

Análisis Matemático III

Javier Ortín Rodenas

Hoja de ejercicios

Contenidos

I Teoría de la medida e Integral de Lebesgue	3
1. Medida exterior en \mathbb{R}^N	3
1.1.1 Ejercicio 5	3
1.1.2 Ejercicio 6	5
2. Conjuntos medibles	6
1.2.1 Ejercicio 2	6
1.2.2 Ejercicio 3	7
1.2.3 Ejercicio 5	8
3. Funciones medibles	10
1.3.1 Ejercicio 5	10
II Series de Fourier	12
1. Sistemas ortogonales	12
2.1.1 Ejercicio 1	12
2.1.2 Ejercicio 2	12
2.1.3 Ejercicio 3	14
2.1.4 Ejercicio 4	15

I Teoría de la medida e Integral de Lebesgue

§1. Medida exterior en \mathbb{R}^N

1.1.1 Ejercicio 5

a) Sea $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, demuestra que todo cubrimiento finito de A formado por intervalos abiertos tiene longitud total mayor o igual a 1.

Demostración: Sea $\{I_i\}_{i=1}^n$ un recubrimiento por intervalos abiertos de A , con cada $I_i = (a_i, b_i)$ con $a_i < b_i$. Definimos el siguiente conjunto auxiliar:

$$\mathcal{A} := \{0, 1\} \cup \left([0, 1] \cap \{a_i, b_i : i \in \{1, \dots, n\}\} \right)$$

Este conjunto contiene a los extremos de los I_i que se encuentren entre 0 y 1. Al haber un número finito de intervalos, tenemos que \mathcal{A} es finito, pudiendo ordenarlo como sigue:

$$\mathcal{A} = \{x_j\}_{j=0}^m \quad x_0 = a < x_1 < \dots < x_m = b \quad \text{para cierto } m \in \mathbb{N}$$

Al estar en un caso finito, la unión de las clausuras es la clausura de las uniones. Por contención de las clausuras, se tiene:

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i \Rightarrow \overline{A} = [0, 1] \cap \overline{\mathbb{Q}} = [0, 1] \subseteq \overline{\bigcup_{i=1}^n I_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{I_i}$$

Sea $j \in \{1, \dots, m\}$ cualquiera, tenemos que $x_j \in [0, 1] \subseteq \bigcup_{i=1}^n \overline{I_i}$ luego $\exists k \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x_j \in [a_k, b_k]$. Veamos que $[x_{j-1}, x_j] \subseteq [a_k, b_k]$ también. Ambos conjuntos son cerrados y conexos con intersección no vacía. Por tanto, su intersección ha de ser conexa, cerrada y no vacía (es decir, un intervalo cerrado). Será de la forma $[u, x_j]$ con $u = \min\{a_k, x_{j-1}\}$. De tenerse $u \neq x_{j-1}$, se cumpliría $x_{j-1} < a_k < x_j$, lo que contradice la ordenación establecida para \mathcal{A} .

De este modo, como $v_1(I_i) = v_1(\bar{I}_i) \forall i \in \{1, \dots, n\}$, se cumple:

$$1 = v_1([0, 1]) = \sum_{j=1}^m v_1(x_{j-1}, x_j) \leq \sum_{i=1}^n v_1(\bar{I}_i) = \sum_{i=1}^n v_1(I_i)$$

b) Deduce del apartado anterior que A no es compacto.

Demostración: Veamos que hay un recubrimiento de A del que no se puede extraer un subrecubrimiento finito. Para ello basta dar un recubrimiento de A por intervalos abiertos tales que la suma de sus medidas sea menor a 1. Como \mathbb{Q} es numerable, A también lo es. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una enumeración cualquiera de A , definimos los siguientes intervalos:

$$I_n = (a_n - \frac{1}{2^{n+2}}, a_n + \frac{1}{2^{n+2}}) \quad \text{luego } A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i \text{ con } \sum_{i=1}^{\infty} v_1(I_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

c) Demuestra que la siguiente aplicación m definida sobre \mathfrak{B}_N no es una medida:

$$m(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n v(I_i) : \bigcup_{i=1}^n I_i \supseteq A \text{ con cada } I_i \text{ cubo abierto en } \mathbb{R}^N \right\}$$

Demostración:

