

# Análisis Matemático III

Javier Ortín Rodenas

Curso 2025-2026

# Contenidos

|  |          |
|--|----------|
| <b>II Integral de Lebesgue</b>   | <b>3</b> |
| 1. Integral de Lebesgue para funciones no negativas . . . . .                                  | 3        |
| 2.1.1 Convenio $0 \cdot \infty$ . . . . .  | 3        |
| 2.1.2 Definición de integral de funciones simples . . . . .                                    | 3        |
| 2.1.3 Linealidad del integrando . . . . .  | 4        |
| 2.1.4 Linealidad parcial . . . . .   | 4        |
| 2.1.5 Monotonía de la integral simple . . . . .  | 5        |
| 2.1.6 Linealidad de la integral simple por constantes . . . . .                                | 5        |
| 2.1.7 Integral de funciones medibles no negativas . . . . .                                    | 6        |
| 2.1.8 Ejemplos de integrales . . . . .   | 6        |
| 2.1.9 Propiedades básicas . . . . .  | 7        |
| 2.1.10 Teorema de la convergencia monótona . . . . .   | 9        |
| 2.1.11 Integral de la suma . . . . .   | 10       |
| 2.1.12 Integrales en conjuntos disjuntos . . . . .   | 10       |
| 2.1.13 Lema de Fatou . . . . .   | 11       |
| 2.1.14 Definición de igualdad en casi todo punto . . . . .                                     | 11       |
| 2.1.15 Medibilidad de funciones iguales en casi todo punto . . . . .                           | 12       |
| 2.1.16 Integral de funciones iguales en casi todo punto . . . . .                              | 12       |
| 2.1.17 Integral de funciones nulas en casi todo punto . . . . .                                | 12       |
| 2. Integral de Lebesgue para funciones $f : x \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . . . . . | 14       |
| 2.2.1 Funciones integrables y sumables . . . . .   | 14       |
| 2.2.2 Desigualdad triangular . . . . .   | 14       |
| 2.2.3 Definición de conjunto de funciones sumables . . . . .                                   | 15       |
| 2.2.4 Teorema de estructura de $\mathcal{L}_1$ . . . . .                                       | 15       |
| 2.2.5 Integral de funciones sumables en conjuntos disjuntos . . . . .                          | 16       |
| 2.2.6 Funciones $\mu$ -a.e. a sumables en $\mathcal{L}_1$ . . . . .                            | 17       |
| 2.2.7 Teorema de Convergencia Dominada . . . . .   | 17       |
| 3. Cálculo de la integral de Lebesgue en $\mathbb{R}$ . . . . .                                | 19       |
| 2.3.1 Equivalencia de las integrales de Riemann y Lebesgue . . . . .                           | 19       |
| 2.3.2 Definición de función localmente integrable . . . . .                                    | 21       |
| 2.3.3 Medibilidad de funciones localmente integrables . . . . .                                | 22       |
| 2.3.4 Integral de Lebesgue e integral impropia de Riemann . . . . .                            | 22       |
| 2.3.5 Ejemplo de no equivalencia . . . . .   | 23       |
| 2.3.6 Definición de integral impropia de Lebesgue . . . . .                                    | 24       |
| 2.3.7 Derivación bajo el signo integral . . . . .  | 24       |
| 2.3.8 Integrales de funciones de componentes en $\mathbb{R}^2$ . . . . .                       | 26       |

# II Integral de Lebesgue

## §1. Integral de Lebesgue para funciones no negativas

### 2.1.1 Convenio $0 \cdot \infty$

Consideramos  $0 \cdot \infty = 0$  siempre y cuando al menos uno de los dos factores represente la medida de algún conjunto.

### 2.1.2 Definición de integral de funciones simples

Dado un espacio de medida  $(X, \Sigma, \mu)$  y una función simple medible

$$s : X \longrightarrow [0, +\infty) \quad \text{con expresión canónica } s = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_{A_i}$$

Definimos la integral de Lebesgue de  $s$  sobre  $X$  como el número:

$$\int_X s \, d\mu = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \mu(A_i)$$

**Nota:** Implícitamente, ya está definida la integral de  $s$  sobre  $\Sigma(E) \, \forall E \in \Sigma$ :

$$\int_E s \, d\mu = \int_X s|_E \, d\mu = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \mu(E \cap A_i)$$

### 2.1.3 Linealidad del integrando

Dado un espacio de medida  $(X, \Sigma, \mu)$ . Sea  $s : X \rightarrow [0, \infty)$  una función simple y medible. Sean  $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  con  $i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \emptyset$ . Entonces, se cumple:

$$\int_{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i} s \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} s \, d\mu$$

**Demostración:** Sea  $s = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot X_{A_i}$  la expresión canónica de  $s$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \int_{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i} s \, d\mu &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \mu\left(A_i \cap \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_i \cap E_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_i \cdot \mu(A_i \cap E_j) \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \mu(A_i \cap E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} s \, d\mu \end{aligned}$$

### 2.1.4 Linealidad parcial

Sea  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida. Sean  $s, t : X \rightarrow [0, \infty)$  funciones simples y medibles. Entonces, se cumple:

$$\int_X s + t \, d\mu = \int_X s \, d\mu + \int_X t \, d\mu$$

**Demostración:** Sean sus expresiones canónicas las siguientes:

$$s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mu(A_i) \qquad t = \sum_{j=1}^m \beta_j \cdot \mu(B_j)$$

Entonces, como  $\{A_i\}_{i=1}^n$  y  $\{B_j\}_{j=1}^m$  son recubrimientos disjuntos de  $X$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \int_X s \, d\mu &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^m \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \alpha_i \cdot \mu(A_i \cap B_j) \\ \int_X t \, d\mu &= \sum_{j=1}^m \beta_j \sum_{i=1}^n \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \beta_j \cdot \mu(A_i \cap B_j) \end{aligned}$$

Sumando ambas expresiones obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_X s \, d\mu + \int_X t \, d\mu &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} (\alpha_i + \beta_j) \cdot \mu(A_i \cap B_j) = \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \int_{A_i \cap B_j} s + t \, d\mu = \int_X s + t \, d\mu \end{aligned}$$

La última igualdad se deduce de la linealidad del integrando.

