1. $F_0(x)=P\{X(0)\leq x\}$

$=P\{x\geq 0\}$

$F_0(x)=\begin{cases} 1, & x\geq 0 \\ 0, & 其它 \end{cases}$

$F_1(x)=P\{X(1)\leq x\}$

$=P\{x\geq \varepsilon\}$

$P(\varepsilon=1)=p,\ P(\varepsilon=0)=(1-p)$

$F_1(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-p, & 0<x<1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$

$F_{-1}(x)=P\{-\varepsilon\leq x\}$

$F_{-1}(x)=\begin{cases} 0, & x<-1 \\ p, & -1<x<0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$

(2). $F_{0,1}(x_1,x_2)$

$=P\{X_0(0)<x_1, X_2(1)<x_2\}$

~~当 $x<0$, $=P\{\varepsilon<x_1, x_2>0\}$~~

$=P\{x_1>0, x_2>\varepsilon\}$

$\therefore F_{0,1}(x_1,x_2)=\begin{cases} 0, & x_1<0 或 x_2<0 \\ 1-p, & x_1>0 且, 0<x_2<1 \\ 1, & x_1>0,\ x_2>1 \end{cases}$

$F_{-1,1}(x_1,x_2)$

$=P\{x_1>X(-1), x_2>X(1)\}$

$=P\{x_1>-\varepsilon, x_2>\varepsilon\}$

$F_{-1,1}(x_1,x_2)=\begin{cases} 0, & x_1<-1 或 x_2<0 \\ p, & -1<x_1<0,\ x_2>1 \\ 1-p, & x_1>0, 0<x_2<1 \\ 1, & x_1>0,\ x_2>1 \end{cases}$

3. (1) $F_{\frac{1}{2}}(x)=P\{x>X(\tfrac{1}{2})\}$

$P\{X(\tfrac{1}{2})=\cos\tfrac{\pi}{2}=0\}=\tfrac{1}{2}$, $P\{X(\tfrac{1}{2})=1\}=\tfrac{1}{2}$

$F_{\frac{1}{2}}(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \tfrac{1}{2}, & 0<x<1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$

同理 $P\{X(1)=-1\}=\tfrac{1}{2}$, $P\{X(1)=2\}=\tfrac{1}{2}$

$F_1(x)=\begin{cases} 0, & x<-1 \\ \tfrac{1}{2}, & -1<x<2 \\ 1, & x>2. \end{cases}$

(2) $(X(t_1),X(t_2)\cdots X(t_n))\sim\begin{bmatrix} (\cos\pi t_1, \cos\pi t_2, \cdots \cos\pi t_n), & (2t_1, 2t_2 \cdots 2t_n) \\ \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} \end{bmatrix}$

由泊松分布的可加性易知 $Y(n) \sim P(n\lambda)$

5. (1). $P\{Y(n)=k\} = \frac{e^{-n\lambda}}{k!}(n\lambda)^k, \ k=0,1,2,\cdots$

(2). 取 $n_1<n_2$, $k_1\le k_2$, 易知 $\sum_{i=n_1+1}^{n_2} X_i \sim P((n_2-n_1)\lambda)$

$P\{Y(n_1)=k_1, Y(n_2)=k_2\}$

$= P\{\sum_{i=1}^{n_1} X_i = k_1, \sum_{i=n_1+1}^{n_2} X_i = k_2-k_1\} = \frac{(n_1\lambda)^{k_1}}{k_1!}e^{-n_1\lambda} \cdot \frac{(n_2\lambda)^{k_2-k_1}}{(k_2-k_1)!}e^{-n_2\lambda}$

