

P158: ~~709~~

$$\begin{aligned} 9. (1) f \circ g &= f(g(x)) \\ &= (x+2)^2 - 1 \\ &= x^2 + 4x + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g \circ f &= g(f(x)) \\ &= x^2 - 1 + 2 \\ &= x^2 + 1 \end{aligned}$$

(2). 上述 ~~函数~~ 两个函数都既不是单射, 也不是满射

10. (1). ~~$f = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,1)\}$~~

作 $f = \{(1,2), (2,1), (3,4), (4,3)\}$.

$$f^2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$$

$$f^3 = f^2 \circ f = f = \{(1,2), (2,1), (3,4), (4,3)\}$$

$$f^{-1} = \{(1,2), (2,1), (3,4), (4,3)\}$$

$$f \circ f^{-1} = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$$

(2). 存在, (1) 中构造的双射函数即满足条件

$$\text{即 } g = \{(1,2), (2,1), (3,4), (4,3)\}$$

11. $P \cdot P^{-1} = I$

$$P^{-1} = \begin{Bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{Bmatrix}$$

$$P \diamond P^{-1} = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{Bmatrix}$$

12. (1). 不是

(2). 是



B). 是

14.

构造 $f: [0, 1] \rightarrow [a, b]$

$$f(x) = \cancel{a+b} (b-a)x + a$$

~~$\forall x \in [0, 1], f(x) \in [a, b]$ 有唯一 $y \in [a, b], xfy$~~

~~$\forall y \in [a, b], \exists$ 有唯一 $x \in [0, 1], xfy$~~

~~$\therefore f$ 是双射.~~

设 $\forall x_1, x_2 \in [0, 1]$ ~~$x_1 \neq x_2$~~

假设 $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \cancel{a+b} (b-a)x_1 + a = (b-a)x_2 + a$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

$\therefore f$ 是单射

$$\forall y \in [a, b], \exists x_0 \in [0, 1], x_0 f y$$

$\therefore f$ 是满射

$\therefore f$ 是双射

$\therefore [0, 1]$ 与 $[a, b]$ 等势, $[0, 1] \sim [a, b]$

P 213

7. $\forall x, y, z \in X$

$$(x * y) * z = x * z = x$$

$$x * (y * z) = x * y = x$$

\therefore 满足结合律

$$x * y = x \neq y * x = y$$

\therefore 不满足交换律



假设有元

则 $\forall x \in X$

$$x * e = e * x$$

$$e * x = x$$

$$e * x = e$$

x 为任意取值, 明显不总为元

\therefore 元不存在

没有零元 b

则 $\forall x, b * x = x * b = b$

由定义知 $x * b = b$

\therefore 不存在

\therefore 不存在元

\therefore 不存在逆元

9. $\forall x, y \in X$

$$(x * y) * x = x * (x * y)$$

$$\therefore x = x * y \quad ①$$

$\therefore \forall x, y$ 为任意取值 x

\therefore ① 当 $y = x$ 时同样成立

$$\therefore x = x * x$$

$\therefore \forall x \in X$ 都是幂等元



9. $\forall x \in X$

$$(x * x) * x = x * (x * x) \text{ 结合律}$$

$$\therefore x = x * x$$

$\therefore x$ 为幂等元, ~~幂等~~

$\therefore \forall x \in X$ 中每个元素都是幂等元

