsurilor în frecvență a două filtre  $H_1(z)$  și  $H_2(z)$ . Cum se pot trasa rapid graficele răspunsului în frecvență al filtrului  $H_1(z)H_2(z)$  obținut prin conectarea în serie a celor două filtre ?

**PP 2.3.4** Filtrul AR (2.21) cu polul  $c = e^{j\omega}$  este instabil deoarece polul se află pe cercul unitate. Dați exemplu de un semnal de intrare  $x[n]$  mărginit pentru care răspunsul filtrului  $y[n]$  este nemărginit. Cazuri particulare:  $c = 1$ ,  $c = -1$ .

**PP 2.3.5** Filtrul IIR cu funcția de transfer

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}}{1 - 0.9\sqrt{2}z^{-1} + 0.81z^{-2}}$$

are zerourile și polii ca în figura 2.7, stânga sus. Desenați caracteristica sa de frecvență și observați că nu obțineți exact graficul din dreapta sus a figurii. De ce ?

### Ghid Matlab

Caracteristica de frecvență a unui filtru IIR (2.8) se poate trasa cu ajutorul funcției **freqz**. Dacă variabilele **b** și **a** conțin coeficienții numărătorului, respectiv numitorului, atunci

```
>> freqz(b,a)
```

desenează amplitudinea (în dB) și valoarea principală a fazei (în radiani) în două grafice. De exemplu, filtrul FIR de ordinul doi (2.20) cu  $r = 0.8$ ,  $\theta = \pi/3$  se desenează prin

```
>> b = [1 -0.8 0.64]
```

```
>> freqz(b,1)
```

Apelul

```
>> [H,w] = freqz(b,a)
```

pune în **H** valorile răspunsului în frecvență calculat în elementele grilei de frecvențe **w** (generată de funcție). Desenarea e.g. amplitudinii răspunsului se face cu

```
>> plot(w, abs(H))
```

În alte moduri de apel ale funcției **freqz** se pot specifica numărul de puncte de pe grilă, se pot preciza explicit frecvențele în care se calculează răspunsul etc.

Diagrama poli-zerouri a unui filtru IIR se desenează cu apelul

```
>> zplane(b,a)
```

## 2.4 Filtre de fază minimă

**Definiția 2.17** Un filtru IIR cu funcția de transfer (2.9) având zerourile și polii situați în interiorul cercului unitate, i.e. cu proprietatea că  $|c_k| < 1$ ,  $k = 1 : M$ ,  $|d_i| < 1$ ,  $i = 1 : N$ , se numește filtru de fază minimă.

Deoarece în practică sunt interesante doar filtrele stabile, pentru care  $|d_i| < 1$ ,  $i = 1 : N$ , proprietatea de fază minimă este dată de poziția zerourilor unui filtru. În secțiunea precedentă am analizat doar caracteristica de frecvență a filtrelor de fază minimă. Pentru a studia cazul filtrelor de fază neminimă—care au cel puțin un zero în afara cercului unitate—avem nevoie de definiția filtrelor trece-tot.

**Definiția 2.18** Un filtru trece-tot de ordin  $N$  are funcția de transfer

$$H_T(z) = \frac{\prod_{k=1}^N (z^{-1} - c_k^*)}{\prod_{k=1}^N (1 - c_k z^{-1})}, \quad (2.23)$$

iar polii  $c_k \in \mathbb{C}$ ,  $k = 1 : N$ , au modul subunitar (deci filtrul este stabil).

Observăm că zerourile filtrului sunt  $1/c_k^*$ ,  $k = 1 : n$ , și se află în afara cercului unitate. Numele filtrului este dat de următoarea proprietate.

**Propoziția 2.19** Fie  $H_T(z)$  filtrul trece-tot cu funcția de transfer (2.23). Răspunsul său în frecvență are modul constant  $|H_T(e^{j\omega})| = 1$ , pentru orice frecvență  $\omega$ .

*Demonstrație.* Modulul unui factor al numărătorului răspunsului  $H_T(e^{j\omega})$  este

$$|e^{-j\omega} - c_k^*| = |e^{-j\omega}(1 - c_k^* e^{j\omega})| = |1 - c_k e^{-j\omega}|,$$

i.e. este egal cu modulul factorului corespunzător al numitorului (ultima egalitate a fost obținută prin complex conjugare). ■

**Propoziția 2.20** Orice filtru (stabil)  $H(z)$  de fază neminimă poate fi exprimat ca produs între două filtre: unul de fază minimă  $H_m(z)$  și unul trece-tot  $H_T(z)$ , i.e.

$$H(z) = H_m(z)H_T(z). \quad (2.24)$$

*Demonstrație.* Să presupunem pentru simplitate că  $H(z)$  are un singur zero în afara cercului unitate, i.e. se poate scrie sub forma  $H(z) = \tilde{H}_m(z)(z^{-1} - c^*)$ , cu  $|c| < 1$ , unde  $\tilde{H}_m(z)$  este un filtru de fază minimă. Atunci avem

$$H(z) = \tilde{H}_m(z)(1 - cz^{-1}) \frac{z^{-1} - c^*}{1 - cz^{-1}},$$

adică  $H(z)$  are forma (2.24), cu  $H_m(z) = \tilde{H}_m(z)(1 - cz^{-1})$  și  $H_T(z)$  un filtru trece-tot de ordinul 1 cu polul  $c$ .

Dacă  $H(z)$  are mai multe zerouri în afara cercului unitate, atunci demonstrația este similară. ■

Observăm că  $H_m(z)$  se obține din  $H(z)$  prin reflectarea și complex conjugarea zerourilor din afara cercului ( $1/c^*$  se transformă în  $c$ ). Combinând Propozițiile 2.19 și 2.20 obținem următorul rezultat important.

**Corolarul 2.21** Amplitudinea răspunsului în frecvență al unui filtru  $H(z)$  de fază neminimă exprimat ca în (2.24) este identică cu cea a filtrului de fază minimă  $H_m(z)$ , i.e.  $|H(e^{j\omega})| = |H_m(e^{j\omega})|$ .

Fazele răspunsurilor în frecvență ale celor două filtre,  $H(z)$  și  $H_m(z)$ , diferă.

Alte proprietăți ale filtrelor de fază minimă. Denumirea de filtru de fază minimă provine din următorul rezultat.

**Propoziția 2.22** Fie  $H(z)$  un filtru de fază neminimă și  $H_m(z)$  filtrul de fază minimă din (2.24). Între fazele celor două filtre există relația

$$\arg H(e^{j\omega}) \leq \arg H_m(e^{j\omega}), \quad \forall \omega \in [0, \pi]. \quad (2.25)$$

Observăm că de fapt faza filtrului de fază minimă este mai mare decât cea a unui filtru de fază neminimă corespunzător. Deoarece faza este în general negativă, filtrul de fază minimă are faza mai mică în valoare absolută, de unde și denumirea sa.

**Propoziția 2.23** Fie  $H(z)$  un filtru cauzal de fază neminimă și  $H_m(z)$  filtrul de fază minimă din (2.24). Fie  $h[n]$ , respectiv  $h_m[n]$ , răspunsurile la impuls ale celor două filtre. Atunci, pentru orice  $n \geq 0$ , are loc inegalitatea

$$\sum_{k=0}^n |h[k]|^2 \leq \sum_{k=0}^n |h_m[k]|^2. \quad (2.26)$$

Sumele din (2.26) au semnificația de energii parțiale ale răspunsului la impuls. Ținând seama că amplitudinile răspunsurilor în frecvență ale celor două filtre sunt identice, din teorema lui Parseval rezultă că răspunsurile la impuls  $h[n]$  și  $h_m[n]$  au aceeași energie. Relația (2.26) spune că răspunsul la impuls al filtrului de fază minimă are mai multă energie în partea sa inițială, în comparație cu filtrele de fază neminimă provenite din el.

## Probleme rezolvate

**PR 2.4.1** Scrieți forma generală a unui filtru trece-tot de ordin  $N$ . (Evidențiați coeficienții, nu polii și zerourile ca în (2.23).)

*Soluție.* Fie  $H_T(z) = B(z)/A(z)$ , unde  $B(z)$ ,  $A(z)$  sunt polinoamele din (2.23). Dacă  $c$  este rădăcina a lui  $A(z)$ , din definiția (2.23) a filtrului trece-tot rezultă că  $1/c^*$  e rădăcina a lui  $B(z)$ . Așadar avem  $B(z) = z^{-N} A_*(z^{-1})$  (înmulțirea cu  $z^{-N}$  face  $B(z)$  polinom în  $z^{-1}$ ), adică coeficienții lui  $B(z)$  sunt identici cu cei ai lui  $A(z)$ , dar în ordine inversă și complex conjugați și deci funcția de transfer a filtrului este

$$H_T(z) = \frac{\sum_{n=0}^N a_{N-n}^* z^{-n}}{\sum_{n=0}^N a_n z^{-n}} \quad (2.27)$$

unde  $a_0 = 1$ . Se observă imediat că pentru  $N = 1$  se obține chiar (2.23). ■

**PR 2.4.2** Demonstrați Propoziția 2.22. Indicație: demonstrați că filtrul trece-tot (2.23) are faza negativă pentru  $\omega \in [0, \pi]$ ; folosind apoi (2.24), Propoziția este demonstrată.

*Soluție.* Negativitatea fazei filtrului trece-tot (2.24) se demonstrează după următorul plan, ale cărui detalii (de calcul) le lăsăm cititorului:

1. Se consideră filtrul trece-tot de ordinul 1

$$H_1(z) = \frac{z^{-1} - c^*}{1 - cz^{-1}}, \quad c = re^{j\theta}, \quad 0 < r \leq 1, \quad (2.28)$$

și se calculează expresia fazei sale, obținându-se

$$\phi(\omega) = \arg H_1(e^{j\omega}) = -\omega - 2 \arctg \frac{r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)}.$$

2. Se calculează derivata fazei

$$\phi'(\omega) = \frac{r^2 - 1}{1 - 2r \cos(\omega - \theta) + r^2}$$

și se observă că  $\phi'(\omega) \leq 0$ ,  $\forall \omega \in [0, \pi]$ .

3. Deoarece  $\phi(0) = 0$ , rezultă imediat că  $\phi(\omega) \leq 0$ ,  $\forall \omega \in [0, \pi]$ .

4. Cum filtrul trece-tot (2.23) este produs de termeni de tipul (2.28), rezultă că și faza sa este negativă. ■

## Probleme propuse

**PP 2.4.1** Scrieți funcția de transfer a unui filtru trece-tot cu coeficienți reali ai cărui poli sunt  $\rho e^{\pm j\theta}$ , unde  $\rho \in [0, 1)$  și  $\theta \in [0, \pi]$  sunt dați.

**PP 2.4.2** Demonstrați că un filtru  $H(z)$  este trece-tot dacă și numai dacă egalitatea  $H(z)H^*(z^{-1}) = 1$  are loc pentru orice  $z$  complex.

**PP 2.4.3** Un semnal  $x[n]$  de energie finită este aplicat la intrarea unui filtru trece-tot (2.23), obținându-se la ieșire semnalul  $y[n]$ . Demonstrați că semnalele de intrare și de ieșire au aceeași energie, i.e.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y[n]|^2.$$

(Indicație: folosiți teorema lui Parseval.)

**PP 2.4.4** Desenați caracteristicile de frecvență ale filtrelor  $H_1(z) = 1 - 0.5z^{-1} + 0.25z^{-2}$  și  $H_2(z) = 0.25 - 0.5z^{-1} + z^{-2}$ . Știind că unul dintre ele este de fază minimă, aflați din caracteristica de frecvență care este acesta, fără a calcula zerourile filtrelor.

Puteți afla răspunsul doar din valorile coeficienților filtrelor ?

**PP 2.4.5** Fie  $H_m(z)$  un filtru FIR de fază minimă, de ordin  $M$ , cu coeficienți reali. Câte filtre FIR de ordin  $M$  au aceeași amplitudine a răspunsului în frecvență ca  $H_m(z)$ , dar faze diferite ? Indicați valorile maximă și minimă ale numărului acestor filtre și dați exemple de filtre  $H_m(z)$  pentru care se ating valorile extreme.

**PP 2.4.6** Demonstrați Propoziția 2.23. Indicație: considerați (2.26) pentru cazul particular cu un filtru de fază minimă  $H_m(z)$  și un filtru de fază neminimă cu un singur zero în afara cercului unitate.

## 2.5 Filtre cu fază liniară

Răspunsul în frecvență al sistemului de întârziere cu  $n_0$  eșantioane este  $H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0}$  (vezi problema **PR2.3.1**). Se observă că faza acestui sistem este liniară. În prelucrarea semnalelor, întârzierea unui semnal este o modificare acceptabilă a acestuia. Filtrele cu faza liniară sunt așadar interesante pentru că ele acționează doar asupra amplitudinii spectrului semnalului, modificările fazei reprezentând o simplă întârziere.

În sens strict, un filtru are fază liniară dacă răspunsul său în frecvență poate fi scris în forma  $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{-j\omega n_0}$ , unde se poate accepta și  $n_0 \in \mathbb{R}$ . Această definiție poate fi reformulată în sens mai larg.

**Definiția 2.24** *Un filtru are fază liniară generalizată dacă răspunsul său în frecvență poate fi scris în forma*

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j\omega n_0 - j\alpha}, \quad (2.29)$$

unde  $A(e^{j\omega}) \in \mathbb{R}$  (deci, putând avea valori negative, nu este amplitudinea răspunsului),  $n_0 \in \mathbb{R}$ , iar  $e^{-j\alpha}$  reprezintă un defazaj suplimentar ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ).

**Definiția 2.25** *Întârzierea de grup (group delay) a unui filtru este derivata fazei răspunsului în frecvență al filtrului (cu semn schimbat), i.e.*

$$\text{grd}H(e^{j\omega}) = -\frac{d}{d\omega}\arg H(e^{j\omega}). \quad (2.30)$$

În mod evident, întârzierea de grup a unui filtru cu faza liniară generalizată este constantă (și pozitivă, de obicei).

## Filtre ideale

Un filtru trece-jos ideal, care lasă să treacă nealterate semnalele cu frecvență mai mică decât  $\omega_t$  și taie complet semnalele de alte frecvențe, are răspunsul în frecvență

$$H_{TJ}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } |\omega| \leq \omega_t, \\ 0, & \text{dacă } \omega_t < |\omega| \leq \pi. \end{cases} \quad (2.31)$$

Să notăm că  $[0, \omega_t]$  se numește bandă de trecere, iar  $[\omega_t, \pi]$  bandă de oprire (sau tăiere). Admițând întârzierea semnalelor din banda de trecere, filtrul trece-jos are răspunsul în frecvență

$$H_{TJi}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega n_0}, & \text{dacă } |\omega| \leq \omega_t, \\ 0, & \text{dacă } \omega_t < |\omega| \leq \pi, \end{cases} \quad (2.32)$$

unde  $n_0 \in \mathbb{R}$  este întârzierea de grup a filtrului.

Filtrele ideale au răspunsuri la impuls necauzale, cu suport infinit. De exemplu, filtrul (2.32) are răspunsul la impuls

$$h_{TJi}[n] = \frac{\sin \omega_t(n - n_0)}{\pi(n - n_0)}. \quad (2.33)$$



	$M$ par	$M$ impar
$H(z)$ simetric ( $h[n] = h[M - n]$ )	I	II
$H(z)$ antisimetric ( $h[n] = -h[M - n]$ )	III	IV

Tabelul 2.1: Tipurile de filtre FIR cu fază liniară.

(Demonstrația este lăsată cititorului în problema **PP2.5.1.**) Răspunsurile la impuls (2.33) pentru  $\omega_t = \pi/4$ , sunt reprezentate în figura 2.10. Observăm că dacă  $n_0$  este întreg, atunci răspunsul este simetric față de verticala dusă prin  $n_0$ . Aceeași simetrie este valabilă și în cazul  $n_0 = k_0 + 1/2$ , cu  $k_0 \in \mathbb{Z}$ . În celelalte cazuri, răspunsul nu are nici o simetrie.

Datorită suportului infinit și necauzalității, filtrele ideale nu sunt utilizabile în practică. De asemenea, nu există filtre IIR raționale cu fază liniară. De aceea, singura soluție practică de obținere a liniarității exacte a fazei o reprezintă filtrele FIR.

### Filtre FIR cu fază liniară

**Definiția 2.26** Fie  $H(z)$  un filtru FIR cu coeficienți reali descris de (2.6), de ordin  $M$ . Spunem că  $H(z)$  este simetric dacă vectorul coeficienților săi (răspunsul său la impuls) este simetric, i.e.  $h[n] = h[M - n]$ .

De asemenea, spunem că  $H(z)$  este antisimetric dacă  $h[n] = -h[M - n]$ .

Se poate demonstra următorul rezultat.

**Propoziția 2.27** Un filtru FIR are fază liniară generalizată—în sensul că răspunsul său în frecvență are forma (2.29)—dacă și numai dacă este simetric sau antisimetric.

Filtrele FIR cu fază liniară sunt de patru tipuri, după simetria coeficienților și paritatea ordinului filtrului. În mod tradițional, tipurile sunt numerotate de la I la IV, după cum se arată în tabelul 2.1. În cele ce urmează, vom arăta că fiecare din cele patru tipuri de filtre are răspunsul în frecvență de forma (2.29) și vom vedea care sunt pozițiile zerourilor acestor filtre în planul complex.

*Tipul I.* Când  $M$  este par, numărul de coeficienți ai filtrului este impar, deci funcția de transfer are forma

$$H(z) = h[0] + h[1]z^{-1} + \dots + h[\frac{M}{2}]z^{-\frac{M}{2}} + \dots + h[1]z^{-(M-1)} + h[0]z^{-M}. \quad (2.34)$$

Răspunsul în frecvență este (forțăm factor comun exponențiala corespunzătoare termenului central)

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= e^{-j\omega \frac{M}{2}} \left( h[\frac{M}{2}] + h[\frac{M}{2} - 1](e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + \dots + h[0](e^{j\omega \frac{M}{2}} + e^{-j\omega \frac{M}{2}}) \right) \\ &= e^{-j\omega \frac{M}{2}} \left( 2h[0] \cos(\omega \frac{M}{2}) + \dots + 2h[\frac{M}{2} - 1] \cos \omega + h[\frac{M}{2}] \right). \end{aligned} \quad (2.35)$$

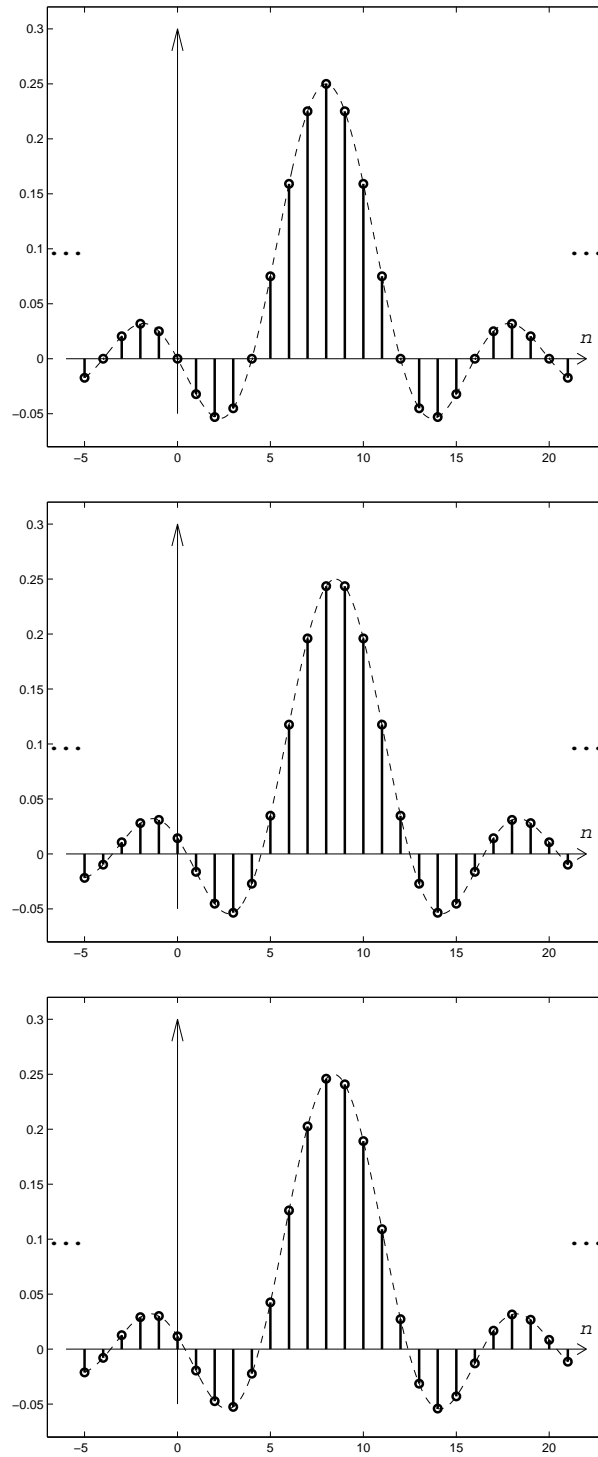


Figura 2.10: Răspunsuri la impuls ale filtrului ideal trece-jos, pentru  $\omega_t = \pi/4$  și întârziere de grup  $n_0 = 8$  (sus),  $n_0 = 8.5$  (mijloc) și  $n_0 = 8.4$  (jos).

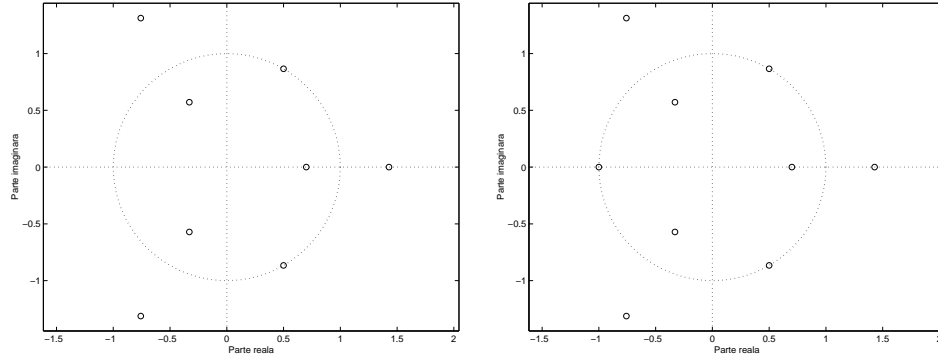


Figura 2.11: Zerourile filtrelor FIR cu fază liniară, de tip I (stânga) și II (dreapta).

Din (2.35) se observă că întârzierea de grup este

$$\text{grd}H(e^{j\omega}) = M/2.$$

Pentru a vedea care sunt pozițiile zerourilor, observăm că, pentru un filtru simetric, este adevărat șirul de egalități

$$H(z) = \sum_{n=0}^M h[n]z^{-n} = z^{-M} \sum_{n=0}^M h[M-n]z^{M-n} = z^{-M} \sum_{n=0}^M h[n]z^n = z^{-M} H(z^{-1}). \quad (2.36)$$

Așadar, dacă  $c$  este un zero al lui  $H(z)$ , atunci și  $1/c$  este zero, adică orice zero în interiorul cercului unitate este însoțit de unul în afara cercului. Mai mult, dacă filtrul are coeficienți reali, atunci  $c$  este zero al filtrului împreună cu  $c^*$ ,  $1/c$ ,  $1/c^*$ . Zerourile filtrului au pozițiile ilustrate în figura 2.11, stânga; zerourile complexe apar în general în grupuri de patru. Zerourile aflate pe cercul unitate sunt perechi, deoarece în acest caz avem  $1/c = c^*$ ; cele două zerouri sunt simetrice față de axa reală. În fine, zerourile reale sunt și ele perechi ( $c = c^*$ ); dacă zerourile sunt reale și pe cercul unitate, adică sunt egale cu 1 sau  $-1$ , atunci ele sunt duble.

*Tipul II.* Funcția de transfer are forma

$$H(z) = h[0] + \dots + h\left[\frac{M-1}{2}\right]z^{-\frac{M-1}{2}} + h\left[\frac{M+1}{2}\right]z^{-\frac{M+1}{2}} + \dots + h[M]z^{-M}. \quad (2.37)$$

Procedând ca în (2.35), răspunsul în frecvență este

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega \frac{M}{2}} \left( 2h[0] \cos(\omega \frac{M}{2}) + \dots + 2h\left[\frac{M-1}{2}\right] \cos(\omega \frac{M-1}{2}) \right). \quad (2.38)$$

Ca și pentru tipul I, întârzierea de grup este  $M/2$ .

Și pentru tipul II este adevărată relația (2.36), adică simetriile pozițiilor zerourilor sunt aceleași ca la tipul I, cu o singură excepție. Punând  $z = -1$  în (2.36) obținem  $H(-1) = (-1)^M H(-1) = -H(-1)$ ; așadar  $H(-1) = 0$ , deci  $-1$  este întotdeauna un zero al filtrului; multiplicitatea sa este impară, deoarece zerouri

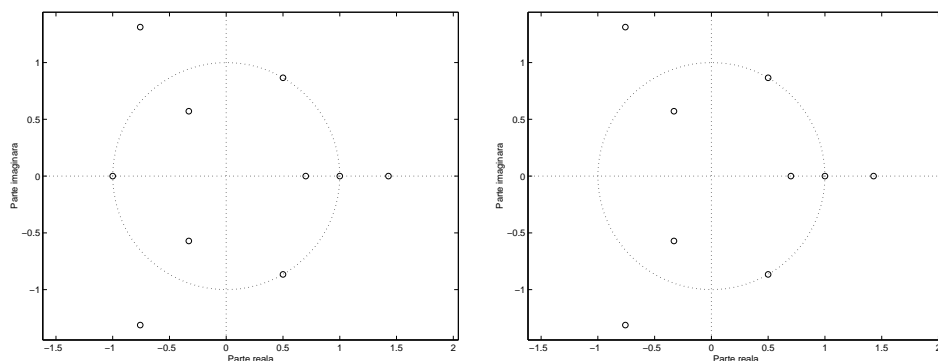


Figura 2.12: Zerourile filtrelor FIR cu fază liniară, de tip III (stânga) și IV (dreapta).

duble pot apărea așa cum s-a discutat la tipul I. Figura 2.11 (dreapta) prezintă pozițiile tipice ale zerourilor unui filtru de tip II.

*Tipul III.* Deoarece numărul coeficienților este impar, antisimetria implică  $h[\frac{M}{2}] = -h[\frac{M}{2}]$ , deci coeficientul central este nul, iar funcția de transfer este

$$H(z) = h[0] + \dots + h[\frac{M}{2} - 1]z^{-(\frac{M}{2}-1)} - h[\frac{M}{2} - 1]z^{-(\frac{M}{2}+1)} - \dots - h[0]z^{-M}. \quad (2.39)$$

Ținând seama că  $j = e^{j\pi/2}$ , răspunsul în frecvență este

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j(\omega\frac{M}{2} - \frac{\pi}{2})} (2h[0] \sin(\omega\frac{M}{2}) + \dots + 2h[\frac{M}{2} - 1] \sin \omega), \quad (2.40)$$

iar întârzierea de grup este  $M/2$ .

Procedând ca în (2.36), pentru un filtru cu coeficienți antisimetrice obținem relația

$$H(z) = -z^{-M}H(z^{-1}). \quad (2.41)$$

În general, aceasta implică aceleași simetrii ale zerourilor ca pentru un filtru de tip I. În plus, observăm că pentru  $M$  par, din relația (2.41) rezultă  $H(1) = -H(1)$  și  $H(-1) = -H(-1)$ ; așadar atât 1 cât și  $-1$  sunt întotdeauna zerouri ale filtrului de tip III; în cazul cel mai general, multiplicitatea lor este impară. Figura 2.12 (stânga) prezintă pozițiile tipice ale zerourilor unui filtru de tip III.

*Tipul IV.* Funcția de transfer are forma

$$H(z) = h[0] + \dots + h[\frac{M-1}{2}]z^{-\frac{M-1}{2}} - h[\frac{M-1}{2}]z^{-\frac{M+1}{2}} - \dots - h[0]z^{-M}. \quad (2.42)$$

Răspunsul în frecvență este

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j(\omega\frac{M}{2} - \frac{\pi}{2})} (2h[0] \sin(\omega\frac{M}{2}) + \dots + 2h[\frac{M-1}{2}] \sin(\frac{\omega}{2})) \quad (2.43)$$

și întârzierea de grup este  $M/2$ .

În privința poziției zerourilor, diferența față de tipul III este că,  $M$  fiind impar, din (2.41) rezultă doar  $H(1) = -H(1)$ , deci numai 1 este un zero al filtrului de multiplicitate impară (vezi figura 2.12, dreapta).

### Probleme rezolvate

**PR 2.5.1** Determinați răspunsul la impuls al filtrului de întârziere ideal, al cărui răspuns în frecvență este  $H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0}$ , unde  $n_0 \in \mathbb{R}$ .

*Soluție.* Folosind transformata Fourier inversă ca în soluția problemei **PR1.2.3**, se obține răspunsul la impuls

$$h[n] = \frac{\sin \pi(n - n_0)}{\pi(n - n_0)}.$$

Dacă  $n_0$  este întreg, atunci  $h[n]$  este impulsul unitate întârziat  $\delta[n - n_0]$ . Altfel, răspunsul are suport infinit ! Răspunsul este simetric dacă  $2n_0 \in \mathbb{Z}$ . Figura 2.13 ilustrează aceste situații. ■

**PR 2.5.2** Fie  $H(z)$  un filtru FIR cu faza liniară, de tip I. Ce fel de filtre sunt  $(1 - z^{-1})H(z)$ ,  $(1 - z^{-2})H(z)$ ,  $(1 + z^{-1})H(z)$ ,  $(1 + z^{-2})H(z)$  ?

*Soluție.* Toate filtrele de mai sus au fază liniară. Demonstrăm doar că  $G(z) = (1 - z^{-1})H(z)$  este de tip IV. În primul rând, gradul lui  $G(z)$  este  $M + 1$ , deci impar. Apoi, observăm că între coeficienții celor două filtre există relația  $g[n] = h[n] - h[n - 1]$ ,  $n = 0 : M + 1$ ; desigur, considerăm  $h[-1] = h[M + 1] = 0$ . Deoarece  $h[n]$  este simetric, putem scrie

$$g[M + 1 - n] = h[M + 1 - n] - h[M - n] = h[n - 1] - h[n] = -g[n],$$

așadar filtrul  $G(z)$  are coeficienți antisimetriци. ■

**PR 2.5.3** Găsiți un filtru FIR a cărui fază să fie nulă.

*Soluție.* Evident, un astfel de filtru are fază liniară și întârziere de grup egală cu zero. Dacă ne mărginim la filtrele descrise în această secțiune, a căror întârziere de grup este  $M/2$ , vom constata că gradul filtrului trebuie să fie nul, deci funcția de transfer este o constantă.

Dacă permitem și filtre FIR necauzale, cu funcția de transfer

$$H(z) = \sum_{n=-M}^M h[n]z^{-n},$$

atunci se observă cu ușurință că filtrele simetrice, cu  $h[n] = h[-n]$ , au răspunsul în frecvență  $H(e^{j\omega})$  real, deci întârziere de grup nulă. Totuși, pentru a avea fază nulă este necesar ca  $H(e^{j\omega}) \geq 0$ ,  $\forall \omega \in [-\pi, \pi]$ . Un exemplu de astfel de filtru este  $H(z) = z + 2 + z^{-1}$ . (Atenție, filtrele cu răspuns la impuls antisimetric  $h[n] = -h[-n]$  au răspunsul în frecvență pur imaginar, deci chiar dacă întârzierea de grup este nulă, faza este nenulă.) ■

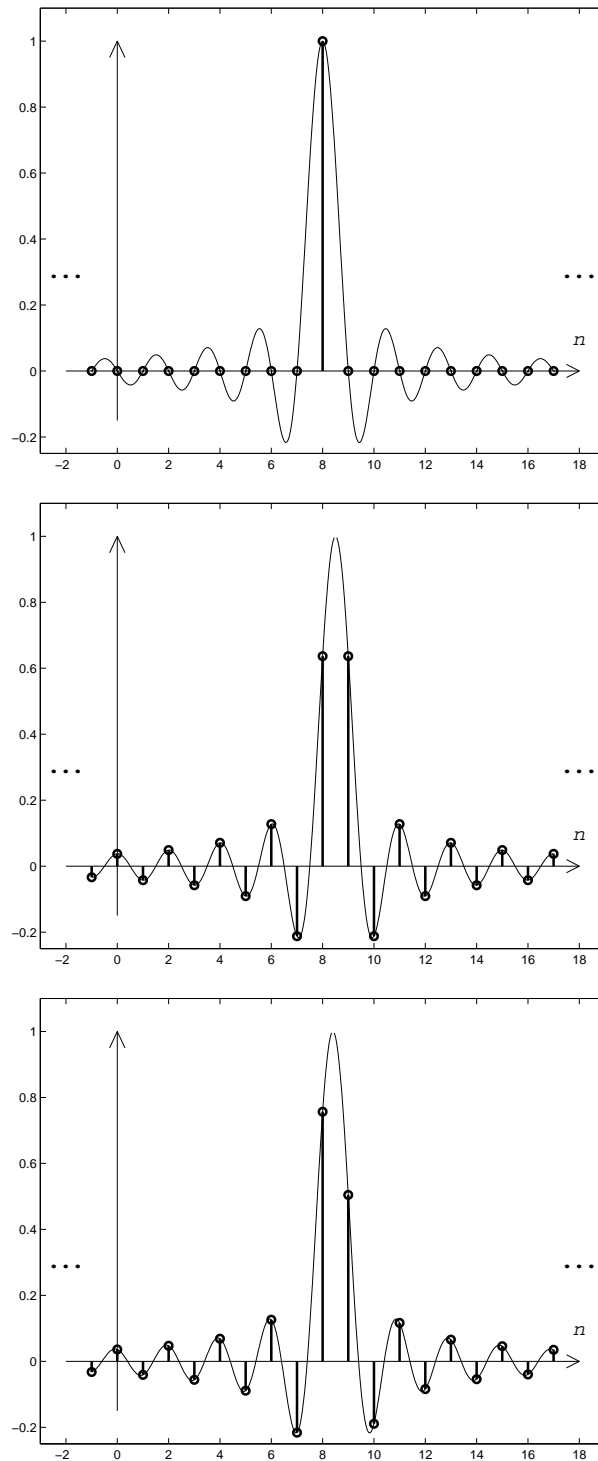


Figura 2.13: Răspunsuri la impuls ale filtrului de întârziere ideal, cu întârzierea de grup  $n_0 = 8$  (sus),  $n_0 = 8.5$  (mijloc) și  $n_0 = 8.4$  (jos).

### Probleme propuse

**PP 2.5.1** Demonstrați că filtrul trece-jos ideal cu răspunsul în frecvență (2.32) are răspunsul la impuls (2.33).

Dacă  $n_0 \in \mathbb{Z}$ , demonstrați că  $h_{TJi}[n_0 + n] = h_{TJi}[n_0 - n]$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ .

Dacă  $2n_0 \in \mathbb{Z}$ , demonstrați că  $h_{TJi}[n] = h_{TJi}[2n_0 - n]$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ .

**PP 2.5.2** Filtrul trece-bandă ideal, care lasă să treacă semnalele sinusoidale cu frecvența în banda de trecere  $[\omega_1, \omega_2]$  și taie toate celelalte frecvențe, are răspunsul în frecvență

$$H_{TB}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega n_0}, & \text{dacă } \omega_1 \leq |\omega| \leq \omega_2, \\ 0, & \text{dacă } |\omega| \leq \omega_1 \text{ sau } \omega_2 < |\omega| \leq \pi, \end{cases} \quad (2.44)$$

unde  $n_0 \in \mathbb{R}$  este întârzierea introdusă în banda de trecere. Demonstrați că răspunsul la impuls al filtrului este

$$h_{TB}[n] = \frac{\sin \omega_2(n - n_0)}{\pi(n - n_0)} - \frac{\sin \omega_1(n - n_0)}{\pi(n - n_0)}. \quad (2.45)$$

Arătați că răspunsurile la impuls ale filtrului trece-jos ideal (2.33) și filtrului de întârziere ideal din problema **PR2.5.1** sunt cazuri particulare ale (2.45). De asemenea, deduceți răspunsul la impuls al filtrului trece-sus ideal.

**PP 2.5.3** Fie un filtru cu faza liniară (în sens strict), al cărui răspuns în frecvență poate fi scris în forma

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{-j\omega n_0},$$

cu  $n_0 \in \mathbb{R}$ . Presupunem că filtrul are proprietatea că  $|H(e^{j\omega})| = |H(e^{-j\omega})|$  (valabilă când răspunsul la impuls al filtrului este real).

Demonstrați că dacă  $2n_0$  este întreg, atunci răspunsul la impuls  $h[n]$  este simetric față de "momentul"  $n_0$ , i.e.  $h[n] = h[2n_0 - n]$ . (Ghilimelele sunt puse pentru că  $n_0$  poate să nu fie întreg, deci nu reprezintă într-adevăr o valoare a timpului discret.)

**PP 2.5.4** Filtrul FIR  $H(z) = 1 - z^{-1} + 0.25z^{-2}$  nu are fază liniară (desenați caracteristica sa de frecvență). Găsiți un filtru cu fază liniară care să aibă aceeași amplitudine a răspunsului în frecvență ca  $H(z)$ .

Este adevărat că pentru orice filtru FIR există un filtru FIR cu fază liniară care are aceeași amplitudine a răspunsului în frecvență ?

**PP 2.5.5** Dați un exemplu de filtru FIR cu fază liniară, de tip I, ale cărui zerouri sunt toate duble și complexe. Alegeți gradul cel mai mic posibil.

**PP 2.5.6** Demonstrați că produsul a două filtre FIR cu fază liniară este tot un filtru FIR cu fază liniară.

Completați tabelul 2.2, în care sunt prezentate tipurile produselor a două filtre cu fază liniară. De exemplu, produsul unui filtru de tip I cu unul de tip X este un filtru de tip X, unde X este oricare din cele patru tipuri.

Ați demonstrat așadar că prin conectarea în serie a două filtre FIR cu fază liniară se obține un filtru cu fază liniară. Ce puteți spune despre conexiunea în paralel a celor două filtre ?

	I	II	III	IV
I	I	II	III	IV
II	?	?	?	?
III	?	?	?	?
IV	?	?	?	?

Tabelul 2.2: Tipurile produselor a două filtre FIR cu fază liniară.

Tip	Ordin	$H_r(\omega)$
I	$M = 2K$	$\sum_{n=0}^K g_n \cos(n\omega)$
II	$M = 2K + 1$	$\cos(\omega/2) \sum_{n=0}^K g_n \cos(n\omega)$
III	$M = 2(K + 1)$	$\sin \omega \sum_{n=0}^K g_n \cos(n\omega)$
IV	$M = 2K + 1$	$\sin(\omega/2) \sum_{n=0}^K g_n \cos(n\omega)$

Tabelul 2.3: Tipurile produselor a două filtre FIR cu fază liniară.

**PP 2.5.7** Demonstrați că răspunsurile în frecvență ale filtrelor FIR cu fază liniară de ordin  $M$  pot fi scrise în forma  $H(e^{j\omega}) = \gamma H_r(\omega) e^{-j\omega M/2}$ , unde  $H_r(\omega)$  este real și are forma din tabelul 2.3 (unde coeficienții  $g_n$  sunt reali și depind de coeficienții  $h[n]$  ai filtrului, dependențele fiind diferite pentru fiecare dintre cele patru tipuri de filtre), iar  $\gamma = 1$  pentru filtrele simetrice și  $\gamma = j$  pentru filtrele antisimetrice.

**PP 2.5.8** Are filtrul  $H(z) = z^2 + z + 1 + z^{-1} + z^{-2}$  fază nulă ?

**PP 2.5.9** La intrarea unui filtru FIR cu fază liniară de tip III se aplică semnalul  $x_n = 1 + \cos \pi n$ . Să se demonstreze că ieșirea este nulă.

Ce se întâmplă dacă filtrul este de tip IV ?

**PP 2.5.10** Considerăm filtrele FIR cauzale descrise de (2.6), cu coeficienți complecși. Un astfel de filtru este simetric dacă  $h[M - n] = h^*[n]$ , și antisimetric dacă  $h[M - n] = -h^*[n]$ . Demonstrați că filtrele simetrice și cele antisimetrice au fază liniară generalizată.

**PP 2.5.11** Pot aparține unor filtre FIR cu fază liniară diagramele de zerouri din figura 2.14 ? Dacă da, de ce tip sunt filtrele respective ? (Cifrele din dreptul locației unui zero indică multiplicitatea zeroului respectiv.)

## Ghid Matlab

Graficul întârzierii de grup a unui filtru IIR se poate trasa cu funcția `grpdelay`. De exemplu, pentru filtrul "medie pe 6 eșantioane", graficul este obținut cu



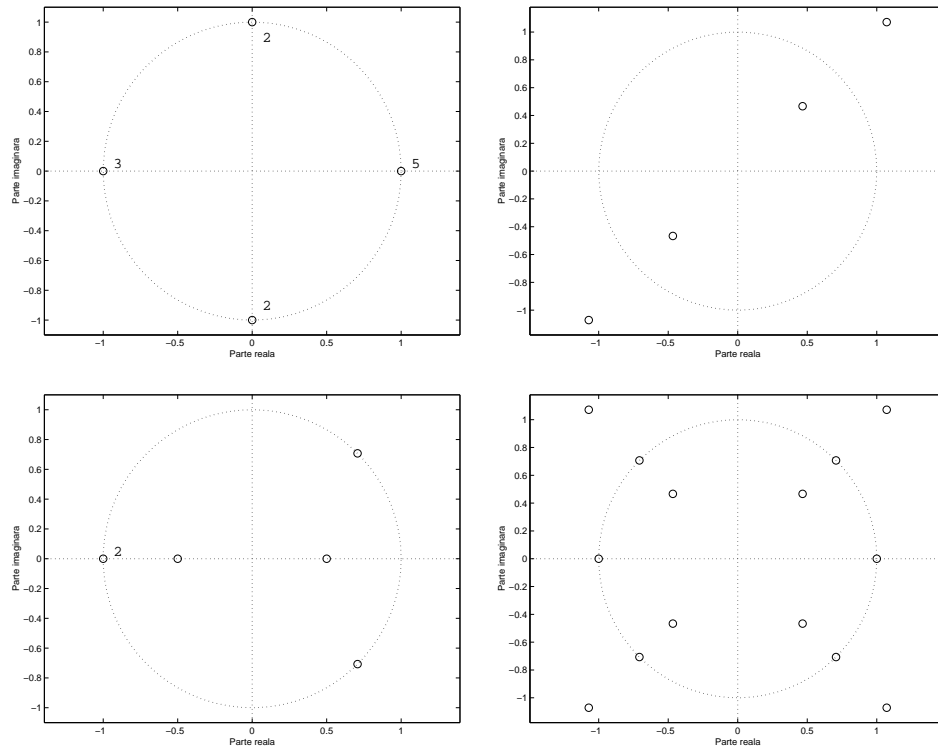


Figura 2.14: Diagrame de zerouri pentru diverse filtre FIR. Au aceste filtre fază liniară ?

```
>> b = [1 1 1 1 1 1]
>> grpdelay(b,1)
```

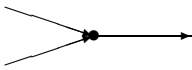
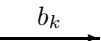
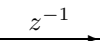
Modificați unul din coeficienții filtrului, dându-i valoarea 2, și observați că întârzierea de grup nu mai este constantă (deci faza nu mai este liniară).

## 2.6 Implementarea filtrelor

Implementarea filtrelor digitale implică trei operații de bază: adunare, înmulțire, și întârziere cu un pas. Simbolurile folosite pentru aceste operații sunt prezentate în tabelul 2.4. Sumatorul efectuează adunarea celor două (sau mai multe) semnale de intrare. Multiplicatorul înmulțește semnalul de intrare cu valoarea reprezentată deasupra săgeții.

O metodă de a obține scheme de implementare a filtrelor se bazează pe ecuațiile cu diferențe care descriu funcționarea acestora. Schemele obținute se numesc forme *directe*. Prezentăm în continuare aceste forme pentru filtrele FIR și IIR.

*Filtru FIR.* Ecuația cu diferențe corespunzătoare filtrului FIR  $B(z) = \sum_{k=0}^M b[k]z^{-k}$

Sumator	
Multiplicator	
Întârziere cu un pas	

Tabelul 2.4: Elemente constructive pentru implementarea filtrelor digitale.

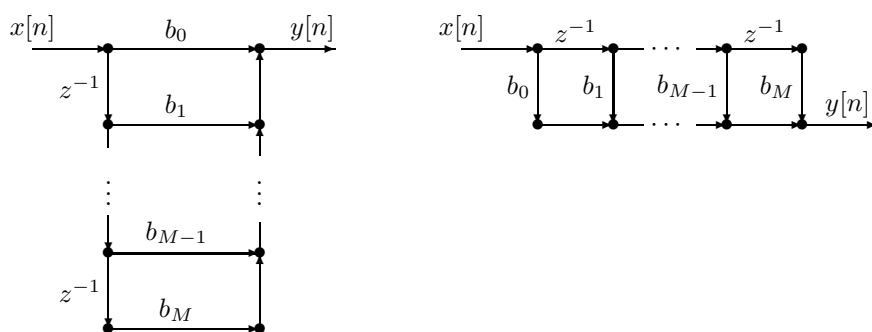


Figura 2.15: Implementări echivalente ale unui filtru FIR.

este

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b[k]x[n-k]. \quad (2.46)$$

Două scheme de implementare a ecuației (2.46) sunt prezentate în figura 2.15. Cele două scheme sunt identice, doar modul de desenare diferă: în stânga pe verticală, în dreapta pe orizontală. Ne referim la schema verticală; în nodurile liniei verticale din stânga se găsesc valorile întârziate ale semnalului de intrare:  $x[n]$ ,  $x[n-1]$ ,  $\dots$ ,  $x[n-M]$  (de sus în jos); aceste valori se înmulțesc cu coeficienții corespunzători ai filtrului, iar rezultatele se adună pe coloana verticală din dreapta. Complexitatea schemei este de  $M+1$  înmulțiri și adunări; sunt necesare  $M$  celule de memorie (nerepresentate explicit), corespunzătoare celor  $M$  elemente de întârziere.

