

# Análisis Matemático III

Javier Ortín Rodenas

Curso 2025-2026

# Contenidos

<b>III Espacios <math>L_p</math> con <math>1 \leq p \leq \infty</math></b>	<b>3</b>
1. Primeras definiciones . . . . .	3
3.1.1 Definición de $\mathcal{L}_p$ . . . . .	3
3.1.2 Definición de $\mathcal{L}_\infty$ . . . . .	3
3.1.3 Funciones sumables y funciones de $\mathcal{L}_p(X)$ . . . . .	3
3.1.4 Definición de supremo esencial . . . . .	4
3.1.5 Mínimo esencial . . . . .	4
2. Estructura de los $\mathcal{L}_p$ . . . . .	5
3.2.1 Concepto de convexidad . . . . .	5
3.2.2 Los $\mathcal{L}_p(X)$ son espacios vectoriales . . . . .	6
3.2.3 Conjugado $p^*$ . . . . .	8
3.2.4 Desigualdad de Hölder . . . . .	8
3.2.5 Desigualdad de Minkowski . . . . .	10

# III Espacios $L_p$ con $1 \leq p \leq \infty$

A lo largo de esta unidad, consideraremos  $(X, \Sigma, \mu)$  como un espacio de medida genérico.

## §1. Primeras definiciones

### 3.1.1 Definición de $\mathcal{L}_p$

Para  $1 \leq p < \infty$ , denotaremos como  $\mathcal{L}_p(X)$  o como  $\mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)$  al conjunto de funciones medibles  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  para las que se cumple

$$\int_X |f|^p d\mu < \infty$$

Asociada a cada  $f \in \mathcal{L}_p(X)$ , tenemos la siguiente cantidad numérica:

$$\|f\|_p := \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Nótese que para el caso  $p = 1$  se corresponde con la definición ya estudiada.

### 3.1.2 Definición de $\mathcal{L}_\infty$

Para  $p = \infty$ ,  $\mathcal{L}_\infty(X) = \mathcal{L}_\infty(X, \Sigma, \mu)$  denota el conjunto de todas las funciones medibles  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  para las que existe  $\alpha \in [0, +\infty)$  que verifica:

$$\mu(\{x \in X : f(x) > \alpha\}) = 0$$

Esta condición equivale a su vez a las dos siguientes:

$$\mu(X \setminus \{x \in X : f(x) > \alpha\}) = 0 \quad \{x \in X : f(x) > \alpha\} \stackrel{\mu-a.e.}{=} X$$

### 3.1.3 Funciones sumables y funciones de $\mathcal{L}_p(X)$

Si  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  es medible, y  $\int_X |f|^p d\mu < \infty$  (para  $p < \infty$ ). Entonces, existe una función  $g \in \mathcal{L}_p(X)$  tal que  $f \stackrel{\mu-a.e.}{=} g$ . Como consecuencia, si  $p < \infty$ ,

$$\left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \|g\|_p$$

**Demostración:** Extendemos lo visto en el resultado 2.2.6.

Definimos los siguientes conjuntos auxiliares:

$$A = \{x \in X : f(x) = +\infty\} \quad B = \{x \in X : f(x) = -\infty\}$$

Ambos conjuntos han de ser de medida nula, o de lo contrario  $\int_X |f|^p d\mu = \infty$ . Así, basta considerar la siguiente función:

$$g(x) = f(x) \cdot X_{X \setminus (A \cup B)}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \notin A \cup B \\ 0 & \text{si } x \in A \cup B \end{cases}$$

Como  $\mu(A) = \mu(B) = 0$ , tenemos que  $f \stackrel{\mu-a.e.}{=} g$ .

### 3.1.4 Definición de supremo esencial

Para cada  $f \in \mathcal{L}_\infty(X)$  definimos el siguiente conjunto:

$$A_f := \left\{ \alpha \in [0, \infty) : \mu(\{x \in X : f(x) > \alpha\}) = 0 \right\}$$

A partir de él, definimos  $\|f\|_p := \inf A_f$ . Esta cantidad recibe el nombre de “supremo esencial”.

