

# Análisis Matemático III

Javier Ortín Rodenas

Curso 2025-2026

# Contenidos

<b>IV Series de Fourier</b>	<b>3</b>
1. Primeros conceptos . . . . .	3
4.1.1 Definición de sistema ortonormal . . . . .	3
4.1.2 Ejemplos de sistemas ortonormales . . . . .	3
4.1.3 Teorema de óptima aproximación . . . . .	4
4.1.4 Definición de coeficientes de Fourier . . . . .	5
4.1.5 Unicidad de las Series de Fourier . . . . .	6
4.1.6 Identidad de Parseval . . . . .	7
4.1.7 Definición de sistema ortonormal completo . . . . .	7
4.1.8 Ejemplo de sistema ortonormal completo . . . . .	8
4.1.9 Ejemplo de cálculo de serie de Fourier . . . . .	9

# IV Series de Fourier

Recordamos que  $L_2(X, K) \equiv \frac{L_2(X, K)}{\sim}$  es un espacio de Hilbert; donde  $X$  es un  $K$ -espacio vectorial, y  $f \sim g \iff f \stackrel{\mu-a.e.}{=} g$ . El producto interior y su norma asociada se definen como:

$$\langle f, g \rangle = \int_X \bar{f} \cdot g \quad \|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

Nótese que cuando trabajamos con  $\mathbb{C}$  como cuerpo el producto interno tiene linealidad directa en una componente, mientras que tiene linealidad por el conjugado en la otra. Asimismo, el producto interno da lugar a escalares del propio cuerpo sobre el que se define, luego podría dar lugar a valores complejos. Además, el producto interno no commuta (en general) en  $\mathbb{C}$ .

La idea de esta unidad es “aproximar” una función  $f \in L_2(X, K)$  como “suma” de funciones más elementales. En particular, a partir de ahora, consideraremos  $X = I = [0, 2\pi]$ , con  $K = \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$ . Además, extenderemos las funciones en este conjunto con periodicidad  $2\pi$  en  $\mathbb{R}$ .

## §1. Primeros conceptos

### 4.1.1 Definición de sistema ortonormal

Dado un espacio de Hilbert  $V$ , un sistema ortonormal en  $V$  es un conjunto  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq V$  que verifica:

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

### 4.1.2 Ejemplos de sistemas ortonormales

- i)  $K = \mathbb{R}$ ,  $V = L_2([0, 2\pi], \mathbb{R})$ . Consideramos el siguiente sistema:

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad \varphi_{2n-1}(t) = \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}} \quad \varphi_{2n}(t) = \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}}$$

Veamos que es ortonormal:

$$\int_0^{2\pi} \varphi_0^2(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} dt = 1$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \varphi_{2n+1}^2(t) dt &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(nt)}{\pi} dt \stackrel{u=nt}{=} \frac{1}{n\pi} \int_0^{2n\pi} \frac{1 + \cos(2u)}{2} du \stackrel{v=2u}{=} \\ &= \frac{1}{4n\pi} \int_0^{4n\pi} 1 + \cos(v) dv = \frac{4n\pi}{4n\pi} + 0 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \varphi_{2n}^2(t) dt &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(nt)}{\pi} dt \stackrel{u=nt}{=} \frac{1}{n\pi} \int_0^{2n\pi} \frac{1 - \cos(2u)}{2} du \stackrel{v=2u}{=} \\ &= \frac{1}{4n\pi} \int_0^{4n\pi} 1 - \cos(v) dv = \frac{4n\pi}{4n\pi} + 0 = 1 \end{aligned}$$

Por ser funciones con periodo  $2\pi$ , para  $n \in \mathbb{N}$  cualquiera, se cumple:

$$\int_0^{2\pi} \varphi_{2n+1}(t) dt = \int_0^{2\pi} \varphi_{2n}(t) dt = \int_0^{2\pi} \varphi_{2n+1}(t) \cdot \varphi_{2n}(t) dt = 0$$

Hemos demostrado que el sistema

ii) Para  $K = \mathbb{C}$ ,  $V = L_2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ , el siguiente sistema es ortonormal:

$$\left\{ \varphi_n(t) = \frac{e^{i \cdot n \cdot t}}{\sqrt{\pi}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

