

Projet bibliographique : Cohérence quantique des interactions en théorie des cordes

Baptiste Guilleminot

Avril 2025

1 Introduction

A la fin des années 30, la mécanique quantique commence à être mieux comprise. Cependant, un problème apparaît : cette théorie impose un nombre de particules fixé. Or, la relativité restreinte donne l'équivalence entre la masse et l'énergie, ce qui implique un nombre de particules variable. En 1928, Paul Dirac commence à réconcilier les deux théories avec l'équation qui porte maintenant son nom et qui décrit les électrons relativistes. Il faudra cependant attendre les années 40 et 50 pour que l'électrodynamique quantique (QED) mûrisse.

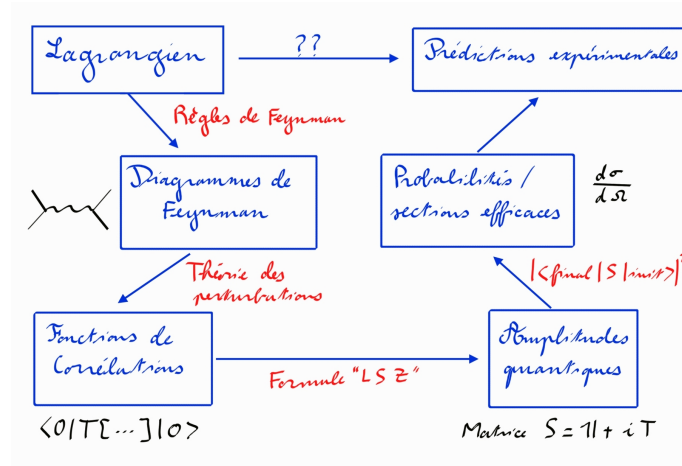


FIGURE 1 – Explication schématique du fonctionnement des théories des champs quantiques perturbatifs. En bleu, les grands outils, en noir les notations associées, en rouge les étapes de calculs. Inspiré de [1]

C'est en partie grâce à Schwinger, Tomonaga qui donnèrent une première solution analytique pour la régularisation, puis à Feynman qui donna une vision plus intuitive des calculs, et enfin à Dyson qui montra l'équivalence entre les deux approches, que la QED devient prédictive et précise. Le fonctionnement de la théorie est expliqué dans la figure 1. Cette théorie part d'un Lagrangien dans lequel on encode les différentes composantes de la théorie. On peut ensuite utiliser les diagrammes de Feynman et la théorie des perturbations pour en déduire les fonctions de corrélations. En continuant les calculs, on peut obtenir les sections efficaces qui sont mesurées expérimentalement.

On peut utiliser dans le cas de la QED la théorie des perturbations car la constante de couplage ($\alpha \approx \frac{1}{137}$) est faible ce qui permet de négliger les diagrammes de Feynman plus compliqués. Ce cadre théorique fonc-

tionne aussi très bien dans le cas de l'interaction faible. Cependant, au moment de quantifier l'interaction forte, un problème se pose ; bien qu'à hautes énergies l'interaction garde un couplage faible (liberté asymptotique), à basses énergies le couplage devient fort, on parle de confinement. Une théorie perturbative ne pourra donc pas décrire tous les phénomènes.

De plus, un grand nombre de résonances sont observées durant les expériences. Une idée est alors proposée par des théoriciens comme Geoffrey Chew. Au lieu d'essayer de résoudre le problème en partant du Lagrangien, il est peut-être possible de partir directement de la matrice d'interaction S . En imposant des conditions comme l'unitarité, l'analyticité et le crossing, l'espoir est de pouvoir limiter le nombre de matrices S possibles jusqu'à en avoir plus qu'une. Ce principe où l'on cherche à déterminer une théorie à partir de conditions imposées dessus est appelé **bootstrap**.

Cette philosophie fut très efficace dans d'autres situations (modèle d'Ising 3D...) mais dans le cas de l'interaction forte, les conditions ne sont pas assez restrictives pour obtenir une unique matrice. Cependant, cette étude reste intéressante car elle permet de restreindre les théories possibles guidant la recherche de nouveaux modèles. C'est par exemple en suivant ce guide que Veneziano a proposé une formule qui est à l'origine de la théorie des cordes.

