A propos de la quantification

Baptiste Guilleminot

30 décembre 2024

Table des matières

1 Le groupe de Galilée 1D **3**
1.1 Construction du groupe de Galilée 3
1.2 Extension du groupe de Galilée 3
1.3 Le groupe de Galilée 4
1.4 Émergence de l'espace-temps et de l'espace des phases 4

2 Eléments de théories des groupes **6**
2.1 Représentation 6
2.2 Groupe et algèbre de Lie 7
2.2.1 Groupe de Lie 7
2.2.2 Générateurs et algèbre de Lie 8
2.2.3 L'exponentielle ou comment retrouver le groupe 10
2.2.4 Forme de Killing et Casimir 12
2.2.5 Quelques éléments supplémentaire 13
2.3 Un petit point sur l'unitarité 13

3 Quantification du groupe de Galilée 1D **15**
3.1 Structure de l'algèbre de Lie 15
3.2 IUR de Weyl-Heisenberg 16
3.3 Des bra, des ket et tout ce genre de choses 17
3.4 Résumé 18

Introduction

Ce document accompagne une vidéo YouTube. L'objectif est de créer un cours reprenant la quantification de manière plus rigoureuse. Au lieu de partir de l'espace de Hilbert et de construire les opérateurs autour, on va construire les opérateurs à partir du groupe de Galilée et montrer que l'espace de Hilbert apparaît "naturellement" comme représentation de l'algèbre de Lie de ce groupe de Galilée. Ceci ne correspond pas à l'approche historique, c'est plutôt une vision moderne du processus de quantification.

Ce cours est adressé à toute personne intéressée par la mécanique quantique. Je vais essayer de reprendre une bonne partie des outils mathématiques afin que le cours ne soit pas trop élitiste. Il n'est donc pas nécessaire d'avoir des connaissances poussées en théorie des groupes pour suivre ce qui va être fait. Je ne reviendrai cependant pas sur les premières définitions, ce cours est donc adressé à des personnes en fin de L2 ou sortant de CPGE au moins.

Enfin, je tiens à souligner que je suis moi-même étudiant en M1. Je vais tout faire pour qu'il n'y ait pas d'erreur mais je ne suis pas infaillible. N'hésitez donc pas à me signaler si vous en trouvez.

Chapitre 1

Le groupe de Galilée 1D

Dans ce premier chapitre, nous allons partir à la recherche d'une structure permettant de traduire la mécanique de manière plus abstraite. Il serait tout à fait possible de partir directement du produit final étant donné que celui-ci est un postulat en soit. Il est cependant plus agréable de parcourir le cheminement qui permet d'arriver à une structure raisonnable. De par sa nature, ce chapitre sera un peu moins formel dans son approche.

1.1 Construction du groupe de Galilée

Il existe plusieurs groupes de symétries qui permettent de caractériser plus ou moins précisément l'univers. Le plus précis sur lequel il est possible de mettre en place la procédure suivante est le groupe de Minkowski sur lequel est basé la relativité restreinte. La quantification sur ce groupe est assez compliquée et ne sera pas traitée ici. On va plutôt parler du groupe de Galilée qui est à la base de la mécanique non-relativiste. C'est par exemple le groupe à l'origine de la mécanique de Newton. Le seul point à souligner est que l'on ne peut pas parler de gravité dans ces théories, en effet, celle-ci vient de la relativité générale qui correspond à un cadre assez différent.

Pour commencer, nous allons parler du cas avec une seule dimension d'espace. Nous allons donc nous placer sur un espace-temps à deux dimensions $(t, x) \in \mathbb{R}^2$. Cet espace doit être caractérisé par un certain nombre de symétries. **Une symétries** est une opération qui, si elle est appliquée au système, ne va pas modifier sa physique. Dans le cadre du groupe de Galilée, on a :

- Les translations dans le temps $g_{T,0,0} : (t, x) \to (t + T, x)$.
- Les translations dans l'espace $g_{0,X,0} : (t, x) \to (t, x + X)$.
- Les boost de Galilée $g_{0,0,V} : (t, x) \to (t, x + Vt)$

Une façon de sentir intuitivement cela est la suivante : vous voulez faire une expérience, par exemple mesurer la résistance d'un matériau, il sera équivalent de le faire à Paris ou à Londres (translation dans l'espace), maintenant ou dans une semaine (translation dans le temps) dans la salle de TP ou dans le train quand celui-ci est en translation rectiligne et uniforme (boost de Galilée).

Le problème de ce groupe est qu'il ne contient pas la physique du système lui-même. Il faudrait rajouter quelque chose qui donne le fameux $\vec{F} = m\vec{a}$. Nous allons voir comment faire cela dans le prochain paragraphe.

1.2 Extension du groupe de Galilée

Le principe fondamental de la dynamique n'est qu'une façon d'exprimer les lois de la physique. Elle a l'avantage de donner un sens mathématique à des concepts que l'on est capable de s'imaginer assez facilement. Quand on pousse un objet, on peut facilement identifier la force à l'effort nécessaire pour mettre en mouvement l'objet.

Une autre façon de décrire le mouvement est de considérer les énergies. On pense alors au bilan d'énergie qui est poussé plus loin avec les équations de Hamilton. Ces équations ont l'avantage d'être d'ordre 1 et l'intégralité de l'information est contenue dans le Hamiltonien, une grandeur caractérisant l'énergie.

Il existe en fait une notion encore plus fondamentale appelée l'action. Toute la théorie de la mécanique peut alors être déduite de cette grandeur à travers le principe de moindre action. L'avantage de ce principe est sa généralité. Il peut être utilisé aussi bien pour décrire la mécanique que l'électromagnétisme... Je n'aurais pas le temps d'explorer ce sujet en détail mais cela a été fait par Veritassium pour une version vulgarisée et Scientia Egregia pour un aperçu plus complet.

Nous allons ici reprendre le résultat de l'action utilisée en mécanique analytique pour une particule libre. L'action est donnée par :

$$S[x,\dot{x}] = \int_0^t T(\dot{x}) \tag{1.1}$$

Où $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ est l'énergie cinétique. Si l'on reproduit parfaitement notre expérience, on a S qui est invariante par translation dans le temps et l'espace. En revanche, un boost de Galilée va modifier l'énergie cinétique. On a :

$$\begin{aligned} S[x,\dot{x}] \to S[x,\dot{x}+V] &= \int_0^t \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + V^2 + 2V\dot{x}) &(1.2)\\ &= S[x,\dot{x}] + mV(q(0)-q(t)) + \frac{m}{2}V^2 T &(1.3)\end{aligned}$$

Le seul problème que l'on a ici est la masse. C'est un paramètre propre à l'objet considéré. On va donc choisir de considérer $\phi = \frac{S}{m}$ à la place.

