# ❺ Exerciții rezolvate

## Soluție (Exercițiul 4.2)

$\mathcal{M}_2$: $\theta^* = \left[E\{\varphi(n)\varphi^T(n)\}\right]^{-1}\left(\left[E\{\varphi(n)y(n)\}\right] \quad E\{\varphi(n)v(n)\}\right) =$

$= -\begin{bmatrix} r_y[0] & r_y[1] \\ r_y[1] & r_y[0] \end{bmatrix}^{-1}\left(\begin{bmatrix} r_y[1] \\ r_y[2] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_{vy}[1] \\ r_{vy}[2] \end{bmatrix}\right)$

(dacă modelul ar fi de ordin 2).

$\lim_{N\to\infty} \hat{a}_{21} = \dfrac{r_y[1](r_y[2]-r_y[0])}{(r_y[0])^2-(r_y[1])^2} = a \iff$ (dacă $= -\dfrac{r_y[1]}{r_y[0]}$)

$\iff \begin{cases} r_y[1] \neq 0 \text{ și} \\ r_y[0]r_y[2] = r_y^2[1] \end{cases}$

$\lim_{N\to\infty} \hat{a}_{22} = \dfrac{r_y^2[1]-r_y[0]r_y[2]}{(r_y[0])^2-(r_y[1])^2} = a_{12}^* = \alpha \iff$ (al doilea parametru al lui $\mathcal{P}$)

$\iff r_y^2[1] = r_y[0]r_y[2]$ (la fel)

* În această situație, se constată cu ușurință că $\theta^* = [a_{11}^* \quad 0]^T$, ceea ce conduce la exprimarea estimației $\hat{\lambda}^2$ astfel:

$$\hat{\lambda}^2 = \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(y(n)+y(n-1)\hat{a}_{11}\right)^2}_{\text{estimația pentru } \mathcal{M}_1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

(un termen ce tinde la 0 când $N\to\infty$)

* Rezultă că $\lim_{N\to\infty} \hat{\lambda}^2 = (\lambda^*)^2$

– Condiția de consistență este: $\begin{bmatrix} r_y^2[1] = r_y[0]r_y[2] \text{ și} \\ r_y[2] \neq 0,\ r_y[2] \neq 1 \end{bmatrix}$

# ❺ Exerciții rezolvate


## Soluție (Exercițiul 4.2)

c) $\mathcal{M}_1$: $\quad \sigma_N^2[1] = \lambda^2\left[r_y^{N-1}[0](N-1)\right]^{-1} = \dfrac{\lambda^2}{(N-1)\,r_y^{N-1}[0]}$

$\mathcal{M}_2$: $\quad E\{(\hat{\theta}_N - \theta^*)(\hat{\theta}_N - \theta^*)^T\} = \lambda^2 \begin{bmatrix} N r_y^N[0] & N r_y^N[1] \\ N r_y^N[1] & N r_y^N[0] \end{bmatrix}^{-1} =$

$$\sigma_N^2[2] = \frac{\lambda^2}{N}\,\frac{1}{(r_y^N[0])^2-(r_y^N[1])^2}\begin{bmatrix} r_y^N[0] & -r_y^N[1] \\ -r_y^N[1] & r_y^N[0] \end{bmatrix}$$

$$\sigma_N^2[2] = \frac{\lambda^2}{N}\,\frac{r_y^N[0]}{(r_y^N[0])^2-(r_y^N[1])^2}$$

$$\lim_{N\to\infty} N\sigma_N^2[1] = \frac{\lambda^2}{r_y[0]} \quad ; \quad \lim_{N\to\infty} N\sigma_N^2[2] = \frac{\lambda^2 r_y[0]}{(r_y[0])^2-(r_y[1])^2}$$

- deoarece $0 \le (r_y[1])^2$ rezultă:

$$0 \le (r_y[0])^2 - (r_y[1])^2 \le r_y^2[0] \iff$$

$$\iff \frac{\lambda^2}{r_y[0]} \le \frac{\lambda^2 r_y[0]}{(r_y[0])^2-(r_y[1])^2} \qquad \text{q.e.d.}$$

# ❺ Exerciţii rezolvate


## Exercițiul 4.3


**Deduceți expresiile estimațiilor oferite de MVI pentru un model ARX[1,1] şi un vector al instrumentelor de tip nefiltrat.**
**Studiați consistența lor şi precizați un set de condiții suficiente pentru verificarea acestei proprietăți.**
**Determinați condițiile generale de consistență în cazul în care nici intrarea nici zgomotul nu sunt neapărat albe.**

**Soluție**

- MVI: $\hat{\theta} = \left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} z[n]\varphi^T[n]\right]^{-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} z[n]y[n]\right]$, unde:

$$\varphi^T[n] = [-y[n-1] \quad u[n-1]]$$

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix}\hat{a}\\ \hat{b}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} u[n-1]y[n-1] & \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} u^2[n-1] \\ -\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} u[n-2]y[n-1] & \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} u[n-1]u[n-2]\end{bmatrix}^{-1} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} u[n-1]y[n] \\ \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} u[n-2]y[n]\end{bmatrix}$$

# ❺ Exerciții rezolvate

## Soluție (Exercițiul 4.3)

- Cu notațiile uzuale, rezultă:

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} -r_{uy}^N[0] & r_u^N[0] \\ -r_{uy}^N[1] & r_u^N[1] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} r_{uy}^N[1] \\ r_{uy}^N[2] \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta_N} \begin{bmatrix} r_u^N[1] & -r_u^N[0] \\ r_{uy}^N[1] & -r_{uy}^N[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{uy}^N[1] \\ r_{uy}^N[2] \end{bmatrix},$$

cu $\Delta_N = r_u^N[0]\, r_{uy}^N[1] - r_u^N[1]\, r_{uy}^N[0] \neq 0$ (dacă se verifică)

$$\begin{cases} \hat{a} = \dfrac{r_u^N[1]\, r_{uy}^N[1] - r_u^N[0]\, r_{uy}^N[2]}{r_u^N[0]\, r_{uy}^N[1] - r_u^N[1]\, r_{uy}^N[0]} \\ \hat{b} = \dfrac{(r_{uy}^N[1])^2 - r_{uy}^N[0]\, r_{uy}^N[2]}{r_u^N[0]\, r_{uy}^N[1] - r_u^N[1]\, r_{uy}^N[0]} \end{cases}$$

$$\hat{\lambda}^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left( y[n] - \varphi^T[n] \hat{\theta} \right)^2$$