

地球自转条件下的卫星测控模型*

刘玉堂, 李新芳

(河南机电高等专科学校 基础部, 河南 新乡 453002)

摘要: 在考虑地球自转的条件下, 卫星或飞船在飞行过程中相继两圈的经度有一些差异, 并且卫星或飞船的运行轨道与地球赤道平面有固定的夹角, 因而卫星或飞船轨道构成一个环形区域。用圆的最大内接正方形来代替圆对环形区域进行覆盖, 得到一个合理的所需测控站个数的数学模型, 代入神七相关数据得到全程测控神七时所需的测控站的个数为37个。

关键词: 测控站; 环形区域; 投影; 测控区域

中图分类号: O221.4

文献标识码: A

文章编号: 1008-2093(2010)03-0034-03

1 引言

卫星和飞船在国民经济和国防建设中有着重要的作用, 对它们的发射和运行过程进行测控是航天系统的一个重要组成部分。航天测控的理想状况是对卫星和飞船(特别是载人飞船)进行全程跟踪测控。本文讨论的是2009年全国大学生数学建模竞赛C题卫星和飞船的跟踪测控问题^[1]的第二个问题, 即假设一个卫星或飞船的运行轨道与地球赤道平面有固定的夹角, 且在离地面高度为 H 的球面 S 上运行。考虑到地球自转时该卫星或飞船在运行过程中相继两圈的经度有一些差异, 至少应该建立多少个测控站才能对该卫星或飞船可能飞行的区域全部覆盖以达到全程跟踪测控的目的。

2 模型假设

- 1) 地球是一个均匀的球体, 卫星或飞船在环绕地球运动时被看做质点。
- 2) 每个测控站的测控范围只考虑与地平面夹角3度以上的空域。
- 3) 只研究卫星或飞船进入预定轨道之后正常运行的跟踪测控。
- 4) 每一个测控站测控的倒置圆锥域的锥底圆半径相等。
- 5) 每一个纬度和每一个经度在地球表面的实际跨度相等。
- 6) 地球上的每一个地方都可以建立测控站。
- 7) 卫星或飞船的运行轨迹是球面 S 上的一个圆。

3 模型建立

由假设知, 卫星或飞船被看做一个质点绕地心做匀速圆周运动。而在该小题中考虑到了在卫星或飞船绕地球运转时, 地球本身也在自转。所以地球自转时该卫星或飞船在运行过程中相继两圈的经度就会有一些差异。也就是说地球自转运动, 卫星或飞船绕地球做匀速圆周运动二者之间存在一个相对的转动角速度。更为重要的是卫星或飞船的运行轨道与地球赤道平面有固定的夹角, 在此记为 Q 。为了便于叙述和读者理解, 我们建立了地心直角坐标系(三维立体直角坐标系), 作出了卫星绕地球运动的模拟图^[2]。如图1所示:

其中: 原点: 地球质心。

参考平面: 赤道面。

OX 轴: 初始子午线与赤道面的交线, 向外为正。

OZ 轴: 地球的旋转轴, 向外为正。

OY 轴: 赤道面内, 右手旋转法则确定。

θ : 卫星或飞船的运行轨道平面与地球赤道平面的固定夹角。常以地心至北极方向和轨道平面正法向之间的夹角来度量, $\theta = 90^\circ$ 为极地轨道。

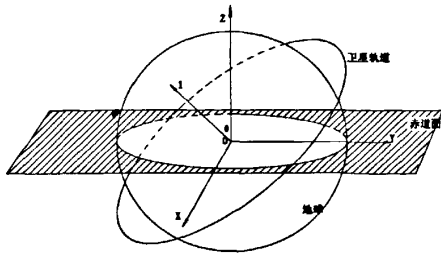


图1 卫星绕地运动模拟图

*收稿日期: 2010-04-21

作者简介: 刘玉堂(1981-), 男, 湖北襄阳人, 助教, 主要从事应用概率统计研究。

由题意知卫星或飞船的运行轨迹是球面 S 上的一个圆。其轨迹所在的平面与赤道平面的夹角为 θ ，那么可以将卫星或飞船的可能飞行的区域看做一个环形区域 T (球面 S 的一部分)。下面我们所要做的是求解出测控站的个数，使得这个环形区域 T 在所有测控站的测控区域内。由前面分析可知测控站的测控区域是一个圆锥域。这个圆锥域与球面的交面是球面 S 的一部分，在此可看做一个圆，这个圆的半径是 R_1 。为了便于计算我们将这个圆的最大内接正方形看做一个测控站的测控区域^[3]。