### 2.1.5 Monotonía de la integral simple

Sea  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida. Sean  $s, t : X \rightarrow [0, \infty)$  funciones medibles simples tales que  $s(x) \leq t(x) \forall x \in X$ . Entonces, se cumple:

$$\int_X s \, d\mu \leq \int_X t \, d\mu$$

**Demostración:** Sean sus expresiones canónicas:  $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot X_{A_i}$   $t = \sum_{j=1}^m \beta_j \cdot X_{B_j}$ .

$$\int_X s \, d\mu = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) \quad \int_X t \, d\mu = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \beta_j \mu(A_i \cap B_j)$$

Por hipótesis, tenemos que  $s(x) \leq t(x)$  para todo  $x \in X$ . De este modo; sean  $i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}$  cualesquiera, tenemos que o bien  $\alpha_i \leq \beta_j$  o bien  $A_i \cap B_j = \emptyset \Rightarrow \mu(A_i \cap B_j) = 0$ . Por tanto, cada sumando del sumatorio de la izquierda va a ser menor o igual que el término de mismos índices del sumatorio de la derecha, hemos demostrado el resultado.

### 2.1.6 Linealidad de la integral simple por constantes

Sea  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida. Sea  $s = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot X_{A_i}$  una función simple, medible y no negativa. Entonces:

$$\int_X c \cdot s \, d\mu = c \cdot \int_X s \, d\mu \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

**Demostración:** Distinguimos dos casos:

- Si  $c = 0$ , entonces  $s \cdot c \equiv 0$  y se cumple:

$$\int_X c \cdot s \, d\mu = \int_X 0 \, d\mu = 0 \cdot \mu(X) = 0 = 0 \cdot \int_X s \, d\mu$$

- Si  $c \neq 0$ , entonces:

$$\int_X c \cdot s \, d\mu = \sum_{i=1}^n c \cdot \lambda_i \cdot X_{A_i} = c \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \mu(X_{A_i}) = c \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \mu(A_i) = c \cdot \int_X s \, d\mu$$

### 2.1.7 Integral de funciones medibles no negativas

Sea  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida. Sea  $f : X \rightarrow [0, +\infty]$  medible. Se define la integral de Lebesgue de  $f$  sobre  $X$  como:

$$\int_X f \, d\mu = \sup \left\{ \int_X s \, d\mu \mid 0 \leq s \leq f, s \text{ función simple medible} \right\} = \sup \mathcal{S}_X(f)$$

Nótese que el conjunto anterior no es vacío, pues  $s \equiv 0$  está en él. Además, se puede extender la definición anterior a cualquier subconjunto medible de  $X$ .

### 2.1.8 Ejemplos de integrales

i) Función de Dirichlet:  $X_{\mathbb{Q}}$ .

Consideramos el espacio de medida  $([0, 1], \mathfrak{M}_1([0, 1]), \mu_1)$ . Esta función no es integrable en el sentido de Riemann, pues las sumas inferiores son siempre nulas y las superiores toman valor 1 (se debe a la densidad de los racionales y los irracionales). Veamos que  $X_{\mathbb{Q}}$  sí es integrable en el sentido de Lebesgue.

Tenemos que  $X_{\mathbb{Q}}$  es una función simple, pues toma el valor 1 en  $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ , que es numerable, y el valor 0 en  $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ , que es medible al ser el complementario del conjunto anterior en este espacio de medida. Su integral viene dada por:

$$\int_{[0,1]} X_{\mathbb{Q}} \, d\mu = 1 \cdot \mu([0, 1] \cap \mathbb{Q}) + 0 \cdot \mu([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

ii) Consideramos el mismo espacio de medida que en el caso anterior. Veamos que la función de Thomae es integrable. Se define como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \cup \{0\} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ para } p, q \text{ naturales primos entre sí} \end{cases}$$

Sabemos por Análisis Matemático II que esta función es integrable-Riemann en  $[0, 1]$  con valor de su integral igual a 0. Veamos que ocurre lo mismo con la integral de Lebesgue. Sea  $s$  una función simple medible tal que  $0 \leq s \leq f$ . Se cumple  $M := \max s([0, 1]) \leq 1$ . Los puntos donde  $s$  toma valores positivos son a lo sumo numerables, pues se cumple:

$$f^{-1}((0, +\infty)) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{i=1}^n \frac{i}{n}$$

Los puntos donde  $s$  toma valores positivos han de estar contenidos en el conjunto anterior, que es numerable y tiene por tanto medida nula. De este modo, tenemos:

$$0 \leq \int_{[0,1]} s \, d\mu = 0\mu(s^{-1}(\{0\})) + M \cdot \mu(s^{-1}((0, M])) = 0$$

### 2.1.9 Propiedades básicas

Sea  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida. Sean  $f, g : X \leftarrow [0, \infty]$  funciones medibles. Sean  $E, F \in \Sigma$ . Sea  $c \in [0, +\infty)$ . Se cumplen los siguientes enunciados:

- i)  $0 \leq f \leq g \Rightarrow \int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$
- ii)  $\int_X c f \, d\mu = c \cdot \int_X f \, d\mu$
- iii)  $f \equiv 0 \Rightarrow \int_X f \, d\mu = 0$
- iv)  $\mu(E) = 0 \Rightarrow \int_E f \, d\mu = 0$
- v) Si  $E \subseteq F$ ; entonces,  $\int_E f \, d\mu = \int_D f \cdot X_E \, d\mu$  y  $\int_E f \, d\mu \leq \int_D f \, d\mu$

#### **Demostración:**

i) Sea  $s : X \rightarrow [0, +\infty)$  una función simple medible tal que  $s \leq f$ . Entonces se

cumple  $s \leq g$ . Por tanto, siguiendo la notación del resultado 2.1.7, tenemos que  $\mathcal{S}_X(f) \subseteq \mathcal{S}_X(g)$  luego ha de cumplirse:

$$\int_X f d\mu = \sup \mathcal{S}_X(f) \leq \sup \mathcal{S}_X(g) = \int_X g d\mu$$

ii) Distinguimos dos casos: En primer lugar, si  $c = 0$  se tiene:

$$\int_X c \cdot f d\mu = \int_X 0 d\mu = 0 = 0 \cdot \int_X f d\mu$$

Si  $c \in (0, +\infty)$ ; entonces, tenemos:

$$c \cdot \int_X f d\mu = c \cdot \sup \left\{ \int_X s d\mu : 0 \leq s \leq f \text{ con } s \text{ función medible simple} \right\} = \sup c \cdot \mathcal{S}_X(f)$$

$$\int_X c \cdot f d\mu \sup \left\{ \int_X s d\mu : 0 \leq t \leq c \cdot f \text{ con } t \text{ función medible simple} \right\} = \sup \mathcal{S}_X(c \cdot f)$$

