

Fonction de Green du d'Alembertien

Baptiste Guilleminot

February 2025

Introduction

L'objectif de ce petit cours est de reprendre le calcul de la fonction de Green du d'Alembertien de manière rigoureuse (via la théorie des distributions) et de montrer la cohérence avec les méthodes de régularisation utilisées en physique. Ce pdf reprend le contenu de la vidéo youtube disponible [ici](#). Je ne reviendrai pas sur l'écriture covariante des lois de Maxwell ni sur les prémices de la théorie des distributions. Pour ces raisons, la vidéo associée et ce cours seront un peu plus difficiles d'accès que la vidéo précédente.

On pourrait se demander pourquoi on fait cela. Le d'Alembertien est un opérateur très courant qui est souvent retrouvé dans les systèmes ondulatoires. On peut par exemple le retrouver dans le cas de l'électromagnétisme en regardant les équations pour le potentiel vecteur.

Voici un rapide rappel d'où vient le d'Alembertien en électromagnétisme : l'équation des champs en électromagnétisme est $\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$ ¹ avec $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ où A^μ est le potentiel vecteur et J^μ est le courant. On a donc :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = J^\nu \quad (1)$$

On a un choix lié à l'invariance de jauge sur A . On peut par exemple choisir la jauge de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$. On a alors :

$$\square A^\mu = J^\mu \quad (2)$$

Où $\square = \partial_\mu \partial^\mu$ est le d'Alembertien. J^μ est une grandeur qui dépend de la situation physique. Or, on aimerait bien pouvoir dire des choses générales sur les solutions sans spécifier la situation exacte. Pour cela, on va se servir d'un outil qui permet de faire le lien entre la cause du phénomène et la conséquence autre que l'équation différentielle, la solution élémentaire ou fonction de Green $G \in S'(\mathbb{C})$ (l'espace des distributions tempérées). Cette solution est donnée par :

$$\square G = \delta \quad (3)$$

Où δ est le delta de Dirac en 4 dimensions.

Le lien entre la solution physique et cette distribution est permise par deux choses. La linéarité de l'opérateur différentiel permet d'écrire :

$$\square(G \star J^\nu) = \square(G) \star J^\nu = \delta \star J^\nu \quad (4)$$

Où \star est le produit de convolution qui est bien défini entre une distribution et une fonction C^∞ à support compact. On peut ensuite utiliser le fait que δ est le neutre du point de vue du produit de convolution. On a alors :

$$A^\nu = G \star J^\nu \quad (5)$$

Il nous reste donc plus qu'une étape pour résoudre cette équation différentielle, trouver la fonction de Green de l'opérateur d'Alembertien ce qui est loin d'être trivial.

Ce problème fut soulevé lors du cours d'électrodynamique classique et quantique dispensé par Samuel Wallon. Je tiens à remercier Robin Zegers pour avoir pris le temps de m'aider pour ce calcul.

1. J'ai choisie comme convention de mettre les -1 sur la partie spatiale de la métrique ($ds^2 = dx_0^2 - \vec{dx}^2$) et de prendre les unités naturelles ($c = \hbar = \mu_0 = 1$).

Table des matières

1	Résolution via la théorie des distributions	3
1.1	Résolution dans l'espace de Fourier	3
1.2	Résolution temporelle	4
1.3	Et pour la partie spatiale	5
1.4	Remarques sur le résultat	6
2	Résolution avec les régularisations	7
2.1	Le "choix" d'une régularisation	7
2.2	Calcul d'une fonction de Green	8

Chapitre 1

Résolution via la théorie des distributions

1.1 Résolution dans l'espace de Fourier

On va oublier un peu les problèmes physiques et s'intéresser au problème d'un point de vue mathématique. On va donc chercher à résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante dans $S'(\mathbb{R})$:

$$\square G = \delta \quad (1.1)$$

Pour cela, on va passer dans le domaine de Fourier afin de pouvoir réécrire cette équation sous une forme algébrique. On va prendre comme convention pour la transformée de Fourier temporelle pour $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (de \mathbb{R} dans \mathbb{C}) :

$$\forall k_0 \in \mathbb{R} \quad \mathcal{F}_0[f](k_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 f(x_0) e^{ik_0 x_0} \quad (1.2)$$

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \mathcal{F}_0^\dagger[f](x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_0}{2\pi} f(k_0) e^{-ik_0 x_0} \quad (1.3)$$

