

# TG III

Grupo M

Javier Ortín Rodenas  
Bruno Martín Rivera  
Jorge Gota Ortín  
Alejandra Sánchez Mayo

## 1 Enunciado:

1. Dado el paraboloide hiperbólico  $z = y^2 - x^2$ , halle su imagen esférica. Para el punto  $P = (0, 0, 0)$ , halle las curvaturas normales en las direcciones (principales)  $v_1 = (1, 0, 0)$  y  $v_2 = (0, 1, 0)$ . ¿El punto  $P$  es umbilical? Halle la curvatura de  $P$  en la dirección  $v_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ .
2. Dada la superficie  $z = x^2 + y^3$ , clasifique sus puntos en elípticos, hiperbólicos, parabólicos o planos.

## 2 Solución

### 2.1 Primer apartado

En primer lugar, debemos parametrizar el paraboloide hiperbólico en cuestión. Nótese que es la gráfica de la siguiente función  $f$ :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \longmapsto f(x, y) = y^2 - x^2$$

Por tanto, podemos definir la siguiente parametrización:

$$X : \mathcal{U} = \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad (u, v) \longmapsto X(u, v) = (u, v, v^2 - u^2)$$

Para hallar la imagen esférica del paraboloide, es necesario calcular el vector normal a esta superficie en cada punto de la misma. Para ello debemos conocer las derivadas parciales de la parametrización. Derivando en la expresión de  $X$  obtenemos:

$$X_u(u, v) = (1, 0, -2u) \quad X_v(u, v) = (0, 1, 2v)$$

Calculemos el producto vectorial de las derivadas según el siguiente falso determinante:

$$X_u(u, v) \times X_v(u, v) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = (2u, -2v, 1)$$

$$\|X_u(u, v) \times X_v(u, v)\| = \sqrt{(2u)^2 + (-2v)^2 + 1^2} = \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}$$

Normalizando para que sea un vector unitario:

$$N(u, v) = \frac{X_u(u, v) \times X_v(u, v)}{\|X_u(u, v) \times X_v(u, v)\|} = \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}} (2u, -2v, 1)$$

La imagen esférica del paraboloide se corresponde con la imagen del conjunto abierto  $\mathcal{U}$  que lo parametriza por medio de su vector normal. En este caso particular,  $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$ , luego los parámetros  $u, v$  pueden tomar cualquier valor real. De este modo, su imagen esférica viene dada por el siguiente conjunto:

$$\left\{ \left( \frac{2u}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}, \frac{-2v}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}} \right) \in \mathbb{R}^3 : u, v \in \mathbb{R} \right\}$$

Veamos que este conjunto se corresponde con el hemisferio norte de la esfera unidad en  $\mathbb{R}^3$ :

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$$

Es evidente que la imagen esférica de la superficie está contenido en el hemisferio norte de la esfera unidad, pues todos sus puntos son unitarios y tienen tercera componente positiva. Queda ver el otro contenido. Para ello, basta ver que todo  $(x, y, z)$  del hemisferio norte tiene un  $(u, v)$  que lo genere. Igualando las ecuaciones, para  $D = 4u^2 + 4v^2 + 1$  se tiene:

$$x = \frac{2u}{\sqrt{D}} \quad y = \frac{-2v}{\sqrt{D}} \quad z = \frac{1}{\sqrt{D}}$$

Despejando, obtenemos:

$$x = \frac{2u}{\sqrt{D}} = 2uz \Rightarrow u = \frac{x}{2z} \quad y = \frac{-2v}{\sqrt{D}} = -2vz \Rightarrow v = \frac{-y}{2z}$$

En efecto, los dos conjuntos coinciden.