$k_1=0,1,2,\cdots, \ k_2=k_1, k_1+1, \cdots$

8. $E(Y(t)) = 1\cdot P\{X(t)\le a\} + 0\cdot P\{X(t)>a\}$

$= P\{X(t)\le a\}$

$= F_t(a)$

$R(t_1,t_2) = E(Y(t_1)Y(t_2))$

$= 1\times 1\cdot P\{X(t_1)\le a, X(t_2)\le a\}$

$= F_{t_1,t_2}(a,a)$

10. (1). $m_X(t) = E(X(t))$

$= E(\varepsilon t)$

$= tE(\varepsilon)$

$= pt$

(2) $R_X(t_1,t_2)$

$= E(X(t_1)X(t_2))$

$= t_1t_2E(\varepsilon^2)$

$= t_1t_2p$

$C_X(t_1,t_2)$

$= Cov(X(t_1), X(t_2))$

$= E[(X(t_1)-m_X(t_1))(X(t_2)-m_X(t_2))]$

$= E[X(t_1)X(t_2)] - m_X(t_1)E(X(t_2)) - m_X(t_2)E(X(t_1)) + m_X(t_1)m_X(t_2)$

$= t_1t_2p - p^2t_1t_2 - p^2t_1t_2 + p^2t_1t_2$

$= t_1t_2p - t_1t_2p^2$

$= t_1t_2p(1-p)$

$D_X(t) = E\{[X(t)-m(t)]^2\}$

$= C_X(t,t)$

$= t^2p(1-p)$　　$\sigma(t) = \sqrt{D(t)} = |t|\sqrt{p(1-$

(2). $m_X(t)=E(X(t))$

$=tE(\xi)$

$=\frac{t}{2}$

$R_X(t_1,t_2)=E(X(t_1)X(t_2))$

$=t_1t_2E(\xi^2)$

$=\frac{t_1t_2}{3}$

$Cov\,C_X(t_1,t_2)=E\{[X(t_1)-m_X(t_1)][X(t_2)-m_X(t_2)]\}$

$=E[X(t_1)X(t_2)]-m_X(t_1)E[X(t_2)]-m_X(t_2)E[X(t_1)]+m_X(t_1)m_X(t_2)$

$=\frac{t_1t_2}{3}-\frac{t_1t_2}{4}-\frac{t_1t_2}{4}+\frac{t_1t_2}{4}$

$=\frac{t_1t_2}{12}$

$D(t)=C_X(t,t)=\frac{t^2}{12}$, $\sigma(t)=\sqrt{D(X)}=\frac{|t|}{2\sqrt{3}}$

(3). $m_X(t)=\frac{1}{2}\cos\pi t+t$

$R_X(t_1,t_2)=\frac{1}{2}\cos\pi t_1\cos\pi t_2+2t_1t_2$

$C_X(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)-m_X(t_1)m_X(t_2)$

$=2t_1t_2+\frac{1}{2}\cos\pi t_1\cos\pi t_2-(\frac{1}{2}\cos\pi t_1+t_1)(\frac{1}{2}\cos\pi t_2+t_2)$

$=t_1t_2-\frac{1}{2}t_2\cos\pi t_1-\frac{1}{2}t_1\cos\pi t_2+\frac{1}{4}\cos\pi t_1\cos\pi t_2$

$=(t_1-\frac{1}{2}\cos\pi t_1)(t_2-\frac{1}{2}\cos\pi t_2)$

$D_X(t)=C_X(t,t)=(t-\frac{1}{2}\cos\pi t)^2$

$\sigma_X(t)=\sqrt{D_X(t)}=|t-\frac{1}{2}\cos\pi t|$

(4). $m_X(t)=tE(A)+E(B)=0$

$R_X(t_1,t_2)=E[(At_1+B)(At_2+B)]=t_1t_2E(A^2)+(t_1+t_2)E(AB)+E(B^2)$

$=t_1t_2+1$

$C_X(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)-m_X(t_1)m_X(t_2)$

$=t_1t_2+1$

$D_X(t)=C_X(t,t)=t^2+1$

$\sigma_X(t)=\sqrt{t^2+1}$

15. ~~设~~ 取自然数 $1\le n_1<n_2<n_3$

$\cancel{R_X(n_2-n_1,n_3-n_2)}$

$\cancel{=E(X(n}$

$X(n_2)-X(n_1)=\sum_{i=1}^{n_2}X_i-\sum_{i=1}^{n_1}X_i$

$=\sum_{i=n_1+1}^{n_2}X_i$

同理：$X(n_3)-X(n_2)=\sum_{i=n_2+1}^{n_3}X_i$

$X_1,X_2\cdots$ 是独立同分布的随机变量

$\therefore$ ~~为~~ $Y(n)$ 是独立增量序列

$E([X(n_3)-X(n_2)][X(n_2)-X(n_1)])$

$\cancel{=E[X(n_3)X(n_2)-X(n_3)X(n_1)-X(n_2)+X(n_2)X(n_1)]}$ ~~独立~~ $\cancel{X(n)\sim}$