En caso de serlo, para $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{B}_N$ con $i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \emptyset$ se cumpliría:

$$m\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(E_i)$$

Todo conjunto unipuntual a con $a \in \mathbb{R}^N$ está en \mathfrak{B}_N pues se puede expresar como un intervalo cerrado degenerado. Por tanto, todo conjunto numerable está también en \mathfrak{B}_N . Consideramos el conjunto $A^N \subseteq [0, 1]^N \in \mathfrak{B}_N$. Razonando como en el apartado anterior, todo cubrimiento finito de A^N por cubos ha de tener suma de volúmenes mayor o igual a 1, luego $m(A^N) = 1$. No obstante, podemos expresar A^N como unión numerable de conjuntos unipuntuales disjuntos, teniendo cada uno de ellos $m(\{b_n\}) = 0$ para $(b_n)_n$ una enumeración de A^N .

1.1.2 Ejercicio 6

Demuestra que existe un conjunto abierto O en \mathbb{R} y un $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier recubrimiento finito de O formado por intervalos abiertos, $\{J_i\}_{i=1}^m$ se cumple $\mu(\bigcup_{i=1}^m J_i \setminus O) > \varepsilon$.

Demostración:

Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos $I_n = (n - \frac{1}{3}, n + \frac{1}{3})$. Consideramos el abierto $O = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i$. Sea $\{J_i\}_{i=1}^m$ un recubrimiento finito de O por intervalos abiertos. Al ser O no acotado, tiene que haber cierto $k \in \{1, \dots, m\}$ tal que J_k contiene a infinitos intervalos I_n . Dados dos de estos intervalos consecutivos, la distancia entre el extremo derecho del primero y el extremo izquierdo del segundo viene dada por:

$$\left(n + 1 - \frac{1}{3}\right) - \left(n + \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Por tanto, $J_k \setminus O$ ha de contener infinitos intervalos disjuntos de longitud $\frac{1}{3}$ luego tiene medida infinita. Se cumple el resultado para $\varepsilon > 0$ cualquiera.

§2. Conjuntos medibles

1.2.1 Ejercicio 2

Sea $A \in \mathfrak{M}_N$ con $\mu(A) < \infty$. Sea $\varepsilon > 0$, demuestra que existe $K \subseteq A$ conjunto compacto tal que $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$. ¿Se cumple también si $\mu(A) = \infty$?

Demostración:

Sea $A_n = A \cap [-n, n]$, tenemos que $(A_n)_n$ es una sucesión creciente de conjuntos medible que tiene como unión el conjunto A . Por tanto, se tiene

$$\infty > \mu(A) = \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \lim_n \mu(A_n)$$

Por tanto, existe cierto $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(A) - \mu(A_{n_0}) = \mu(A \setminus A_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Hemos podido despejar sin indeterminaciones al estar en un caso de medida finita.

Como A_{n_0} es medible, sabemos que existe un conjunto cerrado $C \subseteq A_{n_0}$ tal que $\mu(A_{n_0} \setminus C) < \frac{\varepsilon}{2}$. Al ser A_{n_0} acotado y estar C contenido en él, tenemos que C es compacto. Por todo lo anterior:

$$\mu(A \setminus C) = \mu(A) - \mu(C) = \mu(A) - \mu(A_{n_0}) + \mu(A_{n_0}) - \mu(C) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

En cambio, para el caso infinito, no tiene por qué cumplirse. Sea $A = \mathbb{R}^N$, en la topología usual, los conjuntos compactos son aquellos cerrados y acotados. En espacios métricos, un conjunto es acotado sii existe una bola de radio finito que lo contiene. Por el Teorema de Hausdorff, podemos considerar la norma $\|\cdot\|_1$, que tiene como bolas a los cubos. Por tanto, todo compacto K va a estar contenido en una bola de radio finito; es decir, en un cubo de volumen (medida) finito. Despejando:

$$\mu(\mathbb{R}^N \setminus K) = \mu(\mathbb{R}^N) - \mu(K) = \infty - \mu(K) = \infty > \varepsilon \quad \forall \varepsilon \in (0, +\infty)$$

1.2.2 Ejercicio 3

Sea $A \in \mathfrak{M}_N$, ¿son ciertas las siguientes implicaciones?

- i) $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset \Rightarrow \mu(A) = 0$.
- ii) $\overset{\circ}{A} = \emptyset \Rightarrow \mu(A) = 0$.
- iii) A abierto $\Rightarrow \mu(Fr. A) = 0$.
- iv) A no numerables $\Rightarrow \mu(A) > 0$.

