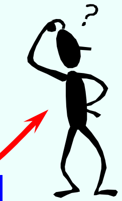
❶❺ Problema estimării spectrale

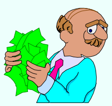
- Se evaluează **dispersia** densității spectrale de putere estimate.

Se va evalua **funcţia de autocovarianţă** a densității spectrale de putere estimate, în vederea utilizării acestui rezultat general şi în alte evaluări.



$$E\left\{\hat{\Phi}_x(\omega)\hat{\Phi}_x(\mu)\right\}=E\left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{p\in\mathbb{Z}}\hat{r}_x[k]\hat{r}_x[p]\,e^{-j(\omega k+\mu p)}\right\}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{p\in\mathbb{Z}}\boxed{E\left\{\hat{r}_x[k]\hat{r}_x[p]\right\}}\,e^{-j(\omega k+\mu p)}$$

$\forall\,\omega,\mu\in\mathbb{R}$



Statistică

$$E\{v_1v_2v_3v_4\}=E\{v_1v_2\}E\{v_3v_4\}+E\{v_1v_3\}E\{v_2v_4\}+E\{v_1v_4\}E\{v_2v_3\}$$

(media produsului a 4 variabile aleatoare)

$$E\left\{\hat{r}_x[k]\hat{r}_x[p]\right\}=\frac{1}{N^2}E\left\{\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}x[n]x[n-k]x[m]x[m-p]\right\}=\frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}E\left\{x[n]x[n-k]x[m]x[m-p]\right\}=$$

autocovarianţa autocovarianţei estimate

$$=\frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}\underbrace{E\{x[n]x[n-k]\}}_{r_x[k]}\underbrace{E\{x[m]x[m-p]\}}_{r_x[p]}+\frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}\underbrace{E\{x[n]x[m]\}}_{r_x[n-m]}\underbrace{E\{x[n-k]x[m-p]\}}_{r_x[n-m-k+p]}+$$

$$+\frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}\underbrace{E\{x[n]x[m-p]\}}_{r_x[n-m+p]}\underbrace{E\{x[m]x[n-k]\}}_{r_x[m-n+k]}=$$

rearanjare de termeni

$$=\frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}r_x[k]r_x[p]+\frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}r_x[n-m+k]r_x[n-m+p]+$$

simetrie

$$+\frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}r_x[n-m+p]r_x[n-m-k]\,,\quad\forall\,k,p\in\mathbb{Z}.$$

❶❺ Problema estimării spectrale

- Continuă evaluarea **autocovarianţei** densităţii spectrale de putere estimate.

autocovarianţa autocovarianţei estimate

$$E\{\hat{r}_x[k]\hat{r}_x[p]\} = \underbrace{\frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} r_x[k]r_x[p]}_{r_x[k]r_x[p]} + \frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} r_x[n-m+k]r_x[n-m+p] +$$

schimbare de indice

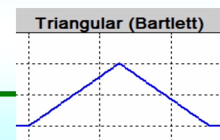
$$l = n-m \in \overline{1-N, N-1}$$

$$+\frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} r_x[n-m+p]r_x[n-m-k] =$$

Pentru l constant, în cele două sume există $(N-|l|)$ termeni identici.

$$= r_x[k]r_x[p] + \frac{1}{N}\sum_{l=1-N}^{N-1}\underbrace{\left(1-\frac{|l|}{N}\right)}_{w_{\Delta,N}[l]} r_x[l+k]r_x[l+p] + \frac{1}{N}\sum_{l=1-N}^{N-1}\underbrace{\left(1-\frac{|l|}{N}\right)}_{w_{\Delta,N}[l]} r_x[l-k]r_x[l+p],$$

$$\forall k,p \in \mathbb{Z}.$$



Aşadar

$$E\{\hat{r}_x[k]\hat{r}_x[p]\} = r_x[k]r_x[p] + \frac{1}{N}\sum_{l=1-N}^{N-1} w_{\Delta,N}[l]r_x[l+k]r_x[l+p] + \frac{1}{N}\sum_{l=1-N}^{N-1} w_{\Delta,N}[l]r_x[l-k]r_x[l+p]$$

