Práctica para el examen

Proyección centrada

May 23, 2025

1 Enunciado

Buscamos estudiar las propiedades de la proyección cartográfica central. Esta es una aplicación que a cada punto (salvo los polos sur y norte) de la esfera $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ le asigna un punto en el cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Para ello, se prolonga el segmento del origen al punto de la esfera hasta que interseque al cilindro.

2 Desarrollo

2.1 parametrización

En primer lugar, debemos de parametrizar el la esfera $\mathbb{S}^2$. Como no vamos a considerar ni el polo norte (0,0,1) ni el polo sur (0,0,-1) de la esfera, podemos parametrizar esta superficie eliminando ambos puntos al restringir las amplitudes de los ángulos u y v en coordenadas esféricas. Por tanto, utilizaremos la siguiente parametrización:

$$X : (0, \pi) \times (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3 \quad (u, v) \longmapsto X(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$$

Veamos cómo formalizar la proyección centrada. Sea $p = (x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ un punto fijo de la esfera, la recta que pasa por p y por el origen es de la forma:

$$r(t) = t(x, y, z) : t \in \mathbb{R}$$

Igualando ahora con la expresión del cilindro:

$$(tx)^2 + (ty)^2 = 1 = t^2(x^2 + y^2) \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$$

Hemos tomado $t > 0$ para considerar la semirrecta desde el origen hasta p en adelante. Sustituyendo ahora en la expreión de la recta:

$$\phi(x, y, z) = (\frac{x}{\sqrt{1 - z^2}}, \frac{y}{\sqrt{1 - z^2}}, \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}})$$

Calulemos ahora la expresión de $\bar{X} = \phi \circ X$:

$$\bar{X} : (0, \pi) \times (0, 2\pi) \longrightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^3 \qquad (u, v) \longmapsto \bar{X}(u, v) = \left(\cos v, \sin v, \frac{\cos u}{\sin u}\right)$$

2.2 Conforme

En primer lugar, calculamos las derivadas parciales y los coeficientes de la Primera Forma Fundamental de la esfera.

$$X_u(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, -\sin u)$$
$$X_v(u, v) = (-\sin u \sin v, \sin u \cos v, 0)$$

$$E = X_u \cdot X_u = \cos^2 u \cos^2 v + \cos^2 u \sin^2 v + \sin^2 u = \cos^2 u + \sin^2 u = 1$$
$$F = X_u \cdot X_v = -\sin u \sin v \cos u \cos v + \sin u \sin v \cos u \cos v + 0 = 0$$
$$G = X_v \cdot X_v = \sin^2 u \sin^2 v + \sin^2 u \cos^2 v + 0 = \sin^2 u$$

Haremos ahora lo mismo con $\bar{X}$:

$$\bar{X}_u(u, v) = \left(0, 0, \frac{-1}{\sin^2 u}\right)$$

$$\bar{X}_v(u, v) = (-\sin v, \cos v, 0)$$

$$\bar{E} = \bar{X}_u \cdot \bar{X}_u = (\sin u)^{-4}$$
$$\bar{F} = \bar{X}_u \cdot \bar{X}_v = 0 + 0 + 0 = 0$$
$$\bar{G} = \bar{X}_v \cdot \bar{X}_v = \sin^2 v + \cos^2 v + 0 = 1$$

Veamos que no es una aplicación conforme por reducción al absurdo. Si lo fuese, existiría una aplicaicón diferenciable no nula tal que $\bar{E} = \lambda(p)^2 E$, luego tendríamos:

$$\bar{E} = (\sin u)^{-4} = \lambda(p)^2 \cdot E = \lambda(p)^2 \cdot 1 = \lambda(p)^2$$

Además, por definición de aplicación conforme, la aplicación λ necesariamente tendría que cumplir también $\bar{G} = \lambda(p)^2 G$, pero este requisito no puede cumplirse a la vez que el anterior:

$$\bar{G} = 1 \neq \lambda(p)^2 \cdot G = \lambda(p)^2 \cdot \sin^2 u = \sin^{-4} u \cdot \sin^2 u = (\sin u)^{-2}$$

Hemos llegado a una contradicción, luego ϕ no puede ser una aplicación conforme. Además, como ser isometría equivale a ser isoareal y conforme, no puede ser una isometría. Sí podría ser, en cambio, una aplicación isoareal; hemos de comprobarlo.

2.3 Isoareal

Para ver si es isoareal basta comprobar si las PFF tienen el mismo determinante; es decir, $EG - F^2 = \bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2$.

$$EG - F^2 = 1 \cdot \sin^2 u - 0^2 = \sin^2 u$$
$$\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2 = (\sin u)^{-4} \cdot 1 - 0^2 = (\sin u)^{-4}$$

No se cumple la igualdad, luego no es isoareal. Puede comprobar digitalmente cómo funciona esta proyección.