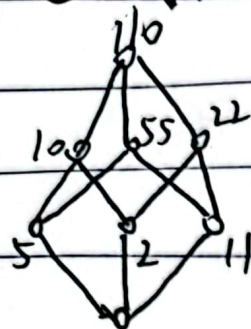


18. 画哈斯图如下



由哈斯图可得为分配格

经验证, $\forall x \in B, \text{GCD}(x, x') = 1, \text{LCM}(x, x') = 10$

\therefore 为有补的分配格

$\therefore \langle B, \text{GCD}, \text{LCM}, ' \rangle$ 为布尔代数

19.

1) $|L_1| = 6 \neq 2^n (n=0, 1, 2, \dots)$

$\therefore \langle L_1, \text{GCD}, \text{LCM}, ' \rangle$ 不可能是布尔代数

2) $|L_2| = 2^3$

$2' = 12$

$\text{GCD}(2, 12) = 2 \neq 1$, 无补元

\therefore 不是有补格

23. $\therefore f$ 为满同态函数

$\therefore f(x^-) = f(x)'$

$$\begin{aligned} \forall x \in A, f(0_A) &= f(x \wedge x^-) = f(x) \wedge f(x^-) \\ &= f(x) \wedge f(x)' \\ &= 0_B \end{aligned}$$

$$f(1_A) = f(x \vee x^-) = f(x) \vee f(x^-) = f(x) \vee f(x)' = 1_B$$



$$\therefore f(0_A) = 0_B, f(1_A) = f(1_B) = 1_B$$

24.

充分性: 当 $a = b_i (1 \leq i \leq r)$

$$a = b_i \leq b_1 \oplus b_2 \oplus \dots \oplus b_r$$

$$a \leq b_i$$

必要性: 当 $a \leq b_1 \oplus b_2 \oplus \dots \oplus b_r$

$$a * (b_1 \oplus b_2 \oplus \dots \oplus b_r) = a$$

$$(a * b_1) \oplus (a * b_2) \oplus \dots \oplus (a * b_r) = a \neq 0$$

$\therefore a, b_1, b_2, \dots, b_r$ 都为原子.

\therefore 当 $a \neq b_i (1 \leq i \leq r), a * b_i = 0$

若 $\forall b_i \neq a$

$$\text{则原式 } 0 = 0 \oplus 0 \oplus \dots \oplus 0 = 0 \neq a$$

与题矛盾

$\therefore \exists b_i (1 \leq i \leq r), a = b_i$

$\therefore a \leq b_1 \oplus b_2 \oplus \dots \oplus b_r$ 的充分必要条件是存在 $i (1 \leq i \leq r)$, 使

25. 充分性.

除0外, 不存在原子 b_i , 使 $a \leq y, 0 \neq y * b_i = b_i \neq 0$
若 $y \neq 0$ 与题设矛盾.

$$\therefore y = 0$$

当 $y = 0$, 必要性

当 $y = 0, \forall b_i * y = 0$ (0的定义)

$\therefore y = 0$ 的充分必要条件是 $\forall i (1 \leq i \leq r)$, 都有 $y * b_i = 0$.