*Filtre AR.* Ecuația cu diferențe (2.13) corespunzătoare filtrului AR (2.12) se implementează cu schema din figura 2.16. Deoarece acum sunt necesare valori la  $M$  momente de timp ale ieșirii, elementele de întârziere sunt pe coloana din dreapta.

*Filtre IIR, forma directă.* Deoarece filtrul IIR (2.8) este produsul dintre filtrul AR  $1/A(z)$  și filtrul FIR  $B(z)$ , implementarea lui se poate obține prin simpla concatenare a schemelor corespunzătoare celor două filtre, așa cum se vede în figura 2.17. Se observă că cele două coloane descendente din mijloc sunt identice

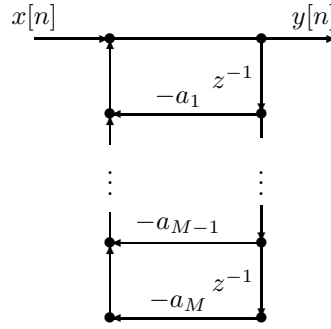


Figura 2.16: Implementarea unui filtru AR.

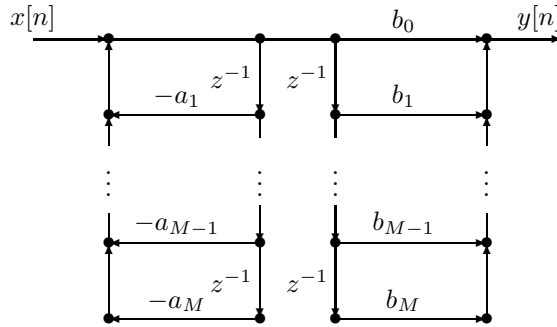


Figura 2.17: Implementarea unui filtru IIR, versiune neeficientă.

iar elementele de întârziere sunt duplicate inutil. Prin eliminarea uneia dintre cele două coloane se obține implementarea eficientă din figura 2.18.

*Filtre IIR, forma transpusă.* Scheme de implementare alternative se obțin prin următoarea procedură generală: se schimbă sensul tuturor arcelor, apoi se permută între ele intrarea și ieșirea. Se obține forma transpusă a schemei inițiale. Cele două scheme, inițială și transpusă, sunt echivalente. Demonstrăm echivalența doar pe cazul particular al unui filtru IIR de ordinul 2. Figura 2.19 conține schemele directă (stânga) și transpusă (dreapta) pentru acest filtru. Pentru forma transpusă, semnalele din nodurile coloanei din mijloc sunt, de sus în jos,  $y[n]$ ,  $v_1[n]$ , respectiv  $v_2[n]$ . Exprimând aceste semnale ca sumă a semnalelor care intră în nodurile respective, obținem succesiv

$$\begin{aligned} y[n] &= b_0 x[n] + v_1[n-1] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] - a_1 y[n-1] + v_2[n-2] \\ &= b_0 x[n] + b_1 x[n-1] - a_1 y[n-1] + b_2 x[n-2] - a_2 y[n-2], \end{aligned}$$

adică exact ecuația cu diferențe corespunzătoare filtrului IIR de ordinul 2.

*Filtre IIR, implementare cu secțiuni de ordinul 2.* Presupunând că  $M = N$  în (2.8) și că ordinul filtrului este par, funcția de transfer a unui filtru IIR cu coeficienți

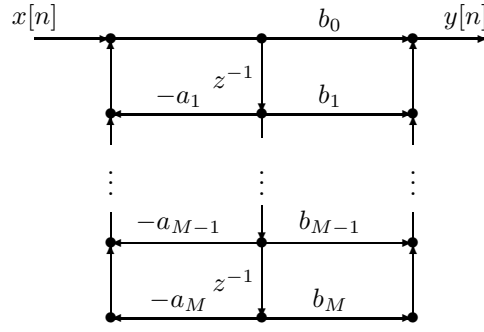


Figura 2.18: Implementarea eficientă a unui filtru IIR.

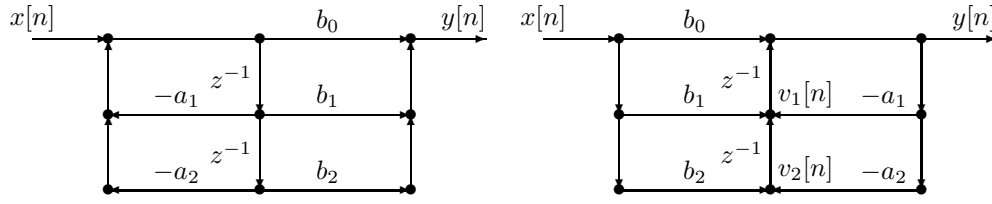


Figura 2.19: Filtru IIR de ordinul 2, în implementare directă (stânga) și transpusă (dreapta).

reali se poate scrie în forma

$$H(z) = \frac{b_0 \prod_{k=1}^{N/2} (1 - c_k z^{-1})(1 - c_k^* z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^{N/2} (1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})}. \quad (2.47)$$

Am grupat polii și zerourile în perechi complex conjugate, obținând filtre IIR de ordinul 2 cu coeficienți reali. (Eventualii poli sau zerouri reali se pot grupa în perechi, obținând tot filtre de ordinul 2.) Schema de implementare corespunzătoare formei (2.47) este o conexiune serie a  $N/2$  scheme de tipul celor din figura 2.19, care se numește implementare cu secțiuni de ordinul 2. O astfel de implementare este în general mai robustă decât cele directă sau transpusă (din punctul de vedere al sensibilității la erori care afectează coeficienții filtrului).

*Filtre FIR cu fază liniară.* Coeficienții acestor filtre sunt (anti)simetrice, ceea ce permite reducerea numărului de înmulțiri. Spre exemplu, schema de implementare a filtrului FIR de tip II (2.37) este prezentată în figura 2.20 (păstrăm notația  $B(z)$  pentru filtru). Schema se bazează pe scrierea ecuației cu diferențe corespunzătoare (2.37) în forma

$$\begin{aligned} y[n] &= b_0(x[n] + x[n - M]) + b_1(x[n - 1] + x[n - M + 1]) + \dots \\ &\quad + b_{\frac{M-1}{2}} \left( x \left[ n - \frac{M-1}{2} \right] + x \left[ n - \frac{M+1}{2} \right] \right). \end{aligned}$$

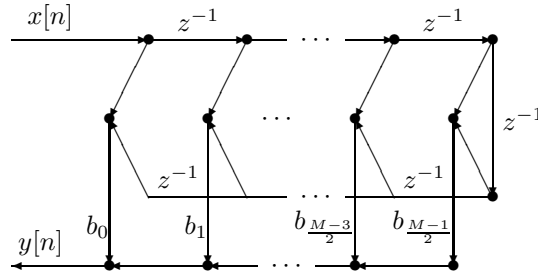


Figura 2.20: Implementarea unui filtru FIR cu fază liniară, de tip II.

Sunt necesare doar  $(M + 1)/2$  înmulțiri, câte una pentru fiecare coeficient distinct al filtrului. Numărul de adunări și de elemente de întârziere este același ca pentru schema standard din figura 2.15.

### Probleme propuse

**PP 2.6.1** Desenați scheme de implementare a filtrelor FIR, respectiv AR, în formă transpusă. Demonstrați corectitudinea lor, scriind ecuațiile cu diferențe corespunzătoare.

**PP 2.6.2** Comparați numărul de operații necesar schemelor directă, transpusă și cu secțiuni de ordinul 2. Este vreuna mai avantajoasă din acest punct de vedere ?

**PP 2.6.3** Desenați scheme eficiente de implementare pentru filtrele FIR cu fază liniară de tip I, III, IV. Care sunt deosebirile între implementările filtrelor simetrice și antisimetrice ?



## Capitolul 3

# Eșantionare

### 3.1 Eșantionare (conversie analogic-numeric)

**Definiția 3.1** *Un semnal în timp continuu este o funcție  $x_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Notăm  $x_a(t)$  valoarea semnalului în momentul  $t \in \mathbb{R}$ . (Aceași notație poate fi folosită pentru întreg semnalul.)*

Mai departe, vom numi  $x_a$  *semnal analogic* sau *semnal continuu* (chiar dacă funcția  $x_a$  nu este continuă), cu scopul de a-l diferenția de semnalele discrete studiate anterior. (O altă denumire utilizată este cea de semnal continuu.) Vom studia în continuare eșantionarea, adică transformarea unui semnal analogic într-unul discret prin reducerea suportului semnalului de la  $\mathbb{R}$  la  $\mathbb{Z}$ .

**Definiția 3.2** *Fie  $x_a(t)$  un semnal analogic și  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , o mulțime numărabilă de valori reale distincte ordonate, i.e.  $t_n < t_m$  dacă  $n < m$ . Eșantionarea este transformarea semnalului  $x_a(t)$  în semnalul discret  $x[n]$  definit prin*

$$x[n] = x_a(t_n). \quad (3.1)$$

Eșantionarea uniformă este definită de relația

$$x[n] = x_a(nT), \quad (3.2)$$

unde  $T > 0$  este perioada de eșantionare. (Deci, se ia  $t_n = nT$  în (3.1) pentru a obține (3.2).)

Un exemplu de semnal analogic eșantionat uniform și neuniform este prezentat în figura 3.1. Din punct de vedere practic, eșantionarea uniformă este mult mai importantă, de aceea ne vom ocupa doar de ea în continuare. Deoarece efectul temporal al eșantionării este evident, vom studia mai departe efectul ei asupra spectrului semnalului.

Spectrul unui semnal analogic  $x_a(t)$  este transformata Fourier a semnalului, adică

$$X_a(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j\Omega t} dt, \quad \Omega \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

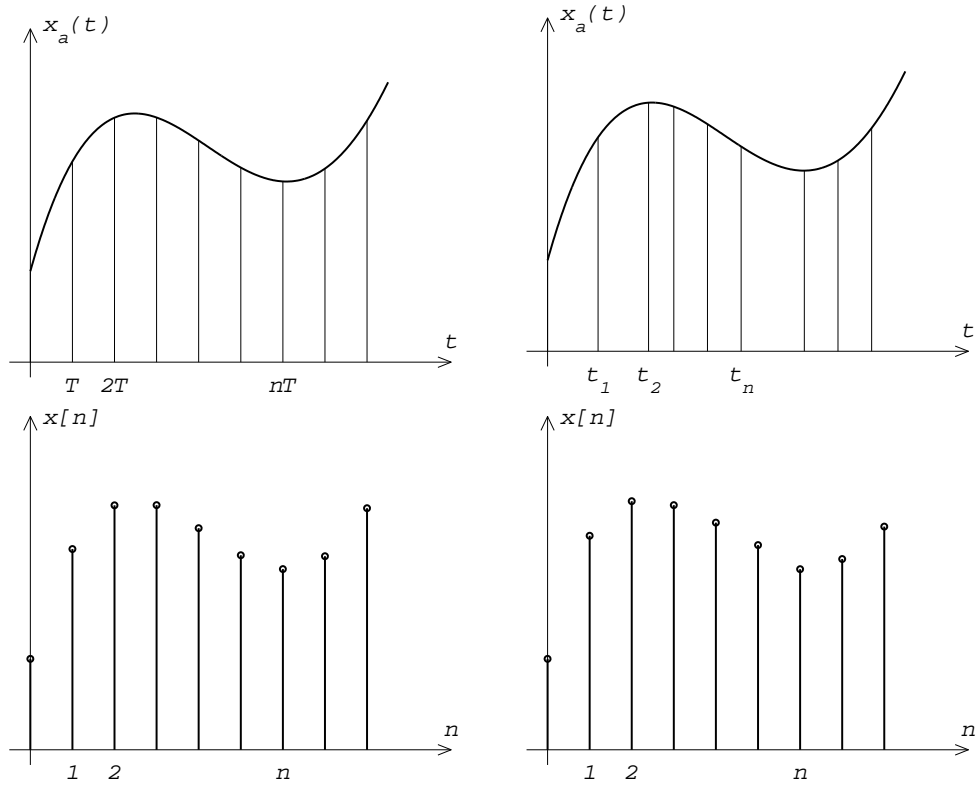


Figura 3.1: Sus: un semnal analogic eșantionat uniform (stânga) și neuniform (dreapta). Jos: semnalele discrete obținute.

Presupunem că semnalul  $x_a(t)$  are energie finită, astfel că transformata sa Fourier există. Convenim să notăm  $\Omega \in \mathbb{R}$  frecvența în domeniul analogic și  $\omega \in [-\pi, \pi]$  frecvența în domeniul discret. Spectrul semnalului eșantionat este transformata Fourier (1.10)

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}.$$

În continuare, căutăm răspunsul unor întrebări foarte naturale:

- Care este relația între  $X_a(\Omega)$  și  $X(\omega)$  ?
- Ce (din spectrul semnalului analogic) se pierde prin eșantionare ?
- Când nu se pierde nimic ? (Este posibil acest caz ?)

**Teorema 3.3** *Fie  $x_a(t)$  un semnal analogic cu energie finită și  $x[n]$  semnalul discret obținut din  $x_a$  prin eșantionare cu perioada  $T$ . Între spectrele celor două sem-*



nale are loc relația

$$X(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} X_a\left(\frac{\omega + 2\ell\pi}{T}\right), \quad \omega \in [-\pi, \pi]. \quad (3.4)$$

*Demonstrație.* Folosind (3.2) și expresia transformatei Fourier inverse pentru un semnal analogic, putem scrie

$$\begin{aligned} x[n] &= x_a(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\Omega) e^{j\Omega nT} d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \int_{(2\ell-1)\pi/T}^{(2\ell+1)\pi/T} X_a(\Omega) e^{j\Omega nT} d\Omega. \end{aligned}$$

Mai departe, cu substituțiile succesive  $\Omega \leftarrow \Omega + 2\ell\pi/T$  și

$$\Omega = \omega/T, \quad (3.5)$$

obținem

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X_a(\Omega + 2\ell\pi/T) e^{j\Omega nT} d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{T} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} X_a\left(\frac{\omega + 2\ell\pi}{T}\right) e^{j\omega n} d\omega. \end{aligned}$$

Comparăm ultima relație de mai sus cu transformata Fourier inversă a spectrului semnalului discret  $x[n]$ , anume

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega,$$

și egalitatea (3.4) rezultă prin identificare. ■

**Observația 3.4** Din egalitatea (3.4) se observă că, pentru o frecvență  $\omega$  fixată, spectrul  $X(\omega)$  al semnalului eșantionat este o sumă infinită de valori  $X_a(\Omega_\ell)$ , cu  $\Omega_\ell \in [(2\ell-1)\pi/T, (2\ell+1)\pi/T]$ ,  $\ell \in \mathbb{Z}$ . Distingem două situații importante.

1. Fie  $\Omega_N = \pi/T$ . Presupunem că *semnalul analogic are spectrul limitat la banda  $[-\Omega_N, \Omega_N]$* , deci  $X_a(\Omega) = 0$ , pentru  $|\Omega| > \Omega_N$ . În acest caz, egalitatea (3.4) se reduce la

$$X(\omega) = \frac{1}{T} X_a(\omega/T), \quad \omega \in [-\pi, \pi], \quad (3.6)$$

deci *spectrul semnalului eșantionat este esențialmente egal cu cel al semnalului analogic*. Frecvența  $\Omega_N$ , egală cu jumătatea frecvenței de eșantionare  $\Omega_e = 2\pi/T$ , se numește *frecvență Nyquist*. Prezentăm în figura 3.2 spectrul unui semnal analogic cu bandă de frecvență limitată la frecvența Nyquist, precum și spectrul (periodic) al semnalului eșantionat.

2. Dacă spectrul semnalului analogic se întinde dincolo de frecvența Nyquist, atunci spectrul semnalului eșantionat nu mai este, în general, egal cu cel al semnalului analogic. Spre deosebire de cazul anterior, suma din (3.4) conține mai mult de un termen. Apare fenomenul de *aliere* (engl. aliasing), ilustrat în figura 3.3.

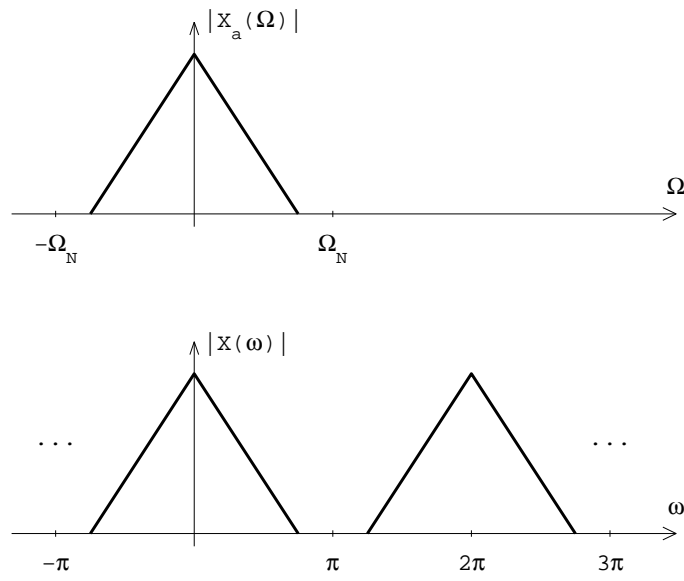


Figura 3.2: Spectrul unui semnal analogic de bandă limitată (sus) și spectrul semnalului eșantionat (jos).

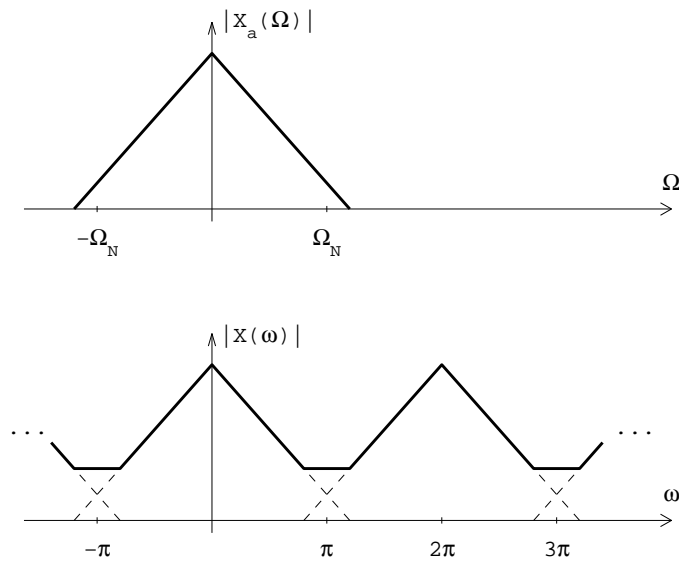


Figura 3.3: Spectrul unui semnal analogic a cărui bandă depășește frecvența Nyquist (sus) și spectrul semnalului eșantionat, în care este vizibil fenomenul de aliere (jos).

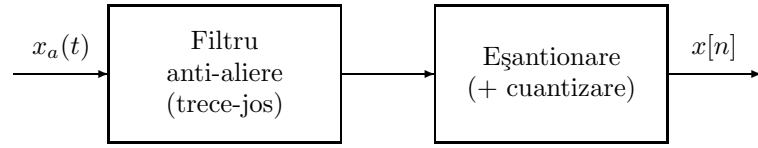


Figura 3.4: Schemă practică de eșantionare.

*Conversia analog-numeric.* Schema practică de eșantionare, ilustrată în figura 3.4, conține două blocuri. Filtrul anti-alieră este un filtru analogic trece-jos, cu frecvența de tăiere egală cu frecvența Nyquist  $\Omega_N = \Omega_e/2$ . În mod normal, frecvența de eșantionare este aleasă astfel încât spectrul semnalului analogic util  $x_a(t)$  să fie practic nul deasupra frecvenței Nyquist; filtrul anti-alieră este folosit pentru a preveni alierea în cazul alterării semnalului util cu zgomot de înaltă frecvență, care, prin aliere, ar modifica spectrul semnalului eșantionat la frecvențe joase. Al doilea bloc din figura 3.4 efectuează eșantionarea propriu-zisă, adică operația (3.2). Un convertor analog-numeric (CAN) mai face în plus cuantizarea semnalului eșantionat; conform cu (3.2), semnalul  $x[n]$  are valori reale; în sistemele numerice de prelucrare a semnalelor se utilizează însă numere reprezentate într-un format precizat, care permite utilizarea unei mulțimi finite de valori; operațiunea de transformare a valorilor reale în valori din această mulțime finită se numește *cuantizare* și va fi discutată într-un capitol următor.

## Probleme rezolvate

**PR 3.1.1** Un semnal analogic sinusoidal cu frecvența de 1KHz este eșantionat uniform cu perioada  $T = 100\mu s$ . Care este frecvența semnalului discret obținut ?

*Soluție 1.* Relația (3.5) dintre frecvențele continue și cele discrete este liniară. Aplicăm regula de trei simplă. Având în vedere că frecvenței Nyquist  $\Omega_N = \Omega_e/2 = \pi/T = 5\text{KHz}$  îi corespunde frecvența discretă  $\pi$ , rezultă că frecvenței analogice  $\Omega = 1\text{KHz}$ , îi corespunde frecvența discretă  $\omega = \Omega \cdot \pi/\Omega_N = \pi/5$ .

*Soluție 2.* Perioada semnalului analogic sinusoidal este de 1ms. O perioadă a semnalului eșantionat conține 10 eșantioane, deci frecvența acestui semnal este  $2\pi/10 = \pi/5$ . ■

**PR 3.1.2** Explicați forma spectrului semnalului discret din figura 3.3.

*Soluție.* Spectrul se calculează ca în relația (3.4). Spectrul semnalului analogic din figura 3.3 se împarte în trei părți, corespunzătoare intervalelor  $(-3\Omega_N, -\Omega_N]$ ,  $(-\Omega_N, \Omega_N]$ ,  $(\Omega_N, 3\Omega_N]$ . Se deplasează (pe orizontală) graficele celor trei părți în același interval  $[-\Omega_N, \Omega_N]$ , după care se adună. Graficul obținut este cel al spectrului discret, pe intervalul  $(-\pi, \pi]$  (mai puțin o scalare pe verticală, pentru a lua în considerare factorul  $1/T$  din (3.4)). Desenul din figura 3.3 mai pune în evidență și periodicitatea spectrului unui semnal discret. ■

## Probleme propuse

**PP 3.1.1** Considerăm semnalul analogic  $x_a(t)$  cu spectrul ideal

$$X_a(\Omega) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } |\Omega| < \Omega_0, \\ 0, & \text{altfel,} \end{cases}$$

cu  $\Omega_0 > 0$  fixat. Semnalul este eșantionat cu frecvența  $\Omega_e$ . Desenați spectrul semnalului discret rezultat, pentru diverse valori ale lui  $\Omega_e$ . Considerați cel puțin cazurile  $\Omega_e = \Omega_0$ ,  $\Omega_e = 3\Omega_0/2$ ,  $\Omega_e = 3\Omega_0$ .

**PP 3.1.2** Un semnal analogic  $x_a(t)$  are spectrul de bandă limitată, în sensul că există o frecvență  $\Omega_0$  astfel încât  $X_a(\Omega) = 0$  pentru  $|\Omega| > \Omega_0$ . Se eșantionează semnalul cu frecvența  $\Omega_e = 4\Omega_0$ , obținându-se semnalul discret  $x[n]$ . Se consideră semnalele  $x_1[n] = x[2n]$  și  $x_2[n] = x[2n+1]$ , care conțin eșantioanele pare, respectiv impare, ale semnalului  $x[n]$ . Ce puteți spune despre spectrele semnalelor  $x_1[n]$  și  $x_2[n]$  ?

**PP 3.1.3** Se poate schimba ordinea operațiilor în schema din figura 3.4 ? Mai precis, se poate face întâi eșantionare și apoi aplica un filtru trece-jos discret ?

## 3.2 Conversie numeric-analogic

Teorema 3.3 spune că, dacă un semnal analogic cu bandă de frecvență limitată (superior) este eșantionat corect, atunci spectrele semnalelor analogic și eșantionat coincid esențialmente. Intuitiv, acest rezultat are semnificația că semnalul analogic  $x_a(t)$  este determinat în întregime de semnalul eșantionat  $x[n]$ . Într-adevăr, are loc următorul rezultat.

**Teorema 3.5** (Whittaker 1935, Shannon 1949) Fie  $x_a(t)$  un semnal analogic și  $x[n] = x_a(nT)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , semnalul discret obținut din  $x_a(t)$  prin eșantionare uniformă cu perioada  $T$ . Presupunem că semnalul analogic are spectrul de bandă limitată, i.e.  $X_a(\Omega) = 0$  pentru  $|\Omega| > \Omega_N$ , unde  $\Omega_N = \pi/T$  este frecvența Nyquist. Atunci are loc egalitatea

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin(\pi(t - nT)/T)}{\pi(t - nT)/T}. \quad (3.7)$$

*Demonstrație.* Putem scrie următorul șir de egalități, explicate mai jos:

$$\begin{aligned} x_a(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X_a(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi T} \int_{-\pi}^{\pi} X_a(\omega/T) e^{j\omega t/T} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega t/T} d\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \right) e^{j\omega t/T} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(t-nT)/T} d\omega
\end{aligned}$$

Prima egalitate este definiția transformatei Fourier inversă (în timp continuu). A doua provine din condiția de limitare a spectrului semnalului  $x_a(t)$ . A treia se bazează pe schimbarea de variabilă (3.5), care face legătura între frecvențele continue și discrete. A patra utilizează relația (3.6) dintre spectre. A cincea folosește definiția transformatei Fourier a semnalului  $x[n]$ , iar pentru ultima se permută suma cu integrala.

Ținând seama că

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{\sin(\pi\tau)}{\pi\tau},$$

egalitatea (3.7) rezultă imediat. ■

Notând

$$s_n(t) = \frac{\sin(\pi(t-nT)/T)}{\pi(t-nT)/T} \quad (3.8)$$

funcția sinc analogică (cu argumentul deplasat), se poate demonstra (vezi **PR3.2.2**) că

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_n(t) s_m(t) dt = T \delta[n-m]. \quad (3.9)$$

Așadar, funcțiile  $s_n(t)$  sunt ortogonale. Egalitatea (3.7) poate fi scrisă

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] s_n(t)$$

și are semnificația că orice semnal analogic cu spectru limitat poate fi reprezentat în baza ortogonală (numărabilă !) formată de funcțiile sinc (3.8), pentru un  $T$  convenabil ales.

*Convertorul numeric-analogic (CNA) ideal.* Egalitatea (3.7) poate fi interpretată prin schema din figura 3.5. Formatorul de impulsuri transformă semnalul discret  $x[n]$  în semnalul analogic

$$x_i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta(t-nT), \quad (3.10)$$

i.e. într-o sumă de impulsuri echidistante, ca în figura 3.6. (Impulsul Dirac  $x[n]\delta(t-nT)$  are "înălțime" infinită, dar este figurat printr-o săgeată de amplitudine  $x[n]$ .)

Filtrul analogic  $H_{tj}(\Omega)$  este un filtru trece-jos ideal cu banda de trecere  $[0, \Omega_N]$ , i.e.

$$H_{tj}(\Omega) = \begin{cases} T, & \text{pentru } |\Omega| \leq \Omega_N, \\ 0, & \text{pentru } |\Omega| > \Omega_N. \end{cases} \quad (3.11)$$

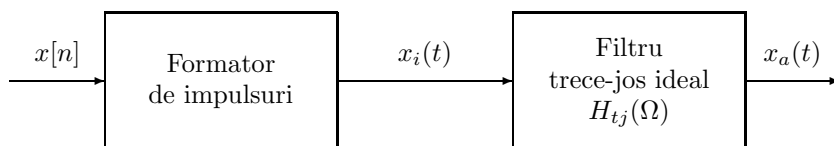


Figura 3.5: Convertorul numeric-analogic ideal.

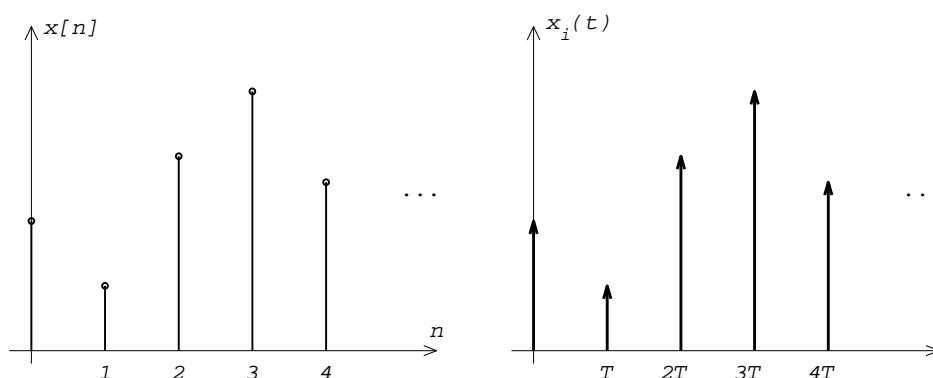


Figura 3.6: Funcționarea formatorului de impulsuri din figura 3.5. Stânga: semnalul discret de intrare. Dreapta: semnalul analogic de ieșire.

Demonstrăm în continuare corectitudinea schemei din figura 3.5. Notând  $h_{tj}(t)$  răspunsul la impuls al acestui filtru și ținând seama de (3.10), putem scrie

$$x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_i(\tau) h_{tj}(t - \tau) d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] h_{tj}(t - nT). \quad (3.12)$$

Prin identificare cu (3.7) rezultă imediat

$$h_{tj}(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}, \quad (3.13)$$

care este într-adevăr răspunsul la impuls al filtrului ideal (3.11); vezi **PR3.2.1**.

Răspunsul la impuls (3.13) are suport infinit bilateral, ceea ce se vede și din relația (3.7), care descrie modul de refacere a semnalului analogic din cel eșantionat. Așadar, convertorul numeric-analogic ideal are doar importanță teoretică. În practică, se folosesc scheme simple care aproximează comportarea CNA din figura 3.5.

*Interpolare de ordinul zero.* Un mijloc simplu de transformare a unui semnal discret (eșantionat)  $x[n]$  într-unul analogic, respectând relația (3.2), este de a menține semnalul constant pe durate egale cu perioada de eșantionare  $T$ , ca în figura 3.7. Semnalul obținut este

$$x_0(t) = x[\lfloor t/T \rfloor], \quad (3.14)$$

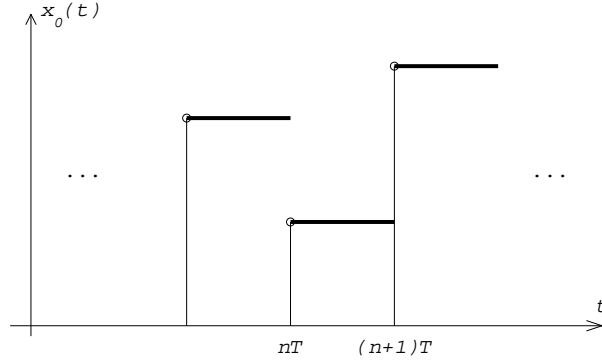


Figura 3.7: Funcționarea unui interpolator de ordin zero.

unde  $[\cdot]$  este funcția parte întreagă cu rotunjire inferioară. Se observă imediat că  $x_0(t) = x[n]$  pentru  $t \in [nT, (n+1)T)$ . Semnalul  $x_0(t)$  este o aproximare a semnalului analogic  $x_a(t)$ , refăcut ideal ca în (3.7). Pentru a avea o imagine în frecvență a calității aproximării, înlocuim, în figura 3.5, filtrul ideal  $H_{tj}(\Omega)$ , cu un filtru  $H_0(\Omega)$ , astfel încât la ieșire să se obțină semnalul  $x_0(t)$ . Notând  $h_0(t)$  răspunsul la impuls al filtrului  $H_0(\Omega)$ , prin analogie cu (3.12) rezultă

$$x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_0(t - nT).$$

Această relație trebuie să fie identică cu (3.14), i.e. răspunsul la impuls este (vezi figura 3.8)

$$h_0(t) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } t \in [0, T), \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases} \quad (3.15)$$

Răspunsul în frecvență este

$$H_0(\Omega) = \int_0^T e^{-j\Omega t} dt = \frac{2 \sin(\Omega T/2)}{\Omega} e^{-j\Omega T/2}. \quad (3.16)$$

Amplitudinea răspunsului,  $|H_0(\Omega)|$ , este desenată în dreapta figurii 3.8. Se observă caracterul trece-jos al răspunsului, care aproximează grosier răspunsul ideal (3.11). Desigur, alegerea altor filtre în locul lui  $H_0(\Omega)$  poate furniza aproximări mai bune. Un exemplu este interpolatorul de ordinul unu, descris în problema **PR3.2.3**.

### Probleme rezolvate

**PR 3.2.1** Demonstrați că răspunsul la impuls al filtrului trece-jos ideal (3.11) are forma (3.13).

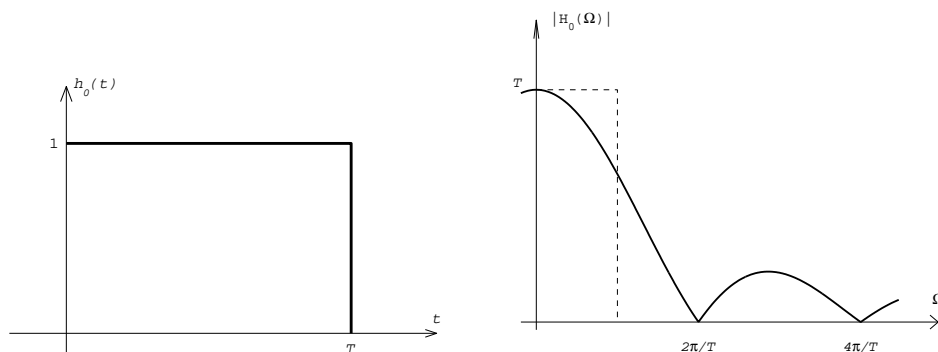


Figura 3.8: Filtrul de interpolare de ordinul zero: răspunsul la impuls (stânga) și amplitudinea răspunsului în frecvență (dreapta).

*Soluție.* Aplicând transformata Fourier inversă (în timp continuu), obținem

$$\begin{aligned} h_{tj}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{T}{2\pi} \int_{-\Omega_N}^{\Omega_N} e^{j\Omega t} d\Omega \\ &= \frac{T}{2\pi j t} e^{j\Omega t} \Big|_{-\Omega_N}^{\Omega_N} = \frac{\sin(\Omega_N t)}{\pi t / T}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Înlocuind  $\Omega_N = \pi/T$  rezultă (3.13). ■

**PR 3.2.2** Demonstrați egalitatea (3.9), care arată ortogonalitatea funcțiilor sinc analogice.

*Soluție.* Din problema precedentă știm că transformata Fourier a funcției sinc  $s_0(t)$  este filtrul trece-jos ideal  $S_0(\Omega) = H_{tj}(\Omega)$  din (3.11). În plus, dacă  $x(t)$  este un semnal analogic și  $X(\Omega)$  transformata sa Fourier, atunci avem egalitatea

$$TF(x(t - \tau)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) e^{-j\Omega t} dt = e^{-j\Omega \tau} X(\Omega).$$

Observând că  $s_n(t) = s_0(t - nT)$  și folosind egalitatea Parseval (A.6) obținem

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} s_0(t - nT) s_0(t - mT) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\Omega nT} S_0(\Omega) e^{j\Omega mT} S_0(\Omega) d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} T^2 e^{j\Omega(m-n)T} d\Omega = T \delta[m - n], \end{aligned}$$

adică egalitatea (3.9). ■

**PR 3.2.3 (Interpolare de ordinul unu)** Un semnal discret  $x[n]$  poate fi transformat într-unul continuu  $x_1(t)$ , prin interpolare de ordinul unu, așa cum se arată



în figura 3.9, unind cu segmente de dreaptă valorile semnalului discret. Semnalul obținut este

$$x_1(t) = \frac{(t - nT)x[n+1] + ((n+1)T - t)x[n]}{T}, \quad t \in [nT, (n+1)T]. \quad (3.18)$$

Procedând analog cu cazul interpolării de ordinul zero și notând  $H_1(\Omega)$  filtrul care aproximează filtrul ideal  $H_{tj}(\Omega)$  din figura 3.5, demonstrați că răspunsul la impuls al filtrului este

$$h_1(t) = \begin{cases} 1 - |t|/T, & \text{pentru } |t| \leq T, \\ 0, & \text{altfel,} \end{cases} \quad (3.19)$$

iar răspunsul în frecvență este

$$H_1(\Omega) = \frac{4 \sin^2(\Omega T/2)}{T \Omega^2} = \frac{1}{T} |H_0(\Omega)|^2, \quad (3.20)$$

unde  $H_0(\Omega)$  este răspunsul în frecvență (3.16) al interpolatorului de ordin zero. Cele două răspunsuri sunt ilustrate în figura 3.10.

Apreciați calitatea interpolatorului de ordin unu (comparativ cu cel de ordin zero) și comentați eventuale dificultăți de implementare.

*Soluție.* Expresia (3.19) a răspunsului la impuls se demonstrează identificând definiția (3.18) a interpolatorului, rescrisă astfel

$$x_1(t) = \frac{1}{T} \{ (t - (n+1)T + T)x[n+1] + (-t + nT + T)x[n] \},$$

cu relația (analoagă cu (3.12))

$$x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] h_1(t - nT).$$

Calculând transformata Fourier a răspunsului la impuls obținem

$$\begin{aligned} H_1(\Omega) &= \int_{-T}^T (1 - |t|/T) e^{-j\Omega t} dt = \left. \frac{e^{-j\Omega t}}{-j\Omega} \right|_{-T}^T - \frac{1}{T} \int_0^T t (e^{-j\Omega t} + e^{-j\Omega t}) dt \\ &= \frac{2 \sin(\Omega T)}{\Omega} - \frac{2}{T} \int_0^T t \cos(\Omega t) dt. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Un calcul elementar arată că

$$\int_0^T t \cos(\Omega t) dt = \frac{T \sin(\Omega T)}{\Omega} - \frac{2 \sin^2(\Omega T/2)}{\Omega^2},$$

și deci (3.20) rezultă imediat.

În mod evident, interpolatorul de ordin unu are o atenuare mai bună decât cel de ordin 0, precum și o zonă de tranziție mai abruptă. Pe de altă parte, așa cum era de așteptat, avem  $H_1(0) = H_0(0) = T$ . Răspunsul la impuls  $h_1(t)$  arată că interpolatorul de ordin 1 este necauzal. Totuși, introducând o întârziere  $T$ , el devine cauzal și poate fi astfel implementat. ■

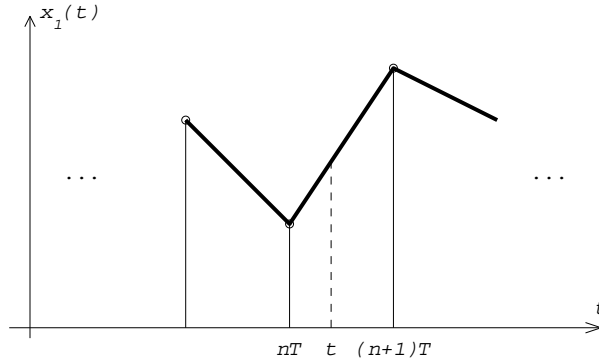


Figura 3.9: Funcționarea unui interpolator de ordin unu.

### Probleme propuse

**PP 3.2.1** Construim un interpolator de ordinul zero înlocuind relația de funcționare (3.14) cu

$$x_0(t) = x[\lfloor t/T \rfloor],$$

unde  $\lfloor \cdot \rfloor$  este partea întreagă prin rotunjire (la cel mai apropiat întreg). Desenați un exemplu de funcționare a acestui interpolator. Calculați răspunsurile lui la impuls și în frecvență.

**PP 3.2.2** Fie interpolatorul care, având la intrare semnalul discret  $x[n]$ , are ieșirea

$$x_m(t) = \frac{1}{2} (x[\lfloor t/T \rfloor] + x[\lfloor t/T - 1 \rfloor]).$$

Desenați un exemplu de funcționare a acestui interpolator. Calculați răspunsurile lui la impuls și în frecvență. Poate fi el un interpolator util? Comparați-l cu interpolatorul de ordinul zero.

## 3.3 Schimbarea frecvenței de eșantionare

În această secțiune vom studia modul în care se poate schimba frecvența de eșantionare a unui semnal analogic  $x_a(t)$ , dispunând *numai* de un semnal discret  $x[n]$ , obținut printr-o eșantionare anterioară din semnalul  $x_a(t)$ . Mai precis, notând  $T$  perioada primei eșantionări (deci  $x[n] = x_a(nT)$ ) și  $T_1$  noua perioadă de eșantionare, căutăm semnalul discret  $y[n]$  astfel încât

$$y[n] = x_a(nT_1). \quad (3.22)$$

Deoarece dispunem doar de semnalul  $x[n]$ , și nu de semnalul analogic  $x_a(t)$ , obținerea egalității în (3.22) este în general imposibilă. Totuși, cu unele condiții suplimentare,

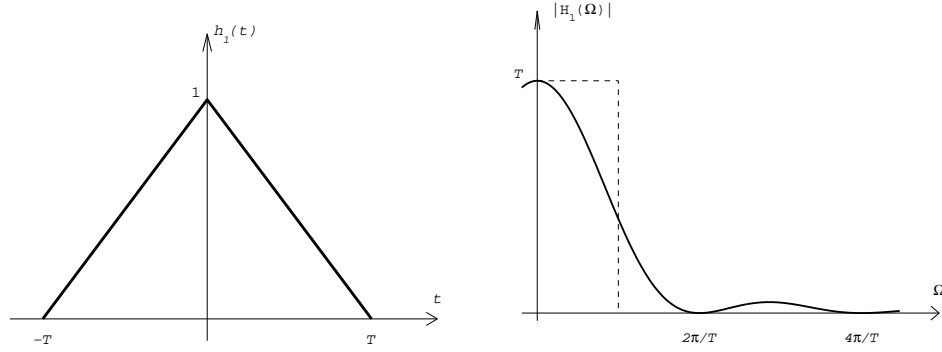


Figura 3.10: Filtrul de interpolare de ordinul unu: răspunsul la impuls (stânga) și amplitudinea răspunsului în frecvență (dreapta).

se pot obține bune aproximații, nu neapărat în sensul (3.22), ci în sensul că spectrele semnalelor  $y[n]$  și  $x[n]$  coincid sau sunt foarte apropiate unul de celălalt. Una dintre condiții este ca raportul  $T/T_1$  să fie un număr rațional, ai cărui numărător și numitor să aibă, de preferință, valori relativ mici. Cele mai simple cazuri sunt cele în care unul dintre rapoartele  $T/T_1$  sau  $T_1/T$  este întreg. Acestea vor fi tratate primele.

În cele ce urmează, vom numi  $x[n]$  semnalul *inițial* iar  $y[n]$  semnalul *reeșantionat*. Operația de schimbare a frecvenței de eșantionare apare la conversii de format (de exemplu, se crește frecvența de eșantionare a unor înregistrări vechi, pentru adaptarea la noi standarde), la transferul între sisteme care utilizează rate diferite de eșantionare etc.

### 3.3.1 Decimare

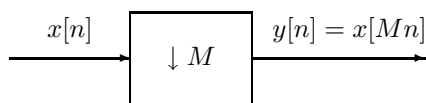
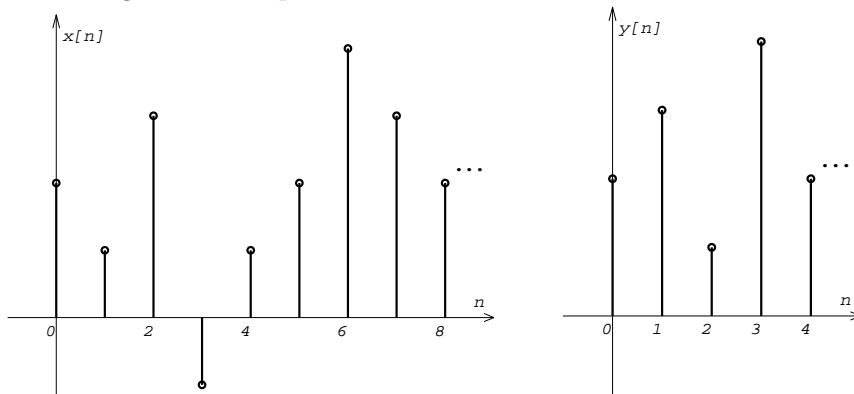
În cazul în care  $T_1/T = M \in \mathbb{N}$ , frecvența de eșantionare se reduce de  $M$  ori. Relația între semnalul reeșantionat și cel inițial este

$$y[n] = x[Mn]. \quad (3.23)$$

Sistemul care realizează această operație de subeșantionare se numește *decimator* cu factorul  $M$ ; în mod tradițional, operația de decimare se notează cu  $\downarrow M$ , așa cum se vede în figura 3.11; funcționarea unui decimator cu factorul 2 este ilustrată în figura 3.12. Suntem interesați în a afla relația dintre spectrele semnalelor reeșantionat și inițial.

**Teorema 3.6** *Fie  $x[n]$  un semnal discret cu energie finită și  $y[n]$  semnalul discret obținut prin decimare cu factorul  $M$  ca în (3.23). Între spectrele celor două semnale are loc relația*

$$Y(\omega) = \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{M-1} X\left(\frac{\omega + 2\ell\pi}{M}\right). \quad (3.24)$$

Figura 3.11: Reprezentarea unui decimator cu factorul  $M$ .Figura 3.12: Funcționarea unui decimator cu factorul 2; în stânga, semnalul de intrare  $x[n]$ ; în dreapta, semnalul de ieșire  $y[n]$ .

*Demonstrație.* Pentru  $n \in \mathbb{Z}$  are loc egalitatea

$$\sum_{\ell=0}^{M-1} e^{-j2\pi\ell n/M} = \begin{cases} M, & \text{dacă } n \bmod M = 0, \\ 0, & \text{altfel,} \end{cases} \quad (3.25)$$

demonstrată în **PR3.3.1**. Termenul drept din (3.24) poate fi scris

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{M-1} X\left(\frac{\omega + 2\ell\pi}{M}\right) &= \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{M-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j(\omega + 2\ell\pi)n/M} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n/M} \sum_{\ell=0}^{M-1} e^{-j2\pi\ell n/M} \\ &\stackrel{(3.25)}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n/M} \delta[n \bmod M] \\ &\stackrel{n \leftarrow Mn}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[Mn] e^{-j\omega n}. \end{aligned}$$

Ultimul termen este chiar  $Y(\omega)$ , ceea ce demonstrează (3.24). ■

**Observația 3.7** Analogia dintre relațiile (3.4) și (3.24) este evidentă; prima indică transformarea spectrului unui semnal analogic prin eșantionare, a doua arată transformarea spectrului unui semnal discret după subeșantionare. Din (3.24) se

observă că, pentru o frecvență  $\omega$  fixată, spectrul  $Y(\omega)$  al semnalului decimat cu factorul  $M$  este o sumă de  $M$  valori ale spectrului semnalului inițial. Mai precis, pentru a obține  $Y(\omega)$  pe intervalul  $[-\pi, \pi]$ , se ia spectrul  $X(\omega)$  pe fiecare interval  $[(2\ell-1)\pi/M, (2\ell+1)\pi/M]$ ,  $\ell = 0 : M-1$ , se deplasează la stânga pentru a coincide cu  $[-\pi/M, \pi/M]$ , se expandează în frecvență cu factorul  $M$ , după care se adună cele  $M$  spectre astfel obținute. Distingem două situații importante.

