Análisis Matemático III

Javier Ortín Rodenas

Curso 2025-2026

Contenidos

III Espacios L_p con $1 \leq p \leq \infty$

A lo largo de esta unidad, consideraremos (X, Σ, μ) como un espacio de medida genérico.

§1. Primeras definiciones

3.1.1 Definición de $\mathcal{L}_p$

Para $1 \leq p < \infty$, denotaremos como $\mathcal{L}_p(X)$ o como $\mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)$ al conjunto de funciones medibles $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ para las que se cumple

$$\int_X |f|^p \, d\mu < \infty$$

Asociada a cada $f \in \mathcal{L}_p(X)$, tenemos la siguiente cantidad numérica:

$$||f||_p := \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Nótese que para el caso $p = 1$ se corresponde con la definición ya estudiada.

3.1.2 Definición de $\mathcal{L}_\infty$

Para $p = \infty$, $\mathcal{L}_\infty(X) = \mathcal{L}_\infty(X, \Sigma, \mu)$ denota el conjunto de todas las funciones medibles $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ para las que existe $\alpha \in [0, +\infty)$ que verifica:

$$\mu\Big(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\} \Big) = 0$$

Esta condición equivale a su vez a las dos siguientes:

$$\mu\Big(X \setminus \{x \in X : |f(x)| \leq \alpha\} \Big) = 0 \qquad \{x \in X : |f(x)| \leq \alpha\} \overset{\mu-a.e.}{=} X$$

3.1.3 Funciones sumables y funciones de $\mathcal{L}_p(X)$

Si $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es medible, y $\int_X |f|^p \, d\mu < \infty$ (para $p < \infty$). Entonces, existe una función $g \in \mathcal{L}_p(X)$ tal que $f \overset{\mu-a.e.}{=} g$. Como consecuencia, si $p < \infty$,

$$\left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = ||g||_p$$

Demostración: Extendemos lo visto en el resultado 2.2.6.

Definimos los siguientes conjuntos auxiliares:

$$A = \{x \in X : f(x) = +\infty\} \qquad B = \{x \in X : f(x) = -\infty\}$$

Ambos conjuntos han de ser de medida nula, o de lo contrario $\int_X |f|^p \, d\mu = \infty$. Así, basta considerar la siguiente función:

$$g(x) = f(x) \cdot X_{X\setminus(A\cup B)}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \notin A \cup B \\ 0 & \text{si } x \in A \cup B \end{cases}$$

Como $\mu(A) = \mu(B) = 0$, tenemos que $f \overset{\mu-a.e.}{=} g$.

3.1.4 Definición de supremo esencial

Para cada $f \in \mathcal{L}_\infty(X)$ definimos el siguiente conjunto:

$$A_f := \Big\{\alpha \in [0, \infty) : \mu\big(\{x \in X : f(x) > \alpha\}\big) = 0\Big\}$$

A partir de él, definimos $||f||_p := \inf A_f$. Esta cantidad recibe el nombre de "supremo esencial".

3.1.5 Mínimo esencial

El supremo esencial es en realidad un mínimo. Es decir; sea $f \in \mathcal{L}_\infty(X)$, se cumple:

$$||f||_\infty \in \Big\{f(x) : x \in X\Big\} \text{ o equivalentemente } ||f||_\infty = \min A_f$$

Demostración:

Denotemos $\beta := \inf A_f$. Consideramos $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A_f$ sucesión decreciente que verifica $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos el siguiente conjunto auxiliar:

$$B_n := \Big\{x \in X : |f(x)| \leq \beta_n\Big\}$$

De este modo, $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} \subseteq B_n$ y $B_n \in \Sigma$. Además, por ser $f \in \mathcal{L}_\infty(X)$ por hipótesis, tenemos que $B_n = X \setminus M_n$ con $M_n \in \Sigma$ tal que $\mu(M_n) = 0$. Por tanto, se cumple:

$$\{x \in X : |f(x)| \leq \beta\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus M_n) = X \setminus (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n)$$

Por subaditividad, $\mu\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n\big) = 0$, luego $\beta \in A_f$ por definición.

