1. Primeras definiciones

Definición 1.1

Sea X un conjunto tal que $X \neq \varnothing$. Una aplicación $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es una métrica o distancia definida en X si cumple las siguientes propiedades:

(D.1) $d(x, y) \geq 0 \quad \forall\, x, y \in X$.

(D.2) $d(x, y) = 0 \iff x = y \quad \forall\, x, y \in X$.

(D.3) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall\, x, y \in X$.

(D.4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall\, x, y, z \in X$.

El par (X, d) recibe el nombre de *espacio métrico*. El número real $d(x, y)$ recibe el nombre de *distancia de* x *a* y. El axioma (D.4) suele llamarse *desigualdad triangular*.

Definición 1.2

Sean (X, d) un espacio métrico y $Y \neq \varnothing$ con $Y \subseteq X$ un subconjunto. Se considera la restricción

$$d|_{Y \times Y} : Y \times Y \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (y, y') \mapsto d(y, y').$$

La aplicación $d|_{Y \times Y}$ es una métrica en Y que recibe el nombre de *métrica inducida* por d. El espacio métrico $(Y, d|_{Y \times Y})$ se llama *subespacio métrico* de (X, d).

Definición 1.3

Sea (X, d) un espacio métrico, $x \in X$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}$ con $\varepsilon > 0$. Se definen:

$$\begin{aligned}
B_d(x, \varepsilon) &:= \{y \in X :\ d(x, y) < \varepsilon\} && \text{(bola abierta de centro } x \text{ y radio } \varepsilon\text{)},\\
D_d(x, \varepsilon) &:= \{y \in X :\ d(x, y) \leq \varepsilon\} && \text{(disco cerrado de centro } x \text{ y radio } \varepsilon\text{)},\\
S_d(x, \varepsilon) &:= \{y \in X :\ d(x, y) = \varepsilon\} && \text{(esfera de centro } x \text{ y radio } \varepsilon\text{)}.
\end{aligned}$$

Notas

Nota 1.1 Cuando no haya lugar a confusión se omitirá el subíndice que indica la métrica.

Nota 1.2 Propiedades elementales (para $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$):

1. Si $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ entonces $B_d(x, \varepsilon_1) \subseteq B_d(x, \varepsilon_2)$.
2. $S_d(x, \varepsilon) \cap B_d(x, \varepsilon) = \varnothing$ para todo $\varepsilon > 0$.
3. $D_d(x, \varepsilon) = S_d(x, \varepsilon) \cup B_d(x, \varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$.