$$\forall k,p \in \mathbb{Z}$$

autocovarianţa psd estimate

$$E\{\hat{\Phi}_x(\omega)\hat{\Phi}_x(\mu)\} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{p\in\mathbb{Z}} E\{\hat{r}_x[k]\hat{r}_x[p]\}e^{-j(\omega k+\mu p)} = \boxed{\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{p\in\mathbb{Z}} r_x[k]r_x[p]e^{-j(\omega k+\mu p)}} +$$

$$\Phi_x(\omega)\Phi_x(\mu)$$

schimbări de indici

$$l+k = n \Leftrightarrow k = n-l$$

$$l+p = m \Leftrightarrow p = m-l$$

$$l-k = n \Leftrightarrow k = l-n$$

$$+\frac{1}{N}\sum_{l=1-N}^{N-1} w_{\Delta,N}[l]\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{p\in\mathbb{Z}} r_x[l+k]r_x[l+p]e^{-j(\omega k+\mu p)} +$$

$$+\frac{1}{N}\sum_{l=1-N}^{N-1} w_{\Delta,N}[l]\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{p\in\mathbb{Z}} r_x[l-k]r_x[l+p]e^{-j(\omega k+\mu p)}, \quad \forall \omega,\mu \in \mathbb{R}.$$

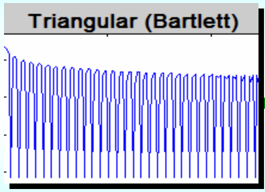
❶❺ Problema estimării spectrale

- Continuă evaluarea **autocovarianţei** densităţii spectrale de putere estimate.

autocovarianţa psd estimate

$$E\left\{\hat{\Phi}_x(\omega)\hat{\Phi}_x(\mu)\right\}=\Phi_x(\omega)\Phi_x(\mu)+\underbrace{\frac{1}{N}\sum_{l=1-N}^{N-1} w_{\Delta,N}[l]e^{+jl(\omega+\mu)}}_{\mathcal{W}_{\Delta,N}\left(e^{-j(\omega+\mu)}\right)}\underbrace{\sum_{n\in\mathbb{Z}} r_x[n]e^{-j\omega n}}_{\Phi_x(-\omega)=\Phi_x(\omega)}\underbrace{\sum_{m\in\mathbb{Z}} r_x[m]e^{-j\mu m}}_{\Phi_x(\mu)}+$$

(simetrie)



$$+\underbrace{\frac{1}{N}\sum_{l=1-N}^{N-1} w_{\Delta,N}[l]e^{-jl(\omega-\mu)}}_{\mathcal{W}_{\Delta,N}\left(e^{j(\omega-\mu)}\right)}\underbrace{\sum_{n\in\mathbb{Z}} r_x[n]e^{+j\omega n}}_{\Phi_x(\omega)}\underbrace{\sum_{m\in\mathbb{Z}} r_x[m]e^{-j\mu m}}_{\Phi_x(\mu)}=$$

$$=\Phi_x(\omega)\Phi_x(\mu)+\frac{1}{N}\mathcal{W}_{\Delta,N}\left(e^{-j(\omega+\mu)}\right)\Phi_x(\omega)\Phi_x(\mu)+\frac{1}{N}\mathcal{W}_{\Delta,N}\left(e^{j(\omega-\mu)}\right)\Phi_x(\omega)\Phi_x(\mu),$$

$$\forall\,\omega,\mu\in\mathbb{R}.$$

$$\mathcal{W}_{\Delta,N}(e^{j\omega})=\frac{\sin^2\frac{N\omega}{2}}{N\sin^2\frac{\omega}{2}}$$

$$E\left\{\hat{\Phi}_x(\omega)\hat{\Phi}_x(\mu)\right\}=\Phi_x(\omega)\Phi_x(\mu)\left[1+\left(\frac{\sin\frac{N(\omega+\mu)}{2}}{N\sin\frac{\omega+\mu}{2}}\right)^2+\left(\frac{\sin\frac{N(\omega-\mu)}{2}}{N\sin\frac{\omega-\mu}{2}}\right)^2\right]$$

$$\forall\,\omega,\mu\in\mathbb{R}$$

- Se evaluează **dispersia** densităţii spectrale de putere estimate.

