Análisis Matemático III

Javier Ortín Rodenas

Curso 2025-2026

Contenidos

IV Series de Fourier

Recordamos que $L_2(X,K) \equiv \frac{\mathcal{L}_2(X,K)}{\sim}$ es un espacio de Hilbert; donde X es un $K-$espacio vectorial, y $f \sim g \iff f \overset{\mu-a.e.}{=} g$. El producto interior y su norma asociada se definen como:

$$< f, g >= \int_X \bar{f} \cdot g \qquad\qquad ||f||_2 = \sqrt{< f, f >}$$

Nótese que cuando trabajamos con $\mathbb{C}$ como cuerpo el producto interno tiene linealidad directa en una componente, mientras que tiene linealidad por el conjugado en la otra. Asimismo, el producto interno da lugar a escalares del propio cuerpo sobre el que se define, luego podría dar lugar a valores complejos.

La idea de esta unidad es "aproximar" una función $f \in L_2(X,K)$ como "suma" de funciones más elementales. En particular, a partir de ahora, consideraremos $X = I = [0, 2\pi]$, con $K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Además, extenderemos las funciones en este conjunto con periodicidad 2π en $\mathbb{R}$.

§1. Primeros conceptos

4.1.1 Definición de sistema ortonormal

Dado un espacio de Hilbert V, un sistema ortonormal en V es un conjunto $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ que verifica:

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

4.1.2 Ejemplos de sistemas ortonormales

i) $K = \mathbb{R}$, $V = L_2([0, 2\pi], \mathbb{R})$. Consideramos el siguiente sistema:

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \qquad \varphi_{2n-1}(t) = \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}} \qquad \varphi_{2n}(t) = \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}}$$

Veamos que es ortonormal:

$$\int_0^{2\pi} \varphi_0^2(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\, dt = 1$$

$$\int_0^{2\pi} \varphi_{2n+1}^2(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(nt)}{\pi}\,dt \overset{u=nt}{=} \frac{1}{n\pi}\int_0^{2n\pi} \frac{1+\cos(2u)}{2}du \overset{v=2u}{=}$$
$$= \frac{1}{4n\pi}\int_0^{4n\pi} 1 + cos(v) = \frac{4n\pi}{4n\pi} + 0 = 1$$

$$\int_0^{2\pi} \varphi_{2n}^2(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(nt)}{\pi}\,dt \overset{u=nt}{=} \frac{1}{n\pi}\int_0^{2n\pi} \frac{1-\cos(2u)}{2}du \overset{v=2u}{=}$$
$$= \frac{1}{4n\pi}\int_0^{4n\pi} 1 - (v) = \frac{4n\pi}{4n\pi} + 0 = 1$$

Por ser funciones con periodo 2π, para $n \in \mathbb{N}$ cualquiera, se cumple:

$$\int_0^{2\pi} \varphi_{2n+1}(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \varphi_{2n}(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \varphi_{2n+1}(t)\cdot\varphi_{2n}(t)\,dt = 0$$

Hemos demostrado que el sistem

ii) Para $K = \mathbb{C}$, $V = L_2([0, 2\pi], \mathbb{C})$, el siguiente sistema es ortonormal:

$$\left\{\varphi_n(t) = \frac{e^{i\cdot n\cdot t}}{\sqrt{\pi}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

4.1.3 Teorema de óptima aproximación

Sea V un espacio pre-Hilbert. Sea $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subseteq V$ un sistema ortonormal finito en V. Sea $f \in V$. Si W es la clausura