

# Méthodes stochastiques pour l'analyse d'images

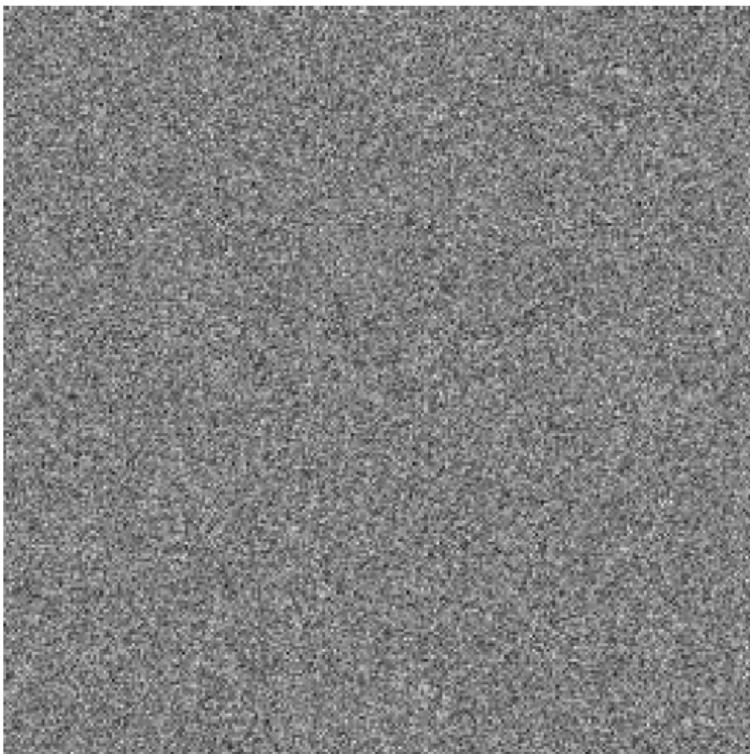
Agnès Desolneux

CNRS, CMLA, ENS Cachan

**Master 2 MVA**



# INTRODUCTION



## Principe de Helmholtz

Le principe de Helmholtz peut se formuler de deux façons différentes :

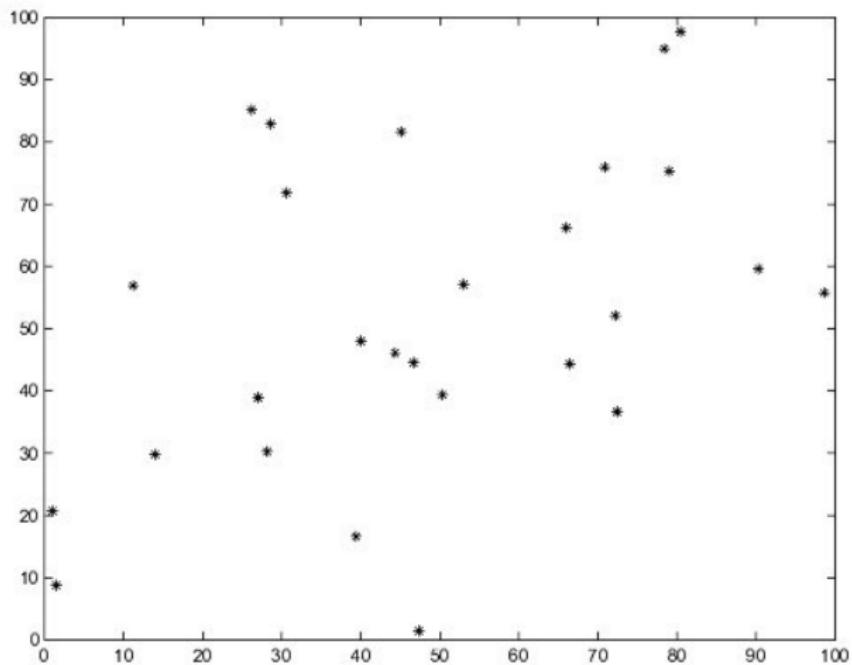
1. La première façon relève du sens commun : “*on ne perçoit rien dans une image de bruit*”.

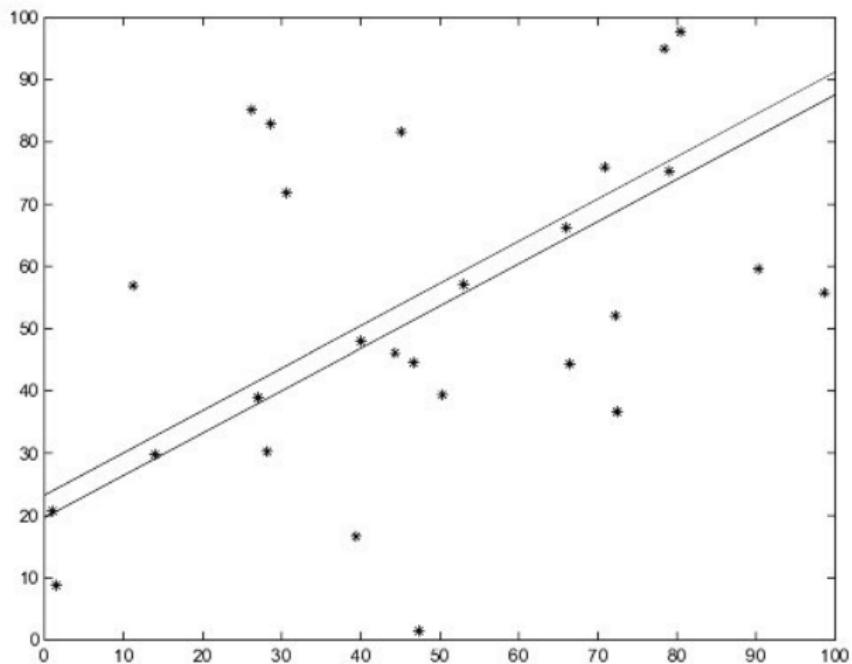
(formulé sous cette forme pour la 1ère fois par Attneave en 1954).

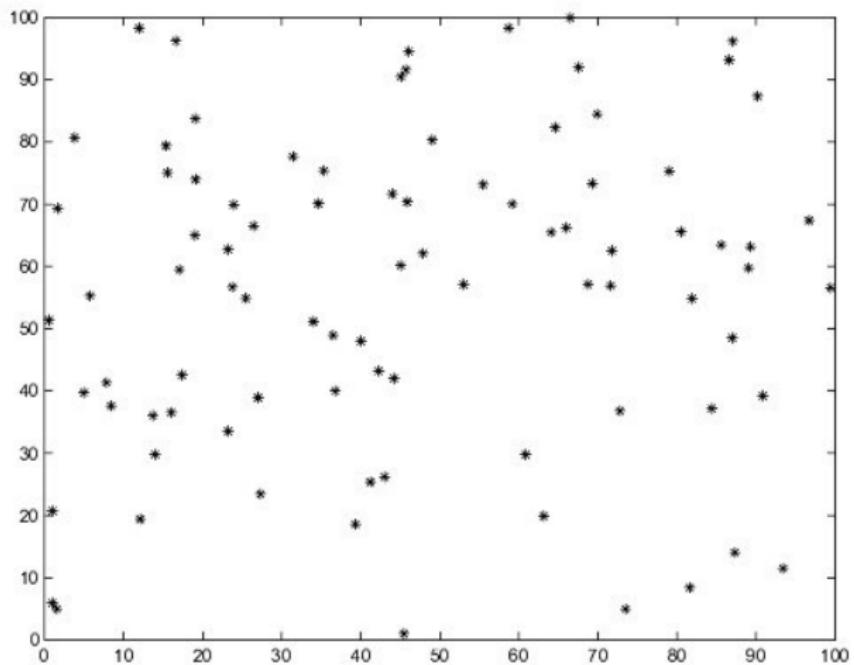
## Principe de Helmholtz

Le principe de Helmholtz peut se formuler de deux façons différentes :

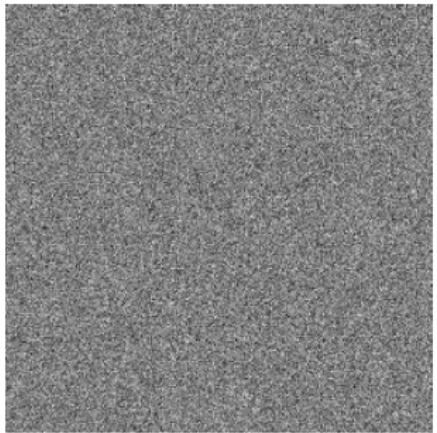
1. La première façon relève du sens commun : "*on ne perçoit rien dans une image de bruit*".  
(formulé sous cette forme pour la 1ère fois par Attneave en 1954).
2. Formulation plus forte : quand une grande déviation par rapport à l'aléatoire apparaît, alors une structure est perçue.



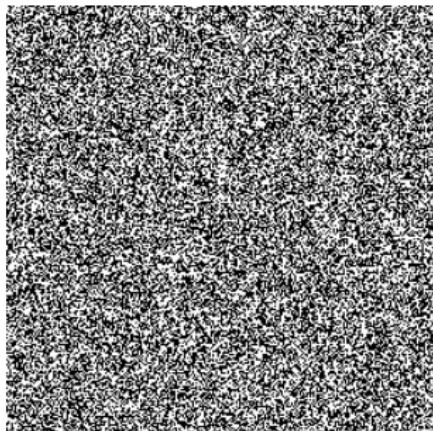




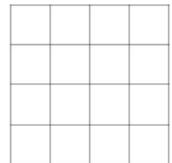
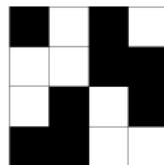
Quelle est la différence entre une image réelle et une image de bruit ?



## Quelles sont les structures visuelles intéressantes ?



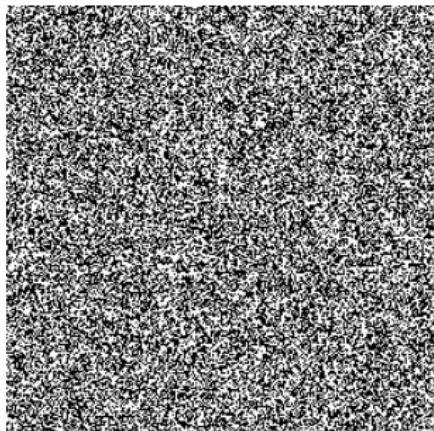
contient



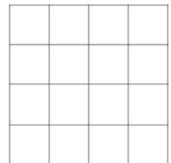
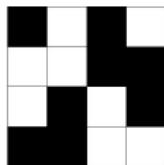
?

- ▶ Toutes les structures ne sont pas intéressantes pour la perception visuelle.

## Quelles sont les structures visuelles intéressantes ?



contient

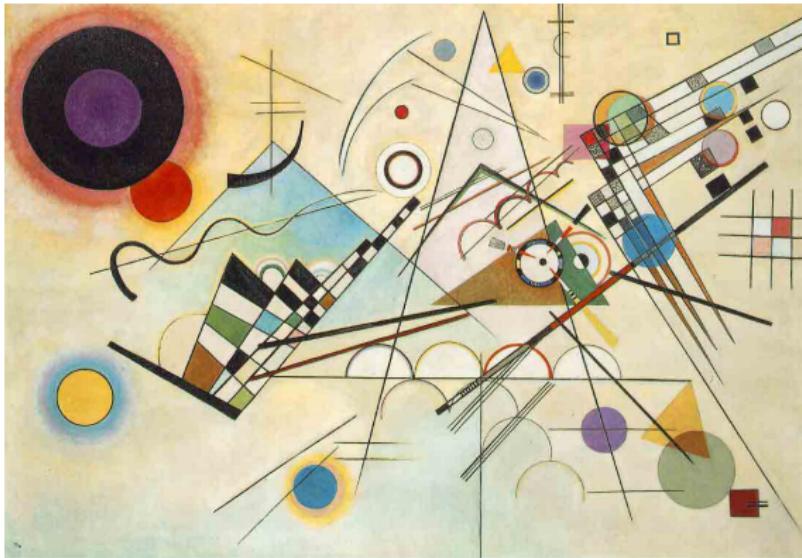


?

- ▶ Toutes les structures ne sont pas intéressantes pour la perception visuelle.
- ▶ Les structures pertinentes pour la perception visuelle ont été étudiées par l'école *Gestaltiste* de Psychophysiologie.

# Perception visuelle

Comment voit-on des objets géométriques dans les images ?



Quels sont les lois et les principes gouvernant la construction visuelle ?

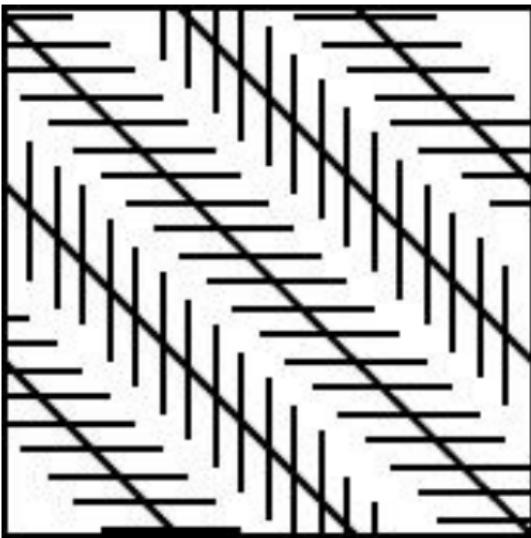
## PARTIE I : LA THEORIE DE LA GESTALT POUR LA PERCEPTION VISUELLE

## La théorie de la Gestalt pour la perception visuelle

Avant la théorie de la Gestalt : les illusions optico-géométriques.