1.3 Le groupe de Galilée

Jusqu'à maintenant j'ai décrit les symétries que l'on retrouve pour la physique non relativiste. J'ai régulièrement employé le terme de groupe pour parler de celles-ci. Je n'ai cependant jamais montré que ces symétries respectaient vraiment les caractéristiques d'un groupe. Pour cela, commençons par trouver une loi de groupe raisonnable :

$$\begin{aligned} g_{T,X,V,\Phi} \circ g_{T',X',V',\Phi'}(t,x,\phi) &= g_{T,X,V,\Phi}(t+T', x+X'+V't, \phi+\Phi'+V'x+\frac{1}{2}V'^2t) &(1.4)\\ &= \begin{pmatrix} t+T+T' \\ x+X+X'+(V+V')t+VT' \\ \phi+\Phi+\Phi'+V(x+X'+V't)+V'x+\frac{1}{2}V^2(t+T')+\frac{1}{2}V'^2t \end{pmatrix} &(1.5)\\ &= g_{T'',X'',V'',\Phi''}(x,t,\phi) &(1.6)\end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned} T'' &= T+T' &(1.7)\\ X'' &= X+X'+VT' &(1.8)\\ V'' &= V+V' &(1.9)\\ \Phi'' &= \Phi+\Phi'+VX'+\frac{1}{2}V^2T' &(1.10)\end{aligned}$$

Je laisse au lecteur le soin de vérifier que cette loi décrit bien un groupe. En fait, on s'est intéressé ici à la composante connexe du groupe de Galilée noté $G_+^\uparrow$. On peut accéder à ces autres composantes en utilisant les opérateurs (discrets) de retournement du temps ou de l'espace comme représenté dans la figure 1.1. On choisit cette composante et pas une autre car elle contient l'identité.

1.4 Émergence de l'espace-temps et de l'espace des phases

On va s'intéresser ici aux sous-groupes de $G_+^\uparrow$. Il y en a quatre qui sont assez triviaux, ceux-ci correspondant aux quatre coordonnées utilisées pour caractériser les différentes composantes. Il en existe deux autres qui sont intéressants : $G_{V,\Phi} = \{g_{0,0,V,\Phi}\}$ et $G_{T,\Phi} = \{g_{T,0,0,\Phi}\}$. En effet, en quotientant (à gauche) par ces groupes, on va "tuer" les composantes correspondantes. On peut ainsi identifier :

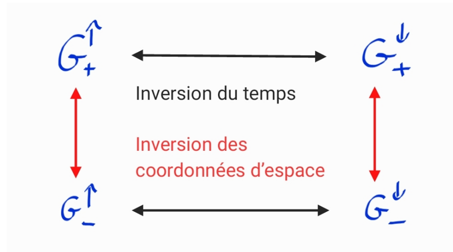

FIGURE 1.1 – Les différentes composantes du groupe de Galilée.

- $G_+^\uparrow / G_{V,\Phi}$ à l'espace-temps
- $G_+^\uparrow / G_{T,\Phi}$ à l'espace des phases.

Le groupe de Galilée est donc suffisant pour décrire la physique. On peut alors le voir comme un groupe abstrait et le détacher de l'espace-temps sur lequel on le faisait agir. On a donc réussi à créer un groupe qui permet de caractériser la mécanique. Cependant, la loi constitutive est assez complexe et on ne sait pas forcément quoi en faire. Il est donc temps d'aller demander à nos copains les matheux quelques billes pour s'en sortir.

Chapitre 2

Eléments de théories des groupes

Dans cette partie, l'objectif est de faire le tour des outils de théorie des groupes dont nous aurons besoin pour continuer. Pour cela, on va parler de représentation et de la théorie de Lie. Ce ne sera pas un cours de maths complet et rigoureux, je ne donnerai par exemple que des pistes et des sources pour certaines démonstrations.

Durant toute cette partie, on se placera sur un corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. Je ne préciserai le corps seulement s'il est nécessaire de se placer sur $\mathbb{C}$.

Durant cette interlude mathématique, je vais prendre l'exemple du groupe $G_+^\uparrow$, avançant ainsi notre cheminement.

2.1 Représentation

Représentation

Soit G un groupe et E un espace vectoriel de dimension n. Une représentation de dimension n est un homomorphisme D de G dans $\mathbf{G} \subseteq GL(E)$. C'est-à-dire :

$$\forall g, h \in G, D(gh) = D(g)D(h) \tag{2.1}$$

$$D(g^{-1}) = D(g)^{-1} \tag{2.2}$$

$$D(e) = Id \tag{2.3}$$

Remarques :

- La dimension d'une représentation est différentes de la dimension du groupe. Un même groupe peut en fait avoir plusieurs représentations de dimensions différentes.
- Si E est de dimension finie, il es possible d'associer une matrice à chaque élément de la représentation. Ces matrices seront dites représentatives.

Réductibilité

Soit deux représentation D_1 et D_2 de G sur E_1 et E_2 deux espaces vectorielles. On peut construire une représentation $D_1 \oplus D_2$ sur $E_1 \oplus E_2$ en somme direct.
Une représentation D de G sur E est dite **réductible** si elle laisse invariante un sous-EV E_1 de E. Sinon, elle est dite **irréductible**.
Une représentation est dite **complètement réductible** si elle peut s'écrire comme une somme direct de représentations irréductibles.

Remarques :

- La construction de la représentation somme direct est laissé en exercice.

- Une façon de visualiser la somme direct pour une représentation de dimension finie est de le voir comme une matrice représentative par bloc.

$$\begin{pmatrix} D_1(G) & 0 \\ 0 & D_2(G) \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

Exemple :
On verra plus tard que l'on ne peut pas avoir une représentation unitaire et irréductible de dimension finie pour $G_+^\uparrow$. Il sera cependant plus agréable de visualiser ce groupe avec une matrice. Je laisse en exercice le fait de montrer que l'application suivante est bien une représentation de $G_+^\uparrow$:

$$g_{t,x,v,\phi} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ v & 1 & 0 & x \\ \frac{v^2}{2} & v & 1 & \phi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Enfin, voyons un corollaire du lemme de Schur (que je n'énoncerai pas ici) qui nous sera très utile plus tard.

Soit une représentation irréductible sur $\mathbb{C}$ de dimension finie. Si M commute avec toutes les matrices de la représentation, alors M est une homothétie ($\exists \lambda \in \mathbb{C} \quad M = \lambda Id$).

