LUCRARE DE LABORATOR #2

- BREVIAR TEORIA PROBABILITATILOR
- CANTITATEA DE INFORMATIE
- CANALE DISCRETE DE COMUNICATIE

1. BREVIAR TEORIA PROBABILITATILOR

Se considera spatiul experimentului, notat *S*, ca fiind multimea tuturor rezultatelor (outcomes) posibile ale experimentului. Submultimile lui *S* (elementele lui *P(S)*) se numesc evenimente. Se numeste proba (trial), efectuarea o singura data a unui experiment bine definit. In urma experimentului se obtine o singura realizare (event) ξ . Se spune ca s-a produs evenimentul *A* daca $\xi \in A(A \in P(S))$.

Evenimente importante

S - evenimentul sigur (cert)

Φ - evenimentul imposibil

Exista si evenimente elementare pentru care $A = \{\xi\}$

Teoria (axiomatica) a probabilitatilor asigneaza fiecarui eveniment *A* un numar *P(A)* cuprins intre 0 si 1, numit probabilitatea evenimentului *A*. Acest numar ofera o masura a sansei de aparitie a lui *A*. Probabilitatea evenimentui *A* verifica urmatoarele axiome (dar este in rest neprecizata).

(i) $P(A) \geq 0$

(ii) $P(S) = 1$

(iii) evenimentele mutual exclusive $A \cap B = \Phi \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

(iv) aditivitatea infinita

$$A_i \cap A_j = \Phi \quad i \neq j \quad i, j = 1, \ldots, n, \ldots \quad \Rightarrow P(A_1 + \ldots + A_n + \ldots) = P(A_1) + \ldots + P(A_n) + \ldots$$

Corolare

(i) $P(\Phi) = 0$

(ii) $P(A) = 1 - P(\overline{A}) \leq 1$

(iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$

Observatie

$\overline{A}$ - multimea complementara multimii *A* fata de *S*.

Probabilitatea conditionata

Probabilitatea conditonata a evenimentui *A* fata de *B* (sau a evenimentului *A* fiind dat evenimentul *B*) este

$$P\left(A \middle| B\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{daca } P(B) > 0$$

Observatii

(a) daca $A \cap B = \Phi \quad \Rightarrow \quad P\left(A \middle| B\right) = 0$

(b) daca $A \subset B \quad \Rightarrow \quad A \cap B = A \quad \Rightarrow \quad P\left(A \middle| B\right) = \dfrac{P(A)}{P(B)} \geq P(A)$

(c) daca $B \subset A \quad \Rightarrow \quad A \cap B = B \quad \Rightarrow \quad P\left(A \middle| B\right) = 1$

(d) definitia probabilitatii conditionate poate fi rescrisa

$$P(A \cap B) = P\left(A \middle| B\right) P(B) \qquad P(B) > 0$$

sau

$$P(A \cap B) = P\left(B \middle| A\right) P(A) \qquad P(A) > 0$$

Aceasta constituie regula de inlantuire care poate fi generalizata

$$P(A \cap A \cap \ldots A) = P\left(A_1 \middle| (A_2 \cap \ldots \cap A_n)\right) \cdot P\left(A_2 \middle| (A_3 \cap \ldots \cap A_n)\right) \cdot \ldots \cdot P\left(A_{n-1} \middle| A_n\right) P(A_n)$$

(e) $P\left(A \middle| B\right) = \dfrac{P\left(B \middle| A\right) \cdot P(A)}{P(B)}$

Evenimente independente

Evenimentele *A* si *B* sunt denumite evenimente independente daca si numai daca

$$P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

Se observa ca pentru doua evenimente independente $P\left(A \middle| B\right) = P(A)$ si $P\left(B \middle| A\right) = P(B)$ care justifica denumirea. Pentru ca 3 evenimente *A,B,C* sa fie independente este necesar si suficient ca

$$P(A \cap B) = P(A) P(B)$$
$$P(A \cap C) = P(A) P(C)$$
$$P(B \cap C) = P(B) P(C) \qquad \text{si}$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A) P(B) P(C)$$

Proprietatile evenimentelor independente

(i) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) P(B)$

(ii) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) P(\overline{B})$

Evenimente mutual exclusive

Evenimentele $A_i \quad (A_i \subset S \; , i = 1,2,\ldots)$ sunt denumite mutual exclusive daca si numai daca $A_i \cap A_j = \Phi \qquad \forall A_i \; , A_j \subset S \quad i \neq j$.

