

1 Orientation du gradient

Soit u une image de taille $M \times N$. Le gradient discret de u au point (m, n) est défini par

$$Du(m, n) = \begin{pmatrix} u_x(m, n) \\ u_y(m, n) \end{pmatrix} := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u(m+1, n) + u(m+1, n+1) - u(m, n) - u(m, n+1) \\ u(m, n+1) + u(m+1, n+1) - u(m, n) - u(m+1, n) \end{pmatrix}.$$

On peut définir l'orientation du gradient en (m, n) comme l'angle $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que, en utilisant la notation en nombres complexes, $u_x + iu_y = Re^{i\theta}$. Le but de cet exercice est d'étudier la loi de θ en fonction de la loi que suivent les valeurs des pixels de u .

1) **Bruit gaussien.** Supposons que les pixels de l'image u sont des variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées suivant une loi gaussienne de moyenne μ et de variance σ^2 . Soit (m, n) fixé. Montrez que $\theta(m, n)$ est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 2\pi)$. (Indication: posez $a = u(n+1, m) - u(n, m+1)$ et $b = u(n+1, m+1) - u(m, n)$ et montrez que $a + ib = R\sqrt{2}e^{i(\theta - \pi/4)}$). Quelle est la loi de $R(m, n)$?

2) **Bruit uniforme.** Supposons que les pixels de l'image u sont des variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. On va montrer que la loi de θ a une densité $\pi/2$ -périodique dont la restriction à $[-\pi/4, \pi/4]$ s'écrit

$$\frac{1}{12} \left((1 + \tan^2(\frac{\pi}{4} - |\theta|)) \left(2 - \tan(\frac{\pi}{4} - |\theta|) \right) \right).$$

Soient (m, n) fixé, on pose $a = u(n+1, m) - u(n, m+1)$ et $b = u(n+1, m+1) - u(m, n)$. Montrez que $a + ib = R\sqrt{2}e^{i(\theta - \pi/4)}$. Montrez que a et b sont des variables indépendantes et suivent une même loi de densité h , telle que $h(x) = 1 - |x|$ pour $|x| \leq 1$ et $h(x) = 0$ sinon. Soit $\alpha = \theta - \frac{\pi}{4}$, montrez que $b = a \tan(\alpha)$. Déduisez en la fonction de répartition de α sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ en remarquant que $\mathbb{P}(0 \leq \alpha \leq \alpha_0) = \mathbb{P}(0 \leq b \leq \tan(\alpha_0)a)$. Quelle est la loi de α sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, puis sur $[0, 2\pi]$ par symétrie ?

Tracez cette fonction sous matlab.

2) **Biais de quantification.** On suppose que u est quantifiée sur seulement deux valeurs 0 et 1. Quelles valeurs peut prendre l'orientation du gradient de u ? Pour une image de bruit uniforme quantifiée sur k valeurs, les orientations multiples de $\frac{\pi}{4}$ sont toujours favorisées. Pouvez-vous expliquer pourquoi ?

3) Vérifiez expérimentalement les résultats précédents sous Matlab: générez de telles images et calculez les histogrammes d'orientations du gradient correspondants. Tracez le même histogramme pour une image réelle (par exemple l'image **clown** de Matlab). Qu'observez-vous ? Comment peut-on expliquer, dans le cas d'une image réelle, que certaines orientations soient privilégiées ?

2 Première inégalité de Hoeffding

Dans cet exercice, on se propose d'étudier les propriétés de $S_l = \sum_{i=1}^l X_i$, lorsque les X_i sont des variables aléatoires i.i.d.. La **loi des grands nombres** nous dit que si les X_i sont intégrables et ont pour moyenne p alors $\frac{S_l}{l}$ converge presque sûrement vers p , c'est-à-dire

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_l}{l} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} p\right) = 1.$$

Par suite, si $r > p$, $\mathbb{P}(S_l \geq rl)$ tend vers 0 quand l tend vers l'infini (la convergence presque sûre implique la convergence en probabilité). Le but de ce qui suit est d'étudier la vitesse de convergence de cette probabilité vers 0.

On rappelle que si deux variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes, alors pour toutes fonctions mesurables f et g de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , $f(X_1)$ et $g(X_2)$ sont aussi indépendantes. On rappelle également que si X_1, \dots, X_l sont indépendantes, alors $\mathbb{E}(X_1 \dots X_l) = (\mathbb{E}X_1) \dots (\mathbb{E}X_l)$.