Preuve : Soit G un groupe et D une représentation sur E un espace vectoriel. Car $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ qui est une valeur propre de M. On considère E_λ le sous-espace vectoriel propre de M pour la valeur propre λ. Le fait que M commute avec toutes les matrices de D implique que E_λ est stable par $D(G)$. L'irréductibilité de D implique alors que $E_\lambda = E$.

2.2 Groupe et algèbre de Lie

2.2.1 Groupe de Lie

Les groupes de Lie sont très présents en physique. En effet, il est possible de leur associer une algèbre qui permet de faire des calculs de manière très efficace. Dans un premier temps, voyons quelques définitions.

Groupe continu

Un groupe G est dit continu de dimension n s'il existe $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tq $G \approx A$ et si :

- il existe une fonction continue $\phi : A \times A \to A$ tel que $\forall \alpha, \beta, \gamma \in A \quad g(\alpha)g(\beta) = g(\gamma) \implies \gamma = \phi(\alpha, \beta)$
- et il existe $f : A \to A$ continue tel que $\forall \alpha \in A, \; g(\alpha)^{-1} = g(f(\alpha))$

Remarques :

- On a pris ci-dessus g comme étant la bijection entre $\mathbb{R}^n$ et G. On remarquera que j'avais pris la notation g_α au lieu de $g(\alpha)$ dans le chapitre précédent.
- Cette définition n'est pas général, on pourrais définir le groupe sur une variété. Une variété est une extension d'un espace vectorielle pour prendre en compte des géométries non planes. Cette définition apparaîtrait alors comme un cas particulier ou la variété serais $\mathbb{R}^n$.

Groupe de Lie

En s'appuyant sur les notations de la définition précédente, on appellera **groupe de Lie** un groupe continu où ϕ et f sont différentiables.

Exemple :

Un calcul rapide montrera que les relations 1.7 à 1.10 définissent bien la fonction ϕ correspondant au groupe $G_+^{\uparrow}$. On pourra aussi vérifier que l'application suivante correspond bien au f de notre définition :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \\ (T, X, V, \Phi) \to (-T, -X + VT, -V, -\Phi + VX - \frac{1}{2}V^2 T) \end{cases} \tag{2.6}$$

Ces deux fonctions sont analytiques donc $G_+ \uparrow$ est bien un groupe de Lie. Ouff, on a bien trouvé des outils qui correspondent à notre problème. Maintenant, voyons ce que l'on va pouvoir exploiter.

2.2.2 Générateurs et algèbre de Lie

On a défini un groupe avec une structure analytique. On va se servir de cela pour se limiter à l'étude autour de l'identité. Pour cela, on va définir des générateurs qui ne sont rien d'autre que les éléments du groupe correspondant à la paramétrisation pour un pas infinitésimal. On va ensuite décrire les éléments du groupe comme une somme d'opérateurs infinitésimaux. Un schéma de cette idée est donné à la figure 2.2.

Figure 2.1 – Schéma du générateur (α) et de la manière avec laquelle il permet de définir un élément (g) du groupe.

La structure sous-jacente à ce système de générateur est l'algèbre de Lie. Sa définition est la suivante :

Algèbre de Lie

Une algèbre de Lie est un espace vectoriel $\mathfrak{g}$ muni d'un produit **bilinéaire, antisymétrique** $[.,.] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ vérifiant **l'identité de Jacobi** :

$$\forall x, y, z \in \mathfrak{g} \quad [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \tag{2.7}$$

Exemple :
Soit A, B des ensembles. Il est facile de vérifier qu'un espace vectoriel de fonctions $\{f | f : A \to B\}$ muni du commutateur $\forall f, g \quad [f, g] = f \circ g - g \circ f$ définit bien une algèbre de Lie (il suffit de vérifier l'identité de Jacobi).

Il va maintenant falloir trouver une solution pour faire le lien entre le groupe de Lie et l'algèbre associée. Pour cela, nous allons avoir besoin de quelques définitions supplémentaires. Le cadre "adapté" aux définitions suivantes est celui des variétés différentielles. Je n'ai pas envie de rentrer dans ces considérations ici. Je vais donc contourner ces notions.

Plan tangent

Soit G un groupe de Lie de dimension n et $g \in G$. Un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ appartient au plan tangent de G en g ($T_g G$) ssi il existe une courbe γ C^1 telle que $\gamma(0) = g$ et $\gamma'(0) = v$.
On appelle espace tangent de G (TG) l'espace vectoriel des espaces tangents.

Remarque : La définition ci-dessus peut paraître compliquée mais l'idée est assez simple. On a un espace qui n'est pas plan. Cela est dû à la non-linéarité du produit du groupe que l'on considère. On veut pouvoir placer un espace plan au niveau d'un point, pour cela, on veut utiliser un outil qui peut

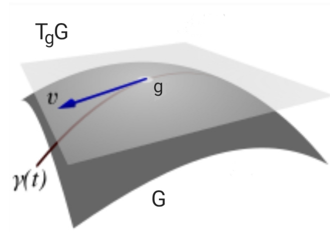

FIGURE 2.2 – Schéma permettant de visualiser un espace tangent.

suivre le groupe et qui est linéarisable. On comprend alors les éléments de la définition. Pour visualiser cela, se référer à la figure 2.2.

Cette définition, bien que rigoureuse et "relativement facile" à visualiser, n'est pas la plus facile à utiliser. On va donc trouver une définition équivalente.

Dérivation

Soit G un groupe de Lie, on appelle dérivation en $x \in G$ toute application $D : C^\infty(G) \to \mathbb{R}$ telle que $\forall f, g \in C^\infty(G) \quad D(fg) = D(f)g(x) + f(x)D(g)$. On notera $Der_x(G)$ l'espace des dérivations en g.

Soit G un groupe de Lie de dimension finie et $g \in G$, on a $Der_g(G) \approx T_gG$ (isomorphe à).

Preuve : Admis.

Remarques :

- Si G n'est pas de dimension finie, il est possible que seul l'injection soit vérifier.
- On va considérer dans la suite des groupes de dimension finie. On va donc identifier $Der(G)$ à TG. Cette définition est d'ailleurs souvent utiliser directement sans passer par la définition avec la courbe γ. Je la trouve cependant plus dur à visualiser.

Soit G un groupe de Lie. On peut associer à G une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ définie comme les champs vectoriels X (les applications $X \begin{cases} G \to TG \\ x \to X(x) \in T_xG \end{cases}$) invariants à gauche (i.e. "constantes") munis du commutateur.