$\cancel{=E(X(n_2))E}$

$\cancel{X(n_2)\sim N(0,n_2\sigma^2)}$ 独立：

$=E[X(n_3)-X(n_2)]E[X(n_2)-X(n_1)]$

$=E(\sum_{i=n_2+1}^{n_3}X_i)E(\sum_{i=n_1+1}^{n_2}X_i)$

$\sum_{i=n_2+1}^{n_3}X_i\sim N(0,(n_3-n_2)\sigma^2)$，$\sum_{i=n_1+1}^{n_2}X_i\sim N(0,(n_2-n_1)\sigma^2)$

$=0$ $\quad\therefore$ 为正交增量过程.

~~$m_X(t_1)=0,\ m_Y(t_2)=0$~~

17. $R_{X,Y}(t_1,t_2)$

$=\cancel{E}$

$C_{X,Y}(t_1,t_2)$

$=R_{X,Y}(t_1,t_2)-m_X(t_1)m_Y(t_2)$

当 $t_2=0$，

$C_{X,Y}(t_1,0)\quad t_1\in T$

$=R_{X,Y}(t_1,0)-m_X(t_1)m_Y(0)$

$=E(X(t_1)Y(0))-0\times 1$

$=E(X(t_1))$

$=0$

当 $t_2\in\{\pm1,\pm2,\cdots\},\ t_1\in T$

$C_{X,Y}(t_1,t_2)$

$=R_{X,Y}(t_1,t_2)-m_X(t_1)m_Y(t_2)$

$=E(X(t_1)Y(t_2))-0\times 0$

$=E(\sin t_1\varepsilon\cos t_2\varepsilon)$

$=\frac{1}{2}E[\sin\varepsilon(t_1+t_2)+\sin\varepsilon(t_1-t_2)]=\frac{1}{2}E[\sin\varepsilon(t_1+t_2)]+\frac{1}{2}E[\sin\varepsilon(t_1-t_2)]$

$t_1+t_2\in\{0,\pm1,\pm2,\cdots\},\ t_1-t_2\in\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$

当 $t_1+t_2=0$ $(\sin\varepsilon(t_1+t_2)=0$，

其它：$E[\sin\varepsilon(t_1+t_2)]$

$=\int_{-\pi}^{\pi}\sin(t_1+t_2)\varepsilon\, d\varepsilon$

$=\frac{1}{t_1+t_2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(t_1+t_2)\varepsilon\, d(t_1+t_2)\varepsilon$

$k=(t_1+t_2)\varepsilon$

$\frac{1}{t_1+t_2}\int_{-(t_1+t_2)\pi}^{(t_1+t_2)\pi}\sin k\,dk=\frac{-\cos k}{t_1+t_2}\Big|_{-(t_1+t_2)\pi}^{(t_1+t_2)\pi}=0$

同理 $E[\sin(t_1-t_2)\varepsilon]=0$

$\therefore$ 总有 $C_{X,Y}(t_1,t_2)=0$

$\therefore X_T=\{X(t),t\in T\}$ 与 $Y_T=\{X(t),t\in T\}$，$T=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 互不相关。

~~$\cos wt_1\cos wt_2(u^2+\sigma^2)+u^2(\cos wt_1\sin wt_2)$~~

~~$\sin wt_1\sin wt_2(u^2+\sigma^2)+u^2(\cos wt_2\sin wt_1)$~~

19.(1). 对任意 $t\in T=(-\infty,+\infty)$

$X(t)=A\cos wt+B\sin wt\sim N((\sin wt+\cos wt)u,\sigma^2)$

∵对任意的n维向量都服正态分布

$(X(t_1),X(t_2)\cdots X(t_n))$ 是n维正态分布.