### 4.1.3 Teorema de óptima aproximación

Sea  $V$  un  $K$ -espacio pre-Hilbert. Sea  $\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\} \subseteq V$  un sistema ortonormal finito en  $V$ . Sea  $f \in V$ . Si  $W$  es la clausura  $K\langle \varphi_0, \dots, \varphi_n \rangle$ . Entonces, el elemento de  $W$  que mejor aproxima  $f$  (en cuanto a minimizar la norma de su diferencia) es

$$s_n = \sum_{k=0}^n \underbrace{\langle f, \varphi_k \rangle}_{c_k} \varphi_k$$

Es decir, dado  $t_n = \sum_{k=0}^n b_k \cdot \varphi_k \in W$  cualquiera (formado a partir de escalares cualesquiera), se cumple  $\|f - s_n\| \leq \|f - t_n\|$ .

### Demostración:

Al ser un espacio Pre-Hilbert por hipótesis, tenemos que :

$$\begin{aligned}
& \|f - t_n\|^2 = \langle f - t_n, f - t_n \rangle = \langle f, f \rangle - \langle f, t_n \rangle - \langle t_n, f \rangle + \langle t_n, t_n \rangle = \\
& = \|f\|^2 - \left\langle f, \sum_{k=0}^n b_k \varphi_k \right\rangle - \left\langle \sum_{k=0}^n b_k \varphi_k, f \right\rangle + \left\langle \sum_{k=0}^n b_k \varphi_k, \sum_{k=0}^n b_k \varphi_k \right\rangle = \begin{array}{l} \text{linealidad} \\ \text{ortonormalidad} \end{array} \\
& = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n b_k \langle f, \varphi_k \rangle - \sum_{k=0}^n \bar{b}_k \langle f, \varphi_k \rangle + \sum_{k=0}^n \bar{b}_k \cdot b_k = \text{definición de } c_k \\
& = \|f\|^2 + \sum_{k=0}^n \left[ -b_k c_k - \bar{b}_k c_k + |b_k|^2 \right] = (*)
\end{aligned}$$

Comparamos ahora con la siguiente expresión:

$$|b_k - c_k|^2 = (b_k - c_k)(\bar{b}_k - \bar{c}_k) = b_k \bar{b}_k - b_k \bar{c}_k - \bar{b}_k c_k + c_k \bar{c}_k = |b_k|^2 + |c_k|^2 - b_k \bar{c}_k - \bar{b}_k c_k$$

Sustituyendo en la igualdad anterior,

$$(*) = \|f\|^2 + \sum_{k=0}^n [|b_k - c_k|^2 - |c_k|^2]$$

En particular, para  $b_k = c_k$  tenemos  $\|f - s_n\|^2 \leq \|f - t_n\|^2$ .

Motivados por este resultado, buscamos aproximar  $f$  por una “combinación lineal infinita” de funciones de un sistema ortonormal.

#### 4.1.4 Definición de coeficientes de Fourier

Dada una función  $f \in L_2([0, 2\pi])$ , y un sistema ortonormal  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Se denomina “coeficiente  $n$ -ésimo de Fourier de  $f$  respecto de  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ” al escalar:

$$c_n := \langle f, \varphi_n \rangle = \int_0^{2\pi} \bar{f}(t) \cdot \varphi_n(t) dt$$

Definimos la suma parcial  $n$ -ésima de Fourier de  $f$  respecto de  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  como:

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k \cdot \varphi_k(x)$$

Análogamente, la serie de Fourier de  $f$  respecto de  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  viene dada por:

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \varphi_k(x)$$

#### 4.1.5 Unicidad de las Series de Fourier

Sea  $f \in L_2(I, K)$ . Sea  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un sistema ortonormal. La serie de Fourier de  $f$  respecto de  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  está bien definida, pues existe un único elemento  $s \in L_2(I, K)$  que verifica:

$$\|s - s_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

##### Demostración:

Sean  $p, q \in \mathbb{N}$  cualesquiera. Supongamos sin pérdida de generalidad que  $q > p$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \|s_p - s_q\|^2 &= \left\| \sum_{k=p+1}^q s_k \right\|^2 = \left\langle \sum_{k=p+1}^q \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k, \sum_{k=p+1}^q \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\rangle \xrightarrow{\text{ortonormalidad}} \\ &= \sum_{k=p+1}^q |\langle f, \varphi_k \rangle|^2 = |a_p - a_q|^2 \quad \text{donde } a_n = \sum_{k=0}^n |\langle f, \varphi_k \rangle|^2 \end{aligned}$$