Idée de preuve : Il est possible de construire un espace vectoriel autour de l'identité avec les hypothèses que l'on a. On vient ensuite le "déplacer" au niveau de chaque point. Pour le faire correctement, il faut se placer dans le cadre des variétés et faire attention lors du passage d'une carte à l'autre.

Remarques :

- Cette algèbre de Lie associée, en plus des propriétés mathématiques que l'on n'explorera que rapidement, est assez rassurante physiquement. En effet, on cherche à décrire des grandeurs qui ne changent pas selon le groupe de symétries. Avoir des éléments constants sur le groupe est donc rassurant.
- Les champs considérés sont invariants, on peut donc choisir un point, l'identité, et ne considérer que T_eM.
- Il est aussi possible dans certain cas d'aller dans le sens inverse et de remonter au groupe depuis l'algèbre. Pour cela on utilise le produit de pas infinitésimaux comme expliqué plus haut. Je revendrai sur ce point plus tard.

Générateur

On définit sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ associée à G une base. Les éléments de cette base sont appelés générateurs de G.

Remarque : Attention, cette définition, très utilisée en physique, diffère de la définition en mathématiques où un ensemble de générateurs est un sous-groupe de $\mathfrak{g}$ qui permet de reconstruire l'algèbre à l'aide des crochets de Lie.

Exemple : Après ce grand détour par les maths, il est temps de reprendre notre exemple et de construire son algèbre de Lie. Pour cela, on ne va pas tout de suite prendre la dernière définition avec les dérivations. On va plutôt utiliser la première définition. On ne va pas non plus utiliser le groupe abstrait mais plutôt utiliser la représentation donnée en 2.5. On va alors chercher une base "canonique". On va prendre les courbes correspondant à chaque coordonnée. Prenons le cas de la courbe suivante v. Le chemin est alors :

$$\gamma : \begin{cases} \mathbb{R} \to G_+^\uparrow \\ v \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ v & 1 & 0 & 0 \\ \frac{v^2}{2} & v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{2.8}$$

L'élément de l'algèbre de Lie associé est la différentielle évaluée en 0. Cet élément est donc :

$$\gamma'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

Les 3 autres matrices qui forment la base de l'algèbre de Lie s'obtiennent de manière similaire. Je ne donne pas de nom tout de suite à ces éléments car pour avoir des résultats physiques, on va mettre des coefficients devant, puis en retirer certains...

2.2.3 L'exponentielle ou comment retrouver le groupe

On a donc trouvé les générateurs annoncés plus haut et représentés en vert dans la figure 2.2. J'avais alors laissé sous-entendre que l'on allait pouvoir reconstruire le groupe à partir de ces générateurs. Ceci vient du fait que l'algèbre de Lie est invariante sur le groupe. Ceci va permettre de ne pas se "perdre" dans le groupe une fois qu'on a choisi une direction. Posons ceci sur des bases mathématiques.

Exponentielle en un point

Soit G un groupe de Lie et $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie associée. Soit $X \in \mathfrak{g}$. Il existe une unique application C^1 $exp_X : \mathbb{R} \to G$ telle que $exp_X(0) = e$ et $d\ exp_X(0) = X$.

Idée de preuve : Le problème de cette preuve est qu'elle demande des notions propres aux variétés. L'idée est la suivante. Autour d'un point, on peut approcher l'espace courbe par un plan. On utilise alors l'existence et l'unicité de la solution au problème de Cauchy ci-dessus pour obtenir une solution sur un petit intervalle.

On a donc une application de $[-\varepsilon, \varepsilon] \to U \subset G$ au voisinage de l'identité qui correspond aux critères voulus. On va alors utiliser l'invariance à gauche de l'espace tangent définissant l'algèbre de Lie. En effet, on peut ainsi translater les étapes précédentes et reconstruire un sous-groupe à un paramètre de G.

Exponentielle

Soit G un groupe de Lie et $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie associée. On définit l'exponentielle comme l'application suivante :

$$exp : \begin{cases} \mathfrak{g} \to G \\ X \to exp_X \end{cases} \tag{2.10}$$

Remarque : On va noter $exp(tX)$ au lieu de $exp(X)(t)$.

Propriétés de l'exponentielle

- Soit $X, Y \in \mathfrak{g}$ tel que $[X, Y] = 0$, $s, t \in \mathbb{R}$, on a $exp(Xs + Yt) = exp(Xs)exp(Yt)$.
- Il existe $U \subset G$ et $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{g}$ des voisinages de l'unité tel que exp soit un difféomorphisme de $\mathfrak{u}$ dans U.
- On en déduit que $exp(\mathfrak{g})$ engendre la composant simplement connexe à l'unité de G.

Remarque : Je ne vais pas faire les preuves de ces différentes propositions très utiles car elles demandent des outils plus poussés. Elles sont disponibles dans le livre de Warner [FW70]. On peut juste remarquer que le deuxième point engendre le troisième au travers du fait que la composante simplement connexe d'un groupe est engendrée par n'importe quel ouvert contenant l'identité. Il existe en fait une propriété plus puissante. $exp(\mathfrak{g})exp(\mathfrak{g})$ correspond déjà à la composante simplement connexe de G.

Le cas de GL_n

Dans le cas où $G \subset GL_n$, l'exponentielle correspond à l'exponentielle matricielle.

Preuve : Les deux applications correspondent au même problème de Cauchy. Par unicité de la solution, on a égalité entre les deux.

Remarque : Il sera souvent plus facile d'utiliser les expressions matricielles. En particulier, on utilisera souvent les expressions matricielles en utilisant des représentations du groupe grâce à la propriété suivante :

Soient G,H des groupes de Lie simplement connexes et $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ les algèbres de Lie associées. Soit $\Phi : G \to H$ un morphisme de groupe et $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ le morphisme d'algèbre associé. On a $exp \circ \phi = \Phi \circ exp$.

Preuve : Soit $X \in \mathfrak{g}$ On voit immédiatement que $\Phi(exp_X(0)) = e = exp_{\phi(X)}(0)$. De plus, $d\ exp_{\phi(X)}(0) = \phi(X) = \phi(d\ exp_X(0)) = d\Phi(exp_X(0))$. Les deux applications correspondent donc au même problème de Cauchy. Elles sont donc égales.

Remarque : Cela correspond à dire que le schéma 2.3 est commutatif.