Demostración:

i) Falso: basta considerar \mathbb{R}^N .

ii) Falso: basta considerar $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (o cualquier variante N -dimensional).

iii) Utilizaremos una variación del conjunto de Cantor. En cada iteración “eliminamos” la parte central de longitud $\frac{1}{4^n}$ de cada intervalo. Veamos ejemplos de algunas iteraciones:

$$\left[0, 1\right]$$

$$\left[0, \frac{3}{8}\right]$$

$$\left[\frac{5}{8}, 1\right]$$

$$\left[0, \frac{1}{8}\right]$$

$$\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right]$$

$$\left[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right]$$

$$\left[\frac{7}{8}, 1\right]$$

En la n -ésima iteración eliminamos 2^{n-1} intervalos cada uno de longitud $\frac{1}{4^n}$. Como los intervalos quitados son disjuntos, podemos calcular su medida total como la suma de las longitudes quitadas. Sea L_n la longitud quitada en la n -ésima iteración,

$$L_n = 2^{n-1} \cdot \frac{1}{4^n} = \frac{1}{2^n + 1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} L_n = \frac{1}{2}$$

Considerando $O = (0, 1) \setminus C$ para C la intersección de todas las iteraciones, tenemos que la frontera de O es C , que tiene como medida $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

iv) Falso: basta considerar $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1.2.3 Ejercicio 5

Demuestra que para cada $A \in \mathfrak{M}_1$ con $\mu(A) < \infty$ y cada $\varepsilon > 0$ existe una colección finita de intervalos disjuntos y abiertos $\{I_i\}_{i=1}^m$ tales que:

$$\mu\left(A \Delta \bigcup_{i=1}^m I_i\right) < \varepsilon \quad \text{con } A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Demostración:

Por ser A un conjunto medible, es de la forma $A = \left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} G_i\right) \cup M$ para $(G_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de abiertos de \mathbb{R}^N y M un conjunto de medida nula.

Como M no interfiere en la medida, tenemos que $\mu(A) = \lim_n \mu(G_n) < \infty$. Por definición de límite, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(G_{n_0} \setminus A) = \mu(G_{n_0}) - \mu(A) < \frac{\varepsilon}{2}$. Hemos podido pasar a la medida de la diferencia de conjuntos al estar en el caso de medida finita. Por simplicidad, denotaremos $G = G_{n_0}$.

Al ser G abierto, podemos expresarlo como unión numerable de bolas abiertas $\{J_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos $O_n = \bigcup_{i=1}^n J_i$. Tenemos que $(O_n)_n$ es una sucesión de conjuntos crecientes cuya unión es igual a G . Razonando como en el caso anterior:

$$\mu(G) = \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} O_i\right) = \lim_n \mu(O_n) \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N} : \mu(G \setminus O_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Tomamos como $\{I_i\}_{i=1}^n$ las componentes conexas de $\{J_i\}_{i=1}^{n_1}$, que son disjuntas e intervalos (en \mathbb{R} los conjuntos conexos son precisamente los intervalos). Además, hay un número finito de ellas (en el peor de los casos, cada J_i sería una componente

conexa). De este modo, aplicando la monotonía de la medida:

$$\mu\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^n I_i\right) \leq \mu\left(G \setminus \bigcup_{i=1}^n I_i\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n I_i \setminus A\right) \leq \mu(G \setminus A) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sumando se llega al resultado.

§3. Funciones medibles

1.3.1 Ejercicio 5

Sea $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ uniformemente continua y acotada, demuestra que la siguiente función es medible:

$$\varphi : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \quad t \longmapsto \varphi(t) = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f(x+t) - f(x)|$$

Demostración:

Por ser f acotada, tenemos que $\exists M \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq M \forall x \in \mathbb{R}^N$. De este modo, sean $x, y \in \mathbb{R}^N$, tenemos:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| \leq M + M = 2M$$

Por tanto, concluimos que φ es también acotada. Veamos que es medible por la definición.