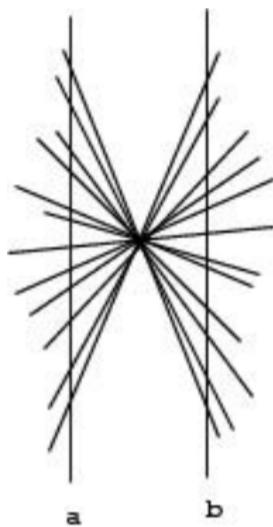
Le but de ces illusions est de se demander : “peut-on faire confiance à notre perception visuelle ?”

Un premier exemple : l'illusion de Zoellner (1860)



## Autres exemples d'illusions optico-géométriques

Illusion de Hering (1861)



Les lignes a et b sont-elles droites ?

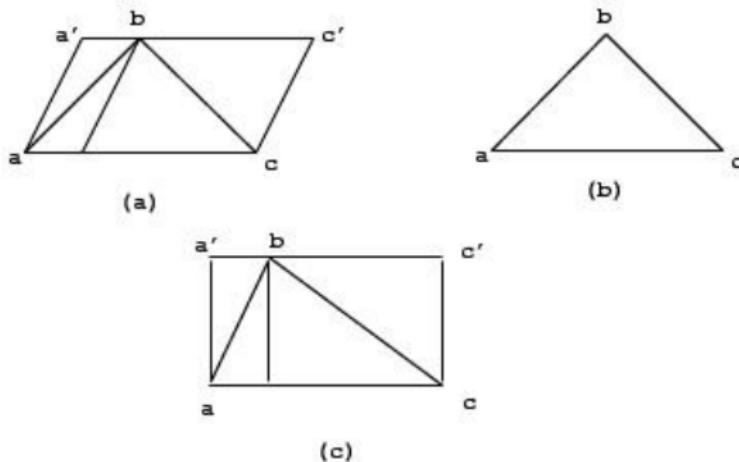
## Autres exemples d'illusions optico-géométriques

Illusion de Müller-Lyer (1889)



## Autres exemples d'illusions optico-géométriques

Illusion de Sander (1926)



## Théorie de la Gestalt

- ▶ La théorie de la Gestalt (= "forme" en allemand) ne continue pas dans la même direction. La question n'est pas de savoir pourquoi nous voyons parfois des droites non-parallèles alors qu'elles le sont mais plutôt pourquoi nous percevons une droite. Cette perception est le résultat d'un processus de construction dont les lois ont été établies par la théorie de la Gestalt.

- M. Wertheimer *Unterzuchungen zur Lehre der Gestalt*, Psychologische Forschung (1923).
- G. Kanizsa, *Grammatica del Vedere / La Grammaire du Voir*, Éditions Diderot, arts et sciences, 1980 / 1997.
- W. Metzger, *Gesetze des Sehens*, Kramer, 1953.

## Théorie de la Gestalt

- ▶ La théorie de la Gestalt (= "forme" en allemand) ne continue pas dans la même direction. La question n'est pas de savoir pourquoi nous voyons parfois des droites non-parallèles alors qu'elles le sont mais plutôt pourquoi nous percevons une droite. Cette perception est le résultat d'un processus de construction dont les lois ont été établies par la théorie de la Gestalt.
- ▶ La théorie de la Gestalt (Wertheimer, Metzger, Kanizsa) part de l'hypothèse qu'il existe une (petite) liste de lois actives pour le groupement visuel : proximité, même attribut (couleur, forme, taille, orientation), alignement, bonne continuation, symétrie, parallélisme, convexité, fermeture, constance de largeur, completion amodale, jonctions en T, jonctions en X, jonctions en Y.

- M. Wertheimer *Unterzuchungen zur Lehre der Gestalt*, Psychologische Forschung (1923).
- G. Kanizsa, *Grammatica del Vedere / La Grammaire du Voir*, Éditions Diderot, arts et sciences, 1980 / 1997.
- W. Metzger, *Gesetze des Sehens*, Kramer, 1953.

## Théorie de la Gestalt

- ▶ La théorie de la Gestalt (= "forme" en allemand) ne continue pas dans la même direction. La question n'est pas de savoir pourquoi nous voyons parfois des droites non-parallèles alors qu'elles le sont mais plutôt pourquoi nous percevons une droite. Cette perception est le résultat d'un processus de construction dont les lois ont été établies par la théorie de la Gestalt.
- ▶ La théorie de la Gestalt (Wertheimer, Metzger, Kanizsa) part de l'hypothèse qu'il existe une (petite) liste de lois actives pour le groupement visuel : proximité, même attribut (couleur, forme, taille, orientation), alignement, bonne continuation, symétrie, parallélisme, convexité, fermeture, constance de largeur, completion amodale, jonctions en T, jonctions en X, jonctions en Y.
- ▶ La liste précédente donne les lois élémentaires du processus visuel « primaire », qui d'après Kanizsa est opposé à un second processus plus cognitif.

- M. Wertheimer *Unterzuchungen zur Lehre der Gestalt*, Psychologische Forschung (1923).
- G. Kanizsa, *Grammatica del Vedere / La Grammaire du Voir*, Éditions Diderot, arts et sciences, 1980 / 1997.
- W. Metzger, *Gesetze des Sehens*, Kramer, 1953.



Figure : Grammatica del Vedere, Gaetano Kanizsa.