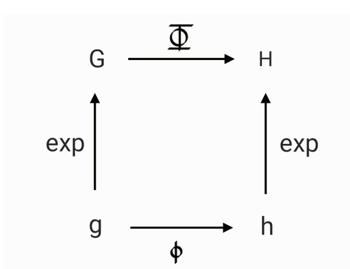

Figure 2.3 – Le schéma reliant les algèbres à leur groupes et les groupes entre eux.

2.2.4 Forme de Killing et Casimir

On a vu les définitions et plusieurs propriétés permettant d'associer à un groupe une algèbre. On va maintenant voir un certain nombre de propriétés sur les algèbres de Lie qui vont nous permettre de manipuler ces grandeurs. Pour comprendre l'importance physique, il faudra attendre le prochain chapitre.

L'opérateur adjoint

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $X \in \mathfrak{g}$. On définit l'opérateur adjoint comme :

$$ad_X : \begin{cases} \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \\ Y \to [X,Y] \end{cases} \tag{2.11}$$

Remarques :

- Il est intéressant de montrer depuis l'identité de Jacobi que l'opérateur adjoint est une dérivation sur $\mathfrak{g}$. Dans le cadre d'une algèbre de Lie de dimension finie, on peut montrer toute dérivation peut s'écrire comme l'adjoint d'un membre de l'algèbre.
- En définissant des opérateur linéaire sur l'algèbre de Lie et en utilisant le point précédent, on peut alors définir un deuxième produit qui correspond en fait au produit matriciel habituel.

Forme de Killing

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. On définit la forme de Killing comme la forme bilinéaire symétrique suivante :

$$K : \begin{cases} \mathfrak{g}^2 \to \mathbb{R} \\ (X,Y) \to Tr(ad_X ad_Y) \end{cases} \tag{2.12}$$

Algèbre de Lie semi-simple

On dit qu'une algèbre de Lie est semi-simple si la forme de Killing est non dégénérée.

Remarque : Une autre définition équivalente peut être donnée dans la littérature comme dans [Hum70]. Je choisis cette définition car elle est "directement utilisable".

Opérateur de Casimir

Un opérateur de Casimir est un élément de $\mathfrak{g}$ qui commute avec tous ses générateurs.

Remarques :

- Les opérateurs de Casimir sont particulièrement importants car aucun des générateurs pourra agir sur eux. Cela veut dire physiquement que pour un système donné, la valeur propre associé pour un opérateur de Casimir reste constant. Les différents opérateurs de Casimir vont ainsi définir les grandes constantes de notre système comme la masse, le spin...
- Il est possible de calculer le nombre d'opérateurs de Casimir pour une algèbre mais il n'existe pas de méthode pour les trouver "méthodiquement". Dans le cadre de algèbre semi-simple, il est possible d'en identifier un :

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple et K_{ij} la représentation matricielle du vecteur de Killing sur les générateurs $\{e_i\}$ de $\mathfrak{g}$. Alors $C = H^{ij} e_i e_j$ où H^{ij} est l'inverse de K_{ij} est un opérateur Casimir.

Remarque : J'ai utilisé la convention de sommation d'Einstein.

Preuve : Afin de faire cette preuve, on va commencer par définir des outils de calcul souvent utiles. Déjà, on définit C_{ij}^k tq $[e_i, e_j] = C_{ij}^k e_k$. Ensuite, on définit $\tilde{C}_{ijl} = K_{lk} C_{ij}^k$. On peut remarquer que $\tilde{C}_{ijl}$

est complètement antisymétrique. On peut enfin calculer :

$$
\begin{aligned}
[C, e_i] &= H^{mn}[e_m e_n, e_i] && (2.13)\\
&= H^{mn}(e_m[e_n, e_i] + [e_m, e_i]e_n) && (2.14)\\
&= H^{mn}(e_n[e_m, e_i] + [e_m, e_i]e_n) && (2.15)\\
&= \tilde{C}_{lni}H^{mn}H^{kl}(e_m e_k + e_k e_m) && (2.16)\\
&= 0 && (2.17)
\end{aligned}
$$

Pour passer de la 2eme ligne à la 3eme, la symétrie de H est utilisée (qui vient de la symétrie de K). Enfin, le passage à la dernière ligne est fait en remarquant que $\tilde{C}$ est antisymétrique alors que le reste est symétrique.

2.2.5 Quelques éléments supplémentaire

Je présente ici quelques résultats supplémentaires qui seront utiles par la suite.

Idéal

L'idéal I d'un groupe G est un sous-groupe de G tel que $\forall g \in g \forall i \in I \; ig \in I$.

Algèbre de Lie simple

Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite simple si ses idéaux sont seulement $\mathfrak{g}$ et $\{e\}$.

Remarques :

- Il est assez facile de voir que simple implique semi-simple. On peut en fait aller plus loin et montrer qu'une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie peut se décomposer en une somme direct d'algèbres de Lie simple (voir [Hum70] p.23).
- On dira qu'un groupe de Lie est simple si son algèbre de Lie associé l'est.

2.3 Un petit point sur l'unitarité

On sort ici de la théorie des groupes pour quelques points qui devraient être des rappels. On reviendra à la fin de la partie sur une proposition très importante. Je trouve quand même qu'il est important de revoir tout cela. En commençant par quelques définitions :

On considère E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

L'adjonction

Soit $A \in GL(E)$. On appelle opérateur adjoint à A sa transposée conjuguée $A^\dagger = A^{*T}$.

Opérateur hermitien

Soit $H \in GL(E)$. On dira que H est auto-adjoint ou hermitien si $H^\dagger = H$.

Remarques :

- Ces opérateurs sont très importants en mécanique quantique car un des postulats dit que toute grandeur physique sera représenté par une observable qui est un opérateur hermitien diagonalisable.
- Il est possible de montrer que si E est de dimension finie, alors tout opérateur hermitien est diagonalisable (la démonstration est similaire à celle pour les matrices symétriques). En revanche, ceci n'est pas vrai si E est de dimension infinie. Cela sera pourtant souvent négligé en physique.

Opérateur unitaire

Soit $U \in GL(E)$. On dira que U est unitaire si $U^\dagger = U^{-1}$. On notera $U(E)$ l'ensemble des opérateurs unitaires sur E.

Remarque : En remplaçant la transposée par l'adjoint, les opérateurs symétriques par les opérateurs hermitiens et les opérateurs orthogonaux par les opérateurs unitaires dans un cours d'algèbre linéaire, on peut retrouver des propriétés similaires pour la plupart des résultats importants. En particulier, les opérateurs unitaires permettent toujours de passer d'une base orthonormée à une autre. On peut aussi définir l'exponentielle de manière similaire (à partir de la série). On a alors le résultat suivant :

Soit $A \in GL(E)$. Alors $exp(iA)$ est unitaire ssi A est hermitien.