§2. Estructura de los $\mathcal{L}_p$

3.2.1 Concepto de convexidad

Una combinación convexa de puntos de un espacio afín es aquella combinación lineal de los mismos cuyos pesos sean no negativos y sumen 1. Para el caso de dos puntos, a y b, podemos expresar su combinación convexa como:

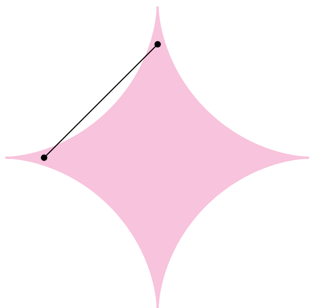
$$\lambda a + (1 - \lambda) b \qquad\qquad \text{con } \lambda \in [0, 1]$$

Nótese que conforme λ va aumentando, se recorre el segmento en línea recta desde a hasta b.

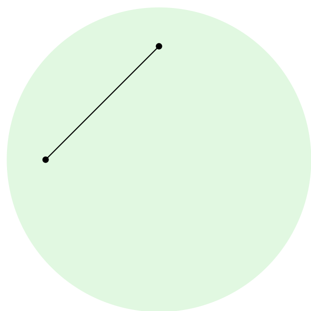
Sea A un conjunto de un espacio afín, diremos que es convexo si dados $a, b \in A$, tenemos que cualquier combinación conexa de ambos está también en A. Es decir,

$$A \text{ es convexo} \iff \forall\, a, b \in A,\ \ \forall\, \lambda \in [0, 1] : \lambda a + (1 - \lambda) b \in A$$

Intuitivamente, se corresponde con que todo segmento que une dos puntos de A está contenido al completo en A.



Conjunto no convexo



Conjunto convexo

Veamos ahora cómo se traduce este concepto a funciones.

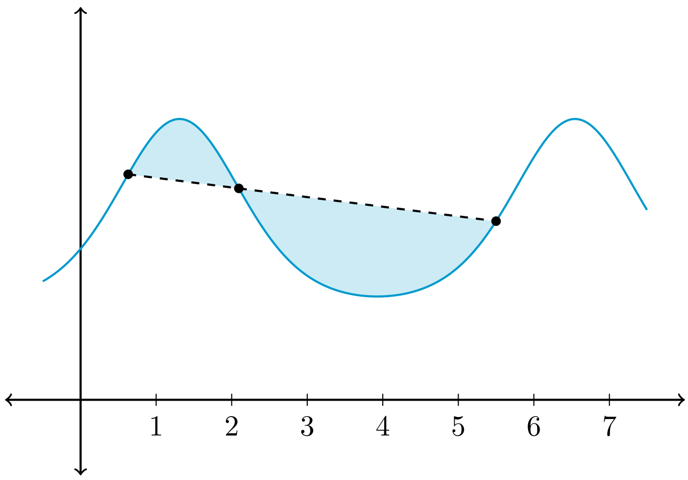
Diremos que una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es convexa en un intervalo I si el segmento que une dos puntos cualesquiera de su grafo en I queda por encima del propio grafo. Es decir, si verifica:

$$\forall x_1, x_2 \in I : f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \qquad \forall \lambda \in [0,1]$$

Esto a su vez equivale a exigir que el siguiente conjunto (epigrafo de f) sea convexo:

$$\{(x,y) : x \in I, y > f(x)\}$$

Podemos extender la definición de convexidad de funciones al estudiar conjuntos convexos más generales y no solo intervalos.



La función no es convexa en $[0,6]$, pero sí en $[2,6]$.

Podemos considerar definiciones distintas de convexidad según exijamos o no que la desigualdad sea estricta.

3.2.2 Los $\mathcal{L}_p(X)$ son espacios vectoriales

Para $1 \leq p \leq \infty$, $\mathcal{L}_p(X)$ es un espacio vectorial.

Demostración: Distinguiremos varios casos:

- Caso $p = 1$: ya se ha demostrado.
- Caso $p = \infty$:

Sea $f \in \mathcal{L}_\infty(X)$, sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Veamos $\lambda f \in \mathcal{L}_\infty(X)$.
Si $\lambda = 0$, $\lambda f \equiv 0 \in \mathcal{L}_\infty(X)$.
Sea $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Como $f \in \mathcal{L}_\infty(X)$, $\exists\, M \in \Sigma$ con $\mu(M) = 0$ tal que:

$$X \setminus M = \{x \in X : |f(x)| \leq ||f||_\infty\} = \{x \in X : |\lambda f(x)| \leq |\lambda| \cdot ||f||_\infty\}$$

Tenemos que $\lambda f \in \mathcal{L}_\infty(X)$ por definición.