A P C

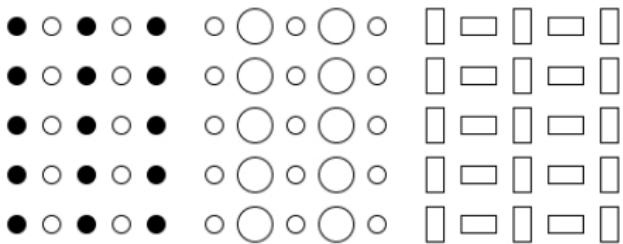
# Les lois élémentaires de groupement

## Proximité



# Les lois élémentaires de groupement

## Même couleur/forme/orientation



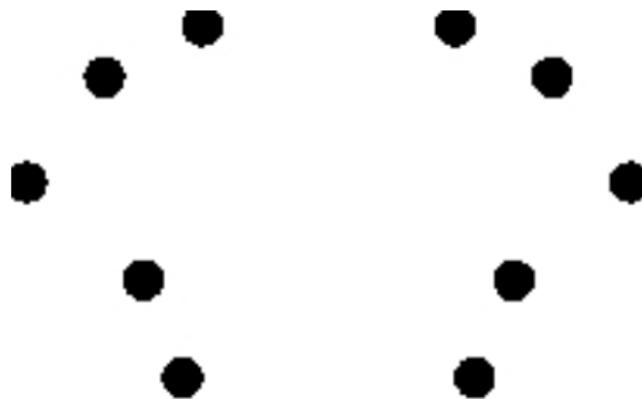
# Les lois élémentaires de groupement

## Fermeture



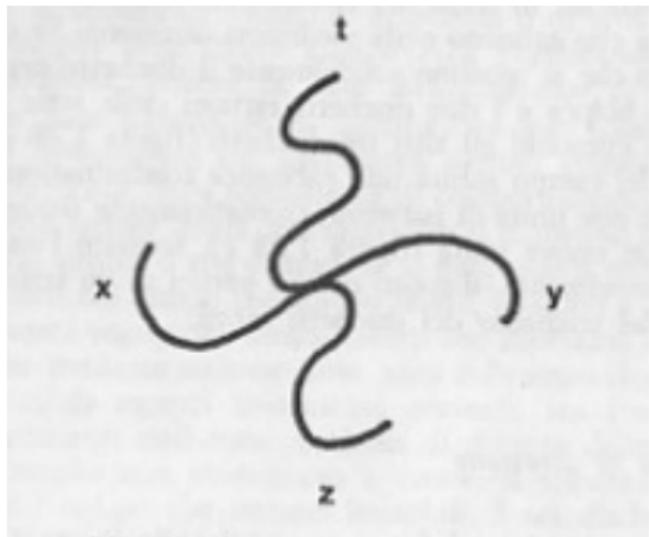
# Les lois élémentaires de groupement

## Symétrie



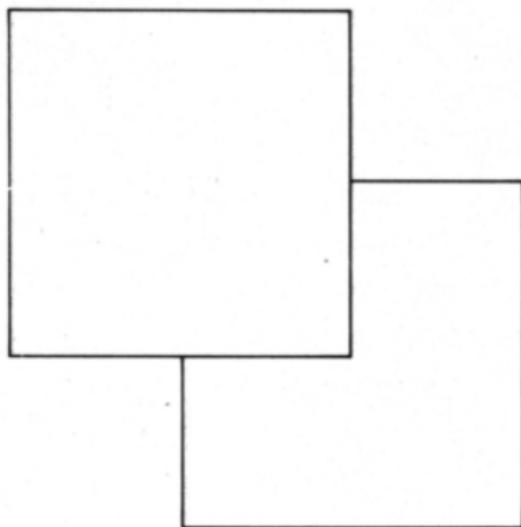
# Les lois élémentaires de groupement

Bonne continuation



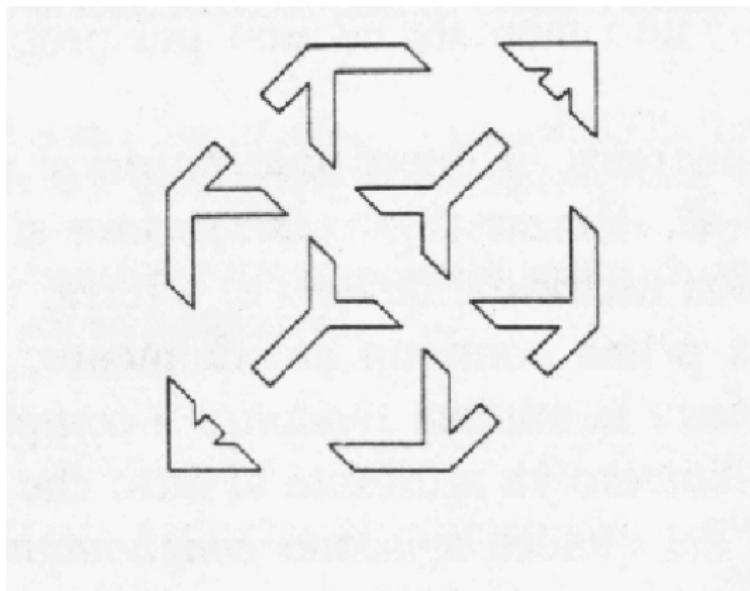
## Jonctions en T et en X

### Jonctions en T



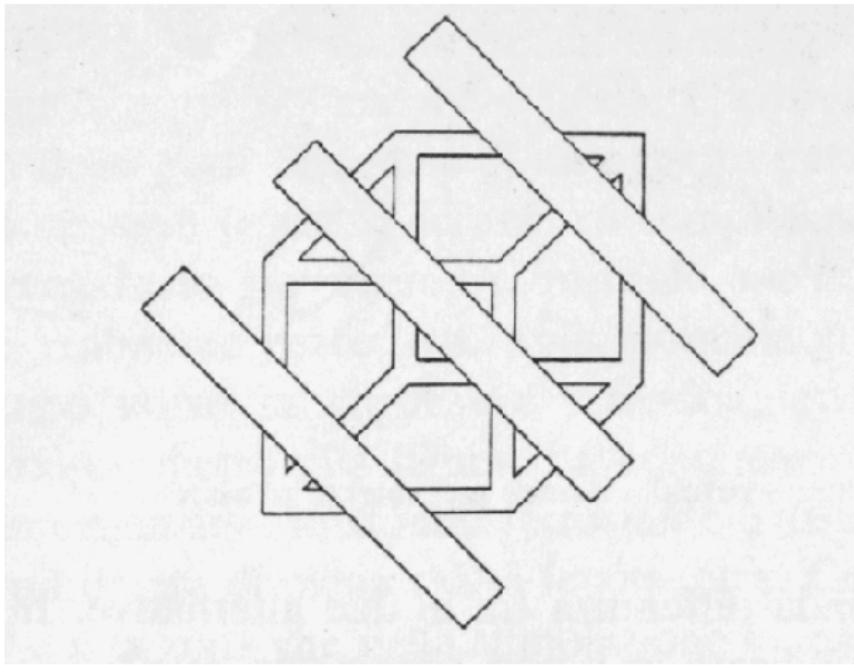
## Jonctions en T et en X

### Jonctions en T



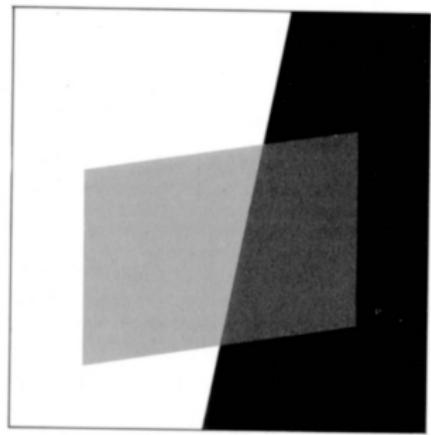
## Jonctions en T et en X

### Jonctions en T

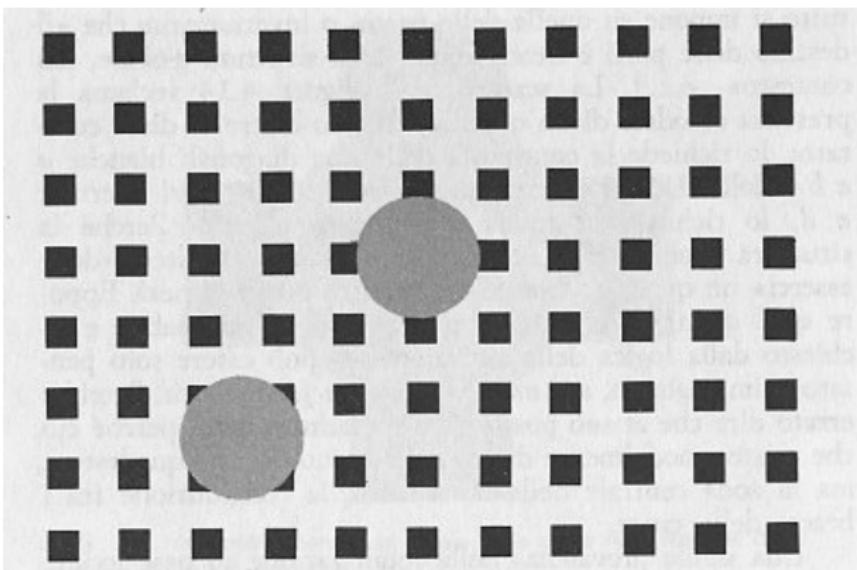


# Jonctions en T et en X

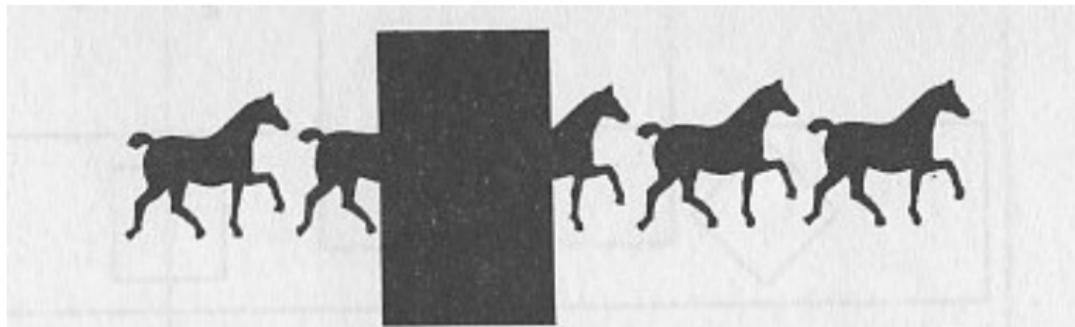
## Jonctions en X



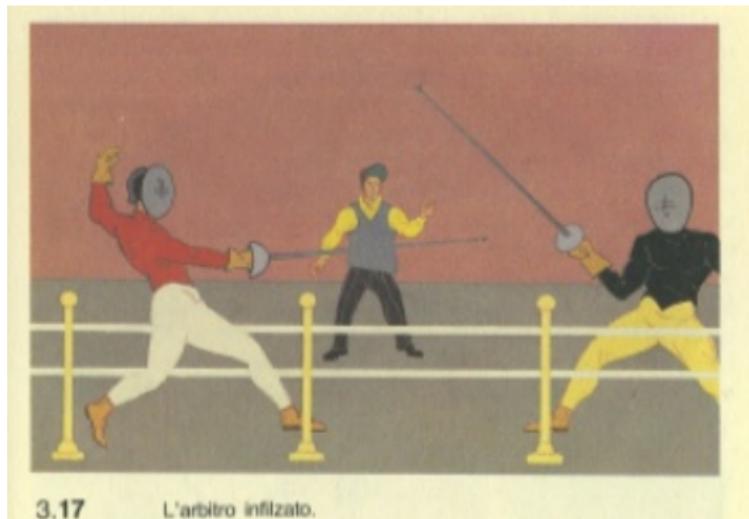
## Completion amodale



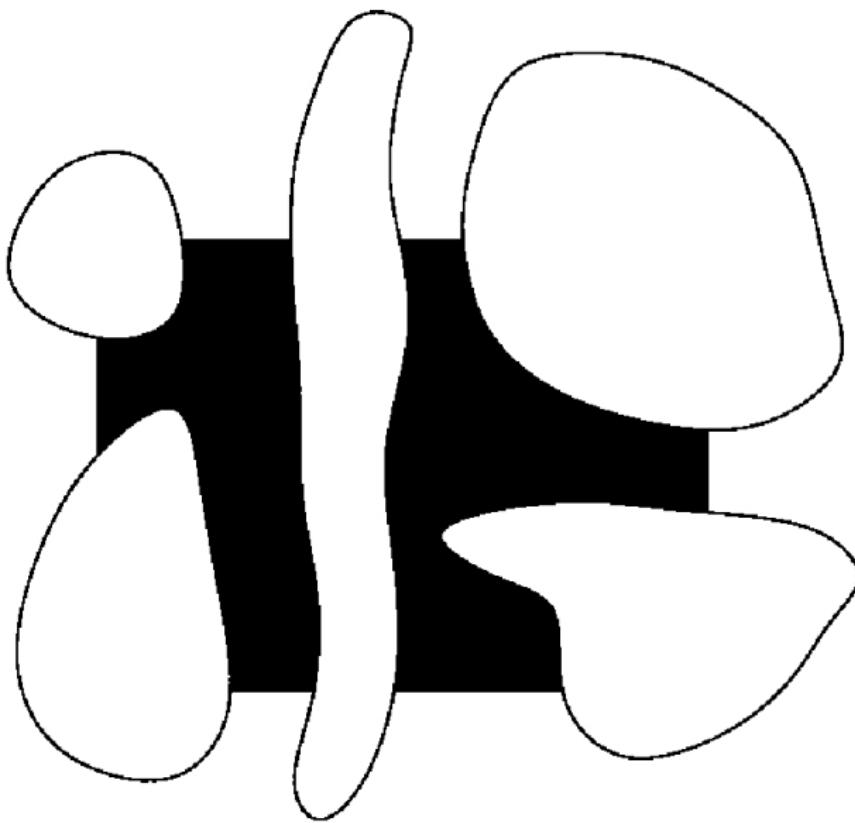
## Completion amodale



## Completion amodale



## Exercice : commentaire gestaltiste d'une figure

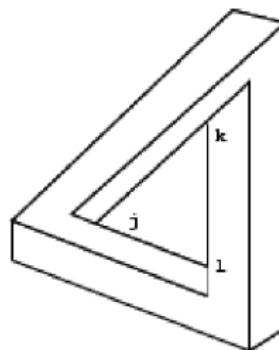
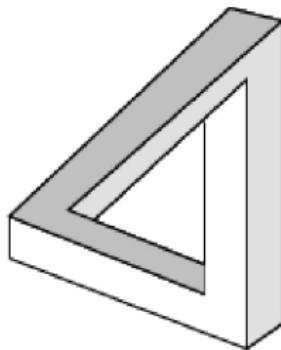


# Figures impossibles

Les lois de groupement perceptuel l'emportent sur le sens physique.

Effet de perspective par les **jonctions en Y**.

## Triangle de Penrose

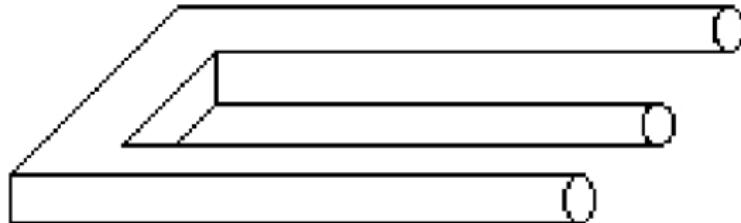


## Figures impossibles

Les lois de groupement perceptuel l'emportent sur le sens physique.

Effet de perspective par les **jonctions en Y**.

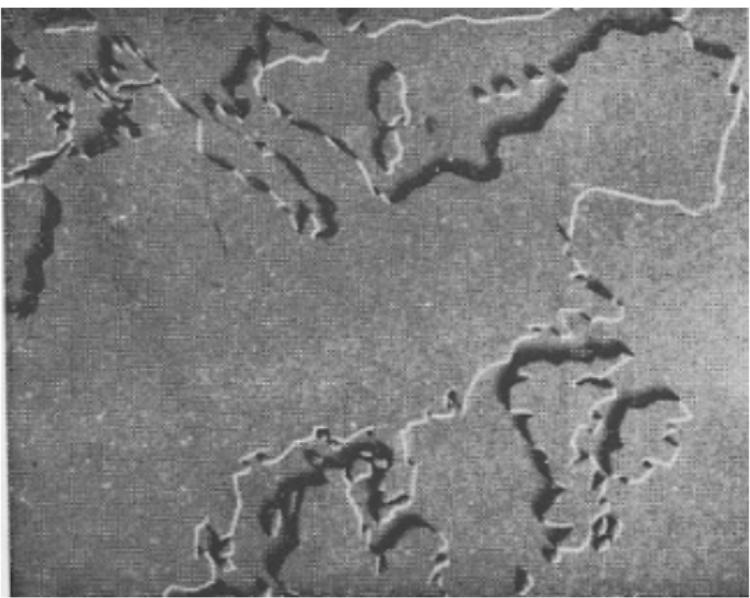
### Fourchette de Penrose



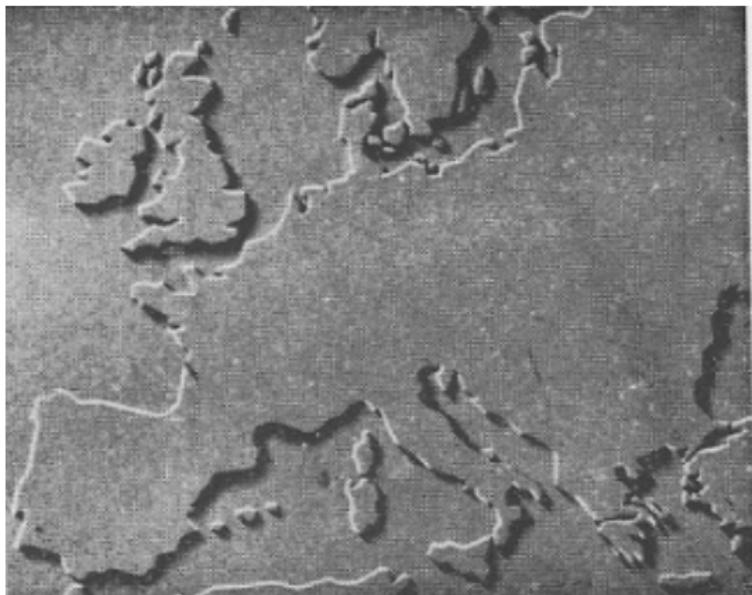
... et l'expérience passée ?



... et l'expérience passée ?

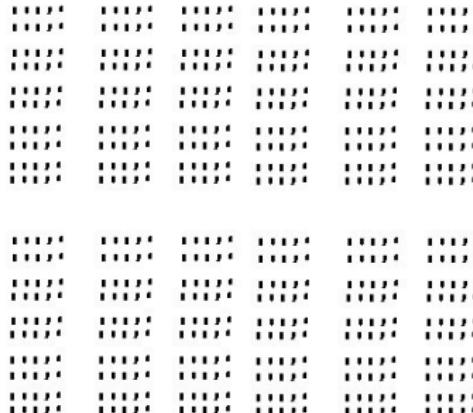


... et l'expérience passée ?



## Recursivité

Toutes les lois de groupement de la théorie de la Gestalt sont *récursives* : elles s'appliquent d'abord à des objets élémentaires puis à des structures déjà constituées.



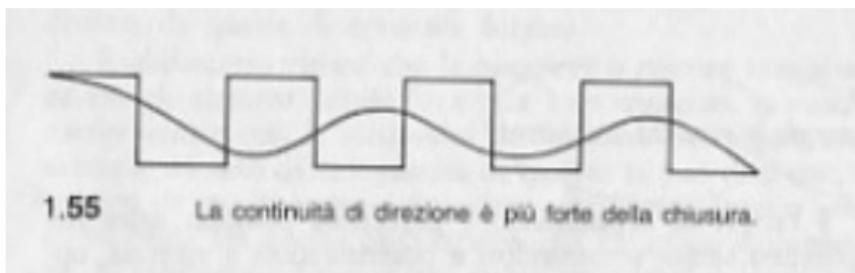
Ici on a au moins 6 applications récursives des lois d'alignement, de parallélisme, de constance de largeur et de proximité.