Al cumplirse  $c \in (0, +\infty)$ , tenemos que  $0 \leq f \leq s \iff 0 \leq c \cdot s \leq c \cdot f$  luego las integrales han de coincidir.

iii iv) Trivial.

v) Comencemos por ver la primera parte. Sea una función simple y medible  $s : F \rightarrow [0, +\infty)$  tal que  $s \leq f \cdot X_E$ . Entonces se tiene  $s|_E$  es simple también. Además, se cumple:

$$\int_F s d\mu = \int_E s|_E d\mu + \int_{F \setminus E} 0 d\mu = \int_E s|_E d\mu$$

De manera similar, sea  $t : E \rightarrow [0, +\infty)$  simple tal que  $t \leq f$ , podemos extender  $t$  a  $F$  al considerar  $\hat{t}(x) = t(x)$  si  $x \in E$  ó 0 si  $x \in F \setminus E$ . La función resultante  $\hat{t}$  es simple, medible y cumple  $\hat{t} \leq f \cdot X_E$ . De este modo,

$$\int_F \hat{t} d\mu = \int_{F \setminus E} 0 d\mu + \int_E \hat{t} d\mu = \int_E t d\mu$$

Por tanto, se cumple  $\mathcal{S}_E(f) = \mathcal{S}_F(f \cdot X_E)$  luego las integrales coinciden.



Este razonamiento de extender  $t$  a  $\hat{t}$  demuestra también que  $\mathcal{S}_E(f) \subseteq \mathcal{S}_F(f)$  luego por definición de supremo, se tiene:

$$\int_E f d\mu = \sup \mathcal{S}_E(f) \leq \sup \mathcal{S}_F(f) = \int_F f d\mu$$

Se cumple también la segunda parte.

### 2.1.10 Teorema de la convergencia monótona

Dado un espacio de medida  $(X, \Sigma, \mu)$ . Sea  $\{f_n : X \rightarrow [0, +\infty]\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones medibles tales que:

$$\forall x \in X \quad \forall n \in \mathbb{N} : f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$$

Entonces, existe el límite de la integrales y coincide con la integral de la función límite:

$$\lim_n \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_n f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

#### Demostración:

Como  $f_n \leq f_{n+1}$  por hipótesis para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Aplicando la monotonía de la integral, tenemos:

$$\int_X f_n d\mu \leq \int_X f_{n+1} d\mu \Rightarrow \exists \lim_n \int_X f_n d\mu = \alpha \in [0, +\infty]$$

Al ser una sucesión monótona, o bien converge o diverge. Es por ello que podemos garantizar la existencia del límite,  $\alpha$ .

Como  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty}$  de manera creciente para todo  $x \in X$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$  tenemos  $f_n \leq f \Rightarrow \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu \Rightarrow \alpha \leq \int_X f d\mu$ . Queda demostrar  $\int_X f d\mu \leq \alpha$ . Para ello, sea  $s : X \rightarrow [0, +\infty]$  una función simple y medible con  $s \leq f$ , basta ver que  $\int_X s d\mu \leq \alpha$ .

Sea  $c \in [0, 1)$ . Para cada  $x \in X$  existe  $n_x \in \mathbb{N}$  tal que  $c \cdot s(x) \leq f_n(x) \leq f(x) \quad \forall n \geq n_x$ . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $s(x) = \infty$  para aquellos  $x$  con  $f(x) = \infty$  para que se cumpla el razonamiento anterior. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , consideramos el siguiente conjunto:

$$E_n := \{x \in X : c \cdot s_x \leq f_k(x) \leq f(x) \quad \forall k \geq n\} \in \Sigma$$

Al ser  $s, f_n, f$  medibles, podemos garantizar que  $E_n$  es medible. Por definición, es claro que  $E_n \subseteq E_{n+1}$ . Además, se tiene  $x \in X \Rightarrow x \in E_{n_x} \Rightarrow X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ .

Sea  $s = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot X_{A_i}$  la expresión canónica de  $s$ , se cumple:

$$\int_{E_n} c \cdot s \, d\mu \leq \int_{E_n} f_n \, d\mu \leq \int_{E_n} f \, d\mu$$

Pero por definición de integral simple, se cumple:

$$\int_{E_n} c \cdot s \, d\mu = c \cdot \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \mu(E_n \cap A_i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c \cdot \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \mu(A_i) = c \cdot \int_X s \, d\mu$$

De este modo, tomando límites en la desigualdad anterior,  $c \cdot \int_X s \, d\mu \leq \alpha$ . Tomando  $\lim_{c \rightarrow 1^-}$  concluimos que  $\int_X s \, d\mu \leq \alpha$ .

### 2.1.11 Integral de la suma

Sea  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida. Sean  $f, g : X \rightarrow [0, +\infty]$  funciones medibles. Entonces, se cumple:

$$\int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu = \int_X f + g \, d\mu$$

#### Demostración:

Podemos afirmar que existe una colección de funciones simples y medibles  $\{s_n, t_n : X \rightarrow [0, +\infty]\}_{n \in \mathbb{N}}$  tales que para todo  $x \in X$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  se cumpla:

$$s_n(x) \leq s_{n+1}(x) \leq f \quad t_n(x) \leq t_{n+1}(x) \leq g \quad s_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) \quad t_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(x)$$

Entonces, tenemos que  $s_n + t_n \leq s_{n+1} + t_{n+1}$  y además  $(s_n + t_n)(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (f + g)(x)$ . Aplicando el Teorema de la Convergencia Monótona, tenemos:

$$\int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu = \lim_n \int_X s_n \, d\mu + \lim_n \int_X t_n \, d\mu = \lim_n \int_X s_n + t_n \, d\mu = \int_X f + g \, d\mu$$

### 2.1.12 Integrales en conjuntos disjuntos

Sea  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida. Sea  $f : X \rightarrow [0, +\infty]$  una función medible. Sean  $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \Sigma$  con  $i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \emptyset$ . Entonces, se cumple:

$$\int_{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i} f \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f \, d\mu$$