(2). $m_X(t)=E(A\cos wt+B\sin wt)$

$=E(A)\cdot\cos wt+E(B)\sin wt$

$=u(\cos wt+\sin wt)$

$R_X(t_1,t_2)=E[(A\cos wt_1+B\sin wt_1)(A\cos wt_2+B\sin wt_2)]$

$=(u^2+\sigma^2)(\cos wt_1\cos wt_2+\sin wt_1\sin wt_2)+u^2(\cos wt_1\sin wt_2+\cos wt_2\sin w$

$=(u^2+\sigma^2)\cos w(t_1-t_2)+u^2\sin w(t_1+t_2)$

$C_X(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)-m_X(t_1)m_X(t_2)$

$=(u^2+\sigma^2)\cos w(t_1-t_2)-u^2(\cos wt_1\cos wt_2+\sin wt_1\sin wt_2)$

$=\sigma^2\cos w(t_1-t_2)$

21. $P\{N(s)=k\mid N(t)=n\}$

$=\dfrac{P\{N(s)=k,N(t)=n\}}{P\{N(t)=n\}}$

$$= \frac{\frac{(\lambda s)^k e^{-\lambda s}}{k!} \cdot \frac{[\lambda(t-s)]^{n-k} e^{-\lambda(t-s)}}{(n-k)!}}{\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{s^k (t-s)^{n-k}}{t^n}$$

$$= C_n^k \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k} \quad k=0,1,2,\cdots n$$

22. $P(N(1)=0) = e^{-\lambda} = 0.2$, $\lambda = \ln 5$

$P(N(2) \geq 1) = 1 - P(N(2)=0) - P(N(2)=1)$

$= 1 - (e^{-2\lambda} - 2\lambda e^{-2\lambda})$

$= 1 - (0.04 - 2\ln 5 \cdot 0.04)$

$= 0.8312$

25.

$Y(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$

$m_Y(t) = E(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i)$

$= E[E(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i \mid N(t)=n)]$

$= E(n\mu)$

$= \mu\lambda t$

$D_Y(t) = $ ~~$E(D(Y) \mid N(t)=n) + D($~~

$E[D(Y \mid N(t))] + D[E(Y \mid N(t))]$

$= E[D(Y|N(t))] + D[E(Y|N(t))]$

$= E(N(t)\sigma^2) + D(N(t)u)$

$= \lambda t\sigma^2 + u^2\lambda t$

$= \lambda t(u^2+\sigma^2)$

30.(1) $X(t) = W(t+a) - W(a) \sim N(0, t\sigma^2)$

$\cancel{R_X(t)}$ $m_X(t) = 0$

$C_X(t_1,t_2) = Cov(X(t_1), X(t_2))$

$= \cancel{E(X(t_1)X(t_2))}$ 假设$(t_1<t_2)$

$= Cov(X(t_1), X(t_1) + X(t_2) - X(t_1))$

$= \sigma^2 t_1$

同理，当 $t_2<t_1$，$C_X(t_1,t_2) = \sigma^2 t_2$，$\therefore C_X(t_1,t_2) = \sigma^2 \min\{t_1,t_2\}$

(2). $m_X(t) = 0$

$C_X(t_1,t_2)$

$= E(a^2 W(\frac{t_1}{a^2}) W(\frac{t_2}{a^2}))$

$= a^2 E(W(\frac{t_1}{a^2}) W(\frac{t_2}{a^2}))$

$= \sigma^2 \min\{t_1,t_2\}$

(3). $m_X(t) = E(A)t = 0$

$C_X(t_1,t_2) = C_X(W(t_1)+At_1, W(t_2)+At_2)$

$= C_X(W(t_1), W(t_2)) + C_X(At_1, At_2)$

$= \sigma^2 \min\{t_1,t_2\} + t_1t_2$