Sean $f, g \in \mathcal{L}_\infty(X)$, veamos que $f + g \in \mathcal{L}_\infty(X)$:
Por definición, $\exists\, M, N \in \Sigma$ con $\mu(M) = \mu(N) = 0$ tales que:

$$X \setminus M = \{x \in X : |f(x)| \leq ||f||_\infty\} \quad X \setminus N = \{x \in X : |g(x)| \leq ||g||_\infty\}$$

Entonces, dado $x \in X \setminus (M \cup N)$ cualquiera, se cumple:

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty < \infty$$

Como $\mu(M \cup N) = 0$, tenemos $f + g \in \mathcal{L}_\infty(X)$ por definición.

- Caso $1 < p < \infty$:
  Sean $\lambda \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{L}_p(X)$. Veamos que $\lambda f \in \mathcal{L}_\infty(X)$.

$$\int_X |\lambda f(x)|^p \, d\mu(x) = |\lambda|^p \cdot \int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) = |\lambda|^p \cdot ||f||_p^p < \infty$$

Se cumple por definición.

Sean $f, g \in \mathcal{L}_p(X)$. Veamos que $f + g \in \mathcal{L}_p(X)$:

$$\int_X |f(x) + p(x)| \, d\mu(x) = \int_X \Big| \underbrace{\frac{1}{2}}_{\lambda} \cdot 2 \cdot f(x) + \underbrace{\frac{1}{2}}_{1-\lambda} \cdot 2 \cdot g(x) \Big|^p \, d\mu(x) = (*)$$

La función $h(t) = |t|^p$ es convexa en $[0, +\infty]$ para $p > 1$. Por tanto,

$$(*) \leq \int_X \frac{1}{2} |2f(x)|^p + \frac{1}{2} |2g(x)|^p \, d\mu(x) = 2^{p-1} \cdot \int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) + 2^{p-1} \cdot \int_X |g(x)|^p \, d\mu(x) =$$
$$= 2^{p-1} \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) + \int_X |g(x)|^p \, d\mu \right) = 2^{p-1} \big(||f||_p^p + ||g||_p^p \big) < \infty$$

Se cumple por definición.

3.2.3 Conjugado p^*

Para cada $p \in [1, +\infty]$, denotaremos como p^* al único número en $\overline{\mathbb{R}}$ que verifica:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$$

Solo hay un único número en todo $\overline{\mathbb{R}}$ que verifica esto, pero ha de estar necesariamente en $(1, \infty)$:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1 \Rightarrow p^* = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1} \overset{p \in [1,\infty]}{\in} (1, \infty)$$

Estas son algunas de las propiedades de este conjugado (claras por la definición):

$$(p^*)^* = p \qquad p + p^* = p \cdot p^* \qquad p \cdot p^* - p^* p \qquad p^* = \frac{p}{p-1} \qquad p^*(p-1) = p$$

3.2.4 Desigualdad de Hölder

Sean $f \in \mathcal{L}_p(X)$, $g \in \mathcal{L}_{p^*}(X)$. Entonces, se cumple:

$$f \cdot g \in \mathcal{L}_1(X) \qquad\qquad ||f \cdot g||_1 \leq ||f||_p \cdot ||g||_{p^*}$$

Demostración:

- Caso $p = 1, p^* = \infty$:

  Como $g \in \mathcal{L}_\infty(X)$, $\exists\ M \in \Sigma$ con $\mu(M) = 0$ tal que

  $$X \setminus M = \{x \in X : |g(x)| \leq ||g||_\infty\}$$

  Por tanto, ha de cumplirse:

  $$\int_X = |f \cdot g|\, d\mu = \int_{X \setminus M} |f(x)| \cdot |g(x)|\, d\mu(x) \leq \int_{X \setminus M} |f(x)| \cdot ||g||_\infty\, d\mu =$$
  $$= ||g||_\infty \cdot \int_{X \setminus M} |f(x)|\, d\mu(x) = ||g||_\infty \cdot ||f||_1 < \infty$$

  Se cumple por definición.