Atendiendo ahora a la siguiente pregunta del primer apartado, consideramos el punto  $P = (0, 0, 0)$ . En efecto, se trata de un punto de la superficie, pues cumple su ecuación:  $0 = 0^2 - 0^2$ . En particular,  $P = X(0, 0)$ . Evaluando sus derivadas parciales:

$$X_u(0, 0) = (1, 0, 0) = v_1 \quad X_v(0, 0) = (0, 1, 0) = v_2$$

Los  $v_i$  pertenecen a  $T_P S$  y son unitarios, luego tiene sentido calcular  $\kappa_n(v_i, p)$ . En primer lugar, calculemos la curvatura normal respecto de  $v_1$ . Para ello, utilizaremos una curva  $\alpha$  que cumpla  $\alpha(0) = P$ ,  $\alpha'(0) = v_1$ . Tomaremos la siguiente curva:

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad t \longmapsto X(0 + t, 0) = (t, 0, -t^2)$$

De este modo,  $\alpha(0) = P = (0, 0, 0)$ ,  $\alpha'(0) = X_u(0, 0) = (1, 0, 0) = v_1$ . Además, como  $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha$  está bien definida para cualquier  $\varepsilon > 0$ . Veamos qué valor tiene la curvatura normal:

$$\begin{aligned} \alpha''(t) &= (0, 0, -2) \\ N(0, 0) &= \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0^2 + 1}} (2 \cdot 0, -2 \cdot 0, 1) = (0, 0, 1) \\ \kappa_n(v_1, P) &= \alpha''(0) \cdot N(P) = -2 \end{aligned}$$

Realicemos el mismo procedimiento para  $v_2$  ahora. Para ello, definiremos la siguiente curva para un  $\varepsilon > 0$  arbitrario.

$$\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad t \longmapsto X(0, 0 + t) = (0, t, t^2)$$

De manera análoga al caso anterior, se cumple  $\beta(0) = X(0, 0) = (0, 0, 0) = P$ ,  $\beta'(0) = X_v(0, 0) = (0, 1, 0) = v_2$ . Veamos qué valor tiene la curvatura normal asociada a  $v_2$ :

$$\beta''(0) = (0, 0, 2) \quad \kappa_n(v_2, P) = \beta''(0) \cdot N(P) = 2$$

Por todo lo anterior, podemos afirmar que el punto  $P$  no es umbilical, pues las curvaturas normales respecto de sus direcciones principales no coinciden.

Finalmente, hallemos la curvatura normal en  $P$  respecto de la dirección  $v_3$ . Tiene sentido, pues  $\|v_3\| = 1$ , y  $v_3 \in T_P S$  al ser combinación lineal de  $v_1$  y  $v_2$ . En este caso, utilizaremos la segunda forma fundamental. Calculando las segundas derivadas:

$$X_{uu}(u, v) = (0, 0, -2) \quad X_{uv}(u, v) = (0, 0, 0) \quad X_{vv}(u, v) = (0, 0, 2)$$

Los coeficientes de la expresión matricial de la segunda forma fundamental vienen dados por el producto escalar de las segundas derivadas:

$$\begin{aligned} e &= X_{uu}(0,0) \cdot N(0,0) = (0,0,-2) \cdot (0,0,1) = -2 \\ f &= X_{uv}(0,0) \cdot N(0,0) = (0,0,0) \cdot (0,0,1) = 0 \\ g &= X_{vv}(0,0) \cdot N(0,0) = (0,0,2) \cdot (0,0,1) = 2 \end{aligned} \quad \Pi_P = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Esta matriz representa  $\Pi_P$  en  $T_P S$  según la base  $\{X_u(0,0), X_v(0,0)\}$ . Por tanto, es claro que  $v_1, v_2$  son direcciones principales al ser vectores propios. Expresemos  $v_3$  en función de esta base:

$$v_3 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0) + \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}X_u(0,0) + \frac{1}{\sqrt{2}}X_v(0,0)$$

Por tanto, evaluando la segunda forma fundamental en este vector:

$$\begin{aligned} \kappa_n(v_3, P) &= \Pi_P(v_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{-2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