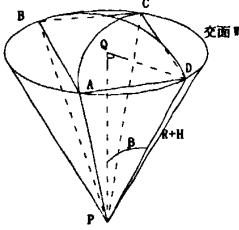


图2 测控区域简化图

如图2所示：某测控站 P ，它的测控区域原本是一个类似圆锥体的区域，与球面 S 的交面为 W 。交面对应的圆的半径为 R_1 ，解图中直角三角形 PQD 得该圆的半径： $R_1 = (R + H) \sin \beta$ 。这个圆被它的最大内接正方形 $ABCD$ 代替，这个圆的最大内接正方形 $ABCD$ 的边长是 $\sqrt{2}(R + H) \sin \beta$ ，这个正方形的面积是 $2(R + H)^2 \sin^2 \beta$ 。经简化后它的测控区域用正方形 $ABCD$ 来代替。然后用一些正方形来覆盖卫星或飞船可能飞过的区域。所需正方形的个数便是所要建的测控站的个数。所需正方形的个数与卫星或飞船的规定平面与赤道平面的夹角 θ 有密切关系。

因为地球是关于赤道对称的，所以以赤道、北半球研究为例。在对卫星或飞船测控的过程中，我们在赤道的表面设置一组（第一组）测控站，使得任何一颗卫星飞经赤道上空时都会被测控到。赤道上的测控站要对与地球赤道相对应的球面 S 中的一个环形区域进行测控，需测控站个数为 n_1 。由以上分析知与地球的赤道相对应的球面 S 上的圆有一个边长为 $\sqrt{2}(R + H) \sin \beta$ 的内接正多边形，该多边形的边数为 n_1 。如图3所示：

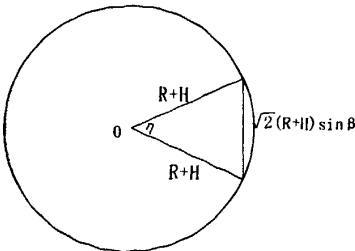


图3 单组数量确定截面图

在这个圆中长度为 $\sqrt{2}(R + H) \sin \beta$ 的弦长所对应的圆心角为 η 。

利用余弦定理解三角形得出角度：

$$\cos \eta = \frac{2(R + H)^2 - 2(R + H)^2 \sin^2 \beta}{2(R + H)^2} = 1 - \sin^2 \beta \quad (1)$$

$$\text{所以有: } n_1 = \left[\frac{360^\circ}{\eta} \right] \quad (2)$$

其中 $\sin \beta = \sin(180^\circ - \alpha - \gamma)$ 当卫星或飞船飞行的高度 H 已知时，可运用模型一解出角 α, γ ，继而解出角 β, η ，和第一组测控站站数 n_1 。

在北半球上，第二组的测控站的个数是 n_2 。要使得这一组的测控区域与第一组（在赤道上的一组）的测控区域相接。那么这一组测控站应分布在北纬 2β 线上，北纬 2β 的纬度圆的半径 $R_2 = R \cos(2\beta)$ 。在球面 S 上相邻两个测控站连结得到的弧长为 $(R + H) \times 2\beta$ ，这个弧长在北纬 2β 的纬度圆上对应的圆心角

$$\eta_2 = \frac{(R + H) \times 2\beta}{R \cos(2\beta)}$$

$$\text{所以: } \eta_2 = \frac{360^\circ \times R \cos(2\beta)}{(R + H) \times 2\beta}$$