### Demostración:

$$\int_{\bigcup_{i=1}^n E_i} f d\mu = \int_X f \cdot X_{\bigcup_{i=1}^n E_i} d\mu = \int_X \sum_{i=1}^n f \cdot X_{E_i} d\mu \stackrel{2.1.11}{=} \sum_{i=1}^n \int_X f \cdot X_{E_i} d\mu$$

Tomando límites llegamos al resultado:

$$\int_{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i} f d\mu = \int_X \sum_{i=1}^{\infty} f \cdot X_{E_i} d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_X f \cdot X_{E_i} d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f d\mu$$

### 2.1.13 Lema de Fatou

Sea  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida. Sea una sucesión de funciones medibles  $\{f_n : X \rightarrow [0, +\infty]\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Entonces, se cumple:

$$\int_X \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n d\mu$$

### Demostración:

Por definición,  $\liminf_n f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} f_k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$  Para  $g_n$  medible. Además,  $g_n \leq g_{n+1}$ . De este modo **Nota:** En general, la igualdad no tiene por qué cumplirse:

$$f_n = X_{[n, +\infty)} \quad \int_{\mathbb{R}} \liminf_n f_n d\mu_1 = \int_{\mathbb{R}} 0 d\mu_1 = 0 \quad \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu_1 = \infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

### 2.1.14 Definición de igualdad en casi todo punto

Sea  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida. Sean dos funciones  $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Se dice que  $f$  y  $g$  “son iguales en casi todo punto” si  $\exists B \in \Sigma$  con  $\mu(B) = 0$  tal que:

$$\{x \in X : f(x) \neq g(x)\} \subseteq B$$

En tal caso, se denotará como  $f \stackrel{\mu-a.e.}{=} g$  ó  $f = g \mu - a.e.$ , las letras “a.e.” vienen del término inglés “*almost everywhere*”.

### 2.1.15 Medibilidad de funciones iguales en casi todo punto

Sea  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida completo. Sean  $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  funciones tales que  $f \stackrel{\mu-a.e.}{=} g$ . Si  $f$  es medible; entonces,  $g$  es medible también.

**Demostración:**

Sea  $A := \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ . Por hipótesis,  $f \stackrel{\mu-a.e.}{=} g$  luego  $\exists B \in \Sigma$  con  $\mu(B) = 0$  tal que  $A \subseteq B$ . Al ser  $(X, \Sigma, \mu)$  completo por hipótesis, tenemos que  $A \in \Sigma$  también. De este modo, sea  $\alpha \in \mathbb{R}$  cualquiera,

$$\{x \in X : g(x) < \alpha\} = \underbrace{\{x \in X : f(x) < \alpha\} \cap (X \setminus A)}_{\in \Sigma} \cup \underbrace{\{x \in X : g(x) < \alpha\} \cap A}_{\in \Sigma} \in \Sigma$$

El primer subconjunto es medible por ser  $f$  medible por hipótesis. El segundo conjunto es medible al tener también medida nula por ser un subconjunto de  $A$ .

### 2.1.16 Integral de funciones iguales en casi todo punto

Sea  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida. Sean  $f, g : X \rightarrow [0, +\infty]$  funciones medibles. Entonces, se cumple:

$$f \stackrel{\mu-a.e.}{=} g \Rightarrow \int_X f d\mu = \int_X g d\mu$$

**Demostración:** Por ser  $f, g$  medibles,  $A := \{x \in X : f(x) \neq g(x)\} \in \Sigma$ .

Además,  $f \stackrel{\mu-a.e.}{=} g$  luego  $\mu(A) = 0$ . De este modo,

$$\begin{aligned} \int_X f d\mu &= \int_{X \setminus A} f d\mu + \int_A f d\mu = \int_{X \setminus A} f d\mu + 0 = \\ &= \int_{X \setminus A} g d\mu + 0 = \int_{X \setminus A} g d\mu + \int_A g d\mu = \int_X g d\mu \end{aligned}$$

**Nota:** Al definir la integral de Lebesgue para funciones cualesquiera, este resultado será también válido.

### 2.1.17 Integral de funciones nulas en casi todo punto

Sea  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida. Sea  $f : X \rightarrow [0, +\infty]$  una función medible. Entonces,

$$f \stackrel{\mu-a.e.}{=} 0 \iff \int_X f d\mu = 0$$

**Demostración:**

$\Rightarrow$  Se tiene como aplicación directa del resultado anterior.

$\Leftarrow$  Para cada  $n \in \mathbb{N}$  tomamos  $E_n := \{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{n}\}$   $f \overset{\text{medible}}{\in} \Sigma$ .

Sea  $E := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \Sigma$ . Entonces, para cada  $n \in \mathbb{N}$  se cumple:

$$0 \leq \frac{1}{n} \cdot \mu(E_n) = \int_X \frac{1}{n} \cdot X_{E_n} d\mu \leq \int_{E_n} f d\mu \leq \int_X f d\mu = 0$$

Por tanto,  $\mu(E_n) = 0$  luego  $\mu(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = 0 \Rightarrow f \overset{\mu\text{-a.e.}}{=} 0$ .

**Nota:**

$\Rightarrow$  La implicación es válida para  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ .

$\Leftarrow$  Es necesario exigir  $f \geq 0$ . Por ejemplo,  $\int_{[0, 2\pi]} \sin(x) d\mu(x) = 0$ .