$$\omega=\mu\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{\sin\frac{N\omega}{2}}{N\sin\frac{\omega}{2}}=1$$

$$E\left\{\hat{\Phi}_x^2(\omega)\right\}=\Phi_x^2(\omega)\left[2+\left(\frac{\sin(N\omega)}{N\sin\omega}\right)^2\right]$$

$$\forall\,\omega\in\mathbb{R}$$

În concluzie

$$E\left\{\hat{\Phi}_x(\omega)\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\Phi_x(\mu)\frac{\sin^2\frac{N(\omega-\mu)}{2}}{N\sin^2\frac{(\omega-\mu)}{2}}\,d\mu \quad \forall\,\omega\in\mathbb{R}$$

$$E\left\{\hat{\Phi}_x^2(\omega)\right\} = \Phi_x^2(\omega)\left[2+\left(\frac{\sin(N\omega)}{N\sin\omega}\right)^2\right] \quad \forall\,\omega\in\mathbb{R}$$

Variabilitatea spectrului estimat

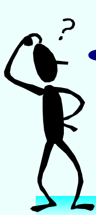
$$Q(\omega) \overset{def}{=} \frac{\left(E\left\{\hat{\Phi}_x(\omega)\right\}\right)^2}{\sigma^2_{\hat{\Phi}_x}(\omega)} \quad \forall\,\omega\in\mathbb{R}$$

(factor de calitate)

$$\sigma^2_{|X|^2}(\omega) = N^2\sigma^2_{\hat{\Phi}_x}(\omega) = N^2E\left\{\hat{\Phi}_x^2(\omega)\right\} - \left(N\cdot E\left\{\hat{\Phi}_x(\omega)\right\}\right)^2 =$$

$$= \Phi_x^2(\omega)\left[2N^2+\frac{\sin^2(N\omega)}{\sin^2\omega}\right] - \frac{1}{4\pi^2}\left(\int_{-\pi}^{+\pi}\Phi_x(\mu)\frac{\sin^2\frac{N(\omega-\mu)}{2}}{\sin^2\frac{(\omega-\mu)}{2}}\,d\mu\right)^2 \quad \forall\,\omega\in\mathbb{R}$$

Regularitatea spectrului estimat folosind TCFD



Cum poate fi estimtă regularitatea în practică ?

Înlocuind TCFD cu TFD.

Densitatea spectrală de putere estimată folosind TFD

$$\hat{\Phi}_x[k] = \frac{1}{N}\left|X[k]\right|^2 \quad \forall\,k\in\mathbb{Z}$$

$$\hat{\Phi}_x[k] \overset{def}{=} \mathcal{R}_N[k]\sum_{n=1-N}^{N-1}\hat{r}_x[n]\,w_N^{nk} \quad \forall\,k\in\mathbb{Z}$$

☝ **Rezoluția spectrului este limitată de ordinul TFD.**

$$\sigma^2_{|X|^2} \equiv N^2\sigma^2_{\hat{\Phi}_x}$$

Exercițiu

Exercițiu

- Reluați raționamentul anterior și deduceți expresia regularității spectrului estimat folosind **TFD**.

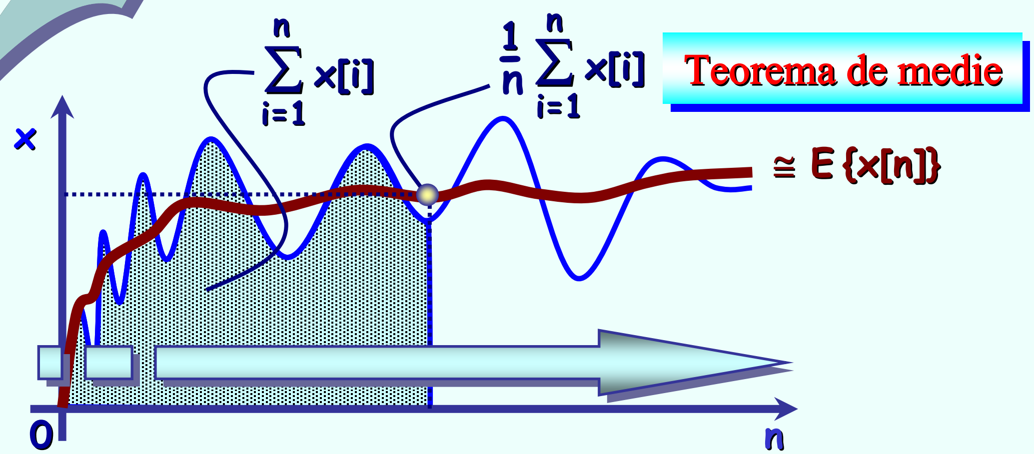
❶❻ Metode neparametrice de estimare spectrală

- Metodele din această categorie conduc la factori de calitate superiori celui din cazul utilizării TFD, pe baza operației de mediere.