1. Dacă semnalul inițial are spectrul limitat la banda  $[-\pi/M, \pi/M]$ , deci  $X(\omega) = 0$  pentru  $\pi/M < |\omega| \leq \pi$ , atunci egalitatea (3.24) se reduce la

$$Y(\omega) = \frac{1}{M}X(\omega/M), \quad \omega \in [-\pi, \pi], \quad (3.26)$$

deci spectrul semnalului decimat are aceeași formă ca spectrul semnalului inițial, dar expandată pe întreg intervalul  $[-\pi, \pi]$ . Prezintă în figura 3.13 ilustrarea acestei transformări. Subliniem că spectrele celor două semnale discrete corespund *aceluiași* spectru al semnalului analogic din care a fost obținut  $x[n]$  (evident, cu condiția ca frecvența de eșantionare inițială  $\Omega_e$  să fi fost de cel puțin  $2M$  ori mai mare decât banda de frecvență a semnalului analogic; i.e. frecvența de eșantionare  $\Omega_e/M$ , corespunzătoare semnalului decimat, e încă mai mare decât dublul benzii de frecvență a semnalului analogic, ceea ce asigură absența alierii).

2. Dacă spectrul semnalului inițial se întinde dincolo de frecvența  $\pi/M$ , atunci spectrul semnalului decimat nu mai are, în general, aceeași formă ca spectrul semnalului inițial. Apare fenomenul de *alierie*, ilustrat în figura 3.14.

Pentru a evita alierea (dar afectând spectrul inițial), se utilizează un filtru trece-jos care taie frecvențele superioare lui  $\pi/M$ . Schema de reducere a frecvenței de eșantionare cu factorul  $M$  are atunci aspectul din figura 3.15.

### 3.3.2 Interpolare (discretă)

Trecem acum la cazul  $T/T_1 = M \in \mathbb{N}$ , adică cel în care frecvența de eșantionare crește de  $M$  ori. Așadar, între fiecare două eșantioane ale semnalului  $x[n]$  apar  $M-1$  eșantioane noi. *Interpolatorul* (discret) este sistemul care atribuie valoarea zero eșantioanelor noi, deci funcționează după regula

$$y[n] = \begin{cases} x[n/M], & \text{dacă } n \bmod M = 0, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases} \quad (3.27)$$

Operația de interpolare cu factorul  $M$  se notează cu  $\uparrow M$ , așa cum se vede în figura 3.16; funcționarea unui interpolator este ilustrată în figura 3.17. Relația dintre spectrele semnalelor inițial și interpolat este dată de următoarea teoremă.

**Teorema 3.8** *Fie  $x[n]$  un semnal discret cu energie finită și  $y[n]$  semnalul discret obținut prin interpolare cu factorul  $M$  ca în (3.27). Între spectrele celor două semnale are loc relația*

$$Y(\omega) = X(M\omega). \quad (3.28)$$

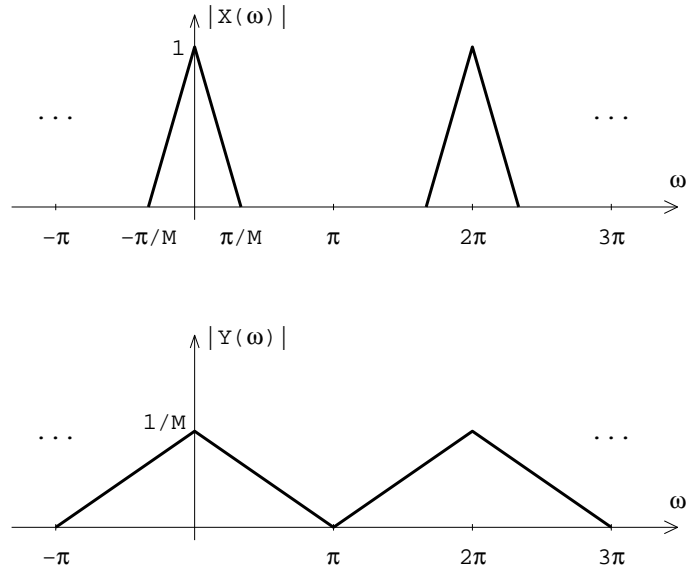


Figura 3.13: Spectrul unui semnal discret  $x[n]$  cu banda limitată la  $[-\pi/M, \pi/M]$  (sus) și spectrul semnalului decimat  $y[n] = x[Mn]$  (jos).

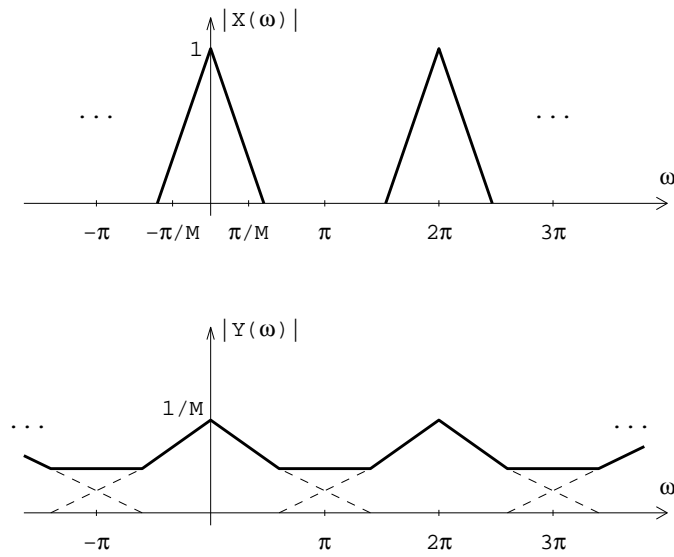


Figura 3.14: Spectrul unui semnal discret a cărui bandă depășește frecvența  $\pi/M$  (sus) și spectrul semnalului decimat, în care este vizibil fenomenul de aliere (jos).

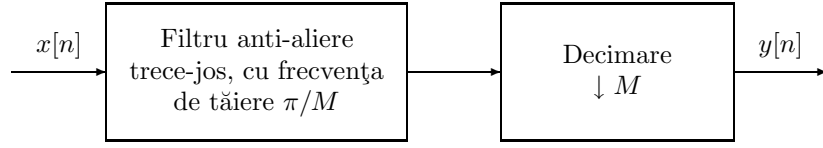


Figura 3.15: Schemă practică de reducere a frecvenței de eșantionare cu factorul  $M \in \mathbb{N}$ .

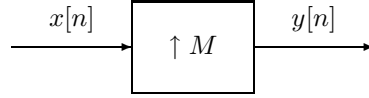


Figura 3.16: Reprezentarea unui interpolator cu factorul  $M$ .

*Demonstrație.* Transformata Fourier a semnalului interpolat este

$$Y(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] e^{-j\omega n} \stackrel{(3.27)}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j\omega M k} = X(M\omega),$$

ceea ce demonstrează (3.28). ■

**Observația 3.9** Relația (3.28) arată că spectrul semnalului interpolat, pe intervalul  $[-\pi, \pi]$ , este obținut prin alăturarea a  $M$  copii ale unei perioade a spectrului semnalului inițial; fiecare copie este comprimată de  $M$  ori. Figura 3.18 ilustrează acest fenomen, numit replicare (engl. replication, imaging).

Pentru a păstra forma spectrului inițial, se utilizează un filtru trece-jos care taie frecvențele superioare lui  $\pi/M$ , deci elimină replicile identice cu cea din banda de frecvență de bază  $[-\pi/M, \pi/M]$ ; un exemplu de aspect al spectrului după operația de filtrare este prezentat în figura 3.18, jos; deoarece filtrarea elimină cele  $M - 1$  replici ale spectrului din afara benzii de bază, filtrul trebuie să aibă o amplificare egală cu  $M$ , pentru a conserva energia semnalului. Schema de creștere a frecvenței de eșantionare cu factorul  $M$  are aspectul din figura 3.19.

*Filtru Nyquist.* Filtrul anti-replicare din figura 3.19 (numit curent filtru de interpolare) este de obicei un filtru FIR simetric

$$H(z) = \sum_{k=-K}^K h[k] z^{-k}. \quad (3.29)$$

Notând  $v[n] = x[n] \uparrow M$  semnalul de la intrarea filtrului, ieșirea schemei de interpolare este

$$y[n] = \sum_{k=n-K}^{n+K} v[k] h[n-k]. \quad (3.30)$$

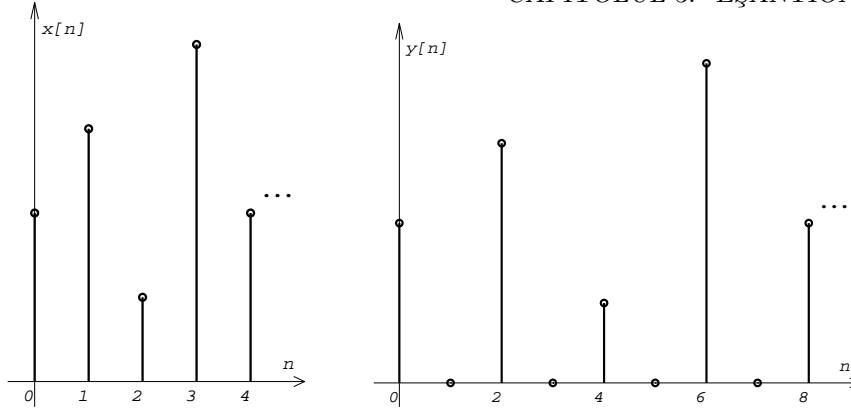


Figura 3.17: Funcționarea unui interpolator cu factorul 2; în stânga, semnalul de intrare  $x[n]$ ; în dreapta, semnalul de ieșire  $y[n]$ .

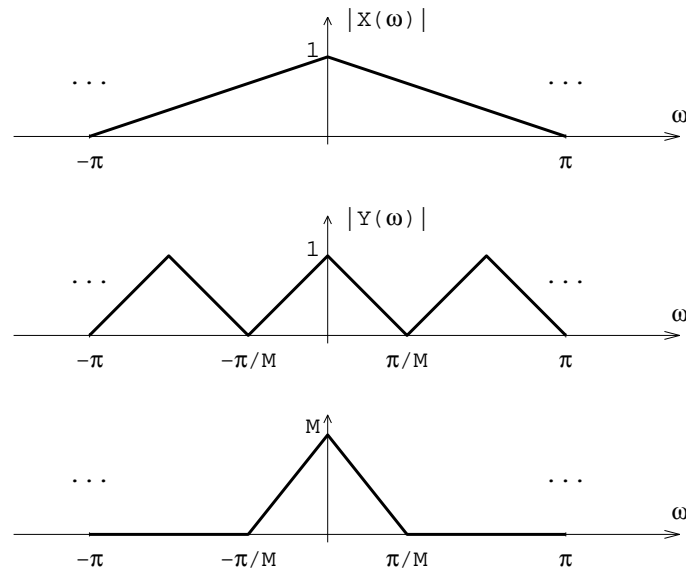


Figura 3.18: Spectrul unui semnal discret  $x[n]$  (sus), spectrul semnalului interpolat conform (3.27) (mijloc) și spectrul semnalului interpolat, după aplicarea unui filtru trece-jos cu frecvența de tăiere  $\pi/M$  și amplificarea  $M$  (jos), cu  $M = 3$ .

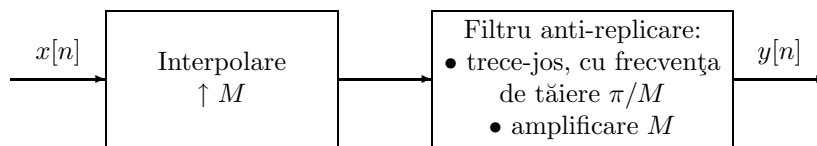


Figura 3.19: Schemă practică de creștere a frecvenței de eșantionare cu factorul  $M \in \mathbb{N}$ .



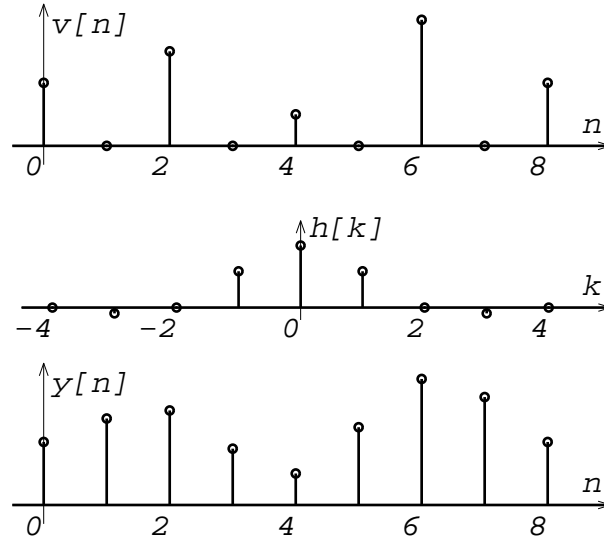


Figura 3.20: Sus: semnal interpolat cu factorul  $M = 2$ . Mijloc: răspuns la impuls al unui filtru Nyquist. Jos: semnalul la ieșirea din filtru.

Eșantionul curent al semnalului de ieșire este obținut din  $2K + 1$  eşantioane ale semnalului  $v[n]$  situate într-o fereastră simetrică în jurul eşantionului curent. Desigur, filtrul devine causal prin introducerea unei întârzieri egale cu  $K$ .

Un filtru (3.29) este numit Nyquist dacă are proprietatea

$$h[Mk] = \delta[k], \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (3.31)$$

Această proprietate face ca în (3.30) să se obțină

$$y[nM] = v[nM] = x[n]. \quad (3.32)$$

Așadar, eşantioanele semnalului inițial  $x[n]$  se regăsesc printre cele ale semnalului reeșantionat  $y[n]$ . Figura 3.20 ilustrează comportarea unui filtru Nyquist, pentru  $M = 2$ . În partea de sus este reprezentat semnalul  $v[n] = x[n] \uparrow 2$ . În mijloc se află răspunsul la impuls al filtrului Nyquist, care respectă condiția (3.31). Jos este reprezentat semnalul de ieșire  $y[n] = v[n] * h[n]$ , obținut prin convoluția celor două semnale precedente. Eșantioanele pare din  $y[n]$  și  $v[n]$  sunt egale; eşantioanele impare din  $y[n]$  se găsesc (ca valoare) între cele pare alăturate (așa cum este intuitiv corect pentru un semnal a cărui frecvență de eşantionare crește de două ori).

### 3.3.3 Schimbarea frecvenței de eşantionare cu un factor rațional

Cazul cel mai general este acela în care  $T_1/T = M/N$ , cu  $M, N \in \mathbb{N}$ ; frecvența de eşantionare crește de  $N/M$  ori (mai precis, crește atunci când  $N > M$  și scade când  $N < M$ ). Această operație de reeșantionare se realizează prin interpolarea

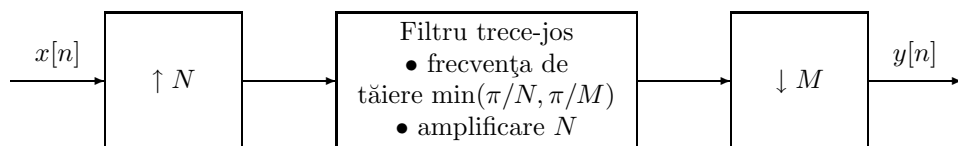


Figura 3.21: Schemă practică de creștere a frecvenței de eșantionare cu factorul  $N/M$ , cu  $M, N \in \mathbb{N}$ .

semnalului inițial  $x[n]$  cu factorul  $N$ , urmată de decimarea cu factorul  $M$  a semnalului interpolat. Schema efectivă de implementare are aspectul din figura 3.21. Conectând în serie interpolatorul din figura 3.19 și decimatorul din figura 3.15, observăm că cele două filtre ideale din schemele respective pot fi înlocuite cu filtrul unic din figura 3.21; acest filtru "moștenește" amplificarea  $N$  de la interpolare și frecvența de tăiere minimă între  $\pi/N$  (interpolare) și  $\pi/M$  (decimare).

### Probleme rezolvate

**PR 3.3.1** Demonstrați egalitatea (3.25). (Aceasta este o relație elementară între rădăcinile de ordinul  $M$  ale unității.)

*Soluție.* Dacă  $n \bmod M = 0$ , atunci  $e^{-j2\pi\ell n/M} = 1$ , pentru orice  $\ell$ . Altfel, avem

$$\sum_{\ell=0}^{M-1} e^{-j2\pi\ell n/M} = \frac{1 - e^{-j2\pi n}}{1 - e^{-j2\pi n/M}} = 0,$$

deoarece  $e^{-j2\pi n} = 1$ . ■

**PR 3.3.2** Un semnal analogic  $x_a(t)$  cu banda de frecvență de 10Hz (în sensul că  $X_a(\Omega) = 0$ , pentru  $\Omega > 10\text{Hz}$ ) este eșantionat cu frecvența  $\Omega_e = 30\text{Hz}$ , obținându-se semnalul discret  $x[n]$ . Ulterior, se dorește modificarea frecvenței de eșantionare, dispunând doar de semnalul  $x[n]$ . Care sunt valorile factorului de creștere a frecvenței de eșantionare pentru care nu apare fenomenul de aliere ?

*Soluție.* Frecvența de eșantionare minimă admisibilă pentru semnalul  $x_a(t)$  este  $\Omega_e = 20\text{Hz}$ , astfel încât frecvența Nyquist asociată  $\Omega_N = \Omega_e/2$  să coincidă cu banda de frecvență a semnalului. În consecință, factorul de creștere a frecvenței de eșantionare trebuie să fie cel puțin  $20/30 = 2/3$  (ceea ce corespunde cu scăderea frecvenței de eșantionare de la 30Hz la 20Hz). O limită superioară nu există (poate doar, eventual, din motive practice). ■

**PR 3.3.3** De ce, la creșterea frecvenței de eșantionare cu factorul  $N/M$ , nu se face *întâi* decimarea cu factorul  $M$  și *apoi* interpolarea cu factorul  $N$  ?

*Soluție.* Pentru ca decimarea să nu producă aliere, banda de frecvență a semnalului  $x[n]$  trebuie să fie mai mică de  $\pi/M$ . Aceasta este o condiție extrem de

restrictivă, mai ales dacă  $N/M > 1$ , deci se dorește creșterea efectivă a frecvenței de eșantionare; în acest caz, efectuarea întâi a interpolării nu impune nici un fel de restricții.

Mai mult, presupunând că banda de frecvență a semnalului  $x[n]$  respectă condiția de mai sus, schema de implementare practică ar conține două filtre, nu doar unul ca în figura 3.21. ■

### Probleme propuse

**PP 3.3.1** Fie  $x[n]$  un semnal discret de bandă  $\pi/2$ , i.e.  $X(\omega) = 0$ , pentru  $\pi/2 < |\omega| \leq \pi$ . Presupunând că  $X(\omega) = 1$  pentru  $|\omega| \leq \pi/2$ , desenați spectrele semnalelor obținute din  $x[n]$  prin creșterea frecvenței de eșantionare cu factorii  $3/2$ ,  $2$ , respectiv  $3$ .

### Ghid Matlab

Fie  $\mathbf{x}$  un semnal cu suport finit. Semnalul  $\mathbf{y}$  obținut din  $\mathbf{x}$  conform schemei de decimare cu factorul  $M$  din figura 3.15 se calculează cu

```
>> y = decimate(x,M)
```

Semnalul obținut conform schemei de interpolare cu factorul  $M$  din figura 3.19 se calculează cu

```
>> y = interp(x,M)
```

Schimbarea frecvenței de eșantionare cu factorul  $N/M$ , implementată ca în figura 3.21, se realizează cu

```
>> y = upfirdn(x,h,N,M)
```

unde vectorul  $\mathbf{h}$  conține coeficienții unui filtru FIR trece-jos. O altă funcție cu același scop, în care filtrul nu mai trebuie precizat de utilizator, se apelează cu

```
>> y = resample(x,N,M)
```



## Capitolul 4

# Proiectarea filtrelor

În acest capitol vom prezenta mai multe metode de proiectare a filtrelor FIR și IIR. Toate aceste metode pornesc de la specificarea caracteristicilor de frecvență dorite și găsesc coeficienții filtrului care satisface specificațiile sau se apropie suficient de mult de ele. Ordinul filtrului este de obicei fixat dinainte. Vom presupune permanent că filtrele au coeficienți reali.

Prima secțiune prezintă moduri posibile de specificare a performanțelor. Următoarele secțiuni conțin metode de proiectare—întâi pentru filtrele FIR, apoi pentru cele IIR—și sunt relativ independente.

### 4.1 Specificarea performanțelor

În general, un filtru trebuie să lase să treacă—pe cât posibil nemodificate—semnale de anumite frecvențe, și să taie—dacă se poate complet—semnalele cu alte frecvențe. Un interval de frecvențe  $[\omega_1, \omega_2]$  se numește *bandă de trecere* dacă semnalele sinusoidale cu aceste frecvențe sunt aproape nealterate de filtru; un astfel de interval se numește *bandă de oprire* (*de tăiere*, *de stop*) dacă semnalele cu aceste frecvențe sunt tăiate sau mult atenuate de filtru. Răspunsul în frecvență al unui filtru este deci  $|H(e^{j\omega})| \approx 1$ , pentru frecvențe  $\omega$  din banda de trecere și  $|H(e^{j\omega})| \approx 0$ , pentru frecvențe  $\omega$  din banda de oprire. Faza filtrului nu este considerată în denumirile de mai sus; de obicei, se preferă filtrele cu fază liniară.

Filtrele ideale prezentate în figura 4.1 dau o imagine perfectă a funcției unui filtru, iar denumirile lor sunt sugestive: trece-jos, trece-sus, trece-bandă, oprește-bandă. (Prototipuri mai complicate, în care există cel puțin două benzi de trecere și două de tăiere, apar uneori în practică, dar mult mai rar decât cele simple din figură.) Așa cum am văzut în capitolul anterior, filtrele ideale nu pot fi implementate; ele sunt necauzale și au suport infinit (fără a fi raționale), deci nu sunt utile ca atare. Problemele de proiectare utilizează specificații care aproximează filtrele ideale. Prezentăm mai jos cele mai comune specificații, utilizând numai filtre de tip trece-jos. Extensia la celelalte tipuri se face în general banal.

*Răspuns cu toleranțe fixate.* Figura 4.2 prezintă specificațiile de proiectare pentru un filtru trece-jos, în care se fac două feluri de aproximări:

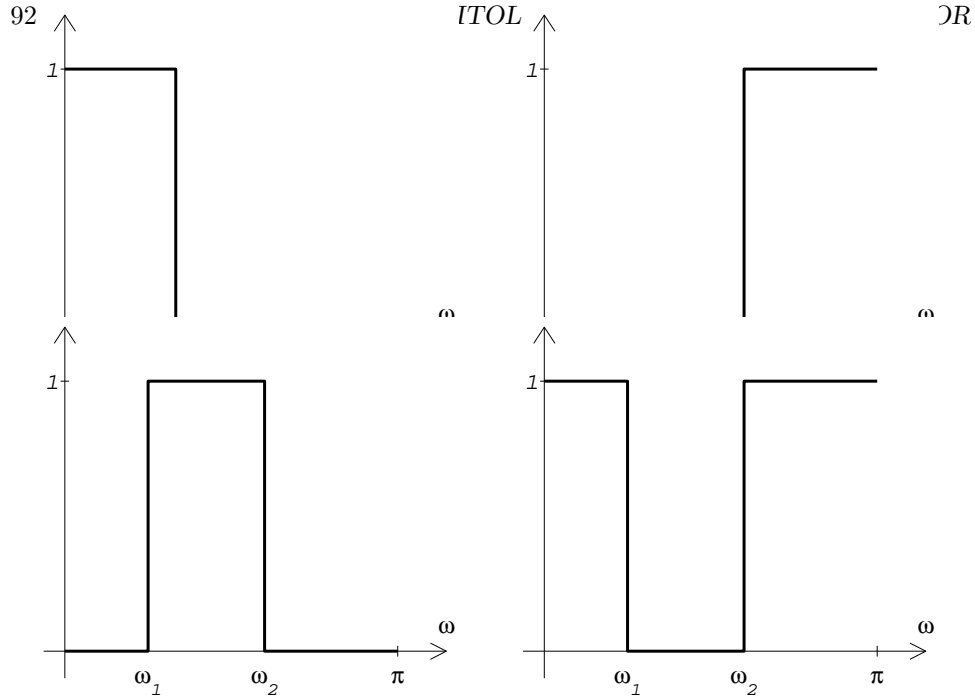


Figura 4.1: Caracteristicile de frecvență (amplitudine) ale filtrelor ideale: trece-jos, trece-sus, trece-bandă, oprește bandă.

- Răspunsul în frecvență este precizat cu toleranțe, în sensul că se permite o abatere maximă a amplitudinii de la valorile ideale 1 în banda de trecere și 0 în banda de oprire. Toleranțele sunt  $\Delta_b$  în banda de trecere  $[0, \omega_b]$  și  $\Delta_s$  în banda de oprire  $[\omega_s, \pi]$ ; valorile acestor toleranțe constituie date de proiectare.
- În afară de benzile de trecere și de oprire, răspunsul în frecvență conține și o bandă de tranziție  $(\omega_b, \omega_s)$ , în care valoarea amplitudinii este indiferentă.

Problema de proiectare poate fi formulată în felul următor:

**F\_TOL.** Dându-se frecvențele  $\omega_b$  și  $\omega_s$  și toleranțele  $\Delta_b$  și  $\Delta_s$ , să se găsească un filtru care satisface cerințele din figura 4.2. Filtrul poate avea ordin dat sau se poate dori un filtru de ordin cât mai mic într-o clasă dată (FIR, eventual cu fază liniară, sau IIR).

În problema de mai sus, un filtru este declarat soluție dacă răspunsul său se încadrează în toleranțele stabilite. Nu există nici un criteriu de departajare a soluțiilor în afară de ordin. Totuși, chiar dispunând de o metodă de rezolvare a problemei **F\_TOL**, nu avem garanția că o altă metodă n-ar furniza un filtru de ordin mai mic. Metodele prin care un filtru este găsit ca soluție a unei probleme de optimizare elimină defectul de mai sus.

*Proiectare prin optimizare.* Se fixează ca obiectiv o caracteristică de frecvență, numită *răspuns dorit*. De exemplu, admitând o bandă de tranziție, pentru un filtru

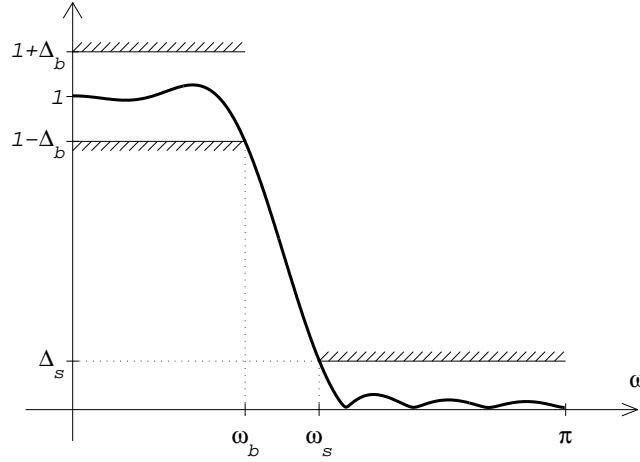


Figura 4.2: Caracteristică de frecvență (amplitudine) cu toleranțe și exemplu de răspuns care satisface specificațiile.

trece-jos răspunsul dorit poate fi

$$D(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } \omega \in [0, \omega_b], \\ 0, & \text{pentru } \omega \in [\omega_s, \pi]. \end{cases} \quad (4.1)$$

Ne mărginim căutarea la o clasă de filtre de ordin  $M$ , notată  $\mathcal{C}(M)$  (de exemplu, filtre FIR cu fază liniară, cu coeficienți simetrici, deci de tip I sau II). Dorim să găsim filtrul al cărui răspuns în frecvență  $H(\omega)$  este cel mai apropiat de  $D(\omega)$ , pe mulțimea de frecvențe  $\mathcal{F} = [0, \omega_b] \cup [\omega_s, \pi]$ . (În general,  $\mathcal{F}$  este reuniunea benzilor de trecere și de oprire; sau,  $\mathcal{F}$  este diferența dintre intervalul complet  $[0, \pi]$  și benzile de tranziție în care răspunsul filtrului nu se ia în considerare.) Distanța între două răspunsuri se măsoară utilizând o normă în spațiul funcțiilor definite pe  $\mathcal{F}$ . Uzuale sunt normele 2 și infinit, pentru care obținem problemele de proiectare următoare.

**F\_OPT2.** Dându-se un răspuns dorit  $D(\omega)$  pe o mulțime de frecvențe  $\mathcal{F} \subset [0, \pi]$ , e.g. (4.1), și o clasă de filtre  $\mathcal{C}(M)$ , să se găsească filtrul  $H(z)$  din clasa  $\mathcal{C}(M)$  al cărui răspuns în frecvență  $H(\omega)$  este cel mai aproape în amplitudine de  $D(\omega)$ , în norma 2, i.e.

$$\min_{H \in \mathcal{C}(M)} \int_{\omega \in \mathcal{F}} [D(\omega) - |H(\omega)|]^2 d\omega. \quad (4.2)$$

**F\_OPTINF.** Dându-se un răspuns dorit  $D(\omega)$  pe o mulțime de frecvențe  $\mathcal{F} \subset [0, \pi]$  și o clasă de filtre  $\mathcal{C}(M)$ , să se găsească filtrul  $H(z)$  din clasa  $\mathcal{C}(M)$  al cărui răspuns în frecvență  $H(\omega)$  este cel mai aproape în amplitudine de

$D(\omega)$ , în norma infinit, i.e.

$$\min_{H \in \mathcal{C}(M)} \max_{\omega \in \mathcal{F}} |D(\omega) - |H(\omega)||. \quad (4.3)$$

**Observația 4.1** Proiectarea unui filtru prin rezolvarea problemei **F\_OPT2** se mai numește și proiectare în sensul *celor mai mici pătrate* (CMMP). Rezolvarea problemei **F\_OPTINF** se numește și proiectare în sens *Chebyshev* (citiți Cebășev).

**Observația 4.2** Prin  $\min_{H \in \mathcal{C}(M)}$  înțelegem minimizare după parametrii funcției de transfer  $H(z)$ . De obicei, aceștia sunt chiar coeficienții lui  $H(z)$ . De exemplu, dacă impunem ca  $H(z)$  să fie un filtru FIR cu fază liniară de tip I, de grad  $M$ , atunci variabilele problemei de optimizare sunt cei  $M/2 + 1$  coeficienți independenți din (2.34), iar  $H(\omega)$  are forma (2.35).

**Observația 4.3** Soluțiile problemei **F\_OPTINF** au o alură specifică: eroarea  $|D(\omega) - |H(\omega)||$  (între răspunsul dorit și cel obținut efectiv) maximă este atinsă pentru mai multe frecvențe. Un exemplu de astfel de filtru de ordin  $M = 16$ , este prezentat în figura 4.3; răspunsul dorit are forma (4.1), cu  $\omega_b = 0.25\pi$ ,  $\omega_s = 0.4\pi$ . Atât în banda de trecere, cât și în cea de oprire, ondulațiile răspunsului au înălțimi egale. De altfel, un filtru ca acela din figura 4.3 se mai numește filtru cu ondulații egale (equiripple). (Terminologia grafică poate fi completată după cum urmează. Răspunsul din figură are mai mulți lobi, care se văd clar în graficul din dreapta, în care amplitudinea este reprezentată în dB; cel corespunzător benzii de trecere se numește lob principal, iar cei din banda de oprire se numesc lobi laterali. În cazul soluției unei probleme **F\_OPTINF**, lobul principal are ondulații egale, iar lobi laterali au înălțimi egale.)

Spre deosebire, o soluție în sens CMMP arată ca în figura 4.4, unde am considerat aceleași date de proiectare ca mai sus. Se observă că primul lob lateral este mai înalt. (În general, lobi din apropierea benzilor de tranziție sunt mai înalți.) De asemenea, ondulațiile lobului principal sunt inegale.

**Observația 4.4** În formulările problemelor **F\_OPT2** și **F\_OPTINF**, importanța erorii  $D(\omega) - |H(\omega)|$  este aceeași pentru toate frecvențele. Pentru a avea erori mai mici în anumite zone (de exemplu în banda de oprire), se poate introduce e.g. în (4.2) o funcție de ponderare  $p(\omega) > 0$ , astfel încât problema de optimizare să fie

$$\min_{H \in \mathcal{C}(M)} \int_{\omega \in \mathcal{F}} p(\omega) [D(\omega) - |H(\omega)|]^2 d\omega. \quad (4.4)$$

**Observația 4.5** În problemele **F\_OPT2** și **F\_OPTINF** se optimizează doar amplitudinea răspunsului în frecvență al filtrului  $H(z)$ . Pentru a optimiza întregul răspuns în frecvență, se alege un răspuns dorit  $D_c(\omega)$  complex<sup>1</sup> și se înlocuiește e.g. (4.2) cu

$$\min_{H \in \mathcal{C}(M)} \int_{\omega \in \mathcal{F}} |D_c(\omega) - H(\omega)|^2 d\omega. \quad (4.5)$$

---

<sup>1</sup>Pentru a evidenția mulțimea în care ia valori răspunsul dorit, vom nota întotdeauna în felul următor:  $D(\omega)$  este un răspuns pozitiv,  $D_r(\omega)$  este real, iar  $D_c(\omega)$  este complex.



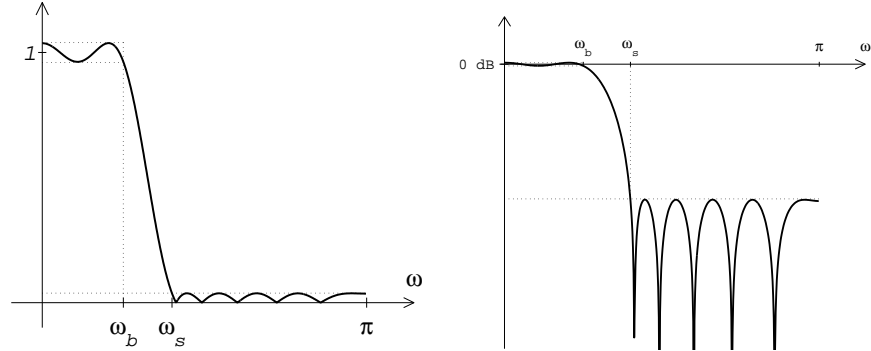


Figura 4.3: Amplitudinea răspunsului în frecvență al soluției unei probleme **F\_OPTINF** (stânga: adimensional; dreapta: dB).

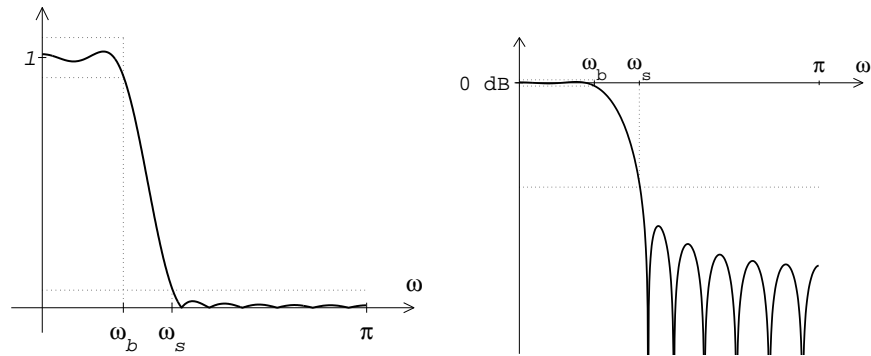


Figura 4.4: Amplitudinea răspunsului în frecvență al soluției unei probleme **F\_OPT2** (stânga: adimensional; dreapta: dB).

Punerea în acest fel a problemei este utilă în special pentru filtrele IIR. Răspunsurile complexe sunt necesare în special pentru a asigura liniaritatea fazei; pentru filtrele FIR, aceasta cerință este îndeplinită prin impunerea (anti)simetriei coeficienților filtrului.

*Optimizare pe o mulțime discretă de frecvențe.* Pentru simplificarea calculelor, problemele **F\_OPT2** și **F\_OPTINF** pot fi tratate aproximativ, în sensul că mulțimea continuă de frecvențe  $\mathcal{F}$  se înlocuiește cu o grilă discretă de frecvențe  $\mathcal{G}_L \subset \mathcal{F}$  având  $L$  puncte (în practică  $L$  este de ordinul zecilor sau, mai degrabă, sutelor). De obicei frecvențele  $\omega_k \in \mathcal{G}_L$  se aleg echidistante. Se obțin următoarele formulări ale problemelor de proiectare (comparați cu (4.2) și (4.3)):

**F\_OPT2D.** Dându-se un răspuns dorit  $D(\omega)$ , mulțimea de frecvențe discrete  $\mathcal{G}_L = \{\omega_1, \dots, \omega_L\}$  și o clasă de filtre  $\mathcal{C}(M)$ , să se rezolve

$$\min_{H \in \mathcal{C}(M)} \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L [D(\omega_k) - |H(\omega_k)|]^2. \quad (4.6)$$

**F\_OPTINF.** Dându-se un răspuns dorit  $D(\omega)$ , mulțimea de frecvențe discrete  $\mathcal{G}_L = \{\omega_1, \dots, \omega_L\}$  și o clasă de filtre  $\mathcal{C}(M)$ , să se rezolve

$$\min_{H \in \mathcal{C}(M)} \max_{k=1:L} |D(\omega_k) - |H(\omega_k)||. \quad (4.7)$$

Factorul  $1/L$  din (4.6) a fost pus pentru a sublinia faptul că aproximăm prin discretizare integrala definită din (4.2).

## Probleme rezolvate

**PR 4.1.1** Să presupunem că dispunem de o procedură care rezolvă problema **F\_TOL** pentru filtre FIR, în sensul următor: dându-se ordinul  $M$  al filtrului, procedura fie găsește un filtru de acest ordin care satisface cerințele problemei, fie raportează că nu există un astfel de filtru.

Indicați un algoritm de apelare a procedurii astfel încât să se găsească soluția de ordin minim (pe care o poate găsi procedura) a problemei **F\_TOL**.

*Soluție 1.* Se alege o valoare inițială pentru  $M$  (după bunul simț al proiectantului !). Dacă procedura de rezolvare a **F\_TOL** nu găsește o soluție, se mărește ordinul  $M \leftarrow M + 1$ . Dacă procedura găsește o soluție, se micșorează ordinul  $M \leftarrow M - 1$ . Se continuă până la obținerea soluției de ordin minim.

*Soluție 2 (bisecție).* Se procedează ca mai sus, dar ordinul se mărește sau micșorează cu o valoare  $\mu > 1$  (suficient de mare). În momentul în care pentru ordinul  $M$  nu există soluție, iar pentru  $M + \mu$  există (deci ordinul minim este în intervalul  $M : M + \mu$ ), noua încercare se face cu  $M + \mu/2$ . Astfel se micșorează intervalul de căutare la jumătate. Se continuă până când intervalul se reduce la o singură valoare. ■

**PR 4.1.2** Scrieți un program Matlab care, dându-se frecvențele  $\omega_b$  și  $\omega_s$ , calculează  $L$  frecvențe echidistante care acoperă mulțimea  $\mathcal{F} = [0, \omega_b] \cup [\omega_s, \pi]$ . Capetele intervalelor fac parte din cele  $L$  frecvențe.

*Soluție.* Formulată astfel, problema este în general imposibil de rezolvat ! O bună aproximație este însă dată de următoarea funcție Matlab, în care intervalelor  $[0, \omega_b]$  și  $[\omega_s, \pi]$  li se alocă un număr (în mod necesar întreg) de frecvențe discrete proporțional cu lungimea lor.

```
function w = freqv_echid( wb, ws, L )
Lb = floor( wb / (wb+pi-ws) * L );
Ls = L - Lb - 1;
Lb = Lb - 1;
w = [ 0 : wb/Lb : wb, ws : (pi-ws)/Ls : pi ];
```

Generalizarea la o reuniune oarecare de intervale este banală. ■

### Probleme propuse

**PP 4.1.1** Verificați dacă filtrul  $H(z) = 0.1 + 0.2z^{-1} + 0.2z^{-2} + 0.2z^{-3} + 0.2z^{-4} + 0.1z^{-5}$  satisface cerințele răspunsului cu toleranțe din figura 4.2, cu  $\omega_b = 0.15\pi$ ,  $\omega_s = 0.35\pi$ ,  $\Delta_b = 0.25$ ,  $\Delta_s = 0.15$ .

**PP 4.1.2** Scrieți problema de optimizare ce rezultă dacă în (4.3) se introduce o funcție de ponderare  $p(\omega)$ . Cu referire la filtrul trece-jos, introducem ponderea

$$p(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } \omega \in [0, \omega_b], \\ 5, & \text{pentru } \omega \in [\omega_s, \pi]. \end{cases}$$

Ce relație este între eroarea maximă din banda de oprire și cea din banda de trecere ? Desenați un răspuns în frecvență care să fie o soluție plauzibilă a unei probleme (4.3) cu ponderea de mai sus.

**PP 4.1.3** Arătați că prin rezolvarea unor probleme **F\_OPTINF** se poate afla întotdeauna soluția FIR de ordin minim a unei probleme **F\_TOL**. Cum trebuie alese ponderile în **F\_OPTINF** pentru atingerea acestui scop ?

**PP 4.1.4** Desenați amplitudinea răspunsului în frecvență a soluțiilor unor (ipotetice) probleme **F\_OPTINF** și **F\_OPTINF**D cu aceleași specificații (i.e. același  $D(\omega)$ ). Arătați grafic de ce soluția problemei aproximative **F\_OPTINF**D este mai proastă (e.g. are atenuare mai mică în banda de oprire) decât soluția problemei **F\_OPTINF** corespunzătoare.

## 4.2 Proiectarea filtrelor FIR prin metoda ferestrei

Metoda ferestrei este una dintre cele mai simple proceduri de proiectare a filtrelor FIR. Ea se bazează pe modularea în timp a unui răspuns ideal cu un semnal de tip

”fereastră”, care are suport finit. Ordinul  $M$  al filtrului se fixează în prealabil, iar filtrul are forma generală (2.6):

$$H(z) = \sum_{n=0}^M h[n]z^{-n}.$$

Algoritmul de proiectare este următorul:

0. *Date de proiectare:* ordinul  $M$  al filtrului și amplitudinea răspunsului ideal în frecvență care trebuie aproximat; de exemplu, pentru un filtru trece-jos, se precizează frecvența  $\omega_t$  care delimitează benzile de trecere și de oprire.
1. Se ia întârzierea de grup  $n_0 = M/2$  și se calculează răspunsul la impuls al filtrului ideal. De exemplu, pentru un filtru trece-jos, răspunsul ideal în frecvență este (2.32)

$$H_{id}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega n_0}, & \text{dacă } |\omega| \leq \omega_t, \\ 0, & \text{dacă } \omega_t < |\omega| \leq \pi, \end{cases}$$

iar răspunsul la impuls este (2.33)

$$h_{id}[n] = \frac{\sin \omega_t(n - n_0)}{\pi(n - n_0)}.$$

2. Se alege o fereastră  $f[n]$  cu suport  $0 : M$ .
3. Se calculează coeficienții filtrului FIR modulând în timp răspunsul ideal  $h_{id}[n]$  cu fereastra  $f[n]$ , i.e. prin relația  $h[n] = h_{id}[n] \cdot f[n]$ ,  $n = 0 : M$ . Eventual, se înmulțesc toți coeficienții  $h[n]$  cu o constantă potrivit aleasă (de exemplu astfel încât  $H(1) = \sum_{n=0}^M h[n] = 1$ ).

**Observația 4.6** După aplicarea algoritmului se trasează răspunsul în frecvență al filtrului FIR obținut și se verifică dacă este convenabil (de exemplu, dacă satisface condițiile impuse de o problemă **F\_TOL**). Dacă nu este convenabil, se poate mări ordinul  $M$  sau se poate alege o altă fereastră  $f[n]$ .

**Observația 4.7** Răspunsul în frecvență al filtrelor ideale (cu benzi de trecere și de oprire) are fază *strict liniară*; de aceea, răspunsul ideal la impuls  $h_{id}[n]$  este întotdeauna simetric față de  $n_0$ , vezi problema **PP2.5.3**. În consecință, dacă coeficienții ferestrei  $f[n]$  sunt simetrice în raport cu mijlocul  $M/2$  al suportului  $0 : M$ , atunci  $H(z)$  rezultă un filtru cu fază liniară de tip I sau II. Un filtru cu fază neliniară ar rezulta dacă s-ar alege o întârziere  $n_0 \neq M/2$ .

**Observația 4.8** *Alegerea ferestrei.* Răspunsul în frecvență al filtrului  $H(z)$  poate fi scris în funcție de răspunsurile în frecvență ale filtrului ideal și ferestrei conform cu (1.23), i.e.

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{id}(e^{j\theta}) F(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta.$$

Pentru ca  $H(e^{j\omega})$  să fie cât mai aproape de  $H_{id}(e^{j\omega})$ , e necesar ca  $F(e^{j\omega})$  să fie o aproximație cât mai bună a impulsului unitate (continuu)  $\delta(\omega)$ . (Cerințele ca fereastra să aibă suport finit în timp și ca spectrul ei să fie cât mai concentrat în jurul frecvenței  $\omega = 0$  sunt contradictorii; vom prezenta mai târziu principiul de incertitudine privind localitatea în timp și frecvență.)