Soient X_1, \dots, X_l des variables aléatoires indépendantes telles que $0 \leq X_i \leq 1$. Soit $S_l = \sum_{i=1}^l X_i$ et $p = \mathbb{E}[\frac{S_l}{l}]$. On veut prouver que pour tout $0 < t < 1 - p$,

$$\mathbb{P}(S_l \geq (p+t)l) \leq \left(\frac{p}{p+t}\right)^{l(p+t)} \left(\frac{1-p}{1-p-t}\right)^{l(1-p-t)}. \quad (1)$$

1) Soit X une variable aléatoire telle que $a \leq X \leq b$ et soit $\lambda > 0$. En utilisant la convexité de la fonction $x \mapsto e^{\lambda x}$, montrez que

$$\mathbb{E}[e^{\lambda X}] \leq \frac{b - \mathbb{E}[X]}{b - a} e^{\lambda a} + \frac{\mathbb{E}[X] - a}{b - a} e^{\lambda b}.$$

2) Une des principales astuces utilisées dans les estimations de type grandes déviations est que $\mathbf{1}_{x \geq 0} \leq e^{\lambda x}$ pour $\lambda > 0$. Montrez cette inégalité et déduisez en que

$$\mathbb{P}(S_l \geq (p+t)l) \leq e^{-\lambda(p+t)l} \prod_{i=1}^l \mathbb{E}[e^{\lambda X_i}].$$

3) Soit $p_i = \mathbb{E}[X_i]$. On suppose que $0 \leq X_i \leq 1$. Montrez que

$$\prod_{i=1}^l \mathbb{E}[e^{\lambda X_i}] \leq \prod_{i=1}^l (1 - p_i + p_i e^{\lambda}).$$

Vérifiez que cette inégalité devient une égalité quand les X_i sont des variables de Bernoulli.

4) Montrez l'inégalité arithmético-géométrique: si a_1, \dots, a_l sont des nombres réels positifs, alors

$$\left(\prod_{i=1}^l a_i\right)^{1/l} \leq \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l a_i.$$

5) Déduisez en que $\prod_{i=1}^l \mathbb{E}[e^{\lambda X_i}] \leq (1 - p + p e^{\lambda})^l$.

6) Utilisez 2) et 5) pour majorer $\mathbb{P}(S_l \geq (p+t)l)$. Prouvez que le majorant en question est minimal pour $\lambda = \log \frac{(1-p)(p+t)}{(1-p-t)p}$. Vérifiez que ce nombre est positif quand $0 < t < 1 - p$ et déduisez en la première inégalité de Hoeffding.

7) Soit $0 \leq p \leq 1$ et $l \in \mathbb{N}^*$. En considérant le cas particulier des variables X_i de Bernoulli, déduisez de ce qui précède que pour tout entier k tel que $pl \leq k \leq l$,

$$\mathcal{B}(l, k, p) \leq e^{-l\mathcal{H}(\frac{k}{l}, p)},$$

où $\mathcal{B}(l, k, p) = \sum_{i=k}^l \binom{l}{i} p^i (1-p)^{l-i}$ et $\mathcal{H}(r, p) = r \log \frac{r}{p} + (1-r) \log \frac{1-r}{1-p}$. Dans quelle mesure cette majoration constitue t'elle une bonne approximation de $\mathcal{B}(l, k, p)$?

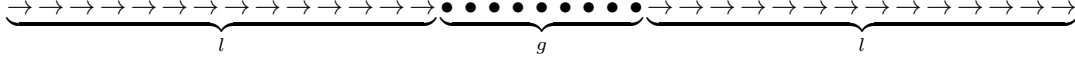
Pour le vérifier, tracez sous Matlab les fonctions $k \rightarrow -\frac{1}{l} \log \mathcal{B}(l, k, p)$ et $k \rightarrow \mathcal{H}(\frac{k}{l}, p)$ pour différentes valeurs de p et l ($\lceil pl \rceil \leq k \leq l$). Vous pouvez utiliser la fonction Beta incomplète de Matlab (la valeur $\mathcal{B}(l, k, p)$ est obtenue par `betainc(p, k, l - k + 1)`).

3 Segments significatifs

Soit $\mathcal{B}(l, k, p) = \sum_{j=k}^l \binom{l}{j} p^j (1-p)^{l-j} = \mathbb{P}(S_l \geq k)$ la queue de la loi binomiale. On rappelle qu'un segment S de longueur l contenant k ($1 \leq k \leq l$) points alignés avec une précision p dans une image de N^2 pixels est dit ϵ -significatif si

$$\text{NFA}(l, k) := N^4 \mathcal{B}(l, k, p) \leq \epsilon.$$

On suppose dans toute la suite de l'exercice qu'on a, sur une même droite, deux segments de même longueur l (comptée en pixels indépendants) tels que : tous les points appartenant aux segments ont leur orientation alignée avec celle du segment à la précision p près, et tous les points dans le "trou" de longueur g entre les deux segments n'ont pas leur orientation alignée. Ceci est représenté par la figure ci-dessous.