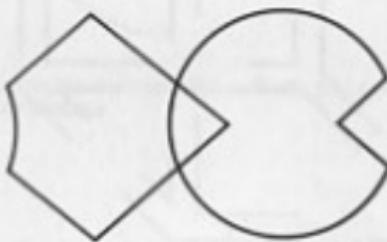
## Conflits entre lois



Chiusura contro buona continuazione.

## Conflits entre lois

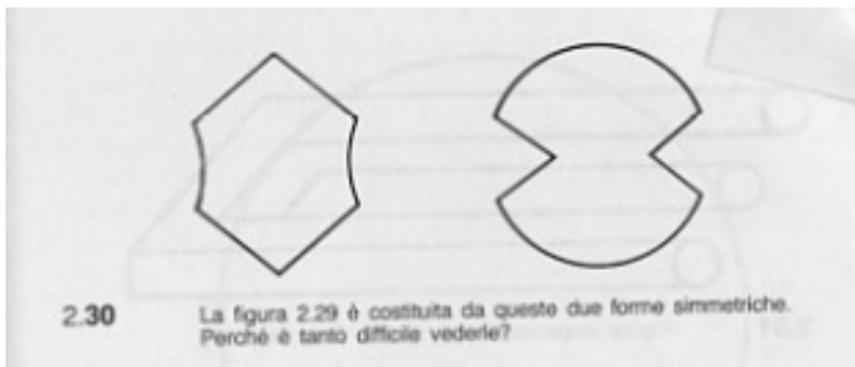




2.29

Se la tendenza alla massima simmetria avesse la stessa importanza nel vedere che ha nel pensare, questa configurazione sarebbe vista come la giustapposizione delle due forme simmetriche di figura 2.30.

## Conflits entre lois

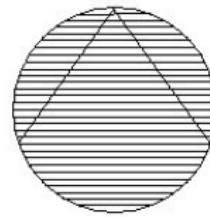
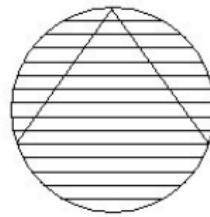
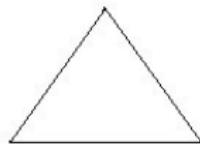


2.30

La figura 2.29 è costituita da queste due forme simmetriche.  
Perché è tanto difficile vederle?

# Masquage

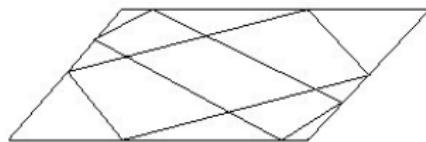
## Masquage **par texture**



“Le tout masque les parties”.

# Masquage

## Masquage par addition



# Masquage

## Masquage **par soustraction**



Masquage efficace seulement s'il fait apparaître une nouvelle loi de groupement.

# Masquage

## Masquage par articulation figure/fond

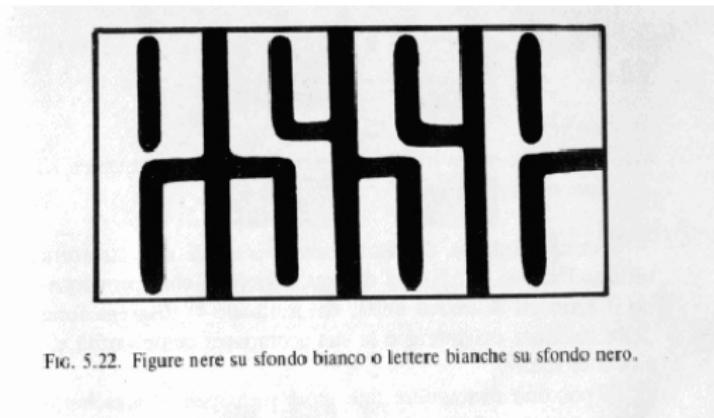
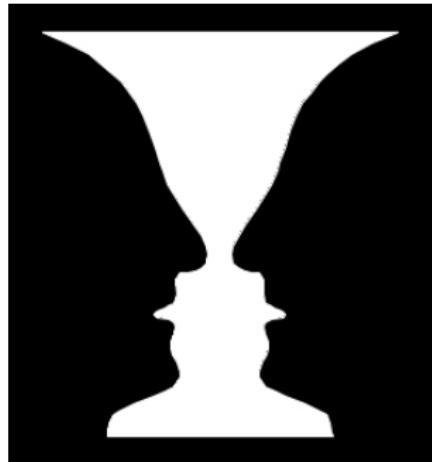


FIG. 5.22. Figure nere su sfondo bianco o lettere bianche su sfondo nero.

Kanisza : “il fondo non é forma”. Un motif ne peut pas être vu comme une figure et comme un fond simultanément.

## PARTIE II : LE PRINCIPE DE HELMHOLTZ

# Principe de Helmholtz

## Principe de Helmholtz :

- ▶ "Dans le bruit, on ne voit rien" (Attneave, D.Lowe).
- ▶ Toute structure trop régulière pour apparaître "par hasard" attire l'attention et devient une perception.

## Exemples

- ▶ droites parallèles en 2D vues comme parallèles dans l'espace
- ▶ pile ou face, jeu de dés

→ Principe appliqué pour calculer des seuils de détectabilité.

## Exemple : Anniversaires dans une classe

**Question** : Faut-il s'étonner que  $n$  étudiants d'une classe de 30 élèves aient le même anniversaire ?

**Hypothèse** : anniversaires = variables indépendantes, uniformément distribuées sur les 365 jours de l'année.

Soit  $C_n$  nombre de  $n$ -uplets d'étudiants ayant le même anniversaire.

Soit  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}[C_n \geq 1]$  et  $p_n = \mathbb{P}[C_n \geq 1 \text{ et } C_{n+1} = 0]$ .

On a  $\mathbb{E}[C_n] =$  espérance du nombre de groupes de  $n$  d'étudiants ayant le même anniversaire.

→ Que valent  $\mathbb{P}_2, \mathbb{E}[C_2]$  ? et plus généralement  $\mathbb{P}_n, \mathbb{E}[C_n]$  ?

## Exemple : Anniversaires dans une classe

**Question** : Faut-il s'étonner que  $n$  étudiants d'une classe de 30 élèves aient le même anniversaire ?

**Hypothèse** : anniversaires = variables indépendantes, uniformément distribuées sur les 365 jours de l'année.

Soit  $C_n$  nombre de  $n$ -uplets d'étudiants ayant le même anniversaire.

Soit  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}[C_n \geq 1]$  et  $p_n = \mathbb{P}[C_n \geq 1 \text{ et } C_{n+1} = 0]$ .

On a  $\mathbb{E}[C_n] =$  espérance du nombre de groupes de  $n$  d'étudiants ayant le même anniversaire.

→ Que valent  $\mathbb{P}_2$ ,  $\mathbb{E}[C_2]$  ? et plus généralement  $\mathbb{P}_n$ ,  $\mathbb{E}[C_n]$  ?

On calcule :  $\mathbb{P}_2 = 1 - \frac{365 \times 364 \dots 336}{365^{30}} \simeq 0.706$ .

→ pas surprenant d'avoir deux anniversaires simultanés.

## Anniversaires dans une classe

On peut calculer aussi :

$$\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}_2 - p_2 = \mathbb{P}_2 - \frac{1}{365^{30}} \sum_{i=1}^{15} \left[ \frac{\prod_{j=0}^{i-1} \binom{30-2j}{2}}{i!} \prod_{k=0}^{29-i} (365-k) \right] \approx 0.028.$$

→  $\mathbb{P}_n$  de plus en plus difficile à calculer quand  $n$  grandit.

Le calcul de l' **espérance** est beaucoup plus simple :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[C_n] &= \mathbb{E} \left[ \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq 30} \mathbf{1}_{\{i_1, \dots, i_n \text{ ont le même anniversaire}\}} \right] \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq 30} \mathbb{P}[i_1, \dots, i_n \text{ ont le même anniversaire}] = \frac{1}{365^{n-1}} \binom{30}{n}.\end{aligned}$$

Par l' **inégalité de Markov**, on a toujours  $\mathbb{P}_n \leq \mathbb{E}[C_n]$ .

Numériquement on a :

$$\mathbb{P}_2 = 0.706, \mathbb{E}[C_2] = 1.192$$

$$\mathbb{P}_3 = 0.0285, \mathbb{E}[C_3] = 0.0347$$

$$\mathbb{P}_4 = 5.3 \times 10^{-4}, \mathbb{E}[C_4] = 5.6 \times 10^{-4}$$

## Formulation générale des méthodes *a contrario*

**Données :** On a  $n$  objets géométriques  $O_1, \dots, O_n$ . Soient  $X_i$  variables aléatoires décrivant une qualité (couleur, orientation, etc...) de  $O_i$ .

**Hypothèse  $\mathcal{H}_0$**  (appelé aussi *modèle de fond* ou *modèle de bruit* ou *modèle a contrario*) :  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes et identiquement distribuées.

**Observation E** sur  $X_1, \dots, X_k$  (ex :  $X_1, \dots, X_k$  sont très proches).

Cette observation est-elle due au hasard ? (= est-elle probable sous l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$  ?)

**Test :**

$$\text{NFA}(E) := \mathbb{E}_{\mathcal{H}_0}[\text{nb d'occurrences de l'observation}] \leq \varepsilon$$

Si le test est positif, l'observation E dite  $\varepsilon$ -significative.

## Exemple : Carré noir dans bruit de Bernoulli

Hypothèse  $\mathcal{H}_0$  : Image binaire  $L \times L$ , pixels iid  $\sim$  Bernoulli de paramètre  $p$ .

Observation : on observe un carré entièrement noir de côté  $l_0$  quelque part dans l'image.

$$\mathbb{P}[\text{ le carré de côté } l \text{ en position } M \text{ est tout noir }] = p^l.$$

$$\mathbb{E}[\text{Nb de carrés noirs de côté } l \text{ dans l'image}] = p^l(L-l)^2.$$

$$\mathbb{E}[\text{Nb de carrés noirs de côté } l \geq l_0] = \sum_{l \geq l_0} p^l(L-l)^2.$$

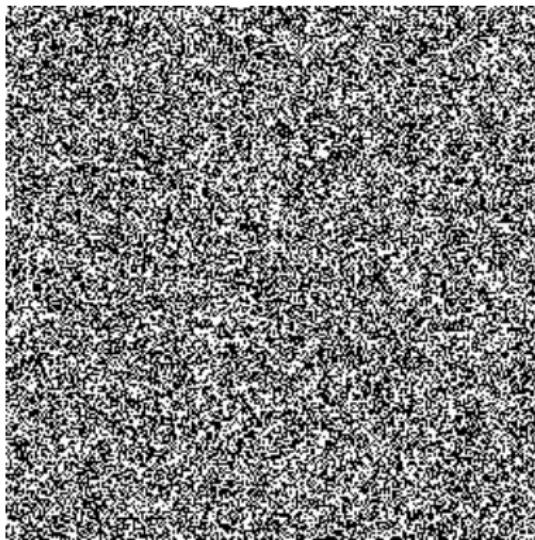
Questions :

- ▶ Quelle valeur pour  $p$  ?
- ▶ Pourquoi se limiter aux carrés ?
- ▶ N'importe quel tirage a une probabilité faible : seuls ceux correspondant à une gestalt élémentaire sont perçus.

## Exemple suite

$L = 256, p = 0.5$

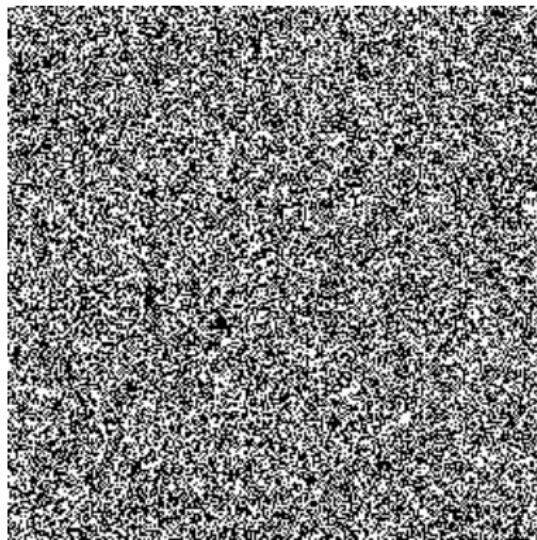
$l_0 = 3$ . NFA = 125.9.



## Exemple suite

$L = 256, p = 0.5$

$l_0 = 5$ . NFA = 0.001.



## PARTIE III : DETECTION D'ALIGNEMENTS DANS UNE IMAGE

## Introduction

Soit  $\{u(i,j)\}_{1 \leq i,j \leq N}$  une image numérique de  $N \times N$  pixels.

Un **segment**  $S$  orienté de longueur  $l$  dans l'image  $u$  est donné par ses deux extrémités  $x_1$  et  $x_l$ .

L'image  $u$  contient un nombre **fini** de segments.