Proprietatile evenimentelor mutual exclusive

(i) $$P\left(\bigcup_i A_i\right)\sum_i P(A_i)$$

Observatie

Aceasta proprietate este valabila si pentru un numar infinit de evnimente

(ii) $P(A_i)=\sum_{j=1}^{m} P\left(A_i \cap B_j\right)$ daca evenimentele B_j $j=1,\dots,m$ sunt mutual exclusive.

(iii) $1=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P\left(A_i \cap B_j\right)$ daca evenimentele A_i , B_j $i=1,\dots,n$; $j=1,\dots,m$ sunt mutual exclusive.

(iv) **probabilitatea totala** $P(B)=P\left(B\middle|A_1\right)P(A_1)+\dots+P\left(B\middle|A_n\right)P(A_n)$ daca A_i $i=1,\dots,n$ sunt mutual exclusive si daca $B\subset\bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

2. CANTITATEA DE INFORMATIE

Conceptia Shannon pleaca de la premiza ca orice informatie cu privire la un eveniment este utilizata in scopul reducerii gradului de incertitudine asupra realizarii acelui eveniment. Din punctul de vedere al destinatarului, comunicatia este o variabila aleatoare, continutul informational fiind cu atat mai mare cu cat el se asteapta mai putin la realizarea acelui eveniment.

Fie o sursa discreta care emite unul dintre cele q mesaje $m_1, m_2, \dots, m_q$ cu probabilitatile de aparitie $p_1, p_2, \dots, p_q$. Este evident ca probabilitatile satisfac relatia $p_1+p_2+\dots+p_q=1$. Continutul informational al mesajului k este notat cu $I(m_k)$. Pentru ca acest continut sa fie o masura adecvata a cantitatii de informatie este necesara satisfacerea urmatoarelor proprietati :

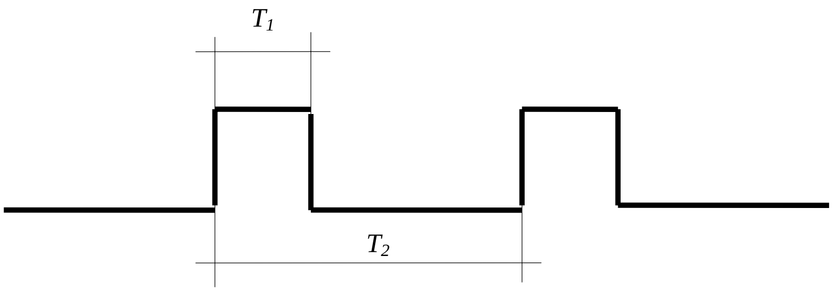
(i) daca $p_k<p_j \quad\Rightarrow\quad I(m_k)>I(m_j)$
(ii) daca $p_k\to 1 \quad\Rightarrow\quad I(m_k)\to 0$
(iii) daca $0\le p_k\le 1 \quad\Rightarrow\quad I(m_k)\ge 0$
(iv) (aditivitatea) daca m_k si m_j sunt mesaje independente $\Rightarrow\quad I(m_k \text{ si } m_j)=I(m_k)+I(m_j)$

O functie continua de variabila p_k care satisface proprietatile (i)-(iv) este functia logaritmica.

$$I(m_k)=\log\frac{1}{p_k}=-\log p_k$$

Daca baza logaritmului este 2, unitatile de masura sunt biti (informationali).

Pentru cazul simplu al unei transmiteri seriale asincrone



se definesc

(a) rata de biti=(durata unui bit)$^{-1}$ =1/T_2 exprimata in biti/secunda (abreviat bps).

(b) rata de bauds=(durata minima intre doua modificari ale semnalului) =1/T_1 exprimata in bauds.

Problema 1

Se considera o trasmisie fax : 2,25·10^6 pixeli cu 12 tonuri de gri, echiprobabile. Care este cantitatea de informatie transmisa ?

Solutie

I=nr.elemente · informatie per element=

$$= 2{,}25\cdot 10^6 \cdot \left[-\log_2 \frac{1}{12}\right] = 2{,}25\cdot 10^6 \cdot \log_2 2^2 \cdot 3 = 2{,}25\cdot 10^6 \left(2 + \log_2 3\right) \quad [\text{biti}]$$

Problema 2

Un display monocolor cu 24 linii
80 caractere/linie
128 puncte/caracter
3 tonuri de gri/punct

(a) Care este cantitatea de informatie pe pixel, caracter, ecran ?
(b) Care este debitul de informatie stiind ca frecventa cadrelor este de 24 cadre/secunda ?