### Ferestre uzuale

*Fereastra dreptunghiulară*, cea mai simplă fereastră, ilustrată în figura 4.5, este definită de

$$f_d[n] = \begin{cases} 1, & \text{dacă } 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases} \quad (4.8)$$

Aplicarea ferestrei dreptunghiulare înseamnă trunchierea răspunsului ideal  $h_{id}[n]$ . Așa cum am văzut în problema **PR1.2.4**, această trunchiere dă naștere fenomenului Gibbs, deci  $|H(e^{j\omega})|$  are oscilații mari în apropierea frecvențelor de tranziție ale răspunsului ideal în frecvență (e.g. în apropierea frecvenței  $\omega = \omega_t$  pentru un filtru trece-jos).

Ferestrele mai eficiente prezentate mai jos au valori mai mici la marginea suportului, tocmai pentru a preveni fenomenul Gibbs.

*Fereastra triunghiulară (Bartlett)* (figura 4.5):

$$f_t[n] = \begin{cases} 2n/M, & \text{dacă } 0 \leq n \leq M/2, \\ 2 - 2n/M, & \text{dacă } M/2 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases} \quad (4.9)$$

*Fereastra Hanning* are forma

$$f_{Hann}[n] = \begin{cases} 0.5 - 0.5 \cos(2\pi n/M), & \text{dacă } 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Se observă că pentru aceste două ferestre eșantioanele extreme sunt nule, i.e.  $f[0] = f[M] = 0$ , ceea ce micșorează suportul ferestrei. De aceea, forma utilizată în practică a ferestrei Hanning este (figura 4.6):

$$f_{Hann}[n] = \begin{cases} 0.5 - 0.5 \cos(2\pi \frac{n+1}{M+2}), & \text{dacă } 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases} \quad (4.10)$$

*Fereastra Hamming* (figura 4.6):

$$f_{Hamm}[n] = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos(2\pi n/M), & \text{dacă } 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases} \quad (4.11)$$

*Fereastra Blackman* (figura 4.7):

$$f_B[n] = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos(2\pi n/M) + 0.08 \cos(4\pi n/M), & \text{dacă } 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases} \quad (4.12)$$

*Fereastra Kaiser* (figura 4.7):

$$f_B[n] = \begin{cases} \frac{I_0(\beta \sqrt{1 - [(n - n_0)/n_0]^2})}{I_0(\beta)}, & \text{dacă } 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{altfel,} \end{cases} \quad (4.13)$$

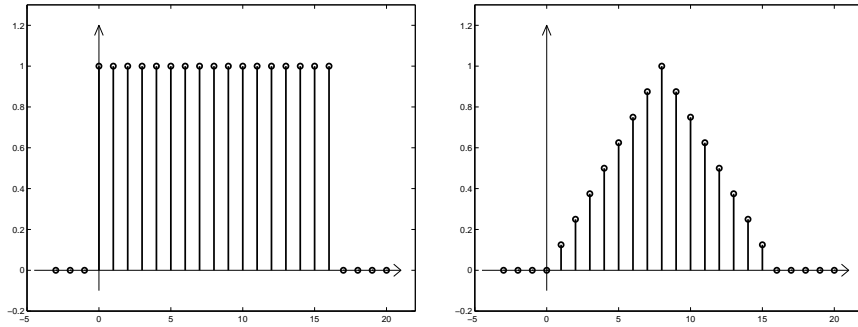


Figura 4.5: Ferestre dreptunghiulară (stânga) și triunghiulară (dreapta), pentru  $M = 16$ .

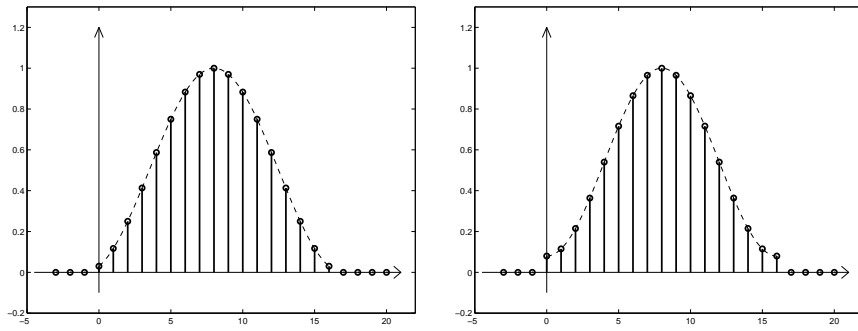


Figura 4.6: Ferestre Hanning (stânga) și Hamming (dreapta), pentru  $M = 16$ .

unde  $I_0(\cdot)$  este funcția Bessel de ordinul zero modificată. Parametrul  $\beta$  permite varierea proprietăților ferestrei; pentru  $\beta = 0$  se obține fereastra dreptunghiulară. Proprietățile în frecvență ale ferestrelor sunt discutate în problema **PR4.2.2**.

Pentru filtrele simple, e.g. de tip trece-jos, există unele metode empirice de alegere a ordinului  $M$  și, pentru fereastra Kaiser, a parametrului  $\beta$ , astfel încât să se obțină soluția unei probleme **F\_TOL** (sau o bună aproximare a acesteia). Nu vom discuta aceste metode; vezi mai departe funcțiile Matlab dedicate acestui scop.

## Probleme rezolvate

**PR 4.2.1** Folosind metoda ferestrei, proiectați filtre FIR trece-jos de ordin  $M = 16$ , cu frecvența de tăiere  $\omega_t = 0.4\pi$  folosind toate tipurile de ferestre descrise în această secțiune. Comparați caracteristicile de frecvență ale filtrelor obținute și evaluați calitățile lor.

Calculați care sunt valorile  $\Delta_b$  și  $\Delta_s$  ale unor probleme de tip **F\_TOL**, în care prototipul este un filtru trece-jos cu  $\omega_b = 0.3\pi$  și  $\omega_s = 0.5\pi$ , iar soluțiile sunt filtrele

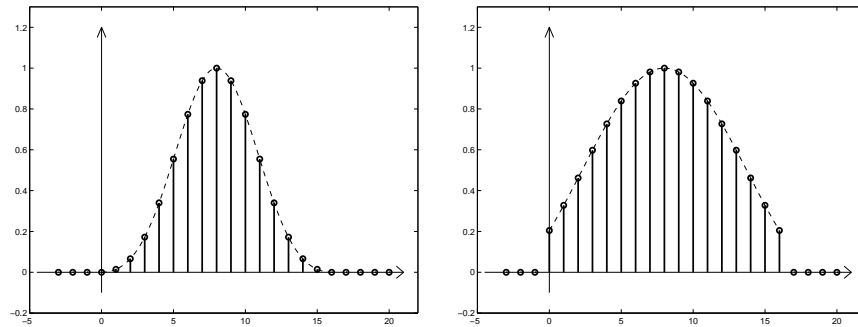


Figura 4.7: Ferestre Blackman (stânga) și Kaiser (dreapta, cu  $\beta = 3$ ), pentru  $M = 16$ .

FIR obținute mai sus. Ce filtru dă cele mai mici valori pentru toleranțele  $\Delta_b$  și  $\Delta_s$  ?

*Soluție.* Prezentăm amplitudinea răspunsurilor în frecvență ale filtrelor FIR obținute cu ferestrele dreptunghiulară, Hamming și Blackman în figura 4.8, și pe cele obținute cu fereastra Kaiser în figura 4.9, pentru trei valori ale parametrului  $\beta$ , anume 1, 2.1 și 3. Filtrele au fost obținute cu funcția `fir1` din Matlab (Signal Processing Toolbox); toate filtrele sunt normate astfel încât  $H(1) = 1$ , i.e. amplificarea semnalelor constante este unitară. Se observă că unele filtre (e.g. pentru fereastră dreptunghiulară sau fereastră Kaiser cu  $\beta$  mic) au erori mari în benzile de trecere și oprire, dar o bandă de tranziție mai îngustă. Altele (e.g. Blackman sau Kaiser cu  $\beta$  mare) au erori mici și deci o atenuare mare în banda de oprire, dar banda de tranziție mai lată. Filtrul cel mai bun este de fapt cel potrivit cerințelor unei probleme de proiectare (nespecificate aici).

În tabelul 4.1 sunt prezentate toleranțele problemelor **F\_TOL** ale căror soluții sunt filtrele proiectate. Cel mai bun rezultat a fost obținut cu o fereastră Kaiser cu  $\beta = 2.1$ . (În general, metoda ferestrei este destul de incomodă pentru rezolvarea unor probleme cu specificații precise. Ea este mai potrivită când specificațiile sunt vagi și optimalitatea soluției nu este necesară.) ■

**PR 4.2.2** Să se traseze caracteristicile de frecvență ale ferestrelor (4.8–4.13), pentru  $M = 16$ . Pentru fereastra Kaiser se vor alege mai multe valori ale parametrului  $\beta$ . Comentați și comparați proprietățile în frecvență ale ferestrelor.

*Soluție.* Prezentăm în figurile 4.10 și 4.11 amplitudinea răspunsurilor în frecvență ale ferestrelor utilizate în problema anterioară (cu alte valori ale parametrului  $\beta$  pentru fereastra Kaiser). Se observă că toate răspunsurile au un lob principal și mai mulți lobi laterali. În general, lățimea lobului principal și înălțimea lobilor secundari sunt în relație inversă, i.e. un lob principal lat e însoțit de lobi laterali puțin înalți. Compromisul cel mai bun depinde de aplicație.

Note: 1. Răspunsurile au fost normate astfel încât amplitudinea la frecvență nulă să fie unitară. 2. Generarea răspunsurilor a fost făcută cu funcțiile Matlab prezentate mai jos. ■

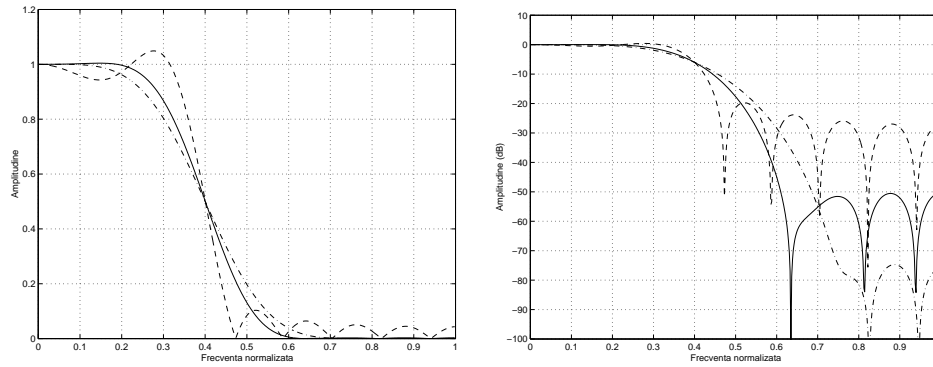


Figura 4.8: Caracteristici de frecvență ale unor filtre FIR obținute prin metoda ferestrei, cu  $M = 16$  și  $\omega_t = 0.4\pi$ , utilizând ferestre dreptunghiulară (linie întreruptă), Hamming (linie continuă) și Blackman (linie-punct). În stânga, amplificarea este adimensională, iar în dreapta în decibeli.

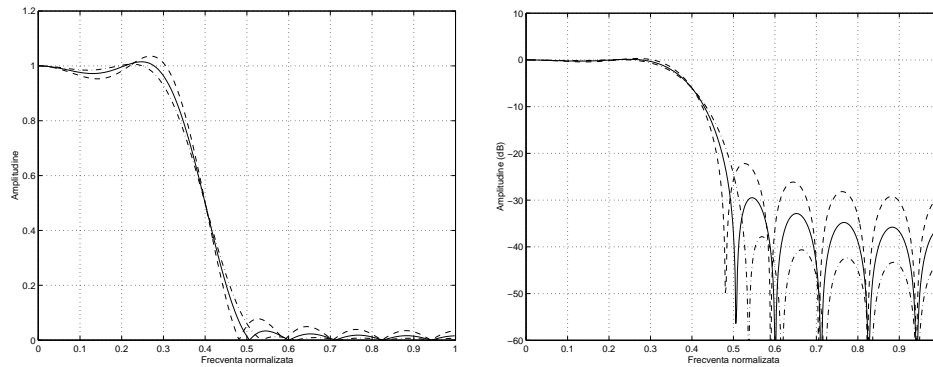


Figura 4.9: Caracteristici de frecvență ale unor filtre FIR obținute prin metoda ferestrei, cu  $M = 16$  și  $\omega_t = 0.4\pi$ , utilizând ferestre Kaiser cu  $\beta = 1$  (linie întreruptă),  $\beta = 2.1$  (linie continuă) și  $\beta = 3$  (linie-punct).

Fereastra	drept.	Hanning	Hamming	Blackman	Kaiser $\beta = 1$	Kaiser $\beta = 2.1$	Kaiser $\beta = 3$
$\Delta_b$	0.057	0.116	0.130	0.194	0.047	0.0336	0.068
$\Delta_s$	0.103	0.119	0.131	0.197	0.078	0.0336	0.060

Tabelul 4.1: Abateri de la răspunsul optim ( $\omega_b = 0.3\pi$ ,  $\omega_s = 0.5\pi$ ) pentru filtre FIR de ordin  $M = 16$ , proiectate prin metoda ferestrei.



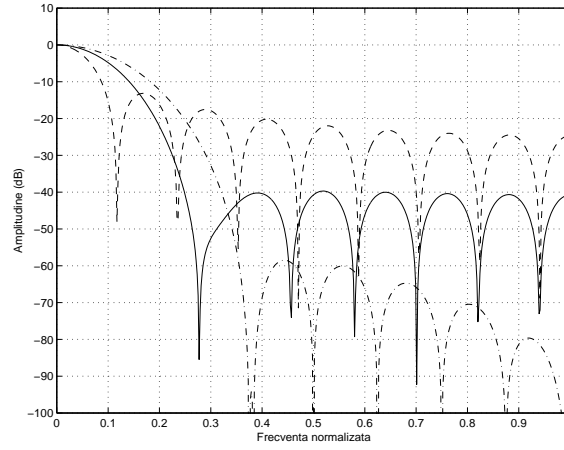


Figura 4.10: Caracteristici de frecvență ale ferestrelor dreptunghiulară (linie întreruptă), Hamming (linie continuă) și Blackman (linie-punct), pentru  $M = 16$ .

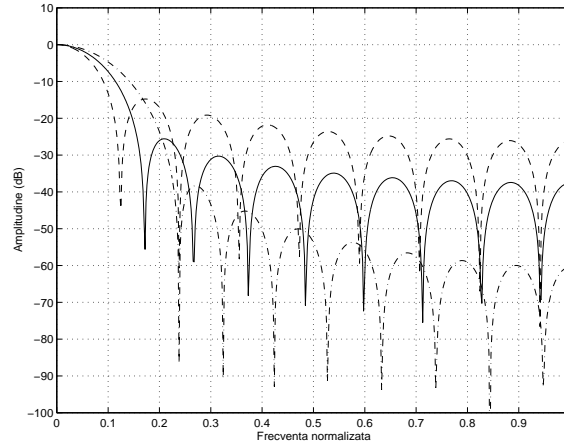


Figura 4.11: Caracteristici de frecvență ale ferestrelor Kaiser cu  $\beta = 1$  (linie întreruptă),  $\beta = 3$  (linie continuă) și  $\beta = 5$  (linie-punct), pentru  $M = 16$ .

**PR 4.2.3** Considerăm fereastra triunghiulară simetrică față de origine (pentru simplificarea calculelor)

$$f[n] = \begin{cases} 1 - \frac{|n|}{M}, & \text{dacă } |n| \leq M-1, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases} \quad (4.14)$$

Demonstrați că transformata sa Fourier are forma

$$F(\omega) = \frac{1}{M} \left[ \frac{\sin(\omega M/2)}{\sin(\omega/2)} \right]^2. \quad (4.15)$$

Funcția  $F(\omega)$  se numește *nucleul Fejer* (și, remarcabil, este pozitivă).

*Soluție.* Folosind definiția (1.10) putem scrie

$$F(\omega) = \sum_{n=-M+1}^{M-1} \left( 1 - \frac{|n|}{M} \right) e^{-j\omega n}.$$

Observăm acum că  $F(\omega)$  este de fapt suma elementelor unei matrice Toeplitz cu  $e^{-j\omega n}$  pe diagonala  $n$  (diagonala principală este numerotată cu 0); în consecință obținem

$$F(\omega) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sum_{\ell=1}^M e^{-j\omega(i-\ell)} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M e^{-j\omega i} \sum_{\ell=1}^M e^{j\omega \ell} = \frac{1}{M} \left| \sum_{n=1}^M e^{j\omega n} \right|^2.$$

Calculând suma progresiei geometrice se obține (4.15). ■

## Probleme propuse

**PP 4.2.1** Ce semnal are transformata Fourier egală cu impulsul  $\delta(\omega)$  ? De ce nu poate fi acest semnal o fereastră ?

**PP 4.2.2** Poate avea un semnal fereastră coeficienții antisimetrice (în raport cu mijlocul suportului) ?

**PP 4.2.3** Utilizând metoda ferestrei, proiectați un filtru FIR cu  $M = 20$ , pornind de la răspunsul ideal

$$H_{id}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } |\omega| \leq \pi/2, \\ 1/2, & \text{dacă } \pi/2 < |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

**PP 4.2.4** Modificați fereastra triunghiulară (4.9) astfel încât să nu aibă eșantioane nule la extremități (i.e.  $f[0] = f[M] \neq 0$ ). Aceeași problemă pentru fereastra Blackman.

## Ghid Matlab

Un filtru FIR trece-jos se proiectează cu metoda ferestrei prin apelul

```
>> h = fir1(M, wt)
```

unde  $M$  este ordinul filtrului iar  $wt$  frecvența de tăiere (normalizată) a filtrului ideal (2.32). (Frecvențele au valori normalizate în toate apelurile funcțiilor Matlab de proiectare a filtrelor.) Implicit, funcția `fir1` utilizează o fereastră de tip Hamming (4.11). De exemplu, pentru obținerea filtrului din problema **PR4.2.1**, cu răspunsul în frecvență din figura 4.8 (fereastră Hamming), a fost folosit apelul

```
>> h = fir1(16, 0.4)
```

Aceeași funcție se poate utiliza pentru proiectarea unui filtru trece-sus, cu apelul

```
>> h = fir1(M, wt, 'high')
```

sau pentru filtre trece-bandă etc. cu moduri de apel dezvăluite cititorului interesat de comanda `help fir1`. Precizarea ferestrei se face cu apelul

```
>> h = fir1(M, wt, f)
```

unde  $f$  este semnalul ferestrei. O fereastră de lungime  $N = M + 1$  poate fi generată cu

```
>> f = boxcar(N)
>> f = triang(N)
>> f = hanning(N)
>> f = hamming(N)
>> f = blackman(N)
>> f = kaiser(N, beta)
```

obținându-se, în ordine, ferestrele dreptunghiulară, triunghiulară, Hanning, Hamming, Blackman și Kaiser (cu parametrul  $\beta$ ).

Funcția `kaiserord` întoarce parametrii necesari rezolvării (aproximative a) unei probleme **F\_TOL** cu un apel la `fir1`, utilizând o fereastră Kaiser.

## 4.3 Proiectarea filtrelor FIR în sens CMMP

### Cazul general: filtre fără restricție de fază

Ne ocupăm acum de proiectarea filtrelor FIR în sensul celor mai mici pătrate prin rezolvarea problemei **F\_OPT2** în varianta cea mai generală, în care

- criteriul de optimizare este (4.5), i.e. răspunsul dorit  $D_c(\omega)$  este complex;
- nu există nici o restricție asupra coeficienților filtrului  $H(z)$  (e.g. de tip fază liniară); așadar  $\mathcal{C}(M)$  din (4.5) este mulțimea tuturor filtrelor FIR de ordin  $M$ .

Răspunsul în frecvență al filtrului  $H(z)$ , de ordin  $M$  fixat, poate fi scris în forma

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^M h[n]e^{-j\omega n} = h^T e(\omega), \quad (4.16)$$

unde

$$h = [h[0] \ h[1] \ \dots \ h[M]]^T \in \mathbb{R}^{M+1} \quad (4.17)$$

este vectorul coeficienților filtrului (care reprezintă variabilele problemei de optimizare), iar

$$e(\omega) = [1 \ e^{-j\omega} \ \dots \ e^{-j\omega M}]^T \in \mathbb{C}^{M+1} \quad (4.18)$$

este un vector cunoscut pentru orice frecvență  $\omega$ .

Pentru a rezolva problema (4.5), observăm că utilizând (4.16) obținem

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega}) - D_c(\omega)|^2 &= [h^T e(\omega) - D_c(\omega)][e^H(\omega)h - D_c^*(\omega)] \\ &= h^T e(\omega)e^H(\omega)h - 2\operatorname{Re}[e^H(\omega)D_c(\omega)]h + |D_c(\omega)|^2. \end{aligned}$$

Mai mult, matricea

$$e(\omega)e^H(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & e^{j\omega} & \dots & e^{j\omega M} \\ e^{-j\omega} & 1 & \ddots & e^{j\omega(M-1)} \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ e^{-j\omega M} & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} = C(\omega) + jS(\omega)$$

are structură Toeplitz hermitică; partea sa reală

$$C(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\omega) & \dots & \cos(\omega M) \\ \cos(\omega) & 1 & \ddots & \cos(\omega(M-1)) \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \cos(\omega M) & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

este o matrice Toeplitz simetrică, iar partea imaginară

$$S(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & \sin(\omega) & \dots & \sin(\omega M) \\ -\sin(\omega) & 0 & \ddots & \sin(\omega(M-1)) \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ -\sin(\omega M) & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

este o matrice Toeplitz antisimetrică. Notând

$$g^T(\omega) = \operatorname{Re}[e^H(\omega)D_c(\omega)]$$

și observând că  $h^T S(\omega)h = 0$  (vezi problema **PP4.3.1**), putem scrie

$$|H(e^{j\omega}) - D_c(\omega)|^2 = h^T C(\omega)h - 2g^T(\omega)h + |D_c(\omega)|^2.$$

Așadar, ignorând termenul care nu depinde de  $h$ , problema de optimizare (4.5) poate fi scrisă în forma

$$\min_{h \in \mathbb{R}^{M+1}} h^T \left( \int_{\omega \in \mathcal{F}} C(\omega) d\omega \right) h - 2 \left( \int_{\omega \in \mathcal{F}} g^T(\omega) d\omega \right) h. \quad (4.20)$$

Notăm

$$P = \int_{\omega \in \mathcal{F}} C(\omega) d\omega, \quad q = \int_{\omega \in \mathcal{F}} g(\omega) d\omega, \quad (4.21)$$

și reamintim că  $\mathcal{F}$  este mulțimea frecvențelor corespunzătoare benzilor de trecere și de oprire, pe care se optimizează răspunsul în frecvență. (De exemplu, pentru un filtru trece-jos, avem  $\mathcal{F} = [0, \omega_b] \cup [\omega_s, \pi]$ .) Pentru răspunsuri dorite  $D_c(\omega)$  simple, matricea  $P$  și vectorul  $q$  se pot calcula relativ ușor, fiind integrale de funcții trigonometrice.

În final, putem scrie (4.5) în forma

$$\min_{h \in \mathbb{R}^{M+1}} h^T P h - 2q^T h. \quad (4.22)$$

Aceasta este o problemă de optimizare fără restricții, în care criteriul este pătratic.

**Propoziția 4.9** *Filtrul FIR reprezentând soluția problemei de proiectare (4.5) în sens CMMP este*

$$h = P^{-1}q. \quad (4.23)$$

*Demonstrație.* Deoarece  $e(\omega)e^H(\omega) \geq 0$ , matricea

$$P = \operatorname{Re} \left[ \int_{\omega \in \mathcal{F}} e(\omega)e^H(\omega) d\omega \right]$$

este pozitiv semidefinită; mai mult, de fapt avem  $P > 0$  (dar nu demonstrăm acest lucru). Pentru a minimiza criteriul  $V(h) = h^T P h - 2q^T h$  al problemei (4.22), anulăm gradientul

$$\frac{\partial V(h)}{\partial h} = 2Ph - 2q,$$

de unde rezultă (4.23). Acest  $h$  corespunde într-adevăr unui punct de minim deoarece Hessianul

$$\frac{\partial^2 V(h)}{\partial h^2} = 2P$$

este pozitiv definit. ■

În concluzie, algoritmul de proiectare este următorul:

0. *Date de proiectare:* ordinul  $M$  al filtrului, răspunsul ideal în frecvență  $D_c(\omega)$  (cu valori complexe) care trebuie aproximat și mulțimea de frecvențe  $\mathcal{F}$  pe care se face aproximația.
1. Se calculează matricea  $P$  și vectorul  $q$  din (4.21).
2. Se calculează  $h = P^{-1}q$ .

Implementarea algoritmului în cazul proiectării unui filtru trece-jos este prezentată în problema **PR4.3.1**.

### Filtre cu fază liniară

În cazul filtrelor cu fază liniară de ordin  $M$ , răspunsul în frecvență are forma

$$H(e^{j\omega}) = h^T c(\omega) e^{-j\omega M/2}, \quad (4.24)$$

unde  $h$  este vectorul coeficienților, iar  $c(\omega)$  este un vector constant pentru o frecvență  $\omega$  precizată. Pentru fiecare din cele patru tipuri de filtre cu fază liniară, vectorii au forme specifice. De exemplu, pentru filtrele de tip I, din expresia (2.35) se vede că avem

$$\begin{aligned} h &= [h[\frac{M}{2}] \ h[\frac{M}{2} - 1] \ \dots \ h[1] \ h[0]]^T \in \mathbb{R}^{\frac{M}{2}+1}, \\ c(\omega) &= [1 \ 2 \cos \omega \ \dots \ 2 \cos(\omega(\frac{M}{2} - 1)) \ 2 \cos(\omega \frac{M}{2})]^T \in \mathbb{R}^{\frac{M}{2}+1}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Deoarece faza filtrului este structural liniară, trebuie optimizată doar ”amplitudinea”  $h^T c(\omega)$  (care este reală, dar nu neapărat pozitivă). Pentru aceasta, alegem un răspuns dorit  $D_r(\omega)$  *real* și rezolvăm o problemă de optimizare similară cu (4.2), anume

$$\min_h \int_{\omega \in \mathcal{F}} [D_r(\omega) - h^T c(\omega)]^2 d\omega. \quad (4.26)$$

Algoritmul de rezolvare este similar cu cel pentru filtre fără restricții de fază:

0. *Date de proiectare:* ordinul  $M$  al filtrului, tipul filtrului, răspunsul ideal în frecvență  $D_r(\omega)$  (cu valori reale) care trebuie aproximat și mulțimea de frecvențe  $\mathcal{F}$  pe care se face aproximația.
1. Se calculează matricea  $P$  și vectorul  $q$  cu formulele

$$P = \int_{\omega \in \mathcal{F}} c(\omega) c^T(\omega) d\omega, \quad q = \int_{\omega \in \mathcal{F}} c(\omega) D_r(\omega) d\omega. \quad (4.27)$$

Atenție, acum  $P$  nu mai este o matrice Toeplitz, ci doar una simetrică.

2. Soluția problemei (4.26) este  $h = P^{-1}q$ . Coeficienții filtrului rezultă conform regulii de simetrie pentru tipul ales.

Detalii de implementare și un exemplu de proiectare sunt prezentate în problema **PR4.3.2**.

### Rezolvarea problemei **F\_OPT2D**

Atunci când răspunsul dorit (complex)  $D_c(\omega)$  este dat pe o mulțime discretă de frecvențe  $\mathcal{G}_L = \{\omega_1, \dots, \omega_L\}$  problema **F\_OPT2D** are o formă identică cu (4.22), dar matricea  $P$  și vectorul  $q$  nu sunt calculate prin integrare, ci printr-o sumă finită. Așadar, e.g. matricea  $P$  din (4.21) se calculează prin relația

$$P = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L C(\omega_k), \quad (4.28)$$

cu matricea  $C(\omega)$  ca în (4.19).

În cazul filtrelor cu fază liniară, problema (4.26) se rezolvă în mod similar.

Atunci când integrala care definește matricea  $P$  din (4.21) se poate calcula analitic (ceea ce e cazul pentru filtrele în care amplitudinea răspunsului e constantă sau liniară în benzile de trecere), aceasta se calculează numeric mult mai ușor decât analogul ei discretizat (4.28). De aceea, rezolvarea unei probleme **F\_OPT2D** este preferabilă doar atunci când răspunsul dorit  $D_c(\omega)$  are o formă complicată—în sensul că integralele (4.21) nu au primitive ușor calculabile.

### Probleme rezolvate

**PR 4.3.1 a.** Să se scrie un program Matlab pentru proiectarea în sens CMMP a filtrelor FIR trece-jos fără restricție de fază. Datele de proiectare sunt ordinul filtrului  $M$  și răspunsul dorit

$$D_c(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega n_0}, & \text{dacă } |\omega| \leq \omega_b, \\ 0, & \text{dacă } \omega_s < |\omega| \leq \pi. \end{cases} \quad (4.29)$$

Frecvențele  $\omega_b$  și  $\omega_s$ , precum și întârzierea de grup  $n_0$  sunt date.

**b.** Cu programul realizat anterior, să se proiecteze un filtru FIR cu următoarele date inițiale:  $M = 16$ ,  $\omega_b = 0.3\pi$ ,  $\omega_s = 0.46\pi$ ,  $n_0 = 8$ . Executați programul și pentru alte valori ale întârzierii de grup  $n_0$ .

*Soluție.* **a.** Programul este prezentat în figura 4.12, sub formă de funcție. (Lipsează verificări ale validității argumentelor, e.g.  $\omega_b \leq \omega_s$ , pe care cititorul este rugat să le completeze.) Pentru înțelegerea programului, precizăm că avem

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \cos(n\omega) d\omega = \frac{\sin(n\omega_2)}{n} - \frac{\sin(n\omega_1)}{n} = \omega_2 \text{sinc}(n\omega_2) - \omega_1 \text{sinc}(n\omega_1).$$

Matricea  $P$  din (4.21) moștenește structura Toeplitz a matricei  $C(\omega)$  din (4.19), și cum  $\mathcal{F} = [0, \omega_b] \cup [\omega_s, \pi]$ , rezultă că elementele sale au forma

$$\omega_b \text{sinc}(n\omega_b) - \omega_s \text{sinc}(n\omega_s) + \pi \delta[n],$$

cu  $n = 0 : M$ ; am ținut seama că  $\text{sinc}(n\pi) = \delta[n]$ . (Nu uitați că funcția Matlab `sinc` are o definiție diferită de cea matematică (1.25).) Similar obținem vectorul  $q$  din (4.21), ținând seama de expresia răspunsului dorit  $D_c(\omega)$  și de faptul că banda de oprire nu contribuie la integrală.

**b.** Exemplul de proiectare cerut a fost obținut cu apelul `opt2c.tj(16,0.3,0.46,8)`, iar caracteristica de frecvență a filtrului rezultat este prezentată în figura 4.13. Filtrul are fază liniară ! Avem  $n_0 = M/2$ . (Vezi problema **PR4.3.3**.)

Luând  $n_0 = 5$ , obținem răspunsul din figura 4.14. Filtrul nu mai are fază liniară. Apelați funcția `grpdelay` pentru a vedea deviația de la liniaritate. ■

**PR 4.3.2 a.** Să se scrie un program Matlab pentru proiectarea în sens CMMP a filtrelor FIR trece-jos cu fază liniară. Pentru simplitate, se vor considera doar filtre de tip I (ordinul filtrului  $M$  este par). Răspunsul dorit este

$$D_r(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } |\omega| \leq \omega_b, \\ 0, & \text{dacă } \omega_s < |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

```

function h = opt2c_tj( M, wb, ws, n0 )
% Proiectare filtru FIR trece-jos in sens CMMP cu prototip complex
% M      - ordinul filtrului
% wb, ws - frecventele (normalizate) definind benzile
%        de trecere, respectiv oprire
% n0     - intarzierea de grup a filtrului dorit

T = (0:M)';
P = wb*sinc(T*wb) - ws*sinc(T*ws) + eye(size(T));
P = toeplitz(P);
q = wb*sinc((T-n0)*wb);
h = P \ q;

```

Figura 4.12: Funcție Matlab pentru proiectarea în sens CMMP a filtrelor FIR trece-jos fără restricție de fază.

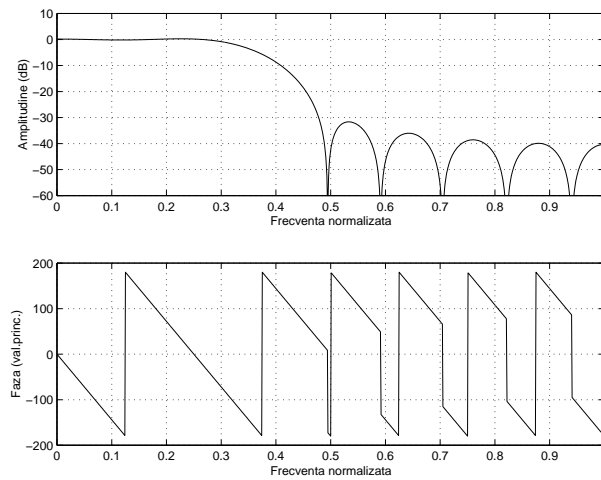


Figura 4.13: Caracteristica de frecvență a filtrului FIR trece-jos, fără restricții de fază, optim în sens CMMP, pentru  $M = 16$ ,  $\omega_b = 0.3\pi$ ,  $\omega_s = 0.46\pi$ ,  $n_0 = 8$ .



Frecvențele  $\omega_b$  și  $\omega_s$  sunt date.

**b.** Cu programul realizat anterior, să se proiecteze un filtru FIR cu următoarele date inițiale:  $M = 16$ ,  $\omega_b = 0.3\pi$ ,  $\omega_s = 0.46\pi$ . Să se compare filtrul obținut aici cu cel de la problema **PR4.3.1**.

*Soluție.* **a.** Programul este prezentat în figura 4.15. Din (4.25) observăm că elementele matricei  $c(\omega) \cdot c^T(\omega)$  au forma

$$[c(\omega) \cdot c^T(\omega)]_{ik} = \gamma_{ik} \cos(i\omega) \cos(k\omega), \quad i, k = 0 : M/2,$$

unde  $\Gamma = gg^T$ , iar  $g = [1 \ 2 \ \dots \ 2]^T \in \mathbb{R}^{M/2+1}$ . Pentru simplitate, indexăm matricele începând de la zero. Pentru a calcula matricea  $P$  din (4.27), avem deci nevoie de integrala

$$\begin{aligned} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \cos(i\omega) \cos(k\omega) d\omega &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{2} [\cos(i+k)\omega + \cos(i-k)\omega] d\omega = \\ &= \frac{1}{2} [\omega_2 \text{sinc}(i+k)\omega_2 + \omega_2 \text{sinc}(i-k)\omega_2 - \omega_1 \text{sinc}(i+k)\omega_1 - \omega_1 \text{sinc}(i-k)\omega_1]. \end{aligned}$$

Așadar, elementul  $(i, k)$  al matricei  $P$  are expresia

$$\begin{aligned} p_{ik} &= \frac{1}{2} \{ \omega_b \text{sinc}(i+k)\omega_b + \omega_b \text{sinc}(i-k)\omega_b - \omega_s \text{sinc}(i+k)\omega_s \\ &\quad - \omega_s \text{sinc}(i-k)\omega_s + \pi \delta[i+k] + \pi \delta[i-k] \}. \end{aligned}$$

Desigur, în Matlab indicii matricelor încep de la 1, de unde expresiile din program; de asemenea, atenție, în program se utilizează frecvențe normalizate. Calculul vectorului  $q$  este similar cu cel din problema anterioară. Ultima linie din program așează coeficienții filtrului în ordinea firească, ținând seama de (4.25).

**b.** Apelând funcția din figura 4.15 cu `opt2f1_tj(16,0.3,0.46)` obținem exact filtrul al cărui răspuns în frecvență este desenat în figura 4.13. Explicația acestui fapt este dată în problema următoare. ■

**PR 4.3.3** Filtrele obținute în rezolvările celor două probleme anterioare sugerează următoarea generalizare. Presupunem că răspunsul dorit (complex) are fază strict liniară și deci putem scrie  $D_c(\omega) = |D_c(\omega)|e^{-j\omega n_0}$ ,  $\omega \in \mathcal{F}$ ; un exemplu de astfel de prototip este (4.29). Căutăm filtrul FIR  $H(z)$  de ordin  $M = 2n_0 \in \mathbb{N}$  reprezentând soluția problemei de optimizare în sens CMMP (4.5). Să se demonstreze că soluția problemei este un filtru cu fază liniară, cu coeficienți simetrici (i.e. de tip I sau II).

*Soluție.* Fie  $H(z) = \sum_{n=0}^M h[n]z^{-n}$ . Secvența  $h[n]$ , care are suport finit  $0 : M$ , se poate descompune ca

$$h[n] = h_s[n] + h_a[n],$$

unde  $h_s[n]$  este simetrică, iar  $h_a[n]$  antisimetrică. Într-adevăr, se observă imediat că luând

$$\begin{aligned} h_s[n] &= \frac{1}{2}(h[n] + h[M-n]), \\ h_a[n] &= \frac{1}{2}(h[n] - h[M-n]), \end{aligned}$$

condițiile de mai sus sunt îndeplinite ( $h_s[M-n] = h_s[n]$  și  $h_a[M-n] = -h_a[n]$ ). Din (2.35) și (2.38) se observă că dacă  $M = 2n_0$ , atunci răspunsul în frecvență al filtrelor simetrice are forma

$$H_s(e^{j\omega}) = A_s(\omega)e^{-j\omega n_0}, \quad A_s(\omega) \in \mathbb{R},$$

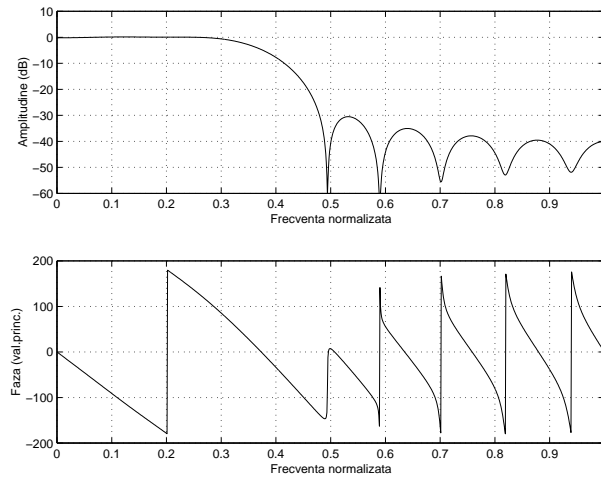


Figura 4.14: Caracteristica de frecvență a unui filtru proiectat ca în figura 4.13, dar cu  $n_0 = 5$ .

```
function h = opt2fl_tj( M, wb, ws )
% Proiectare in sens CMMP a unui filtru
% FIR trece-jos cu faza liniara de tip I
% M      - ordinul filtrului
% wb, ws - frecventele (normalizate) definind benzile
%        de trecere, respectiv oprire

m = M/2 + 1;      % numarul de coeficienti diferiti ai filtrului
g = [1; 2 * ones(m-1, 1)];

P = 0.5 * eye(m);
P(1,1) = 1;
for i = 1 : m
    for k = 1 : i
        P(i,k) = P(i,k) + 0.5*( wb*sinc((i+k-2)*wb) + wb*sinc((i-k)*wb) ...
                                -ws*sinc((i+k-2)*ws) - ws*sinc((i-k)*ws) );
        P(k,i) = P(i,k);
    end
end
end
P = P .* (g * g');
q = wb * g .* sinc((0:m-1)'*wb);
h = P \ q;
h = [ h(end:-1:2); h ];
```

Figura 4.15: Funcție Matlab pentru proiectarea în sens CMMP a filtrelor FIR (de tip I) trece-jos cu fază liniară.

iar din (2.40) și (2.43) se vede că răspunsul filtrelor antisimetrice este

$$H_a(e^{j\omega}) = jA_a(\omega)e^{-j\omega n_0}, \quad A_a(\omega) \in \mathbb{R}.$$

În acest caz, criteriul problemei de optimizare (4.5) este

$$\begin{aligned} \int_{\omega \in \mathcal{F}} |H(e^{j\omega}) - D_c(\omega)|^2 d\omega &= \int_{\omega \in \mathcal{F}} |[A_s(\omega) + jA_a(\omega) - |D_c(\omega)|]e^{-j\omega n_0}|^2 d\omega \\ &= \int_{\omega \in \mathcal{F}} ([A_s(\omega) - |D_c(\omega)|]^2 + [A_a(\omega)]^2) d\omega. \end{aligned}$$

Se observă imediat că minimum criteriului se atinge pentru  $A_a(\omega) = 0$ , adică pentru  $h_a[n] = 0$ . În consecință filtrul  $H(z) = H_s(z)$  este simetric. (Evident, coeficienții  $h[n] = h_s[n]$  se determină în funcție de  $D_c(\omega)$  rezolvând problema CMMP ca în problemele anterioare.) ■

### Probleme propuse

**PP 4.3.1** Fie  $S \in \mathbb{R}^m$  o matrice antisimetrică, i.e.  $S^T = -S$ . Demonstrați că  $h^T S h = 0$  pentru orice vector  $h \in \mathbb{R}^m$ .

**PP 4.3.2** Cum se modifică problema de optimizare în sens CMMP (4.22) dacă se adaugă ponderi în criteriu ca în (4.4) ?

**PP 4.3.3** Generalizați programul de la problema **PR4.3.2** pentru toate tipurile de filtre cu fază liniară.

**PP 4.3.4** Generalizați programele de la problemele **PR4.3.1** și **PR4.3.2** pentru filtre cu mai multe benzi de trecere și de oprire, în ordine oarecare. Testați programul pentru filtre trece-bandă și oprește-bandă. (Indicație: citiți întâi secțiunea dedicată funcțiilor Matlab pentru a lua de acolo formatul datelor de intrare.)

### Ghid Matlab

Funcția `firls` permite proiectarea în sens CMMP a filtrelor cu fază liniară; ea constituie o generalizare a programului prezentat în figura 4.15. Modul de apel este următorul

```
>> h = firls(M, W, A)
```

Ordinul filtrului este  $M$ . Parametrii  $W$  și  $A$  sunt vectori care descriu răspunsul dorit. Cei doi vectori au lungimi pare și egale. Vectorul  $W$  conține frecvențele reprezentând benzile de interes; de exemplu, în cazul răspunsului dorit (de tip trece-jos) de la problema **PR4.3.2**, vectorul este

```
>> W = [0 0.3 0.46 1]
```

Deci, prima bandă (de trecere, în cazul de mai sus) este între  $W(1)$  și  $W(2)$ , a doua (de oprire) este între  $W(3)$  și  $W(4)$  etc. Benzile de tranziție sunt între  $W(2)$  și  $W(3)$ ,  $W(4)$  și  $W(5)$  etc. Vectorul  $A$  descrie valorile răspunsului dorit în benzile de interes. În exemplul nostru, vectorul este

```
>> A = [1 1 0 0]
```

Prima pereche de elemente descrie o bandă de trecere, iar a doua o bandă de oprire. În general, răspunsul dorit este format din segmente de dreaptă unind punctele de coordonate  $(W(k), A(k))$  și  $(W(k+1), A(k+1))$ , unde  $k$  este un număr impar. (Acest răspuns este mai general decât cel constant pe porțiuni, utilizat în exemplele noastre, dar rămâne un caz particular al problemei (4.26), unde nu se impun restricții asupra răspunsului dorit  $D_r(\omega)$ .)

Introducerea unor ponderi în criteriul CMMP se face adăugând un al patrulea parametru de apel

```
>> h = firls(M, W, A, p)
```

Vectorul  $p$  are jumătate din lungimea lui  $W$  și  $A$ , fiecare valoare din  $p$  corespunzând unei perechi de valori din cei doi vectori. O valoare din  $p$  este ponderea (constantă) asociată, în criteriul pătratic, benzii de frecvențe corespunzătoare. Dacă, în exemplul nostru de filtru trece-jos, vrem să dăm abaterii de la răspunsul dorit pondere 1 în banda de trecere și 10 în banda de oprire (cu scopul de a crește atenuarea în banda de oprire), atunci punem

```
>> p = [1 10]
```

#### 4.4 Proiectarea filtrelor FIR cu fază liniară în sens Chebyshev

Proiectarea în sens Chebyshev se face mai ușor în cazul filtrelor cu fază liniară, de aceea nu ne ocupăm aici de cazul general al filtrelor fără restricții de fază. Așadar, în această secțiune, răspunsul în frecvență al filtrului are expresia (4.24).

##### Rezolvarea problemei F\_OPTINF

Problema F\_OPTINF se poate rezolva exact cu ajutorul celebrului algoritm Parks-McClellan. Deoarece descrierea riguroasă a acestui algoritm necesită un spațiu relativ mare și unele noțiuni matematice de aproximare a funcțiilor, ne vom mărgini prezentarea la elementele esențiale ale metodei. Considerăm doar filtrele de tip I (2.34), al căror răspuns în frecvență este (eliminând exponențiala complexă caracteristică fazei liniare)

$$H_r(\omega) = \sum_{n=0}^K g_n \cos(n\omega), \quad (4.30)$$

unde  $K = M/2$ , vezi (2.35) și problema **PP2.5.7**. Se observă că  $\cos(n\omega)$  se poate scrie ca un polinom (numit Chebyshev) de grad  $n$  în variabila  $\cos \omega$  (vezi problema **PR4.4.1**), și deci avem

$$H_r(\omega) = \sum_{n=0}^K f_n (\cos \omega)^n. \quad (4.31)$$

Eroarea cu care răspunsul filtrului aproximează răspunsul dorit  $D(\omega)$  este

$$E(\omega) = D(\omega) - H_r(\omega).$$

Pentru un filtru optim, așa cum sugerează figura 4.3, funcția  $E(\omega)$  are un număr de extreme locale, toate cu aceeași amplitudine  $\Delta$ . Deoarece  $H_r(\omega)$  este un polinom în variabila  $x = \cos \omega \in [-1, 1]$ , se poate demonstra următoarea teoremă de alternanță.

**Teorema 4.10** *Dacă răspunsul  $H_r(\omega)$  (4.31) este soluția unei probleme  $F\_OPTINF$ , atunci funcția eroare  $E(\omega)$  are  $L \geq K + 2$  extreme locale în frecvențele  $\omega_1, \dots, \omega_L$ , cu aceeași amplitudine și cu semne alternante, i.e.*

$$E(\omega_k) = (-1)^k \Delta, \quad k = 1 : L, \quad (4.32)$$

unde  $\Delta$  este valoarea maximă a erorii (egală cu norma infinit, sau Chebyshev, a funcției  $E(\omega)$ ).