Le sujet de mon stage porte justement sur cette amplitude de diffusion proposée par Veneziano. L'objectif est de prouver que l'on a une propriété qui est plus forte que l'unitarité. Cette propriété a été conjecturée dans [3] suite à des simulations numériques et l'objectif serait d'en obtenir une preuve mathématique.

Afin de comprendre comment on arrive à ce problème, nous commencerons par voir un certain nombre d'outils. Nous verrons ensuite ce qu'imposent les conditions que l'on met sur la théorie. Enfin, nous poserons la conjecture à prouver.

2 Quelques outils utiles pour la suite

Le système que nous cherchons à étudier est un système de deux particules relativistes incidentes de quadrivecteur impulsion p_1 et p_2 qui se rencontrent et interagissent. Le produit de la réaction est deux particules d'impulsion p_3 et p_4 . La cinématique de ce système peut être caractérisé par les variables de Mandelstam ¹ :

$$s = -(p_1 + p_2)^2 \quad (1)$$

$$t = -(p_1 - p_3)^2 \quad (2)$$

$$u = -(p_1 - p_4)^2 \quad (3)$$

On pourra remarquer que $s + t + u = \sum_{i=1}^4 m_i^2$. De plus, on peut donner une situation physique pour chacune des variables, voir figure 2.

Maintenant que l'on a les variables permettant de caractériser le système, il est temps de regarder la matrice S qui encode l'interaction. On va pour l'instant définir les notions dans un cadre plus général que celui de l'expérience ci-dessus. On considère deux espaces de Hilbert, celui entrant qui décrit les particules longtemps avant l'interaction et celui sortant qui décrit les interactions après. Soit $|m\rangle$ et $|n\rangle$ des états à respectivement m et n particules dans ces espaces de Hilbert. On définit les éléments de matrices par :

$${}_{entrant}\langle m | {}_{sortant} | n \rangle = {}_{entrant}\langle m | S | n \rangle_{entrant} = S_{nm} \quad (4)$$

1. Il y a des - dans les définition car on a choisi la convention $\text{diag}(-+++)$ pour la métrique donc $m^2 = -p^2$.

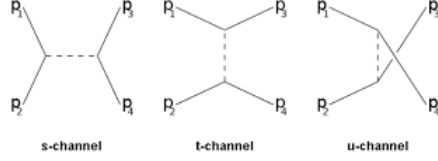


FIGURE 2 – Correspondance entre les variables de Mandelstam et les situations physiques.

On décompose ensuite la matrice S en une partie triviale (sans interaction) et une partie interagissante $T : S = \mathbb{K} + iT$. On définit enfin l'amplitude de diffusion M_{nm} via :

$$\langle m | T | n \rangle = (2\pi)^4 \delta\left(\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m p_j\right) M_{nm} \quad (5)$$

Dans le cadre de l'expérience décrite au début de cette partie, l'interaction peut être décrite par les variables de Mandelstam. Si on ajoute la relation que ces variables doivent vérifier, on remarque que l'on a juste à étudier une fonction de la forme $M(s, t)$.

Jusqu'ici, l'étude a été menée dans l'espace des impulsions. Cependant, cela reste peu pratique car on doit à chaque fois considérer la conservation de l'impulsion en rajoutant des termes dans les calculs. Afin de se simplifier la tâche, on va changer de base et venir diagonaliser la matrice S . Afin de faire cela, on va utiliser des grandeurs qui sont conservées par les symétries propres au groupe de Poincaré (relativité restreinte). On utilise donc le développement en ondes partielles qui prend en compte l'impulsion du centre de masse p , et le moment angulaire caractérisé par J et m . Le passage d'une base à l'autre se fait alors en utilisant la relation de passage suivante (voir [3]) :

$$\langle p_1 p_2 | p J m \rangle = \sqrt{\frac{E_{\vec{p}}}{|\vec{p}| E_{\vec{p}_1} E_{\vec{p}_2}}} \delta(p - p_1 - p_2) Y_J^m(\hat{p}_1) \quad (6)$$

Où Y_J^m est une harmonique sphérique et \hat{p}_1 est l'impulsion par rapport au centre de masse. On vient ensuite définir $f_J(p^2) \propto \langle p J m | T | p J m \rangle$. En utilisant 6, on peut alors montrer (voir [5] chapitre 5) que :

$$M(s, t) = 16\pi \sum_J (2J + 1) f_J(s) P_J(\cos(\theta)) \quad (7)$$

Où P_J est le polynôme de Legendre de degré J et $\cos(\theta) = 1 + \frac{2t}{s - 4m^2}$ (on a supposé que les 4 particules considérées étaient de même masse).

