Análisis Matemático II

Javier Ortín Rodenas

Hoja de ejercicios

Contenidos

I Teoría de la medida e Integral de Lebesgue

§1. Medida exterior en $\mathbb{R}^N$

1.1.1 Ejercicio 5

a) Sea $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$, demuestra que todo cubrimiento finito de A formado por intervalos abiertos tiene longitud total mayor o igual a 1.

Demostración: Sea $\{I_i\}_{i=1}^n$ un recubrimiento por intervalos abiertos de A, con cada $I_i = (a_i, b_i)$ con $a_i < b_i$. Definimos el siguiente conjunto auxiliar:

$$\mathcal{A} := \{0,1\} \cup \Big([0,1] \cap \big\{a_i, b_i : i \in \{1,\dots,n\}\big\}\Big)$$

Este conjunto contiene a los extremos de los I_i que se encuentren entre 0 y 1. Al haber un número finito de intervalos, tenemos que $\mathcal{A}$ es finito, pudiendo ordenarlo como sigue:

$$\mathcal{A} = \{x_j\}_{j=0}^m \qquad x_0 = a < x_1 < \ldots < x_m = b \qquad \text{para cierto } m \in \mathbb{N}$$

Al estar en un caso finito, la unión de las clausuras es la clausura de las uniones. Por contención de las clausuras, se tiene:

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i \Rightarrow \overline{A} = [0,1] \cap \overline{\mathbb{Q}} = [0,1] \subseteq \overline{\bigcup_{i=1}^n I_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{I_i}$$

Sea $j \in \{1,\dots,m\}$ cualquiera, tenemos que $x_j \in [0,1] \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^n \overline{I_i}$ luego $\exists k \in \{1,\dots,n\}$ tal que $x_j \in [a_k, b_k]$. Veamos que $[x_{j-1}, x_j] \subseteq [a_k, b_k]$ también. Ambos conjuntos son cerrados y conexos con intersección no vacía. Por tanto, su intersección ha de ser conexa, cerrada y no vacía (es decir, un intervalo cerrado). Será de la forma $[u, x_j]$ con $u = \min\{a_k, x_{j-1}\}$. De tenerse $u \neq x_{j-1}$, se cumpliría $x_{j-1} < a_k < x_j$, lo que contradice la ordenación establecida para $\mathcal{A}$.

De este modo, como $v_1(I_i) = v_1(\overline{I_i})\ \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$, se cumple:

$$1 = v_1([0,1]) = \sum_{j=1}^{m} v_1(x_{j-1}, x_j) \leq \sum_{i=1}^{n} v_1(\overline{I_i}) = \sum_{i=1}^{n} v_1(I_i)$$

b) Deduce del apartado anterior que A no es compacto.

<u>Demostración:</u> Veamos que hay un recubrimiento de A del que no se puede extraer un subrecubrimiento finito. Para ello basta dar un recubrimiento de A por intervalos abiertos tales que la suma de sus medidas sea menor a 1. Como $\mathbb{Q}$ es numerable, A también lo es. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una enumeración cualquiera de A, definimos los siguientes intervalos:

$$I_n = (a_n - \frac{1}{2^{n+2}}, a_n + \frac{1}{2^{n+2}}) \quad \text{luego } A \subseteq \underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} I_i \text{ con } \sum_{i=1}^{\infty} v_1(I_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

c) Demuestra que la siguiente aplicación m definida sobre $\mathfrak{B}_N$ no es una medida:

$$m(A) = \inf \left\{ \sum i = 1^n v(I_i) : \overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} I_i \supseteq A \text{ con cada } I_i \text{ cubo abierto en} \mathbb{R}^N \right\}$$

<u>Demostración:</u>
En caso de serlo, para $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{B}_N$ con $i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \varnothing$ se cumpliría:

$$m\left(\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} E_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(E_i)$$

Todo conjunto unipuntual a con $a \in \mathbb{R}^N$ está en $\mathfrak{B}_N$ pues se puede expresar como un intervalo cerrado degenerado. Por tando, todo conjunto numerable está también en $\mathfrak{B}_N$. Consideramos el conjunto $A^N \subseteq [0,1]^N \in \mathfrak{B}_N$. Razonando como en el apartado anterior, todo cubrimiento finito de A^N por cubos ha de tener suma de volúmenes mayor o igual a 1, luego $m(A^N) = 1$. No obstante, podemos expresar A^N como unión numerable de conjuntos unipuntuales disjuntos, teniendo cada uno de ellos $m(\{b_n\}) = 0$ para $(b_n)_n$ una enumeración de A^N.