Sea $K := \sup_{t \in \mathbb{R}^N} \varphi(t)$, como φ solo toma valores no negativos tenemos que:

$$\varphi^{-1}\left((-\infty, 0]\right) = \emptyset \in \mathfrak{M}_N \quad \varphi^{-1}\left((-\infty, K]\right) = \mathbb{R}^N \in \mathfrak{M}_N$$

Fijando ahora $\varepsilon \in (0, K)$ cualquiera, veamos que $\varphi\left((-\infty, \varepsilon]\right)$ es medible. Al ser f uniformemente continua por hipótesis, tenemos que para el ε fijado existe un $\delta > 0$ tal que:

$$\|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$$

Podemos reescribir $y = x + t$ para $t = y - x \in \mathbb{R}^N$. De este modo; sea $t \in \mathbb{R}^N$, se tiene:

$$\|t\| < \delta \Rightarrow |f(x+t) - f(x)| < \varepsilon$$

Se cumple la condición para todo x de \mathbb{R}^N . Al tomar supremos, la desigualdad

pasa a ser no estricta, y el término mayorado por ε se corresponde con $\varphi(t)$ por definición:

$$\|t\| < \delta \Rightarrow \varphi(t) = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f(x+t) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Así, sea $(t_n)_n$ una sucesión que tiende al origen, ha de "atravesar" todas las bolas de radio δ asociado a valores de ε arbitrariamente pequeños. Por tanto, podemos concluir que ϕ es continua en el origen.

Sean $s, t \in \mathbb{R}^N$ cualesquiera, se cumple:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f(x+t) - f(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f(x+t) - f(x+s)| + |f(x+s) - f(x)| \leq \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f(x+t) - f(x+s)| + \sup_{y \in \mathbb{R}^N} |f(y+s) - f(y)| \stackrel{z=x+s}{=} \sup_{z \in \mathbb{R}^N} |f(z+(t-s)) - f(z)| + \varphi(s) \end{aligned}$$

Despejando, obtenemos $0 \leq \varphi(t) - \varphi(s) \leq \varphi(t-s) \xrightarrow{s \rightarrow t} \varphi(0) = 0$.

Por todo lo anterior, concluimos que φ es continua y acotada, luego es medible en \mathfrak{B}_N y en \mathfrak{M}_N

II Series de Fourier

§1. Sistemas ortogonales

2.1.1 Ejercicio 1

Una colección finita de funciones $(\varphi_k)_{k=0}^n$ (todas con dominio I) se dice *linealmente independiente* si

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k \varphi_k \equiv 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_k = 0 \text{ para todo } 0 \leq k \leq n.$$

Una colección de funciones $(\varphi_k)_{k=0}^\infty$ se dice *linealmente independiente* si todo subconjunto finito suyo es linealmente independiente. Prueba que todo sistema ortonormal sobre I es linealmente independiente.

Demostración:

Sea $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un sistema ortonormal con dominio I . Sea $A := \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{N}$ finito. Supongamos que se cumple $\sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_{a_k} \equiv 0$.

Fijado $j \in \{1, \dots, n\}$ cualquiera, tenemos:

$$\langle \varphi_{a_j}, 0 \rangle = 0 = \left\langle \varphi_{a_j}, \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_{a_k} \right\rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle \varphi_{a_j}, \varphi_{a_k} \rangle = \lambda_j$$

La última igualdad se deduce como aplicación directa de la ortonormalidad. Como el j escogido fue arbitrario, concluimos que el sistema es linealmente independiente.

2.1.2 Ejercicio 2

Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt. Sea $(f_n)_{n=0}^\infty$ un sistema de funciones linealmente independientes en $L^2(I)$. Sea la sucesión de funciones dada

recursivamente por

$$g_0 := f_0, \quad g_{n+1} := f_{n+1} - \sum_{k=0}^n \frac{\langle f_{n+1}, g_k \rangle}{\langle g_k, g_k \rangle} g_k.$$

Demuestra que $(g_n)_{n=0}^\infty$ es un sistema ortogonal y que

$$\text{span}\{f_k\}_{k=0}^n = \text{span}\{g_k\}_{k=0}^n$$

para todo n .

Demostración: Aplicaremos inducción.