Soit  $m(l)$  le nombre de segments orientés de longueur  $l \geq 1$ , alors

$$\sum_{l=1}^{l_{\max}} m(l) = N^2(N^2 - 1) \simeq N^4.$$

On définit la direction en un point  $(i,j)$  par

$$\vec{d}(i,j) = \frac{\overrightarrow{\nabla u}^\perp}{\|\overrightarrow{\nabla u}\|},$$

où

X1	X2
X3	X4

$$\overrightarrow{\nabla u} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} X_2 - X_1 + X_4 - X_3 \\ X_3 - X_1 + X_4 - X_2 \end{pmatrix}.$$

Exercice : c'est le gradient de l'interpolation d'ordre 2 au centre de la fenêtre  $2 \times 2$ .

On dit qu'un point  $M$  est aligné avec une direction  $\vec{v}$  à la précision  $p$  si

$$|Angle(\vec{d}(M), \vec{v})| \leq p\pi.$$

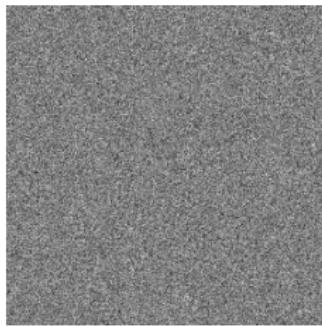
## Hypothèse nulle

### Hypothèse $\mathcal{H}_0$

*Les directions des points sont indépendantes et uniformément distribuées sur  $[0, 2\pi]$ .*

Cette hypothèse est vraie dans une image de bruit blanc si :

- ▶ on ne considère qu'un pixel sur deux (des pixels à distance  $\geq 2$  ont des directions indépendantes) ;
- ▶ la distribution du bruit est gaussienne. (Exercice)



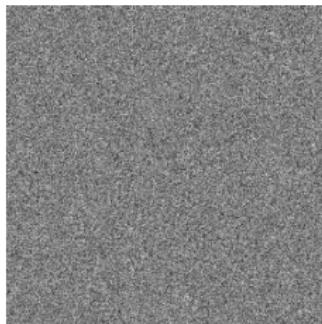
## Hypothèse nulle

### Hypothèse $\mathcal{H}_0$

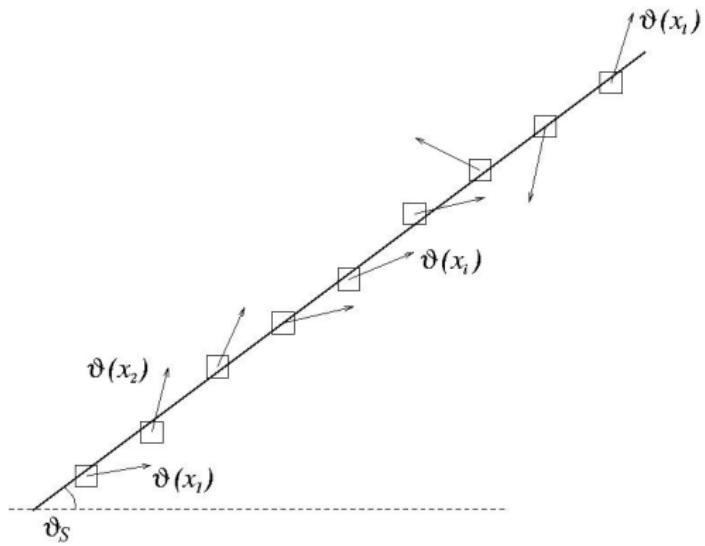
*Les directions des points sont indépendantes et uniformément distribuées sur  $[0, 2\pi]$ .*

Cette hypothèse est vraie dans une image de bruit blanc si :

- ▶ on ne considère qu'un pixel sur deux (des pixels à distance  $\geq 2$  ont des directions indépendantes) ;
- ▶ la distribution du bruit est gaussienne. (Exercice)



$$\mathbb{P}_{\mathcal{H}_0}[\text{dir. en un pt est alignée avec dir. donnée à la précision } p] = \frac{2\pi p}{2\pi} = p.$$



# Principe de groupement

## Principe

Pour un segment  $S$  donné, on compte le nombre de points  $k$  contenus dans  $S$  et alignés avec  $S$  à la précision  $p$ . Si ce nombre est suffisamment grand pour être très peu probable sous l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$ , on retient le segment.

Soit  $\mathbf{S} = \{x_1, \dots, x_l\}$  un segment discret de longueur  $l$  (comptée en points indépendants, i.e. à distance 2) dans une image de bruit blanc gaussien de taille  $N \times N$ .

Soit  $X_i$  la variable aléatoire qui vaut 1 si  $x_i$  est aligné avec  $\mathbf{S}$  à la précision  $p$  et 0 sinon. La variable  $X_i$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p$ .

Soit  $S_l = \sum_{i=1}^l X_i$  = nombre de points alignés avec la direction de  $\mathbf{S}$ , alors :

$$\mathbb{P}_{\mathcal{H}_0}[S_l = k] = \binom{l}{k} p^k (1-p)^{l-k}$$

et donc  $\mathbb{P}_{\mathcal{H}_0}[S_l \geq k] = \mathcal{B}(l, k, p) := \sum_{j \geq k} \binom{l}{j} p^j (1-p)^{l-j}$ .

## Segment $\varepsilon$ -significatif

### Definition

Un segment  $S$  de longueur  $l$  dans une image  $N \times N$  est dit  $\varepsilon$ -significatif s'il contient au moins  $k(l)$  points alignés avec la direction du segment, où

$$k(l) := \min\{k \in \mathbb{N}, \mathcal{B}(l, k, p) \leq \frac{\varepsilon}{N^4}\}.$$

Rappel :  $\mathcal{B}(l, k, p)$  est la queue de la loi binomiale de paramètres  $l$  et  $p$ , et c'est une fonction décroissante de  $k$ .

# Espérance du nombre de détections sous l'hypothèse $\mathcal{H}_0$

## Proposition

*L'espérance du nombre de segments  $\varepsilon$ -significatifs dans une image aléatoire de taille  $N \times N$  qui suit l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$  est inférieure ou égale à  $\varepsilon$ .*

→ On détecte en moyenne moins de  $\varepsilon$  segments  $\varepsilon$ -significatifs dans une image de bruit blanc gaussien.

## Preuve :

Soit  $e_i = 1$  si le  $i$ -ème segment de l'image est  $\varepsilon$ -significatif et 0 sinon.

Soit  $R$  le nombre total de segments  $\varepsilon$ -significatifs dans l'image.

$$\mathbb{E}_{\mathcal{H}_0}[R] = \sum_{i=1}^{N^4} \mathbb{E}[e_i] = \sum_{i=1}^{N^4} \mathbb{P}_{\mathcal{H}_0}[S_{l_i} \geq k(l_i)] = \sum_{i=1}^{N^4} \mathcal{B}(l_i, k(l_i), p) \leq \varepsilon.$$

# Nombre de fausses alarmes

Soit un segment  $S$  de longueur  $l_0$  avec  $k_0$  points alignés.

## Definition

Le **nombre de fausses alarmes (NFA)** de  $S$  est

$$\text{NFA}(S) = \text{NFA}(l_0, k_0) := N^4 \mathcal{B}(l_0, k_0, p) = N^4 \sum_{k=k_0}^{l_0} \binom{l_0}{k} p^k (1-p)^{l_0-k}.$$

→ indique le **degré de confiance, ou la “significativité” d’un alignement**.

Plus  $\text{NFA}(S)$  est faible, plus  $S$  est significatif.

$$S \text{ est } \varepsilon\text{-significatif} \iff k_0 \geq k(l_0) \iff \text{NFA}(S) \leq \varepsilon.$$

## Propriétés du NFA

En utilisant les propriétés de la loi binomiale, on a :

- ▶  $NFA(l_0, 0) = N^4$
- ▶  $NFA(l_0, l_0) = N^4 p^{l_0}$
- ▶  $NFA(l_0, k_0 + 1) < NFA(l_0, k_0)$
- ▶  $NFA(l_0, k_0) < NFA(l_0 + 1, k_0)$        $\rightarrow \rightarrow \bullet \rightarrow \rightarrow \bullet$
- ▶  $NFA(l_0 + 1, k_0 + 1) < NFA(l_0, k_0)$        $\rightarrow \rightarrow \bullet \rightarrow \rightarrow \rightarrow$

Preuve : exercice !

## Conditions suffisante de significativité

On suppose que  $p < 0.5$ .

### Proposition (condition suffisante)

Soit  $S$  un segment de longueur  $l$ , contenant au moins  $k$  points alignés. Si

$$k \geq pl + \sqrt{\frac{4 \log N - \log \varepsilon}{h(p)}} \sqrt{l},$$

où  $p \mapsto h(p)$  est la fonction définie par

$$h(p) = \frac{1}{1-2p} \log \frac{1-p}{p}$$

alors  $S$  est  $\varepsilon$ -significatif.

**Preuve :** Utilise l'inégalité de Hoeffding et le fait que

$$e^{-l[r \log \frac{r}{p} + (1-r) \log \frac{1-r}{1-p}]} \leq e^{-l(r-p)^2 h(p)}.$$

## Conditions nécessaires de significativité

### Proposition (condition nécessaire 1)

On suppose que  $pN^4 \geq 1$ . Soit  $S$  un segment de longueur  $l$ , contenant  $k$  points alignés et 1-significatif. Alors

$$k \geq pl + (1 - p).$$

### Proposition (condition nécessaire 2)

on suppose que  $p \leq \frac{1}{4}$  et  $pN^4 \geq 1$ . Soit  $S$  de longueur  $l$ , contenant  $k$  points alignés et  $\varepsilon$ -significatif. Alors

$$k \geq pl + \alpha(N, \varepsilon) \sqrt{lp(1 - p)},$$

où  $\alpha(N, \varepsilon)$  est défini par  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha(N, \varepsilon)}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \frac{\varepsilon}{N^4}$ .

### Preuve de la CN2 :

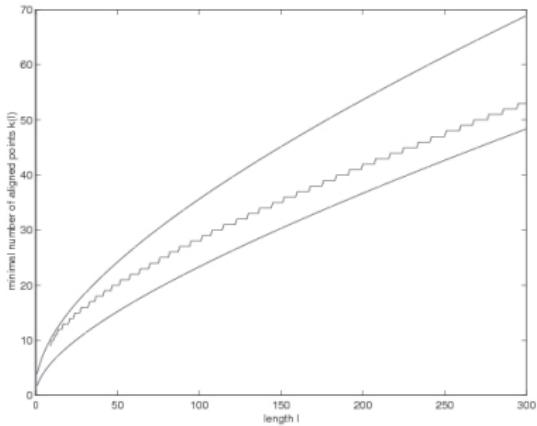
Conséquence du théorème de Slud (1977), qui dit que si  $p \leq \frac{1}{4}$  et  $pl \leq k \leq l$ ,

$$\mathcal{B}(l, k, p) \geq \int_{\frac{k-pl}{\sqrt{lp(1-p)}}}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx.$$

## Comportement asymptotique $k(l)$

On a  $k(l) \simeq pl + \sqrt{Cl \log \frac{N^4}{\varepsilon}}$ , avec  $2p(1-p) \leq C \leq \frac{1}{2}$ .

→ dépendance de  $k(l)$  en  $\log(\varepsilon)$  et  $\log(N)$ . Choix de  $\varepsilon = 1$  satisfaisant en général.



Courbe du milieu :  $k(l)$  pour  $N = 512$ ,  $\varepsilon = 1$  et  $p = \frac{1}{16}$ .

Courbe du haut : condition suffisante.

Courbe du bas : condition nécessaire.

## Dépendance en $\varepsilon$

$$\varepsilon = 0.1.$$



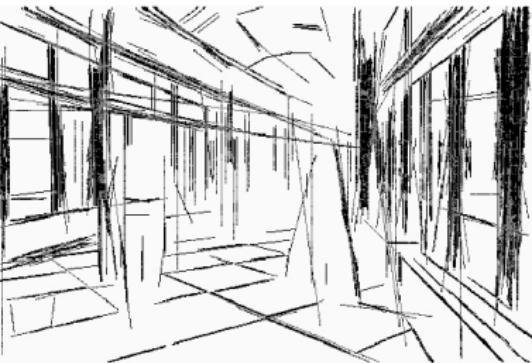
## Dépendance en $\varepsilon$

$\varepsilon = 0.01.$



## Dépendance en $\varepsilon$

$$\varepsilon = 0.001.$$



## Maximalité

$S$  significatif  $\rightarrow$  de nombreux segments contenus dans  $S$  ou le contenant sont également détectés.

### Definition

Un segment  $S$  est dit **maximal significatif** s'il est significatif et si

$$\begin{aligned}\forall B \subset S, \quad NFA(B) &\geq NFA(S), \\ \forall B \supset S, \quad NFA(B) &> NFA(S).\end{aligned}$$

**Propriétés** des segments maximaux significatifs :

- ▶ les extrémités de  $S$  sont alignées avec  $S$ ,
- ▶ les deux points de part et d'autre de  $S$  ne sont pas alignés avec  $S$ .