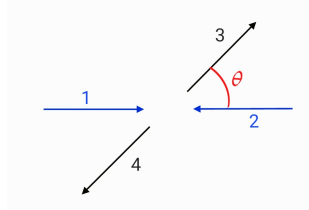


FIGURE 3 – Schéma avec la définition de l'angle θ .

3 Le bootstrap

Maintenant que l'on a les outils, nous pouvons commencer à regarder les contraintes que donnent les propriétés d'analyticité, de crossing et d'unitarité.

Commençons par **l'analyticité**. Cette propriété assure la causalité de la théorie. Mathématiquement, il a été prouvé que certaines régions du plan $(t, s) \in \mathbb{C}^2$ devaient être analytiques. Ces différentes zones sont résumées dans [3] page 22. Dans la suite, nous supposons que les fonctions sont méromorphes, c'est-à-dire qu'elles sont holomorphes sauf au niveau de certains pôles. Cette propriété ne peut pas être exacte car il doit y avoir des coupures pour que l'unitarité soit vérifiée. C'est cependant une approximation qui est vérifiée si on ne considère pas les diagrammes avec des boucles ce que l'on peut faire étant donné que l'on considère des interactions à hautes énergies donc avec un faible couplage .

La deuxième propriété est **le crossing**. Physiquement, elle correspond à l'équivalence entre $12 \rightarrow^s 34$, $1\bar{3} \rightarrow^t 24$ et $12 \rightarrow^u \bar{2}3$ où \bar{i} correspond à l'antiparticule de i . Cette propriété vient de la relativité restreinte et demande que $M(s, t) = M(t, s) = M(s, 4m^2 - s - t)$.

Cette propriété tient lorsque l'on considère l'amplitude dans son intégralité. Or, il y a des nombres quantiques comme celui de couleur qui est lié à $SU(3)$, qui sont aussi à prendre en compte. On notera A au lieu de M les amplitudes une fois ces nombres fixés. Les conditions de crossing sur A ne sont pas les mêmes que celles sur M . On peut montrer que dans le cadre du groupe de Lie ci-dessus, on ne garde que (voir [3] p.37) :

$$A(s, t) = A(t, s) \quad (8)$$

Il est montré dans [3] que l'amplitude doit être de la forme :

$$A(s, t) = \sum_{n,J} c_{n,J} \frac{P_J(1 + \frac{2t}{m_{n,J}^2 - 4m_0^2})}{s - m_{n,J}^2} \quad (9)$$

On remarque alors que s'il existe un J_{max} , on a un polynôme en t et des pôles en s ce qui n'est pas compatible avec la propriété de crossing. Le crossing va donc impliquer qu'il existe une infinité de pôles sur l'axe des s et une infinité de particules avec des moments angulaires de plus en plus importants.

La dernière propriété est **l'unitarité**. Cette propriété vient de la mécanique quantique et est imposée par l'interprétation probabiliste des résultats dans cette théorie. Dans le formalisme que l'on manipule, elle s'écrit :

$$S^\dagger S = \mathbb{I} \implies TT^\dagger = \frac{1}{i}(T - T^\dagger) \quad (10)$$

$$\implies 2\text{Im}(M(s, t)) = \sum_{\{q_i\}} \prod_i \int (2\pi)^4 dLIPS_{q_i} M^*(p_3 p_4 \rightarrow \{q_i\}) M(p_1 p_2 \rightarrow \{q_i\}) \delta(p_1 + p_2 - \sum_{q \in \{q_i\}} q) \quad (11)$$

$$\implies \text{Im}(M(s, 0)) \geq 0 \quad (12)$$

$$\implies f_J(s) \geq 0 \quad (13)$$

Où on a posé $dLIPS_q = \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \delta(q^2 - m^2) \theta(q_0)$ la mesure sur l'espace invariant de Lorentz. La première implication est évidente. Pour la deuxième implication, voir [3]. La troisième implication s'appelle "optical theorem" et est démontrée dans [5]. La dernière implication vient de l'orthogonalité des polynômes de Legendre.