Pour la transformée de Fourier spatiale, en considérant $f \in L^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$, on pose :

$$\forall \vec{k} \in \mathbb{R} \quad \mathcal{F}_s[f](\vec{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} d^3x f(\vec{x}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (1.4)$$

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R} \quad \mathcal{F}_s^\dagger[f](\vec{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (1.5)$$

On peut alors redémontrer un résultat très analogue à celui pour la transformée de Fourier 1D et on obtient : $\partial_\mu \rightarrow_{\mathcal{F}} k_\mu$. On a alors pour tout $\tilde{k} \in \mathbb{R}^4$:

$$\mathcal{F}[\square G](\tilde{k}) = -k_\mu k^\mu \mathcal{F}[G](\tilde{k}) \quad (1.6)$$

$$= \mathcal{F}[\delta](\tilde{k}) = 1 \quad (1.7)$$

On va tout de suite réécrire cette équation en remarquant que : $k_\mu k^\mu = k_0^2 - \vec{k}^2 = (k_0 - k)(k_0 + k)$ où on note $|\vec{k}| = k$. On a alors :

$$(k_0 - k)(k_0 + k) \mathcal{F}[G](\tilde{k}) = -1 \quad (1.8)$$

On pourrait alors se dire que la suite est facile. Il suffit de passer le terme $(k_0 - k)(k_0 + k)$ de l'autre côté et de prendre la transformée de Fourier inverse. Le problème est que l'inverse n'est pas dans $S'(\mathbb{R}^4)$ à cause des deux pôles. Il va donc falloir faire très attention lorsque l'on fait cette opération. On va voir ce point dans le prochain paragraphe.

1.2 Résolution temporelle

Dans un premier temps, on va fixer $k \in \mathbb{R}_+^*$ et s'intéresser uniquement à la partie temporelle. On va noter $\hat{G}_k : k_0 \rightarrow \mathcal{F}[G](k_0, k)$. On a donc :

$$\forall k_0 \in \mathbb{R} \quad (k_0 - k)(k_0 + k)\hat{G}_k(k_0) = -1 \quad (1.9)$$

L'objectif est d'inverser le polynôme en k_0 . Pour cela, on définit la distribution tempérée valeur principale de $\frac{1}{x}$ définie par :

$$\forall \phi \in S(\mathbb{R}) \quad \langle vp \frac{1}{x}, \phi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} dx \frac{\phi(x)}{x} \quad (1.10)$$

On remarque que $x \rightarrow x \in C_{slow}^\infty$ donc le produit $(x \rightarrow x) \times vp \frac{1}{x} = 1$ est bien défini. On a alors envie d'écrire :

$$\hat{G}_k(k_0) = -vp \frac{1}{k - k_0} \times \frac{1}{k + k_0} \quad (1.11)$$

Or on fait ici le produit de deux distributions singulières ce qui n'est pas évident à définir. On va donc contourner la difficulté en utilisant la décomposition en facteurs premiers :

$$-\frac{1}{2k} \left(vp \frac{1}{k_0 - k} - vp \frac{1}{k_0 + k} \right) = \frac{1}{2k} \left(vp \frac{1}{k_0 - k} - vp \frac{1}{k_0 + k} \right) (k_0 - k)(k_0 + k) \hat{G}_k(k_0) \quad (1.12)$$

$$= \frac{1}{2k} (k_0 + k - k_0 + k) \hat{G}_k(k_0) \quad (1.13)$$

$$= \hat{G}_k(k_0) \quad (1.14)$$

Remarque : On devrait en fait aussi ajouter $a\delta_k + b\delta_{-k}$ pour prendre en compte le noyau de l'opérateur mais cela correspond en fait aux solutions homogènes de l'équation différentielle. Je vais ici les ignorer pour me concentrer sur la solution particulière.

On a donc enfin une expression bien définie pour $\hat{G}_k(k_0)$. Il est donc temps de repasser dans le domaine temporel. Pour cela, on va commencer par simplifier l'expression en utilisant les propriétés des transformées de Fourier :

$$G_k = \mathcal{F}_0^\dagger[\hat{G}_k] \quad (1.15)$$

$$= -\frac{1}{2k} (\mathcal{F}_0^\dagger[vp \frac{1}{k_0 - k}] - \mathcal{F}_0^\dagger[vp \frac{1}{k_0 + k}]) \quad (1.16)$$

$$= \frac{1}{2k} ((x_0 \rightarrow e^{-ikx_0}) \mathcal{F}_0^\dagger[vp \frac{1}{k_0}] - (x_0 \rightarrow e^{ikx_0}) \mathcal{F}_0^\dagger[vp \frac{1}{k_0}]) \quad (1.17)$$

$$= \frac{1}{2k} (x_0 \rightarrow e^{-ikx_0} - e^{ikx_0}) \mathcal{F}_0^\dagger[vp \frac{1}{k_0}] \quad (1.18)$$