- Caso $1 < p < \infty$. Hay que estudiar dos posibles escenarios:

  a) Si $||f||_p = 0$ ó $||g||_{p^*} = 0$ (pudiendo darse ambas). Supongamos sin pérdida de generalidad que $||f||_p = 0$:

$||f||_p = 0 \Rightarrow = \int_X |f|^p \, d\mu(x) = 0 \overset{2.1.17}{\Rightarrow} |f|^p \overset{\mu-a.e.}{=} 0 \Rightarrow f \overset{\mu-a.e.}{=} 0.$

De este modo, $f \cdot g \overset{\mu-a.e.}{=} 0 \Rightarrow |f \cdot g| = 0 \overset{2.1.17}{\Rightarrow} 0 = \int_X |f \cdot g| d\mu = ||f \cdot g||_1.$

b) Supongamos ahora que $||f||_p \neq 0 \neq ||g||_{p^*}$. Así,

Definimos los siguientes conjuntos auxiliares:

$$A := \{x \in X : f(x) = 0\} \in \Sigma \qquad B := \{x \in X : g(X) = 0\} \in \Sigma$$

Por cómo los hemos definido,

$$\int_X \frac{|f(x)|}{||f||_p} \cdot \frac{|g(x)|}{||g||_{p^*}} \, d\mu(x) = \int_{X \setminus (A \cup B)} \frac{|f(x)|}{||f||_p} \cdot \frac{|g(x)|}{||g||_{p^*}} \, d\mu(x) = (*_1)$$

Al tratarse de cantidades positivas, para cada $x \in X \setminus (A \cup B)$, existen $\xi_x, \zeta_x \in (0, \infty)$ tales que:

$$\frac{|f(x)|}{||f||_p} = e^{\frac{\xi_x}{p}} = \exp\left(\frac{\xi_x}{p}\right) \qquad \frac{|g(x)|}{||g||_{p^*}} = e^{\frac{\zeta_x}{p^*}} = \exp\left(\frac{\zeta_x}{p^*}\right)$$

Sustituyendo en la expresión anterior:

$$(*_1) = \int_{X \setminus (A \cup B)} \exp\left(\frac{\xi_x}{p}\right) \cdot \exp\left(\frac{\zeta_x}{p^*}\right) \, d\mu(x) = \int_{X \setminus (A \cup B)} \exp\left(\frac{1}{p}\xi_x + \frac{1}{p^*}\zeta_x\right) \, d\mu(x)$$

La función exponencial es convexa. Tomando $\lambda = \frac{1}{p}$, $1 - \lambda = \frac{1}{p^*}$, tenemos:

$$(*_1) \leq \int_{X \setminus (A \cup B)} \frac{1}{p} \exp(\xi_x) + \frac{1}{p^*} \exp(\zeta_x) \, d\mu(x) = \frac{1}{p} \int_{X \setminus (A \cup B)} \exp(\xi_x) \, d\mu(x) + \frac{1}{p^*} \int_{X \setminus (A \cup B)} \exp(\zeta_x) \, d\mu(x) = (*_2)$$

Deshacemos el cambio de variable y comparamos con la definición de $|| \cdot ||_p$ y de $|| \cdot ||_{p^*}$,

$$\begin{aligned} (*_2) &= \frac{1}{p} \int_{X \setminus (A \cup B)} \frac{|f(x)|^p}{||f||_p^p} \, d\mu(x) + \frac{1}{p^*} \int_{X \setminus (A \cup B)} \frac{|g(x)|^{p^*}}{||g||_{p^*}^{p^*}} \, d\mu(x) \leq \\ &\leq \frac{1}{p \cdot ||f||_p^p} \cdot \int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) + \frac{1}{p^* \cdot ||g||_{p^*}^{p^*}} \cdot \int_X |g(x)|^{p^*} \, d\mu(x) = \\ &= \frac{1}{p \cdot ||f||_p^p} \cdot ||f||_p^p + \frac{1}{p^* \cdot ||g||_{p^*}^{p^*}} \cdot ||g||_{p^*}^{p^*} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1 \end{aligned}$$