## §2. Integral de Lebesgue para funciones $f : x \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$

### 2.2.1 Funciones integrables y sumables

Sea  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida. Sea  $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$  medible. Diremos que “ $f$  es integrable sobre  $X$ ” si cumple cualquiera de las siguientes dos condiciones:

$$\int_X f^+ d\mu < \infty \qquad \int_X f^- d\mu < \infty$$

Si  $f$  cumple simultáneamente ambas condiciones, diremos que “ $f$  es sumable” (toda función sumable es integrable). En cualquier caso, podemos definir la integral de  $f$  sobre  $X$  como:

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

Nótese que como consecuencia inmediata de las definiciones anteriores, los siguientes enunciados son equivalentes:

- i)  $f$  sumable
- ii)  $f^+$  y  $f^-$  sumables
- iii)  $|f|$  sumable
- iv)  $\int_{\mathbb{R}} f d\mu \in \mathbb{R}$
- v)  $\int_{\mathbb{R}} |f| d\mu \in \mathbb{R}$

### 2.2.2 Desigualdad triangular

Dado un espacio de medida  $(X, \Sigma, \mu)$ . Sea  $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$  integrable. Se cumple:

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu$$

**Demostración:** Basta aplicar la desigualdad triangular de los números reales

$$\begin{aligned} \left| \int_X f d\mu \right| &= \left| \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \right| \leq \left| \int_X f^+ d\mu \right| + \left| \int_X f^- d\mu \right| = \\ &= \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu = \int_X |f| d\mu \end{aligned}$$

### 2.2.3 Definición de conjunto de funciones sumables

Sea  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida. Denotaremos al conjunto de funciones sumables  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  como  $\mathcal{L}_1$  o como  $\mathcal{L}_1(X, \Sigma, \mu)$ . Sea  $E \in \Sigma$ , utilizaremos la siguiente notación abreviada:  $\mathcal{L}_1(E) = \mathcal{L}_1(E, \Sigma(E), \mu|_{\Sigma(E)})$ .

### 2.2.4 Teorema de estructura de $\mathcal{L}_1$

Sea  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida, se cumple:

- i)  $\mathcal{L}_1$  es un espacio vectorial.
- ii)  $\int_X : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathbb{R} \quad f \mapsto \int_X f d\mu$  es una aplicación lineal.

#### Demostración:

i) Sean  $f, g \in \mathcal{L}_1$ . Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Veamos que  $\alpha \cdot f + \beta \cdot g \in \mathcal{L}_1$ .

$$\left| \int_X \alpha \cdot f + \beta \cdot g d\mu \right| \leq \int_X |\alpha \cdot f + \beta \cdot g| d\mu = |\alpha| \int_X |f| d\mu + |\beta| \int_X |g| d\mu \in \mathbb{R}$$

ii) Sean  $\lambda \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{L}_1$ . Veamos que  $\int_X \lambda \cdot f d\mu = \lambda \cdot \int_X f d\mu$ . Distinguiremos tres casos:

- Si  $\lambda = 0$ ,  $\int_X \lambda \cdot f d\mu = \int_X 0 d\mu = 0 = 0 \cdot \int_X f d\mu$ .
- Si  $\lambda > 0$ , entonces  $(\lambda f)^+ = \lambda \cdot f^+$  y  $(\lambda f)^- = \lambda \cdot f^-$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_X \lambda f d\mu &= \int_X (\lambda f)^+ d\mu + \int_X (\lambda f)^- d\mu = \lambda \int_X f^+ d\mu - \lambda \int_X f^- d\mu = \\ &= \lambda \left( \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \right) = \lambda \int_X f d\mu \end{aligned}$$

- Si  $\lambda < 0$ , entonces  $(\lambda f)^+ = -\lambda \cdot f^-$  y  $(\lambda f)^- = -\lambda \cdot f^+$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_X \lambda f d\mu &= \int_X (\lambda f)^+ d\mu - \int_X (\lambda f)^- d\mu = -\lambda \int_X f^- d\mu + \lambda \int_X f^+ d\mu = \\ &= \lambda \left( \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \right) = \lambda \int_X f d\mu \end{aligned}$$

Sean  $f, g \in \mathcal{L}_1$ , veamos que  $\int_X f + g \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu$ .

Despejamos para reescribir las partes positiva y negativa de  $f + g$  según las de  $f$  y las de  $g$ :

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f+g = f^+ - f^- + g^+ - g^- \Rightarrow (f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$$

De este modo, se cumple:

$$\begin{aligned} \int_X (f+g)^+ \, d\mu + \int_X f^- \, d\mu + \int_X g^- \, d\mu &= \int_X (f+g)^- \, d\mu + \int_X f^+ \, d\mu + \int_X g^- \, d\mu \Rightarrow \\ \Rightarrow \underbrace{\int_X (f+g)^+ \, d\mu - \int_X (f+g)^- \, d\mu}_{\int_X f+g \, d\mu} &= \underbrace{\int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu}_{\int_X f \, d\mu} + \underbrace{\int_X g^+ \, d\mu - \int_X g^- \, d\mu}_{\int_X g \, d\mu} \end{aligned}$$

Hemos tenido que estructurar esta última parte de la demostración de esta manera al tener que aplicar la linealidad de la integral para funciones no negativas.

## 2.2.5 Integral de funciones sumables en conjuntos disjuntos

Sea  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida. Sea  $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \Sigma$  tal que  $i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \emptyset$ . Sea  $f \in \mathcal{L}_1$ . Entonces, se cumple:

$$\int_{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i} f \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f \, d\mu$$

**Demostración:** Consecuencia del resultado 2.1.12 y de la definición de  $\mathcal{L}_1$ .

$$\begin{aligned} \int_{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i} f \, d\mu &= \int_{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i} f^+ \, d\mu - \int_{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i} f^- \, d\mu = \left( \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f^+ \, d\mu \right) + \left( \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f^- \, d\mu \right) = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left( \int_{E_i} f^+ \, d\mu - \int_{E_i} f^- \, d\mu \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f \, d\mu \end{aligned}$$

Hemos necesitado la hipótesis de  $f$  sumable para poder agrupar los dos sumatorios en uno solo.



### 2.2.6 Funciones $\mu$ -a.e. a sumables en $\mathcal{L}_1$

Dado un espacio de medida  $(X, \Sigma, \mu)$ . Sea  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  con  $f \in \mathcal{L}_1$ . Entonces existe una función  $g \in \mathcal{L}_1$  tal que  $f \stackrel{\mu\text{-a.e.}}{=} g$ .

**Demostración:** Comencemos por aclarar la diferencia entre sumable y  $\mathcal{L}_1$ .

Toda función  $\mathcal{L}_1$  es sumable, pero no al revés. No podemos garantizar que  $f$  sea  $\mathcal{L}_1$ , pues su codominio es  $\overline{\mathbb{R}}$  y no  $\mathbb{R}$ . Por tanto, buscamos una función  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  sumable tal que  $f \stackrel{\mu\text{-a.e.}}{=} g$ .