On a donc pu simplifier le problème à trouver la transformée de Fourier inverse de $vp \frac{1}{k_0}$. On va donc faire ce calcul tranquillement. Soit $\phi \in S(\mathbb{R})$:

$$\langle \mathcal{F}_0^\dagger[vp \frac{1}{k_0}], \phi \rangle = \langle vp \frac{1}{k_0}, \mathcal{F}_0^\dagger[\phi] \rangle \quad (1.19)$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|k_0| > \varepsilon} dk_0 \int \frac{dx_0}{2\pi} \frac{\phi(x_0)}{k_0} e^{-ik_0 x_0} \quad (1.20)$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{dx_0}{2\pi} \phi(x_0) \int_{|k_0| > \varepsilon} dk_0 \frac{e^{-ik_0 x_0}}{k_0} \quad (1.21)$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{dx_0}{2\pi} \phi(x_0) \left(- \int_{\varepsilon}^{\infty} dk_0 \frac{e^{ik_0 x_0} - e^{-ik_0 x_0}}{k_0} \right) \quad (1.22)$$

$$= i \int \frac{dx_0}{\pi} \phi(x_0) \int_0^{\infty} dk_0 \frac{\sin(k_0 x_0)}{k_0} \quad (1.23)$$

$$= i \int \frac{dx_0}{\pi} \phi(x_0) \operatorname{sgn}(x_0) \int_0^{\infty} du \frac{\sin(u)}{u} \quad (1.24)$$

$$= \frac{i}{2} \int \frac{dx_0}{\pi} \phi(x_0) \operatorname{sgn}(x_0) \quad (1.25)$$

$$= \langle \frac{i}{2} \operatorname{sgn}, \phi \rangle \quad (1.26)$$

Où j'ai noté $\operatorname{sgn} : x \rightarrow \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ et j'ai utilisé le fait que $\int_0^{\infty} du \frac{\sin(u)}{u} = \frac{\pi}{2}$. On a alors fini la résolution temporelle, il suffit juste de tout remettre ensemble pour obtenir le résultat final :

$$G_k = \frac{i}{4k} (x_0 \rightarrow e^{-ikx_0} - e^{ikx_0}) \operatorname{sgn} \quad (1.27)$$

1.3 Et pour la partie spatiale

Dans un premier temps, on va vérifier que l'expression donnée en 1.27 permet de créer une distribution. Soit $\Phi \in S(\mathbb{R}^3)$. On calcule :

$$\iiint d^3k |\operatorname{sgn}(x_0) \frac{i}{4k} (e^{-ikx_0} - e^{ikx_0}) \Phi(\vec{k})| < \int_0^{\infty} k dk \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi |\Phi(\vec{k})| \quad (1.28)$$

On n'a pas de problème en 0 car Φ ne peut pas diverger et pas de problème en plus l'infini car Φ décroît plus vite que tout polynôme. On en déduit que l'on peut bien définir une distribution tempérée à partir de $\tilde{G}_{x_0} : \vec{k} \rightarrow \operatorname{sgn}(x_0) \frac{i}{4k} (e^{-ikx_0} - e^{ikx_0})$. On veut maintenant faire la transformée de Fourier inverse de cette distribution.

$$\langle \mathcal{F}_s^\dagger[\tilde{G}_{x_0}], \Phi \rangle = \langle \tilde{G}_{x_0}, \mathcal{F}_s^\dagger[\Phi] \rangle \quad (1.29)$$

$$= \text{sgn}(x_0) \iiint d^3k \frac{i}{4k} (e^{-ikx_0} - e^{ikx_0}) \iiint \frac{d^3x}{(2\pi)^3} \Phi(\vec{x}) e^{i\vec{k}\vec{x}} \quad (1.30)$$

$$= \text{sgn}(x_0) \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{(2\pi)^3} \iiint d^3x \Phi(\vec{x}) \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \int d\phi \frac{i}{4k} (e^{-ikx_0} - e^{ikx_0}) e^{ikr \cos(\theta)} \quad (1.31)$$

$$= \text{sgn}(x_0) \int_0^\infty \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{ik}{4} (e^{-ikx_0} - e^{ikx_0}) \iiint d^3x \Phi(\vec{x}) \int_{-1}^1 du e^{ikru} \quad (1.32)$$

$$= \text{sgn}(x_0) \int_0^\infty \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{1}{4} (e^{-ikx_0} - e^{ikx_0}) \iiint d^3x \Phi(\vec{x}) \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{r} \quad (1.33)$$

$$= \text{sgn}(x_0) \int_0^\infty \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{1}{4} \iiint d^3x \Phi(\vec{x}) \frac{e^{ik(r-x_0)} + e^{-ik(r-x_0)} - e^{ik(r+x_0)} - e^{-ik(r+x_0)}}{r} \quad (1.34)$$

$$= \text{sgn}(x_0) \int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{1}{4} \iiint d^3x \Phi(\vec{x}) \frac{e^{ik(r-x_0)} - e^{ik(r+x_0)}}{r} \quad (1.35)$$

On reconnaît alors l'action de $\delta_{x_0}^{rad}$ et $\delta_{-x_0}^{rad}$ sur Φ . On a donc :

$$G_{x_0} = \mathcal{F}_s^\dagger[\tilde{G}_{x_0}] = \text{sgn}(x_0) \frac{\delta_{x_0}^{rad} - \delta_{-x_0}^{rad}}{8\pi r} \quad (1.36)$$

On peut alors remarquer que le support de la distribution permet de déterminer où va agir sgn . On arrive alors au résultat :

$$G_{x_0} = \frac{\delta_{x_0}^{rad} + \delta_{-x_0}^{rad}}{8\pi r} \quad (1.37)$$

Remarque : J'ai appelé $\delta_{x_0}^{rad}$ ce que l'on note souvent $\delta(r - x_0)$ en physique. Cette distribution correspond en fait à la mesure sur la sphère de rayon x_0 d'un point de vue formel.

1.4 Remarques sur le résultat

On a trouvé une fonction de Green pour le d'Alembertien mais ce n'est pas la seule. Cette solution est souvent notée $G^{(+)}$ et ne correspond pas aux solutions physiques. On est en fait allé un peu vite dans la partie 1.2. On a négligé les solutions de la partie temporelle alors que ce sont celles-ci qui permettent de respecter les conditions aux limites.

Pour corriger ce calcul, on a deux solutions. Reprendre le calcul à partir de ce point-là en ajoutant ce qu'il faut pour que $\text{sgn}(x_0)$ devienne $\theta(\pm x_0)$ selon que les conditions aux limites nous amènent vers la solution retardée ou avancée.

Une autre solution est de montrer que $G^{(-)} = \frac{\delta_{x_0}^{rad} - \delta_{-x_0}^{rad}}{8\pi r}$ est solution de l'équation homogène. On peut alors retrouver $G_{retarde} = G^{(+)} - G^{(-)} = \frac{\delta_{-x_0}^{rad}}{4\pi r}$ et $G_{avance} = G^{(+)} + G^{(-)} = \frac{\delta_{x_0}^{rad}}{4\pi r}$.

Remarque : On peut voir les choses de la manière suivante. Pour chaque opérateur, on a un ensemble de solutions élémentaires ("fonctions de Green") qui sont toutes équivalentes (on peut passer de l'une à l'autre avec une solution de l'équation homogène). On doit alors choisir un représentant pour notre situation physique qui vérifie les conditions aux limites.

Chapitre 2

Résolution avec les régularisations

L'objectif de cette partie est de reprendre le calcul fait précédemment en utilisant des outils plus proches de ceux souvent utilisés en physique. Je vais passer un peu plus vite sur ce calcul en me concentrant moins sur la rigueur (et en reprenant les notations utilisées en physique). Je vais plutôt essayer de montrer les similitudes et les différences avec le calcul précédent.

2.1 Le "choix" d'une régularisation

On repart de l'équation 1.8. Le problème est que l'on veut inverser cette équation puis intégrer cette équation sur \mathbb{R} . On est alors confronté à deux pôles d'ordre 1 en $\pm k_0$. Il y a alors une solution, c'est d'utiliser l'analyse complexe et le théorème des résidus qui va quand même sortir des résultats. Mais on a alors plusieurs solutions que je vais illustrer à partir des choix des contours sur la figure 2.1.

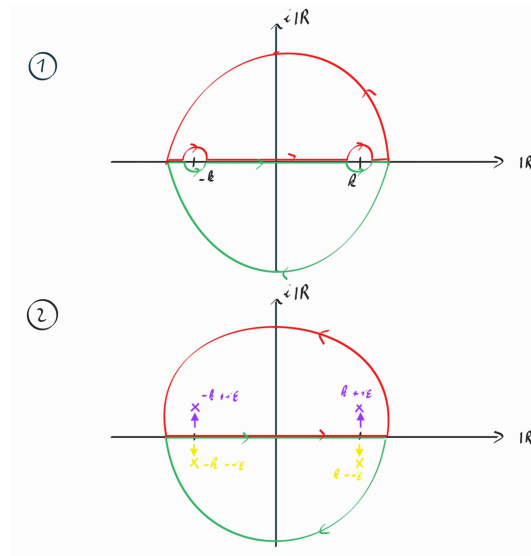


FIGURE 2.1 – Quelques possibilités de régularisations

Remarque : Je donne ici quelques régularisations possibles, la liste est loin d'être exhaustive. Par exemple, lors du calcul du propagateur de Feynman, on utilise la régularisation : $\hat{G} : k^\mu \rightarrow \frac{1}{k^\mu k_\mu + i\varepsilon}$.

Dans le cas 1 de la figure 2.1, on garde les pôles d'ordre 1 sur la droite des réels et on les contourne. On utilise alors le lemme de Jordan sur les petits arcs de cercles autour d'un pôle d'ordre 1 pour calculer l'intégrale. On peut alors montrer que ce calcul est équivalent à celui fait via la théorie des distributions et on retrouvera finalement $G^{(+)}$.

Dans le cas 2 avec le choix de régularisation violette, on va obtenir un résultat un peu différent.

En effet, par rapport au calcul précédent, on a fait rentrer un peu de la solution homogène. L'objectif de la prochaine partie est de montrer comment.

2.2 Calcul d'une fonction de Green

On part donc de l'équation 1.8 et on vient décaler un petit peu les pôles :

$$(k_0 - k - i\varepsilon)(k_0 + k - i\varepsilon)G(k^\mu) = -1 \implies G(k^\mu) = -\frac{1}{2k} \left(\frac{1}{k_0 - k - i\varepsilon} - \frac{1}{k_0 + k - i\varepsilon} \right) \quad (2.1)$$

Dans la topologie étoile faible de $S'(\mathbb{R}^4)$, cette distribution tend bien vers une distribution solution de l'opérateur d'Alembertien pour $\varepsilon \rightarrow 0$, on peut en fait montrer que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{k_0 - k - i\varepsilon} = vp \frac{1}{k_0 - k} + i\pi\delta(k_0 - k) \quad (2.2)$$

Le δ_k ne pose aucun problème étant dans le noyau de l'opérateur (solution de l'équation homogène) mais il va venir modifier les conditions aux limites. Continuons donc le calcul :

$$\mathcal{F}_0^\dagger[G](x_0, \vec{k}) = -\frac{1}{2k} (e^{ikx_0} - e^{-ikx_0}) \mathcal{F}_0^\dagger\left[\frac{1}{k_0 - i\varepsilon}\right](x_0, \vec{k}) \quad (2.3)$$

On cherche alors à calculer $\mathcal{F}_0^\dagger\left[\frac{1}{k_0 - i\varepsilon}\right](x_0, \vec{k})$. Si $x_0 > 0$, il faut choisir le contour par en dessous qui n'entoure aucun pôle donc on obtient 0. Si $x_0 < 0$, on fait le contour par "au-dessus" et on obtient $-i$. On a donc :

$$G(x_0, \vec{k}) = \frac{i}{2k} (e^{ikx_0} - e^{-ikx_0}) \theta(-x_0) \quad (2.4)$$

En reprenant le calcul de la partie 1.3, on obtient

$$G(x^\mu) = -\theta(-x_0) \frac{\delta(r - x_0) - \delta(r + x_0)}{4\pi r} \quad (2.5)$$

Avec $r = ||\vec{x}||$. En jouant un peu avec le support des distributions, on obtient alors le cas retardé :

$$G_{retarde}(x^\mu) = \frac{\delta(r + x_0)}{4\pi r} \quad (2.6)$$

Si on avait décalé les pôles vers le bas au lieu du haut (choix de l'option jaune au lieu de violette sur l'exemple 2 de la figure 2.1), on aurait obtenu G_{avance} au lieu de $G_{retarde}$.

Le choix de la régularisation joue donc le même jeu que le choix des conditions aux limites qui était fait avec les solutions de l'équation homogène pour les distributions. Ce choix est dicté par la situation physique que l'on considère et ne peut donc pas être fait arbitrairement.