Sustituimos para resolver el problema inicial:

$$\int_X \frac{|f(x)|}{||f||_p} \cdot \frac{|g(x)|}{||g||_{p^*}} \, d\mu(x) \Rightarrow \int_X |f(x) \cdot g(x)| \, d\mu(x) \leq ||f||_p \cdot ||g||_{p^*} < \infty$$

3.2.5 Desigualdad de Minkowski

Sea $1 \leq p \leq \infty$. Sean $f, g \in \mathcal{L}_p(X)$. Entonces, $||f+g||p \leq ||f||_p + ||g||_p$.

Demostración: Hemos de distinguir tres casos.

- Caso $p = 1$: ya ha sido probado.
- Caso $p = \infty$:

Por ser $f, g \in \mathcal{L}_\infty(X)$, sabemos $\exists\, M, N \in \Sigma$ con $\mu(M) = \mu(N) = 0$ tales que:

$$X \setminus M = \{x \in X : |f(x)| \leq ||f||_\infty\} \quad X \setminus N = \{x \in X : |g(x)| \leq ||g||_\infty\}$$

Entonces, dado $x \in X \setminus (M \cup N)$, se cumple:

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$$

Como $\mu(M \cup N) = 0$. Recordando la (notación 3.1.4), tenemos:

$$||f||_\infty + ||g||_\infty \in A_{f+g} \Rightarrow ||f+g||_\infty = \min A_{f+g} \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$$

- Caso $1 < p < \infty$:

$$||f+p||_p^p = \int_X |f+g|^p \, d\mu = \int_X |f+g| \cdot |f+g|^{p-1} \, d\mu \leq$$

$$= \int_X \underbrace{|f|}_{\mathcal{L}_p(X)} \cdot \underbrace{|f+g|^{p-1}}_{\mathcal{L}_{p^*}(X)} \, d\mu + \int_X \underbrace{|g|}_{\mathcal{L}_p(X)} \cdot \underbrace{|f+g|^{p-1}}_{\mathcal{L}_{p^*}(X)} \, d\mu = (*)$$

Por las propiedades de p^*, tenemos que:

$$\int_X \left(|f+g|^{p-1}\right)^{p^*} \, d\mu = \int_X |f+g|^{p^*(p-1)} \, d\mu = \int_X |f+g|^p \, d\mu = ||f+g||_p^p < \infty$$

Podemos aplicar la Desigualdad de Hölder a ambos sumandos:

$$(*) \leq ||f||_p \cdot \left|\left||f+g|^{p-1}\right|\right|_{p^*} + ||g||_p \cdot \left|\left||f+g|^{p-1}\right|\right|_{p^*} = (||f||_p + ||g||_p) \cdot \left|\left||f+g|^{p-1}\right|\right|_{p^*} =$$

$$= (||f||_p + ||g||_p) \cdot \left(\int_X |f+g|^{p^*(p-1)}\, d\mu\right)^{\frac{1}{p^*}} = (||f||_p + ||g||_p) \cdot \left(||f+g||_p^p\right)^{\frac{1}{p^*}} =$$

$$= (||f||_p + ||g||_p) \cdot ||f+g||_p^{p-1}$$

Así, $||f+g||_p^p \leq (*) \leq (||f||_p + ||g||_p) \cdot ||f+g||_p^{p-1}$. Despejando,

$$||f+g||_p^{p-(p-1)} = ||f+g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$$

3.2.6 Definición de espacio vectorial seminormado

Un K-espacio vectorial V se dice "seminormado" si existe una aplicación $||\cdot|| : V \longrightarrow [0, +\infty)$ (llamada "seminorma de V") que cumple las siguientes condiciones:

i) $||\lambda v|| = |\lambda| \cdot ||v|| \; \forall\, \lambda \in K \; \forall\, v \in V$.

ii) $||x+y|| \leq ||x|| + ||y|| \; \forall\, x, y \in V$.

Nótese que como consecuencia de (i) se cumple $||0_V|| = 0$.

En vista del resultado anterior, es claro que los $\mathcal{L}_p(X)$ son espacios vectoriales seminormados para $1 \leq p \leq \infty$.