### 3.1.5 Mínimo esencial

El supremo esencial es en realidad un mínimo. Es decir; sea  $f \in \mathcal{L}_\infty(X)$ , se cumple:

$$\|f\|_\infty \in \left\{ f(x) : x \in X \right\} \text{ o equivalentemente } \|f\|_\infty = \min A_f$$

**Demostración:**

Denotemos  $\beta := \inf A_f$ . Consideramos  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A_f$  sucesión decreciente que verifica  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \beta$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$  definimos el siguiente conjunto auxiliar:

$$B_n := \left\{ x \in X : |f(x)| \leq \beta_n \right\}$$

De este modo,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $B_{n+1} \subseteq B_n$  y  $B_n \in \Sigma$ . Además, por ser  $f \in \mathcal{L}_\infty(X)$  por hipótesis, tenemos que  $B_n = X \setminus M_n$  con  $M_n \in \Sigma$  tal que  $\mu(M_n) = 0$ . Por tanto, se cumple:

$$\{x \in X : |f(x)| \leq \beta\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (X \setminus M_n) = X \setminus \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n \right)$$

Por subaditividad,  $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n\right) = 0$ , luego  $\beta \in A_f$  por definición.

## §2. Estructura de los $\mathcal{L}_p$

### 3.2.1 Concepto de convexidad

Una combinación convexa de puntos de un espacio afín es aquella combinación lineal de los mismos cuyos pesos sean no negativos y sumen 1. Para el caso de dos puntos,  $a$  y  $b$ , podemos expresar su combinación convexa como:

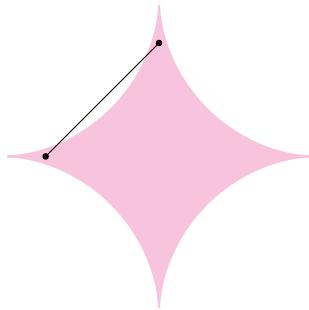
$$\lambda a + (1 - \lambda)b \quad \text{con } \lambda \in [0, 1]$$

Nótese que conforme  $\lambda$  va aumentando, se recorre el segmento en línea recta desde  $a$  hasta  $b$ .

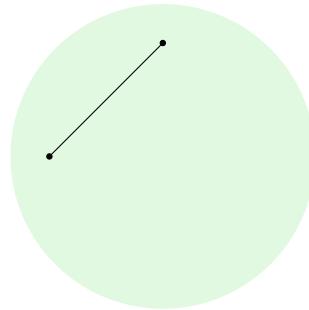
Sea  $A$  un conjunto de un espacio afín, diremos que es convexo si dados  $a, b \in A$ , tenemos que cualquier combinación convexa de ambos está también en  $A$ . Es decir,

$$A \text{ es convexo} \iff \forall a, b \in A, \forall \lambda \in [0, 1] : \lambda a + (1 - \lambda)b \in A$$

Intuitivamente, se corresponde con que todo segmento que une dos puntos de  $A$  está contenido al completo en  $A$ .



Conjunto no convexo



Conjunto convexo

Veamos ahora cómo se traduce este concepto a funciones.

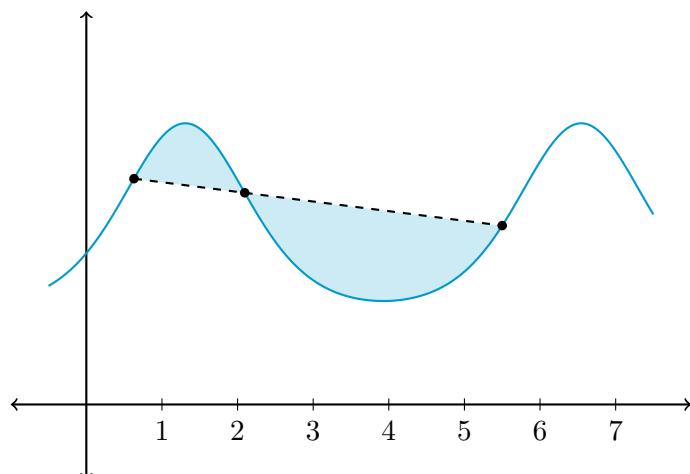
Diremos que una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa en un intervalo  $I$  si el segmento que une dos puntos cualesquiera de su grafo en  $I$  queda por encima del propio grafo. Es decir, si verifica:

$$\forall x_1, x_2 \in I : f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

Esto a su vez equivale a exigir que el siguiente conjunto (epígrafo de  $f$ ) sea convexo:

$$\{(x, y) : x \in I, y > f(x)\}$$

Podemos extender la definición de convexidad de funciones al estudiar conjuntos convexos más generales y no solo intervalos.