Metoda de proiectare Parks-McClellan se bazează pe algoritmul Remez de interschimbare și are următoarea structură simplă.

1. Se aleg  $K + 2$  frecvențe  $\omega_k \in [0, \pi]$ ,  $k = 1 : K + 2$ . Se alege o toleranță  $\varepsilon$ .
2. Se rezolvă sistemul (4.32) (cu exact  $K + 2$  ecuații), necunoscutele fiind coeficienții  $f_0, \dots, f_K$  din (4.31) și valoarea  $\Delta$ .
3. Se calculează punctele de extrem  $\omega'_k \in [0, \pi]$ ,  $k = 1 : L$ , ale răspunsului  $H_r(\omega)$  obținut, și se rețin  $K + 2$  dintre ele, cele pentru care eroarea  $|D(\omega'_k) - H_r(\omega'_k)|$  are valorile cele mai mari.
4. Dacă  $|\omega_k - \omega'_k| \leq \varepsilon$ ,  $k = 1 : K + 2$ , atunci soluția a fost obținută. Altfel, se pune  $\omega_k \leftarrow \omega'_k$ ,  $k = 1 : K + 2$ , și se reia de la pasul 2.

*Explicații.* Algoritmul se bazează pe "fortări" succesive ale relației (4.32) care caracterizează filtrul optim. Desigur, după ce la pasul 1 se alege un set arbitrar de frecvențe  $\omega_k$ , rezolvarea ecuației (4.32), în care și  $\Delta$  este necunoscut, nu produce valoarea minimă a erorii  $\Delta$ . De aceea, punctele de extrem  $\omega'_k$ , calculate la pasul 3, sunt diferite de punctele  $\omega_k$  cu care s-a rezolvat sistemul (4.32). Repetând operațiile de mai sus, de fiecare dată cu noul set de frecvențe, se constată convergența către setul optim, în care relația (4.32) este satisfăcută și  $\Delta$  este eroarea optimă.

Detaliile de implementare sunt numeroase. De exemplu, la proiectarea unui filtru trece-jos, frecvențele  $\omega_b$  și  $\omega_s$  care definesc benzile de trecere și, respectiv, de oprire, fac parte întotdeauna din setul de frecvențe  $\omega_k$  cu care se rezolvă sistemul de la pasul 2 al algoritmului. Algoritmul se poate extinde ușor la filtrele de tip II-IV.

## Rezolvarea problemei $F\_OPTINF$

Pe o mulțime discretă de frecvențe  $\mathcal{G}_L = \{\omega_1, \dots, \omega_L\}$ , proiectarea filtrelor FIR cu fază liniară în sens Chebyshev se poate reduce la o problemă standard de optimizare—programarea liniară. Considerând expresia (4.24) a răspunsului în frecvență al filtrului de ordin  $M$  și alegând un răspuns dorit  $D_r(\omega)$  *real*, problema  $F\_OPTINF$  (4.7) se modifică în

$$\min_h \max_{k=1:L} |D(\omega_k) - c^T(\omega_k)h|. \quad (4.33)$$

Variabilele problemei de optimizare sunt coeficienții independenți ai filtrului  $H(z)$ ; notăm  $M'$  numărul lor, e.g. în cazul filtrelor de tip I, avem  $M' = M/2 + 1$ , vezi (4.25). Introducem o variabilă suplimentară (care depinde de coeficienții filtrului)

$$\Delta = \max_{k=1:L} |D(\omega_k) - c^T(\omega_k)h|,$$

care are semnificație de eroare maximă de aproximare pe mulțimea de frecvențe  $\mathcal{G}_L$ . Putem așadar scrie

$$-\Delta \leq c^T(\omega_k)h - D(\omega_k) \leq \Delta, \quad k = 1 : L,$$

sau

$$D(\omega_k) - \Delta \leq c^T(\omega_k)h \leq D(\omega_k) + \Delta, \quad k = 1 : L.$$

Cu aceste observații, problema de optimizare (4.33) are forma

$$\begin{aligned} & \min_{h, \Delta} \quad \Delta \\ & \text{cu restricțiile} \quad c^T(\omega_k)h - \Delta \leq D(\omega_k), \quad k = 1 : L, \\ & \quad \quad \quad -c^T(\omega_k)h - \Delta \leq -D(\omega_k), \quad k = 1 : L. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Notăm

$$\xi = \begin{bmatrix} h \\ \Delta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{M'+1}$$

variabilele problemei de optimizare (4.34). Coeficienții acestora sunt

$$\Psi = \begin{bmatrix} c^T(\omega_1) & -1 \\ \vdots & \vdots \\ c^T(\omega_L) & -1 \\ -c^T(\omega_1) & -1 \\ \vdots & \vdots \\ -c^T(\omega_L) & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2L \times (M'+1)}, \quad \beta = \begin{bmatrix} D(\omega_1) \\ \vdots \\ D(\omega_L) \\ -D(\omega_1) \\ \vdots \\ -D(\omega_L) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2L}. \quad (4.35)$$

Notând  $\gamma = [0 \ \dots \ 0 \ 1]^T \in \mathbb{R}^{M'+1}$ , problema de optimizare (4.34) poate fi scrisă în forma standard a unui program liniar, adică

$$\begin{aligned} & \min_{\xi \in \mathbb{R}^{M'+1}} \quad \gamma^T \xi \\ & \text{cu restricțiile} \quad \Psi \xi \leq \beta \end{aligned} \quad (4.36)$$

Numele de program liniar provine din faptul că atât criteriul cât și restricțiile sunt liniare în variabila vectorială  $\xi$ . (Așa cum se subînțelege, notația  $\Psi \xi \leq \beta$  are semnificația că fiecare element al vectorului  $\Psi \xi$  este mai mic sau egal cu elementul corespunzător al vectorului  $\beta$ .) Rezolvarea unei probleme de programare liniară se face cu algoritmi dedicați acestui scop, de exemplu cu funcția `lp` din Matlab (Optimization Toolbox).

Un program pentru rezolvarea problemei de proiectare **F\_OPTINF** pentru filtre de tip I este prezentat în **PR4.4.2**, împreună cu exemple de proiectare.

### Probleme rezolvate

**PR 4.4.1** Pe intervalul  $[-1, 1]$ , polinomul Chebyshev de grad  $n$  se definește prin  $T_n(x) = \cos(n \cos^{-1}(x))$ . Notând  $x = \cos \omega$ , se observă imediat că avem  $T_n(x) = \cos(n\omega)$ . Să se demonstreze că

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad (4.37)$$

iar pentru  $n > 0$  are loc relația de recurență

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x). \quad (4.38)$$

*Soluție.* Relațiile (4.37) sunt evidente. Se observă că relația (4.38) este echivalentă cu

$$\cos((n+2)\omega) = 2 \cos(\omega) \cos((n+1)\omega) - \cos(n\omega).$$

Putem scrie

$$\begin{aligned} \cos((n+2)\omega) &= \cos(2\omega) \cos(n\omega) - \sin(2\omega) \sin(n\omega) \\ &= [2 \cos^2(\omega) - 1] \cos(n\omega) - 2 \sin(\omega) \cos(\omega) \sin(n\omega) \\ &= 2 \cos(\omega) [\cos(\omega) \cos(n\omega) - \sin(\omega) \sin(n\omega)] - \cos(n\omega) \\ &= 2 \cos(\omega) \cos((n+1)\omega) - \cos(n\omega), \end{aligned}$$

ceea ce demonstrează (4.38). ■

**PR 4.4.2 a.** Să se scrie un program Matlab pentru proiectarea în sens Chebyshev a filtrelor FIR trece-jos cu fază liniară, de tip I. Datele de proiectare sunt ordinul filtrului  $M$  (un număr par), răspunsul dorit

$$D_r(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } |\omega| \leq \omega_b, \\ 0, & \text{dacă } \omega_s < |\omega| \leq \pi, \end{cases}$$

(frecvențele  $\omega_b$  și  $\omega_s$  sunt date) și numărul de frecvențe  $L$  din mulțimea  $\mathcal{G}_L$ , presupuse echidistante. Programul va consta în calculul coeficienților programului liniar (4.36), urmat de apelul funcției `lp`.

**b.** Cu programul realizat anterior, să se proiecteze un filtru FIR cu următoarele date inițiale:  $M = 16$ ,  $\omega_b = 0.3\pi$ ,  $\omega_s = 0.46\pi$ ,  $L = 100$ . Care este valoarea erorii  $\Delta$ , i.e. a criteriului problemei (4.34) ?

*Soluție. a.* Programul este prezentat în figura 4.16. Pentru lămuriri suplimentare, vezi **PR4.1.2** pentru generarea grilei de frecvențe și **PR4.3.2**. Matricea  $\Psi$  din (4.35), cu două bloc coloane, este construită în program din patru blocuri obținute prin separarea primelor și ultimelor  $L$  linii.

**b.** Cu apelul `optinf_d_tj(16,0.3,0.46,100)` a fost obținut filtrul al cărui răspuns în frecvență este prezentat în figura 4.17. Valoarea erorii maxime este  $\Delta = 0.0424$ . Comparați răspunsul cu cel din figura 4.13. ■

```

function [h, Delta] = optinf_d_tj( M, wb, ws, L )
% Proiectare in sens Chebyshev
% (pe o multime discreta de frecvente echidistante)
% a unui filtru FIR trece-jos, cu faza liniara de tip I
%
% M          - ordinul filtrului
% wb, ws     - frecventele (normalizate) definind benzile
%              de trecere, respectiv oprire
% L          - numarul de frecvente in multimea discreta
% h          - coeficientii filtrului
% Delta      - eroarea Chebyshev

% genereaza frecvente echidistante
Lb = floor( wb / (wb+1-ws) * L );
Ls = L - Lb - 1;
Lb = Lb - 1;
w = [ 0 : wb/Lb : wb, ws : (1-ws)/Ls : 1 ] * pi;

M2 = M/2;
g = [1; 2 * ones(M2, 1)];

% genereaza constantele problemei de programare liniara
Ccos = repmat(g', L, 1) .* cos(w'*(0:M2));
Psi = [ Ccos -ones(L,1);
        -Ccos -ones(L,1) ];
beta = [ ones(Lb+1,1); zeros(Ls+1,1) ];
beta = [ beta; -beta ];
gamma = zeros(M2 + 2, 1);
gamma(end) = 1;          % criteriul este Delta !

% rezolva problema de programare liniara
x = lp(gamma, Psi, beta);
h = x(1:end-1);
h = [ h(end:-1:2); h ];
Delta = x(end);

```

Figura 4.16: Funcție Matlab pentru proiectarea în sens Chebyshev a filtrelor FIR (de tip I) trece-jos cu fază liniară.



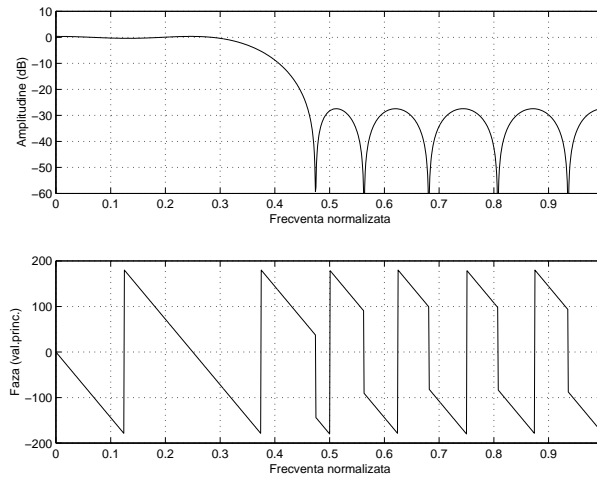


Figura 4.17: Caracteristica de frecvență a filtrului FIR trece-jos, soluție a problemei **F\_OPTINF**, pentru  $M = 16$ ,  $\omega_b = 0.3\pi$ ,  $\omega_s = 0.46\pi$ ,  $L = 100$ .

### Probleme propuse

**PP 4.4.1** Să se generalizeze funcția Matlab din problema **PR4.4.2** pentru

- toate filtrele cu coeficienți simetrici, respectiv antisimetrici;
- orice răspuns dorit  $D(\omega)$ , definit pe o mulțime discretă de frecvențe. (Valorile răspunsului dorit și frecvențele corespunzătoare sunt argumente ale funcției.)

**PP 4.4.2** Fie  $H_r(\omega)$  răspunsul în frecvență al filtrului calculat în problema **PR4.4.2**, punctul **b**. Evaluați eroarea  $|D_r(\omega) - H_r(\omega)|$  într-un număr mare de frecvențe, de exemplu 1000 (în orice caz mult mai mare decât valoarea  $L$  folosită la proiectarea filtrului), și calculați eroarea maximă. De ce este aceasta mai mare decât eroarea  $\Delta$  calculată de programul din **PR4.4.2** ?

### Ghid Matlab

Algoritmul Parks-McClellan pentru proiectarea în sens Chebyshev a filtrelor cu fază liniară se face cu funcția **remez**. Modul de apel este

```
>> h = remez(M, W, A)
```

Argumentele sunt aceleași ca la funcția **firls** de proiectare în sens CMMP.

## 4.5 Proiectarea filtrelor IIR: metode de transformare

Din punct de vedere istoric, filtrele analogice au fost primele utilizate în aplicații practice, cu decenii bune înaintea celor digitale. De aceea, metodele de proiectare a filtrelor analogice—în mod necesar filtre IIR—erau deja bine dezvoltate atunci când

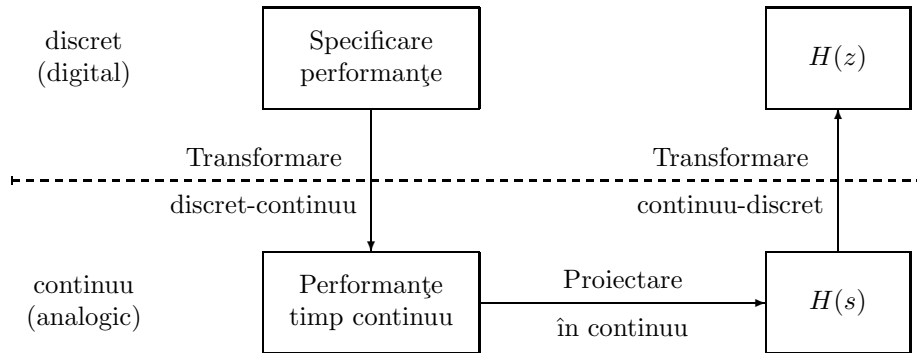


Figura 4.18: Schema generală de proiectare a filtrelor IIR prin metode de transformare.

a apărut necesitatea proiectării filtrelor digitale. O metodă comodă de proiectare a filtrelor IIR digitale se bazează pe transformarea unora analogice, ca în figura 4.18. Performanțele specificate ale filtrului digital (e.g. în forma unei probleme **F-TOL**) sunt transformate în performanțe echivalente în domeniul continuu; pe baza acestora se proiectează filtrul analogic  $H(s)$ , din care, printr-o transformare  $z = f(s)$ , se obține filtrul dorit  $H(z)$ . Se observă că metoda are două componente principale:

- transformarea  $f$  între domeniile discret și continuu, care trebuie să fie biunivocă;
- proiectarea filtrelor analogice (în timp continuu).

Vom prezenta în continuare detalii ale celor două componente. Peste tot vom nota  $\omega$  frecvența în domeniul discret (așa cum am făcut până aici) și  $\Omega$  frecvența în domeniul continuu. Așadar, dacă  $H(s)$  și  $G(z)$  sunt funcții de transfer în continuu, respectiv discret, atunci caracteristicile lor de frecvență sunt  $H(j\Omega)$ , respectiv  $G(e^{j\omega})$ .

#### 4.5.1 Filtre analogice

Proiectarea filtrelor analogice se face îndeosebi cu ajutorul unor filtre tip, pentru care există o modalitate analitică de descriere. Cele mai întâlnite filtre sunt numite Butterworth, Chebyshev (tip I sau II) și Cauer (sau eliptic). Vom prezenta mai jos o descriere sumară a acestor filtre.

*Filtrul Butterworth.* Un astfel de filtru este definit de ordinul său  $n$  și de o frecvență de tăiere  $\Omega_t$ . Caracteristica de frecvență  $H(j\Omega)$  a filtrului satisface relația

$$|H(j\Omega)|^2 = H(j\Omega)H(-j\Omega) = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_t)^{2n}}. \quad (4.39)$$

După cum se vede în figura 4.19, amplitudinea răspunsului în frecvență al filtrului Butterworth este descrescătoare. La frecvența de tăiere  $\Omega_t$ , avem întotdeauna

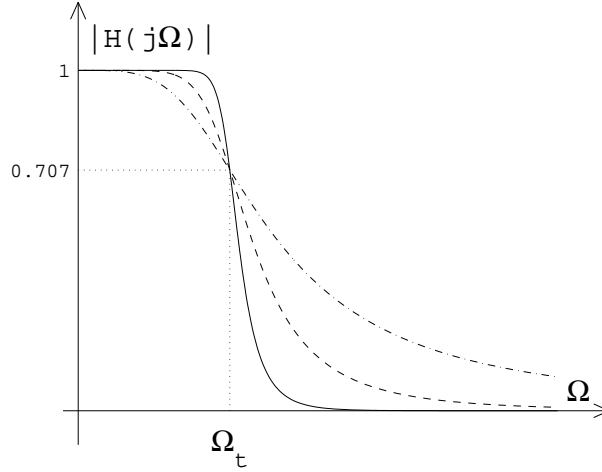


Figura 4.19: Amplitudinea răspunsului în frecvență al filtrului Butterworth, pentru  $n = 2$  (linie-punct),  $n = 4$  (linie întreruptă) și  $n = 10$  (linie continuă).

$|H(j\Omega_t)| = 1/\sqrt{2}$ , i.e. aceasta este frecvența la care atenuarea este de 3dB (reamintim că  $\log_{10} 2 \approx 0.3$ , deci  $20 \log_{10}(1/\sqrt{2}) \approx -3$ ); de asemenea, amplificarea  $H(0) = 1$  este constantă. Cu cât ordinul  $n$  este mai mare, cu atât tranziția în jurul valorii  $\omega_t$  este mai abruptă.

Funcția de transfer  $H(s)$  se determină prelungind analitic relația (4.39) (valabilă pentru  $s = j\Omega$ ) și obținând

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + (s/j\Omega_t)^{2n}}. \quad (4.40)$$

Cei  $2n$  poli ai funcției  $H(s)H(-s)$  sunt definiți de  $(-1)^{1/2n}j\Omega_t$ , deci au forma

$$s_k = \Omega_t \exp\left(-j\frac{\pi}{2n}(2k-1+n)\right), \quad k = 0 : 2n-1, \quad (4.41)$$

și sunt plasați echidistant pe un cerc de rază  $\Omega_t$  centrat în origine, simetric față de axa imaginară, ca în figura 4.20. Pentru  $H(s)$  se iau polii cu parte reală negativă, astfel încât  $H(s)$  să fie o funcție de transfer stabilă. Vezi problema **PR4.5.1** pentru exemple de filtre Butterworth cu număr mic de poli.

*Filtre Chebyshev.* Filtrele Chebyshev de tip I au răspunsul în frecvență de forma

$$|H(j\Omega)|^2 = H(j\Omega)H(-j\Omega) = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_n^2(\Omega/\Omega_b)}, \quad (4.42)$$

unde  $n$  este ordinul filtrului, iar

$$T_n(x) = \begin{cases} \cos(n \cos^{-1}(x)), & \text{pentru } |x| \leq 1, \\ \cosh(n \cosh^{-1}(x)), & \text{pentru } |x| > 1, \end{cases}$$

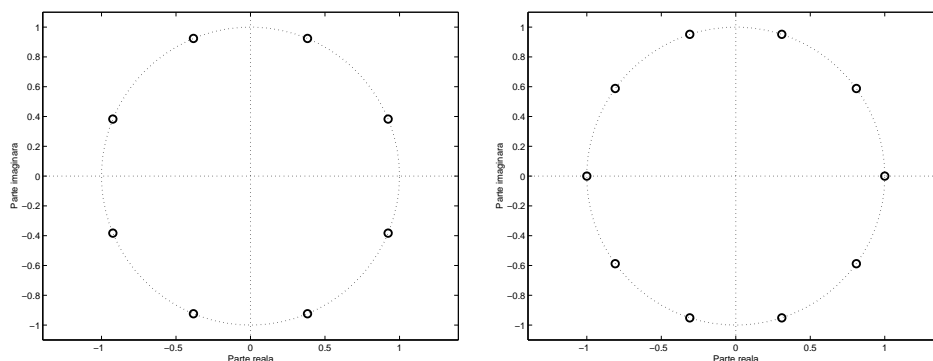


Figura 4.20: Polii filtrului Butterworth (în semiplanul stâng) și simetricii lor față de axa imaginară, pentru  $n = 4$  (stânga) și  $n = 5$  (dreapta),  $\Omega_t = 1$ . Vezi formula (4.41).

este polinomul Chebyshev de ordinul  $n$ . Răspunsul în frecvență al unui filtru Chebyshev de tip I, cu  $n = 4$ , este prezentat în figura 4.21 (stânga). Se observă că răspunsul are ondulații egale în banda de trecere și este descrescător în banda de oprire. Parametrul  $\epsilon$  dictează înălțimea ondulațiilor; în banda de trecere  $[0, \Omega_b]$ , răspunsul ia valori între  $M_b = \frac{1}{1+\epsilon^2}$  și 1; pentru  $\Omega = \Omega_b$ , avem întotdeauna  $|H(j\Omega)| = M_b$ .

Filtrul Chebyshev de tipul II, al cărui răspuns se vede în figura 4.21 (dreapta), se obține printr-o transformare a celui de tip I și are ondulații egale în banda de oprire.

*Filtrul eliptic* are răspunsul în frecvență

$$|H(j\Omega)|^2 = H(j\Omega)H(-j\Omega) = \frac{1}{1 + \epsilon^2 U_n^2(\Omega/\Omega_b)}, \quad (4.43)$$

unde  $U_n(\cdot)$  este funcția Jacobi eliptică de ordinul II. Răspunsul are ondulații egale atât în banda de trecere cât și în cea de oprire (vezi figura 4.22, unde  $n = 4$ ). Și aici avem  $M_b = \frac{1}{1+\epsilon^2}$ .

### 4.5.2 Transformarea biliniară

O transformare continuu-discret  $z = f(s)$  trebuie să aibă următoarele proprietăți:

- să fie biunivocă, astfel încât, împreună cu inversa sa, să asigure transformarea în ambele sensuri;
- să transforme semiplanul complex stâng în discul unitate, astfel încât un filtru analogic stabil să fie transformat într-un filtru digital stabil și reciproc;
- să transforme axa imaginară în cercul unitate, astfel încât răspunsul în frecvență  $H(j\Omega)$  al unui filtru analogic să-și păstreze alura în transformatul său digi-

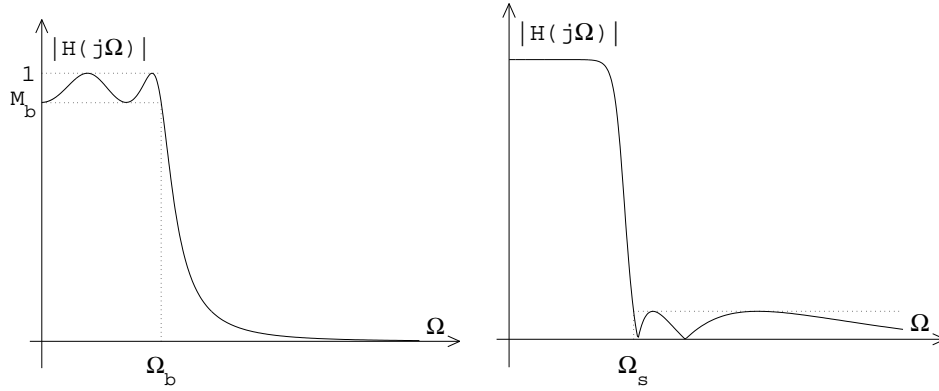


Figura 4.21: Amplitudinea răspunsului în frecvență al unor filtre Chebyshev de tip I cu  $n = 4$  (stânga) și II cu  $n = 6$  (dreapta).

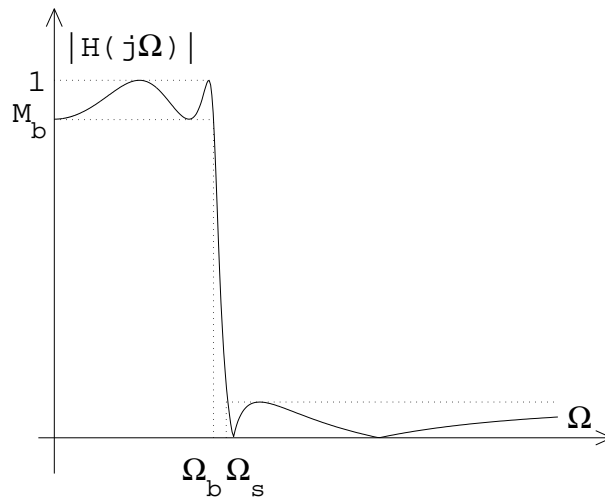


Figura 4.22: Amplitudinea răspunsului în frecvență a unui filtru eliptic, cu  $n = 4$ .

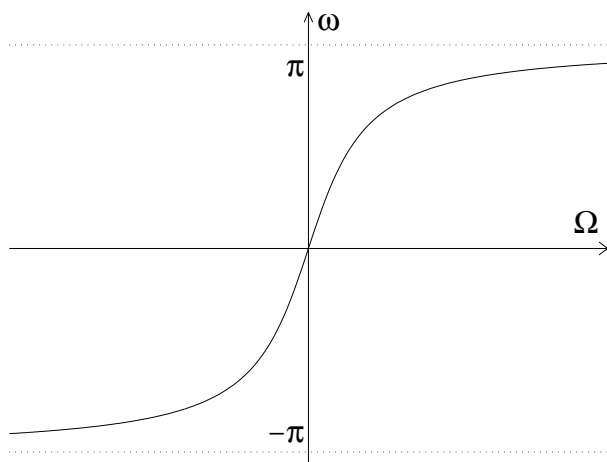


Figura 4.23: Graficul transformării de frecvențe continuu-discret biliniară.

tal  $H(e^{j\omega})$  (notăm  $H(s)$  filtrul analogic și, cu aceeași literă,  $H(z) = H(f(s))$  filtrul digital).

Transformarea cea mai utilizată este cea *biliniară*, definită de relația

$$z = \frac{1+s}{1-s}, \quad (4.44)$$

a cărei inversă este

$$s = \frac{z-1}{z+1} = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}. \quad (4.45)$$

(Deoarece au forme similare, ambele transformări de mai sus sunt numite biliniare, sensul transformării rezultând din context.) Transformarea continuu-discret a frecvențelor se obține din (4.44) înlocuind  $s = j\Omega$  și  $z = e^{j\omega}$ . Din

$$e^{j\omega} = \frac{1+j\Omega}{1-j\Omega} \quad (4.46)$$

se obțin relațiile (vezi problema **PR4.5.2**)

$$\begin{aligned} \omega &= 2\arctg\Omega, \\ \Omega &= \tg\frac{\omega}{2}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Desigur, transformarea  $\omega = 2\arctg\Omega$ , care duce  $\mathbb{R}$  în  $[-\pi, \pi]$ , este neliniară, așa cum se vede și din figura 4.23.

*Filtrul Butterworth discret.* Fiind o funcție crescătoare, transformarea în frecvență (4.47) păstrează forma răspunsului în frecvență al unui filtru analogic, în sensul că e.g. un filtru trece-jos analogic este transformat într-un filtru trece-jos discret. Prin aplicarea transformării biliniare, răspunsul în frecvență (4.39) al filtrului Butterworth analogic se transformă în

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\tg(\omega/2)}{\tg(\omega_t/2)}\right)^{2n}}, \quad \omega_t = 2\arctg\Omega_t, \quad (4.48)$$

care reprezintă amplitudinea răspunsului în frecvență al filtrului Butterworth discret. Un exemplu de proiectare a unui filtru Butterworth discret este prezentat în problema **PR4.5.3**.

### 4.5.3 Transformări discret-discret în frecvență

Filtrele IIR analogice discutate mai sus sunt toate de tip trece-jos, iar prin transformarea biliniară se obțin filtre digitale tot de tip trece-jos. Pentru a proiecta altfel de filtre digitale (trece-sus, trece-bandă etc.), se pot utiliza transformări în frecvență (fie în domeniul continuu, fie în cel discret), care obțin filtrul dorit dintr-unul trece-jos. Ne vom ocupa doar de transformările în domeniul discret. O astfel de transformare  $Z = G(z)$  trebuie să aibă următoarele proprietăți:

- să fie inversabilă;
- să transforme discul unitate în el însuși, astfel încât un filtru stabil să fie transformat într-un filtru stabil;
- să transforme cercul unitate în el însuși, astfel încât răspunsul în frecvență al filtrului obținut  $H(Z)$  să depindă doar de răspunsul filtrului inițial  $H(z)$ .

**Propoziția 4.11** *Toate transformările cu proprietățile de mai sus sunt funcții de tip trece-tot, i.e.*

$$Z^{-1} = \pm \frac{\prod_{k=1}^N (z^{-1} - c_k^*)}{\prod_{k=1}^N (1 - c_k z^{-1})}, \quad |c_k| < 1. \quad (4.49)$$

În particular, transformările din trece-jos în trece-sus sau trece-jos (dar cu altă frecvență de tăiere) sunt date de o funcție de forma (4.49) cu un singur pol, iar cele din trece-jos în trece-bandă sau oprește-bandă de funcții cu doi poli. Problema **PR4.5.4** ilustrează o astfel de transformare.

### Probleme rezolvate

**PR 4.5.1 a.** Care sunt funcțiile de transfer ale filtrelor Butterworth analogice cu  $\Omega_t = 1$  și  $n = 1, 2, 3$  ?

**b.** Care sunt funcțiile de transfer ale filtrelor discrete obținute din cele analogice prin transformarea biliniară ?

*Soluție.* **a.** Reamintim că polii filtrelor Butterworth au forma (4.41) și se află în semiplanul complex stâng. Pentru  $n = 1$ , unicul pol este  $s_1 = -1$ . Pentru  $n = 2$ , polii sunt  $s_{1,2} = (-1 \pm j)/\sqrt{2}$ . Pentru  $n = 3$ , polii sunt  $s_1 = -1$ ,  $s_{2,3} = (-1 \pm j\sqrt{3})/2$ . Funcțiile de transfer corespunzătoare sunt

$$H_1(s) = \frac{1}{s+1}, \quad H_2(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}, \quad H_3(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2 + s + 1)}.$$

**b.** Aplicând transformarea biliniară se obțin filtrele discrete

$$H_1(z) = \frac{1+z^{-1}}{2}, \quad H_2(z) = \frac{(1+z^{-1})^2}{(2+\sqrt{2}) + (2-\sqrt{2})z^{-2}}, \quad H_3(z) = \frac{(1+z^{-1})^3}{6+2z^{-2}}.$$

Observați că polii filtrelor discrete sunt pe axa imaginară. ■

**PR 4.5.2** Demonstrați că transformarea biliniară satisface cele trei proprietăți enumerate la începutul secțiunii 4.5.2.

*Soluție.* Se verifică elementar că transformările (4.44) și (4.45) sunt una inversa celeilalte.

Demonstrăm acum că semiplanul complex stâng este transformat prin (4.44) în discul unitate. Notăm  $s = u + jv$ . Dacă  $\text{Re } s = u < 0$ , atunci  $(1 + u)^2 < (1 - u)^2$  și din (4.44) obținem

$$|z|^2 = \left| \frac{1+s}{1-s} \right|^2 = \frac{(1+u)^2 + v^2}{(1-u)^2 + v^2} < 1.$$

Ca să demonstrăm că axa imaginară e transformată prin (4.44) în cercul unitate, i.e. că are loc (4.47), luăm pur și simplu argumentul în egalitatea (4.46); rezultă prima relație din (4.47), iar a doua este evident inversa ei. ■

**PR 4.5.3** Scrieți un program Matlab care să proiecteze un filtru Butterworth discret satisfăcând cerințele unei probleme **F\_TOL**. Se dorește un filtru de ordin minim, pentru care  $H(1) = 1$  (amplificare unitară a semnalelor constante).

Exemplu numeric:  $\omega_b = 0.3\pi$ ,  $\omega_s = 0.45\pi$ ,  $\Delta_b = 0.1$  și  $\Delta_s = 0.1$ .

*Soluție.* Răspunsul în frecvență al unui filtru Butterworth discret care satisface cerințele este prezentat în figura 4.24 stânga. Notăm  $M_b = 1 - \Delta_b$ . Graficul este desenat presupunând că cerințele sunt satisfăcute la limită, dar în general avem

$$|H(\omega_b)| \geq M_b, \quad |H(\omega_s)| \leq \Delta_s. \quad (4.50)$$

Evident, deoarece amplitudinea răspunsului este descrescătoare, avem  $M_b \leq |H(\omega)| \leq 1$  pentru  $\omega \in [0, \omega_b]$  și  $|H(\omega)| \leq \Delta_s$  pentru  $\omega \in [\omega_s, \pi]$ .

Pentru proiectarea filtrului, parcurgem următoarele etape: i) transpunem cerințele de proiectare în domeniul continuu, ii) găsim un filtru analogic care să satisfacă cerințele, iii) obținem filtrul discret aplicând transformarea biliniară celui continuu.

i) Filtrul analogic corespunzător celui discret are răspunsul în frecvență din figura 4.24 dreapta. Conform cu (4.47), avem

$$\Omega_b = \text{tg} \frac{\omega_b}{2}, \quad \Omega_s = \text{tg} \frac{\omega_s}{2}. \quad (4.51)$$

Dorim să aflăm ordinul  $n$  și frecvența de tăiere  $\Omega_t$  ale unui filtru Butterworth analogic, al cărui răspuns în frecvență (4.39) satisface condițiile obținute din (4.50), i.e.

$$|H(\Omega_b)| \geq M_b, \quad |H(\Omega_s)| \leq \Delta_s. \quad (4.52)$$

și deci

$$\frac{1}{1 + (\Omega_b/\Omega_t)^{2n}} \geq M_b^2, \quad \frac{1}{1 + (\Omega_s/\Omega_t)^{2n}} \leq \Delta_s^2. \quad (4.53)$$



ii) Din (4.53) obținem

$$\begin{aligned} 2n(\log \Omega_t - \log \Omega_b) &\geq \log \frac{M_b^2}{1 - M_b^2}, \\ 2n(\log \Omega_s - \log \Omega_t) &\geq \log \frac{1 - \Delta_s^2}{\Delta_s^2}. \end{aligned}$$

Adunăm cele două inegalități de mai sus și obținem

$$n \geq \frac{\log \frac{M_b^2(1 - \Delta_s^2)}{\Delta_s^2(1 - M_b^2)}}{2 \log \Omega_s / \Omega_b}. \quad (4.54)$$

Desigur, ordinul  $n$  trebuie să fie întreg, așa că îl luăm egal cu primul întreg mai mare ca (4.54). Pentru a calcula  $\Omega_t$ , impunem egalitatea într-una din inegalitățile (4.53), de exemplu în prima, din care rezultă

$$\Omega_t = \frac{\Omega_b}{\left(\frac{1 - M_b^2}{M_b^2}\right)^{1/2n}}. \quad (4.55)$$

Am obținut deci parametrii  $n$  și  $\Omega_t$  ai filtrului Butterworth analogic, a cărui funcție de transfer  $H(s)$  se calculează ușor știind pozițiile (4.41) ale polilor.

iii) În final, filtrul discret  $H(z)$  se obține aplicând transformarea biliniară (4.45) filtrului analogic  $H(s)$ .

Programul care implementează algoritmul descris mai sus este prezentat în figura 4.25. Primele linii ale programului reprezintă implementarea formulelor (4.51), (4.54) și (4.55). Calculul polilor se face conform formulei (4.41), în care se iau doar polii din semiplanul complex stâng, corespunzând valorilor  $k = 1 : n$ . Transformarea biliniară se aplică direct asupra polilor (și nu asupra coeficienților filtrului analogic). Dacă funcția de transfer a filtrului Butterworth analogic este

$$H(s) = \frac{\prod_{k=1}^n (-s_k)}{\prod_{k=1}^n (s - s_k)},$$

i.e.  $s_k$ ,  $k = 1 : n$ , sunt polii filtrului și  $H(0) = 1$ , atunci folosind transformarea (4.45) rezultă

$$H(z) = \frac{\prod_{k=1}^n (-s_k)}{\prod_{k=1}^n (1 - s_k)} \frac{\prod_{k=1}^n (1 + z^{-1})}{\prod_{k=1}^n (1 - z^{-1} \frac{1+s_k}{1-s_k})}, \quad (4.56)$$

formulă care evidențiază amplificarea, zerourile și polii  $z_k = \frac{1+s_k}{1-s_k}$  ai filtrului Butterworth discret. În ultimele instrucțiuni ale programului se ia partea reală pentru a elimina partea imaginară rezultată în urma erorilor numerice.

Cu datele numerice din problemă, din (4.54) rezultă  $n \geq 5.852$ , deci se ia  $n = 6$ . Din (4.55) se obține  $\Omega_t = 0.575$ . Cititorul este invitat să traseze, în Matlab, răspunsul în frecvență al filtrului Butterworth proiectat cu programul descris mai sus. ■

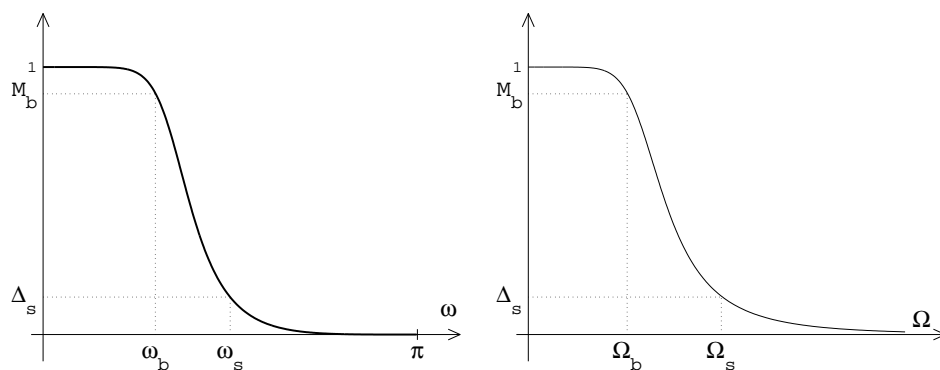


Figura 4.24: Filtre Butterworth discret (stânga) și analogic (dreapta) satisfăcând cerințele problemei **PR4.5.3**.

**PR 4.5.4** Demonstrați că aplicând unui filtru trece-jos  $H(z)$  transformarea

$$Z^{-1} = -\frac{z^{-1} - c}{1 - cz^{-1}}, \quad c \in \mathbb{R}, \quad |c| < 1, \quad (4.57)$$

se obține un filtru trece-sus  $H(Z)$ . Pentru a studia răspunsurile în frecvență ale filtrelor, pe cercul unitate notăm  $z = e^{j\omega}$  și  $Z = e^{j\theta}$ . Obțineți relația de transformare a frecvențelor  $\theta = g(\omega)$ .

Aplicați transformarea de mai sus filtrului Butterworth  $H_2(z)$  din problema **PR4.5.1**, pentru  $c = -0.5, 0, 0.5$  și desenați caracteristicile de frecvență ale filtrelor obținute.

*Soluție.* Pe cercul unitate, din (4.57) obținem

$$e^{-j\theta} = -\frac{e^{-j\omega} - c}{1 - ce^{-j\omega}} = \frac{2c - (1 + c^2) \cos \omega + j(c^2 - 1) \sin \omega}{1 + c^2 - 2c \cos \omega}.$$

Luând argumentul în expresiile extreme de mai sus, rezultă

$$\theta = \arctg \left[ \frac{(1 - c^2) \sin \omega}{2c - (1 + c^2) \cos \omega} \right]. \quad (4.58)$$

Graficul transformării (4.58) este prezentat în figura 4.26; pentru a-l obține, am considerat că funcția  $\arctg$  ia valori în intervalul  $[0, \pi]$  și nu în  $[-\pi/2, \pi/2]$  (unde este ramura principală a funcției); cu alte cuvinte, am înlocuit  $\theta$  cu  $\theta + \pi$  atunci când  $\theta < 0$ . Cea mai simplă transformare se obține pentru  $c = 0$ , când  $Z = -z$  iar  $\theta = \pi - \omega$ , deci răspunsul în frecvență este oglindit față de verticala care trece prin  $\pi/2$ .

Caracteristicile de frecvență ale filtrele Butterworth trece-sus obținute din  $H_2(z)$  de la problema **PR4.5.1** sunt prezentate în figura 4.27. Calculul funcțiilor de transfer este lăsat cititorului. ■

```

function [b,a] = prbut(wb, ws, Delta_b, Delta_s)
% Proiectare filtru Butterworth discret pentru problema F_TOL
% wb, wb      - frecventele normalizate definind benzile
%              de trecere, respectiv oprire
% Delta_b     - toleranta in baza de trecere
% Delta_s     - toleranta in baza de oprire

Mb = 1 - Delta_b;

% transforma specificatiile in continuu
Omega_b = tan(wb*pi/2);
Omega_s = tan(ws*pi/2);

% determina parametrii filtrului Butterworth analogic
Mb2 = Mb * Mb;
Ds2 = Delta_s * Delta_s;
n = ceil( log(Mb2 * (1-Ds2) / Ds2 / (1-Mb2)) / 2 / log(Omega_s/Omega_b) );
Omega_t = Omega_b / ((1-Mb2)/Mb2)^(1/2/n);

% polii filtrului Butterworth analogic
poli_a = Omega_t * exp( -sqrt(-1) * pi / 2 / n * ( (1:2:2*n) + n ) );

% functia de transfer a filtrului Butterworth digital
zero_d = - ones(n,1);
poli_d = (1 + poli_a) ./ (1 - poli_a);
amplif = real(prod(-poli_a) / prod(1 - poli_a));

b = amplif * real(poly(zero_d));
a = real(poly(poli_d));

```

Figura 4.25: Funcție Matlab pentru rezolvarea unei probleme **F\_TOL** cu un filtru de tip Butterworth.

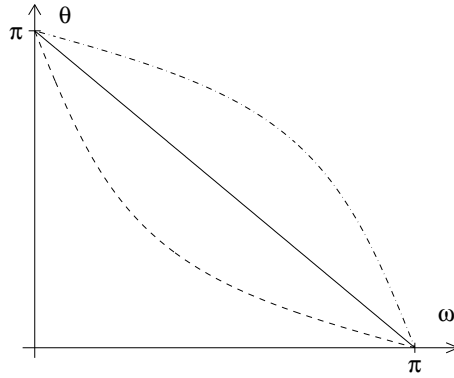


Figura 4.26: Graficul transformării în frecvență (4.58), din trece-jos în trece-sus, pentru  $c = 0$  (linie continuă),  $c = -0.5$  (linie-punct),  $c = 0.5$  (linie întreruptă).

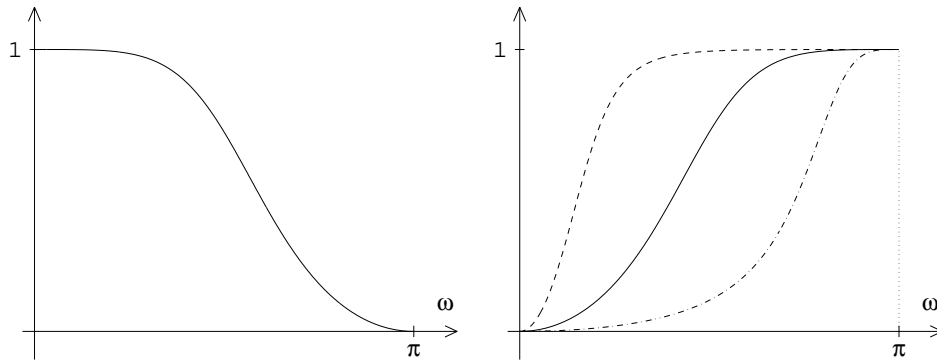


Figura 4.27: Caracteristici de frecvență ale unui filtru Butterworth trece-jos de ordinul 2 și ale unor filtre trece-sus obținute din acesta prin transformarea (4.57), pentru  $c = 0$  (linie continuă),  $c = -0.5$  (linie-punct),  $c = 0.5$  (linie întreruptă).

### Probleme propuse

**PP 4.5.1 a.** Observați că pentru ordin  $n$  impar, filtrul Butterworth analogic are un pol în  $-1$ . Unde se află polul corespunzător al filtrului discret obținut prin transformarea biliniară ? Ce proprietate are numitorul acestui filtru ?

**b.** Care sunt zerourile filtrului Butterworth discret ?

**c.** Ce poli trebuie să aibă un filtru analogic pentru ca prin transformarea biliniară să se obțină din el un filtru FIR ?

**PP 4.5.2** Demonstrați că transformarea biliniară (4.44) transformă cercul unitate în axa imaginară (și nu doar invers, așa cum am demonstrat în **PR4.5.2**).

Observați că dacă un filtru Butterworth analogic are frecvența de tăiere  $\Omega_t = 1$ , atunci polii filtrului Butterworth discret obținut prin transformarea biliniară se află pe axa imaginară (vezi **PR4.5.1**).

**PP 4.5.3** Indicați modul de proiectare al unui filtru IIR Butterworth de tip *trece-sus* conform următoarelor cerințe de tip **F-TOL**: bandă de trecere  $[\omega_b, \pi]$ , bandă de oprire  $[0, \omega_s]$ , toleranțe  $\Delta_b$  în banda de trecere și  $\Delta_s$  în cea de oprire.

**PP 4.5.4** Modificați algoritmul de proiectare din **PR4.5.3** astfel încât cerințele problemei **F-TOL** să fie satisfăcute de un filtru Butterworth pentru care  $H(1) = 1 + \Delta_b$ . (Spre deosebire, algoritmul din **PR4.5.3** consideră  $H(1) = 1$ , adică amplificarea unitară în regim staționar.) Pentru scrierea algoritmului, demonstrați că ordinul filtrului se obține prin modificarea relației (4.54) în

$$n \geq \frac{\log \frac{M_b^2[(1 + \Delta_b)^2 - \Delta_s^2]}{\Delta_s^2[(1 + \Delta_b)^2 - M_b^2]}}{2 \log \Omega_s / \Omega_b}, \quad (4.59)$$

iar frecvența de tăiere este

$$\Omega_t = \frac{\Omega_b}{\left[ \frac{(1 + \Delta_b)^2 - M_b^2}{M_b^2} \right]^{1/2n}}. \quad (4.60)$$

În fine, observați că funcția de transfer (4.56) a filtrului trebuie înmulțită cu  $1 + \Delta_b$  pentru a obține amplificarea dorită în regim staționar.