# Maximalité

## Conjecture

*Si  $S_1$  et  $S_2$  sont deux segments maximaux significatifs distincts d'une même droite tels que  $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ , alors*

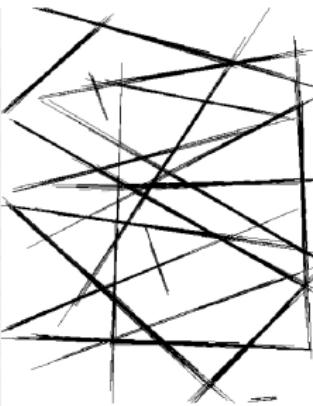
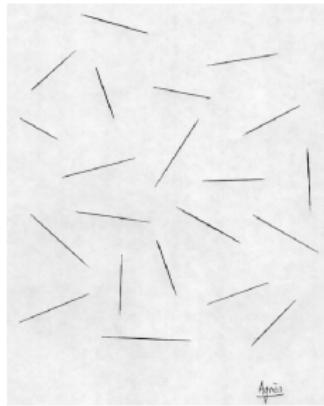
$$\min(NFA(S_1 \cup S_2), NFA(S_1 \cap S_2)) < \max(NFA(S_1), NFA(S_2)).$$

## Conséquence

Deux segments maximaux significatifs sur la même ligne droite ne s'intersectent pas.

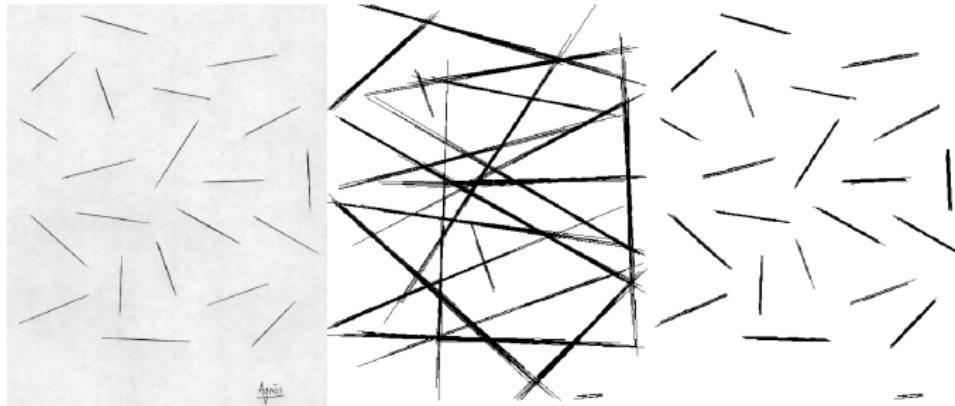
# Maximalité

$$\varepsilon = 10^{-3}.$$

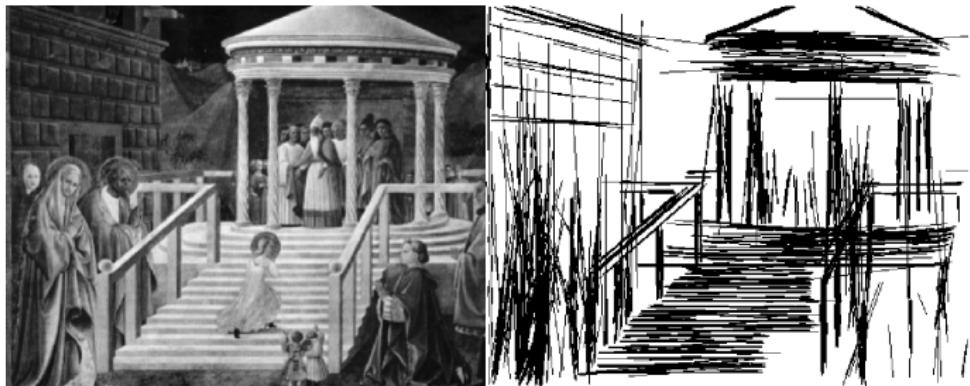


# Maximalité

$$\varepsilon = 10^{-3}.$$



## Exemple de segments maximaux significatifs



## Segments significatifs : les défauts de la méthode

Les principaux défauts de la méthode de détection des segments significatifs sont

- ▶ C'est très lent !
- ▶ On a souvent des « paquets » de segments

→ Solution : faire des segments « épais » qui forment des régions disjointes.

## LSD : Line Segment Detector [Grompone et al. 2008]

Approche de Burns et al. suivie d'une validation de type *a contrario*.

### Algorithme LSD

- ▶ Partition de l'image en *Line-Support Regions* (groupes connexes de pixels partageant la même orientation à une tolérance  $p\pi$  près) ;
- ▶ Approximation de ces régions par des rectangles (masse de chaque pixel proportionnelle au module du gradient) ;
- ▶ Calcul du NFA de chacune de ces régions : pour une région  $r$  contenant  $l$  points dont  $k$  sont alignés avec elle,  $\text{NFA}(r) = N^5 \sum_{j=k}^l \binom{l}{j} p^j (1-p)^{l-j}$ .
- ▶ Les régions de  $\text{NFA} < 1$  sont gardées.

## Exemples



## Exemples



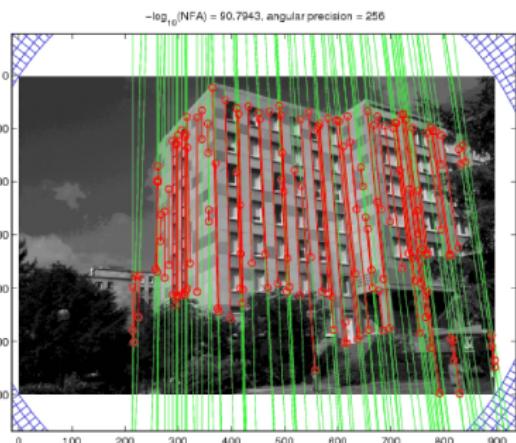
## Alignements, perspective et points de fuite



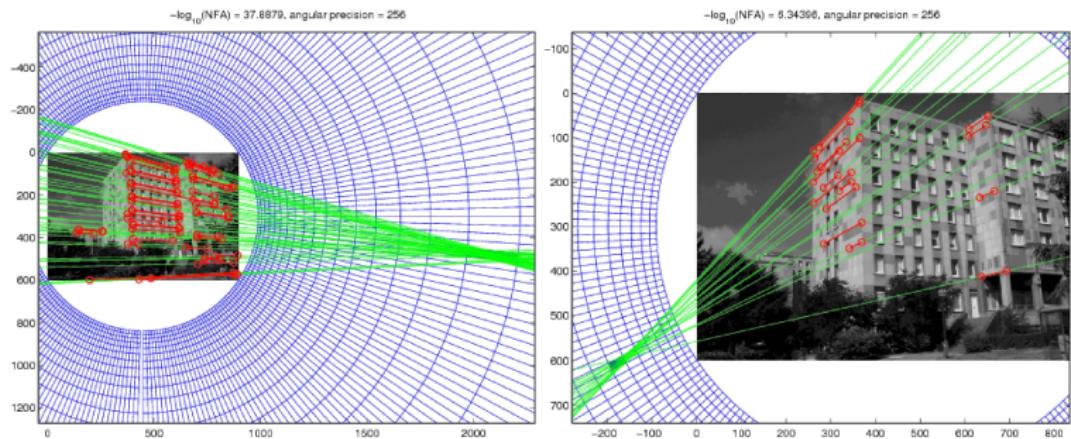
Lorenzetti (XIVe s.), *Annunciation*.

Botticelli (XVe - XVIe s.) *Trois miracles de Saint Zenobius*.

## Points de fuite [Almansa et al. 2003]



## Points de fuite [Almansa et al. 2003]



## PARTIE IV : FRONTIERES SIGNIFICATIVES DANS UNE IMAGE

# Introduction

- ▶ Problème classique d'analyse d'images : extraire les frontières d'une image (edge detection).
- ▶ Principe de la constance de couleur (ou de niveau de gris) en théorie de la Gestalt.
- ▶ Invariance de la perception aux changements de contraste
- ▶ Quelles courbes regarder dans une image ?
  - ▶ toutes les courbes ? (temps de calcul)
  - ▶ candidats naturels : lignes de niveau ou morceaux de lignes de niveau

# Ensembles de niveau

## Definition

Les ensembles de niveau supérieur de  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sont les ensembles

$$\chi_\lambda(u) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; u(\mathbf{x}) \geq \lambda\}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ces ensembles forment une famille décroissante :  $\forall \lambda \leq \mu, \chi_\mu \subset \chi_\lambda$ .  
La connaissance de cette famille est suffisante pour reconstruire  $u$  par  
 $u(x) = \sup\{\lambda; x \in \chi_\lambda\}$ .

## Definition

Les ensembles de niveau inférieur de  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sont les ensembles

$$\chi^\lambda(u) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; u(\mathbf{x}) \leq \lambda\}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ces ensembles forment une famille croissante :  $\forall \lambda \leq \mu, \chi^\lambda \subset \chi^\mu$ .

Si  $g$  est strictement croissante,  $u$  et  $g(u)$  ont globalement les mêmes ensembles de niveau supérieurs ( $\forall \lambda \exists \mu \text{ s.t. } \chi_\lambda(u) = \chi_\mu(g(u))$ ) et réciproquement) et inférieurs.

## Ensembles de niveau

### Definition

Les ensembles de niveau supérieur de  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sont les ensembles

$$\chi_\lambda(u) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; u(\mathbf{x}) \geq \lambda\}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ces ensembles forment une famille décroissante :  $\forall \lambda \leq \mu, \chi_\mu \subset \chi_\lambda$ .  
La connaissance de cette famille est suffisante pour reconstruire  $u$  par  
 $u(x) = \sup\{\lambda; x \in \chi_\lambda\}$ .

### Definition

Les ensembles de niveau inférieur de  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sont les ensembles

$$\chi^\lambda(u) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; u(\mathbf{x}) \leq \lambda\}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ces ensembles forment une famille croissante :  $\forall \lambda \leq \mu, \chi^\lambda \subset \chi^\mu$ .

Si  $g$  est strictement croissante,  $u$  et  $g(u)$  ont globalement les mêmes ensembles de niveau supérieurs ( $\forall \lambda \exists \mu$  s.t.  $\chi_\lambda(u) = \chi_\mu(g(u))$ ) et réciproquement) et inférieurs.

⇒ **Lignes de niveau de  $u$  = frontières topologiques de ses ensembles de niveau**

Si  $u$  est  $C^1$  : courbes de Jordan  $C^1$  pour presque tout  $\lambda$

## Exemples

Lignes de niveaux  $\lambda$  multiples de 5.



## Exemples

Lignes de niveaux  $\lambda$  multiples de 20.



## Exemples

Lignes de niveaux  $\lambda$  multiples de 50.



## Contours contrastés

Soit  $u_0$  image discrète de taille  $N \times N$  et  $N_l$  son nombre de lignes de niveau.

Soit  $L$  une ligne de niveau de  $u_0$  de longueur  $l$  (discrète) mesurée en points indépendants  $\{x_1, \dots, x_l\}$ .

On définit le **contraste de  $u_0$  en  $x$**  comme  $c(x) = |\nabla u_0(x)|$ .

### Definition

Une frontière significative est une ligne de niveau “suffisamment” longue et “suffisamment” contrastée pour ne pas apparaître par hasard.

Quel modèle *a contrario* (hypothèse  $\mathcal{H}_0$ ) sur le contraste ?

- ▶ uniforme ?
- ▶ Donné par l'image elle-même  $H(\mu) = \frac{1}{N^2} \#\{x ; |\nabla u_0|(x) \geq \mu\}$
- ▶ Pour éviter l'influence des zones plates  $H(\mu) = \frac{\#\{x ; |\nabla u_0|(x) \geq \mu\}}{\#\{x ; |\nabla u_0|(x) \neq 0\}}$

## Contours contrastés

Soit  $X_i$  la v.a. mesurant le contraste au point  $x_i$ .

### Hypothèse $\mathcal{H}_0$

On fait l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$  que les  $X_i$  sont iid.

Sous l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$ , on a

$$\mathbb{P}_{\mathcal{H}_0}[\forall i, X_i \geq \mu] = \mathbb{P}_{\mathcal{H}_0}[X_1 \geq \mu]^l.$$

### Definition

Soit  $H$  la distribution empirique  $\mathbb{P}[|\nabla u_0| \geq \mu]$ . On définit le nombre de fausses alarmes d'une ligne de niveau  $L$  de longueur discrète  $l$  et de contraste minimal  $\mu = \min_{x \in L} |\nabla u_0(x)|$  par

$$NFA(L) = N_l H(\mu)^l.$$

La ligne de niveau  $L$  est dite  **$\varepsilon$ -significative** ssi  $NFA(L) \leq \varepsilon$ .

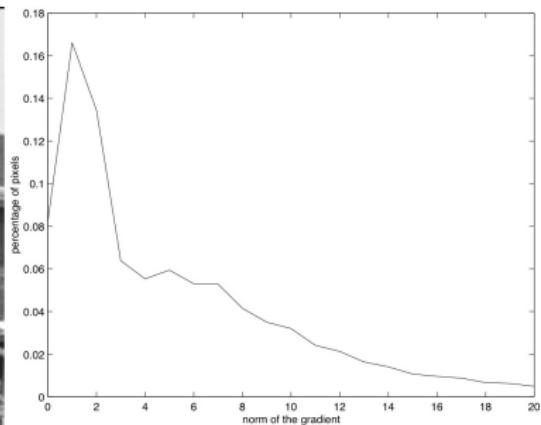
### Proposition

Les lignes de niveau  $\varepsilon$ -significatives sont **invariantes** aux changements de contraste affines.