Por ser  $f$  sumable, los dos siguientes conjuntos tienen medida nula (de no ser así tendríamos que  $\int_A f^+ d\mu = \infty$  ó  $\int_B f^- d\mu = -\infty$ ):

$$A = \{x \in X : f(x) = +\infty\} \quad B := \{x \in X : f(x) = -\infty\}$$

Por ser  $f$  medible, ambos conjuntos son medibles. Basta definir  $g$  como sigue:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X \setminus (A \cup B) \\ 0 & \text{si } x \in A \cup B \end{cases} \Rightarrow g = f \cdot X_{X \setminus (A \cup B)} \text{ medible}$$

De este modo,  $f \stackrel{\mu\text{-a.e.}}{=} g$  y aplicando el resultado 2.1.16 tenemos que  $g$  es sumable luego  $g \in \mathcal{L}_1$ .

### 2.2.7 Teorema de Convergencia Dominada

Dado un espacio de medida  $(X, \Sigma, \mu)$ . Sea una colección de funciones medibles  $\{f_n : X \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$  tales que  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$  para todo  $x \in X$  para cierta función  $f$ . Si existe  $g \in \mathcal{L}_1$  tal que  $|f_n| \leq g \ \forall n \in \mathbb{N}$ . Entonces, se cumple:

- i)  $f \in \mathcal{L}_1$
- ii)  $\left(\int_X |f_n - f| d\mu\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
- iii)  $\int_X f_n d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_X f d\mu$

**Demostración:**

$$i) \ \forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in X : |f_n(x)| \leq g(x) \Rightarrow |f(x)| \leq g(x) \Rightarrow \int_X |f| d\mu \leq \int_X g d\mu < \infty.$$

ii)  $\forall n \in \mathbb{N} : |f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g$  Luego  $f_n + f \in \mathcal{L}_1$ . Despejando,  $2g - |f_n - f| \leq 0$ . Por tanto, estamos en condiciones de aplicar el Lema de Fatou,

$$\int_X \liminf_n 2g - |f_n - f| d\mu \leq \liminf_n \int_X 2g - |f_n - f| d\mu$$

Por hipótesis, sabemos que existe  $\lim_n 2g - |f_n - f| = 2g$  luego podemos pasar del límite inferior al límite en el primer miembro de la desigualdad. Desglosando la integral de la resta como resta de integrales y aplicando las definiciones de límite inferior y superior:

$$\int_X 2g d\mu \leq \liminf_n \left( \int_X 2g d\mu - \int_X |f_n - f| d\mu \right) = \int_X 2g d\mu - \overline{\lim}_n \int_X |f_n - f| d\mu$$

Restando  $\int_X 2g d\mu$  en ambos lados:

$$0 \leq -\overline{\lim}_n \int_X |f_n - f| d\mu \Rightarrow 0$$

iii) Por el apartado anterior, sabemos que  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que que  $\forall n \geq n_0$  se cumple:

$$\left| \int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu \right| \stackrel{(*)}{=} \left| \int_X f - f_n d\mu \right| \stackrel{2.2.2}{\leq} \int_X |f_n - f| d\mu < \varepsilon$$

(\*) Hemos aplicado la linealidad de la integral en  $\mathcal{L}_1$  pues  $f, f_n \in \mathcal{L}_1$ .

## §3. Cálculo de la integral de Lebesgue en $\mathbb{R}$

### 2.3.1 Equivalencia de las integrales de Riemann y Lebesgue

Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:

- i)  $\mu_1(\{x \in X : f \text{ es discontinua en } x\}) = 0$ .
- ii)  $f$  es integrable Riemann; es decir,  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ .

Además, si  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ ; entonces,  $\int_{[a, b]} f d\mu = \int_a^b f$ .

#### **Demostración:**

Al estar acotada,  $\exists M \in [0, +\infty)$  tal que  $|f(x)| \leq M \forall x \in [a, b]$ . Consideramos una sucesión de particiones de  $[a, b]$ ,

$$P_n = \{x_0^n = a < x_1^n < \dots < x_{k_n}^n = b\}$$

de modo que para cada  $n \in \mathbb{N}$   $P_n$  verifica simultáneamente las siguientes condiciones:

$$x_i^n - x_{i-1}^n < \frac{1}{n} \qquad P_n \subseteq P_{n+1}$$

Sea  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $i \in \{1, \dots, k_n\}$ . Introducimos la siguiente notación:

$$M_i^n := \sup \left\{ f(x) : x \in [x_{i-1}^n, x_i^n] \right\} \qquad m_i^n := \inf \left\{ f(x) : x \in [x_{i-1}^n, x_i^n] \right\}$$

De este modo,  $-M \leq m_i^n \leq M_i^n \leq M$ . Además, para cada  $n \in \mathbb{N}$  las dos siguientes funciones son simples y  $\mu_1$ -medibles:

$$s_n := \sum_{i=1}^{k_n} M_i^n \cdot X_{[x_{i-1}^n, x_i^n]} \qquad t_n := \sum_{i=1}^{k_n} m_i^n \cdot X_{[x_{i-1}^n, x_i^n]}$$

Por definición de integral de funciones simples, tenemos que las integrales de  $s_n$  y

$t_n$  son las sumas superior e inferior de Darboux de  $P_n$ , respectivamente. Es decir,

$$\int_{[a,b]} s_n d\mu = \sum_{i=1}^{k_n} M_i^n \cdot \mu([x_{i-1}^n, x_i^n]) = \sum_{i=1}^{k_n} M_i^n \cdot (x_i^n - x_{i-1}^n) = \overline{S}(f, P_n) < \sum_{i=1}^{k_n} M_i^n \cdot \frac{1}{n}$$

$$\int_{[a,b]} t_n d\mu = \sum_{i=1}^{k_n} m_i^n \cdot \mu([x_{i-1}^n, x_i^n]) = \sum_{i=1}^{k_n} m_i^n \cdot (x_i^n - x_{i-1}^n) = \underline{S}(f, P_n) < \sum_{i=1}^{k_n} m_i^n \cdot \frac{1}{n}$$

El conjunto de vértices de todas las particiones  $P_n$  es numerable:

$$V := \{x_i^n : n \in \mathbb{N}, i \in \{1, \dots, k_n\}\}$$

Además, sea  $n \in X$ , por hipótesis, tenemos  $P_n \subseteq P_{n+1}$ . Sea  $x \in [a, b]$ , tenemos  $s_n(x) \geq s_{n+1}(x)$  y  $t_n(x) \leq t_{n+1}(x)$ . Al ser funciones monótonas y acotadas, podemos asegurar que existe su límite. Sean  $s$  y  $t$  los límites de  $s_n$  y  $t_n$ , respectivamente. Sea  $x_0 \in [a, b] \setminus V$ . Veamos que  $f$  es continua en  $x_0$  si y solo si  $s(x_0) = t(x_0)$ .