La función no es convexa en  $[0, 6]$ , pero sí en  $[2, 6]$ .

Podemos considerar definiciones distintas de convexidad según exijamos o no que la desigualdad sea estricta.

### 3.2.2 Los $\mathcal{L}_p(X)$ son espacios vectoriales

Para  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $\mathcal{L}_p(X)$  es un espacio vectorial.

**Demostración:** Distinguiremos varios casos:

- Caso  $p = 1$ : ya se ha demostrado.
- Caso  $p = \infty$ :

Sea  $f \in \mathcal{L}_\infty(X)$ , sea  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Veamos  $\lambda f \in \mathcal{L}_\infty(X)$ .

Si  $\lambda = 0$ ,  $\lambda f \equiv 0 \in \mathcal{L}_\infty(X)$ .

Sea  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Como  $f \in \mathcal{L}_\infty(X)$ ,  $\exists M \in \Sigma$  con  $\mu(M) = 0$  tal que:

$$X \setminus M = \{x \in X : |f(x)| \leq \|f\|_\infty\} = \{x \in X : |\lambda f(x)| \leq |\lambda| \cdot \|f\|_\infty\}$$

Tenemos que  $\lambda f \in \mathcal{L}_\infty(X)$  por definición.

Sean  $f, g \in \mathcal{L}_\infty(X)$ , veamos que  $f + g \in \mathcal{L}_\infty(X)$ :

Por definición,  $\exists M, N \in \Sigma$  con  $\mu(M) = \mu(N) = 0$  tales que:

$$X \setminus M = \{x \in X : |f(x)| \leq \|f\|_\infty\} \quad X \setminus N = \{x \in X : |g(x)| \leq \|g\|_\infty\}$$

Entonces, dado  $x \in X \setminus (M \cup N)$  cualquiera, se cumple:

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty < \infty$$

Como  $\mu(M \cup N) = 0$ , tenemos  $f + g \in \mathcal{L}_\infty(X)$  por definición.

- Caso  $1 < p < \infty$ :

Sean  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{L}_p(X)$ . Veamos que  $\lambda f \in \mathcal{L}_\infty(X)$ .

$$\int_X |\lambda f(x)|^p d\mu(x) = |\lambda|^p \cdot \int_X |f(x)|^p d\mu(x) = |\lambda|^p \cdot \|f\|_p^p < \infty$$

Se cumple por definición.

Sean  $f, g \in \mathcal{L}_p(X)$ . Veamos que  $f + g \in \mathcal{L}_p(X)$ :

$$\int_X |f(x) + g(x)|^p d\mu(x) = \int_X \left| \underbrace{\frac{1}{2}}_{\lambda} \cdot 2 \cdot f(x) + \underbrace{\frac{1}{2}}_{1-\lambda} \cdot 2 \cdot g(x) \right|^p d\mu(x) = (*)$$

La función  $h(t) = |t|^p$  es convexa en  $[0, +\infty]$  para  $p > 1$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} (*) &\leq \int_X \frac{1}{2} |2f(x)|^p + \frac{1}{2} |2g(x)|^p d\mu(x) = 2^{p-1} \cdot \int_X |f(x)|^p d\mu(x) + 2^{p-1} \cdot \int_X |g(x)|^p d\mu(x) = \\ &= 2^{p-1} \left( \int_X |f(x)|^p d\mu(x) + \int_X |g(x)|^p d\mu(x) \right) = 2^{p-1} (\|f\|_p^p + \|g\|_p^p) < \infty \end{aligned}$$

Se cumple por definición.

### 3.2.3 Conjugado $p^*$

Para cada  $p \in [1, +\infty]$ , denotaremos como  $p^*$  al único número en  $\overline{\mathbb{R}}$  que verifica:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$$

Solo hay un único número en todo  $\overline{\mathbb{R}}$  que verifica esto, pero ha de estar necesariamente en  $(1, \infty)$ :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1 \Rightarrow p^* = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1} \stackrel{p \in [1, \infty]}{\in} (1, \infty)$$

Estas son algunas de las propiedades de este conjugado (claras por la definición):

$$(p^*)^* = p \quad p + p^* = p \cdot p^* \quad p \cdot p^* - p^*p \quad p^* = \frac{p}{p-1} \quad p^*(p-1) = p$$