A. Desolneux, L. Moisan and J.-M. Morel, Edge Detection by Helmholtz Principle, Journal of Mathematical Imaging and Vision, Vol.14, pp.271-284, 2001.

## Exemples

Image et sa distribution de norme du gradient.



## Propriétés

Soit  $F(\mu, l) = H(\mu)^l$ .

- ▶ Si  $l \leq l'$  et  $\mu$  fixé :  $F(\mu, l) \geq F(\mu, l')$  car  $H(\mu) \leq 1$ . A contraste fixé, la courbe la plus longue est la plus significative.
- ▶ Si  $\mu \leq \mu'$  et  $l$  fixé :  $F(\mu, l) \geq F(\mu', l)$  (car  $H$  décroissante). A longueur fixée, la courbe la plus contrastée est la plus significative.
- ▶ Une ligne de niveau de contraste minimal  $\mu$  est  $\varepsilon$ -significative ssi sa longueur est supérieure à

$$l_{\min}(\mu) = \frac{\log \varepsilon - \log N_{ll}}{\log H(\mu)}.$$

- ▶ Une ligne de niveau de longueur  $l$  est  $\varepsilon$ -significative ssi son contraste minimal  $\mu$  est supérieur à

$$\mu_{\min}(l) = H^{-1} \left( \left( \frac{\varepsilon}{N_{ll}} \right)^{\frac{1}{l}} \right).$$

## Maximalité

L'ensemble des lignes de niveau d'une image est organisé en structure d'arbre. Les lignes de niveau  $\varepsilon$ -significatives en forment un sous-arbre.

### Definition

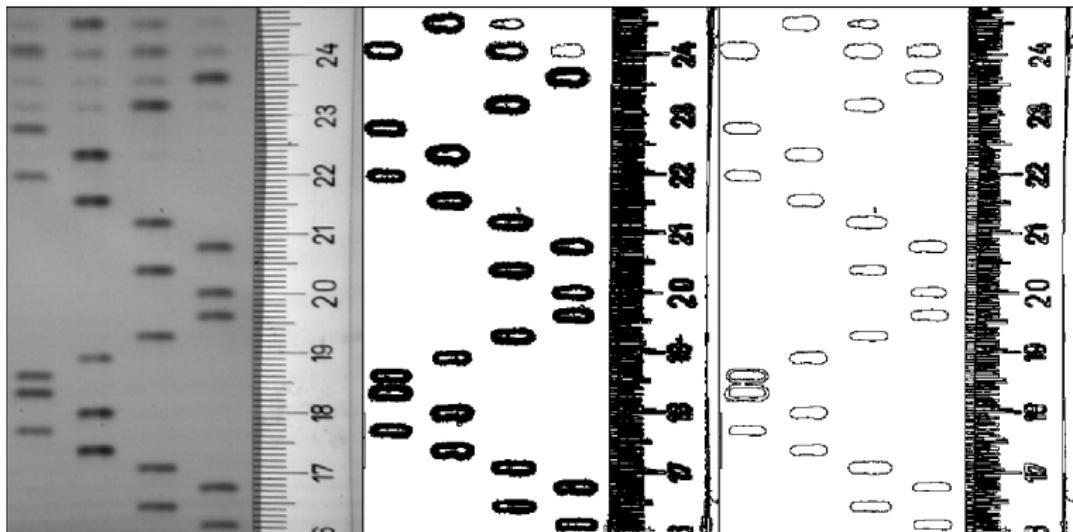
Une **branche monotone** de l'arbre des lignes de niveau est une branche le long de laquelle le niveau de gris est monotone et dont chaque ligne possède un unique descendant. Une branche monotone est maximale si elle n'est pas contenue dans une autre branche monotone.

### Definition

Une ligne de niveau est dite **maximale significative** si elle est significative et que son *NFA* est minimal dans une branche maximale monotone de l'arbre des lignes de niveau.

## Exemples

A gauche, l'image originale ; au milieu, toutes les lignes significatives à  $\varepsilon = 1$ , et à droite toutes les lignes maximales significatives à  $\varepsilon = 1$ .



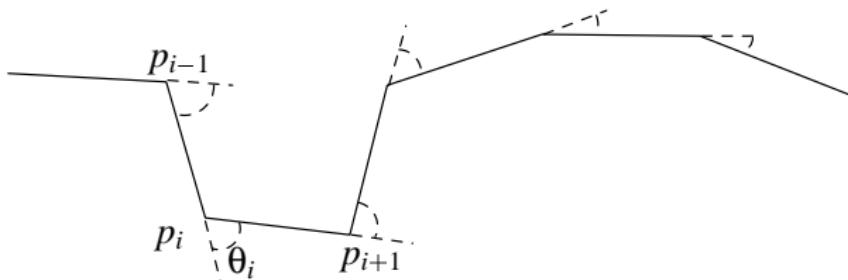
## Bonnes continuations significatives

(D'après F.Cao. "Application of the Gestalt principles to the detection of good continuations and corners in image level lines", Computing and Visualization in Science, Vol 7 (1), 2004)

**But :** Chercher les courbes « régulières », sans s'intéresser au contraste.

Soit  $\Gamma = (p_0, \dots, p_{l+1})$  une courbe discrète de longueur  $l$ , et soit  $\kappa$  sa courbure discrète maximale :

$$\kappa = \max_{1 \leq i \leq l} |\text{Angle}(p_{i+1} - p_i, p_i - p_{i-1})|.$$



**Modèle de bruit**  $\mathcal{H}_0$  : les angles sont i.i.d. de loi uniforme sur  $[0, 2\pi)$ , i.e. la courbe est une “marche aléatoire”.

Soit  $N_c$  le nombre de courbes considérées (en pratique le nombre de morceaux de lignes de niveau de l’image)

### Definition (Bonne continuation significative)

*On dit que  $\Gamma$  est une bonne continuation  $\varepsilon$ -significative si*

$$\kappa < \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \text{NFA}(\Gamma) = N_c \left( \frac{\kappa}{\pi} \right)^l \leq \varepsilon.$$

Définition de **maximalité** : une bonne continuation significative  $\Gamma$  est maximale significative si :  $\forall \Gamma' \subset \Gamma$ ,  $\text{NFA}(\Gamma') \geq \text{NFA}(\Gamma)$  et  $\forall \Gamma' \supsetneq \Gamma$ ,  $\text{NFA}(\Gamma') > \text{NFA}(\Gamma)$ .

Propriété : si  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  sont deux bonnes continuations maximales significatives sur la même ligne de niveau alors  $\Gamma \cap \Gamma' = \emptyset$ .

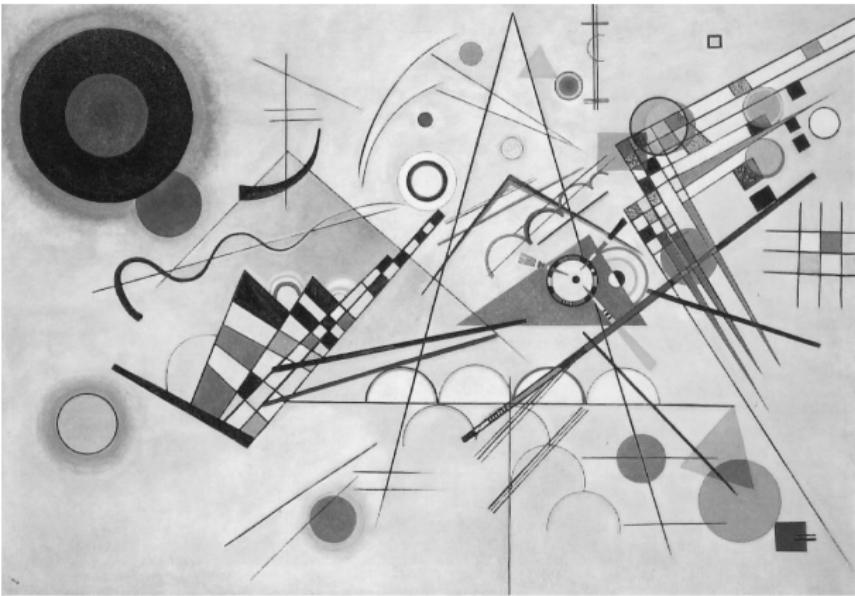


FIGURE: Image originale : Kandinsky.

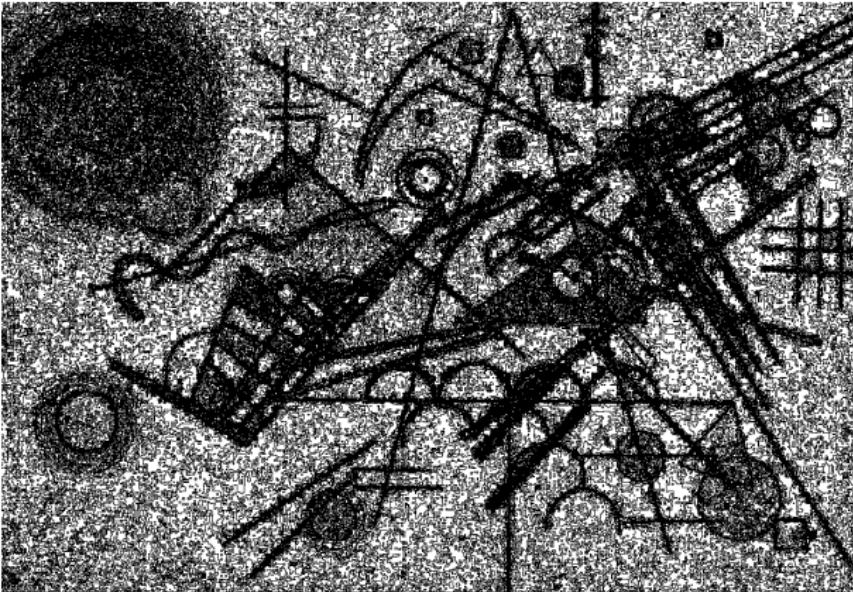
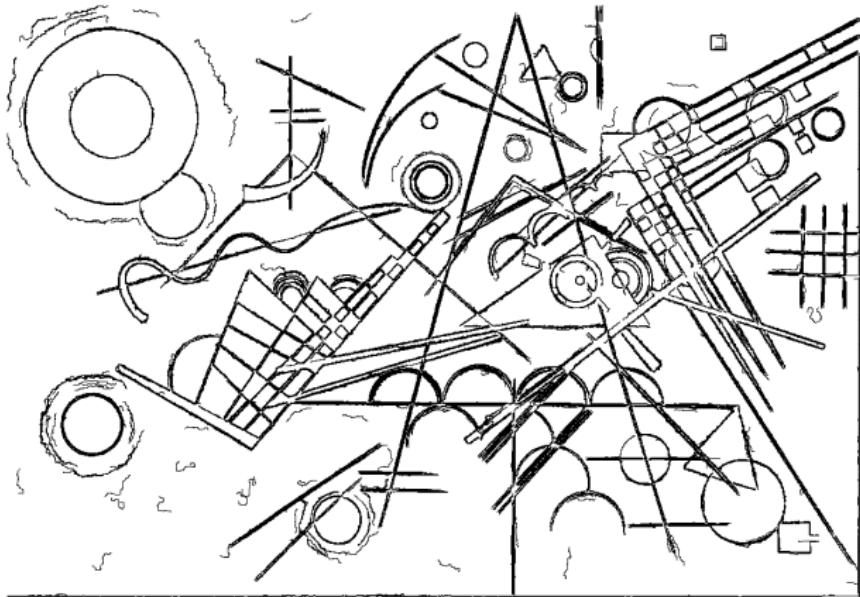


FIGURE: « Toutes » les lignes de niveau.



**FIGURE:** Bonnes continuations maximales significatives.



**FIGURE:** Image (INRIA) de l'église de Valbonne.

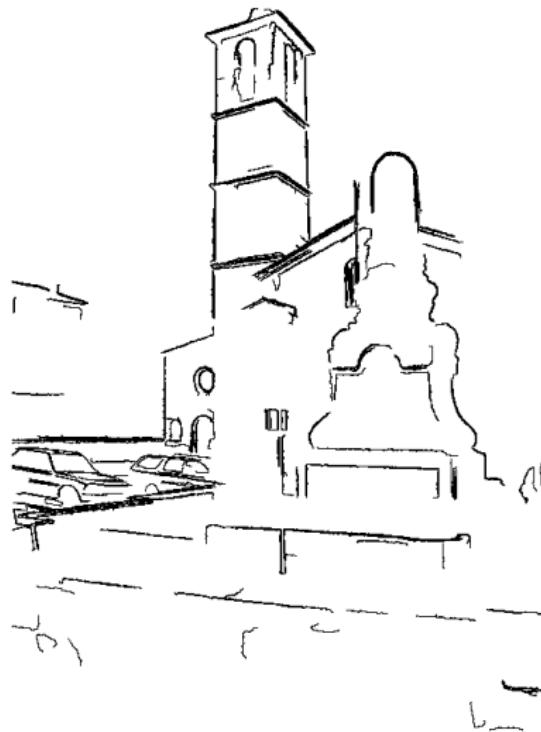


FIGURE: Bonnes continuations maximales significatives.