$$\Rightarrow \quad \text{Por hipótesis, } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Elegimos  $n \in \mathbb{N}$  tal que si  $j \in \mathbb{N}$  es tal que  $x_0 \in (x_{j-1}^n, x_j^n)$  entonces  $(x_{j-1}^n; x_j^n) \subseteq (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ . Así, para cualquier  $x \in (x_{j-1}^n, x_j^n)$  se cumple:

$$f(x_0) - \varepsilon \leq m_j^n \leq f(x) \leq M_j^n \leq f(x_0) + \varepsilon$$

Por tanto,  $0 \leq s(x_0) - t(x_0) \leq s_n(x_0) - t_n(x_0) \leq 2\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ .

$$\Leftarrow \quad \text{Supongamos } s(x_0) = f(x_0) = t(x_0) \text{ para ver } f \text{ continua en } x_0.$$

$$\lim_n s_n(x_0) = s(x_0) = f(x_0) = t(x_0) = \lim_n t_n(x_0)$$

Así, sea  $\varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}$  tal que  $0 \leq s_n(x_0) - t_n(x_0) < \varepsilon$ . Fijamos este  $n$ . Sea  $j \in \{1, \dots, k_n\}$  el único tal que  $x_0 \in (x_{j-1}^n, x_j^n)$ . Tomamos  $\delta > 0$  suficientemente pequeño como para que  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (x_{j-1}^n, x_j^n)$ . De este modo, para  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , se cumple:

$$f(x_0) - \varepsilon < t_n(x_0) = m_j^n \leq f(x) \leq M_j^n = s_n(x_0) < f(x_0) + \varepsilon$$

Tenemos que  $f$  es continua en  $x_0$  por definición.  
Volvamos al problema principal.

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{Supongamos } \mu(\{x \in X : f \text{ es discontinua en } x\}) = 0. \end{array} \right.$$

Denotando  $D$  al conjunto anterior, tenemos que  $\mu(D) = 0 \Rightarrow \mu(D \cap V) = 0$  para  $V$  el conjunto de vértices de las particiones  $P_n$ . De este modo,  $s \stackrel{\mu-a.e.}{=} t \Rightarrow s - t \stackrel{\mu-a.e.}{=} 0$ . Por tanto, aplicando el resultado 2.1.16,

$$0 = \int_{[a,b]} s - t \, d\mu = \int_{[a,b]} \lim_n s_n - t_n \, d\mu \stackrel{TCD}{=} \lim_n \int_{[a,b]} s_n - t_n \, d\mu = \lim_n \overline{S}(f, P_n) - \underline{S}(f, P_n)$$

Según el criterio de Cauchy de integración Riemann, tenemos que  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ .

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{Por el criterio de Cauchy de integración Riemann, podemos} \end{array} \right.$$

suponer que existe  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de particiones de  $[a, b]$  tales que  $\overline{S}(f, P_n) - \underline{S}(f, P_n) < \frac{1}{n}$ . Entonces:

$$0 \leq \int_{[a,b]} s - t \, d\mu = \int_{[a,b]} \lim_n s_n - t_n \, d\mu = \lim_n \int_{[a,b]} s_n - t_n \, d\mu = \lim_n \overline{S}(f, P_n) - \underline{S}(f, P_n) = 0$$

De este modo,  $s \stackrel{\mu-a.e.}{=} f \stackrel{\mu-a.e.}{=} t$  luego al estar en un espacio de medida completo tenemos que  $f$  es medible. Por tanto,

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, P_n) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f \\ \underline{S}(f, P_n) &= \int_{[a,b]} t_n \, d\mu \stackrel{TCD}{=} \int_{[a,b]} t \, d\mu = \int_{[a,b]} f \, d\mu \end{aligned}$$

### 2.3.2 Definición de función localmente integrable

Sea  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Diremos que “ $f$  es localmente integrable en  $A$ ” si  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  para todo  $[a, b] \subseteq A$ . En tal caso, lo denotaremos como  $f \in \mathcal{R}^l(A)$ .

Sean  $-\infty < a < b < +\infty$ , hay cuatro casos básicos:

$$f \in \mathcal{R}([a, +\infty)) \quad f \in \mathcal{R}((-\infty, b]) \quad f \in \mathcal{R}([a, b]) \quad f \in \mathcal{R}((a, b])$$

Por ejemplo, para el primer caso, diremos que  $\int_a^\infty f$  es...

i) Convergente, si  $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f = l \in \mathbb{R}$ .

ii) Divergente, si  $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f \in \{+\infty, -\infty\}$ .

iii) Oscilante, si Convergente, si  $\nexists \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f$ .

Podemos extender estas definiciones para el resto de casos de manera análoga.

### 2.3.3 Medibilidad de funciones localmente integrables

Sea  $f \in \mathcal{R}([a, +\infty))$  (o cualquier caso anterior); entonces,  $f$  es  $\mu_1$ -medible.

#### Demostración:

Por hipótesis,  $\forall n \in \mathbb{N}$  tenemos que  $f \in \mathcal{R}([a, a+n])$ . Aplicando el resultado 2.3.1, tenemos que  $f$  es medible en  $([a, a+n], \mathfrak{M}_1([a, +n]), \mu_1|_{\mathfrak{M}_1([a, a+n])})$ . Esto a su vez equivale a  $f \cdot X_{[a, a+n]}$  medible en  $(\mathbb{R}, \mathfrak{M}_1, \mu_1)$ . Finalmente, como el límite puntual respeta la medibilidad, basta ver que:

$$f \cdot X_{[a, a+n]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \cdot X_{[a, +\infty)}$$

### 2.3.4 Integral de Lebesgue e integral impropia de Riemann

En las siguientes condiciones, la integral de Lebesgue es equivalente a la integral impropia de Riemann:

i)  $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^\infty f = \int_{[a, +\infty)} f d\mu_1$ .

$$ii) \int_a^\infty |f| < \infty \Rightarrow \int_a^\infty f = \int_{[a,+\infty)} f d\mu_1.$$

