

Análisis Matemático II

Javier Ortín Rodenas

Hoja de ejercicios

Contenidos

I Teoría de la medida e Integral de Lebesgue	3
1. Medida exterior en \mathbb{R}^N	3
1.1.1 Ejercicio 5	3
2. Funciones medibles	5
1.2.1 Ejercicio 5	5

I Teoría de la medida e Integral de Lebesgue

§1. Medida exterior en \mathbb{R}^N

1.1.1 Ejercicio 5

a) Sea $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, demuestra que todo cubrimiento finito de A formado por intervalos abiertos tiene longitud total mayor o igual a 1.

Demostración: Sea $\{I_i\}_{i=1}^n$ un recubrimiento por intervalos abiertos de A , con cada $I_i = (a_i, b_i)$ con $a_i < b_i$. Definimos el siguiente conjunto auxiliar:

$$\mathcal{A} := \{0, 1\} \cup \left([0, 1] \cap \{a_i, b_i : i \in \{1, \dots, n\}\} \right)$$

Este conjunto contiene a los extremos de los I_i que se encuentren entre 0 y 1. Al haber un número finito de intervalos, tenemos que \mathcal{A} es finito, pudiendo ordenarlo como sigue:

$$\mathcal{A} = \{x_j\}_{j=0}^m \quad x_0 = a < x_1 < \dots < x_m = b \quad \text{para cierto } m \in \mathbb{N}$$

Al estar en un caso finito, la unión de las clausuras es la clausura de las uniones. Por contención de las clausuras, se tiene:

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i \Rightarrow \overline{A} = [0, 1] \cap \overline{\mathbb{Q}} = [0, 1] \subseteq \overline{\bigcup_{i=1}^n I_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{I_i}$$

Sea $j \in \{1, \dots, m\}$ cualquiera, tenemos que $x_j \in [0, 1] \subseteq \bigcup_{i=1}^n \overline{I_i}$ luego $\exists k \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x_j \in [a_k, b_k]$. Veamos que $[x_{j-1}, x_j] \subseteq [a_k, b_k]$ también. Ambos conjuntos son cerrados y conexos con intersección no vacía. Por tanto, su intersección ha de ser conexa, cerrada y no vacía (es decir, un intervalo cerrado). Será de la forma $[u, x_j]$ con $u = \min\{a_k, x_{j-1}\}$. De tenerse $u \neq x_{j-1}$, se cumpliría $x_{j-1} < a_k < x_j$, lo que contradice la ordenación establecida para \mathcal{A} .

De este modo, como $v_1(I_i) = v_1(\bar{I}_i)$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, se cumple:

$$1 = v_1([0, 1]) = \sum_{j=1}^m v_1(x_{j-1}, x_j) \leq \sum_{i=1}^n v_1(\bar{I}_i) = \sum_{i=1}^n v_1(I_i)$$

§2. Funciones medibles

1.2.1 Ejercicio 5

Sea $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ uniformemente continua y acotada, demuestra que la siguiente función es medible:

$$\varphi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \quad t \mapsto \varphi(t) = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f(x + t) - f(x)|$$

Demostración:

Por ser f acotada, tenemos que $\exists M \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq M \forall x \in \mathbb{R}^N$. De este modo, sean $x, y \in \mathbb{R}^N$, tenemos:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| \leq M + M = 2M$$

Por tanto, concluimos que φ es también acotada. Veamos que es medible por la definición.

Sea $K := \sup_{t \in \mathbb{R}^N} \varphi(t)$, como φ solo toma valores no negativos tenemos que:

$$\varphi^{-1}((-∞, 0]) = \emptyset \in \mathfrak{M}_N \quad \varphi^{-1}((-∞, K]) = \mathbb{R}^N \in \mathfrak{M}_N$$

Fijando ahora $ε ∈ (0, K)$ cualquiera, veamos que $\varphi((−∞, ε])$ es medible. Al ser f uniformemente continua por hipótesis, tenemos que para el $ε$ fijado existe un $δ > 0$ tal que:

$$||x - y|| < δ \Rightarrow |f(x) - f(y)| < ε \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$$

Podemos reescribir $y = x + t$ para $t = y - x \in \mathbb{R}^N$. De este modo; sea $t \in \mathbb{R}^N$, se tiene:

$$||t|| < δ \Rightarrow |f(x + t) - f(x)| < ε$$

Se cumple la condición para todo x de \mathbb{R}^N . Al tomar supremos, la desigualdad

pasa a ser no estricta, y el término mayorado por ε se corresponde con $\varphi(t)$ por definición:

$$||t|| < \delta \Rightarrow \varphi(t) = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f(x + t) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Así, sea $(t_n)_n$ una sucesión que tiende al origen, ha de "atravesar" todos las bolas de radio δ asociado a valores de ε arbitrariamente pequeños. Por tanto, podemos concluir que φ es continua en el origen.

Sean $s, t \in \mathbb{R}^N$ cualesquiera, se cumple:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f(x + t) - f(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f(x + t) - f(x + s)| + |f(x + s) - f(x)| \leq \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f(x + t) - f(x + s)| + \sup_{y \in \mathbb{R}^N} |f(y + s) - f(y)| \stackrel{z=x+s}{=} \sup_{z \in \mathbb{R}^N} |f(z + (t - s)) - f(z)| + \varphi(s) \end{aligned}$$

Despejando, obtenemos $0 \leq \varphi(t) - \varphi(s) \leq \varphi(t - s) \xrightarrow{s \rightarrow t} \varphi(0) = 0$.

Por todo lo anterior, concluimos que φ es continua y acotada, luego es medible en \mathfrak{B}_N y en \mathfrak{M}_N