§3. Paso a conjuntos cocientes L_p

3.3.1 Conjunto cociente dado por subespacio vectorial

Sea V un espacio vectorial. Sea $N \leq V$ un subespacio vectorial. Podemos definir una relación de equivalencia en V como sigue:

$$x \sim y \iff x - y \in N \quad \forall x, y \in V$$

Veamos que es en efecto una relación de equivalencia.

- Relfexividad:

  Por ser N un subespacio vectorial, tenemos $0_v = 0_N \in N$.

  De este modo, sea $x \in V$ cualquiera, $x - x = 0_v \in N$.

- Simetría:

  Sean $x, y \in V$ tales que $x \sim y$, veamos que $y \sim x$.

  Por definición, $x - y \in N \Rightarrow -(x - y) = y - x \in N$.

  Se tiene el ser N un espacio vectorial.

- Transitividad:

  Sean $x, y, <\in V$ tales que $x \sim y,\ y \sim z$. Veamos que $x \sim z$.

  Por definición, $x - y \in N,\ y - z \in N$.

  Así, $x - z = (x - y) - \underbrace{(z - y)}_{\in N} \in N$.

Es muy común denotar al espacio cociente resultante como V/N en lugar de $V/$. De manera similar, sus elementos suelen denotarse como $v + N$ en lugar de $[v]_\sim$.

Además, respeta la estructura de espacio vectorial. Es decir, sean $x, y \in V$, $\alpha, \beta \in K$; se cumple:

$$(\alpha x + \beta y) + N = \alpha(x + N) + \beta(y + N)$$

Esto se debe a que $\forall\, z \in V$, $\forall \lambda \in K$,

$$||x - y|| = 0 \iff ||\lambda x - \lambda y|| = 0$$

$$||x - y|| = 0 \iff ||(x + z) - (y + z)|| = 0$$

3.3.2 Convertir un espacio seminormado en uno normado

Sea $(V, ||\cdot||)$ un K-espacio vectorial seminormado, veamos cómo obtener un espacio vectorial normado a partir de él. Veamos que el siguiente conjunto es un subespacio vectorial:

$$N = \{v \in V : ||v|| = 0\}$$

Sean $u, v \in N$, sean $\alpha, \beta \in K$, se cumple:

$$||\alpha u + \beta v|| \leq ||\alpha u|| + ||\beta v|| = |\alpha| \cdot ||u|| + |\beta| \cdot ||v|| = 0 + 0 = 0$$

Utilizaremos este subespacio para el paso a cocientes.

Proponemos la siguiente aplicación como candidata a norma:

$$||\cdot||' : V/N \to [0, \infty) \qquad\qquad v + N \mapsto ||v + N||' = ||v||$$

En primer lugar, veamos que está bien definida. Sean $u, v \in V$ tales que $u \sim v$, buscamos ver $||u|| = ||v||$:

$$||u|| = ||u + 0_v|| = ||(u - v) + v|| \leq ||u - v|| + ||v|| \Rightarrow ||u|| - ||v|| \leq ||u - v|| = 0$$

Análogamente, $||v|| - ||u|| \leq ||u - v|| = 0$. Queda ver que $||\cdot||'$ es una norma.

i) Sean $u \in V$, $\lambda \in K$,

$$||\lambda(u + N)||' = ||(\lambda u) + N||' = ||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||u|| = |\lambda| \cdot ||u + N||'$$

ii) Sean $u, v \in V$,

$$||(u+v)+N||' = ||(u+N)+(v+N)||' = ||u+v|| \leq ||u||+||v|| = ||u+N||'+||v+N||'$$

iii) Sea $u \in V$ tal que $||u + N||' = 0$,

$$||u + N||' = 0 \Rightarrow ||u|| = 0 \Rightarrow u \in N \Rightarrow u + N = N = 0_{V/N}$$

Nota: Habitualmente, solemos escribir $(V/N, ||\cdot||)$ en lugar de $(V/N, ||\cdot||')$.

3.3.3 Unicidad del conjunto N en los $\mathcal{L}_p(X)$

Sea $1 \leq p \leq \infty$, se cumple:

$$N_p := \{f \in \mathcal{L}_p(X) : ||f||_p = 0\} = N := \{f : X \to \mathbb{R} \text{ medible con } f \overset{\mu-a.e.}{=} 0\}$$

<u>**Demostración:**</u> Distinguiremos varios casos.