### **Demostración:**

i) Al ser  $f \geq 0$ , podemos garantizar  $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f \in [0, +\infty]$  pues no puede oscilar. Aplicando la caracterización sucesional del límite, tenemos:

$$\begin{aligned} \int_a^\infty f &= \lim_n \int_a^x f = \lim_n \int_a^{a+n} f \stackrel{2.3.1}{=} \lim_n \int_{[a,a+n]} f d\mu_1 = \lim_n \int_{[a,+\infty)} f \cdot X_{[a,a+n]} d\mu_1 \stackrel{TCM}{=} \\ &= \int_{[a,+\infty)} \lim_n f \cdot X_{[a,a+n]} d\mu_1 = \int_{[a,+\infty)} f d\mu_1 \end{aligned}$$

ii) Supongamos que  $\exists \int_a^\infty f < \infty \Rightarrow \exists \int_a^\infty f < \infty$ . Aplicando el apartado

anterior,

$$\exists \int_{[a,+\infty)} |f| d\mu_1 = \int_a^\infty |f| < \infty \Rightarrow |f|, f \in \mathcal{L}_1([a, +\infty))$$

Por definición de  $\mathcal{L}_1([a, +\infty))$ ,  $\exists \int_{[a,+\infty)} f d\mu_1 \in \mathbb{R}$ . Ahora, aplicando la caracterización sucesional del límite y el Teorema de la Convergencia Dominada:

$$\begin{aligned} \int_a^\infty f &= \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{a+n} f \stackrel{2.3.1}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,a+n]} f d\mu_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,+\infty)} f \cdot X_{[a,a+n]} d\mu_1 \stackrel{TCMD}{=} \\ &= \int_{[a,+\infty)} \lim_{n \rightarrow \infty} f \cdot X_{[a,a+n]} d\mu_1 = \int_{[a,+\infty)} f d\mu_1 \end{aligned}$$

### **2.3.5 Ejemplo de no equivalencia**

Veamos que no siempre se da la equivalencia. Por ejemplo, para la siguiente función  $f$ :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} \cdot X_{[n-1,n)}(x)$$

Veamos que  $f$  no cumple ninguna de las hipótesis del resultado anterior:

$$\int_0^\infty f = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n} < \infty \qquad \int_0^\infty |f| = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} = \infty$$

Tenemos que  $f$  no es no negativa, y que  $|f| \notin \mathcal{L}_1$ . Veamos que  $f$  no es integrable Lebesgue a pesar de sí ser integrable Riemann (impropiamente):

$$\int_0^\infty f^+ = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2n-1} = \infty \qquad \int_0^\infty f^- = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2n} = \infty$$

### 2.3.6 Definición de integral impropia de Lebesgue

Si  $f : [a, +\infty) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$  cumple  $f \notin \mathcal{L}_1([a, +\infty))$  pero  $f \in \mathcal{L}_1([a, x]) \forall x \in (a, \infty)$ . Entonces,  $f$  es medible en  $[a, \infty)$ . Se dice que  $f$  es impropriamente integrable en el sentido de Lebesgue sobre  $[a, \infty)$  si:

$$\exists \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{[a, x]} f d\mu_1 = l \in \overline{\mathbb{R}} \qquad \text{en tal caso, se denota } \int_{[a, +\infty)} f d\mu_1 = l$$

En el ejemplo anterior,  $f$  no es integrable en el sentido usual. Veamos que sí lo es en el impropio:

### 2.3.7 Derivación bajo el signo integral

Sea  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida. Sea  $E \in \Sigma$ . Sea  $f : E \times I \longrightarrow \mathbb{R}$  una función con  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervalo tal que  $\forall t \in I$   $f(\cdot, t) \in \mathcal{L}_1(E)$  para:

$$f(\cdot, t) : E \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto f(\cdot, t)(x) = f(x, t)$$

Si existe  $\frac{\partial f}{\partial t} : E \times I \longrightarrow \mathbb{R}$  y además existe también  $\phi \in \mathcal{L}_1(E)$  tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq \phi(x) \quad \forall (x, t) \in (E, I)$$



Entonces, sea  $t_0 \in I$ , se cumple:

$$\exists \frac{df}{dt} \int_E f(\cdot, t_0)(x) d\mu(x) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) d\mu(x)$$

**Notación:** Cuando operemos con una función que tenga como argumento más de una variable, integrando una de ellas y dejando las demás constantes, usaremos  $d\mu(x)$  para referirnos a la variable sobre la que integramos. Por ejemplo, en  $\int_E g(x, t) d\nu(x)$  se integra solo sobre  $x$ , dejando  $t$  fija.

**Demostración:**

Fijamos  $t_0 \in I$  cualquiera. Por definición de derivada, sea  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq I \setminus \{t_0\}$  con  $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} t_0$ , se tiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_E f(x, t_n) d\mu(x) - \int_E f(x, t_0) d\mu(x)}{t_n - t_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t_n - t_0} = (*)$$

Aplicamos el Teorema del Valor Medio de derivación a  $I_{t_n, t_0}$  (intervalo de extremos  $t_n$  y  $t_0$ ). Como consecuencia,  $\exists \xi_n \in I_{t_n, t_0} \subseteq I$  tal que:

$$(*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x, \xi_n) d\mu$$

Por hipótesis, sabemos que:

$$\forall x \in E : \left| \frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t_n - t_0} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, \xi_n) \right| \leq \varphi(x)$$

Luego estamos en condiciones de aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada:

$$(*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t_n - t_0} d\mu(x) = \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t_n - t_0} d\mu = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) d\mu(x)$$

### 2.3.8 Integrales de funciones de componentes en $\mathbb{R}^2$

Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  un abierto. Sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ . Sea  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervalo no degenerado. Sean  $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$  funciones derivables en  $I$  tales que  $\forall t \in I$  se cumplen las dos siguientes condiciones:

$$a(t) \leq b(t) \qquad \{t\} \times [a(t), b(t)] \subseteq \Omega$$

Definimos la siguiente función:

$$F : I \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \qquad t \mapsto F(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(t, x) dx$$

Entonces, para todo  $t \in I$  se cumple:

$$\exists F'(t) = f(t, b(t)) \cdot b'(t) - f(t, a(t)) \cdot a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dx$$

**Demostración:** Comencemos ilustrando lo que estamos haciendo:

