TG IV

Grupo M

Javier Ortín Rodenas
Bruno Martín Rivera
Jorge Gota Ortín
Alejandra Sánchez Mayo

1 Enunciado:

1. Dado C el cilindro $x^2 + y^2 = 1$, considere el difeomorfismo siguiente:

   $$\phi_1 : C \longrightarrow \mathbb{S}^2 \backslash \{S, N\} \quad (x, y, z) \longmapsto \phi_1(x, y, z) = (x \operatorname{sech} z, y \operatorname{sech} z, \tanh z)$$

   ¿Preserva ángulos? ¿Es una isometría local? ¿Es isoareal?

2. Dado C_t el cilindro truncado $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1, -1 < z < 1\}$, considere el difeomorfismo ϕ_2 definido como sigue:

   $$\phi_2 : C_t \longrightarrow \mathbb{S}^2 \backslash \{S, N\} \quad (x, y, z) \longmapsto \phi_2(x, y, z) = \left(x\sqrt{1 - z^2}, y\sqrt{1 - z^2}, z\right)$$

   ¿Preserva áreas? ¿Es una isometría local? ¿Preserva ángulos?

2 Solución

2.1 Primer apartado

En primer lugar, debemos de parametrizar el cilindro C. Podemos hacerlo a partir de la siguiente función:

$$X : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \longrightarrow C \qquad (\theta, z) \longmapsto X(\theta, z) = (\cos\theta, \sin\theta, z)$$

Veamos qué expresión toma $\bar{X} = (\phi \circ X)$ al componerlas:

$$X : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^2 \backslash \{S, N\} \quad (\theta, z) \longmapsto \bar{X}(\theta, z) = \left(\frac{\cos\theta}{\cosh z}, \frac{\sin\theta}{\cosh z}, \tanh z\right)$$

Para comprobar si la aplicación ϕ preserva ángulos, tenemos que comprobar si es o no conforme. Por tanto, hemos de hallar los coeficientes de la Primera Forma Fundamental de X y de $\bar{X}$ para intentar definir así una aplicación λ adecuada.

Hallemos las derivadas parciales de X:

$$X_\theta(\theta, z) = (-\sin\theta, \cos\theta, 0) \qquad\qquad X_z(\theta, z) = (0, 0, 1)$$

De este modo, los coeficientes de la PFF de X vienen dados por:

$$E(\theta, x) = X_\theta(\theta, z) \cdot X_\theta(\theta, z) = (-\sin\theta, \cos\theta, 0) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta, 0) = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$F(\theta, x) = X_\theta(\theta, z) \cdot X_z(\theta, z) = (-\sin\theta, \cos\theta, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0$$
$$G(\theta, x) = X_z(\theta, z) \cdot X_z(\theta, z) = (0, 0, 1) \cdot (0, 0, 1) = 1$$

Veamos qué ocurre con $\bar{X}$. Cabe recordar que $\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$.

$$\bar{X}_\theta(\theta, x) = \left(\frac{-\sin\theta}{\cosh z}, \frac{\cos\theta}{\cosh z}, 0\right) \quad \bar{X}_z(\theta, x) = \left(\frac{-\cos\theta \cdot \sinh z}{\cosh^2 z}, \frac{-\sin\theta \sinh z}{\cosh^2 z}, \frac{1}{\cosh^2 z}\right)$$

Calculamos ahora los coeficientes de la PFF de $\bar{X}$:

$$\bar{E}(\theta, x) = \bar{X}_\theta(\theta, z) \cdot \bar{X}_\theta(\theta, z) = \frac{1}{\cosh^2 z}(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = \frac{1}{\cosh^2 z}$$

$$\bar{F}(\theta, x) = \bar{X}_\theta(\theta, z) \cdot \bar{X}_z(\theta, z) = \frac{\cos\theta \cdot \sin\theta}{\cosh^2 z}(1 - 1) = 0$$

$$\bar{G}(\theta, x) = \bar{X}_z(\theta, z) \cdot \bar{X}_z(\theta, z) = \frac{1}{\cosh^4 z}\left(\cos^2\theta \cdot \sinh^2 z + \sin^2\theta \cdot \sinh^2 z + 1\right) =$$
$$= \frac{1}{\cosh^4 z}\left(\sinh^2 z + 1\right) = \frac{1}{\cosh^4 z}\left(\cosh^2 z\right) = \frac{1}{\cosh^2 z}$$

En vista de lo anterior, es claro que ϕ_1 preserva ángulos, pues es una aplicación conforme. Basta tomar la aplicación λ definida como sigue:

$$\lambda : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad (\theta, z) \longmapsto \lambda(\theta, z) = \frac{1}{\cosh^2 z}$$

$$\bar{E}(\theta, z) = \lambda(\theta, z)^2 E(\theta, z) \quad \bar{F}(\theta, z) = \lambda(\theta, z)^2 F(\theta, z) \quad \bar{G}(\theta, z) = \lambda(\theta, z)^2 G(\theta, z)$$

Es evidente que λ está bien definida, es diferenciable, y no se anula.

Por un resultado teórico, sabemos que se cumple lo siguiente:

$$\phi_1 \text{ isometría} \iff \phi_1 \text{ conforme e isoareal}$$

Como sabemos que es conforme, al no ser isometría (pues $E \neq \bar{E}$) podemos afirmar que no es isoareal tampoco. Por todo lo anterior, ϕ_1 preserva ángulos pero no áreas, luego no es una isometría.

2.2 Segundo apartado

El cilindro C_t es un subconjunto del cilindro C del apartado anterior. Por tanto, podemos utilizar la misma parametrización restringiendo los valores que puede tomar la tercera componente.

$$X : (0, 2\pi) \times (-1, 1) \longrightarrow C \qquad (\theta, z) \longmapsto X(\theta, z) = (\cos\theta, \sin\theta, z)$$

Al no haber modificado la expresión de X nos sirve el razonamiento del apartado anterior para deducir:

$$E(\theta, z) = 1 \qquad F(\theta, z) = 0 \qquad G(\theta, z) = 1$$

Veamos qué expresión tiene ahora $\bar{X} = (\phi_2 \circ X)$:

$$\bar{X} : (0, 2\pi) \times (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{S}^2 \backslash \{S, N\} \quad (\theta, z) \longmapsto \bar{X}(\theta, z) = \left(\cos\theta\sqrt{1 - z^2}, \sin\theta\sqrt{1 - z^2}, z\right)$$

Hallemos ahora sus derivadas parciales:

$$\bar{X}_\theta(\theta, z) = \left(-\sin\theta\sqrt{1 - z^2}, \cos\theta\sqrt{1 - z^2}, 0\right) \quad \bar{X}_z(\theta, z) = \left(\frac{-z\cos\theta}{1 - z^2}, \frac{-z\sin\theta}{1 - z^2}, 1\right)$$

De este modo, los coeficientes de la PFF de $\bar{X}$ vienen dados por:

$$\bar{E}(\theta, x) = \bar{X}_\theta(\theta, z) \cdot \bar{X}_\theta(\theta, z) = (1 - z^2)(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = 1 - z^2$$

$$\bar{F}(\theta, x) = \bar{X}_\theta(\theta, z) \cdot \bar{X}_z(\theta, z) = \frac{z\cos\theta \cdot \sin\theta}{\sqrt{1 - z^2}}(1 - 1 + 0) = 0$$

$$\bar{G}(\theta, x) = \bar{X}_z(\theta, z) \cdot \bar{X}_z(\theta, z) = \frac{z^2}{1 - z^2}\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) + 1 = \frac{1}{1 - z^2}$$

Como $E = G$, al ocurrir $\bar{E} \neq \bar{F}$ la aplicación ϕ_2 no puede ser conforme, pues para cualquier función λ que escojamos se cumpliría:

$$\bar{E}(\theta, z) = \lambda(\theta, z)^2 E(\theta, z) \Rightarrow \bar{F}(\theta, z) \neq \lambda(\theta, z)^2 F(\theta, z)$$
$$\bar{F}(\theta, z) = \lambda(\theta, z)^2 F(\theta, z) \Rightarrow \bar{E}(\theta, z) \neq \lambda(\theta, z)^2 E(\theta, z)$$

Como consecuencia, al no ser conforme ϕ_2 no puede ser una isometría. No obstante, sí podría preservar áreas. Para comprobarlo basta ver si se cumple $EG - F^2 = \bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2$.

$$(EG - F^2)(\theta, z) = 1 \cdot 1 - 0^2 = 1$$
$$(\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^)(\theta, z) = (1 - z^2) \cdot \frac{1}{1 - z^2} - 0^2 = 1$$

Por todo lo anterior, ϕ_2 preserva áreas pero no ángulos, luego no es una isometría.