### 3.2.4 Desigualdad de Hölder

Sean  $f \in \mathcal{L}_p(X)$ ,  $g \in \mathcal{L}_{p^*}(X)$ . Entonces, se cumple:

$$f \cdot g \in \mathcal{L}_1(X) \quad \|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_{p^*}$$

#### Demostración:

- Caso  $p = 1, p^* = \infty$ :

Como  $g \in \mathcal{L}_\infty(X)$ ,  $\exists M \in \Sigma$  con  $\mu(M) = 0$  tal que

$$X \setminus M = \{x \in X : |g(x)| \leq \|g\|_\infty\}$$

Por tanto, ha de cumplirse:

$$\begin{aligned} \int_X |f \cdot g| d\mu &= \int_{X \setminus M} |f(x)| \cdot |g(x)| d\mu(x) \leq \int_{X \setminus M} |f(x)| \cdot \|g\|_\infty d\mu = \\ &= \|g\|_\infty \cdot \int_{X \setminus M} |f(x)| d\mu(x) = \|g\|_\infty \cdot \|f\|_1 < \infty \end{aligned}$$

Se cumple por definición.

- Caso  $1 < p < \infty$ . Hay que estudiar dos posibles escenarios:

a) Si  $\|f\|_p = 0$  ó  $\|g\|_{p^*} = 0$  (pudiendo darse ambas). Supongamos sin pérdida de generalidad que  $\|f\|_p = 0$ :

$$\|f\|_p = 0 \Rightarrow \int_X |f|^p d\mu(x) = 0 \stackrel{2.1.17}{\Rightarrow} |f|^p \stackrel{\mu-a.e.}{=} 0 \Rightarrow f \stackrel{\mu-a.e.}{=} 0.$$

De este modo,  $f \cdot g \stackrel{\mu-a.e.}{=} 0 \Rightarrow |f \cdot g| = 0 \stackrel{2.1.17}{\Rightarrow} 0 = \int_X |f \cdot g| d\mu = \|f \cdot g\|_1$ .

b) Supongamos ahora que  $\|f\|_p \neq \|g\|_{p^*}$ . Así,

Definimos los siguientes conjuntos auxiliares:

$$A := \{x \in X : f(x) = 0\} \in \Sigma \quad B := \{x \in X : g(x) = 0\} \in \Sigma$$

Por cómo los hemos definido,

$$\int_X \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|_{p^*}} d\mu(x) = \int_{X \setminus (A \cup B)} \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|_{p^*}} d\mu(x) = (*_1)$$

Al tratarse de cantidades positivas, para cada  $x \in X \setminus (A \cup B)$ , existen  $\xi_x, \zeta_x \in (0, \infty)$  tales que:

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} = e^{\frac{\xi_x}{p}} = \exp\left(\frac{\xi_x}{p}\right) \quad \frac{|g(x)|}{\|g\|_{p^*}} = e^{\frac{\zeta_x}{p^*}} = \exp\left(\frac{\zeta_x}{p^*}\right)$$

Sustituyendo en la expresión anterior:

$$(*_1) = \int_{X \setminus (A \cup B)} \exp\left(\frac{\xi_x}{p}\right) \cdot \exp\left(\frac{\zeta_x}{p^*}\right) d\mu(x) = \int_{X \setminus (A \cup B)} \exp\left(\frac{1}{p}\xi_x + \frac{1}{p^*}\zeta_x\right) d\mu(x)$$

La función exponencial es convexa. Tomando  $\lambda = \frac{1}{p}$ ,  $1 - \lambda = \frac{1}{p^*}$ , tenemos:

$$(*_1) \leq \int_{X \setminus (A \cup B)} \frac{1}{p} \exp(\xi_x) + \frac{1}{p^*} \exp(\zeta_x) d\mu(x) = \frac{1}{p} \int_{X \setminus (A \cup B)} \exp(\xi_x) d\mu(x) + \frac{1}{p^*} \int_{X \setminus (A \cup B)} \exp(\zeta_x) d\mu(x) = (*_2)$$