1) Montrer que si A_1 et A_2 désignent les deux segments et si S_g désigne le segment obtenu par union de A_1 , A_2 et du "trou", alors:

$$\text{NFA}(A_1) = \text{NFA}(A_2) = N^4 \mathcal{B}(l, l, p) = N^4 p^l \quad \text{et} \quad \text{NFA}(S_g) = N^4 \mathcal{B}(2l + g, 2l, p).$$

2) Montrer que si

$$g > 2 \frac{1-p}{p} l$$

alors S_g n'est pas significatif.

Que devient numériquement cette condition lorsque $p = 1/16$?

4 Propriétés élémentaires de la queue de la binomiale et du nombre de fausses alarmes

1) Montrez le principe récursif suivant :

$$\mathcal{B}(l, k, p) = p \mathcal{B}(l-1, k-1, p) + (1-p) \mathcal{B}(l-1, k, p) \quad \forall k, l, 1 \leq l, 1 \leq k \leq l.$$

Comment utiliser cette relation pour écrire un programme qui tabulerait les valeurs de la queue de la binomiale en fonction de k et l à p fixé ?

2) Prouvez les propriétés ci-dessous et donnez-en une interprétation en termes de significativité :

1. $\text{NFA}(l, 0) = N^4$;
2. $\text{NFA}(l, l) = N^4 p^l$. Quelle est la taille minimale d'un segment 1-significatif ayant tous ses points alignés quand $N = 512$ et $p = \frac{1}{16}$?
3. $\text{NFA}(l, k+1) < \text{NFA}(l, k)$;
4. $\text{NFA}(l, k) < \text{NFA}(l+1, k)$;
5. $\text{NFA}(l+1, k+1) < \text{NFA}(l, k)$.

5 Interpolation bilinéaire d'une image

Dans tout l'exercice, on considère une image discrète u sur la grille $[1, N]^2$.

1) Soient quatre pixels voisins de centres respectifs (i, j) , $(i+1, j)$, $(i+1, j+1)$ et $(i, j+1)$, et de valeurs de gris respectives a , b , c et d . On note $C_{i,j}$ le carré dont les sommets sont les centres de ces quatre pixels. Son centre est le point $(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$. $C_{i,j}$ est appelé "pixel dual."

Montrez qu'il existe un unique 4-uple $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ tel que la fonction v définie par $v(x, y) = \alpha xy + \beta x + \gamma y + \delta$ sur $C_{i,j}$ ait la même valeur que u aux sommets de $C_{i,j}$.

De cette manière, on définit une fonction v par morceaux sur tous les pixels duaux. Montrez que v est continue sur $[1, N]^2$.

2) Soit λ un réel entre 0 et 255, et soit $L_\lambda = \{(x, y), v(x, y) = \lambda\}$. Montrez que pour tout pixel dual $C_{i,j}$, l'ensemble $L_\lambda \cap C_{i,j}$ est soit vide, soit l'un des ensembles suivants :

1. tout le pixel dual $C_{i,j}$;

2. un morceau d'hyperbole connectant un côté du carré à un autre ;
3. deux morceaux disjoints d'hyperbole connectant chacun un côté du carré à un autre ;
4. un segment de droite connectant un côté du carré à un autre ;
5. deux segments de droite perpendiculaires entre eux et parallèles aux côtés du carré.

Quelles conditions doivent vérifier a, b, c, d pour que le premier cas soit réalisé ? Le cinquième ?

3) Supposons que λ n'est pas un entier. Montrez que L_λ est la réunion d'un ensemble de courbes C^∞ par morceaux qui ne peuvent se rencontrer qu'en des points selles. Montrez également que ces courbes sont soit fermées, soit ouvertes et reliant deux points de bord de l'image.

4) Dessinez la carte topographique de l'image suivante ($N = 4$) :

$$u = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

5) Calculez le gradient $Dv(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$ au centre d'un pixel dual en fonction des valeurs aux sommets du carré $C_{i,j}$.

6 LSD : Line Segment Detector [Grompone et al. 2008]

Récemment, Grompone et al. ont proposé un détecteur de segments s'inspirant de l'approche de détection d'alignements vue en cours et d'un algorithme dû à Burns et al. Le déroulement de l'algorithme est le suivant :

- Partition de l'image en *Line-Support Regions* (groupes connexes de pixels partageant la même orientation à une tolérance $p\pi$ près) ;
- Approximation de ces régions par des rectangles ;
- Calcul du NFA de chacun de ces rectangles : pour un rectangle r contenant l points dont k sont alignés avec elle, $\text{NFA}(r) = N^5 \sum_{j=k}^l \binom{l}{j} p^j (1-p)^{l-j}$.
- Les rectangles de NFA inférieur à 1 sont gardés.

Vous pouvez tester cet algorithme en ligne sur la page [http : //www.ipol.im](http://www.ipol.im) dans la rubrique "Segmentation and edges".

Observez le résultat du LSD sur une image de votre choix. Que se passe t'il sur les lignes courbes de l'image ? Manipulez l'image (quantification, zoom avant ou arrière, etc.) et observez l'effet des ces manipulations sur le résultat du LSD.