12. $\langle S_1, \oplus, \otimes \rangle$是$\langle X, \oplus, \otimes \rangle$的子代数系统

$\because S_1 \subseteq X$

$\forall x, y \in S_1$, $x \oplus y \in S_1$, $x \otimes y \in S_1$ (封闭性)

同理, $\langle S_2, \oplus, \otimes \rangle$也是$\langle X, \oplus, \otimes \rangle$的子代数系统

$\langle S_3, \oplus, \otimes \rangle$则不是$\langle X, \oplus, \otimes \rangle$的子代数系统

对, $b \in S_3$, $c \in S_3$, $b \oplus c = a \notin S_3$ 运算不封闭

$\therefore \langle S_3, \oplus, \otimes \rangle$不是$\langle X, \oplus, \otimes \rangle$的子代数系统

17. 取设函数 $f(X) = Y$

~~$f(x) = 0$, $x = 2k$ $(k \in N)$~~

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 2k \ (k \in N) \\ 1, & x = 2k+1 \ (k \in N) \end{cases}$$

$f(x_1 \cdot x_2)$, $f(x_1) \times f(x_2)$

当$x_1$为奇数, $x_2$为偶数, $x_1 \times x_2$为偶数, 易知自然数数乘满足交换率

$f(x_1 \times x_2) = 0$, $f(x_1) \times f(x_2) = 1 \times 0 = 0$

$f(x_1 \times x_2) = f(x_1) \times f(x_2)$,

当$x_1$为奇数, $x_2$为奇数, $x_1 \times x_2$为奇数

$f(x_1 \times x_2) = 1$, $f(x_1) \times f(x_2) = 1 \times 1 = 1$

$f(x_1 \times x_2) = f(x_1) \times f(x_2)$

当$x_1$为偶数, $x_2$为偶数, $x_1 \times x_2$为偶数

$f(x_1 \times x_2) = 0 = f(x_1) \times f(x_2) = 0 \times 0 = 0$

综上 $\forall x_1, x_2 \in N$, $f(x_1 \times x_2) = f(x_1) \times f(x_2)$

$\therefore Y$是$X$的同态象

19. $\because f_1, f_2$ 都是同态函数

$\therefore f_1(x_1 * x_2) = f_1(x_1) \oplus f_1(x_2)$

$f_2(x_1 * x_2) = f_2(x_1) \oplus f_2(x_2)$

$f_1(x_1 * x_2) \oplus f_2(x_1 * x_2) = f_1(x_1) \oplus f_1(x_2) \oplus f_2(x_1) \oplus f_2(x_2)$

$h(x) = f_1(x) \oplus f_2(x)$

$\because f_1(x_1 * x_2) \oplus f_2(x_1 * x_2) = h(x_1 * x_2)$

$\because \oplus$ 满足交换率和结合律

$\therefore$ 右边 $= \cancel{(f_1(x_1) \oplus f_1(x_2)) \oplus (f_2(x_1) \oplus f_2(x_2))}$

$= (f_1(x_1) \oplus f_2(x_1)) \oplus (f_1(x_2) \oplus f_2(x_2))$

$= h(x_1) \oplus h(x_2)$

$h(x_1 * x_2) = h(x_1) \oplus h(x_2)$

$\therefore h$ 是从 $\langle X, * \rangle$ 到 $\langle Y, \oplus \rangle$ 的同态函数.

20. $h_1$ 是 $\langle X, f_1 \rangle$ 到 $\langle Y, f_2 \rangle$ 同态函数

$\forall x_1, x_2 \in X$ $h_1(f_1(x_1, x_2)) = f_2(h_1(x_1), h_1(x_2))$ ①

$h_2$ 是 $\langle Y, f_2 \rangle$ 到 $\langle Z, f_3 \rangle$ 同态函数

$\forall y_1, y_2 \in Y$, $h_2(f_2(y_1, y_2)) = f_3(h_2(y_1), h_2(y_2))$ ②

$\therefore \forall x_1, x_2 \in X$, $h_2 \circ h_1(f_1(x_1, x_2)) = h_2(h_1(f(x_1, x_2)))$

$= h_2(f_2(h_1(x_1), h_2(x_2)))$ (由①可得)

$= f_3(h_2(h_1(x_1)), h_2(h_1(x_2)))$ (由②可得)

$= f_3(h_2 \circ h_1(x_1), h_2 \circ h_1(x_2))$

$\therefore h_2 \circ h_1$ 是从 $\langle X, f_1 \rangle$ 到 $\langle Z, f_3 \rangle$ 的同态函数.

扫描全能王 创建

23. S不是空集

$\forall x, y \in S$

$x \oplus y = x * a * y \ (a \in S)$

$\langle S, * \rangle$是半群

$\Rightarrow x * a * y \in S$ (具有封闭性)

$\forall x, y, z \in S$

$(x \oplus y) \oplus z$

$= (x * a * y) \oplus z$

$= x * a * y * a * z$

$x \oplus (y \oplus z)$

$= x \oplus (y * a * z)$

$= \cancel{x * a *}\ x * a * y * a * z$

$\therefore (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$

$\therefore$ 知$\langle S, \oplus \rangle$是半群

25. R为非空集合

$0 \in R$

$\forall\ x * 0 = 0 * x = 0 + x + 0 \cdot x = x$

$\therefore$ 0是$*$在S集合上的幺元.

$\forall x, y \in R,\ x * y = x + y + xy \in R$ (满足封闭性)

$\forall x, y, z \in R,\ (x * y) * z = (x + y + xy) * z$

$= x + y + xy + z + z(x + y + xy)$

$= x + y + z + xy + xz + yz + xyz$

$x*(y*z)$

$=x*(y+z+yz)$

$=x+y+z+yz+x(y+z+yz)$

$=x+y+z+xy+xz+yz+xyz$

$\therefore (x*y)*z=x*(y*z)$.

$\therefore$ $\langle R,*\rangle$是含幺半群.

26. $\langle S,*\rangle$是交换半群

$(x*y)*(x*y)$

$=x*y*x*y$ (半群)

$=x*x*y*y$ (交换半群)

$=(x*x)*(y*y)$

又 $x,y$为幂等元

$\therefore$ $x*x=x,\ y*y=y$

$\therefore$ 原式$=x*y$.

$\therefore (x*y)*(x*y)=(x*y)$.

28. $\langle S,*\rangle$是半群,

对 $x,y,z\in S$ 且 $x*z=z*x$, 且 $y*z=z*y$

$(x*y)*z$

$=x*(y*z)$

$=x*(z*y)$

$=(x*z)*y$

$=z*x*y$

$=z*(x*y)$