4 Un cas d'étude, l'amplitude de Veneziano

En cherchant une amplitude qui vérifie les conditions ci-dessus et des éléments de la théorie de Regge, Gabriele Veneziano propose une amplitude dans [4]. Il utilise alors la fonction "Bêta" d'Euler pour définir l'amplitude. La définition de cette fonction est la suivante :

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (14)$$

Le prolongement analytique sur le plan complexe donne des pôles au niveau des entiers négatifs. Afin d'avoir plus de liberté et de placer ces pôles aux niveaux de grandeurs positives, on pose :

$$A(s, t) = B(-\alpha(s), -\alpha(t)) \quad (15)$$

Où α est une fonction affine. On a alors une amplitude qui est bien méromorphe, qui vérifie automatiquement le crossing et qui donne les bons résultats dans la limite de Regge (utilisation de la formule de Stirling, voir [3]). La simplicité de cette formule et ses premiers résultats encourageants menèrent à un grand engouement. De plus, l'unitarité implique l'existence d'un graviton et l'interprétation comme dans [2] donna naissance à la théorie des cordes. Des résultats expérimentaux contredisant ce modèle et l'apparition de la QCD va cependant mener à une certaine perte d'intérêt mais ce modèle reste un bon cas d'étude.

Lorsque l'on s'intéresse à cette amplitude, on vient étudier les résidus de Regge $\beta_i(s)$ qui correspondent aux pôles de $f_J(s)$ en $J = s - i$. On pourra comprendre leur rôle en lisant les pages 96 à 99 de [3]. La condition 13 devient alors $\beta_i(m_n^2) \geq 0$ pour toutes les masses correspondant aux pôles.

De plus, on peut montrer (voir [3]) que $\beta_i(s) = B(s) \frac{p_i(s)}{s^{d_i}}$ où p_i est un polynôme dont le degré dépend de i , d_i est un entier qui dépend aussi de i et $B(s) = \frac{s^s \Gamma(1+s)}{\Gamma(2+2s)}$. Les autres grandeurs étant positives, la condition sur β_i devient une condition sur p_i . L'unitarité impose donc que :

$$p_i(m_n^2) \geq 0 \quad (16)$$

Pour des dimensions $d \leq 10$, une propriété plus forte ressort des simulations numériques menées dans [3]. Il semblerait que tous les coefficients des polynômes soient positifs, ce qui est plus fort que 16. Dans sa thèse, Felipe Figueroa précise qu'ils n'ont pas eu le temps de trouver une preuve mathématique de ce résultat.

L'objectif de mon stage serait donc de reprendre les calculs et d'essayer de prouver l'énoncé suivant : *Pour un espace-temps de dimension inférieure à 10, tous les coefficients des polynômes p_i définis précédemment sont positifs.*

Références

- [1] Antoine Bourget (Scientia Egria). Electrodynamique quantique et diagrammes de feynman. 2021.
- [2] Yoichiro Nambu. Quark model and the factorization of the veneziano amplitude. In R. Chand, editor, *Symmetries and Quark Models*, pages 269–277, New York, 1970. Gordon and Breach.
- [3] Felipe Figueroa Vilar Del Valle. *Dual models revisited : a bootstrap perspective from QCD to string theory*. PhD thesis, Ecole doctorale de physique de Grenoble, 2024.
- [4] Gabriele Veneziano. Construction of a crossing-symmetric, regge-behaved amplitude for linearly rising trajectories. *Il Nuovo Cimento A*, 1968.
- [5] Claude Itzykson ; Jean-Bernard Zuber. *Quantum Field Theory*. McGRAW-HILL international book company, 1980.