Solutie

(a) $I = 24 \cdot 80 \cdot 128 \cdot \log_2 3 \quad [\text{biti}]$

(b) $\tau = \dfrac{1}{f_c}$

$$R = \frac{I}{\tau} = I \cdot f_c \quad [\text{bps}]$$

Problema 3

Un echipament de teletransmisie genereaza cuvinte constituite dintr-un grup de 4 impulsuri de tensiune care pot avea nivelurile 0,1,2 sau 3 volti (echiprobabile) urmate de un impuls de pauza de nivel -1 volt. Durata tuturor impusurilor este de 1 ms.
(a) Care este debitul de informatie ?
(b) Care este rata de bauds ?

Solutie

(a) $R = \dfrac{I}{\tau} = \dfrac{4\log_2 4}{5\cdot 10^{-3}} = 1{,}6 \quad [\text{kbps}]$

(b) $r_{\text{bauds}} = \dfrac{1}{10^{-3}} = 10^3\,[\text{baud}] = 1\,[\text{kbaud}]$

Problema 4

Fie 12 monede dintre care una este falsa (mai usoara sau mai grea decat celelalte). Se cere sa se deterrmine numarul minim de cantariri necesar depistarii monedei false si precizarii daca ea este mai usoara sau mai grea. Se foloseste pentru cantariri o balanta fara mase marcate.

Solutie

- cantitatea de informatie necesara determinarii monedei false este $I_1 = \log_2 \dfrac{1}{\frac{1}{12}} = \log_2 12$
- cantitatea de informatie necesara pentru a decide daca moneda este mai grea sau mai usoara este $I_2 = \log_2 \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = \log_2 2$
- cantitatea de informatie totala necesara a fi determinata $I = I_1 + I_2 = \log_2 24$
- cantitatea de informatie furnizata de o cantarire (exista 3 stari ale balantei) $I_3 = \log_2 \dfrac{1}{\frac{1}{3}} = \log_2 3 \;\Rightarrow\;$ numarul minim de cantariri $I \le kI_3 \;\Rightarrow\; 24 \le 3^k \;\Rightarrow\; k = 3$.
- sa se propuna un algoritm de depistare.

Problema 5

Sa se reia problema # 3 daca probabilitatile de aparitie a nivelurilor sunt
nivel 0: 1/2
nivel 1:1/4
nivel 2:1/8
nivel 3:1/8

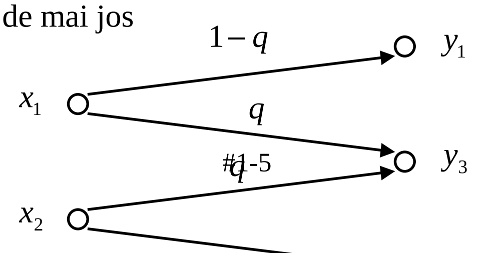
Solutie

$$R = r \cdot H = \frac{1}{5\cdot 10^{-3}} \cdot \left[-\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - 2\cdot\frac{1}{8}\log\frac{1}{8} \right]$$

Se reaminteste ca entropia unei surse reprezinta numarul mediu de biti/simbol si ca entropia este maxima pentru o sursa care genereaza simboluri echiprobabile $H_{\max} = \log_2 n$.

Problema 6

Sa se determine capacitatea unui canal binar cu zona de anulare avand graful asociat matricei de tranzitie din figura de mai jos



Solutie

Acest model descrie un canal care perturba simbolurile unei surse binare in masura in care la receptie sa poata fi interpretate ca fiind incerte.