6) Demuestra que existe un conjunto abierto O en $\mathbb{R}$ y un $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier recubrimiento finito de O formado por intervalos abiertos, $\{J_i\}_{i=1}^m$ se cumple $\mu(\bigcup_{i=1}^{n} J_i \setminus O) > \varepsilon$. **Demostración:**

Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos $I_n = (n - \frac{1}{3}, n + \frac{1}{3})$. Consideramos el abierto $O = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i$. Sea $\{J_i\}_{i=1}^m$ un recubrimiento finito de O por intervalos abiertos. Al ser O no acotado, tiene que haber cierto $k \in \{1, \ldots, m\}$ tal que J_k contiene a infinitos intervalos I_n. Dados dos de estos intervalos consecutivos, la distancia entre el extremo derecho del primero y el extremo izquierdo del segundo viene dada por:

$$(n + 1 - \frac{1}{3}) - (n + \frac{1}{3}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Por tanto, $J_k \setminus O$ ha de contener infinitos intervalos disjuntos de longitud $\frac{1}{3}$ luego tiene medida infinita. Se cumple el resultado para $\varepsilon > 0$ cualquiera.

§2. Funciones medibles

1.2.1 Ejercicio 5

Sea $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ uniformemente continua y acotada, demuestra que la siguiente función es medible:

$$\varphi : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad t \longmapsto \varphi(t) = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f(x+t) - f(x)|$$

<u>**Demostración:**</u>

Por ser f acotada, tenemos que $\exists\, M \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq M \forall x \in \mathbb{R}^N$. De este modo, sean $x, y \in \mathbb{R}^N$, tenemos:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| \leq M + M = 2M$$

Por tanto, concluimos que φ es también acotada. Veamos que es medible por la definición.

Sea $K := \sup_{t \in \mathbb{R}^N} \varphi(t)$, como φ solo toma valores no negativos tenemos que:

$$\varphi^{-}1\Big((-\infty, 0]\Big) = \varnothing \in \mathfrak{M}_N \qquad\qquad \varphi^{-}1\Big((-\infty, K]\Big) = \mathbb{R}^N \in \mathfrak{M}_N$$

Fijando ahora $\varepsilon \in (0, K)$ cualquiera, veamos que $\varphi\Big((-\infty, \varepsilon]\Big)$ es medible. Al ser f uniformemente continua por hipótesis, tenemos que para el ε fijado existe un $\delta > 0$ tal que:

$$||x - y|| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$$

Podemos reescribir $y = x + t$ para $t = y - x \in \mathbb{R}^N$. De este modo; sea $t \in \mathbb{R}^N$, se tiene:

$$||t|| < \delta \Rightarrow |f(x+t) - f(x)| < \varepsilon$$

Se cumple la condición para todo x de $\mathbb{R}^N$. Al tomar supremos, la desigualdad pasa a ser no estricta, y el término mayorado por ε se corresponde con $\varphi(t)$ por definición:

$$||t|| < \delta \Rightarrow \varphi(t) = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |f(x+t) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Así, sea $(t_n)_n$ una sucesión que tiende al origen, ha de "atravesar" todos las bolas de radio δ asociado a valores de ε arbitrariamente pequeños. Por tanto, podemos concluir que ϕ es continua en el origen.

Sean $s, t \in \mathbb{R}^N$ cualesquiera, se cumple:

$$\begin{aligned}\varphi(t) = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |f(x+t) - f(x)| &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |f(x+t) - f(x+s)| + |f(x+s) - f(x)| \leq \\ &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |f(x+t) - f(x+s)| + \sup_{y\in\mathbb{R}^N} |f(y+s) - f(y)| \overset{z=x+s}{=} \sup_{z\in\mathbb{R}^N} |f\big(z + (t-s)\big) - f(z)| + \varphi(s)\end{aligned}$$

Despejando, obtenemos $0 \leq \varphi(t) - \varphi(s) \leq \varphi(t-s) \xrightarrow{s\to t} \varphi(0) = 0$.

Por todo lo anterior, concluimos que φ es continua y acotada, luego es medible en $\mathfrak{B}_N$ y en $\mathfrak{M}_N$