**PP 4.5.5** De multe ori, în locul transformării biliniare (4.45) se folosește forma mai generală

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}, \quad (4.61)$$

cu  $T > 0$  fixat.

**a.** Calculați inversa acestei transformări.

**b.** Demonstrați că transformarea posedă proprietățile enumerate la începutul secțiunii 4.5.2.

**c.** Care sunt analogele formulelor (4.47) în cazul acestei transformări ?

## Ghid Matlab

Filtrul Butterworth analogic se proiectează cu apelul

```
>> [rb, ra, k0] = buttap(N)
```

Funcția primește ordinul filtrului și întoarce zerourile, polii și amplificarea acestuia. Frecvența de tăiere are valoarea normalizată  $\Omega_t = 1$ .

Filtrele analogice Chebyshev, de tip I și II, și eliptic se proiectează cu funcțiile **cheb1ap**, **cheb2ap** și, respectiv, **ellipap**. De exemplu, filtrul Chebyshev de tip I se obține cu

```
>> [rb, ra, k0] = cheb1ap(N, Mb)
```

unde **Mb** este înălțimea undulațiilor în banda de trecere, în decibeli.

Transformarea biliniară, în forma generală (4.61), este implementată de funcția **bilinear**. Un apel la aceasta are forma

```
>> [rbd, rad, k0d] = bilinear(rb, ra, k0, F)
```

Primele trei argumente de intrare sunt zerourile, polii și amplificarea filtrului analogic. Al patrulea argument, **F**, este valoarea  $1/T$  din (4.61). Argumentele de ieșire sunt zerourile, polii și amplificarea filtrului discret rezultat în urma aplicării transformării biliniare filtrului analogic.

Metoda de proiectare prin transformare a filtrului Butterworth discret este implementată de funcția **butter**. Funcția se apelează cu

```
>> [b, a] = butter(N, wt)
```

**N** este ordinul filtrului iar variabila **wt** corespunde frecvenței discrete (normalizate)  $\omega_t$  din (4.48). Funcția **butter** se comportă într-un mod echivalent următorului algoritim: calculează  $\Omega_t = \tan(\omega/2)$ , conform cu (4.47), proiectează filtrul analogic de ordinul **N**, apoi aplică transformarea biliniară pentru a obține filtrul discret dorit.

De exemplu, pentru a obține filtrul  $H_3(z)$  cerut în problema **PR4.5.1**, observăm că lui  $\Omega_t = 1$  îi corespunde prin (4.47)  $\omega_t = \pi/2$  și deci folosim apelul (nu uitați, frecvențele sunt mereu normalizate)

```
>> [b, a] = butter(3, 0.5)
```

Filtrele discrete Chebyshev, de tip I și II, și eliptic se proiectează cu funcțiile **cheby1**, **cheby2** și, respectiv, **ellip**. De exemplu, filtrul Chebyshev de tip I se obține cu

```
>> [b, a] = cheby1(N, Mb, wb)
```

unde **Mb** este înălțimea undulațiilor în banda de trecere, în decibeli, **N** este ordinul filtrului iar **wb** este frecvența maximă de trecere.

În plus față de comportarea deja descrisă, toate aceste funcții permit proiectarea unor filtre trece-sus sau oprește-bandă (care se obțin prin transformări în frecvență ale filtrului trece-jos). De asemenea, ele pot calcula filtre analogice, înlăturând restricția  $\Omega_t = 1$  de la funcțiile **buttap** etc.

## Capitolul 5

# Analiza în frecvență a semnalelor

Scopul acestui capitol este de a prezenta metode pentru studiul practic al conținutului în frecvență al unui semnal discret. Principalul instrument utilizat este transformata Fourier discretă, calculată cu ajutorul algoritmului FFT (Fast Fourier Transform – transformata Fourier rapidă). Semnalele de care ne ocupăm sunt de două tipuri, rezultate din practică și legate între ele:

- semnale periodice
- semnale cu suport finit

Primele sunt utilizate în multe aplicații, iar conținutul lor în frecvență poate fi calculat utilizând o singură perioadă a semnalului. Utilitatea suportului finit mai apare și atunci când trebuie analizate în timp real proprietățile unui semnal neperiodic (și eventual nestaționar); în acest scop, se iau porțiuni (cadre) succesive ale semnalului, fiecare având evident suport finit; în fiecare cadru se calculează conținutul în frecvență pentru intervalul de timp corespunzător.

În tot acest capitol, dacă  $\tilde{x}[n]$  este un semnal  $N$ -periodic, notăm  $x[n]$  semnalul cu suport  $0 : N - 1$  care reprezintă o perioadă a lui  $\tilde{x}[n]$ , adică

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & \text{dacă } n \in 0 : N - 1, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases} \quad (5.1)$$

Invers, dacă  $x[n]$  este un semnal cu suport  $0 : N - 1$ , notăm  $\tilde{x}[n]$  prelungirea lui prin periodicitate, dată de

$$\tilde{x}[n] = x[n \bmod N]. \quad (5.2)$$

### 5.1 Seria Fourier discretă

Fie  $\tilde{x}[n]$  un semnal  $N$ -periodic, i.e.  $\tilde{x}[n + kN] = \tilde{x}[n]$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ . Ca și în cazul semnalelor continue, un semnal discret periodic se poate descompune ca o sumă de sinusoidale a căror frecvență este multiplu al frecvenței fundamentale  $2\pi/N$ . Spre

deosebire de cazul continuu, unde suma are o infinitate de termeni distincți, în cazul discret există doar  $N$  sinusoid distincte (vezi secțiunea 1.1).

**Teorema 5.1** (Reprezentarea unui semnal periodic prin seria Fourier) *Orice semnal  $N$ -periodic  $\tilde{x}[n]$  se poate reprezenta prin seria Fourier discretă (SFD)*

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j \frac{2\pi}{N} kn}. \quad (5.3)$$

Valorile  $\tilde{X}[k]$ ,  $k = 0 : N - 1$ , se numesc coeficienții seriei Fourier discrete. Factorul  $1/N$  a fost introdus doar din considerente formale.

Notăm, pe tot parcursul capitolului,

$$w_N = e^{-j \frac{2\pi}{N}}. \quad (5.4)$$

Cu această notație, relația (5.3) se scrie

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] w_N^{-kn}. \quad (5.5)$$

Notăm

$$F_N = \begin{bmatrix} w_N^0 & w_N^0 & \dots & w_N^0 \\ w_N^0 & w_N^1 & \dots & w_N^{(N-1)} \\ w_N^0 & w_N^2 & \dots & w_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ w_N^0 & w_N^{(N-1)} & \dots & w_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

Notând (oarecum abuziv)

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}[0] \\ \tilde{x}[1] \\ \vdots \\ \tilde{x}[N-1] \end{bmatrix}, \quad \tilde{X} = \begin{bmatrix} \tilde{X}[0] \\ \tilde{X}[1] \\ \vdots \\ \tilde{X}[N-1] \end{bmatrix}, \quad (5.7)$$

se observă imediat că relația (5.3) se poate scrie în forma compactă

$$\tilde{x} = \frac{1}{N} F_N^H \tilde{X}. \quad (5.8)$$

**Propoziția 5.2** *Matricea  $F_N$  definită de (5.6) are structură Vandermonde, este simetrică, iar  $F_N^H F_N = F_N F_N^H = N \cdot I$  (adică  $\frac{1}{\sqrt{N}} F_N$  este o matrice unitară).*

*Demonstrație.* Structura Vandermonde și simetria sunt evidente. Atenție, matricea  $F_N$  nu este hermitică, adică  $F_N \neq F_N^H$ . Pentru restul demonstrației, vezi problema **PR5.1.2**. ■



**Teorema 5.3** (Calculul coeficienților seriei Fourier discrete) *Coeficienții seriei Fourier (5.3) asociate semnalului periodic  $\tilde{x}[n]$  au forma*

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] w_N^{kn}. \quad (5.9)$$

Folosind notațiile (5.6) și (5.7), putem scrie echivalent

$$\tilde{X} = F_N \tilde{x}. \quad (5.10)$$

*Demonstrație.* Înmulțim la stânga cu  $F_N$  în (5.8) și obținem, grație Prop. 5.2, egalitatea (5.10). La nivel de element, această egalitate este echivalentă cu (5.9). ■

Așadar, transformarea dintre vectorul  $\tilde{x}$ , reprezentând o perioadă a semnalului  $N$ -periodic  $\tilde{x}[n]$ , și vectorul  $\tilde{X}$  este biunivocă, în sensul că relațiile (5.3) și (5.9) sunt una inversa celeilalte. Aceste relații sunt numite

- (5.9): de *analiză*, prin care din semnalul  $\tilde{x}[n]$  se calculează coeficienții seriei Fourier, care arată ponderea fiecărei sinusoide în semnal ( $\tilde{X}[k]$  este coeficientul sinusoidelor de frecvență  $2k\pi/N$ , iar  $|\tilde{X}[k]|^2$  este puterea acestei frecvențe în semnal; pentru lămuriri suplimentare, vezi problema **PR5.1.3**);
- (5.3): de *sinteză*, prin care semnalul este refăcut din coeficienții seriei Fourier.

Desigur, coeficienții  $\tilde{X}[k]$  ai seriei Fourier pot fi definiți pentru orice  $k \in \mathbb{Z}$ , "semnalul" astfel obținut fiind  $N$ -periodic.

## Proprietăți ale seriei Fourier discrete

Vom enumera în continuare câteva proprietăți importante ale seriei Fourier discrete. Fie  $\tilde{x}[n]$ ,  $\tilde{y}[n]$  semnale complexe  $N$ -periodice, iar  $\tilde{X}[k] = SFD(\tilde{x}[n])$ ,  $\tilde{Y}[k] = SFD(\tilde{y}[n])$ , seriile Fourier discrete asociate acestora. Pentru comparație, revedeți în secțiunea 1.2 proprietățile similare ale transformatei Fourier.

*Liniaritate.* Pentru orice  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  avem

$$SFD(\alpha \tilde{x}[n] + \beta \tilde{y}[n]) = \alpha \cdot SFD(\tilde{x}[n]) + \beta \cdot SFD(\tilde{y}[n]). \quad (5.11)$$

*Întârziere.* Fie  $n_0$  un întreg oarecare și  $\tilde{y}[n] = \tilde{x}[n - n_0]$ . Observați în figura 5.1 că întârzierea cu  $n_0$  a unui semnal  $N$ -periodic este echivalentă cu deplasarea ciclică de  $n_0$  ori la dreapta a eșantioanelor cu suportul  $0 : N - 1$ . Atunci avem

$$\tilde{Y}[k] = w_N^{kn_0} \tilde{X}[k]. \quad (5.12)$$

*Complex conjugare.* Fie  $y[n] = x^*[n]$ . Atunci avem

$$\tilde{Y}[k] = \tilde{X}^*[-k] = \tilde{X}^*[N - k]. \quad (5.13)$$

*Simetrii ale SFD pentru semnale reale.* Dacă semnalul  $\tilde{x}[n]$  este real, atunci au loc următoarele proprietăți de simetrie:

$$\begin{aligned} \tilde{X}[k] &= \tilde{X}^*[-k] \\ \operatorname{Re} \tilde{X}[k] &= \operatorname{Re} \tilde{X}[-k] \\ \operatorname{Im} \tilde{X}[k] &= -\operatorname{Im} \tilde{X}[-k] \\ |\tilde{X}[k]| &= |\tilde{X}[-k]| \\ \arg \tilde{X}[k] &= -\arg \tilde{X}[-k] \end{aligned} \quad (5.14)$$

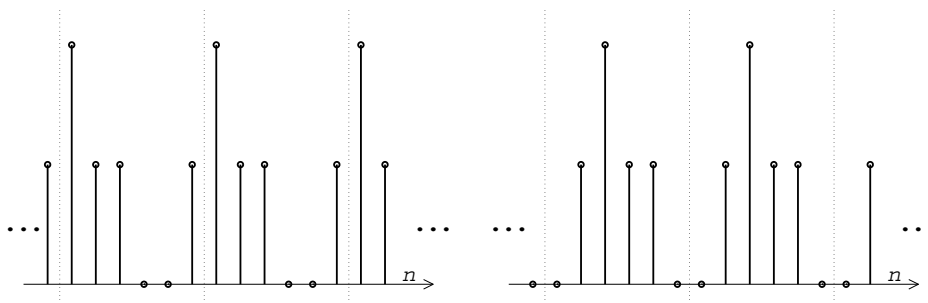


Figura 5.1: Stânga: semnal periodic cu perioadă  $N = 6$ . Dreapta: același semnal, după întârzierea cu  $n_0 = 2$ . (Liniile punctate verticale marchează perioade ale semnalelor.)

Cu alte cuvinte,  $|\tilde{X}[k]|$  și  $\text{Re}\tilde{X}[k]$  sunt funcții discrete (în variabila  $k$ ) pare, iar  $\text{Im}\tilde{X}[k]$  și  $\arg\tilde{X}[k]$  sunt funcții impare. În plus, toate aceste funcții sunt  $N$ -periodice.

*Timp invers.* Considerăm semnalul  $\tilde{y}[n] = \tilde{x}[-n]$ . Avem

$$\tilde{Y}[k] = \tilde{X}^*[-k]. \quad (5.15)$$

”Teorema” lui Parseval. În privința conservării energiei prin transformarea SFD, avem următorul rezultat similar cu (1.21):

$$\sum_{n=0}^{N-1} |\tilde{x}[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\tilde{X}[k]|^2. \quad (5.16)$$

*Convoluție periodică.* Pentru semnalele  $N$ -periodice se definește o operație specifică de convoluție, care ia în considerare doar câte o perioadă a semnalelor.

**Definiția 5.4** Convoluția periodică a semnalelor  $N$ -periodice  $\tilde{x}[n]$  și  $\tilde{y}[n]$  este semnalul

$$\tilde{x}[n] \circledast \tilde{y}[n] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\ell=0}^{N-1} \tilde{x}[\ell] \tilde{y}[n - \ell]. \quad (5.17)$$

Seria Fourier discretă asociată convoluției a două semnale este produsul (la nivel de element) al seriilor Fourier ale semnalelor, i.e.

$$\text{SFD}(\tilde{x}[n] \circledast \tilde{y}[n]) = \tilde{X}[k] \cdot \tilde{Y}[k]. \quad (5.18)$$

*Modulație în timp.* Avem un rezultat dual cu (5.18), anume

$$\text{SFD}(\tilde{x}[n] \tilde{y}[n]) = \frac{1}{N} \tilde{X}[k] \circledast \tilde{Y}[k]. \quad (5.19)$$

**Probleme rezolvate**

**PR 5.1.1** Demonstrați că, pentru  $m \in \mathbb{Z}$ , este adevărată egalitatea

$$\sum_{k=0}^{N-1} w_N^{km} = \begin{cases} N, & \text{dacă } m \bmod N = 0, \\ 0, & \text{altfel,} \end{cases} \quad (5.20)$$

unde  $w_N$  este constanta definită de (5.4).

*Soluție.* Vezi problema **PR3.3.1**, unde se demonstrează o relație asemănătoare. ■

**PR 5.1.2** Demonstrați că  $F_N^H F_N = N \cdot I$ , unde  $F_N$  este matricea (5.6).

*Soluție.* Calculăm elementul  $(i, \ell)$  al matricei  $F_N^H F_N$ , folosind (5.20):

$$(F_N^H F_N)_{i\ell} = \sum_{k=0}^{N-1} w_N^{-ki} w_N^{k\ell} = \sum_{k=0}^{N-1} w_N^{k(\ell-i)} = \begin{cases} N, & \text{dacă } i = \ell, \\ 0, & \text{dacă } i \neq \ell. \end{cases}$$

(Observăm că, deoarece  $i, \ell \in 0 : N - 1$ , singurul caz în care egalitatea  $(i - \ell) \bmod N = 0$  are loc este când  $i = \ell$ .) ■

**PR 5.1.3** Calculați coeficienții seriilor Fourier discrete asociate următoarelor semnale  $N$ -periodice

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1[n] &= e^{j\frac{2\pi m}{N}n}, \\ \tilde{x}_2[n] &= e^{-j\frac{2\pi m}{N}n}, \\ \tilde{x}_3[n] &= \sin\left(\frac{2\pi m}{N}n\right), \\ \tilde{x}_4[n] &= \cos\left(\frac{2\pi m}{N}n\right), \end{aligned}$$

unde  $m \in 0 : N - 1$ . (Se observă că, dacă  $m$  și  $N$  nu sunt numere prime între ele, perioada semnalelor este de fapt mai mică. Chiar și în acest caz, le considerăm tot  $N$ -periodice.)

*Soluție.* Identificând pur și simplu în (5.3), obținem, pentru  $k \in 0 : N - 1$ ,

$$\tilde{X}_1[k] = N\delta[k - m],$$

i.e. doar coeficientul  $X_1[m]$  este nenul și deci toată puterea semnalului este concentrată într-o singură frecvență. La fel, observând că

$$\tilde{x}_2[n] = e^{j\frac{2\pi(N-m)}{N}n},$$

obținem

$$\tilde{X}_2[k] = N\delta[k - (N - m)].$$

Pentru celelalte două semnale, observăm că

$$x_3[n] = \frac{x_1[n] - x_2[n]}{2j}, \quad x_4[n] = \frac{x_1[n] + x_2[n]}{2}.$$

Așadar, seria Fourier asociată unei sinusoide complexe de frecvență  $2\pi m/N$  are un singur coeficient nenul, cel cu indice  $m$  sau  $N - m$ ; dacă sinusoida este reală, atunci ambii coeficienți sunt nenuli. Deci, în general, puterea unui semnal  $N$ -periodic  $\tilde{x}[n]$  în frecvența  $2\pi m/N$  este dată de doi coeficienți ai SFD, anume  $\tilde{X}[m]$  și  $\tilde{X}[N - m]$ . ■

**PR 5.1.4** Demonstrați proprietățile (5.11–5.19) ale seriei Fourier discrete.

*Soluție. Liniaritatea* (5.11) este evidentă.

*Întârziere.* Aplicând definiția (5.9) obținem

$$\tilde{Y}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{y}[n] w_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n - n_0] w_N^{k(n-n_0)} w_N^{kn_0} = w_N^{kn_0} \tilde{X}[k].$$

Am ținut seama de faptul că atât  $\tilde{x}[n]$  cât și  $\tilde{v}[n] = w_N^{kn}$  sunt semnale  $N$ -periodice, și deci

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n - n_0] w_N^{k(n-n_0)} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] w_N^{kn}.$$

*Complex conjugare.* Pentru  $\tilde{y}[n] = \tilde{x}^*[n]$  obținem

$$\tilde{Y}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}^*[n] w_N^{kn} = \left( \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] w_N^{-kn} \right)^* = \tilde{X}^*[-k] = \tilde{X}^*[N - k].$$

Ultima egalitate rezultă din periodicitatea coeficienților SFD.

*Simetriile TF pentru semnale reale* rezultă din (5.13), ținând seama că  $\tilde{x}^*[n] = \tilde{x}[n]$ . Așadar avem  $\tilde{X}[k] = \tilde{X}^*[-k]$ , ceea ce implică toate relațiile (5.14).

*Timp invers.* Aplicând definiția (5.9) obținem

$$\tilde{Y}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[-n] w_N^{kn} = \left( \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}^*[N - n] w_N^{k(N-n)} \right)^* = SFD(\tilde{x}^*[n])^* = \tilde{X}^*[-k].$$

*"Teorema" lui Parseval.* Utilizând relația (5.8) și Prop. 5.2 obținem

$$\sum_{n=0}^{N-1} |\tilde{x}[n]|^2 = \tilde{x}^H \tilde{x} = \frac{1}{N} \tilde{X}^H \tilde{X} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\tilde{X}[k]|^2.$$

*Convoluție periodică.* Seria Fourier discretă asociată semnalului  $\tilde{x}[n] \otimes \tilde{y}[n]$  definit în (5.17) este

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} \tilde{x}[\ell] \tilde{y}[n - \ell] w_N^{kn} = \left( \sum_{\ell=0}^{N-1} \tilde{x}[\ell] w_N^{k\ell} \right) \left( \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{y}[n - \ell] w_N^{k(n-\ell)} \right) = \tilde{X}[k] \tilde{Y}[k].$$

ceea ce demonstrează (5.18). Expresia de mai sus pentru  $\tilde{Y}[k]$  este corectă deoarece atât  $\tilde{y}[n - \ell]$  cât și  $w_N^{k(n-\ell)}$  (cu  $n$  ca variabilă timp) sunt  $N$ -periodice.

*Modulație în timp.* Relația (5.19) se demonstrează pornind de la termenul din dreapta, în care se substituie definiția (5.9). ■

### Probleme propuse

**PP 5.1.1** Constanta  $w_N$  din (5.4) are numeroase proprietăți, unele extrem de utile în continuare.

- a. Demonstrați că dacă  $N$  și  $n$  sunt divizibile cu  $k$  atunci avem  $w_N^n = w_{N/k}^{n/k}$ .
- b. Demonstrați că dacă  $N$  este divizibil cu 2, atunci  $w_N^{N/2} = -1$ . Dacă  $N$  este divizibil cu 4, atunci avem și  $w_N^{N/4} = -j$ ,  $w_N^{3N/4} = j$ .
- c. Demonstrați că ecuația  $z^N - 1 = 0$  are soluțiile  $w_N^n$ ,  $n = 0 : N-1$ . Din egalitatea  $z^N - 1 = \prod_{n=0}^{N-1} (z - w_N^n)$ , folosind relațiile lui Viète, deduceți alte proprietăți ale numerelor  $w_N^n$ .

**PP 5.1.2 a.** Fie  $\tilde{x}[n]$  un semnal  $N$ -periodic. Seria Fourier discretă  $\tilde{X}[k] = SFD(\tilde{x}[n])$  a semnalului este  $N$ -periodică, așadar îi putem asocia ei însăși o serie Fourier discretă. Demonstrați că  $SFD(\tilde{X}[k]) = N\tilde{x}[-n]$  (atenție, în ultima relație am inter-schimb rolurile uzuale ale indicilor  $n$  și  $k$ ). Așadar, prin calculul succesiv a două SFD (5.9) obținem semnalul original, în timp invers, scalat cu factorul  $N$ .

b. Fie  $F_N$  matricea definită în (5.6). Demonstrați că

$$F_N^2 = N \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & J_{N-1} \end{bmatrix},$$

unde  $J_{N-1}$  este matricea "contraidentitate" (cu 1 pe diagonală secundară și 0 în rest), de dimensiune  $(N-1) \times (N-1)$ . Observați, utilizând (5.10), că egalitatea de mai sus constituie o altă demonstrație a cerinței de la punctul a.

**PP 5.1.3** (Proprietăți ale convoluției periodice)

- a. Demonstrați că operația de convoluție periodică este comutativă și asociativă.
- b. Fie  $\tilde{x}[n]$ ,  $\tilde{y}[n]$  două semnale periodice și  $\tilde{v}[n] = \tilde{x}[n] \otimes \tilde{y}[n]$  convoluția lor periodică. Demonstrați că pentru orice  $n_0 \in \mathbb{N}$  avem

$$\tilde{v}[n - n_0] = \tilde{x}[n - n_0] \otimes \tilde{y}[n] = \tilde{x}[n] \otimes \tilde{y}[n - n_0].$$

## 5.2 Transformata Fourier discretă

Fie  $x[n]$  un semnal cu suport  $0 : N-1$ . Dorim să analizăm spectrul acestui semnal. Transformata Fourier (TF) a semnalului este

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega n}. \quad (5.21)$$

Desigur, această expresie poate fi utilizată pentru evaluarea spectrului în orice punct  $\omega \in [0, 2\pi]$ . Totuși, un mod de calcul mai eficient, prin care se obține spectrul doar în  $N$  puncte echidistante, se bazează pe transformata Fourier discretă.

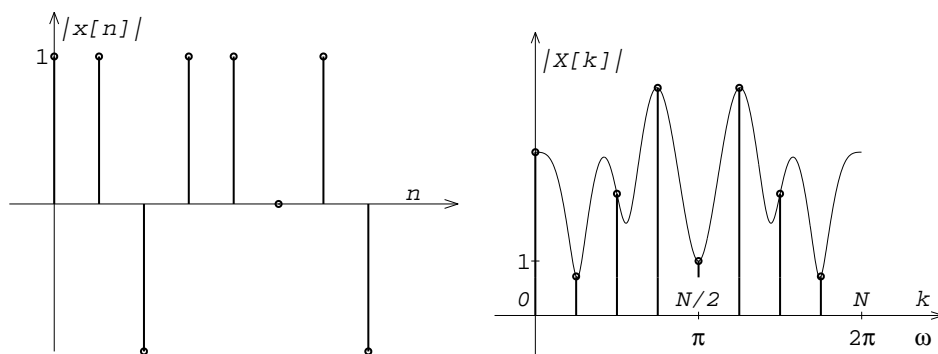


Figura 5.2: Stânga: un semnal cu suport  $0 : 7$ . Dreapta: spectrul semnalului (amplitudine) și eşantioanele obținute cu TFD.

**Definiția 5.5** Transformata Fourier discretă (TFD) a semnalului  $x[n]$  cu suport  $0 : N - 1$  este secvența

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] w_N^{kn}, \quad k = 0 : N - 1, \quad (5.22)$$

unde  $w_N$  este definit de (5.4). Vom nota în continuare  $X[k] = TFD_N(x[n])$  (ignorând eventual indicele  $N$  atunci când lungimea suportului rezultă din context).

**Observația 5.6** Comparând (5.21) și (5.22), observăm relația dintre TF și TFD. Se observă că punând  $\omega = 2\pi k/N$ ,  $k = 0 : N - 1$ , în TF (5.21), obținem exact TFD (5.22). Așadar, pentru semnale cu suport finit, TFD reprezintă o eşantionare a TF, în  $N$  frecvențe echidistante aflate în intervalul  $[0, 2\pi]$ . Pentru ilustrare, prezentăm în figura 5.2 un semnal cu suport  $0 : 7$  (deci  $N = 8$ ), transformata Fourier a acestuia (care este o funcție continuă cu suport  $[0, 2\pi]$ ) și transformata Fourier discretă a semnalului, care eşantionează TF în frecvențele  $0 : \pi/4 : 7\pi/4$ .

**Observația 5.7** De asemenea, se observă imediat, comparând (5.22) cu (5.9), că TFD se definește la fel ca seria Fourier discretă asociată semnalului  $N$ -periodic  $\tilde{x}[n]$ , care reprezintă prelungirea prin periodicitate (5.2) a semnalului  $x[n]$ . Facem convenția că TFD se definește doar pe eşantioanele  $0 : N - 1$ , în timp ce SFD se prelungește prin periodicitate pentru orice  $k \in \mathbb{Z}$ ; în acest fel, notațiile  $X[k]$  din (5.22) și  $\tilde{X}[k]$  din (5.9) sunt consistente.

Cele două observații de mai sus ne arată cum pot fi deduse ușor proprietățile TFD. În primul rând, toate proprietățile SFD din secțiunea precedentă se pot aplica transformatei Fourier discrete. Singura precauție care trebuie luată este de a evita ieșirea din suportul finit  $0 : N - 1$  în urma deplasărilor. Ca în figura 5.1, toate

deplasările sunt interpretate ciclic în intervalul  $0 : N - 1$ . Vom exemplifica în continuare prin analogul relației (5.12).

*Deplasarea ciclică a unui semnal.* Fie  $x[n]$  un semnal cu suport  $0 : N - 1$ . Semnalul deplasat circular ("întârziat") cu  $n_0$  eșantioane la dreapta este  $y[n] = x[(n - n_0) \bmod N]$ , iar TFD a sa este

$$Y[k] = w_N^{kn_0} X[k]. \quad (5.23)$$

Se observă că formal relația de mai sus este identică cu (5.12).

*Convoluția circulară.* Ideea deplasării ciclice se aplică și pentru a defini o operație de convoluție specifică semnalelor cu același suport finit.

**Definiția 5.8** Convoluția ciclică a semnalelor  $x[n]$  și  $y[n]$ , ambele cu suport finit  $0 : N - 1$ , este semnalul

$$x[n] \otimes_N y[n] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\ell=0}^{N-1} x[\ell] y[(n - \ell) \bmod N]. \quad (5.24)$$

Transformata Fourier discretă a convoluției ciclice a două semnale cu suport  $0 : N - 1$  este produsul (la nivel de element) al TFD ale celor două semnale, i.e.

$$TFD(x[n] \otimes_N y[n]) = X[k] \cdot Y[k]. \quad (5.25)$$

În al doilea rând, proprietățile TFD pot fi deduse din cele ale TF, având în vedere că TFD este o eșantionare a TF. De exemplu, relațiile de simetrie (5.3) ale SFD pentru semnale reale (identice ca formă pentru TFD, după înlăturarea tildei care marchează periodicitatea) pot fi deduse direct din proprietățile similare (1.17) ale TF.

În fine, să menționăm că transformata Fourier discretă inversă (TFDI) are o formă identică cu (5.3).

**Propoziția 5.9** Dacă  $x[n]$  este un semnal cu suport  $0 : N - 1$  și  $X[k] = TFD(x[n])$ , atunci are loc egalitatea

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j \frac{2\pi}{N} kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] w_N^{-kn} \quad (5.26)$$

care definește transformata Fourier discretă inversă.

## Probleme rezolvate

**PR 5.2.1** Fie  $x[n]$  un semnal cu suport  $0 : N - 1$ . Am văzut că  $X[k] = TFD_N(x[n])$  calculează o eșantionare în  $N$  puncte a spectrului semnalului  $x[n]$ .

**a.** Fie  $m$  un întreg pozitiv și  $x_0[n]$  semnalul obținut prin prelungirea cu zerouri a semnalului  $x[n]$  până la lungime  $mN$ , i.e.

$$x_0[n] = \begin{cases} x[n], & \text{dacă } 0 \leq n \leq N - 1, \\ 0, & \text{dacă } N \leq n \leq mN - 1. \end{cases}$$

(De fapt am prelungit artificial suportul lui  $x[n]$ .) Demonstrați că  $TFD_{mN}(x_0[n])$  este o eșantionare în  $mN$  puncte a spectrului semnalului  $x[n]$ .

**b.** Cum se poate obține o eșantionare a spectrului semnalului  $x[n]$  în  $N/m$  puncte, unde  $m$  este un divizor al lui  $N$  ?

*Soluție.* **a.** În mod evident avem

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega n} = X_0(\omega),$$

deci transformatele Fourier ale semnalelor  $x[n]$  (cu suport  $0 : N - 1$ ) și  $x_0[n]$  (cu suport  $0 : mN - 1$ ) coincid. Concluzia rezultă imediat. Observăm că putem pune în loc de  $mN$  orice întreg  $N' > N$ , nu neapărat un multiplu al lui  $N$ .

**b.** Se calculează pur și simplu mai puține eșantioane ale TFD (5.22), alegând valori convenabile  $k \in 0 : N - 1$ . ■

**PR 5.2.2** Fie  $x[n]$  un semnal cu suport  $0 : N - 1$ . Prin interpolare de ordinul 2, se construiește semnalul  $y[n]$ , cu suport  $0 : 2N - 1$ , definit prin

$$y[n] = x[n] \uparrow 2 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x[n], & \text{pentru } n \text{ par,} \\ 0, & \text{pentru } n \text{ impar,} \end{cases}$$

Fie  $X[k] = TFD_N(x[n])$  și  $Y[k] = TFD_{2N}(y[n])$  (atenție, cele două transformate au suporturi diferite). Care este legătura dintre  $X[k]$  și  $Y[k]$  ? Ilustrați grafic această legătură.

Generalizați pentru interpolarea de ordin  $M$ , când  $y[n]$  are suport  $0 : MN - 1$  și este definit ca în relația (3.27).

*Soluție.* Utilizând definiția (5.22), obținem

$$Y[k] = \sum_{n=0}^{2N-1} y[n]w_{2N}^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]w_{2N}^{2kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]w_N^{kn} = X[k].$$

În egalitatea de mai sus am prelungit prin periodicitate  $X[k]$ ; riguros, ar trebui să scriem  $Y[k] = X[k \bmod N]$ ,  $k = 0 : 2N - 1$ . Așadar transformata Fourier discretă a lui  $x[n] \uparrow 2$  se compune din două copii alăturate ale  $TFD_N(x[n])$ . Dacă  $X[k]$  are forma din stânga figurii 5.3, atunci  $Y[k]$  are forma din dreapta aceleiași figuri. Observați similaritatea cu figura 3.18, care este naturală având în vedere că TFD reprezintă o eșantionare a spectrului semnalului.

În general, în cazul interpolării de ordin  $M$ , transformata  $Y[k]$  se compune din  $M$  copii alăturate ale lui  $X[k]$ . ■

## Probleme propuse

**PP 5.2.1** Calculați transformatele Fourier discrete ale semnalelor  $x_0[n] = 1$  și  $x_1[n] = (-1)^n$ , ambele cu suport  $0 : N - 1$ . Pentru al doilea semnal, observați că rezultatul depinde de paritatea lui  $N$ .



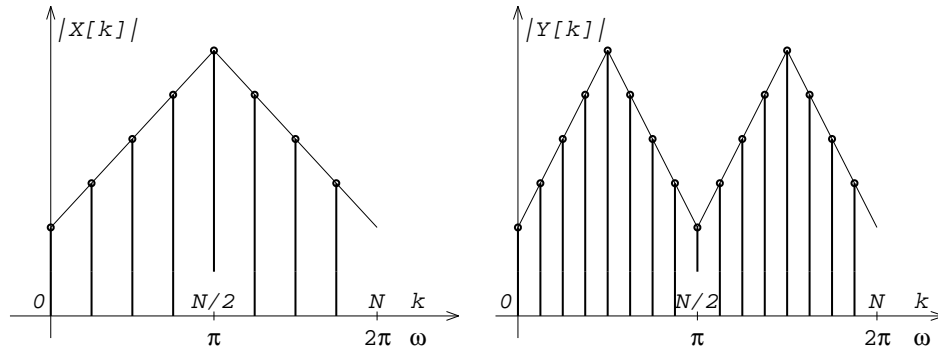


Figura 5.3: Stânga: TFD a unui semnal  $x[n]$  real. Dreapta: TFD a semnalului  $x[n] \uparrow 2$ . (Cu linie continuă sunt desenate TF ale celor două semnale.)

**PP 5.2.2** Fie  $x[n], y[n]$  două semnale reale, cu suport  $0 : N - 1$ . Semnalul  $x_n$  este simetric, în sensul că  $x[n] = x[(N - n) \bmod N]$ , iar  $y[n]$  este antisimetric, în sensul că  $y[n] = -y[(N - n) \bmod N]$ .

**a.** Fie  $X[k], Y[k]$  transformatele Fourier discrete ale celor două semnale. Demonstrați că  $X[k]$  este reală, iar  $Y[k]$  pur imaginară.

**b.** Observați că orice semnal real  $v[n]$  se poate scrie în forma  $v[n] = x[n] + y[n]$ , cu  $x[n]$  simetric și  $y[n]$  antisimetric. Dându-se  $V[k] = TFD_N(v[n])$ , cum pot fi calculate  $x[n], y[n]$  ?

**PP 5.2.3** Fie  $x[n]$  un semnal cu suport  $0 : N - 1$ , iar  $y[n]$  un semnal cu suport  $0 : 2N - 1$ , astfel încât  $y[n] = x[n \bmod N]$  (adică semnalul  $y[n]$  se compune din două copii alăturate ale lui  $x[n]$ ).

Fie  $X[k] = TFD_N(x[n])$  și  $Y[k] = TFD_{2N}(y[n])$ . Care este legătura dintre  $X[k]$  și  $Y[k]$  ? Ilustrați grafic această legătură.

## Ghid Matlab

Transformata Fourier discretă a unui semnal  $\mathbf{x}$  (memorat într-un vector) se calculează cu

```
>> X = fft(x)
```

Dacă suportul mesajului are lungime putere a lui 2, atunci algoritmul folosit este FFT (transformata Fourier rapidă), care va fi discutat în secțiunea următoare; altfel, se folosește un algoritm mai lent. Apelul

```
>> X = fft(x, N)
```

calculează TFD a semnalului  $\mathbf{x}$  prelungit cu zerouri până la lungime  $N$ . Așa cum am văzut în problema **PR5.2.1**, o astfel de TFD calculează o eșantionare mai deasă a spectrului semnalului.

Transformata Fourier discretă inversă se calculează cu

```
>> x = ifft(X)
```

Evident, `ifft(fft(x))` produce semnalul original (cu inevitabilele erori numerice).

Deoarece funcția `fft` calculează DFT conform definiției (5.22), vectorul `X` obținut reprezintă o eșantionare a spectrului definit pe  $[0, 2\pi)$ . Funcția `fftshift` realizează deplasarea vectorului `X` astfel încât spectrul eșantionat să corespundă intervalului  $[\pi, \pi)$ . Apelul

```
>> Y = fftshift(X)
```

mută în primele  $N/2$  poziții din `Y` a doua jumătate a vectorului `X`.

## 5.3 Transformata Fourier rapidă

Transformata Fourier rapidă (FFT – Fast Fourier Transform) este numele generic pentru o clasă de algoritmi rapizi de calcul al transformatei Fourier discrete (TFD), pentru semnale cu suport finit. Primul algoritm de acest tip a fost propus de Cooley și Tukey în 1965. Numele FFT provine din complexitatea de  $O(N \log_2 N)$  operații aritmetice necesare calculului TFD al unui semnal cu  $N$  eșantioane. Spre deosebire, algoritmul banal care implementează (5.22) ca atare (printr-o înmulțire matrice-vector) necesită  $O(N^2)$  operații. Reducerea complexității este semnificativă pentru valori practice ale mărimii suportului: pentru  $N = 1024$ , avem  $N^2 \approx 10^6$  și  $N \log_2 N \approx 10^4$ ; deja pentru  $N = 100$  complexitatea scade de  $N/\log_2 N > 10$  ori.

Notăm  $\text{TFD}_N(\cdot)$  transformata Fourier discretă a unui semnal (neprecizat) cu suport de lungime  $N$ . Vom prezenta mai jos doi algoritmi de tip FFT, bazați pe ideea de decimare, adică de reducere a calculului  $\text{TFD}_N(\cdot)$  la calculul unor TFD de lungime mai mică. Pentru simplitatea prezentării, vom considera doar cazul practic în care  $N$  este o putere a lui 2. În acest caz, decimarea este de fapt înjumătățire, iar calculul  $\text{TFD}_N(\cdot)$  se reduce la calculul a două transformări  $\text{TFD}_{N/2}(\cdot)$ . Ideea esențială este de a aplica recursiv procedeul de decimare, pentru calculul fiecărei TFD de lungime mai mică. Așadar, algoritmii FFT sunt de tip *divide et impera*. Vom detalia metodele de decimare și aplicarea lor recursivă în cele ce urmează.

### 5.3.1 Decimare în timp

Spargerea calculului  $\text{TFD}_N(x[n])$ , unde  $x[n]$  este un semnal cu suport  $0 : N - 1$ , iar  $N$  este putere a lui doi, se face profitând de următoarea separare, în esență extrem de simplă, a relației de definiție (5.22):

$$\begin{aligned}
 X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] w_N^{kn} \\
 &= \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ par}}}^{N-1} x[n] w_N^{kn} + \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ impar}}}^{N-1} x[n] w_N^{kn} \\
 &= \sum_{m=0}^{N/2-1} x[2m] w_N^{2km} + \sum_{m=0}^{N/2-1} x[2m+1] w_N^{k(2m+1)} \\
 &= \sum_{m=0}^{N/2-1} x[2m] w_{N/2}^{km} + w_N^k \sum_{m=0}^{N/2-1} x[2m+1] w_{N/2}^{km}. \tag{5.27}
 \end{aligned}$$

Așadar, în prima linie a șirului de egalități de mai sus avem definiția (5.22) a TFD. În a doua linie, separăm suma din prima linie în două sume, una corespunzând indicilor pari, cealaltă celor impari. În a treia linie exprimăm formal separarea prin substituțiile  $n = 2m$ ,  $m = 0 : N/2 - 1$ , în prima sumă, și  $n = 2m + 1$ ,  $m = 0 : N/2 - 1$ , în a doua. Trecerea la ultima linie se bazează pe relația evidentă

$$w_N^{2km} = e^{-j\frac{2\pi}{N}2km} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}km} = w_{N/2}^{km}.$$

Din (5.27) rezultă că  $\text{TFD}_N(x[n])$  se calculează ca sumă a două TFD a unor semnale cu suport  $0 : N/2 - 1$ , formate din eşantioanele pare, respectiv impare, ale semnalului  $x[n]$ . Notând  $x_p[m] = x[2m]$  și  $x_i[m] = x[2m + 1]$  aceste semnale și

$$U[k] = \text{TFD}_{N/2}(x_p[m]), \quad V[k] = \text{TFD}_{N/2}(x_i[m])$$

transformatele Fourier discrete ale lor (de lungime  $N/2$ ), putem scrie

$$X[k] = U[k] + w_N^k V[k], \quad k = 0 : N - 1. \quad (5.28)$$

Atenție, în această relație avem  $k = 0 : N - 1$ , deci apar două perioade ale transformatei Fourier discrete  $U[k]$ ,  $V[k]$ . Schema de calcul corespunzătoare relației (5.28) este ilustrată în figura 5.4; convenim ca unirea a două săgeți să reprezinte o operație de sumare; o constantă, e.g.  $w_N^k$ , asociată unei săgeți înseamnă înmulțirea semnalului reprezentat de săgeată cu constanta respectivă. Numărul de operații necesar pentru implementarea relației (5.28), presupunând  $U[k]$  și  $V[k]$  cunoscute, este de  $2N$ , anume  $N$  adunări complexe și  $N$  înmulțiri complexe.

Cheia reducerii numărului de operații în algoritmul FFT este utilizarea recursivă a modului de calcul din relația (5.27) și figura 5.4, pentru calculul fiecărei TFD de lungime mai mică. Putem ilustra ideea prin următoarea funcție recursivă, care calculează  $\text{TFD}_N(x[n])$ .

**funcție**  $X = \text{FFT}(x, N)$

1. **dacă**  $N = 1$  **atunci**

1.  $X = x$

2. **altfel**

1. Pune  $x_p[m] = x[2m]$ ,  $x_i[m] = x[2m + 1]$ , pentru  $m = 0 : N/2 - 1$

2. Calculează  $U = \text{FFT}(x_p, N/2)$ ,  $V = \text{FFT}(x_i, N/2)$  (apel recursiv)

3.  $X[k] = U[k] + w_N^k V[k]$ , pentru  $k = 0 : N/2 - 1$

4.  $X[k] = U[k - N/2] + w_N^k V[k - N/2]$ , pentru  $k = N/2 : N - 1$

Așadar, se folosesc apeluri recursive până când se ajunge la TFD de lungime 1, când transformata este identică cu semnalul inițial. Notând  $T(N)$  numărul de operații necesar calculului  $\text{TFD}_N(\cdot)$ , din algoritmul de mai sus observăm că este îndeplinită relația recursivă

$$T(N) = 2T(N/2) + 2N, \quad T(1) = 0. \quad (5.29)$$

Rezolvarea ei furnizează  $T(N) = 2N \log_2 N$ ; vom vedea imediat un mod mai intuitiv de obținere a aceluiași rezultat.

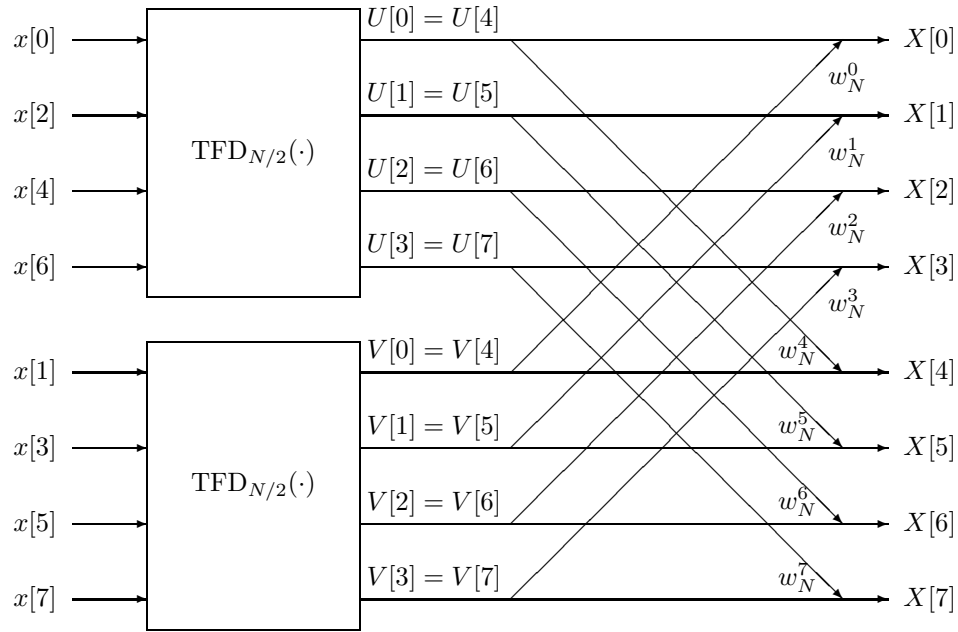


Figura 5.4: Calculul unei TFD de lungime  $N = 8$  utilizând două TFD de lungime  $N/2 = 4$  (decimare în timp).