Metodele care sunt descrise:
- ➔ Medierea periodogramelor: Metoda lui Bartlett (1948)
- ➔ Medierea îmbunătățită a periodogramelor: Metoda lui Welch (1967)
- ➔ Netezirea periodogramelor: Metoda lui Blackman & Tukey (1958)

Metoda lui Bartlett

Ideea lui Bartlett (1948) ➔ Media temporală constituie un instrument de atenuare a variaţiilor unei entităţi dinamice.



Spectrul poate fi estimat prin medierea periodogramelor obţinute după decuparea semnalului în segmente succesive disjuncte.

Preţul plătit: scăderea rezoluţiei spectrale.

Metoda lui Bartlett (continuare)

Algoritm

① Se exprimă durata semnalului sub formă compozită cu 2 factori.

$$N = P \cdot Q$$

P — factorul de netezire (numărul de periodograme mediate)

Q — rezoluția periodogramei

② Se segmentează semnalul original cu ajutorul unei colecții de ferestre dreptunghiulare cu suporturi succesive, disjuncte, de dimensiune **Q**.

indice de segment p

indice temporal q

x_0	x_1		x_p		x_{P-1}
x[0]	x[Q]	...	x[pQ]	...	x[(P-1)Q]
x[1]	x[Q+1]	...	x[pQ+1]	...	x[(P-1)Q+1]
...	...	...	...	...	...
x[q]	x[Q+q]	...	x[pQ+q]	...	x[(P-1)Q+q]
...	...	...	...	...	...
x[Q-1]	x[2Q-1]	...	x[(p+1)Q-1]	...	x[PQ -1]

Matricea este completată pe coloane.

☝ Segment de semnal temporal.

$$x_p \overset{def}{\equiv} x \cdot \left(q^{-pQ} \mathcal{R}_Q\right) \quad \forall\, p \in \overline{0, P-1}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$x_p[q] \overset{def}{=} x[pQ+q] \quad \forall\, q \in \overline{0, Q-1} \quad \forall\, p \in \overline{0, P-1}$$

Metoda lui Bartlett (continuare)

③ Se estimează periodogramele segmentelor de semnal cu ajutorul TCFD sau TFD_Q.

$$\hat{\Phi}_{x_p}(\omega) \stackrel{def}{=} \mathscr{F}(\hat{r}_{x_p})(e^{j\omega}) = \sum_{k=1-Q}^{Q-1} \hat{r}_{x_p}[k] e^{-j\omega k} \quad \forall\, \omega \in \mathbb{R} \quad \forall\, p \in \overline{0, P-1}$$

TCFD

$$\hat{\Phi}_{x_p}[k] \stackrel{def}{=} TFD_Q(\hat{r}_{x_p})[k] = \sum_{q=1-Q}^{Q-1} \hat{r}_{x_p}[q] w_Q^{qk} \quad \forall\, k \in \overline{0, Q-1} \quad \forall\, p \in \overline{0, P-1}$$

TFD_Q

④ Se estimează periodograma semnalului prin medierea periodogramelor segmentelor.

$$\hat{\Phi}^{P,Q}_{\Delta,x} \stackrel{def}{\equiv} \frac{1}{P} \sum_{p=0}^{P-1} \hat{\Phi}_{x_p}$$

Performanţele metodei

- ➔ Rezoluţia în frecvenţă în cazul utilizării TCFD: de P ori mai mică decît a periodogramei estimate direct.
- ➔ Rezoluţia în frecvenţă în cazul utilizării TFD: Q (de P ori mai mică decît a periodogramei estimate direct).
- ➔ Regularitatea spectrului estimat: de P ori mai mare decît a periodogramei estimate direct.