• Para $p = \infty$:

$$||f||_\infty = 0 \iff \{x \in X : |f(x)| \leq 0\} \overset{\mu-a.e.}{=} X \iff f \overset{\mu-a.e.}{=} 0$$

• Caso $1 \leq p < \infty$:

$$||f||_p = \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} = 0 \iff |f(x)|^p \overset{\mu-a.e.}{=} 0 \iff f \overset{\mu-a.e.}{=} 0$$

3.3.4 Definición de espacios L_p

Para cada $1 \leq p \leq \infty$, definimos siguiente espacio vectorial normado:

$$L_p(X, \Sigma, \mu) := \Big(\mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)/N, || \cdot ||_p\Big)$$

Cuando el contexto sea claro, escribiremos simplemente $L_p(X)$. Además, denotaremos $f \in L_p(X)$ en lugar de $f + N \in L_p(X)$ ó $[f]_\sim \in L_p(X)$.

Consideramos que $f = g$ en $L_p(X, \Sigma, \mu)$ significa $f(x) \overset{\mu-a.e.}{=} g(x)$ como funciones.

3.3.5 Espacios ℓ_p como espacios L_p

Estudiemos el caso particular $L_p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$ para m medida de contar.

Sea $s \in \mathcal{L}_p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$, tenemos que s es una función de la forma:

$$s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad n \mapsto s(n)$$

De modo que $s \equiv (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Por tanto,

$$||s||_p = \left(\int_{\mathbb{N}} |s(n)|^p \, dm(n)\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \overset{s \in \mathcal{L}_p}{<} \infty$$

Se corresponden con los espacios ℓ_p estudiados en Análisis Matemático 2. Además, en este caso, el conjunto N contiene únicamente a la sucesión nula $0_{\ell_p} \equiv 0$.

3.3.6 Teorema de Riesz-Fisher

Sea $1 \leq p \leq \infty$. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}_p(X)$ sucesión de Cauchy en $L_p(X)$. Entonces, existen $(k_n)_n \subseteq (n)_n$ sucesión creciente de naturales, y $f \in \mathcal{L}_p(X)$ que verifican:

i) $f_{k_n}(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$ en casi todo punto (μ-a.e.)

ii) $||f_n - f||_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$

iii) Para el caso $p = \infty$, podemos tomar $(k_n)_n = (n)_n$

Como consecuencia, $L_p(X, \Sigma, \mu)$ es un espacio de Banach.

<u>**Demostración:**</u> Veremos dos casos.

- Caso $1 \leq p < \infty$:

  Como $(f_n)_n$ es de Cauchy en $L_p(X)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos afirmar que existe cierto $k_n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$||f_k - f_{k_n}||_p < \frac{1}{2^n} \;\; \forall\, k \geq k_n$$

  En particular, $|f_{k_{n+1}} - f_{k_n}||_p < \frac{1}{2^n} \; \forall\, n \in \mathbb{N}$.

  Consideramos las siguientes funciones medibles:

$$g_n(x) := \sum_{m=1}^{n} |f_{k_{m+1}}(x) - f_{k_m}(x)| \qquad g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} |f_{k_{n+1}}(x) - f_{k_n}(x)|$$

  Veamos que g es sumable. Como es suma de términos no negativos, podemos aplicar el Teorema de Convergencia Monótona:

$$\int_X g(x)^p \, d\mu(x) \overset{TCM}{=} \lim_n \int_X g_n(x)^p \, d\mu(x) = \lim_n \left|\left| \sum_{m=1}^{n} |f_{k_{m+1}}(x) - f_{k_m}(x)| \right|\right|_p^p \overset{\text{continuidad}}{=}$$

$$= \left(\lim_n \left|\left| \sum_{m=1}^{n} |f_{k_{m+1}}(x) - f_{k_m}(x)| \right|\right|_p \right)^p \overset{D.T.}{\leq} \left(\lim_n \sum_{m=1}^{n} ||f_{k_{m+1}} - f_{k_m}||_p \right)^p \leq$$

$$\leq \left(\lim_n \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2^n}\right)^p < \infty$$