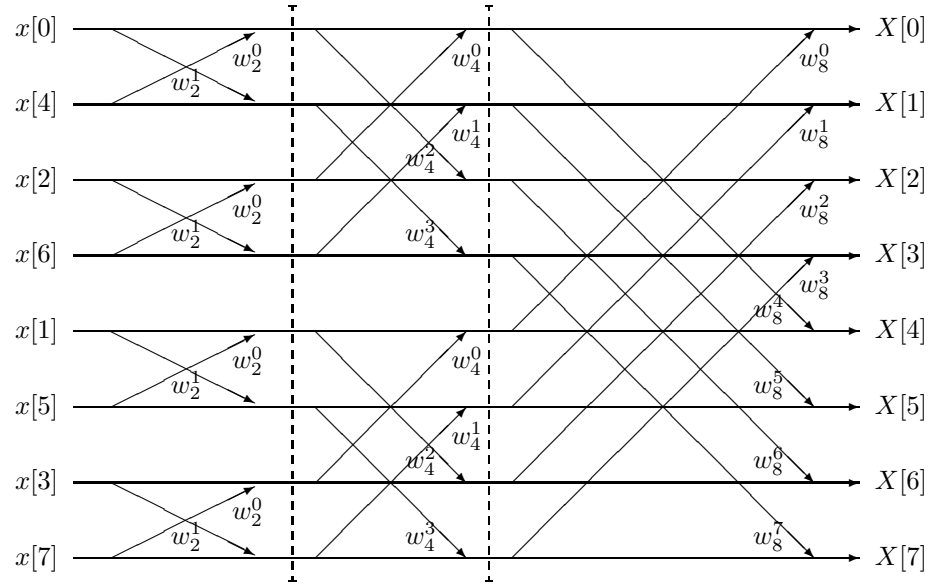
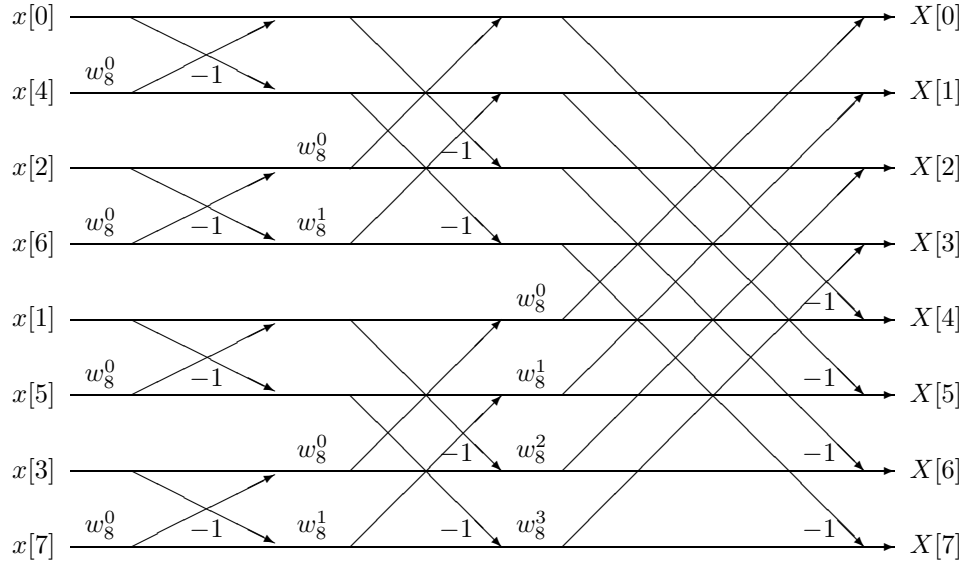


Figura 5.5: Schemă completă de calcul al TFD de lungime  $N = 8$  (decimare în timp).

În implementările practice ale algoritmului FFT nu se folosesc apelurile recursive, ci variante iterative echivalente, care conduc la programe mai eficiente. Pentru a ilustra varianta iterativă, am detaliat schema operațiilor pentru calculul  $\text{TFD}_8(\cdot)$  în figura 5.5. Schema, numită diagramă *fluture*, datorită formei sale, este obținută din cea din figura 5.4 prin detalierea operațiilor necesare tuturor TFD de lungime mai mică. Liniile punctate verticale separă etapele de calcul (iterațiile sau nivelele de recursie, după cum interpretăm algoritmul); în fiecare etapă se combină TFD de lungime mai mică, pentru a obține un număr de două ori mai mic de TFD de lungime dublă. Observăm cu ușurință că sunt  $\log_2 N$  etape și că în fiecare dintre ele se efectuează  $2N$  operații, ceea ce conduce la totalul deja calculat de  $2N \log_2 N$ .

O întrebare imediată este în ce ordine se află eșantioanele semnalului de intrare. (Ieșirea este ordonată natural.) Parcurgând diagrama din figura 5.5 de la dreapta la stânga, și având în vedere separarea în părțile pară și impară a semnalului de intrare (ca în figura 5.4), observăm următoarele. Înaintea ultimei etape, elementele  $x[n]$ , cu  $n$  par, se află în jumătatea de sus a diagramei (adică sunt primele), iar cele cu  $n$  impar se află în jumătatea de jos. Așadar, privind la reprezentarea binară a lui  $n$ , elementele cu ultimul bit al indicelui egal cu zero sunt în prima jumătate. Să privim acum doar la secvența elementelor cu  $n$  par. Înaintea penultimei etape, ele sunt separate în două; cele cu indice par în această secvență, adică cele pentru care  $n$  se divide cu 4, sau pentru care penultimul bit al lui  $n$  este zero, se află în sfertul de sus al diagramei; celelalte, pentru care penultimul bit este 1, sunt în

Figura 5.6: Schemă îmbunătățită de calcul al TFD de lungime  $N = 8$ .

al doilea sfert. Continuând raționamentul, observăm că semnalul de intrare este ordonat după numerele obținute prin inversarea biților indicilor. De exemplu, cu referință la figura 5.5, elementul cu indicele  $1 = 001_2$  este în poziția  $4 = 100_2$ ; ordinea completă este (toate numerele sunt în baza 2): 000, 100, 010, 110, 001, 101, 011, 111. Spunem că un semnal astfel ordonat se află în *ordine bit-inversă a indicilor*.

Înainte de a scrie algoritmul iterativ anunțat mai devreme, vom face mici modificări în diagrama din figura 5.5. Rezultatul este diagrama de calcul din figura 5.6, obținută prin simple manipulări ale puterilor numerelor de tip (5.4). Observăm întâi că, cu referire la (5.28), avem  $w_N^k = -w_N^{k-N/2}$ . Apoi, pentru  $K$  putere a lui 2, putem scrie  $w_K^m = w_N^{mN/K}$ . În concluzie, constatăm că se pot utiliza doar constantele  $w_N^k$ ,  $k = 0 : N/2 - 1$ . În fine, calculele se pot desfășura pe loc în vectorul care conține semnalul inițial  $x[n]$ . Algoritmul corespunzător diagramei din figura 5.6 este următorul:

**funcție**  $x = \text{FFT\_decimare\_timp}(x, N)$

1. Ordonează  $x$  în ordine bit-inversă a indicilor
2. **pentru**  $i = 1 : \log_2 N$ 
  1.  $K = 2^i$
  2. **pentru**  $k = 0 : K : N - 1$ 
    1. **pentru**  $m = 0 : K/2 - 1$ 
      1.  $y = x[k + m]$
      2.  $z = w_N^{mN/K} x[k + K/2 + m]$
      3.  $x[k + m] = y + z$
      4.  $x[k + K/2 + m] = y - z$

Acest algoritm are avantajul că necesită, după cum se vede și din figura 5.6, doar  $3N/2 \log_2 N$  operații complexe, din care doar  $N/2$  înmulțiri; câștigul față de diagrama din figura 5.5 este datorat apariției constantelor  $-1$ ; ele nu mai necesită înmulțiri, ci doar transformă unele adunări în scăderi. Datorită calculului pe loc, memoria necesară este de doar  $N$  locații (plus alte câteva pentru variabilele auxiliare). O implementare Matlab a acestui algoritm este prezentată în problema **PR5.3.1**.

### 5.3.2 Decimare în frecvență

Calculul FFT prin decimare în frecvență se bazează pe o idee duală celei folosite în (5.27) pentru decimarea în timp. Mai precis, dacă acolo se separa semnalul  $x[n]$  într-o parte pară și una impară, acum separarea se face în transformata Fourier discretă  $X[k]$ . Considerăm întâi indicii pari,  $k = 2\ell$ ,  $\ell = 0 : N/2 - 1$  și, folosind definiția (5.22), putem scrie

$$\begin{aligned} X[2\ell] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] w_N^{2\ell n} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n] w_{N/2}^{\ell n} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n + N/2] w_{N/2}^{\ell(n+N/2)} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} (x[n] + x[n + N/2]) w_{N/2}^{\ell n}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

În linia a doua am separat primii  $N/2$  termeni din sumă de ultimii  $N/2$  (făcând substituția  $n \rightarrow n + N/2$ ), iar în linia a treia am dat factori comuni și am profitat de egalitatea evidentă  $w_{N/2}^{\ell N/2} = 1$ . Am obținut în final egalitatea

$$X[2\ell] = \text{TFD}_{N/2}(x[n] + x[n + N/2]), \quad \ell = 0 : N/2 - 1, \quad (5.31)$$

adică am exprimat jumătatea pară a transformatei  $X[k]$  printr-o TFD de lungime  $N/2$  a semnalului  $u[n] = x[n] + x[n + N/2]$  obținut din semnalul inițial  $x[n]$ .

Pentru indicii impari,  $k = 2\ell + 1$ ,  $\ell = 0 : N/2 - 1$ , scriem în mod analog

$$\begin{aligned} X[2\ell + 1] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] w_N^{(2\ell+1)n} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n] w_N^{(2\ell+1)n} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n + N/2] w_N^{(2\ell+1)(n+N/2)} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n] w_N^n w_{N/2}^{\ell n} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n + N/2] w_N^n w_{N/2}^{\ell n} w_N^{\ell N} w_N^{N/2} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} w_N^n (x[n] - x[n + N/2]) w_{N/2}^{\ell n}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

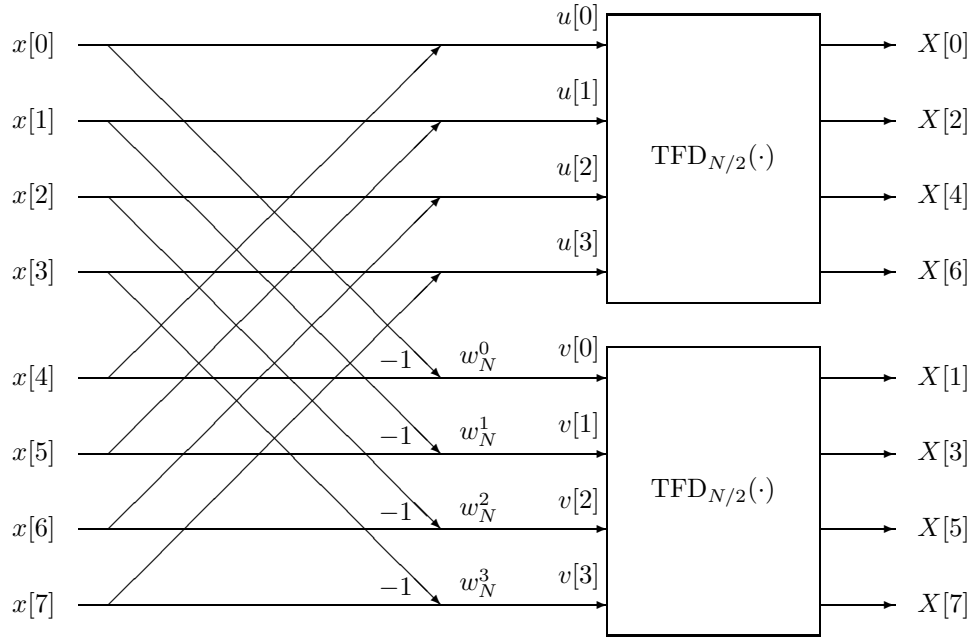


Figura 5.7: Calculul unei TFD de lungime  $N = 8$  utilizând două TFD de lungime  $N/2 = 4$  (decimare în frecvență).

Am profitat mai sus de egalitățile  $w_N^{\ell N} = 1$  și  $w_N^{N/2} = -1$ . Ultima relație (5.32) este echivalentă cu

$$X[2\ell + 1] = \text{TFD}_{N/2}(w_N^{\ell}(x[n] - x[n + N/2])), \quad \ell = 0 : N/2 - 1, \quad (5.33)$$

și are o semnificație similară cu (5.31), semnalul de lungime  $N/2$  a cărui TFD se calculează fiind acum  $v[n] = w_N^{\ell}(x[n] - x[n + N/2])$ . În concluzie, prin (5.31) și (5.33) am reușit exprimarea transformatei Fourier discrete  $X[k]$  de lungime  $N$  cu ajutorul a două transformate de lungime  $N/2$ , iar calculele decurg precum în diagrama din figura 5.7.

Ca și la decimarea în timp, ideea esențială este de a utiliza recursiv modulul de calcul din relațiile (5.31) și (5.33) și figura 5.7 pentru calculul fiecărei TFD de lungime mai mică. Se obține următoarea funcție recursivă care calculează  $\text{TFD}_N(x[n])$ .

**funcție**  $X = \text{FFT}(x, N)$

1. **dacă**  $N = 1$  **atunci**

1.  $X = x$

2. **altfel**

1.  $u[n] = x[n] + x[n + N/2]$ , pentru  $n = 0 : N/2 - 1$

2.  $v[n] = w_N^{\ell}(x[n] - x[n + N/2])$ , pentru  $n = 0 : N/2 - 1$

3. Calculează  $X_p = \text{FFT}(u, N/2)$ ,  $X_i = \text{FFT}(v, N/2)$  (apel recursiv)



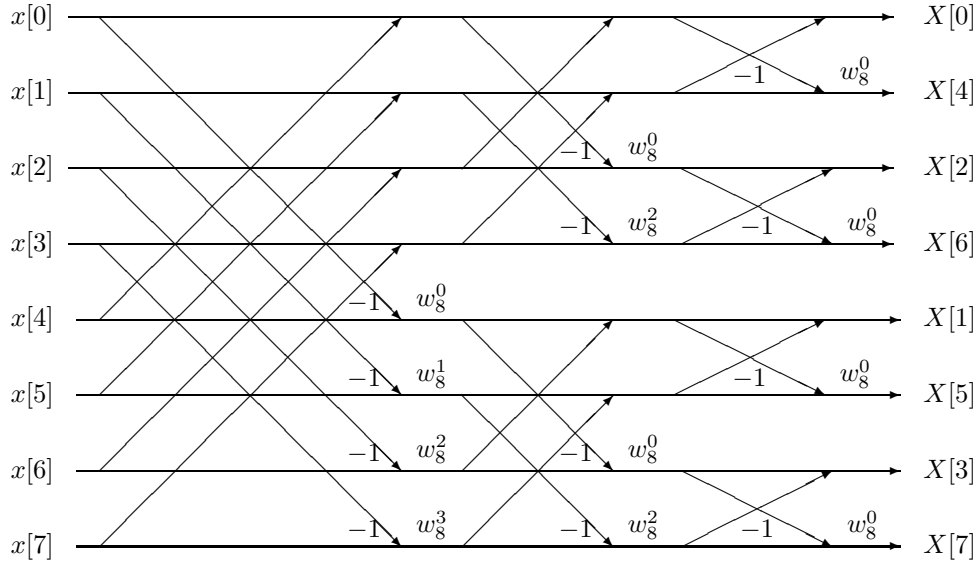


Figura 5.8: Schemă completă de calcul al TFD de lungime  $N = 8$  (decimare în frecvență).

$$4. X[2\ell] = X_p[\ell], X[2\ell + 1] = X_i[\ell], \text{ pentru } \ell = 0 : N/2 - 1$$

Forma iterativă a algoritmului este prezentată în diagrama din figura 5.8. Se observă că numărul de operații este de  $3N/2 \log_2 N$ , ca și pentru algoritmul FFT cu decimare în timp din figura 5.6. Ieșirea diagramei, adică eşantioanele transformatei  $X[k]$  sunt în ordinea bit-inversă a indicilor. Din nou, forma de "fluture" este evidentă. Deoarece detaliile tehnice sunt asemănătoare cu cazul decimării în timp, prezentăm direct forma detaliată a algoritmului iterativ de calcul al FFT prin decimare în frecvență; din nou calculele se fac pe loc. O implementare Matlab a algoritmului este propusă în problema **PR5.3.2**.

**funcție**  $x = \text{FFT\_decimare\_frecvență}(x, N)$

1. **pentru**  $i = 1 : \log_2 N$ 
  1.  $K = N/2^{i-1}$
  2. **pentru**  $k = 0 : K : N - 1$ 
    1. **pentru**  $m = 0 : K/2 - 1$ 
      1.  $u = x[k + m] + x[k + K/2 + m]$
      2.  $v = w_N^{mN/K} (x[k + m] - x[k + K/2 + m])$
      3.  $x[k + m] = u$
      4.  $x[k + K/2 + m] = v$
2. Ordonează  $x$  în ordine bit-inversă a indicilor

```

function x = fft_decimare_timp(x)
% Calculeaza pe loc TFD(x).
% Se presupune ca lungimea semnalului este putere a lui 2.
% Algoritm: decimare in timp

N = length(x);
L = log2(N);

x = sort_bitinv(x); % ordine bit-inversa a indicilor

N2 = N/2;
wN = exp( -j*2*pi/N*(0:N2-1) );
K = 1;
NK = N2;
for i = 1 : L
    K2 = K;
    K = 2*K;
    m = 0:K2-1;
    for k = 1 : K : N
        y = x( k+m );
        z = wN(1:NK:N2) .* x( k+K2+m );
        x( k+m ) = y + z;
        x( k+K2+m ) = y - z;
    end
    NK = NK/2;
end

```

Figura 5.9: Funcție Matlab pentru calculul TFD al unui semnal cu suport de lungime putere a lui doi, utilizând algoritmul iterativ cu decimare în timp.

## Probleme rezolvate

**PR 5.3.1** Scrieți o funcție Matlab care să implementeze algoritmul FFT cu decimare în timp, varianta iterativă. Argumentul de intrare este un semnal cu suport  $0 : N - 1$ , unde  $N$  este o putere a lui 2. Funcția întoarce transformata Fourier discretă a semnalului. Presupuneți că dispuneți de o funcție de ordonare a unui semnal în ordinea bit-inversă a indicilor. (Problema **PP5.3.2** vă propune scrierea acestui program.)

*Soluție.* Funcția de calcul al TFD este prezentată în figura 5.9 și urmează îndeaproape algoritmul de la sfârșitul secțiunii 5.3.1. Pe parcursul iterațiilor, variabilele  $K2$  și  $NK$  au valorile  $K/2$ , respectiv  $N/K$ . Am eliminat bucla cu contorul  $m$ , profitând de posibilitatea operațiilor cu vectori din Matlab. Programul poate fi optimizat în continuare (din punctul de vedere al limbajului Matlab), sarcină care rămâne cititorului interesat. ■

```

function x = fft_decimare_frecv(x)
% Calculeaza pe loc TFD(x).
% Se presupune ca lungimea semnalului este putere a lui 2.
% Algoritm: decimare in frecventa

N = length(x);
L = log2(N);
N2 = N/2;
wN = exp( -j*2*pi/N*(0:N2-1) );
K = N;
K2 = K/2;
NK = 1;
for i = 1 : L
    m = 0:K2-1;
    for k = 1 : K : N
        u = x(k+m) + x(k+K2+m);
        v = wN(1:NK:N2) .* (x(k+m) - x(k+K2+m));
        x( k+m ) = u;
        x( k+K2+m ) = v;
    end
    K = K2;
    K2 = K/2;
    NK = NK*2;
end

x = sort_bitinv(x); % ordine bit-inversa a indicilor

```

Figura 5.10: Funcție Matlab pentru calculul TFD al unui semnal cu suport de lungime putere a lui doi, utilizând algoritmul iterativ cu decimare în frecvență.

**PR 5.3.2** Scrieți o funcție Matlab care să implementeze algoritmul FFT cu decimare în frecvență, varianta iterativă. Condițiile de implementare sunt cele descrise la problema anterioară.

*Soluție.* Funcția de calcul al TFD este prezentată în figura 5.10. Rămân valabile semnificațiile variabilelor și comentariile de la programul din problema anterioară.

**PR 5.3.3** Formulele (5.31) și (5.33), utilizate pentru algoritmul FFT cu decimare în frecvență, au și semnificația că jumătate din transformata  $X[k] = TFD_N(x[n])$  poate fi calculată apelând la o TFD de lungime  $N/2$ . Arătați cum se poate calcula  $X[4\ell + 1]$ ,  $\ell = 0 : N/4 - 1$ , folosind o TFD de lungime  $N/4$ .

*Soluție.* Separăm suma (5.22) de definiție a TFD în patru părți:

$$X[4\ell + 1] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] w_N^{(4\ell+1)n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] w_N^n w_{N/4}^{\ell n}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{N/4-1} x[n] w_N^n w_{N/4}^{\ell n} + \sum_{n=0}^{N/4-1} x[n + N/4] w_N^{n+N/4} w_{N/4}^{\ell n} \\
&\quad + \sum_{n=0}^{N/4-1} x[n + N/2] w_N^{n+N/2} w_{N/4}^{\ell n} + \sum_{n=0}^{N/4-1} x[n + 3N/4] w_N^{n+3N/4} w_{N/4}^{\ell n} \\
&= TFD_{N/4} \{w_N^n (x[n] + jx[n + N/4] - x[n + N/2] - jx[n + 3N/4])\}.
\end{aligned}$$

Un rezultat identic se obține (cu mai multe calcule), aplicând succesiv formulele (5.33) și (5.31), prima pentru a separa  $X[2\ell + 1]$  din transformata  $X[k]$ , iar a doua pentru a separa  $X[4\ell + 1]$  din  $X[2\ell + 1]$ . ■

### Probleme propuse

**PP 5.3.1 a.** Redesenați diagrama din figura 5.5 permutând liniile orizontale astfel încât intrarea să fie ordonată natural, iar ieșirea în ordinea bit-inversă a indicilor. (Observați că forma de fluture se menține.)

**b.** Redesenați diagrama din figura 5.5 astfel încât atât intrarea cât și ieșirea să fie ordonate natural. (Observați dispariția formei de fluture.)

**PP 5.3.2 a.** Scrieți o funcție Matlab care primește la intrare un întreg  $n$  și numărul de biți  $L$  pe care este reprezentat  $n$  (condiția  $0 \leq n < 2^L$  este respectată) și întoarce numărul obținut prin inversarea ordinii biților din reprezentarea binară a lui  $n$ .

**b.** Scrieți o funcție Matlab care primește un vector format din  $N$  numere și întoarce vectorul ordonat în ordine bit-inversă a indicilor (se presupune că indicii încep de la zero și că  $N$  este o putere a lui 2). Observați că operația se poate face pe loc în vector, prin interschimbări de elemente; dacă  $n$  este un indice și  $\tilde{n} = \text{bitinv}(n)$  indicele obținut prin inversarea biților în reprezentarea binară a lui  $n$  (i.e.  $\text{bitinv}$  este funcția cerută la punctul **a**), atunci avem  $n = \text{bitinv}(\tilde{n})$ .

**PP 5.3.3 a.** Descrieți un algoritm pentru calculul FFT al unui semnal cu suport de lungime  $N$  putere a lui 3. Folosiți pentru aceasta ideea de decimare în timp și o formulă asemănătoare cu (5.27), dar în care suma din definiția (5.22) este separată în trei sume, fiecare corespunzând indicilor care dau același rest la împărțirea cu 3. Desenați o diagramă de calcul pentru cazul  $N = 9$ .

**b.** Folosiți decimarea în frecvență pentru a rezolva problema de la punctul precedent.

**c.** Generalizați ideile de mai sus pentru orice lungime  $N$  care nu este număr prim. Desenați diagrame de calcul pentru  $N = 6$  și  $N = 12$ .

**PP 5.3.4** Cum se poate calcula transformata Fourier discretă inversă? Propuneți două metode:

**a.** Modificând algoritmul FFT.

**b.** Utilizând algoritmul FFT ca atare și profitând de proprietățile TFD. Indicație: dacă  $X[k] = TFD(x[n])$ , demonstrați că  $Nx^*[n] = TFD(X^*[k])$ .

**PP 5.3.5** Fie  $H(z) = \sum_{n=0}^M h[n]z^{-n}$  un filtru FIR dat.

**a.** Cum se poate calcula caracteristica sa de frecvență (pe o grilă de frecvențe echidistante) utilizând FFT?

**b.** Când este mai avantajos să se procedeze astfel în loc să se folosească formula directă  $H(\omega) = \sum_{n=0}^M h[n]e^{-j\omega n}$  ?



## Capitolul 6

# Cuantizare

### 6.1 Cuantizare scalară

**Definiția 6.1** Fie  $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \dots, c_N\}$  o mulțime de  $N$  valori reale, numite coduri. Cuantizorul  $q$  asociază un cod fiecărei valori  $x \in \mathbb{R}$ , i.e.  $q(x) = c_k$ , subînțelegând prin aceasta că numărul real  $x$  este "aproximat" prin codul  $c_k$  din mulțimea  $\mathcal{C}$ . Așadar, un cuantizor este o funcție  $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}$ .

Mulțimea  $\mathcal{C}$  este numită *dicționar* (sau listă de coduri—engl. codebook). Presupunem, fără pierdere de generalitate, că dicționarul este ordonat, adică  $c_1 < c_2 < \dots < c_N$ , ca în figura 6.1.

**Definiția 6.2** Fie  $q$  un cuantizor și  $\mathcal{C}$  dicționarul asociat. Mulțimea

$$\mathcal{A}_k = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) = c_k\} \quad (6.1)$$

se numește celula Voronoi asociată codului  $c_k$ .

Celula Voronoi conține toate valorile reale care se cuantifică cu același cod. Axa reală este partiționată în  $N$  celule Voronoi, câte una pentru fiecare cod din dicționar. Aspectul tipic al celulelor Voronoi este cel din figura 6.1, în care  $\mathcal{A}_k = (d_{k-1}, d_k]$ , adică fiecare celulă este un interval. În figură, avem  $d_0 = -\infty$  și  $d_N = \infty$ , dacă aceste valori nu sunt finite prin natura semnalului care se cuantizează. Prin cuantizare, toate valorile  $x$  pentru care  $d_{k-1} < x \leq d_k$  se "reprezintă" prin  $c_k$ .

Valorile  $d_k$  se numesc *puncte de decizie* (de frontieră). Graficul cuantizorului are aspectul "în trepte" din figura 6.2. Așadar, atunci când celulele Voronoi sunt mulțimi conexe, un cuantizor este complet determinat de dicționarul  $c_k$  și de punctele de decizie  $d_k$ .

Un cuantizor este *simetric* dacă  $q(-x) = -q(x)$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

*Domeniul* unui cuantizor este intervalul  $[d_0, d_N]$  (sau lungimea acestuia). Dacă una dintre valori este infinită, atunci domeniul este  $[d_1, d_{N-1}]$ .

Cuantizorul poate fi privit ca fiind obținut din compunerea a două funcții: codor și decodor. Notăm  $\mathcal{N} = 1 : N$  mulțimea primelor  $N$  numere naturale. Un *codor* este o funcție  $q_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{N}$  și asociază unei valori  $x \in \mathbb{R}$  un indice în dicționar. Un

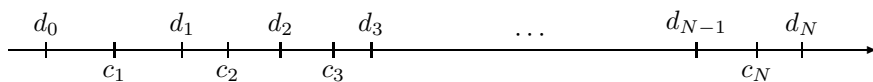


Figura 6.1: Dicționar și puncte de decizie pe axa reală. Unui cod  $c_k$  îi corespunde celula Voronoi  $(d_{k-1}, d_k]$ .

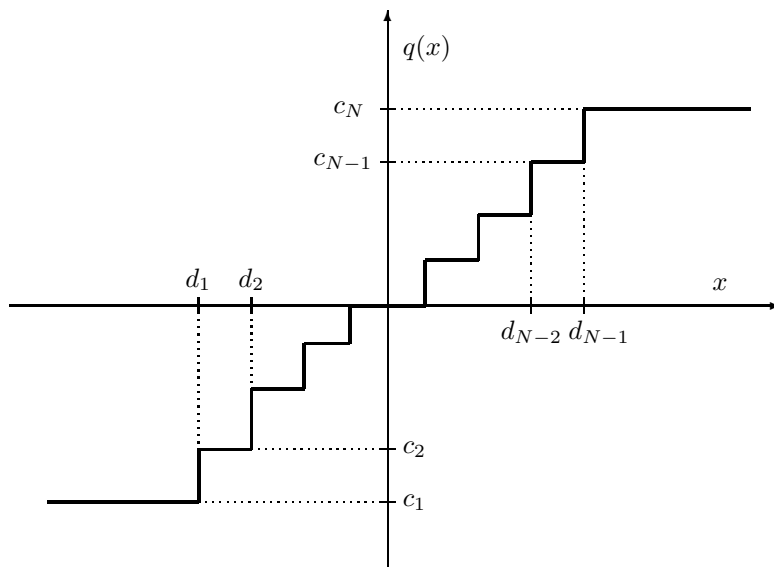


Figura 6.2: Graficul unui cuantizor.

*decoder* este o funcție  $q_d : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$ , prin care un indice este transformat în codul corespunzător.

**Definiția 6.3** Numărul de biți necesar reprezentării numerelor din  $\mathcal{N}$  (și deci din dicționarul  $\mathcal{C}$ ), i.e.

$$r = \log_2 N, \quad (6.2)$$

este numit rezoluție (sau rată de codare) a cuantizorului.

## Performanțele unui cuantizor

Presupunem că semnalul cuantizat  $x$  este caracterizat de o densitate de probabilitate  $p(x)$ , i.e. are proprietăți statistice cunoscute. În general, semnalul poate fi privit ca un proces aleator staționar, dar evoluția sa temporală nu este de interes la cuantizare. Pentru evaluarea calității unui cuantizor este suficient să privim  $x$  ca variabilă aleatoare. Măsura cea mai folosită a calității este următoarea.



**Definiția 6.4** *Distorsiunea (eroarea pătratică) medie a unui cuantizor este*

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} (x - q(x))^2 p(x) dx. \quad (6.3)$$

Pentru un cuantizor cu graficul din figura 6.2, distorsiunea medie poate fi scrisă în forma

$$D = \sum_{k=1}^N \int_{d_{k-1}}^{d_k} (x - c_k)^2 p(x) dx. \quad (6.4)$$

Dacă interpretăm  $x$  ca pe un proces aleator, atunci distorsiunea medie este

$$D = E \{ (x[n] - q(x[n]))^2 \}.$$

Distorsiunea medie este ușor de calculat și utilizat, dar poate să nu corespundă percepției subiective pentru anumite semnale (audio, imagini etc.). Pe de altă parte, criteriile de calitate specifice unor anume semnale sunt relativ greu de găsit și, în general, nu sunt acceptate decât de comunități de specialiști (și nu de totalitatea lor).

Presupunem că semnalul (variabila aleatoare)  $x$  are medie nulă. O altă măsură populară a calității unui cuantizor este următoarea.

**Definiția 6.5** *Raportul semnal-zgomot (SNR—signal to noise ratio) asociat unui cuantizor (și măsurat în decibeli) este*

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{E\{x^2\}}{D}. \quad (6.5)$$

Dacă semnalul nu are medie nulă, în (6.5) se folosește de obicei varianța (1.41) în loc de  $E\{x^2\}$ .

În general, despre cuantizoarele cu  $SNR > 10\text{dB}$  se spune că au rezoluție înaltă; pentru acestea sunt valabile rezultatele asimptotice prezentate în acest capitol. Pentru cuantizoarele cu rezoluție joasă, mai puțin utilizate în practică, analiza erorilor trebuie adaptată de la caz la caz.

*Modelarea erorii de cuantizare.* Presupunând că  $x[n]$  este un semnal discret (aleator), pentru analiza proprietăților erorii de cuantizare

$$\varepsilon[n] = x[n] - q(x[n]) \quad (6.6)$$

se fac în mod curent următoarele ipoteze simplificatoare:

- i) Semnalul  $x[n]$  este necorelat cu eroarea de cuantizare  $\varepsilon[n]$ , i.e.

$$E\{x[n]\varepsilon[n]\} = E\{x[n]\}E\{\varepsilon[n]\}. \quad (6.7)$$

- ii) Eroarea de cuantizare este uniform distribuită.

- iii) Semnalul  $\varepsilon[n]$  este zgomot alb, în sensul că este un șir de variabile aleatoare necorelate.

Ipoteza de necorelare i) nu înseamnă că semnalele  $x[n]$  și  $\varepsilon[n]$  sunt independente; de fapt, din definiția (6.6) se vede că eroarea  $\varepsilon[n]$  depinde determinist de semnalul  $x[n]$ . Ipoteza ii) este valabilă în special pentru cuantizoarele cu rezoluție mare sau în cazul în care semnalul  $x[n]$  are memorie "scurtă" (valorile autocorelațiilor scad repede). Vom vedea mai departe că unele dintre aceste proprietăți sunt satisfăcute în mod natural de unele cuantizoare.

### Cuantizorul uniform

**Definiția 6.6** *Un cuantizor este uniform atunci când între elementele dicționarului  $c_k$ ,  $k = 1 : N$ , și punctele de decizie  $d_k$ ,  $k = 0 : N$ , există relațiile*

$$\begin{aligned} c_{k+1} - c_k &= \Delta, \\ d_k &= \frac{c_k + c_{k+1}}{2}, \end{aligned} \quad (6.8)$$

unde  $\Delta > 0$  este pasul de cuantizare.

Așadar, distanța dintre două coduri succesive este constantă. Din (6.8) rezultă că

$$d_{k+1} - d_k = \Delta,$$

i.e. și distanța dintre punctele de decizie este constantă. De obicei se presupune că semnalul  $x[n]$  ia valori într-un interval  $[a, b]$  și că  $d_0 = a$ ,  $d_N = b$ . Pasul de cuantizare este

$$\Delta = \frac{b - a}{N}. \quad (6.9)$$

**Observația 6.7** Între cuantizoarele cu dicționar conținând  $N$  coduri, cuantizorul uniform minimizează eroarea maximă. Într-adevăr, dacă semnalul  $x$  ia valori în  $[a, b]$ , atunci eroarea maximă de cuantizare este cel puțin

$$\frac{b - a}{2N} = \frac{\Delta}{2},$$

adică eroarea maximă a cuantizorului uniform. ■

**Teorema 6.8** *Presupunem că semnalul de intrare este uniform distribuit în intervalul  $[a, b]$ . Atunci eroarea de cuantizare are medie nulă*

$$E\{\varepsilon\} = 0, \quad (6.10)$$

iar distorsiunea medie (6.3) are valoarea

$$D = \frac{\Delta^2}{12}. \quad (6.11)$$

Corelația dintre semnalul de intrare și eroarea de cuantizare este

$$E\{x\varepsilon\} = 0. \quad (6.12)$$

*Demonstrație.* Semnalul  $x$  fiind uniform distribuit, rezultă că eroarea de cuantizare  $\varepsilon = x - q(x)$  este uniform distribuită în intervalul  $[-\Delta/2, \Delta/2]$ , deci media sa este nulă. Densitatea de probabilitate asociată semnalului  $x$  este  $p(x) = 1/(b-a)$ . Distorsiunea medie este

$$\begin{aligned} D &\stackrel{(6.4)}{=} \sum_{k=1}^N \int_{d_{k-1}}^{d_k} (x - c_k)^2 p(x) dx \\ &= \frac{N}{b-a} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \varepsilon^2 d\varepsilon = \frac{1}{\Delta} \left. \frac{\varepsilon^3}{3} \right|_{-\Delta/2}^{\Delta/2} = \frac{\Delta^2}{12}, \end{aligned}$$

adică are expresia (6.11). În fine, avem

$$\begin{aligned} E\{x\varepsilon\} &= \int_a^b \varepsilon x p(x) dx = \sum_{k=1}^N \int_{d_{k-1}}^{d_k} (x - c_k) x p(x) dx \\ &\stackrel{x=\xi+c_k}{=} \frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^N \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \xi(\xi + c_k) d\xi = \frac{N}{b-a} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \xi^2 d\xi = \frac{\Delta^2}{12} \end{aligned}$$

și deci relația (6.12) este demonstrată. ■

Așadar, ipoteza (6.7), privind necorelarea dintre eroarea de cuantizare și semnal, nu este satisfăcută. Desigur, cu cât rezoluția este mai mare, cu atât distorsiunea medie este mai mică, ca și corelația  $E\{x\varepsilon\}$ .

**Observația 6.9** Presupunem acum că semnalul de intrare  $x$  este distribuit în intervalul  $[a, b]$  cu o densitate de probabilitate oarecare  $p(x)$ . În plus (ipoteză specifică rezoluției înalte), presupunem că  $p(x)$  este suficient de netedă iar numărul  $N$  al nivelelor de cuantizare este suficient de mare, astfel încât pe fiecare interval de decizie (de lungime  $\Delta$ )  $p(x)$  este constantă, mai precis  $p(x) = p_k$  pentru  $x \in [d_{k-1}, d_k]$ . În acest caz, distorsiunea medie este

$$\begin{aligned} D &\stackrel{(6.4)}{=} \sum_{k=1}^N \int_{d_{k-1}}^{d_k} (x - c_k)^2 p(x) dx = \sum_{k=1}^N p_k \int_{d_{k-1}}^{d_k} (x - c_k)^2 dx \\ &= \sum_{k=1}^N p_k \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \xi^2 d\xi = \frac{\Delta^3}{12} \sum_{k=1}^N p_k = \frac{\Delta^2}{12}. \end{aligned}$$

Ultima egalitate are loc deoarece

$$\sum_{k=1}^N p_k \Delta = \int_a^b p(x) dx = 1.$$

Așadar, expresia (6.11) pentru distorsiunea medie a cuantizorului uniform este valabilă în condiții mai largi decât cele ale Teoremei 6.8. ■

*SNR la rezoluție înaltă.* Presupunem că semnalul de intrare are medie zero și varianță  $\sigma^2$ , ceea ce nu este restrictiv. În plus, presupunem că densitatea de probabilitate  $p(x)$  este o funcție pară și (ca mai sus) constantă pe fiecare interval

de decizie. Semnalul  $x$  ia valori în intervalul  $[-a, a]$ . Din definiția (6.2) rezultă că  $N = 2^r$ , deci pasul de cuantizare (6.9) are expresia  $\Delta = 2a/2^r$ . Ținând seama de (6.11), rezultă că raportul semnal-zgomot (6.5) are forma

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{\sigma^2}{D} = 10 \log_{10} \frac{12\sigma^2}{\Delta^2} = 10 \log_{10} \frac{12\sigma^2 2^{2r}}{4a^2} = 20r \log_{10} 2 + ct \approx 6r + ct \quad (6.13)$$

Această relație permite următoarea concluzie.

**Observația 6.10** La rezoluție înaltă, fiecare bit suplimentar utilizat la cuantizare (i.e. dublarea dimensiunii  $N$  a dicționarului) conduce la creșterea cu 6dB a SNR a cuantizorului uniform. ■

## Implementarea unui cuantizor

Considerăm un cuantizor definit de codurile  $c_k$ ,  $k = 1 : N$ , și punctele de decizie  $d_k$ ,  $k = 0 : N$ . Ne punem problema modului de calcul al codului  $c_k = q(x)$  (sau al indicelui  $k$  asociat), pentru o valoare oarecare (cunoscută)  $x$  a intrării. Indicele  $k$  este cel pentru care

$$d_{k-1} \leq x < d_k. \quad (6.14)$$

(În cazul în care  $x$  este chiar un punct de decizie, trebuie să evităm ambiguitatea alegerii, de aceea putem alege inegalitățile ca mai sus.) Căutarea secvențială în  $1 : N$  a indicelui  $k$  este inefficientă, deoarece implică  $N$  comparații în cazul cel mai defavorabil.

Algoritmul cel mai eficient este cel bazat pe *dihotomie*. Dacă  $x < d_{N/2}$ , soluția este în mulțimea  $0 : N/2 - 1$ ; altfel, soluția se află în  $N/2 : N$ . Căutarea continuă asemănător, până când înjumătățirea repetată reduce la un singur indice mulțimea în care se caută. Numărul de comparații este  $\lceil r \rceil = \lceil \log_2 N \rceil$ .

În cazul cuantizorului *uniform* cu  $x_0 = a$ ,  $x_N = b$ , implementarea este extrem de simplă, indicele  $k$  având (de exemplu) expresia

$$k = \left\lfloor \frac{x - a}{b - a} N \right\rfloor + 1.$$

(Pentru  $x = b$  formula dă valoarea incorectă  $k = N + 1$ , ceea ce se poate corecta ușor la implementare.)

## Probleme rezolvate

**PR 6.1.1** Se consideră un cuantizor oarecare (neuniform), ale cărui puncte de decizie  $d_k$ ,  $k = 0 : N$ , sunt date. Semnalul de intrare are densitatea de probabilitate constantă pe fiecare interval de decizie, i.e.  $p(x) = p_k$ ,  $\forall x \in [d_{k-1}, d_k]$ .

**a.** Demonstrați că distorsiunea medie a cuantizorului este minimă dacă fiecare cod este la mijlocul intervalului de decizie, i.e.

$$c_k = (d_{k-1} + d_k)/2. \quad (6.15)$$

**b.** Presupunând relația (6.15) adevărată, demonstrați că distorsiunea medie a cuantizorului are expresia

$$D = \frac{1}{12} \sum_{k=1}^N p_k \Delta_k^3, \quad (6.16)$$

unde  $\Delta_k = d_k - d_{k-1}$  este lungimea intervalului  $k$  de decizie. Observați că distorsiunea medie (6.11) a cuantizorului uniform este un caz particular al relației (6.16).

*Soluție.* **a.** Având în vedere forma (6.4) a distorsiunii medii, este suficient să demonstrăm (6.15) pentru un singur interval de decizie. Presupunem, fără a pierde generalitatea, că intervalul are lungime 1 și  $c_k = 0$ ,  $d_{k-1} = -\alpha$ ,  $d_k = 1 - \alpha$ . Pentru intervalul respectiv, distorsiunea medie este

$$D_k = \int_{-\alpha}^{1-\alpha} x^2 dx = \frac{1}{3} (3\alpha^2 - 3\alpha + 1)$$

și este minimă când  $\alpha = 1/2$ , i.e. codul 0 este la mijlocul intervalului.

**b.** Folosind din nou (6.4), obținem

$$D = \sum_{k=1}^N p_k \int_{d_{k-1}}^{d_k} (x - c_k)^2 dx \stackrel{x=\xi+c_k}{=} \sum_{k=1}^N p_k \int_{-\Delta_k/2}^{\Delta_k/2} \xi^2 d\xi,$$

ceea ce conduce imediat la (6.16). ■

**PR 6.1.2** Fie un semnal de intrare cu densitatea de probabilitate  $p(x)$  din figura 6.3, cu expresia

$$p(x) = \begin{cases} \alpha, & \text{dacă } x \in [0, 1/2], \\ \beta, & \text{dacă } x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

(Din condiția (1.38) rezultă  $\alpha + \beta = 2$ .) Acest semnal este cuantizat cu două cuantizoare cu  $N = 4$  coduri. Primul este cel uniform, al doilea are punctele de decizie  $d_0 = 0$ ,  $d_1 = 1/6$ ,  $d_2 = 1/3$ ,  $d_3 = 1/2$ ,  $d_4 = 1$ ; punctele de decizie ale celor două cuantizoare sunt reprezentate pe axele orizontale ale celor două grafice din figura 6.3. Codurile sunt plasate optim la mijlocul intervalelor de decizie. Calculați distorsiunile medii ale celor două cuantizoare și determinați valorile lui  $\alpha$  pentru care cuantizorul neuniform are distorsiunea medie mai mică.

*Soluție.* Pentru cuantizorul uniform, distorsiunea medie are expresia (6.11), conform Observației 6.9. În cazul nostru  $\Delta = 1/4$  și deci

$$D_1 = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{1}{192} = 0.005208.$$

Pentru distorsiunea medie a cuantizorului neuniform, folosim expresia (6.16) și, ținând seama că  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 1/6$ ,  $\Delta_4 = 1/2$  și  $p_1 = p_2 = p_3 = \alpha$ ,  $p_4 = \beta = 2 - \alpha$ , obținem

$$D_2(\alpha) = \frac{1}{12} \sum_{k=1}^4 p_k \Delta_k^3 = \frac{54 - 25\alpha}{2592}.$$

Se obține  $D_2(\alpha) = D_1$  pentru  $\alpha = 1.62$ , deci  $D_2(\alpha) \leq D_1$  pentru  $\alpha \in [1.62, 2]$ . La limită, se obține  $D_2(2) = 0.001543$ , adică o valoare mult mai mică decât  $D_1$ . ■

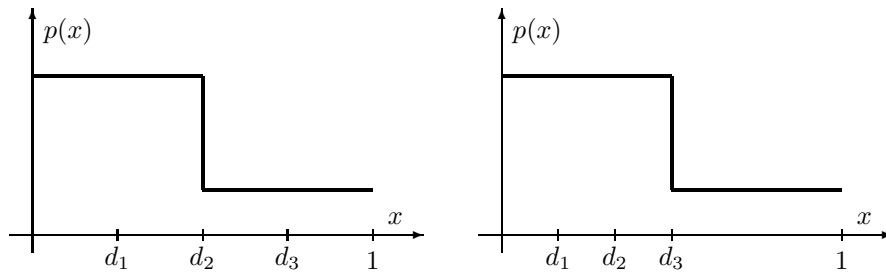


Figura 6.3: Exemplu de densitate neuniformă de probabilitate și puncte de decizie pentru cuantizorul uniform (stânga) și un cuantizor neuniform (dreapta).

## Probleme propuse

**PP 6.1.1** Considerăm din nou semnalul de intrare cu densitatea de probabilitate din problema **PR6.1.2**. Propuneți un cuantizor cu 5 coduri și calculați distorsiunea acestuia. În ce condiții este cuantizorul propus mai bun decât cel uniform.

**PP 6.1.2** Scrieți un algoritm detaliat de implementare a unui cuantizor, bazat pe dihotomie.

## Ghid Matlab

Un cuantizor uniform primar este implementat de funcția `quant`. Apelul

```
>> y = quant(x, pas)
```

pune în `y` multiplul cel mai aproape de `x` al pasului de cuantizare `pas`.

Cuantizorul (codorul) uniform este simulat prin

```
>> k = uencode(x, r, a)
```

În acest apel, `r` este rezoluția (un număr întreg, deci dimensiunea dicționarului este  $N = 2^r$ ), iar codurile acoperă uniform intervalul  $[-a, a]$ ; rezultatul este indicele  $k \in 0 : N - 1$ . Decodorul este apelat prin

```
>> y = udecode(k, r, a)
```

furnizând codul corespunzător indicelui `k`.