Metoda scalara

$$C = \max_{p(x_i)}\left[H(Y) - H\left(Y|X\right)\right]$$

$$H(Y) = -\sum_{i=1}^{3} p(y_i)\log p(y_i)$$

$$p(y_1) = p\left(y_1|x_1\right)p(x_1) + p\left(y_1|x_2\right)p(x_2) = p\left(y_1|x_1\right)p(x_1) = (1-q)\,p(x_1)$$

S-a utilizat formula probabilitatii totale, evenimentele x_1, x_2 fiind mutual exclusive.
Analog se poate scrie

$$p(y_2) = (1-q)\,p(x_2)$$

$$p(y_3) = p\left(y_3|x_1\right)p(x_1) + p\left(y_3|x_2\right)p(x_2) = q\left(p(x_1) + p(x_2)\right) = q\cdot 1 = q \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} H(Y) &= -\left[(1-q)\,p(x_1)\log(1-q)\,p(x_1) + q\log q + (1-q)\,p(x_2)\log(1-q)\,p(x_2)\right] = \\ &= -(1-q)\left[p(x_1)\log p(x_1) + p(x_2)\log p(x_2)\right] - (1-q)\log(1-q) - q\log q = \\ &= (1-q)\,H(X) - (1-q)\log(1-q) - q\log q \end{aligned}$$

$$H\left(Y|X\right) = -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} p(x_i, y_j)\log p\left(y_j|x_i\right)$$

Conform regulii de inlantuire

$$p(x_i, y_j) = p\left(y_j|x_i\right)p(x_i)$$

Din graf se deduce ca

$$\begin{aligned} p\left(y_1|x_1\right) &= 1-q & \qquad p\left(y_1|x_2\right) &= 0 \\ p\left(y_2|x_1\right) &= 0 & \qquad p\left(y_2|x_2\right) &= q \\ p\left(y_3|x_1\right) &= q & \qquad p\left(y_3|x_2\right) &= 1-q \end{aligned}$$

Se obtine

$$H\left(Y|X\right) = -(1-q)\log(1-q) - q\log q$$

$$C = (1-q)\max_{p(x_i)} H(X) = (1-q)\cdot 1 = 1-q$$

pentru setul optim de probabilitate la intrare $p_0(x_1) = p_0(x_2) = 1$.

Metoda matriciala

Se considera sursa care genereaza un alfabet de simboluri x_i , $i = 1,\dots,n$ si la destinatie se receptioneaza un alfabet de simboluri y_j , $j = 1,\dots,m$.
Se pot scrie urmatoarele relatii:

$$P(Y) = P(X)\cdot P\left(Y|X\right)$$

unde $P(X)$ este matricea linie a sursei $(1\times n)$;
$P(Y)$ este matricea linie a destinatiei $(1\times m)$;
$P\left(Y|X\right)$ este matricea dreptunghiulara de zgomot $(n\times m)$.

Observatie

In matricea de tranzitie (zgomot) liniile sunt asociate intrarilor iar coloanele sunt asociate iesirilor.
Matricea campurilor reunite (joint) este

$$P(X,Y) = \begin{bmatrix} p(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p(x_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & p(x_n) \end{bmatrix} P\left(Y|X\right)$$

Matricea de zgomot $P\left(Y|X\right)$ se poate obtine prin impartirea fiecarei linii *i* prin $p(x_i)$.
Matricea de echivocatie $P\left(X|Y\right)$ se poate obtine prin impartirea fiecarei coloane *j* prin $p(y_j)$.

Problema 7

Fie matricea de tranzitie $P\left(Y|X\right) = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$ si $p(x_1)$=3/4 si $p(x_2)$=1/4.

Se cere sa se calculeze
(a) entropia campului de intrare
(b) entropia campului de iesire
(c) entropia campurilor reunite
(d) eroarea medie
(e) echivocatia
(f) transinformatia
(g) capacitatea canalului si setul optim la intrare
(h)eficienta si redundanta relativa a canalului

Solutie

(a) $$H(X) = -\sum_{i=1}^{2} p(x_i)\log p(x_i) = -\left(\frac{3}{4}\log\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\log\frac{1}{4}\right) = 2 - \frac{3}{4}\log 3 \cong 0{,}81 \text{ bit / simbol}$$

(b) $$H(Y) = -\sum_{j=1}^{2} p(y_j)\log p(y_j)$$

$$P(Y) = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/12 & 5/12 \end{bmatrix}$$

$$H(Y) = -\left(\frac{7}{12}\log\frac{7}{12} + \frac{5}{12}\log\frac{5}{12}\right) = 0{,}98 \text{ bit / simbol}$$

(c) $$H\left(X\middle|Y\right) = -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p(x_i, y_j)\log p\left(x_i\middle|y_j\right)$$

$$P(X,Y) = \begin{bmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/12 & 1/6 \end{bmatrix}$$

$$H(X,Y) = -\left(\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\log\frac{1}{12} + \frac{1}{6}\log\frac{1}{6}\right) = 1{,}73 \text{ bit / simbol}$$

