Topología I

Apuntes curso 2024 - 2025

Javier Ortín Rodenas

Estos apuntes tienen como objetivo recopilar los conceptos enseñados en la asignatura de Topología I en la Universidad de Oviedo durante el curso 2024-2025. El índice de contenidos ha sido compartido por el equipo docente, así como algunas de las demostraciones. Otras, en cambio, han sido realizadas por el autor de estos apuntes por su cuenta.

Contents

I Espacios métricos

§1. Primeras definiciones

Definición 1.1

Sea X un conjunto no vacío ($X \neq \emptyset$), diremos que una aplicación $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una métrica (o distancia) definida en X si cumple los siguientes axiomas:

D.1) $d(x, y) \geq 0 \ \forall x, y \in X$

D.2) $d(x, y) = 0 \iff x = y \ \forall x, y \in X$

D.3) $d(x, y) = d(y, x) \ \forall x, y \in X$

D.4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \ \forall x, y, z \in X$

El par (X, d) recibe el nombre de "espacio métrico". El número real $d(x, y)$ recibe el nombre de "distancia de x a y". Es común referirse a D.4) como "desigualdad triangular".

Definición 1.2

Sean (X, d_x) un espacio métrico, $Y \neq \emptyset$ con $Y \subseteq X$ un subconjunto. Se considera:

$$d_{X|Y} : Y \times Y \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (y, y') \longmapsto d_{X|Y}(y, y') = d_X(y, y')$$

La aplicación $d_{X|Y}$ es una métrica que recibe el nombre de "métrica inducida por d_X". El espacio métrico $(Y, d_{X|Y})$ recibe el nombre de "subespacio métrico de (X, d_x)".

Definición 1.3

Sean (X, d_x) un espacio métrico, $x \in X, \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon \geq 0$, se define:

- $B_d(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$ Bola (abierta) de centro x y radio ε
- $D_d(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) \leq \varepsilon\}$ Disco de centro x y radio ε
- $S_d(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) = \varepsilon\}$ Esfera de centro x y radio ε

Nota 1.1

Cuando no haya lugar a confusión, se omitirá el subíndice correspondiente a la métrica para denotar a bolas, discos y esferas.

Nota 1.2

Sean (X, d_x) un espacio métrico, $x \in X$. Entonces, se cumple:

- Si $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ tales que $0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$, entonces se tiene $B_d(x, \varepsilon_1) \subseteq B_d(x, \varepsilon_2)$
- $S_d(x, \varepsilon) \cap B_d(x, \varepsilon) = \emptyset \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R} : \varepsilon \geq 0$
- $D_d(x, \varepsilon) = S_d(x, \varepsilon) \cup B_d(x, \varepsilon) \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R} : \varepsilon \geq 0$

§2. Estructura topológica de un espacio métrico

Lema 1.1

Sea (X, d) un espacio métrico, $x_0 \in X$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ con $\varepsilon > 0$, $x \in B_d(x_0, \varepsilon)$. Se verifica que $\exists \mu \in \mathbb{R}$ con $\mu > 0$ tal que $B_d(x, \mu) \subseteq B_d(x_0, \varepsilon)$.

Demostración: Nótese la importancia de la desigualdad estricta $\varepsilon, \mu > 0$.

Por hipótesis, $x_0 \in X$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$, luego $B_d(x_0, \varepsilon)$ está bien definida. Además, $x \in B_d(x_0, \varepsilon) \Rightarrow d(x, x_0) < \varepsilon$ por hipótesis y por definición de bola. De este modo, podemos definir $\mu = \varepsilon - d(x, x_0) > 0$ por el paso anterior. Así, $B_d(x, \mu)$ está bien definida. Queda ver que $B_d(x, \mu) \subseteq B_d(x_0, \varepsilon)$.

Sea $y \in B_d(x, \mu)$; por definición, $d(x, y) = \mu = \varepsilon - d(x, x_0)$. Por (D.4), $d(x_0, y) \leq d(x_0, x) + d(x, y) < d(x_0, x) + \mu = d(x_0, x) + \varepsilon - d(x_0, x) = \varepsilon$
Así, $y \in B_d(x, \mu) \Rightarrow y \in B_d(x_0, \varepsilon)$, luego $B_d(x, \mu) \subseteq B_d(x_0, \varepsilon)$.

Definición 1.4

Sean (X, d) un espacio métrico, $U \subseteq X$. Se dice que U es un d-abierto si:

$$\forall x \in U \ \ \exists \mu \in \mathbb{R}, \ \ \mu > 0 \ \ \text{tal que} \ \ B_d(x, \mu) \subseteq U$$

Nota 1.3

En la definición anterior, el valor de μ depende de cada x, no es un valor único.

Teorema 1.1 Estructura topológica de un espacio métrico

Sea (X, d) un espacio métrico, se verifica que:

(1) X, $\emptyset$ son d-abiertos

(2) Sean $\{U_i\}_{i\in I}$ todos d-abiertos. Entonces, $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ es también un d-abierto.

(3) Si $\{U_1, \dots U_n\}$ son d-abiertos; entonces, $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ es un d-abierto.