Deshacemos el cambio de variable y comparamos con la definición de  $\|\cdot\|_p$  y de  $\|\cdot\|_{p^*}$ ,

$$\begin{aligned} (*_2) &= \frac{1}{p} \int_{X \setminus (A \cup B)} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} d\mu(x) + \frac{1}{p^*} \int_{X \setminus (A \cup B)} \frac{|g(x)|^{p^*}}{\|g\|_{p^*}^{p^*}} d\mu(x) \leq \\ &\leq \frac{1}{p \cdot \|f\|_p^p} \cdot \int_X |f(x)|^p d\mu(x) + \frac{1}{p^* \cdot \|g\|_{p^*}^{p^*}} \cdot \int_X |g(x)|^{p^*} d\mu(x) = \\ &= \frac{1}{p \cdot \|f\|_p^p} \cdot \|f\|_p^p + \frac{1}{p^* \cdot \|g\|_{p^*}^{p^*}} \cdot \|g\|_{p^*}^{p^*} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1 \end{aligned}$$

Sustituimos para resolver el problema inicial:

$$\int_X \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|_{p^*}} d\mu(x) \Rightarrow \int_X |f(x) \cdot g(x)| d\mu(x) \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_{p^*} < \infty$$

### 3.2.5 Desigualdad de Minkowski

Sea  $1 \leq p \leq \infty$ . Sean  $f, g \in \mathcal{L}_p(X)$ . Entonces,  $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ .

**Demostración:** Hemos de distinguir tres casos.

- Caso  $p = 1$ : ya ha sido probado.
- Caso  $p = \infty$ :

Por ser  $f, g \in \mathcal{L}_\infty(X)$ , sabemos  $\exists M, N \in \Sigma$  con  $\mu(M) = \mu(N) = 0$  tales que:

$$X \setminus M = \{x \in X : |f(x)| \leq \|f\|_\infty\} \quad X \setminus N = \{x \in X : |g(x)| \leq \|g\|_\infty\}$$

Entonces, dado  $x \in X \setminus (M \cup N)$ , se cumple:

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

Como  $\mu(M \cup N) = 0$ . Recordando la (notación 3.1.4), tenemos:

$$\|f\|_\infty + \|g\|_\infty \in A_{f+g} \Rightarrow \|f + g\|_\infty = \min A_{f+g} \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

- Caso  $1 < p < \infty$ :

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int_X |f + g|^p d\mu = \int_X |f + g| \cdot |f + g|^{p-1} d\mu \leq \\ &= \int_X \underbrace{|f|}_{\mathcal{L}_p(X)} \cdot \underbrace{|f + g|^{p-1}}_{\mathcal{L}_{p^*}(X)} d\mu + \int_X \underbrace{|g|}_{\mathcal{L}_p(X)} \cdot \underbrace{|f + g|^{p-1}}_{\mathcal{L}_{p^*}(X)} d\mu = (*) \end{aligned}$$

Por las propiedades de  $p^*$ , tenemos que:

$$\int_X (|f + g|^{p-1})^{p^*} d\mu = \int_X |f + g|^{p^*(p-1)} d\mu = \int_X |f + g|^p d\mu = \|f + g\|_p^p < \infty$$

Podemos aplicar la Desigualdad de Hölder a ambos sumandos:

$$\begin{aligned}
(*) &\leq \|f\|_p \cdot \left\| |f+g|^{p-1} \right\|_{p^*} + \|g\|_p \cdot \left\| |f+g|^{p-1} \right\|_{p^*} = (\|f\|_p + \|g\|_p) \cdot \left\| |f+g|^{p-1} \right\|_{p^*} = \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p) \cdot \left( \int_X |f+g|^{p^*(p-1)} d\mu \right)^{\frac{1}{p^*}} = (\|f\|_p + \|g\|_p) \cdot (\|f+g\|_p^p)^{\frac{1}{p^*}} = \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p) \cdot \|f+g\|_p^{p-1}
\end{aligned}$$

Así,  $\|f+g\|_p^p \leq (*) \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \cdot \|f+g\|_p^{p-1}$ . Despejando,

$$\|f+g\|_p^{p-(p-1)} = \|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

### 3.2.6 Definición de espacio vectorial seminormado

Un  $K$ -espacio vectorial  $V$  se dice “seminormado” si existe una aplicación  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  (llamada “seminorma de  $V$ ”) que cumple las siguientes condiciones:

- i)  $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \quad \forall \lambda \in K \quad \forall v \in V$ .
- ii)  $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in V$ .

Nótese que como consecuencia de (i) se cumple  $\|0_V\| = 0$ .

En vista del resultado anterior, es claro que los  $\mathcal{L}_p(X)$  son espacios vectoriales seminormados para  $1 \leq p \leq \infty$ .