En primer lugar, probaremos que $\{g_k\}_{k=0}^n$ es ortogonal para todo $n \in \mathbb{N}$. Comprobemos el caso base:

$$g_1 = f_1 - \frac{\langle f_1, g_0 \rangle}{\langle g_0, g_0 \rangle} g_0 = f_1 - \frac{\langle f_1, f_0 \rangle}{\langle f_0, f_0 \rangle} f_0$$

Aplicando la linealidad del producto interno,

$$\langle g_1, g_0 \rangle = \langle f_1, f_0 \rangle - \frac{\langle f_1, f_0 \rangle}{\langle f_0, f_0 \rangle} \cdot \langle f_0, f_0 \rangle = 0$$

Supongamos que la hipótesis es cierta para n y comprobemos que se cumple para $n+1$. Sea $j \in \{1, \dots, n\}$, aplicando de nuevo la linealidad,

$$\begin{aligned} g_{n+1} &= f_{n+1} - \sum_{k=0}^n \frac{\langle f_{n+1}, g_k \rangle}{\langle g_k, g_k \rangle} g_k \Rightarrow \langle g_{n+1}, g_j \rangle = \langle f_{n+1}, g_j \rangle - \sum_{k=0}^n \frac{\langle f_{n+1}, g_k \rangle}{\langle g_k, g_k \rangle} \cdot \langle g_k, g_j \rangle = \\ &= \langle f_{n+1}, g_j \rangle - \frac{\langle f_{n+1}, g_j \rangle}{\langle g_j, g_j \rangle} \cdot \langle g_j, g_j \rangle = 0 \end{aligned}$$

Tenemos la ortogonalidad. Queda ver que se respetan las clausuras.

Puesto que $f_0 = g_0$, tenemos el caso base. Supongamos que se cumple para n

y veamos que es cierto para $n + 1$.

$$g_{n+1} = f_{n+1} - \sum_{k=0}^n \frac{\langle f_{n+1}, g_k \rangle}{\langle g_k, g_k \rangle} g_k \in K\langle g_0, \dots, g_n, f_{n+1} \rangle = K\langle f_0, \dots, f_n, f_{n+1} \rangle$$

$$f_{n+1} = g_{n+1} + \sum_{k=0}^n \frac{\langle f_{n+1}, g_k \rangle}{\langle g_k, g_k \rangle} g_k \in K\langle g_0, \dots, g_n, g_{n+1} \rangle$$

Tenemos que $K\langle g_0, \dots, g_n, g_{n+1} \rangle = K\langle f_0, \dots, f_n, f_{n+1} \rangle$ por doble contenido.

2.1.3 Ejercicio 3

Demuestra que el sistema de polinomios $(x^n)_{n=0}^{\infty}$ es linealmente independiente. Calcula las cuatro primeras funciones que se obtienen al aplicar el proceso de ortonormalización de Gram–Schmidt sobre el intervalo $[-1, 1]$ (De este procedimiento pueden obtenerse los llamados *polinomios de Legendre*).

Demostración:

Todo polinomio no nulo puede tener a lo sumo un número de raíces igual a su grado. Por tanto, sea $n \in \mathbb{N}$ cualquiera,

$$\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n \equiv 0 \iff \alpha_i = 0 \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}$$

El sistema es linealmente independiente por definición. Apliquemos ahora el proceso de Gram-Schmidt.

$$\int_{-1}^1 x \cdot 1 \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 = 0 \Rightarrow p_1 = x - \frac{\langle x, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = x$$

$$\int_{-1}^1 x \cdot x^2 \, dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-1}^1 = 0 \quad \int_{-1}^1 x^2 \cdot 1 \, dx = \frac{2}{3} \quad p_2 = x^2 - \frac{2}{3\langle 1, 1 \rangle} 1 - \frac{0}{\langle x, x \rangle} x = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$\int_{-1}^1 x^3 \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) dx = 0 = \int_{-1}^1 x^3 \cdot 1 dx$$

$$\int_{-1}^1 x^3 \cdot x dx = \frac{2}{5}$$

$$p_3 = x^3 - \frac{2}{5\langle x, x \rangle} x = x^3 - \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{2} x = x^3 - \frac{3}{5} x$$

El proceso de Gram-Schmidt no garantiza la ortonormalidad, sino únicamente la ortogonalidad. Tras normalizar, se obtienen los siguientes vectores.