- Aceste performanțe sunt probate pentru TCFD prin raționamentul care urmează.
- Raționamentul se bazează pe o ipoteză naturală: segmentele succesive de semnal constituie realizări ale semnalului original, x.

$$r_{x_p}[k] = E\{x_p[q] x_p[q-k]\} = E\{x[pQ+q] x[pQ+q-k]\} = \\ = E\{x[n] x[n-k]\} = r_x[k] \quad \forall\, k \in \mathbb{Z} \quad \forall\, p \in \overline{0, P-1}$$

Metoda lui Bartlett (continuare)

Performanţele metodei (continuare)

- Se evaluează **media** periodogramei estimate (**TCFD**).

$$E\left\{\hat{\Phi}^{P,Q}_{\Delta,x}(\omega)\right\}=E\left\{\frac{1}{P}\sum_{p=0}^{P-1}\hat{\Phi}_{x_p}(\omega)\right\}=\frac{1}{P}\sum_{p=0}^{P-1}E\left\{\hat{\Phi}_{x_p}(\omega)\right\}\quad \forall\,\omega\in\mathbb{R}$$

$$r_{x_p}[k]=r_x[k]\quad \forall\,k\in\mathbb{Z}\quad \forall\,p\in\overline{0,P-1}$$

$$E\left\{\hat{r}_{x_p}[k]\right\}=\frac{Q-|k|}{Q}r_x[k]\quad \forall\,k\in\overline{1-Q,Q-1}\quad \forall\,p\in\overline{0,P-1}$$

$$E\left\{\hat{\Phi}_{x_p}(\omega)\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\Phi_x(\mu)\boxed{\frac{\sin^2\frac{Q(\omega-\mu)}{2}}{Q\sin^2\frac{(\omega-\mu)}{2}}}d\mu\quad \forall\,\omega\in\mathbb{R}\quad \forall\,p\in\overline{0,P-1}$$

$$\mathcal{W}_{\Delta,Q}\left(e^{j(\omega-\mu)}\right)$$

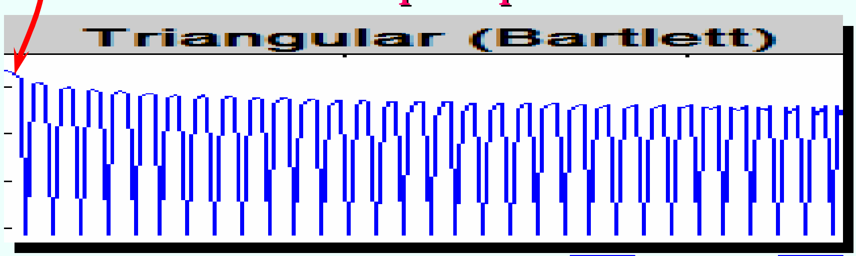
$$E\left\{\hat{\Phi}^{P,Q}_{\Delta,x}(\omega)\right\}=E\left\{\hat{\Phi}_{x_p}(\omega)\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\Phi_x(\mu)\,\mathcal{W}_{\Delta,Q}\left(e^{j(\omega-\mu)}\right)d\mu\quad \forall\,\omega\in\mathbb{R}\quad \forall\,p\in\overline{0,P-1}$$

$$E\left\{\hat{\Phi}_{x}(\omega)\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}R_x\left(e^{j\mu}\right)\mathcal{W}_{\Delta,N}\left(e^{j(\omega-\mu)}\right)d\mu\quad \forall\,\omega\in\mathbb{R}$$

Fereastra triunghiulară are deschidere de P ori mai mică, astfel că TF a sa are "deschidere" de P ori mai mare.

Rezoluţia în frecvenţă este de P ori mai mică, conform Principiului de incertitudine.

deschiderea lobului principal



- Pentru a evalua varianța periodogramei, se poate observa că segmentele succesive de semnal sunt **independente statistic**.

❶❻ Metode neparametrice de estimare spectrală

Metoda lui Bartlett (continuare)

Performanţele metodei (continuare)

- Se evaluează **varianţa** periodogramei estimate (**TCFD**).