(d) $$H\left(Y\middle|X\right) = -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p(x_i, y_j)\log p\left(y_j\middle|x_i\right) = 0{,}92 \text{ bit / simbol}$$

sau $$H\left(Y\middle|X\right) = H(X,Y) - H(X)$$

(e) $$H\left(X\middle|Y\right) = -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p(x_i, y_j)\log p\left(x_i\middle|y_j\right)$$

unde

$$P\left(X\middle|Y\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{12}} & \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{12}} \\[2ex] \dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{7}{12}} & \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{12}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{7} & \frac{3}{5} \\[1ex] \frac{1}{7} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

si $$H\left(X\middle|Y\right) = -\left(\frac{1}{2}\log\frac{6}{7} + \frac{1}{4}\log\frac{3}{5} + \frac{1}{12}\log\frac{1}{7} + \frac{1}{6}\log\frac{2}{5}\right) = 0{,}75 \text{ bit / simbol}$$

sau $$H\left(X\middle|Y\right) = H(X,Y) - H(Y)$$

(f) $$I(X,Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y) = 0{,}06 \text{ bit / simbol}$$

(g) canalul fiind dublu uniform

$$C = \log 2 + \left(1 - \frac{1}{3}\right)\log\left(1 - \frac{1}{3}\right) + (2-1)\frac{1}{3}\log\frac{1}{3} = 0{,}082 \text{ bit / simbol}$$

Setul optim $p_0(x_1)$, $p_0(x_2)$ se obtine din

$$C = \max_{p_0(x_i)}\left[H(Y) - H\left(Y|X\right)\right]$$

$$p(y_1) = \frac{2}{3}p_0(x_1) + \frac{1}{3}p_0(x_2)$$

$$p(y_2) = \frac{1}{3}p_0(x_1) + \frac{2}{3}p_0(x_2)$$

$$H\left(Y|X\right) = -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p(x_i, y_j)\log p\left(y_j|x_i\right) = -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p\left(y_j|x_i\right)p_0(x_i)\log p\left(y_j|x_i\right) =$$
$$= -\left[\frac{2}{3}\log\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\log\frac{1}{3}\right]\left(p_0(x_1) + p_0(x_2)\right) = -\left[\frac{2}{3}\log\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\log\frac{1}{3}\right]$$

deci $H\left(Y|X\right)$ nu depinde de $P(X) \Rightarrow$ $C = \max_{p_0(x_i)} H(Y) + \left[\frac{2}{3}\log\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\log\frac{1}{3}\right]$

dar $\max_{p_0(x_i)} H(Y) = \log 2 = 1 \Leftrightarrow p(y_1) = p(y_2) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow$

$$\begin{cases} p(y_1) = p\left(y_1|x_1\right)p_0(x_1) + p\left(y_1|x_2\right)p_0(x_2) \\ p(y_2) = p\left(y_2|x_1\right)p_0(x_1) + p\left(y_2|x_2\right)p_0(x_2) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $p_0(x_1) = p_0(x_2) = \frac{1}{2}$.

Observatie

Se mai poate utiliza si relatia $p_0(x_1) + p_0(x_2) = 1$

(h) $\eta(C) = \dfrac{I(X,Y)}{C} = 0{,}73$

$$R(C) = C - I(X,Y) = 0{,}022 \text{ bit / simbol}$$

Problema 8

Fie un canal binar simetric avand matricea campurilor reunite $P(X,Y)=\begin{bmatrix} 0{,}4 & ? \\ ? & 0{,}4 \end{bmatrix}$ si pentru care sursa genereaza simboluri echiprobabile.

(a) Calculati matricea $P(X,Y)$.

(b) Calculati matricea de zgomot.

(c) Calculati transinformatia.

Solutie

(a) canalul fiind simetric $\Rightarrow p(x_2,y_1)=p(x_1,y_2)$ si folosind proprietatea (iii) a evenimentelor mutual exclusive se obtine $p(x_1,y_1)+2p(x_1,y_2)+p(x_2,y_2)=1 \quad \Rightarrow \quad p(x_1,y_2)=0{,}1$ si

$$P(X,Y)=\begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}4 \end{bmatrix}.$$

(b) $$P(Y|X)=\begin{bmatrix} \frac{0{,}4}{1/2} & \frac{0{,}1}{1/2} \\ \frac{0{,}1}{1/2} & \frac{0{,}4}{1/2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix}$$