Álgebra Lineal y Geometría I

Apuntes elementales introductorios

Javier Ortín Rodenas

Estos apuntes han sido confeccionados por el alumno un año después de haber cursado la asignatura a la que hacen referencia, pero no recrean los apuntes originales del profesorado. Este documento ha sido escrito desde cero sin consultal el material del equipo docente y sirve como un ejercicio del autor para reflexionar sobre los conocimientos abordados entonces.

Contents

I Espacios vectoriales

§1. Cuerpos

1.1 Definición de operación binaria interna

Sea K un conjunto no vacío, una operación binaria interna es una función que toma dos argumentos de entrada en K y tiene salida también en K. Es decir, diremos que $*$ es una operación binaria interna en K si puede ser definida como:

$$* : K \times K \longrightarrow K \qquad\qquad k_1, k_2 \rightsquigarrow k_1 * k_2$$

1.2 Definición de cuerpo

Sea K un conjunto no vacío. Sean $+$ (suma) y $\cdot *$ (multiplicación) dos operaciones binarias internas en K. Diremos que $(K, +, \cdot)$ tiene estructura de cuerpo si cumple todos los siguientes requisitos:

i) Existe un elemento neutro para la suma; es decir, al sumarlo a cualquier elemento de K no altera el resultado:

$$\exists\, 0_K \in K : k + 0_K = k \quad \forall k \in K$$

ii) Todo elemento de K tiene un opuesto para la suma:

$$\forall k \in K \quad \exists - k \in K \quad : \quad k + (-k) = 0_K$$

iii) Existe un elemento neutro para la multiplicación:

$$\exists\, 1_K \in K : k \cdot 1_K = k \quad \forall k \in K$$

iv) Para todo elemento de K salvo 0_K existe un inverso para la multiplicación:

$$\forall k \in K \backslash \{0_K\} \quad \exists\, k^{-1} : k \cdot k^{-1} = 1_K$$

v) La suma y la multiplicación son conmutativas:

$$\forall k_1, k_2 \in K \text{ se verifica:} \qquad k_1 + k_2 = k_2 + k_1 \qquad k_1 \cdot k_2 = k_2 = k_1$$

vi) La multiplicación es distributiva respecto de la suma:

$$\forall k_1, k_2, k_3 \in K: \ \ k_1 \cdot (k_2 + k_3) = k_1 \cdot k_2 + k_1 \cdot k_3$$

En vista de esta definición, es claro que $(\mathbb{R}, +, \cdot\ )$ forma un cuerpo para la suma y multiplicación usuales para los números reales. Estas mismas operaciones definen también un cuerpo para los números complejos $\mathbb{C}$. Veamos algunos ejemplos y contraejemplos de esta definición.

1.3 Números racionales

Consideramos la suma y el producto usual en el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$. Cabe preguntarse si tiene estructura de cuerpo. Veamos que en efecto es así:

Por definición, $\mathbb{Q}$ está formado por divisiones de números enteros, luego podemos expresarlo de la siguiente forma:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \right\}$$

Sea $a \in \mathbb{Q}$ cualquiera, podemos reescribir $a = \frac{p}{q}$ para $p, q \in \mathbb{Z}$. Para hallar el opuesto a a basta tomar $-a = \frac{-p}{q}$ pues se cumple:

$$a + (-a) = \frac{p}{q} + \frac{-p}{q} = \frac{p-p}{q} = 0$$

Además, es claro que $-a \in \mathbb{Q}$ pues se cumple:

$$a = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \rightarrow p, q \in \mathbb{Z} \Rightarrow -p, q \in \mathbb{Z} \Rightarrow -a = \frac{-p}{q} \in \mathbb{Q}$$

Supongamos ahora que $a \neq 0$; de este modo, $p \neq 0$. Así, bastaría tomar $a^{-1} = \frac{q}{p}$ inverso de a bien definido.

$$a \cdot a^{-1} = \frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p} = \frac{p \cdot q}{p \cdot q} = 1 \qquad \text{Es en efecto su inverso}$$

Además, al ser a un número racional, p y q han de ser números enteros luego a^{-1} ha de ser también racional por definición.

Por todo lo anterior, $\mathbb{Q}$ cuenta con opuestos e inversos dentro del propio conjunto. La conmutatividad y la distributivad son propiedades triviales del producto y la suma usual. Concluimos que tiene estructura de cuerpo.

1.4 Núeros naturales y enteros

Los números naturales no forman un cuerpo, pues no tienen opuesto para la suma. Por ejemplo, el opuesto del natural 5 es el número -5, que no pertenece a $\mathbb{N}$.

Aunque sí existen los opuestos para la suma en $\mathbb{Z}$, no es posible hallar inversos para el producto usual. Por ejemplo, el inverso del entero 2 es $\frac{1}{2}$, que no pertenece al conjunto de los números enteros.

1.5 Conjuntos de matrices

Ejercicio: Halla un conjunto de matrices que tenga estructura de cuerpo

El conjunto de matrices cualesquiera de números reales no es un cuerpo, pues no es posible sumar matrices de distinta dimensión (entendiendo por suma de matrices la suma término a término). Por tanto, si buscamos encontrar un conjunto de matrices que sí sea un cuerpo va a ser necesario considerar un conjunto en el que todas ellas tengan una misma dimensión dada.

No obstante, esto no es suficiente para que el conjunto sea un cuerpo, pues la multiplicación usual de matrices exige que el número de columnas de la primera matriz sea igual al número de columnas de la segunda. Al imponer también esta condición, es claro que el conjunto de matrices que buscamos ha de ser (como máximo) el de las matrices cuadradas de un cierto tamaño cualquiera.

Sea $n \in \mathbb{N}$ cualquiera, introducimos la siguiente notación:

$$M_n(\mathbb{R}) = \{A : A \text{ es una matriz } n \times n \text{ con coeficientes en } \mathbb{R}\}$$

Este conjunto no tiene estructura de cuerpo pues no todas las matrices cuadradas son invertibles. Para que así fuera, tendríamos que exigir que fuesen invertibles; es decir, que tengan determinante no nulo. Nótese que es necesario hacer una excepción para la matriz nula y poder tener así un elemento neutro de la suma.

Incluso habiendo exigido todas estas restricciones contamos aún con problemas. La multiplicación de matrices puede no ser conmutativa. Veamos un contraejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Un ejemplo de matrices que conmutan y son cerradas para el producto y la suma son las matrices diagonales. No obstante, si queremos que el conjunto tenga también determinante no nulo pueden ocurrir complicaciones:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las dos matrices sumando tienen determinante no nulo, pero no es el caso de la tercera. Esto ocurre al aparecer filas nulas en un resultado que no es la matriz nula (elemento neutro de la suma). Para solventar este problema, podemos exigir que todos los escalares de la diagonal deban de valer lo mismo. De este modo, si apareciese alguna fila nula al sumar o multiplicar matrices, el resultado ha de ser necesariamente la matriz nula (que sí está ”permitida”).

Por todo lo anterior, concluimos que el conjunto de matrices diagonales $n \times n$ con coeficientes reales idénticos tiene estructura de cuerpo:

$$\{\lambda\, \mathrm{Id}_n : \ \ \lambda \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} \quad : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

De hecho, como hemos comprobado anteriormente que $\mathbb{Q}$ es un cuerpo, podemos considerar también las matrices con coeficientes diagonales idénticos en $\mathbb{Q}$ (o en cualquier otro cuerpo K).

1.6 Proposición: Unicidad del elemento neutro

Sea $(K, +, \cdot\,)$ un cuerpo cualquiera. Los elementos neutros 0_K y 1_K son únicos.

Demostración: Supongamos que existe más de uno para ver que son iguales

Veamos que el elemeneto neutro de la suma es único (el procedimiento para la multiplicación es análogo). Supongamos que existen dos elementos neutros de la suma en K: 0_k y $\hat{0}_K$.

Por ser $\hat{0}_K$ elemento neutro, $0_K = 0_K + \hat{0}_K$

Como 0_K es también elemento neutro, $\hat{0}_K = \hat{0}_K + 0_K$

Finalmente, como la suma ha de ser conmutativa pues K es un cuerpo, se tiene:

$$0_K = 0_K + \hat{0}_K = \hat{0}_K + 0_K = \hat{0}_K$$

Por todo lo anterior, concluimos que el elemento neutro es único.

§2. Introducción a los espacios vectoriales

1.7 Definición de espacio vectorial

El concepto de espacio vectorial depende del de cuerpo, pues todo espacio vectorial está asociado a un cuerpo determinado. Sea $(K, + \cdot)$ un cuerpo cualquiera, sea V un conjunto no vacío. Para que V sea un K-espacio vectorial ha de ser cerrado respecto de la suma de vectores y respecto del producto por escalares; es decir:

i) Cerrado para la suma de vectores: $\forall v, w \in V \ : v + w \in V$

ii) Cerrado para el producto por escalares: $\forall v \in V \ \forall \lambda \in K \ \lambda v \in V$

Como alternativa, basta comprobar únicamente que se cumpla la siguiente condición:

$\hat{i})$ $\forall v, w \in V \quad \forall \alpha, \beta \in K \ : \ \alpha v + \beta w \in V$

Finalmente, las operaciones de suma de vectores y producto por escalares han de cumplir los ocho siguientes axiomas:

E.1) La suma es conmutativa: $v + w = w + v \quad \forall v, w \in V$

E.2) La suma es asociativa: $u + (v + w) = (u + v) + w \quad \forall u, v, w \in V$

E.3) Existencia del elemento neutro: $\exists 0_V \in V : v + 0_V = v \quad \forall v \in V$

E.4) Existencia de los opuestos: $\forall v \in V \ \exists -v \in V : v + (-v) = 0_V$

E.5) El producto por escalares es asociativo: $\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha \cdot \beta) \cdot v \ \forall \alpha, \beta \in K \ \forall v \in V$

E.6) Elemento neutro del producto por escalares: $\exists \, e \in K : ev = v \ \ \forall v \in V$

E.7) Distributividad respecto de la suma vectorial:
$\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w \ \ \forall \lambda \in K \ \ \forall v, w \in V$

E.8) Distributividad respecto de la suma escalar:
$(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v \ \ \forall \alpha, \beta \in K \ \ \forall v \in V$

En los ejercicios prácticos de esta asignatura los ocho axiomas suelen cumplirse trivialmente, por lo que basta comprobar que V sea cerrado para la suma y para el producto por escalares, además de ser un conjunto no vacío.

Nótese que con los contenidos vistos hasta ahora los vectores no se multiplican entre sí, sino que únicamente se suman vectores cuantificados por escalares (estos últimos actúan como "pesos" o "coeficientes" de los primeros).

Por las definiciones de cuerpo y de espacio vectorial es evidente que todo cuerpo es un espacio vectorial sobre sí mismo. Veamos otros ejemplos no tan triviales.

1.8 Matrices como espacio vectorial

Sea K un cuerpo, sean $n, m \in \mathbb{N}$ cualesquiera, el conjunto de matrices $n \times m$ con coeficientes en K es un K-espacio vectorial. Introducimos la siguiente notación:

$$M_{n,m}(K) = \{A : A \text{ es un matriz } n \times m \text{ con coeficientes en } K\}$$

En este caso, los escalares serían los elementos de K, mientras que los vectores serían las matrices de $M_{n,m}(K)$. Veamos que es en efecto un espacio vectorial.

En primer lugar, consideramos la suma de matrices como la suma término a término. Al haber fijado la dimensión $n \times m$, esta operación está bien definida. Además, la suma de matrices $n \times m$ da luegar también a una matriz $n \times m$. Finalemnte, como K es un cuerpo, la suma de elementos de K es también un elemento de K. Por tanto, el resultado de sumar dos matrices de $M_{n,m}(K)$ es también una matriz de $M_{n,m}(K)$.

De manera simlar, el producto por escalares no afecta a la dimensión del resultado, y al ser K un cuerpo el producto es una operación binaria interna. De este modo, $M_{n,m}(K)$ es cerrado respecto del producto por escalares de K. Por todo lo anterior, $M_{n,m}(K)$ es un K-espacio vectorial.

1.9 Polinomios como espacio vectorial

Sea K un cuerpo, sea $K[X]$ el conjunto de polinomios en la variable X con coeficientes en K, veamos que es un K-espacio vectorial. Sean $p, q \in P[K]$, supongamos que p es de grado n y q de grado m para ciertos $n, m \in \mathbb{N}$. Por tanto, podemos expresarlos de la siguiente forma para ciertos $a_i, b_i \in K$:

$$p = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$$
$$q = b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + \ldots + b_1 X + b_0$$

En este caso, realizaremos una única comprobación. Sean $\alpha, \beta \in K$, definimos $N := \max\{n, m\}$. De este modo:

$$\begin{aligned} \alpha p + \beta q = (\alpha a_N + \beta b_N) X^N + \ldots (\alpha a_1 + \beta b_1) X + (\alpha a_0 + \beta b_0) = \\ = c_N X^N + \ldots + c_1 X + c_0 \quad \text{para } c_i = \alpha a_i + \beta b_i \end{aligned}$$

Como K es un cuerpo y $\alpha, \beta, a_i, b_i \in K$, los c_i también pertenecen a K. Por tanto, tenemos que $\alpha p + \beta q \in K[X]$ luego $K[X]$ es un K-espacio vectorial. Cabe preguntarse si existen subconjuntos de $K[X]$ que sean también espacios vectoriales.

Sea $n \in \mathbb{N}$ cualquiera, consideremos el conjunto de polinomios de $K[X]$ de grado mayor o igual que n. Este conjunto no es un espacio vectorial, pues no es cerrado para la suma. Por ejemplo, para $n = 3$ y $K = \mathbb{R}$ tenemos:

$$(X^4 + 2X^3 + 3X) + (-X^4 - 2X^3 + 2) = 3X + 2 \quad \text{que tiene grado } 1 < 3$$

Además, este conjunto no cumple con el axioma E.3) de la definición de espacio vectorial, pues el elemento neutro de la suma es el polinomio nulo, que no pertenece a este conjunto al tener grado 0.

El cojnunto de polinomios de $K[X]$ con grado menor o igual que n sí es un espacio vectorial, y se denota $K_n[X]$. La demostración es idéntica a la vista para $K[X]$ notando que los polinomios p y q serían ambos de grado menor o igual que n luego bastaría tomar $N = n$.

1.10 Funciones como espacio vectorial