Independenţă statistică ⇒ $E\{v_1 v_2\} = E\{v_1\}E\{v_2\}$

Exerciţiu

- Deduceţi expresia regularităţii periodogramei Bartlett folosind **TFD**.

$$\sigma^2_{\hat{\Phi}^{P,Q}_{\Delta,x}}(\omega) \overset{def}{=} E\left\{\left(\hat{\Phi}^{P,Q}_{\Delta,x}(\omega) - E\left\{\hat{\Phi}^{P,Q}_{\Delta,x}(\omega)\right\}\right)^2\right\} = E\left\{\frac{1}{P^2}\left(\sum_{p=0}^{P-1}\hat{\Phi}_{x_p}(\omega) - P\cdot E\left\{\hat{\Phi}_{x_0}(\omega)\right\}\right)^2\right\} =$$

se expandează binomul

$$= \frac{1}{P^2}E\left\{\sum_{p=0}^{P-1}\hat{\Phi}^2_{x_p}(\omega) + P^2\left(E\left\{\hat{\Phi}_{x_0}(\omega)\right\}\right)^2 - 2PE\left\{\hat{\Phi}_{x_0}(\omega)\right\}\sum_{p=0}^{P-1}\hat{\Phi}_{x_p}(\omega) + 2\sum_{p=0}^{P-1}\sum_{q=p+1}^{P-1}\hat{\Phi}_{x_p}(\omega)\hat{\Phi}_{x_q}(\omega)\right\} =$$

$$= \frac{1}{P^2}\left[\sum_{p=0}^{P-1}E\left\{\hat{\Phi}^2_{x_p}(\omega)\right\} - P^2\left(E\left\{\hat{\Phi}_{x_p}(\omega)\right\}\right)^2 + P(P-1)\left(E\left\{\hat{\Phi}_{x_p}(\omega)\right\}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{P^2}\left[\sum_{p=0}^{P-1}E\left\{\hat{\Phi}^2_{x_p}(\omega)\right\} - P\left(E\left\{\hat{\Phi}_{x_p}(\omega)\right\}\right)^2\right] = \frac{1}{P^2}\sum_{p=0}^{P-1}\left[E\left\{\hat{\Phi}^2_{x_p}(\omega)\right\} - \left(E\left\{\hat{\Phi}_{x_p}(\omega)\right\}\right)^2\right] = \frac{1}{P^2}\sum_{p=0}^{P-1}\sigma^2_{\hat{\Phi}^2_{x_p}}(\omega),$$

$$\forall\,\omega\in\mathbb{R}.$$

☝ **De P ori mai mică.**

$$\sigma^2_{\hat{\Phi}^{P,Q}_{\Delta,x}}(\omega) = \frac{1}{P^2}\sum_{p=0}^{P-1}\sigma^2_{\hat{\Phi}^2_{x_p}}(\omega) = \frac{1}{P}\Phi^2_x(\omega)\left[2 + \frac{\sin^2(Q\omega)}{Q^2\sin^2\omega}\right] - \frac{1}{4P\pi^2}\left(\int_{-\pi}^{+\pi}\Phi_x(\mu)\frac{\sin^2\frac{Q(\omega-\mu)}{2}}{Q\sin^2\frac{(\omega-\mu)}{2}}d\mu\right)^2$$