当卫星或飞船飞行的高度 H 已知时，可运用模型一解出角 β 从而得出第二组测控站站数 n_2 。

经类推可知：第 P 组所需测控站的个数 n_p

$$n_p = \frac{360^\circ R \cos(p \times \beta)}{(R + H) \times 2\beta} \quad P = 2, 3, 4, 5 \dots \dots \quad (3)$$

在北半球上需测控站组数 q ，

$$q = \left[\frac{\theta - \beta}{2\beta} \right] \quad (4)$$

其中 $[]$ 为向上取整符号，当 $\theta \leq \beta$ 时， $q = 0$ 。

依据以上所述，在北半球上需建立测控站个数为 $n_2 + n_3 + \dots + n_q$ 。因为南北半球对称，在南半球上需建立测控站个数为 $n_2 + n_3 + \dots + n_q$ ，再加上赤道上的一组，建立模型：要想对卫星或飞船实施全程测控，共需测控站总数为

$$N = n_1 + 2(n_2 + n_3 + \dots + n_q) \\ = \frac{360^\circ}{\eta} +$$

$$\frac{180^\circ R (\cos 2\beta + \cos 3\beta + \dots + \cos \left(\left[\frac{\theta - \beta}{2\beta} \right] \beta \right))}{(H + R)\beta} \quad (5)$$

当卫星或飞船的运行高度已知时，可根据模型一解出角 β ，再依据(1)式利用反三角函数解出角 η ，地球的半径 $R \approx 6400 \text{ km}$ 。将所得参数数据带入模型中的(5)式即可求出测控站总数 N 。

4 模型的检验

下面以神七为例检验模型。神七的运行高度是

$H = 343 \text{ km}$, 其运行轨道与赤道面的夹角是 $\theta = 42.2^\circ$, $\beta = 15.5992^\circ$, 将该值带入(1)、(2)式求解得出角 $\eta = 21.9214^\circ$, $n_1 = 17$ 。 $\theta = 42.2$ 时, $q = 1$, 第二组测控站站数 $n_2 = 10$, 所需测控站总数 $N = 37$ 。

5 结论和模型评价

5.1 结论

在考虑地球自转的情况下, 神舟七号飞船进入预定轨道运行稳定后距地球表面高度为 343 公里的条件下, 根据模型计算出至少应该建立 37 个测控站才能对神舟七号飞船进行全程跟踪测控。

5.2 模型评价

本模型很好地描述了在考虑地球自转的情况下, 测控站对卫星或飞船跟踪测控问题, 并且计算出测控站的数量, 从而使测控站能够全面地对卫星或飞船进行跟踪测控。模型中指出卫星或飞船可能经过的区

域为球面 S 上的环状区域, 测控站所测控的范围为圆锥域, 两者相交所形成的球冠底面是一个圆面, 为了计算的方便, 巧妙地将环形域展开拉伸成矩形, 用圆的内接正方形将圆替代, 该方法的巧妙之处在于简捷易操作, 但缩小了测控站的实际测控范围, 增加了测控站的测控数目, 造成一定的资源浪费, 如果能够用圆的内接正六边形来代替正方形, 可能会得到更加精确的结果。

(责任编辑 吕春红)

参考文献:

- [1] 全国大学生数学建模竞赛组委会. 2009 高教社杯全国大学生数学建模竞赛题目[EB/OL]. <http://www.mcm.edu.cn>, 2009-9-10.
- [2] 姜启源. 数学模型(第三版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2007.
- [3] 姜启源, 谢金星. 数学建模案例选集[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.

Math Model of Satellites and Spacecraft Tracking Control with the Earth Rotation

LIU Yu-tang, et al

(Foundation department, Henna Mechanical and Electrical Engineering College, Xinxiang 453002, China)

Abstract: Under the terms of considering the earth's spin in the paper, there are some differences in process of the satellite or longitude of two circles in flight of airship, and the orbit of the satellite or airship and level of the equator of the earth have fixed contained angles, therefore, an annular is formed by the satellite or airship. By using square round to most heavily replace round to cover the annular area get one observing, controlling and standing mathematical modelling of number. Absorbed relevant data observe and control number of Shenzhou VII, 37 stations are asked in the whole observing journey.

Key words: station; annular area; projection; the area of observe and control