Por el Teorema de óptima aproximación, para  $n \in \mathbb{N}$  cualquiera tenemos que:

$$\|f - s_n\|^2 = \|f\|^2 - \underbrace{\sum_{k=0}^n |\langle f, \varphi_k \rangle|^2}_{a_n} = \|f\|^2 - a_n$$

Esto implica que  $\|f\|^2 \geq a_n$ . Así, tomando límites en  $n$  tenemos que:

$$a := \sum_{k=0}^{\infty} |\langle f, \varphi_k \rangle|^2 \leq \|f\|^2$$

Esta es la conocida como **Desigualdad de Bessel**.

Por tanto, tenemos que  $(a_n)_n$  es de Cauchy, luego  $(s_n)_n$  ha de serlo también. Al estar además en un espacio de Banach, podemos asegurarnos de que  $(s_n)_n$  es convergente a  $s$ .

### Nota:

Este resultado garantiza la convergencia en norma de las sumas parciales de Fourier a su límite. No tiene por qué darse  $f(x) = s(x)$ . Cabe preguntarse si esto es a su vez equivalente a  $\|f - s_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Pasaremos a estudiar escenarios donde puede ocurrir.

#### 4.1.6 Identidad de Parseval

Sea  $f \in L_2(I, K)$ . Sea  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L_2(I, K)$  un sistema ortonormal. Sea  $c_n := \langle f, \varphi_n \rangle$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces,

$$\|f - s_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \iff \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = \|f\|^2$$

### Demostración:

Por el Teorema de óptima aproximación, sabemos que:

$$\|f - s_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n |c_k|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Despejamos y tomamos límites:

$$\lim_n \|f - s_n\|^2 = 0 \iff \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 = \|f\|^2$$

#### 4.1.7 Definición de sistema ortonormal completo

Sea  $H$  un espacio de Hilbert. Sea  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un sistema ortonormal. Se dice “completo” si satisface la Identidad de Parseval para cualquier  $f \in H$ . Es decir,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle = \|f\|^2 \quad \forall f \in H$$

### Nota:

Por la Desigualdad de Bessel, sabemos que  $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|f\|^2$ . Exigir la igualdad equivale a decir que la norma se resume completamente por el sistema ortonormal: el sistema puede aportar información sobre todo el espacio  $H$ . Por tanto, toda componente de  $f$  queda recogida por cierto  $\varphi_n$ , luego  $f \neq 0$  implica que no es ortogonal a todo el sistema.

#### 4.1.8 Ejemplo de sistema ortonormal completo

En  $L_2(I, K)$ , el siguiente sistema ortonormal es completo:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(t)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(t)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2t)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(2t)}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$$

La demostración es demasiado larga, luego no se verá.

Este es el sistema ortonormal más utilizado, y la serie de Fourier de una función  $f$  respecto de él, se denomina simplemente “serie de Fourier de  $f$ ”. Viene representada por:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \right]$$

Donde “ $\sim$ ” significa convergencia en media cuadrática. Podemos obtener los coeficientes  $a_n, b_n$  por identificación al aplicar la ortonormalidad. Por definición, la suma parcial  $k$ -ésima de Fourier de  $f$  viene dada por:

$$s_k(t) = \sum_{n=0}^k \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n(t) = \frac{c_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^k \left[ c_{2n-1} \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}} + c_{2n} \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}} \right]$$

De este modo, comparando:

$$a_n = \frac{c_{2n-1}}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle f, \varphi_{2n-1} \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}(t) \cdot \cos(nt) dt$$

$$b_n = \frac{c_{2n}}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle f, \varphi_{2n} \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}(t) \cdot \sin(nt) dt$$

#### 4.1.9 Ejemplo de cálculo de serie de Fourier

Hallemos la serie de Fourier de la siguiente función  $f$ :

$$f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \pi) \cup \{2\pi\} \\ 1 & \text{si } x \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 0 \cdot \cos(nt) dt + \frac{1}{\pi} \int_\pi^{2\pi} 1 \cdot \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{n} \sin(nt) \right]_{t=\pi}^{t=2\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{1}{n} \cos(nt) \right]_{t=\pi}^{t=2\pi} = -\frac{2}{n\pi}$$

Por tanto, tenemos que:

$$f(t) \sim \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin((2n+1)t)$$