Preuve : On va procéder en deux étapes :

- Si A est hermitien, alors $exp(iA)^\dagger = exp(-iA^\dagger) = exp(-iA)$. On a alors $exp(iA)^\dagger exp(iA) = exp(i(A - A)) = Id$ car A commute avec soit même.
- Si $exp(iA)$ est unitaire, alors $exp(iA)^\dagger exp(iA) = Id$. Or $ln(Id) = 0$ et $ln(exp(iA)^\dagger exp(iA)) = ln(exp(iA)^\dagger) + ln(exp(iA)) = i(A - A^\dagger)$.

Remarques :

- Attention, la deuxième partie de la preuve est correcte mais j'ai passé sous le tapis un certain nombre de problèmes liés aux branches du logarithme complexe.
- En sachant que l'exponentielle de $GL(E)$ et celle définis plus haut correspondent et en s'appuyant du résultat donné ci-dessus, on observe quelque chose de très important. En mécanique quantique, les éléments de E sont normées car ils correspondent à des amplitudes de probabilités. Les différentes symétries doivent donc être unitaire pour garder cette normalisation. En définissant les générateurs en rajoutant le i, on va avoir des générateurs hermitiens qui peuvent donc correspondent à des grandeurs physiques.

Les rappels étant faits, il est temps de passer à la proposition dont j'avais déjà parlé.

Soit G un groupe de Lie simplement connexe non compact. Soit $U : G \to U(n)$ une représentation unitaire continue de G de dimension n. Alors U est la représentation triviale.

Preuve :

Dans un premier temps, montrons que $Ker(U)$ est soit G soit $\{e\}$. Pour cela, il suffit de montrer que $Ker(U)$ est un idéal de G, la simplicité de G nous permettra ensuite de conclure. Je ne reviendrai pas sur la démonstration que c'est un sous-groupe. Pour finir cette partie, prenons $xinKer(U)$ et $g \in G$. $U(xg) = U(x)U(g) = 0$ donc $xg \in Ker(U)$ qui est donc un idéal.

On veut maintenant montrer que $Ker(U) = \{e\}$ n'est pas possible. Pour cela, on remarque que $U(n)$ est fermé car $GL(n, \mathbb{C})$ l'est. De plus, car pour tout $U \in U(n)$ $UU^\dagger = Id$, on a que $||U||_\infty \leq 1$ donc $U(n)$ est fermé et borné. On en déduit que $U(n)$ est compact. U ne peut donc pas être injectif et $Ker(U) \neq \{e\}$.

On en déduit que U est la représentation triviale (envoie tous les éléments de G sur Id).

Remarque : Le groupe de Lorentz (gouvernant la relativité restreinte) est simple. La propriété ci-dessus explique alors que la mécanique quantique relativiste va devoir se placer sur des espaces de dimensions infinies. La structure de $G_+^\uparrow$ est plus compliquée mais un cas un peu plus général du théorème permettra d'obtenir le même résultat.

Chapitre 3

Quantification du groupe de Galilée 1D

Maintenant que l'on est armé de ces outils mathématiques, il est temps de reprendre notre cas physique. On va donc étudier plus en détail $G_+^\uparrow$. On va commencer par mettre en évidence la structure de son algèbre. On va ensuite utiliser cette structure pour obtenir les propriétés physiques. On va enfin construire une représentation correcte pour la mécanique quantique, les fameuses fonctions d'ondes.

3.1 Structure de l'algèbre de Lie

Comme je l'avais annoncé à la fin de la section 2.2.2, pour étudier l'algèbre $\mathfrak{g}_+^\uparrow$, on ne va pas utiliser la définition avec les dérivations mais plutôt celle avec la forme matricielle. On va aussi rajouter deux éléments. Le premier a été mis en avant dans la section 2.3. Pour rappel, il était nécessaire de rajouter un i dans l'exponentielle. Pour compenser cela, on va utiliser le "template" $-i\partial M$. Cela va permettre satisfaire deux critères importants : l'unitarité des différentes symétries tout en ayant des observables (opérateurs hermitiens) pour les grandeurs physiques.

On va rajouter un deuxième constante pour définir les générateurs. Cette constante n'est pas dû à des propriétés physiques mais permet de mettre des unités sur les différentes grandeurs. Cette constante est arbitraire dans le sens où les unités, contrairement aux aspects de symétries, sont une création purement humaine. Elle est cependant nécessaire pour pouvoir faire des prédictions dans le système de mesure international. Elle sera déterminée par l'expérience (approche historique) ou fixée pour définir le système d'unités (approche contemporaine). Je parle bien sur de la constante *hbar*. Cette constante disparaîtra plus tard lorsque l'on passera dans les unités naturelles.

On va aussi rajouter des signes pour arriver aux définitions suivantes :

$$H = i\hbar\partial_t M(0), \quad P = i\hbar\partial_x M(0), \quad K = i\hbar\partial_v M(0), \quad M = -i\hbar\partial_\phi M(0) \tag{3.1}$$

Remarque : Pour définir correctement ces éléments, il faudrait définir les chemins par rapport aux différentes coordonnées et ensuite dériver ces chemins. On remarquera cependant que cela est équivalent à faire des dérivées partielles en 0, on va donc simplifier l'écriture.

La matrice K a déjà été calculée à l'équation 2.9. On fait la même chose pour les matrices. On va ensuite calculer les différents commutateurs pour mettre en avant la structure de l'algèbre de Lie. Une fois les calculs matriciels effectués, on obtient :

$$[M, H] = [M, P] = [M, K] = 0 \tag{3.2}$$
$$[H, P] = 0 \tag{3.3}$$
$$[K, H] = i\hbar P \tag{3.4}$$
$$[K, P] = i\hbar M \tag{3.5}$$

On va maintenant oublier la représentation que l'on a utilisée et voir l'algèbre de Lie comme une structure abstraite afin de pouvoir trouver une nouvelle représentation qui correspondra à la physique. Comme expliqué précédemment, cette représentation devra être unitaire.

L'étape suivante est d'identifier les opérateurs de Casimir. On peut en remarquer un premier, $C_1 = M$. Un deuxième est un peu plus dur à trouver, on peut vérifier que $C_2 = HM - \frac{1}{2}P^2$ en est un. Comme dit précédemment, car ces opérateurs commutent avec tous les autres, ils ne vont pas définir des grandeurs variables durant le mouvement mais des constantes du système.