## 2.2 Segundo apartado

Al igual que en el primer apartado, la superficie es la gráfica de una función. Por tanto, podemos parametrizarla como sigue:

$$X : \mathcal{U} = \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad (u, v) \longmapsto X(u, v) = (u, v, u^2 + v^3)$$

Estudiemos qué aspecto tiene la matriz de la segunda forma fundamental para cada punto de la superficie. En primer lugar, hallemos las derivadas parciales:

$$X_u(u, v) = (1, 0, 2u) \quad X_v(u, v) = (0, 1, 3v^2)$$

Hallemos el vector normal unitario:

$$X_u(u, v) \times X_v(u, v) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 3v^2 \end{vmatrix} = (-2u, -3v^2, 1)$$

$$\|X_u(u, v) \times X_v(u, v)\| = \sqrt{(-2u)^2 + (-3v^2)^2 + 1^2} = \sqrt{4u^2 + 9v^4 + 1}$$

$$N(u, v) = \left( \frac{-2u}{\sqrt{4u^2 + 9v^4 + 1}}, \frac{-3v^2}{\sqrt{4u^2 + 9v^4 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 9v^4 + 1}} \right)$$

Vamos a expresar la segunda forma fundamental en función del producto escalar entre el vector normal y las segundas derivadas de la parametrización. Veamos cuáles son las derivadas de orden dos de  $X$  en un punto arbitrario:

$$X_{uu}(u, v) = (0, 0, 2) \quad X_{uv}(u, v) = (0, 0, 0) \quad X_{vv}(u, v) = (0, 0, 6v)$$

Para clasificar los puntos en elípticos, hiperbólicos, parabólicos o planos, solo es necesario conocer el signo de sus curvaturas normales principales. Por tanto, podemos multiplicar las segundas derivadas por  $X_u \times X_v$  en lugar de por el vector normal, pues no afectará al signo del resultado. Por tanto, basta estudiar la matriz dada por:

$$\begin{aligned} \hat{e} &= X_{uu}(u, v) \cdot (X_u(u, v) \times X_v(u, v)) = (0, 0, 2) \cdot (-2u, -3v^2, 1) = 2 \\ \hat{f} &= X_{uv}(u, v) \cdot (X_u(u, v) \times X_v(u, v)) = (0, 0, 0) \cdot (-2u, -3v^2, 1) = 0 \\ \hat{g} &= X_{vv}(u, v) \cdot (X_u(u, v) \times X_v(u, v)) = (0, 0, 6v) \cdot (-2u, -3v^2, 1) = 6v \end{aligned}$$

$$\hat{\Pi}_P = \begin{pmatrix} \hat{e} & \hat{f} \\ \hat{f} & \hat{g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6v \end{pmatrix}$$

Esta matriz ya es diagonal, y sus valores propios son 2 y  $6v$  (las curvaturas normales principales). Para estudiar el tipo de punto basta estudiar el signo del producto de las mismas. Nótese que al menos uno de los dos valores es siempre distinto de cero, luego la superficie no tiene puntos planos. El carácter de  $X(u, v)$  viene determinado por  $6v$ . Comparando el signo de  $6v$  con el signo de 2 se tiene:

- $P = X(u, v)$  es elíptico  $\iff 6v > 0 \iff v > 0$
- $P = X(u, v)$  es hiperbólico  $\iff 6v < 0 \iff v < 0$
- $P = X(u, v)$  es parabólico  $\iff 6v = 0 \iff v = 0$

Sustituyendo en la parametrización, obtenemos:

- Puntos elípticos:  $\{(u, v, u^2 + v^3) \in \mathbb{R}^3 : u \in \mathbb{R}, v \in (0, +\infty)\}$
- Puntos hiperbólicos:  $\{(u, v, u^2 + v^3) \in \mathbb{R}^3 : u \in \mathbb{R}, v \in (-\infty, 0)\}$
- Puntos parabólicos:  $\{(u, 0, u^2) \in \mathbb{R}^3 : u \in \mathbb{R}\}$