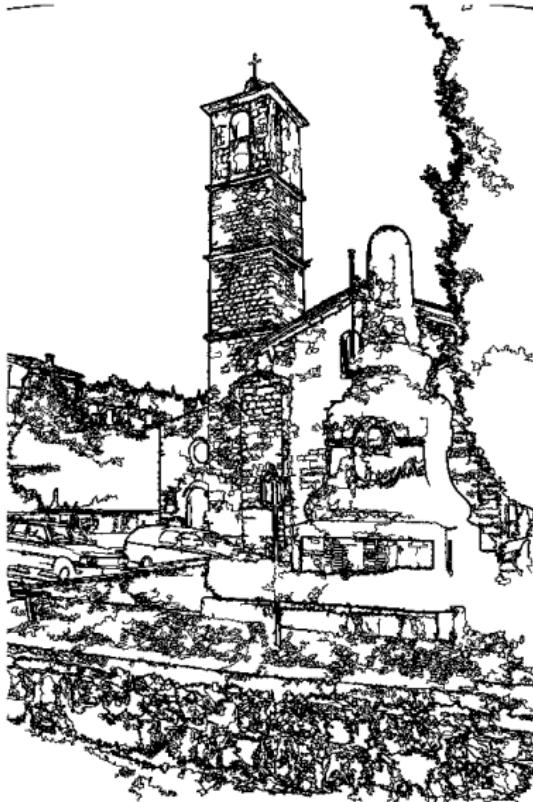


FIGURE: Frontières maximales significatives.

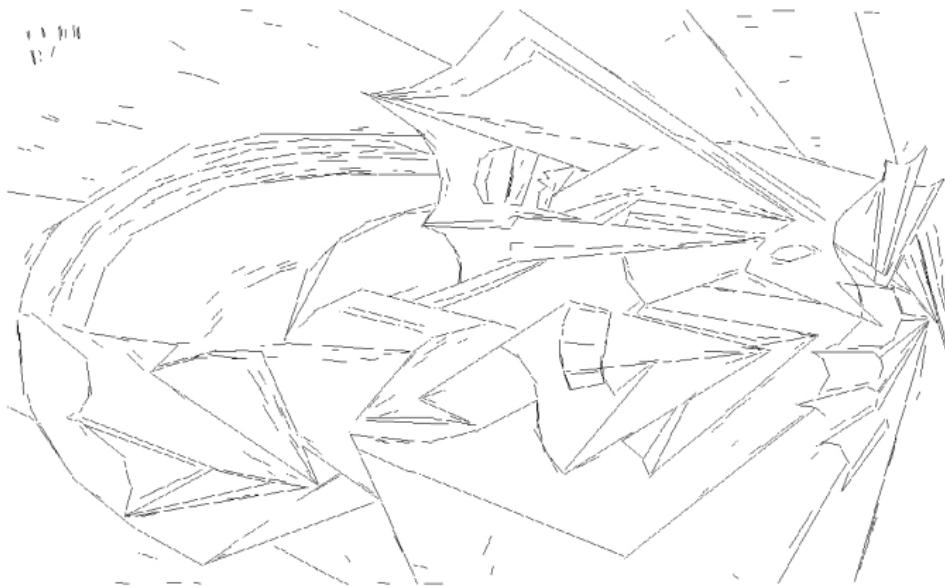
## Autre exemple

Image originale



## Autre exemple

Segments significatifs (Algorithme LSD de Grompone et. al)



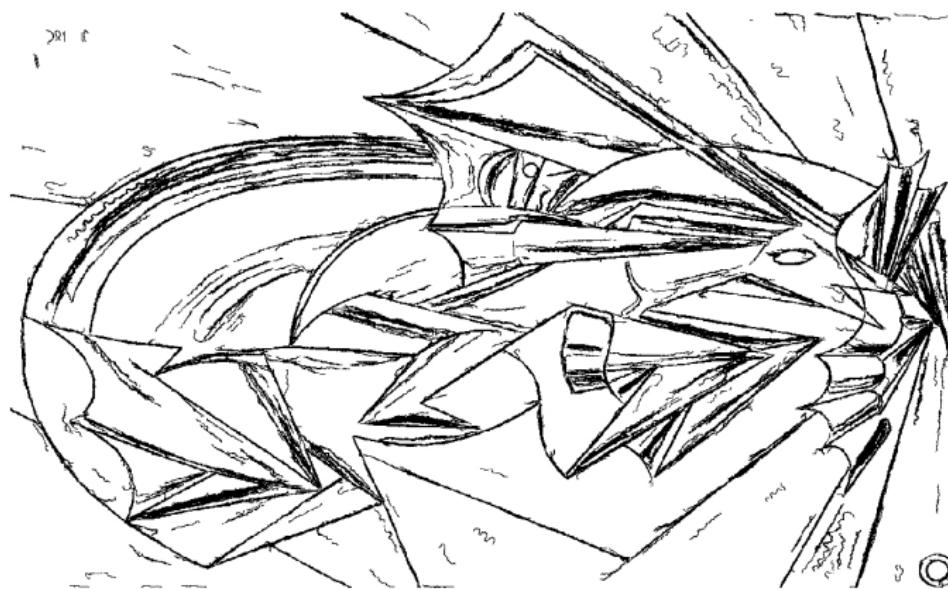
## Autre exemple

### Frontières maximales significatives



## Autre exemple

## Bonnes continuations maximales significatives



## Similarity of a scalar attribute

### For a uniform scalar attribute (gray level, orientation, etc.)

Assume we have  $M$  “objects”, and each of them has an attribute  $q \in \{1, 2, \dots, L\}$ . Let a group of  $k$  of them has their scalar attribute  $q$  such that  $a \leq q \leq b$ . Define its Number of False Alarm by

$$NFA([a, b]) = \frac{L(L+1)}{2} \cdot \mathcal{B}\left(M, k, \frac{b-a+1}{L}\right)$$

### For a scalar attribute with decreasing distribution (area, length, etc.)

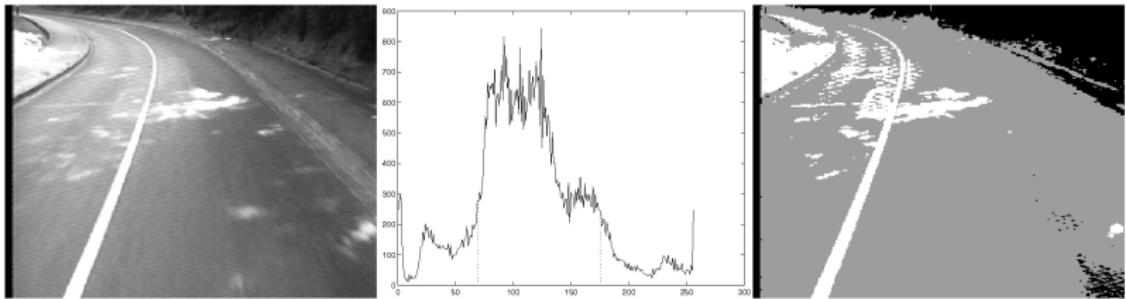
Define its Number of False Alarm by

$$NFA([a, b]) = \frac{L(L+1)}{2} \cdot \max_{p \in \mathcal{D}} \mathcal{B}\left(M, k, \sum_{i=a}^b p(i)\right)$$

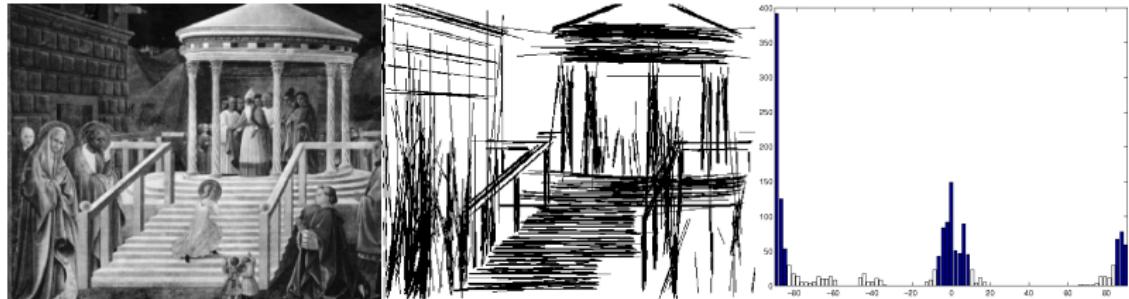
where  $\mathcal{D}$  : set of decreasing probability distributions on  $\{1, \dots, L\}$

## A first example

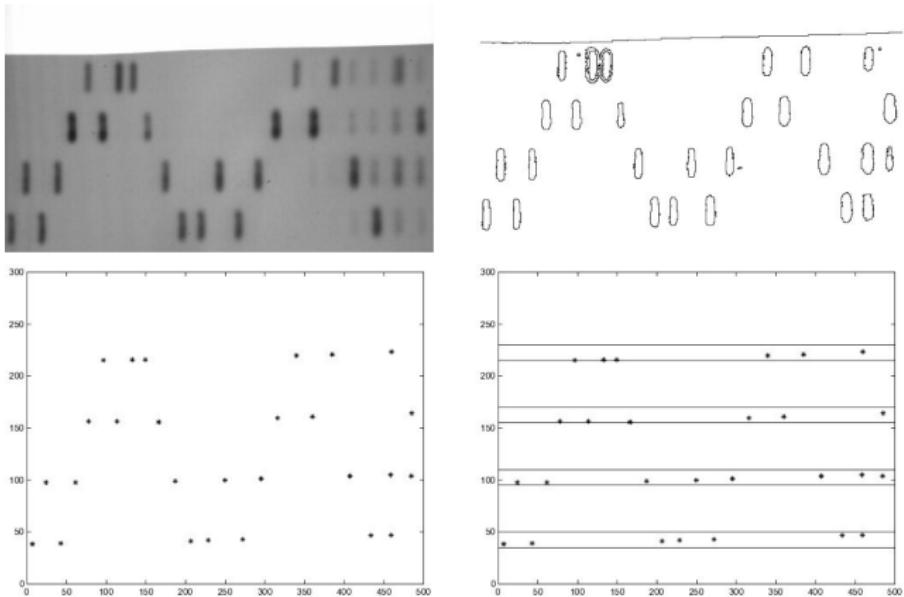
A first application is the study of an image grey-level histogram. Looking for the maximal meaningful intervals is a way to obtain an automatic gray level quantization.



## A second example : recursivity



Uccello's painting : maximal meaningful alignments and histogram of orientations. Two maximal meaningful modes are found corresponding respectively to the horizontal and vertical segments.



Gestalt grouping principles at work for building an “order 3” gestalt (alignment of blobs of the same size). First row : original DNA image (left) and its maximal meaningful boundaries (right). Second row : left, barycenters of all meaningful regions whose area is inside the only maximal meaningful mode of the histogram of areas ; right, meaningful alignments of these points.

## Conclusion

- ▶ Le principe de Helmholtz combiné avec les lois de groupement de la Gestalt permet de développer des méthodes efficaces pour l'analyse d'images.

## Conclusion

- ▶ Le principe de Helmholtz combiné avec les lois de groupement de la Gestalt permet de développer des méthodes efficaces pour l'analyse d'images.
- ▶ A donné lieu à de nombreuses applications en détection mais aussi en reconnaissance de formes [Musé, Sur, Cao, Gousseau] ; en mise en correspondance d'images [Rabin, Delon, Gousseau] ; en géométrie épipolaire [Moisan, Stival], en détection de mouvement [Cao, Veit, Bouthemy] ; en stéréovision [Sabater et al.] ; en débruitage ; etc.

## Conclusion

- ▶ Le principe de Helmholtz combiné avec les lois de groupement de la Gestalt permet de développer des méthodes efficaces pour l'analyse d'images.
- ▶ A donné lieu à de nombreuses applications en détection mais aussi en reconnaissance de formes [Musé, Sur, Cao, Gousseau] ; en mise en correspondance d'images [Rabin, Delon, Gousseau] ; en géométrie épipolaire [Moisan, Stival], en détection de mouvement [Cao, Veit, Bouthemy] ; en stéréovision [Sabater et al.] ; en débruitage ; etc.
- ▶ D'un point de vue mathématique : de nombreuses questions de géométrie stochastique.

## Conclusion

- ▶ Le principe de Helmholtz combiné avec les lois de groupement de la Gestalt permet de développer des méthodes efficaces pour l'analyse d'images.
- ▶ A donné lieu à de nombreuses applications en détection mais aussi en reconnaissance de formes [Musé, Sur, Cao, Gousseau] ; en mise en correspondance d'images [Rabin, Delon, Gousseau] ; en géométrie épipolaire [Moisan, Stival], en détection de mouvement [Cao, Veit, Bouthemy] ; en stéréovision [Sabater et al.] ; en débruitage ; etc.
- ▶ D'un point de vue mathématique : de nombreuses questions de géométrie stochastique.
- ▶ Lien avec la perception visuelle : adéquation entre les seuils prédits par les NFA et les seuils perceptifs ?