$\forall\,\omega\in\mathbb{R}$

Metode neparametrice de estimare spectrală

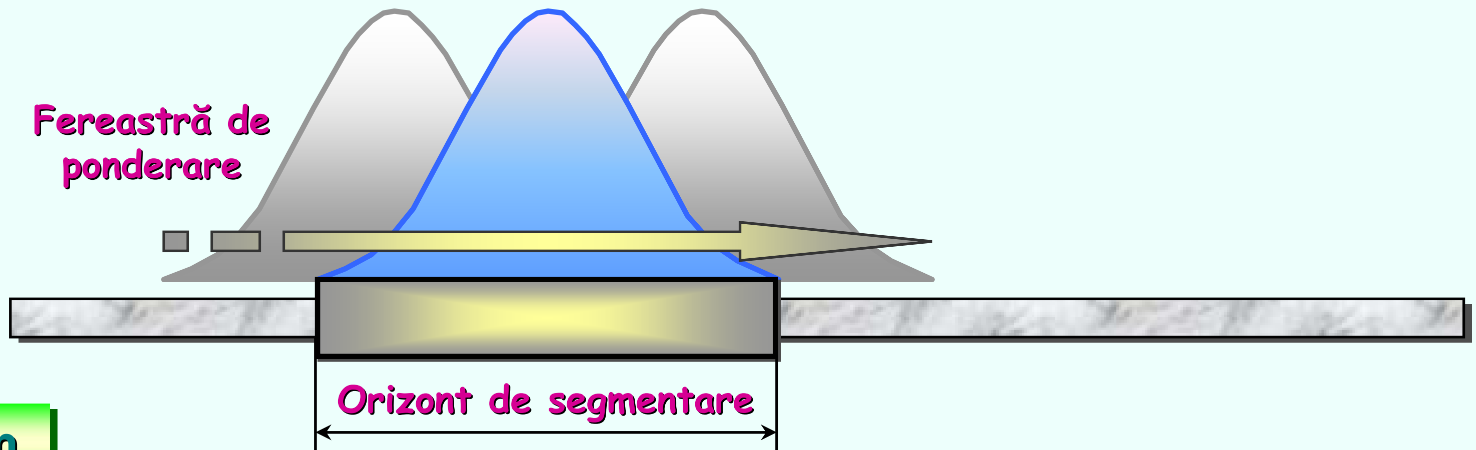
Metoda lui Welch

Ideea lui Welch (1967)

Metoda lui Bartlett poate fi modificată sub două aspecte:

a. segmentele de semnal se pot suprapune;

b. segmentele de semnal pot fi extrase folosind ferestre diferite de cea dreptunghiulară.



Algoritm

① Se stabileşte durata de suprapunere dintre segmentele succesive. K

② Se stabileşte rezoluția în frecvență a periodogramei estimate. $Q > K$

- În mod uzual, diferența Q-K este un divizor al duratei semnalului, N.

③ Se alege tipul de fereastră culisantă. w

- Durata ferestrei este egală cu rezoluția în frecvență.

④ Se evaluează dispersia ferestrei, ca factor de normalizare.

$$\nu_w^2 \overset{def}{=} \frac{1}{Q}\sum_{q=0}^{Q-1} w^2[q]$$

❶❻ Metode neparametrice de estimare spectrală

Metoda lui Welch (continuare)

⑤ Se segmentează semnalul original.

$$N = P(Q-K)$$

$$x_p \overset{def}{\equiv} x \cdot \left(q^{-p(Q-K)} \mathcal{R}_Q\right), \quad \forall\, p \in \overline{0, P-1}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x_p[q] \overset{def}{=} x[p(Q-K)+q], \quad \forall\, q \in \overline{0, Q-1}, \quad \forall\, p \in \overline{0, P-1}$$

⑥ Se estimează periodogramele segmentelor de semnal ponderate de fereastra aleasă, cu ajutorul **TCFD** sau **TFD$_Q$**.

$$\hat{\Phi}_{w x_p}(\omega) \overset{def}{=} \frac{1}{Q v_w^2} \left| \sum_{q=0}^{Q-1} x_p[q] w[q] e^{-j\omega q} \right|^2, \quad \forall\, \omega \in \mathbb{R}, \quad \forall\, p \in \overline{0, P-1}$$

TCFD

$$\hat{\Phi}_{w x_p}[k] \overset{def}{=} \frac{1}{Q v_w^2} \left| \sum_{q=0}^{Q-1} x_p[q] w[q] w_Q^{qk} \right|^2, \quad \forall\, k \in \overline{0, Q-1}, \quad \forall\, p \in \overline{0, P-1}$$

TFD$_Q$

⑦ Se estimează periodograma semnalului prin medierea periodogramelor segmentelor.

$$\hat{\Phi}_{w,x}^{P,Q,K} \overset{def}{\equiv} \frac{1}{P} \sum_{p=0}^{P-1} \hat{\Phi}_{w x_p}$$

- Prin durata de suprapunere compromisul rezoluție-regularitate poate fi mai bine controlat.

➔ Rezoluţia în frecvenţă poate fi selectată la valoarea dorită, urmînd ca durata suprapunerii dintre segmente să fie utilizată pentru a obţine un grad maximal de regulatitate.

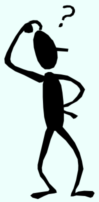
☝ Durata optimală de suprapunere variază în funcţie de fereastra aleasă şi de semnalul analizat.