Tenemos que $g(x) < \infty$ μ-a.e. al ser sumable. Por tanto, para el siguiente conjunto,

$$A := \{x \in X : g(x) = \infty\} \in \Sigma$$

tenemos que $\mu(A) = 0$. Sea $x \in X \setminus A$, tenemos $g(x) < \infty$ luego ha de cumplirse:

$$\hat{g}(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_{k_{n+1}}(x) - f_{k_n}(x) < \infty$$

Al ser una serie telescópica, esto implica que $\exists \lim_n f_{k_n}(x) < \infty$.
Definimos la función candidata a límite:

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto f(x) := \begin{cases} \lim\limits_n f_{k_n}(x) & \text{si } x \in X \setminus A \\ 0 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

Tenemos garantizado que $f_{k_n}(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$ en $X \setminus A$ con $\mu(A) = 0$ luego hemos demostrado ya el primer apartado. Queda ver que se cumple el segundo.

$$\int_X |f - f_{k_n}|^p \, d\mu = \int_{X\setminus A} |f - f_{k_n}|^p \, d\mu \overset{Fatou}{\leq} \underline{\lim_m} \int_{X\setminus A} |f_{k_m}(x) - f_{k_n}(x)| \, d\mu(x) =$$

$$= \left(\underline{\lim_m} ||f_{k_m} - f_{k_n}||_p\right)^p \leq \left(\frac{1}{2^n}\right)^p$$

En particular, tomando $k_n = k_1$,

$$\int_X |f(x) - f_{k_1}(x)|^p \, d\mu(x) < \infty \Rightarrow f - f_{k_1} \in \mathcal{L}_p(X)$$

Como $f_{k_1} \in \mathcal{L}_p(X)$, al ser un espacio vectorial, $f \in \mathcal{L}_p(X)$.

Además, $||f - f_{k_n}||_p^p \leq \frac{1}{2^{np}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Es decir, $f_{k_n} \xrightarrow{n\to\infty} f$ en $L_p(X)$.

Como $(f_n)_n$ es de Cauchy en $L_p(X)$, $||f_n - f||_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

- Caso $p = \infty$:

  Por hipótesis, tenemos $(f_n)_n$ de Cauchy en $L_\infty(X)$ luego

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tal que } ||f_n - f_m||_\infty < \varepsilon \;\; \forall\, n, m \geq n_\varepsilon$$

  Para cada par $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ definimos el siguiente conjunto auxiliar:

$$A_{n,m} := \Big\{x \in X : ||f_n(x) - f(x)||_\infty \leq ||f_n - f_m||_\infty\Big\}$$

  Así, para $B_{n,m} := X \setminus A_{n,m} \in \Sigma$ tenemos $\mu(B_{n,m}) = 0$.

  Y por tanto, $B := \bigcup\limits_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} B_{n,m} \in \Sigma$ con $\mu(B) = 0$.

  Sea $\varepsilon > 0$. Tenemos:

$$\forall\, x \in X \setminus B,\;\; \forall\, n, m \geq n_\varepsilon : |f_n(x) - f_m(x)| \leq ||f_n - f_m|| < \varepsilon$$

  Tenemos que para todo $x \in X \setminus B$ la sucesión $(f_n(x))_n$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$. Al ser un espacio métrico completo, converge en $\mathbb{R}$. Podemos definir:

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad x \longmapsto f(x) := \begin{cases} \lim\limits_n f_n(x) & \text{si } x \in X \setminus B \\ 0 & \text{si } x \in B \end{cases}$$

  Dados $x \in X \setminus B$, $m \geq n_\varepsilon$, se cumple:

$$|f(x) - f_m(x)| = \lim_n |f_n(x) - f_m(x)| \overset{n \geq n_\varepsilon}{\leq} \varepsilon$$

  Tenemos $f = (f - f_m) + f_m \in \mathcal{L}_\infty(X)$, luego $f \in \mathcal{L}_\infty(X)$ al ser un espacio vectorial .

  Además, $\forall\, m \geq n_\varepsilon, ||f - f_m||_\infty < \varepsilon$.

  Así, $f_m \xrightarrow{m\to\infty} f$ en $L_\infty(X)$.