On cherche dans un premier temps à considérer les "briques élémentaires" de la matière. On verra plus tard comment on peut faire interagir ces briques élémentaires. D'un point de vue mathématique, cela revient à s'intéresser aux représentations irréductibles. Or, le lemme 2.1 nous permet alors de voir que les éléments de Casimir vont prendre des formes spécifiques. En effet, dans cette représentation que l'on cherche, on aura :

$$C_1 = M = mId \tag{3.6}$$

$$C_2 = mH - \frac{1}{2}P^2 = \lambda Id \implies H = \frac{P^2}{2m} + \frac{\lambda}{m}Id \tag{3.7}$$

On arrive alors à la structure suivante en posant $X = \frac{K}{m}$:

$$H = i\hbar\partial_t, \quad P = i\hbar\partial_x, \quad X = i\frac{\hbar}{m}\partial_v \tag{3.8}$$

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{\lambda}{m}Id \tag{3.9}$$

$$[X, P] = i\hbar Id \tag{3.10}$$

On peut alors résonner soit par analyse dimensionnelle soit par analogie avec la mécanique analytique. En comparant H à l'expression de l'Hamiltonien et le commutateur au crochet de Poisson $\{x, p\} = 1$ on trouve que :

- P est l'opérateur associé à l'impulsion
- X représente la position
- H est le Hamiltonien.

On pourrait imaginer s'arrêter ici. En effet, on a obtenu la mécanique quantique avec la vision de Heisenberg. En effet, dans cette représentation, la physique est placée dans les opérateurs que l'on a construit. On peut par exemple obtenir l'évolution dans le temps de la grandeur A de notre système en utilisant la représentation adjointe qui nous donne :

$$i\hbar\partial_t A(t) = i\hbar\partial_t U^\dagger(t)A(0)U(t) \quad = H^\dagger U^\dagger(t)A(0)U(t) - U^\dagger(t)A(0)U(t)H = HA(t) - A(t)H \quad = [H, A] \tag{3.11}$$

Mais je trouve cela moins satisfaisant car il est plus facile de visualiser les systèmes avec la vision de Schrödinger. Il reste donc à chercher une représentation pour l'algèbre de Lie ayant comme structure $[X, P] = i\hbar$. Ce problème correspond à celui de la recherche d'une IUR (irreductible unitary representation) pour le groupe de Weyl-Heisenberg. C'est le sujet du prochain paragraphe.

3.2 IUR de Weyl-Heisenberg

Le problème de l'IUR du groupe d'Heisenberg est en fait un peu différent. Étant donné que je ne vais pas démontrer tous les résultats, je pourrai donner directement la solution qui nous intéresse mais je vais plutôt prendre un peu de recul et traiter le problème de manière générale. Je vais quand même garder un problème à une dimension d'espace, la généralisation étant assez simple.

On va en fait voir dans cette partie que fixer la constante $\hbar$ permet d'avoir l'unicité de la représentation unitaire irréductible. On va donc s'intéresser à l'algèbre ayant la structure suivante.

On définit l'algèbre de Heisenberg de la manière suivante :

Algèbre de Heisenberg

L'algèbre de Heisenberg est caractérisée par 3 générateurs : P, X, C tels que :

$$[X, P] = iC \tag{3.12}$$
$$[X, C] = [P, C] = 0 \tag{3.13}$$

Remarques : On peut représenter cette algèbre par la matrice : $\begin{pmatrix} 0 & p & c \\ 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. En utilisant l'exponentielle et la formule BCH, on obtient que le groupe de Heisenberg a pour loi de groupe : $(q, p, c)(q', p', c') = (q + q', p + p', c + c' + \frac{pq'-qp'}{2})$.

On arrive maintenant au théorème clé que je ne démontrerai pas (démonstration disponible dans [Fol89]).

Théorème de Stone-von Neumann

Une fois la constante fixée pour l'opérateur de Casimir C (dans le cas de la mécanique quantique, on pose $C = \hbar Id$), il existe une unique représentation unitaire irréductible du groupe de Heisenberg.

Remarque : Dans le cadre du groupe de Heisenberg 1D, cette représentation correspond aux opérateurs sur l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$. Ce théorème est donc la clé de voûte qui permet de passer de la vision matricielle (en vrai ce sont des opérateurs mais bon...) de Heisenberg qui est plus abstraite à la vision de Schrödinger plus physique. En effet, sur cette représentation, on va pouvoir redéfinir tout le formalisme habituel qui est par exemple très bien présenté dans la bible(le Cohen-Tanoudji [DCTL18]). On va reprendre les grandes lignes de ce formalisme dans le prochain paragraphe afin de mettre en avant les liens entre les notations habituelles et celles que l'on vient de voir.

3.3 Des bra, des ket et tout ce genre de choses

Grâce au paragraphe suivant, on sait qu'il existe une unique représentation unitaire irréductible. On prend donc cette représentation $\Phi : G_+^\uparrow \to GL(L^2(\mathbb{R}))$ et la représentation associée ϕ sur l'algèbre de Lie. On va en fait simplifier l'écriture tout de suite et identifier les opérateurs à leur représentation. Autrement dit, on va noter H au lieu de $\phi(H)$ par exemple.

On va enfin noter $|.\rangle$ les éléments de $L^2(\mathbb{R})$. Je ne vais pas rappeler tous les détails de ce formalisme, ceci étant déjà très bien fait dans [DCTL18]. Je vais juste faire remarquer la chose suivante : pour l'instant, la dépendance en temps est encore dans les opérateurs, la valeur moyenne d'un opérateur A pour un temps donné et pour un certain état initial $|\psi\rangle$ est $\langle\psi| A(t) |\psi\rangle$. Il est possible de réécrire cela comme $\langle\psi| U^\dagger(t) \cdot U(t)A(t)U^\dagger(t) \cdot U(t) |\psi\rangle$ où $U(t)$ est l'opérateur de translation dans le temps. On va noter $A_S = U(t)A(t)U^\dagger(t)$ en remarquant que la dépendance en temps a alors disparu et $|\psi(t)\rangle_S = U(t) |\psi\rangle$ et cette fois-ci, la dépendance en temps est placée sur le ket. C'est la représentation de Schrödinger.