Totuşi $K \le Q/2$ ≤ 50% suprapunere

Metoda lui Welch (continuare)

Performanţele metodei

- Se evaluează **media** periodogramei estimate (**TCFD**).



$$E\left\{\hat{\Phi}_{w,x}^{P,Q,K}(\omega)\right\} = E\left\{\frac{1}{P}\sum_{p=0}^{P-1}\hat{\Phi}_{w x_p}(\omega)\right\} = \frac{1}{P}\sum_{p=0}^{P-1}\boxed{E\left\{\hat{\Phi}_{w x_p}(\omega)\right\}} \quad \forall\, \omega\in\mathbb{R}$$

$$\hat{\Phi}_{w x_p}(\omega) \overset{def}{=} \frac{1}{Q\nu_w^2}\left|\sum_{q=0}^{Q-1} x_p[q]w[q]e^{-j\omega q}\right|^2 \quad \forall\, \omega\in\mathbb{R} \quad \forall\, p\in\overline{0,P-1}$$

$$E\left\{\hat{\Phi}_{w x_p}(\omega)\right\} = \frac{1}{Q\nu_w^2}\sum_{n=0}^{Q-1}\sum_{m=0}^{Q-1}\underbrace{E\left\{x_p[n]x_p[m]\right\}}w[n]w[m]e^{-j\omega(n-m)} \quad \forall\, \omega\in\mathbb{R} \quad \forall\, p\in\overline{0,P-1}$$

$$E\left\{x[p(Q-K)+n]x[p(Q-K)+m]\right\} = r_x[n-m]$$

$$r_x[k] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\Phi_x(\omega)e^{+j\omega k}d\omega \quad \forall\, k\in\mathbb{Z}$$

$$E\left\{\hat{\Phi}_{w x_p}(\omega)\right\} = \frac{1}{Q\nu_w^2}\int_{-\pi}^{+\pi}\Phi_x(\mu)\underbrace{\left[\sum_{n=0}^{Q-1}\sum_{m=0}^{Q-1}w[n]w[m]e^{-j(\omega-\mu)(n-m)}\right]}d\mu \quad \forall\, \omega\in\mathbb{R} \quad \forall\, p\in\overline{0,P-1}$$

$$\left|W\left(e^{j(\omega-\mu)}\right)\right|^2 \overset{def}{=} \left|\mathscr{F}(w)\left(e^{j(\omega-\mu)}\right)\right|^2$$

Exerciţiu

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\left|W\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega = Q\nu_w^2$$

$$E\left\{\hat{\Phi}_{w,x}^{P,Q,K}(\omega)\right\} = E\left\{\hat{\Phi}_{w x_p}(\omega)\right\} = \frac{1}{Q\nu_w^2}\int_{-\pi}^{+\pi}\Phi_x(\mu)\left|W\left(e^{j(\omega-\mu)}\right)\right|^2 d\mu \quad \forall\, \omega\in\mathbb{R} \quad \forall\, p\in\overline{0,P-1}$$

☞ Aceeaşi pentru fiecare segment ponderat.

❶❻ Metode neparametrice de estimare spectrală

Metoda lui Welch (continuare)

Performanţele metodei (continuare)

Exerciţiu

- Deduceți expresia mediei periodogramei Welch folosind **TFD**.

- De regulă, fereastra utilizată şi în cazul acestei metode este **tot cea a lui Bartlett**.
- În acest caz, **Welch** a demonstrat că varianța periodogramei sale poate fi aproximată prin:

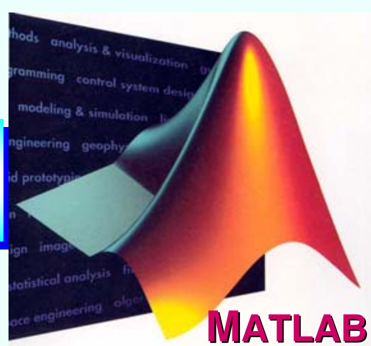
$$\sigma^2_{\hat{\Phi}^{P,Q,K}_{w,x}}(\omega) \cong \frac{9}{8P}\Phi_x^2(\omega) \quad \forall\,\omega\in\mathbb{R}$$

Pentru 50% suprapunere între segmente succesive.

☝ **Densitatea spectrală estimată prin Metoda lui Welch cu fereastra lui Bartlett şi 50% suprapunere este de aproximativ 2 ori mai netedă decît cea estimată prin Metoda lui Bartlett.**

- Alte tipuri de ferestre pot fi de asemenea utilizate, în vederea îmbunătățirii factorului de calitate.

În mediul de programare



Funcţia psd implementează Metoda lui Welch