Un cuantizor oarecare este simulat prin

```
>> k = quantiz(x, d)
```

Acest apel produce indicele `k` al codului corespunzător intrării `x`, pentru punctele de decizie aflate în vectorul `d`. (Punctele de decizie  $-\infty$  și  $\infty$  sunt adăugate celor din vectorul `d`.)

## 6.2 Proiectarea unui cuantizor

Pentru distribuție uniformă a semnalului de intrare, cuantizorul uniform este optim, în sensul că are distorsiune medie minimă (vom demonstra mai târziu această

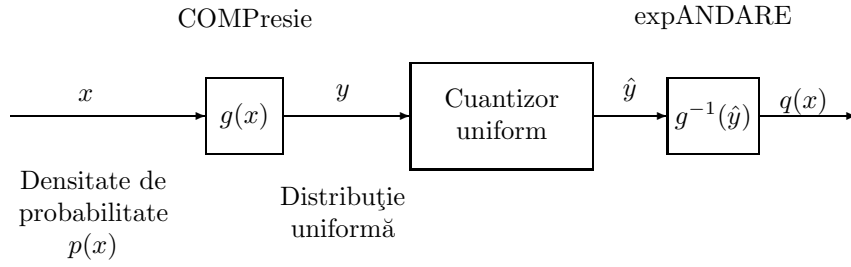


Figura 6.4: Schema unui compandor.

afirmație). Dacă însă distribuția este neuniformă, este posibil ca alte cuantizoare, neuniforme, să fie optime; un exemplu simplu a fost prezentat în problema **PR6.1.2**. În această secțiune studiem metode de proiectare a unui cuantizor, atunci când se cunoaște distribuția semnalului de intrare, fie analitic, fie experimental. Datele de proiectare sunt dimensiunea dicționarului ( $N$ ) sau rezoluția  $r$ . Rezultatul proiectării este dicționarul  $\mathcal{C}$  și punctele de decizie  $d_k$ .

### Compandare

Compandarea funcționează conform schemei din figura 6.4. Semnalul  $x$ , cu densitate de probabilitate (neuniformă)  $p(x)$ , este transformat prin funcția  $g(x)$ , în încercarea de a obține un semnal  $y$  cu distribuție uniformă. Acest semnal este cuantizat cu un cuantizor uniform, iar codurile  $\hat{y}$  sunt transformate cu funcția inversă  $g^{-1}$  pentru a obține codurile  $q(x)$ . Numele *compandor* provine din combinarea extremelor cuvintelor compresie și expandare, care reprezintă numele atribuite funcțiilor  $g$  și  $g^{-1}$ . Proiectarea unui compandor se rezumă la găsirea funcției  $g$ .

Presupunem că densitatea de probabilitate  $p(x)$  este cunoscută. Funcția cumulativă de probabilitate este

$$f(x_0) = \text{Prob}(x \leq x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} p(x)dx, \quad \text{cu } f: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]. \quad (6.17)$$

Figura 6.5 prezintă graficul unei funcții de probabilitate, cu suport finit. Împărțim intervalul  $[0, 1]$  de pe axa verticală în  $N$  intervale egale ( $N = 8$  în figură), separate de punctele

$$y_k = k/N, \quad k = 0 : N. \quad (6.18)$$

Pe axa orizontală, definim punctele corespondente

$$d_k \in \mathbb{R}, \quad f(d_k) = y_k, \quad k = 0 : N. \quad (6.19)$$

Se observă că

$$\text{Prob}(d_{k-1} \leq x \leq d_k) = \int_{d_{k-1}}^{d_k} p(x)dx = f(d_k) - f(d_{k-1}) = \frac{1}{N}. \quad (6.20)$$

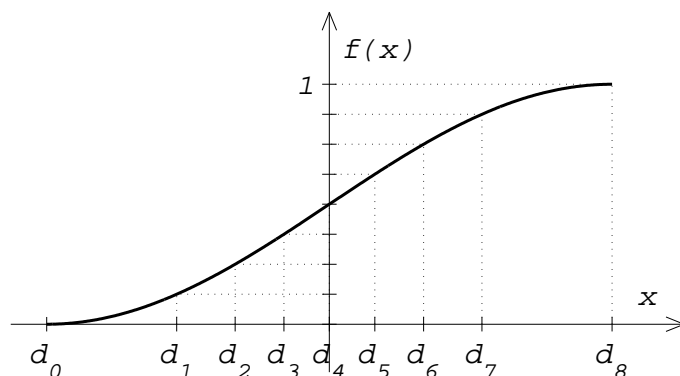


Figura 6.5: Funcție de probabilitate și puncte de decizie obținute prin compandare.

Așadar, dacă alegem  $d_k$  drept puncte de decizie pentru un cuantizor al semnalului  $x$ , atunci probabilitatea ca  $x$  să aparțină unei celule Voronoi  $[d_{k-1}, d_k]$  este aceeași indiferent de celulă. În concluzie, în schema de compandare din figura 6.4, alegem funcția  $g$  de compresie identică cu funcția de probabilitate  $f$ . Semnalul  $y = g(x)$  nu va avea neapărat distribuție uniformă, dar faptul că  $\text{Prob}(y_{k-1} \leq y \leq y_k) = 1/N$  asigură o bună aproximație a distribuției uniforme.

**Observația 6.11** Compandorul obținut prin procedeul de mai sus nu este neapărat optim, deoarece densitatea de probabilitate în fiecare interval de decizie nu este constantă. Compandorul realizează însă o bună aproximație a cuantizorului optim, în special la rezoluție înaltă.

În cazul frecvent în care funcția de probabilitate  $f(x)$  nu este cunoscută analitic, se poate proceda în două feluri:

- Dacă semnalul de intrare este staționar, se poate estima experimental  $f(x)$ , după care se aleg punctele de decizie astfel încât relația (6.20) să fie satisfăcută aproximativ.
- Atunci când estimarea este imposibilă din considerente de timp real, se utilizează compresoare  $g(x)$  simple, care asigură robustețe pentru familia de semnale cuantizate. Graficul funcției  $g(x)$  are forma tipică din figura 6.5, ceea ce conduce la celule Voronoi mai mari pentru valori mari (și mai puțin frecvente) ale semnalului și la celule mici pentru valori în preajma lui zero. Un exemplu este legea- $\mu$  utilizată în telefonie digitală

$$g_\mu(x) = a \frac{\ln(1 + \mu|x|/a)}{\ln(1 + \mu)} \text{sgn}(x).$$

Se presupune că semnalul este limitat la valori  $x \in [-a, a]$ . În acest caz,  $g_\mu(x)$  are valori în  $[-1, 1]$ ; proiectarea compandorului decurge similar pentru orice astfel de mulțime de valori. ■



### Condiții de optimalitate

Presupunând cunoscute densitatea de probabilitate  $p(x)$  a semnalului de intrare și numărul  $N$  de nivele de cuantizare, studiem acum relațiile dintre codurile  $c_k$  și punctele de decizie  $d_k$  pentru cuantizorul optim, cel pentru care distorsiunea medie (6.3) este minimă.

*Puncte de decizie optime pentru coduri date.* Presupunem fixate codurile  $c_k$ ,  $k = 1 : N$ . Dorim să aflăm punctele de decizie optime pentru aceste coduri. Datorită formei cumulative a distorsiunii medii, putem reduce studiul la un singur interval  $[c_k, c_{k+1}]$ . Pentru simplitate, considerăm  $c_k = 0$ ,  $c_{k+1} = 1$  și căutăm punctul optim de decizie  $d_k = d$ . Pe intervalul considerat, având în vedere că  $q(x) = c_k$ , dacă  $x \in [c_k, d_k]$ , iar  $q(x) = c_{k+1}$  dacă  $x \in [d_k, c_{k+1}]$ , distorsiunea medie este

$$\int_0^d x^2 dx + \int_d^1 (x-1)^2 dx = \frac{d^3}{3} - \frac{(d-1)^3}{3} = \frac{3d^2 - 3d + 1}{3}.$$

Valoarea minimă se obține pentru  $d = 1/2$ . În general, se demonstrează asemănător că distorsiunea medie este minimă atunci când punctul de decizie este la mijlocul distanței dintre coduri, i.e.

$$d_k = (c_k + c_{k+1})/2, \quad k = 1 : N-1. \quad (6.21)$$

O altă justificare, mai simplă și mai intuitivă, este următoarea. Distorsiunea este minimizată dacă, pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , valoarea  $q(x)$  este codul *cel mai apropiat* de  $x$ . Așadar punctul de decizie  $d_k$  se află la mijlocul intervalului  $[c_k, c_{k+1}]$ .

*Coduri optime pentru puncte de decizie date.* Presupunem fixate punctele de decizie  $d_k$ ,  $k = 0 : N$ , și dorim să aflăm codurile optime pentru aceste puncte de decizie. Din nou, putem reduce studiul la o singură celulă Voronoi (dată)  $[d_{k-1}, d_k]$ , pentru care căutăm codul optim, anume valoarea  $c_k$  pentru care distorsiunea

$$D_k = \int_{d_{k-1}}^{d_k} (x - c_k)^2 p(x) dx \quad (6.22)$$

este minimă. Prezентăm întâi un rezultat ajutător.

**Propoziția 6.12** Fie  $\xi$  o variabilă aleatoare. Constanta  $\alpha$  care minimizează eroarea pătratică medie  $E\{(\xi - \alpha)^2\}$  este  $\alpha = E\{\xi\}$ , adică media variabilei.

*Demonstrație.* Notăm  $\mu = E\{\xi\}$  media variabilei aleatoare. Observăm că avem

$$E\{(\xi - \alpha)^2\} = E\{(\xi - \mu + \mu - \alpha)^2\} = E\{(\xi - \mu)^2\} + (\mu - \alpha)^2,$$

deoarece  $E\{(\xi - \mu)\} = 0$ . În dreapta expresiei de mai sus, primul termen este constant, deci minimul se obține luând  $\alpha = \mu$ . ■

**Teorema 6.13** Valoarea  $c_k$  care minimizează distorsiunea (6.22) este centrul de masă (centroidul) celei Voronoi  $\mathcal{A}_k = [d_{k-1}, d_k]$ , i.e.

$$c_k = E\{x \mid x \in \mathcal{A}_k\} = \frac{\int_{d_{k-1}}^{d_k} xp(x)dx}{\int_{d_{k-1}}^{d_k} p(x)dx}. \quad (6.23)$$

*Demonstrație.* Notăm

$$p_k = \text{Prob}(x \in \mathcal{A}_k) = \int_{d_{k-1}}^{d_k} p(x) dx \quad (6.24)$$

probabilitatea ca semnalul de intrare să ia valori în celula Voronoi considerată. Distorsiunea (6.22) poate fi scrisă în forma

$$D_k = p_k \int_{d_{k-1}}^{d_k} (x - c_k)^2 \frac{p(x)}{p_k} dx = p_k E\{(x - c_k)^2 \mid x \in \mathcal{A}_k\},$$

deoarece  $p(x)/p_k$  are semnificație de densitate de probabilitate a semnalului  $x$ , atunci când considerăm doar valorile din celula Voronoi  $\mathcal{A}_k$ . Folosind Propoziția 6.12, obținem

$$c_k = E\{x \mid x \in \mathcal{A}_k\} = \int_{d_{k-1}}^{d_k} x \frac{p(x)}{p_k} dx,$$

de unde rezultă imediat (6.23). ■

**Observația 6.14** Condițiile (6.21) și (6.23) sunt necesare pentru optimalitate, dar nu neapărat suficiente. Ele sunt satisfăcute și de minime locale ale distorsiunii medii, nu doar de minimul global. ■

**Observația 6.15** Pentru o densitate uniformă de probabilitate a intrării în intervalul  $[a, b]$ , cuantizorul uniform satisface condițiile de optimalitate. Relația (6.21) este evident adevărată, iar (6.23) devine

$$c_k = \frac{\int_{d_{k-1}}^{d_k} \frac{x}{b-a} dx}{\int_{d_{k-1}}^{d_k} \frac{1}{b-a} dx} = \frac{1}{d_k - d_{k-1}} \int_{d_{k-1}}^{d_k} x dx = \frac{d_k^2 - d_{k-1}^2}{2(d_k - d_{k-1})} = \frac{d_{k-1} + d_k}{2}. \quad (6.25)$$

Astfel, condițiile de optimalitate sunt echivalente cu definițiile (6.8). ■

## Algoritmul Lloyd-Max

Condițiile de optimalitate (6.21) și (6.23) sunt folosite într-un algoritm de proiectare a unui cuantizor, cunoscut sub numele de algoritm *Lloyd-Max*. Ideea algoritmului este de a alterna calculul codurilor optime, presupunând punctele de decizie fixate, cu calculul invers, al punctelor de decizie optime, folosind codurile calculate anterior. Iterațiile continuă până la convergență. Algoritmul are forma următoare.

### Algoritmul Lloyd-Max

0. Se dă numărul de nivele de cuantizare  $N$ . Se alege un dicționar inițial  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_N\}$ . Se alege o toleranță  $\epsilon$ . Se inițializează pasul de iterare  $i = 0$ .
1. Se calculează punctele de decizie optime  $d_k$ ,  $k = 1 : N - 1$ , pentru codurile  $c_k$ , conform relației (6.21).

2. Se calculează codurile optime  $c_k$ ,  $k = 1 : N$ , pentru punctele de decizie  $d_k$ , conform relației (6.23).
3. Calculează distorsiunea medie curentă  $D^{(i)}$  cu una din relațiile (6.3) sau (6.4).
4. Dacă

$$\frac{D^{(i-1)} - D^{(i)}}{D^{(i)}} < \epsilon,$$

atunci stop. Altfel, se pune  $i \leftarrow i + 1$  și se reia de la pasul 1.

Se observă că distorsiunea scade la fiecare pas. Într-adevăr, pentru e.g. puncte de decizie date, noile coduri minimizează distorsiunea, așadar produc o distorsiune mai mică decât codurile de la iterația anterioară. În concluzie, algoritmul converge către un punct staționar, care este un minim local (nu neapărat cel global). Inițializări diferite ale algoritmului pot produce rezultate diferite.

*Proiectare utilizând date empirice.* În forma dată anterior, algoritmul Lloyd-Max se bazează pe cunoașterea densității de probabilitate  $p(x)$  a semnalului de intrare. Presupunem acum că aceasta nu este cunoscută. În schimb, dispunem de  $M$  eșantioane ale semnalului de intrare, anume  $x_\ell$ ,  $\ell = 1 : M$ ; notăm  $\mathcal{X}$  mulțimea acestor eșantioane. Numărul  $M$  este suficient de mare (în raport cu  $N$ ).

Structura algoritmului Lloyd-Max rămâne aceeași. De asemenea, punctele de decizie se calculează la fiecare iterație cu relația (6.21). În schimb, calculul codurilor trebuie modificat, deoarece (6.23) nu se mai poate aplica. Pentru coduri fixate, o celulă Voronoi care respectă condiția de optimalitate (6.21) este mulțimea finită

$$\mathcal{A}_k = \{x_\ell \in \mathcal{X}, \ell = 1 : M \mid |x_\ell - c_k| \leq |x_\ell - c_i|, i = 1 : N, i \neq k\}. \quad (6.26)$$

Așadar celula asociată codului  $c_k$  conține eșantioanele din  $\mathcal{X}$  care sunt mai aproape de acest cod decât de oricare altul. Centrul de masă al unei celule se calculează în mod natural prin media eșantioanelor din celula respectivă; în consecință, în pasul 2 al algoritmului Lloyd-Max, formula (6.23) se înlocuiește cu

$$c_k = \frac{1}{|\mathcal{A}_k|} \sum_{x_\ell \in \mathcal{A}_k} x_\ell. \quad (6.27)$$

Remarcăm că, în algoritmul Lloyd-Max, celulele (6.26) se stabilesc folosind codurile de la iterația anterioară, în timp ce relația (6.27) se utilizează pentru calculul codurilor în iterația curentă.

În fine, distorsiunea se calculează în mod natural prin

$$D = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N \sum_{x_\ell \in \mathcal{A}_k} (x_\ell - c_k)^2. \quad (6.28)$$

Algoritmul Lloyd-Max capătă forma următoare.

0. Se dau  $M$  eșantioane ale semnalului de intrare,  $x_\ell$ ,  $\ell = 1 : M$ . Se alege un dicționar inițial  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_N\}$ .
1. Se stabilesc celulele Voronoi discrete conform relației (6.26).

2. Se recalculează codurile  $c_k$ ,  $k = 1 : N$ , conform relației (6.27).
3. Se repetă pașii 1 și 2 până când distorsiunea (6.28) nu mai scade semnificativ.

În implementarea acestui algoritm apar unele probleme neîntâlnite în cazul cunoașterii densității de probabilitate a intrării. De exemplu, atunci când un eșantion  $x_\ell$  este la egală distanță de două coduri, trebuie să-l asociem, conform unei reguli ad hoc, uneia dintre cele două celule (6.26) posibile. De asemenea, trebuie prevenită situația în care o celulă (6.26) este vidă, caz în care formula (6.27) nu este aplicabilă; tocmai din acest motiv, există algoritmi de proiectare care pornesc cu un număr mic de coduri, care crește pe măsură ce algoritmul evoluează.

Algoritmul Lloyd-Max poate fi utilizat și pentru alte operații în afară de cuantizare, de exemplu pentru clasificare.

### Probleme rezolvate

**PR 6.2.1** Se consideră semnalul cu densitatea de probabilitate reprezentată în figura 6.6 și definită prin

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x+a}{a^2}, & \text{pentru } x \in [-a, 0], \\ \frac{-x+a}{a^2}, & \text{pentru } x \in [0, a], \end{cases}$$

unde  $a > 0$  este dat.

- a. Calculați funcția de probabilitate (6.17).
- b. Date punctele (6.18), calculați punctele de decizie (6.19) ale compandorului.

*Soluție.* a. Pentru  $x \leq 0$ , funcția de probabilitate este

$$f(x) = \int_{-a}^x \frac{\xi + a}{a^2} d\xi = \frac{(x + a)^2}{2a^2}.$$

Deoarece  $p(x)$  este pară,  $f(x)$  satisface relația de simetrie  $f(x) = 1 - f(-x)$ . Graficul funcției de probabilitate este prezentat în dreapta figurii 6.6.

- b. Pentru  $y_k \leq 0.5$ , din (6.19) rezultă imediat

$$d_k = a\sqrt{2y_k} - a.$$

Pentru  $y > 0.5$ , se ține seama de relația de simetrie de mai sus. ■

**PR 6.2.2** Considerăm un cuantizor  $q(x)$  ai cărui coduri îndeplinesc condițiile de optimalitate (6.21). Demonstrați că eroarea de cuantizare  $\varepsilon = x - q(x)$  satisface relațiile  $E\{\varepsilon\} = 0$ ,  $E\{\varepsilon q(x)\} = 0$ .

*Soluție.* Folosind relațiile (6.21) și (6.24), obținem

$$E\{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \sum_{k=1}^N \int_{d_{k-1}}^{d_k} xp(x)dx = \sum_{k=1}^N c_k p_k = E\{q(x)\}.$$

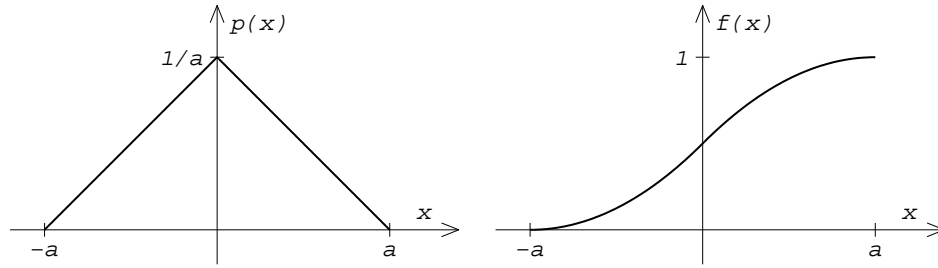


Figura 6.6: Densitate de probabilitate  $p(x)$  și funcția de probabilitate  $f(x)$  corespunzătoare, pentru problema **PR6.2.1**.

De aici rezultă  $E\{\varepsilon\} = E\{x\} - E\{q(x)\} = 0$ , adică media erorii e nulă. În mod similar obținem,

$$\begin{aligned} E\{\varepsilon q(x)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - q(x))q(x)p(x)dx = \sum_{k=1}^N \int_{d_{k-1}}^{d_k} (x - c_k)c_k p(x)dx \\ &= \sum_{k=1}^N c_k \left( c_k p_k - \int_{d_{k-1}}^{d_k} x p(x)dx \right) = 0. \end{aligned}$$

Deci, eroarea de cuantizare este necorelată cu ieșirea cuantizorului. ■

**PR 6.2.3** Studiați evoluția algoritmului Lloyd-Max pentru cazul în care intrarea  $x \in [0, 1]$  este uniform distribuită iar numărul de nivele de cuantizare este  $N = 2$ . Alegeți mai multe inițializări, de exemplu i)  $c_1 = 0.3, c_2 = 0.7$ ; ii)  $c_1 = 0.2, c_2 = 0.7$ .

*Soluție.* Singurul punct de decizie care se modifică în algoritm este  $d_1$  (celelalte sunt  $d_0 = 0, d_2 = 1$ ). Relația (6.21) este  $d_1 = (c_1 + c_2)/2$ . Pentru densitate de probabilitate uniformă, relația (6.23) are forma (6.25), așadar avem

$$c_1 = d_1/2, \quad c_2 = (d_1 + 1)/2.$$

Evoluția algoritmului Lloyd-Max este următoarea.

Inițializare	$c_1 = 0.3, c_2 = 0.7$	$c_1 = 0.2, c_2 = 0.7$
Iterația 1	$d_1 = 0.5$ $c_1 = 0.25, c_2 = 0.75$	$d_1 = 0.45$ $c_1 = 0.225, c_2 = 0.725$
Iterația 2	idem	$d_1 = 0.475$ $c_1 = 0.2375, c_2 = 0.7375$
Iterația 3		$d_1 = 0.4875$ etc.

Pentru ambele inițializări, algoritmul converge la codurile optime; cuantizorul optim este cel uniform. Pentru prima inițializare, algoritmul converge într-o singură iterație. Pentru a doua, convergența este asimptotică. ■

**PR 6.2.4** Studiați evoluția algoritmului Lloyd-Max atunci când se cunosc  $M = 6$  eşantioane ale intrării, anume cele din mulțimea  $\mathcal{X} = \{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$ . Utilizați mai multe inițializări, de exemplu i)  $c_1 = 0.3, c_2 = 0.7$ ; ii)  $c_1 = 0.2, c_2 = 0.5$ .

*Soluție.* Aplicând relațiile (6.26) și (6.27), evoluția algoritmului este următoarea. Presupunem că atunci când un eşantion este egal depărtat de două coduri, el face parte din celula (6.26) a codului mai mare.

Inițializare	$c_1 = 0.3, c_2 = 0.7$	$c_1 = 0.2, c_2 = 0.5$
Iterația 1	$\mathcal{A}_1 = \{0, 0.2, 0.4\}$ $\mathcal{A}_2 = \{0.6, 0.8, 1\}$ $c_1 = 0.2, c_2 = 0.8$	$\mathcal{A}_1 = \{0, 0.2\}$ $\mathcal{A}_2 = \{0.4, 0.6, 0.8, 1\}$ $c_1 = 0.1, c_2 = 0.7$
Iterația 2	idem	idem

Pentru ambele inițializări, algoritmul converge într-o iterație, dar la cuantizatoare diferite. Pentru a doua inițializare, după iterația 1, eşantionul 0.4 este egal depărtat de codurile  $c_1 = 0.1, c_2 = 0.7$ . Dacă schimbăm regula adoptată și includem acest eşantion în celula  $\mathcal{A}_1$  (a codului mai mic), atunci rezultatul se schimbă și obținem aceleași coduri ca pentru prima inițializare. ■

## Probleme propuse

**PP 6.2.1** Proiectați un compandor pentru intrarea cu densitatea de probabilitate din **PR6.1.2**.

**PP 6.2.2** Ce cuantizor are o complexitate de implementare mai mare: un compandor sau un cuantizor neuniform ?

**PP 6.2.3** Demonstrați că, pentru o intrare cu densitate de probabilitate uniformă, algoritmul Lloyd-Max converge către cuantizorul uniform. (Indicație: considerați coduri și puncte de decizie diferite de cele ale cuantizorului uniform și demonstrați că ele nu satisfac condițiile de optimalitate (6.21) sau (6.23).)

**PP 6.2.4** Dorim să proiectăm un cuantizor pentru un proces ale cărui valori le putem măsura. Culegem două seturi de date  $\mathcal{X}_1$  și  $\mathcal{X}_2$ , ambele cu  $M$  eşantioane. Executăm algoritmul Lloyd-Max cu fiecare din aceste seturi de date și același dicționar inițial. Obținem același rezultat ?

Cum putem proceda pentru a obține un dicționar mai bun ?

## Ghid Matlab

Algoritmul Lloyd-Max este implementat de funcția `lloyds`. Dacă vectorul `date` conține eşantioane ale intrării (presupuse relevante pentru distribuția de probabilitate a acesteia), iar vectorul `c_ini` conține un dicționar inițial, atunci apelul

```
>> c = lloyds(date, c_ini)
```

produce un dicționar `c` optimizat cu algoritmul Lloyd-Max.

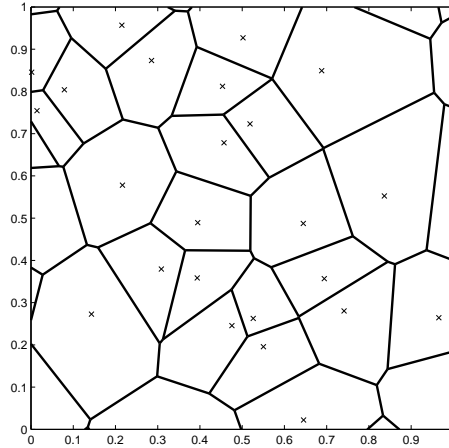


Figura 6.7: Celule Voronoi pentru un cuantizor 2D cu coduri aleatoare.

### 6.3 Cuantizare vectorială

Un cuantizor vectorial este o funcție  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{C}$ , unde  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$  este un dicționar cu  $N$  elemente. Spre deosebire de cuantizarea scalară, unde fiecare element al intrării este cuantizat separat, acum se cuantizează simultan  $n$  valori ale intrării, sub forma unui vector în  $\mathbb{R}^n$ . Codul  $q(x) = c_k$ ,  $k = 1 : N$ , este și el un vector de dimensiune  $n$ . Cuantizarea vectorială permite obținerea unor distorsiuni mai mici decât cea scalară, la rezoluții egale. Pentru reprezentarea unui cod sunt necesari  $\log_2 N$  biți. Deoarece un cod reprezintă  $n$  valori ale intrării, rezoluția unui cuantizor vectorial este

$$r = (\log_2 N)/n. \quad (6.29)$$

Celula Voronoi este definită tot prin relația (6.1), dar acum avem  $\mathcal{A}_k \subset \mathbb{R}^n$ . Un exemplu de cuantizor 2D (cu  $n = 2$ ) este prezentat în figura 6.7. Un cuantizor ale cărui celule Voronoi sunt convexe (ca în figură) se numește *regulat*.

Distorsiunea medie a unui cuantizor vectorial este definită prin relații similare celor din cazul scalar (6.3), (6.4) prin

$$D = \int_{\mathbb{R}^n} \|x - q(x)\|^2 p(x) dx = \sum_{k=1}^N \int_{\mathcal{A}_k} \|x - c_k\|^2 p(x) dx, \quad (6.30)$$

unde  $p(x)$  este densitatea de probabilitate a seturilor de  $n$  valori ale intrării. Norma utilizată este cea euclidiană.

#### Comparații între cuantizarea vectorială și cea scalară

Cuantizarea vectorială poate asigura performanțe mai bune decât cea scalară. Ilustrăm această afirmație în cazul  $n = 2$ , pentru cazul simplu în care semnalul de intrare este uniform distribuit.

*Cuantizor uniform 2D.* Cuantizorul scalar uniform este optim. Cuantizând câte două valori simultan (dar independent) cu acest cuantizor, obținem un cuantizor 2D cu celulele Voronoi ca în stânga figurii 6.8. În general, o astfel de interpretare conduce la celule Voronoi de formă dreptunghiulară, cu laturile paralele cu axele; pentru cuantizorul uniform, celulele sunt pătrate. Ca în (6.8), notăm cu  $\Delta$  distanța dintre două coduri, care este și latura celulei Voronoi. Presupunem că toate celulele, inclusiv cele de la margine, au aceeași formă. Forma cumulativă a distorsiunii (6.30) și forma identică a celulelor permite limitarea studiului la o singură celulă, cea din jurul codului  $c_k = 0$  (același rezultat se obține pentru orice cod), reprezentată în stânga figurii 6.9. Deoarece fiecare celulă are arie  $\Delta^2$ , rezultă că  $p(x) = 1/(N\Delta^2)$ . Distorsiunea cuantizorului este

$$D_{uni} = N \int_{\mathcal{A}_k} (x - c_k)^2 \frac{1}{N\Delta^2} dx = \frac{1}{\Delta^2} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} (x_1^2 + x_2^2) dx_1 dx_2 = \frac{\Delta^2}{6}. \quad (6.31)$$

(Valoarea de două ori mai mare decât cea din (6.11) se explică prin lipsa normalizării cu  $n$  a distorsiunii (6.30), spre deosebire de rezoluția (6.29).)

*Cuantizorul cu celule hexagonale* reprezentat în dreapta figurii 6.8 este optim, în 2D, în privința distorsiunii; nu demonstrăm această afirmație, ci ne mulțumim să demonstrăm că este mai bun decât cel uniform. Facem aceeași ipoteză ca mai sus, anume că toate cele  $N$  celule sunt identice. Considerăm o celulă Voronoi cu latura  $a$  (egală cu raza cercului circumscris), ca în dreapta figurii 6.9. Aria acestei celule este

$$A = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2. \quad (6.32)$$

Densitatea de probabilitate uniformă are valoarea  $p(x) = 1/(NA)$ . Presupunând celula centrată în origine, putem calcula distorsiunea pe cele 6 triunghiuri echilaterale formate de două raze (ale cercului circumscris) și o latură. Distorsiunea medie a cuantizorului este

$$D_{hex} = 6N \int_0^{a\sqrt{3}/2} \int_{-x_2/\sqrt{3}}^{x_2/\sqrt{3}} (x_1^2 + x_2^2) \frac{1}{NA} dx_1 dx_2 = \frac{5a^2}{12}. \quad (6.33)$$

Pentru a compara distorsiunile cuantizoarelor hexagonal și uniform, este necesar ca ariile celulelor Voronoi să fie egale, i.e.

$$\Delta^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2.$$

Raportul distorsiunilor este

$$\frac{D_{hex}}{D_{uni}} = \frac{\frac{5a^2}{12}}{\frac{3\sqrt{3}a^2}{2 \cdot 6}} = \frac{5}{3\sqrt{3}} = 0.9623. \quad (6.34)$$

În concluzie, cuantizorul hexagonal oferă un câștig de aproape 4% în distorsiune. Această îmbunătățire nu este prea mare. Însă, cu cât  $n$  crește, cu atât crește calitatea cuantizării vectoriale în raport cu cea scalară.



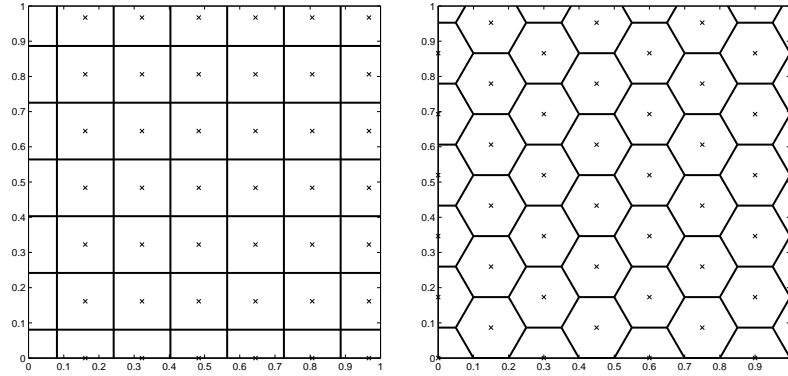


Figura 6.8: Celule Voronoi pentru cuantizor 2D uniform (stânga) și cuantizor bazat pe latice hexagonală (dreapta).

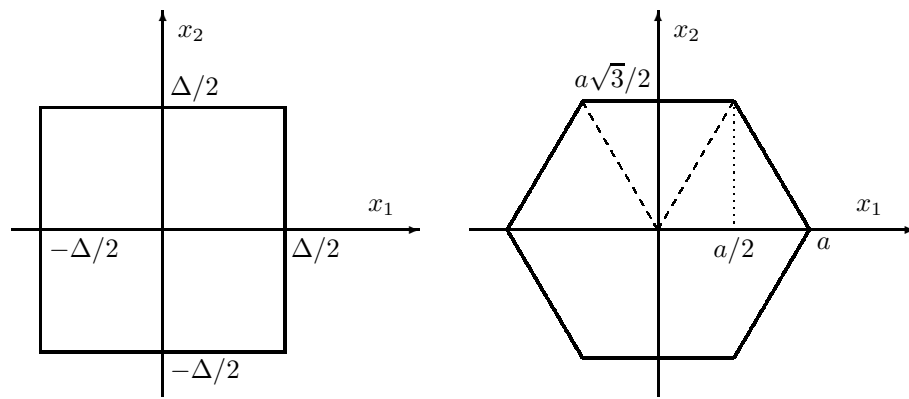


Figura 6.9: O celulă Voronoi pentru cuantizor 2D uniform (stânga) și cuantizor bazat pe latice hexagonală (dreapta).

În schimb, implementarea unui cuantizor vectorial este mai dificilă decât cea a unui scalar. Dihotomia nu mai este posibilă și, pentru un dicționar oarecare, doar căutarea exhaustivă poate produce codul cel mai apropiat de vectorul  $x \in \mathbb{R}^n$  cuantizat. Dacă însă dicționarul are o structură regulată, precum în cazul celulelor hexagonale, atunci se pot concepe algoritmi eficienți de căutare. În general, cuantizorele vectoriale utilizate în practică folosesc o structură a codurilor care le face neoptimale, dar (relativ) ușor de utilizat.

## Condiții de optimalitate și algoritmul Lloyd generalizat

*Celule Voronoi optime pentru coduri date.* Presupunând că dicționarul este cunoscut, distorsiunea este minimizată dacă, pentru  $x \in \mathbb{R}^n$  dat, valoarea  $q(x)$  este codul cel mai apropiat de  $x$ . Așadar, celula Voronoi optimă asociată codului  $c_k$  este

$$\mathcal{A}_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - c_k\| \leq \|x - c_i\|, i = 1 : N\}. \quad (6.35)$$

În consecință, celulele Voronoi optime au formă poliedrală (revedeți figura 6.7 pentru cazul 2D). Dacă  $\mathcal{A}_k$  și  $\mathcal{A}_i$  sunt celule vecine, atunci granița dintre ele este hiperplanul ortogonal pe mijlocul segmentului ce unește codurile  $c_k$  și  $c_i$ . În plus, celulele sunt convexe. Punctele de pe frontieră pot fi atribuite oricăreia dintre cele două celule, fără modificarea distorsiunii.

*Coduri optime pentru celule Voronoi date.* Presupunem acum că celulele Voronoi sunt cunoscute și vrem să determinăm codurile optime corespunzătoare. Similar cu (6.23), codul optim asociat celei  $\mathcal{A}_k$  este centrul de masă (centroidul) celei respective, i.e.

$$c_k = \frac{1}{\text{vol } \mathcal{A}_k} \int_{\mathcal{A}_k} xp(x)dx = E\{x \mid x \in \mathcal{A}_k\}. \quad (6.36)$$

*Algoritmul Lloyd generalizat* este versiunea multidimensională a algoritmului Lloyd-Max. Structura algoritmului este identică cu cea din cazul scalar. Prezentăm aici versiunea pentru cazul în care se cunoaște mulțimea  $\mathcal{X}$  conținând  $M$  eșantioane ale intrării (i.e. lucrăm cu o densitate de probabilitate empirică).

0. Se dau  $M$  eșantioane ale semnalului de intrare,  $x_\ell$ ,  $\ell = 1 : M$ . Se alege un dicționar inițial  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_N\}$ .
1. Se stabilesc celulele Voronoi discrete

$$\mathcal{A}_k = \{x_\ell \in \mathcal{X}, \ell = 1 : M \mid \|x_\ell - c_k\| \leq \|x_\ell - c_i\|, i = 1 : N, i \neq k\}. \quad (6.37)$$

2. Se recalculează codurile  $c_k$ ,  $k = 1 : N$ , ca fiind centrele de masă ale celulelor Voronoi

$$c_k = \frac{1}{|\mathcal{A}_k|} \sum_{x_\ell \in \mathcal{A}_k} x_\ell. \quad (6.38)$$

(Reamintim că  $|\mathcal{A}_k|$  este numărul de elemente al mulțimii  $\mathcal{A}_k$ .)

3. Se repetă pașii 1 și 2 până când distorsiunea

$$D = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N \sum_{x_\ell \in \mathcal{A}_k} \|x_\ell - c_k\|^2 \quad (6.39)$$

nu mai scade semnificativ.

Ca și în cazul scalar, algoritmul converge, dar șansa de a se termina într-un minim local este mult mai mare. Între diversele versiuni de implementare, algoritmul Linde-Buzo-Gray este cel mai faimos. Se pornește cu un număr mic de coduri, iar celulele Voronoi cu multe elemente sunt ”sparte” în două pe măsură ce iterațiile avansează.

### Ghid Matlab

Pentru desenarea celulelor Voronoi asociate unui dicționar în  $\mathbb{R}^2$  (ca în figura 6.7) se folosește apelul

```
>> voronoi(cx, cy)
```

Vectorii `cx` și `cy` (de aceeași dimensiune) conțin coordonatele codurilor.



## Anexa A

# Semnale și sisteme analogice

În această anexă, prezentăm pe scurt definiții și proprietăți de bază ale semnalelor și sistemelor analogice (care funcționează în timp continuu). Prezentarea urmează același curs ca în capitolele dedicate semnalelor și sistemelor discrete.

### A.1 Semnale analogice

**Definiția A.1** *Un semnal analogic este o funcție  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Notăm  $x(t)$  valoarea semnalului în momentul  $t \in \mathbb{R}$ . Aceeași notație este folosită pentru întreg semnalul.*

**Definiția A.2** *Semnalul  $x(t)$  este absolut sumabil dacă*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty.$$

**Definiția A.3** *Semnalul  $x(t)$  are energie finită dacă*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty.$$

**Definiția A.4** *Convoluția semnalelor  $x(t)$ ,  $y(t)$  este semnalul*

$$x(t) * y(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau. \quad (\text{A.1})$$

**Definiția A.5** *Transformata Fourier a unui semnal analogic  $x(t)$  este funcția  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$*

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt. \quad (\text{A.2})$$

*Notăm pe scurt  $X(\Omega) = TF(x(t))$ .*

Folosim și notația  $X(j\Omega)$  cu aceeași semnificație ca  $X(\Omega)$ . În general,  $X(\Omega)$  nu este o funcție periodică.

**Propoziția A.6** Dacă semnalul  $x(t)$  este absolut sumabil, atunci  $X(\Omega)$  din (A.2) există pentru orice  $\Omega$ . (Mai mult, seria (A.2) converge uniform către o funcție continuă în  $\Omega$ .)

**Propoziția A.7** Dacă  $x(t)$  este un semnal de energie finită, atunci seria (A.2) converge (i.e. transformata Fourier există) aproape peste tot. Mai precis, fie

$$X_M(\Omega) = \int_{-M}^M x(t) e^{-j\Omega t} dt. \quad (\text{A.3})$$

Atunci avem

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\Omega) - X_M(\Omega)|^2 d\Omega = 0, \quad (\text{A.4})$$

adică "energia" erorii de aproximare a lui  $X(\Omega)$  prin  $X_M(\Omega)$  tinde spre zero, dar eroarea nu se anulează neapărat peste tot.

**Teorema A.8** Transformata Fourier inversă, care asociază unei funcții  $X(\Omega)$  semnalul  $x(t)$  (a căru transformată Fourier este  $X(\Omega)$ ) este

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega. \quad (\text{A.5})$$

**Teorema A.9 (Parseval)** Fie  $x(t)$ ,  $y(t)$  două semnale discrete ale căror TF sunt  $X(\Omega)$ , respectiv  $Y(\Omega)$ . Atunci are loc egalitatea

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) Y^*(\Omega) d\Omega. \quad (\text{A.6})$$

Punând  $y(t) = x(t)$  în (A.6) se obține egalitatea (numită de obicei teorema lui Parseval)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\Omega)|^2 d\Omega. \quad (\text{A.7})$$

**Teorema A.10 (Convoluție)** Prin transformata Fourier, convoluția a două semnale este transformată în produs al transformatelor Fourier, i.e.

$$TF(x(t) * y(t)) = X(\Omega) \cdot Y(\Omega). \quad (\text{A.8})$$

**Definiția A.11** Transformata Laplace (bilaterală) a unui semnal  $x(t)$  este funcția  $X : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt. \quad (\text{A.9})$$

Folosim și notația  $X(s) = TL(x(t))$ .

Observăm că transformata Fourier (A.2) este un caz particular al transformatei Laplace, pentru  $s = j\Omega$ . Notăția  $X(j\Omega)$  pentru transformata Fourier subliniază această legătură.

**Teorema A.12 (Convoluție)** Prin transformata Laplace, convoluția a două semnale este transformată în produs al transformatelor Laplace, i.e.

$$TL(x(t) * y(t)) = X(s) \cdot Y(s). \quad (\text{A.10})$$

## A.2 Sisteme analogice

Un sistem (filtru) analogic  $\mathcal{S}$  transformă un semnal de intrare  $x(t)$  într-un semnal de ieșire  $y(t) = \mathcal{S}\{x(t)\}$ .

**Definiția A.13 (Liniaritate)** *Un sistem  $\mathcal{S}$  este liniar dacă pentru orice semnale de intrare  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  și orice scalari  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  are loc egalitatea*

$$\mathcal{S}\{\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)\} = \alpha_1 \mathcal{S}\{x_1(t)\} + \alpha_2 \mathcal{S}\{x_2(t)\}. \quad (\text{A.11})$$

**Definiția A.14 (Invariantă în timp)** *Sistemul  $\mathcal{S}$  este invariant în timp dacă pentru orice semnal de intrare  $x(t)$ , cu ieșirea corespunzătoare  $y(t) = \mathcal{S}\{x(t)\}$ , și orice întârziere  $t_0 \in \mathbb{R}$ , aplicând semnalul  $x(t - t_0)$  la intrarea sistemului se obține ieșirea  $y(t - t_0)$ .*

**Definiția A.15 (Cauzalitate)** *Sistemul  $\mathcal{S}$  este cauzal dacă, luând orice semnal de intrare  $x(t)$ , cu ieșirea corespunzătoare  $y(t) = \mathcal{S}\{x(t)\}$ , pentru orice  $t_0 \in \mathbb{R}$ , valoarea  $y(t_0)$  depinde doar de intrările  $x(t)$ ,  $t \leq t_0$ .*

**Definiția A.16 (Stabilitate)** *Sistemul  $\mathcal{S}$  este stabil în sens BIBO dacă, pentru orice semnal de intrare  $x(t)$  mărginit, în sensul că există  $M_x$  astfel încât  $|x(t)| \leq M_x$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ , semnalul de ieșire  $y(t) = \mathcal{S}\{x(t)\}$  este și el mărginit, i.e. există  $M_y$  astfel încât  $|y(t)| \leq M_y$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ .*

În continuare discutăm doar despre sisteme liniare și invariante în timp (LIT). Fie  $\mathcal{S}$  un sistem LIT și  $h(t) = \mathcal{S}\{\delta(t)\}$  răspunsul la impuls al sistemului. Notăm  $\delta(t)$  impulsul unitate (Dirac), care are proprietatea remarcabilă că, pentru orice semnal  $x(t)$ , are loc egalitatea

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau. \quad (\text{A.12})$$

**Propoziția A.17** *Fie  $\mathcal{S}$  un sistem și  $x(t)$  un semnal de intrare oarecare. Atunci ieșirea  $y(t) = \mathcal{S}\{x(t)\}$  este dată de relația*

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) h(\tau) d\tau \quad (\text{A.13})$$

adică este convoluția dintre semnalul de intrare și răspunsul la impuls al sistemului.

**Propoziția A.18** *Un sistem LIT este cauzal dacă și numai dacă răspunsul său la impuls este nul pentru timp negativ, i.e.  $h(t) = 0$  pentru  $t < 0$ .*

**Propoziția A.19** *Un sistem LIT este stabil dacă și numai dacă răspunsul său la impuls este absolut sumabil.*

**Definiția A.20** *Funcția de transfer a unui sistem LIT este transformata Laplace a răspunsului său la impuls*

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt. \quad (\text{A.14})$$

**Propoziția A.21** Fie  $X(s)$ ,  $Y(s)$  transformatele Laplace ale semnalelor de intrare, respectiv ieșire ale unui sistem LIT cu funcția de transfer  $H(s)$ . Atunci este adevărată relația

$$Y(s) = H(s)X(s). \quad (\text{A.15})$$

Din punct de vedere practic, cele mai importante funcții de transfer au formă rațională, i.e.

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\sum_{n=0}^M b_n s^n}{\sum_{n=0}^N a_n s^n}. \quad (\text{A.16})$$

Funcțiile de transfer cauzale (realizabile fizic) satisfac relația  $M \leq N$ .

**Propoziția A.22** Un sistem cu funcția de transfer  $H(s)$  este stabil dacă toți polii săi (rădăcinile numitorului) au parte reală negativă.

**Propoziția A.23** Considerăm un sistem LIT stabil, al cărui răspuns la impuls este  $h(t)$ . Fie  $H(s)$  funcția sa de transfer și  $H(j\Omega)$  transformata Fourier a răspunsului la impuls. Dacă la intrarea sistemului se aplică semnalul sinusoidal complex  $x(t) = e^{j\Omega_0 t}$ , atunci ieșirea este semnalul sinusoidal

$$y(t) = H(j\Omega_0)e^{j\Omega_0 t} = |H(j\Omega_0)|e^{j(\Omega_0 t + \arg H(j\Omega_0))}. \quad (\text{A.17})$$

Transformata Fourier  $H(j\Omega)$  a răspunsului la impuls a unui sistem se numește *răspuns în frecvență* al sistemului.