La dépendance en temps est alors placée dans le ket et le rapide calcul suivant permet de retrouver l'équation de Schrödinger :

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t |\psi(t)\rangle_S &= i\hbar\partial_t U(t) |\psi\rangle && (3.14) \\ &= i\hbar\partial_t(exp(\frac{Ht}{i\hbar})) |\psi\rangle && (3.15) \\ &= H |\psi\rangle && (3.16) \end{aligned}$$

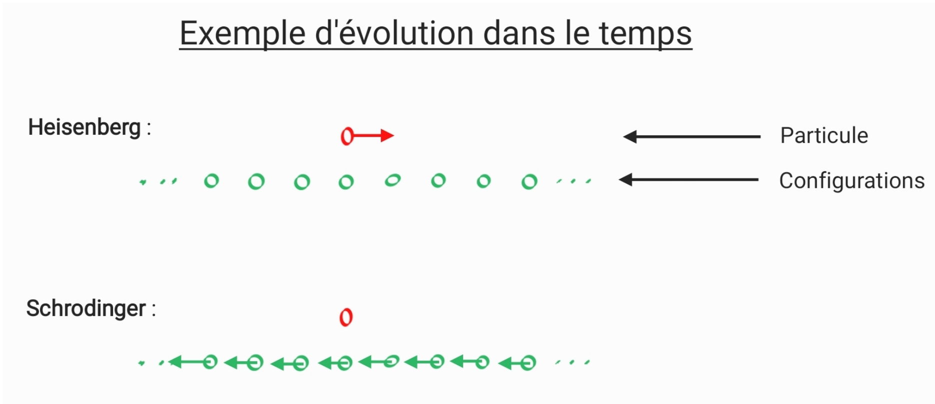

Figure 3.1 – Schéma d'évolution dans le temps dans la représentation de Schrodinger et d'Heisenberg.

Le passage de la première ligne vient de la définition de $H = i\hbar\partial_t$ qui implique que $U(t) = exp(t\partial t) = exp(\frac{Ht}{i\hbar})$. On a alors bien l'expression classique de l'équation de Schrödinger.

Equation de Schrödinger

$$i\hbar\partial_t \left|\psi(t)\right\rangle_S = H \left|\psi(t)\right\rangle_S \tag{3.17}$$

Toutes ces considérations peuvent sembler très algébriques et abstraites. On peut toutefois en donner une visualisation plus physique. En effet, l'espace sur lequel on applique les opérateurs qui correspondent à nos particules est un ensemble de configurations possibles. Dans la représentation de Heisenberg, on fixe la configuration et on fait bouger les particules dessus. Dans le cas de la représentation de Schrödinger, on fixe les particules et on fait bouger les configurations en dessous. J'essaie de représenter cela dans la figure 3.1.

On a fini de construire les fondements de la mécanique quantique pour une particule libre et une dimension d'espace. Il est temps de conclure avant de passer à l'étude des rotations qui nous permettra d'attaquer le cas à trois dimensions.

3.4 Résumé

Afin de conclure, je vais passer en revue les différentes étapes très rapidement :

- Dans un premier temps, on a fait le point sur les différentes symétries que l'on veut que notre théorie vérifie (une approximation des symétries de notre univers).
- On a ensuite ajouter une symétrie qui permet de faire entrer de la physique dans nos considérations avec l'action.
- On a enfin remarquer que les symétries que l'on considérait avaient une loi de groupe. De plus, ce groupe contenait toute l'information du système. On a donc chercher différents outils qui permettent d'étudier ce groupe.
- En observant les outils développés par les mathématiciens, on a chercher l'algèbre associée au groupe considéré et on a mis en avant sa structure avec les crochets de Lie des différents éléments de la bases.
- On a alors simplifier l'étude en considérant les briques élémentaires (les représentations unitaires irréductibles) qui correspondent à nos particules. On a alors remarquer que les opérateurs de Casimir donnaient les propriétés intrinsèques de notre système et que la structure pouvaient être mis sous la forme de l'algèbre de Heisenberg.
- On utilise ensuite le théorème de Stone-von Neumann pour obtenir une représentation du groupe de Heisenberg qui est $L^2(\mathbb{R})$, les fonctions de carrée sommable. On peut alors utiliser cette représentation pour créer le formalisme en bra ket.
- Enfin, on a déplacé la dépendance en temps des opérateurs vers les ket pour obtenir la représentation de Schrödinger et son équation.

Maintenant que l'on a fait tout le trajet, voyons comment on peut rattacher la théorie construite aux postulats de la mécanique quantique. Le **premier postulat** nous dit que l'ensemble de l'information du système est contenu dans une fonction d'onde (un ket). On observe que cela est possible en repassant dans la représentation de Schrödinger. En revanche, dans la représentation de Heisenberg, ce sont plutôt les opérateurs qui contiennent l'information et il existe d'autres représentations comme celle de la matrice de densité de probabilité qui donne un formalisme encore différent. Cela n'est pas gênant, en effet, le postulat nous indique qu'il doit exister une fonction d'onde telle que toute l'information soit contenue dedans ce que l'on a bien. Il n'est pas obligé que ce soit la seule façon de représenter notre système.

Les **deuxième et troisième postulats** sont liées à la mesure, on n'en a pas parlé ici car ce sont des considérations purement physiques. On remarquera seulement que les grandeurs physiques sont des opérateurs hermitiens comme demandé dans ces postulats. Tous ces opérateurs ne sont pas des observables en revanche ce qui pose problème (X n'est pas diagonalisable dans l'espace de Hilbert par exemple). Il va en fait falloir élargir cet espace à l'aide des distributions pour avoir toutes les grandeurs nécessaires.

Le **quatrième postulat** nous dit que l'évolution dans le temps est donnée par l'équation de Schrödinger. Cette équation est apparue pour nous comme une conséquence de l'identification du générateur H des translations dans le temps à l'Hamiltonien. Les deux postulats sont en fait équivalents dans notre cas.

Le **dernier postulat** nous dit qu'il est possible d'associer à chaque grandeur de la mécanique analytique un opérateur hermitien qui vérifie des règles de commutation dictées par les crochets de Poisson. On a ici fait le chemin inverse en trouvant des opérateurs sur notre système et en les identifiant grâce à leurs règles de commutation.

On en conclut que la théorie que l'on a construite est bien une théorie de mécanique quantique.

Bibliographie

[DCTL18] Bernard Diu, Claude Cohen-Tannoudji, and Frank Laloë. *Mécanique Quantique.* EDP Sciences, 2018.

[Fol89] Gerald B. Folland. *Harmonic analysis in phase space.* Princeton university press, 1989.

[FW70] Warner Frank W. *Foundations of differentiable manifolds an Lie groups.* Scott, Foresman and Company, 1970.

[Hum70] James E. Humphreys. *Introduction to Lie Algebras and representation theorie.* Springer-Verlag, 1970.