33. f 为 $\langle X, *\rangle$ 到 $\langle Y, \oplus\rangle$

$\forall x\in X$, $f(x^2)=f(x*x)$

$$=f(x)\oplus f(x)$$

$$=f(x)^2$$

设 $\exists k$, $f(x^k)=f(x)^k$

则 $f(x^{k+1})=f(x^k*x)=f(x^k)\oplus f(x)$

$$=f(x)^k\oplus f(x)$$

$$=f(x)^{k+1}$$

$\therefore \forall k\in N$, $x\in X$, $f(x^k)=f(x)^k$

$\therefore$ 设 X 中的幂等元为 x_0

则 $\forall k\in N$, $f(x_0^k)=f(x_0)^k$

$\because x_0$ 为幂等元,

$\therefore x_0^k=x_0$

$\therefore f(x_0^k)=f(x_0)=f(x_0)^k$

$\because$ 对 $\forall k\in N$ 成立

$\therefore f(x_0)$ 是 $\langle Y, \oplus\rangle$ 中的幂等元. Y 中也存在幂等元

37. 易知, 对 e, $\exists e\in S$, $e*e=e$

$\therefore e\in S$,

$\therefore S$ 非空且含幺元.

$\forall x_1, x_2\in S$,

$\exists y_1\in S$, $y_2\in S$, s.t. $y_1*x_1=e$, $y_2*x_2=e$,

$\because \langle S, *\rangle$ 封闭, $\therefore y_2*y_1\in S$

且$\langle S,*\rangle$为群,满足结合律

$\therefore \forall x_1, x_2 \in S_1$

~~$\exists$~~,$\exists y_1, y_2$ ~~...~~ $y_2 * y_1 \in S$

$s.t. (y_2 * y_1) * (x_1 * x_2)$

$= y_2 * (y_1 * x_1) * x_2$

$= y_2 * e * x_2$

$= y_2 * x_2 = e$

由定义知:$x_1 * x_2 \in S_1$

$\therefore \langle S_1, *\rangle$封闭,$S_1 \subseteq S$

*运算满足结合律,且$\langle S_1, *\rangle$中存在幺元

$\therefore \langle S_1, *\rangle$是$\langle S, *\rangle$的子含幺半群.

39. (1). $\langle G, *\rangle$是群

$\because a \in \langle G, *\rangle$

$\therefore a$有且有唯一逆元,设为a^{-1}

$\because a * x = b$

$\therefore a^{-1} * a * x = a^{-1} * b$

$\therefore x = a^{-1} * b$

$\therefore$存在唯一的 $x = a^{-1} * b \in G$,使得$a * x = b$

(2) $\langle G, *\rangle$是群

$\because a \in \langle G, *\rangle$

$\therefore a$有且只有唯一逆元,设为a^{-1}

$y * a = b$

$y*a*a^{-1}=b*a^{-1}$

$y*e=b*a^{-1}$

$y=b*a^{-1}$

$\because$ $b*a^{-1}$ 的结果的唯一性，且 $b*a^{-1}\in G$（封闭性）

$\therefore$ 存在唯一的 $y=b*a^{-1}\in G$，使得 $y*a=b$

43. $a*b=e*a*b*e$

$=(b*b)*a*b*(a*a)$

$=b*(b*a)*(b*a)*a$

$=b*e*e*a$

$=b*a$

45. 设 $x_1\in$ [illegible] $*G$

$x_1*x_1=x_1$, [illegible]

$\because x_1\in\langle G,*\rangle$

$\therefore \exists x_1^{-1}\in\langle G,*\rangle$

$x_1\cdot x_1^{-1}=e$

$\therefore x_1*x_1\cdot x_1^{-1}=x_1\cdot x_1^{-1}$

$\therefore x_1\cdot e=e$

$\therefore x_1=e$

$\because \forall x_1\in\langle G,*\rangle$

满足 $x_1*x_1=x_1$

必有 $x_1=e$

$\therefore$ 幺元是唯一的幂等元

55.

$\forall x,y\in G$

若$f(x)=f(y)$

$a*x*a^{-1}=a*y*a^{-1}$

由消去律得

$x=y$

$\therefore f$是单射

$\forall y\in G$

$\exists\, a^{-1}*y*a\in G$

$f(a^{-1}*y*a)$

$=a*a^{-1}*y*a*a^{-1}$

$=y$

$\because \forall y\in G, \exists x\in G, f(x)=y$

$\therefore f$是满射

$\therefore f$是单射

$\because f(x_1*x_2)$

$=a*x_1*x_2*a^{-1}$

$=a*x_1*e*x_2*a^{-1}$

$=a*x_1*(a^{-1}*a)*x_2*a^{-1}$

$=(a*x_1*a^{-1})*(a*x_2*a^{-1})=f(x_1)*x_2$

∵ f 满足同态公式

∴ f 是从 $\langle G,*\rangle$ 到 $\langle G,*\rangle$ 的自同构 ~~函~~数

57. 易知 $\exists e \in G$

$\forall x$, $x*e=x$

∴ $\forall x \in G, \exists e \in G,$

$x = e*x*e^{-1}$

$= x$

∴ $(x,x) \in R$

∴ R 具有自反性

~~若(x,y)∈G, ∀x,y∈G~~

~~∃z∈G, y~~

若 $(x,y) \in G$

则 $y = z*x*z^{-1}$

$z^{-1}*y*z = (z^{-1}*z)*x*(z^{-1}*z)$

$(z^{-1})*y*(z^{-1})^{-1} = e*x*e$

$(z^{-1})*y*(z^{-1})^{-1} = x$

∵ $z \in G$, ∴ $z^{-1} \in G$

∴ $(y,x) \in R$

∴ R 具有对称性

若 $(x,y) \in R$, $(y,t) \in R$

则 $\exists z_1 \in G$, $y = z_1*x*z_1^{-1}$

$\exists z_2 \in G$, $z = z_2*y*z_2^{-1}$

$\therefore \exists z_1, z_2 \in G,\ t = z_2 * (z_1 * x * z_1^{-1}) * z_2^{-1}$

$= z_2 * z_1 * x * z_1^{-1} * z_2^{-1}$

$= (z_2 * z_1) * x * (z_1^{-1} * z_2^{-1})$

$= (z_2 * z_1) * x * (z_2 * z_1)^{-1}$

$\because \langle G, * \rangle$的封闭性

$\therefore \exists z_3 \in G,\ z_3 = z_2 * z_1$

$\therefore \exists z_3 \in G,\ t = z_3 * x * z_3^{-1}$

$\therefore (x, t) \in R$

$\therefore R$具有传递性

$\therefore R$具有自反性,对称性,传递性

$\therefore R$是G上的等价关系