Demostración:

(1) Buscamos demostrar que X es un d-abierto; es decir, buscamos ver:

$$\forall x \in X \;\; \exists \mu \in \mathbb{R}, \mu > 0 : B_d(x, \mu) \subseteq X$$

Sea $x \in X$ cualquiera y $\mu > 0$ cualquiera, $B_d(x, \mu) = \{y \in X : d(x, y) < \mu\}$. Por contrarrecíproco, $y \notin X \Rightarrow y \notin B_d(x, \mu)$, luego $B_d(x, \mu) \subseteq X$.
Tenemos que X es un d-abierto, falta ver $\emptyset$. Para ello, reescribiremos la definición de d-abierto de la siguiente forma:

$$\emptyset \text{ es un d-abierto} \iff \nexists x \in \emptyset : \forall \mu > 0 : B_d(x, \mu) \nsubseteq \emptyset$$

Como $\nexists x \in \emptyset$, se cumple trivialmente. Así, $\emptyset$ es un d-abierto.

(2) Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ una colección arbitraria de d-abiertos, si $U_i = \emptyset \;\forall i \in I$, entonces se tiene $\bigcup_{i\in I} U_i = \emptyset$. En tal caso, la unión es un d-abierto como consecuendia del apartado anterior.

Supongamos que $\bigcup_{i\in I} U_i \neq \emptyset$. Así, sea $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$ por definición, $\exists j \in I : x \in U_j$. Por hipótesis, U_j es un d-abierto, luego $\exists \mu > 0 : B_d(x, \mu) \subseteq U_j \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$.
De este modo, $\bigcup_{i\in I} U_i$ es también un d-abierto.

(3) Sea $\{U_1, \ldots, U_n\}$ una colección finita de d-abiertos, veamos que su intersección $\bigcap_{i=1}^n U_i$ es también un d-abierto. En caso de ser vacía la intersección, se cumple trivialmente.

Supongamos ahora que $\bigcap_{i=1}^n U_i \neq \emptyset$. Así, podemos tomar $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i$.
Por definición, $x \in U_i \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Al ser d-abiertos por hipótesis, se cumple:

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \ \exists \mu_i > 0 : B_d(x, \mu_i) \subseteq U_i$$

Definición 1.5

Sea (X, d) un espacio métrico. Sea, $x \in X$, $V \subseteq X$ con $x \in V$. Se dice que V es un entorno de de x si existe $\mu \in \mathbb{R}, \mu > 0$ tal que $x \in B_d(x, \mu) \subseteq V$.

Proposicion 1.1 Caracterización de $d-$abiertos

Sea (X, d) un espacio métrico. Sea $U \in \mathcal{P}(X)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) U es un $d-$abierto

ii) $\exists \{x_i\}_{i \in I} \subseteq X, \{\mu_{x_i}\}_{i \in I} \subseteq \mathbb{R}$ con $\mu_{x_i} > 0 \ \forall i \in I$ tales que $U = \displaystyle\bigcup_{i \in I} B_d(x_i, \mu_{x_i})$

Demostración: Veamos que se cumplen ambas implicaciones:

i) ⇒ ii) Supongamos que U es un d-abierto. Por definición, se cumple:

$$\forall x \in U \ \exists \mu_x > 0 \text{ tal que } B_d(x, \mu_x) \subseteq U$$

Así, bastaría expresar U como $U = \displaystyle\bigcup_{x \in U} B_d(x, \mu_x)$.

Se cumple la igualdad, pues todo $x \in U$ está contenido en su respectiva bola, y cada una de ellas está completamente contenida en U, luego su unión lo estará también.

ii) $\Rightarrow$ i) | Supongamos $U = \bigcup_{i \in I} B_d(x_i, \mu_{x_i})$ para ver que U es un $d-$abierto.

Sea $x_0 \in U$ cualquiera pero fijo, tenemos que $U = \bigcup_{i \in I} B_d(x_i, \mu_{x_i})$ luego existe $j \in I$ tal que $x_0 \in B_d(x_j, \mu_{x_j})$. Por el Lema 1.1, sabemos que existe $\mu_0 > 0$ tal que:

$$x_0 \in B_d(x_0, \mu_0) \subseteq B_d(x_j, \mu_{x_j}) \subseteq U$$

Como el x_0 fijado es arbitrario, se cumple para cualquier elemento de U. Por todo lo anterior, concluimos que U es un d-abierto.

Proposicion 1.2

Sea (X, d_x) un espacio métrico. Sea $Y \subseteq X$ un subconjunto no vacío. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $U^* d_{X|_Y}$-abierto

ii) $U^* = U \cap Y$ para cierto $U d_X$-abierto

Demostración: Veamos que se cumplen ambas implicaciones

i) $\Rightarrow$ ii) | Supongamos que $U*$ es un $d_{X|_Y}$-abierto. Por definición, se cumple:

$$\forall y \in U^* \ \exists \mu_y > 0 \text{ tal que } B_{d_{X|_Y}}(y, \mu_y) \subseteq U^*$$

Basta tomar el d_X-abierto U definido como sigue: $U := \bigcup_{y \in U^*} B_{d_X}(y, \mu_y)$

ii) $\Rightarrow$ i) | Supongamos que $U^* = U \cap Y$ para ver que es $d_{X|_y}$-abierto.

Al ser U d_X-abierto, se tiene por definición que: $\forall x \in U \ \exists \mu_x > 0 : B_{d_X}(x, \mu_x) \subseteq U$

Intersecando con Y, $\quad \forall y \in U^* \ \exists \mu_y > 0 : B_{d_X}(y, \mu_y) \cap Y \subseteq U^*$

Pero por definición, $B_{d_X}(y, \mu_y) \cap Y = B_{d_{X|_Y}}(y, \mu_y)$.

Comparando con la definición, concluimos que $U*$ es $d_{X|_Y}$-abierto.