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{45}{8}} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right), \sqrt{\frac{175}{8}} \left(x^3 - \frac{3}{5}x \right) \right\}$$

2.1.4 Ejercicio 4

Sea $I := [0, 2\pi]$ y sea $(\varphi_n)_{n=0}^\infty$ un sistema ortonormal en $\mathcal{L}_2(I)$. Demuestra los siguientes apartados:

(1) los siguientes enunciados son equivalentes:

- (a) dadas f y g en $\mathcal{L}_2(I)$, $\langle f, \varphi_n \rangle = \langle g, \varphi_n \rangle$ para todo n implica $f \stackrel{\mu-a.e.}{=} g$.
- (b) dada $f \in \mathcal{L}_2(I)$, $\langle f, \varphi_n \rangle = 0$ para todo n implica $f \stackrel{\mu-a.e.}{=} 0$.
- (c) Si T es un sistema ortonormal que contiene a $(\varphi_n)_{n=0}^\infty$, entonces $T = (\varphi_n)_{n=0}^\infty$ (en cuyo caso se dice que $(\varphi_n)_{n=0}^\infty$ es un sistema ortonormal maximal).

(2) Supón que $(\varphi_n)_{n=0}^\infty$ satisface el enunciado (c). Demuestra que toda $f \in \mathcal{L}_2(I)$ verifica

$$\left\| f - \sum_{k=0}^n \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

¿Es $(\varphi_n)_{n=0}^\infty$ una base (algebraica, también llamada de Hämel) del espacio vectorial $\mathcal{L}_2(I)$?

(3) Demuestra que los sistemas

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots \right)$$

y $(e^{inx}/\sqrt{2\pi})_{n \in \mathbb{Z}}$ son sistemas ortonormales maximales.

Demostración:

(1) Veamos que se cumplen todas las implicaciones:

$a \Rightarrow b$ Se tiene al considerar $g = 0$.

$b \Rightarrow c$ Supongamos que existe $f \in T \setminus \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

Al ser, T ortonormal, $\{f\} \cup \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ha de serlo también. De este modo, $\langle f, \varphi_n \rangle = 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Aplicando la hipótesis, tenemos que $f \stackrel{\mu-a.e.}{=} 0$. Sabemos por el primer ejercicio de esta sección que todo sistema ortonormal es linealmente independiente, lo que entra en contradicción con $f \stackrel{\mu-a.e.}{=} 0$.

$c \Rightarrow a$ Supongamos $f, g \in \mathcal{L}_2([0, 2\pi])$ tales que $\langle f, \varphi_n \rangle = \langle g, \varphi_n \rangle \forall n \in \mathbb{N}$.

Supongamos además que f y g no son iguales en casi todo punto; es decir, $f - g \neq 0$ en $L_2([0, 2\pi])$.

Sea $T = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Aplicando la hipótesis, para $n \in \mathbb{N}$ cualquiera,

$$\langle f - g, \varphi_n \rangle = \langle f, \varphi_n \rangle - \langle g, \varphi_n \rangle = 0$$

De este modo, $f - g$ es un vector no nulo ortogonal a todos los de T . Por tanto, normalizando, $\left\{ \frac{f-g}{\|f-g\|} \right\} \cup T$ es un sistema ortonormal. Aplicando la hipótesis de maximalidad, ha de cumplirse $\frac{f-g}{\|f-g\|} \stackrel{\mu-a.e.}{=} \varphi_j$ para cierto $j \in \mathbb{N}$.

Como T es ortonormal, tenemos que:

$$\|f - g\| \cdot \|\varphi_j\|^2 = \langle f - g, \varphi_j \rangle = \langle f, \varphi_j \rangle - \langle g, \varphi_j \rangle \neq 0$$

Hemos llegado a una contradicción.

(2) Como hemos demostrado la caracterización en el apartado anterior, suponer que el sistema ortonormal T verifica (c) es equivalente a suponer que verifica (a).

Por el resultado 4.1.5 de los apuntes de Teoría, sabemos que $s := \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k$ converge y está bien definida. Sea $j \in \mathbb{N}$ cualquiera,

$$\langle s, \varphi_j \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k, \varphi_j \right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \cdot \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle = \langle f, \varphi_j \rangle$$

Por tanto, en vista de la afirmación (a), es claro que $f \stackrel{\mu-a.e.}{=} s$. Por Análisis Matemático I, sabemos que la norma es una aplicación continua. De este modo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{k=0}^n \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\| = \left\| f - \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\| = 0$$

La convergencia se da en norma, pero no tiene por qué ocurrir que $f = s$. Por tanto, sí sería una base de $L_2(I)$, pero no de $\mathcal{L}_2(I)$ al no ser este último un espacio de Banach.