

Análisis Matemático III

Javier Ortín Rodenas

Hoja de ejercicios

Contenidos

I Teoría de la medida e Integral de Lebesgue	3
1. Medida exterior en \mathbb{R}^N	3
1.1.1 Ejercicio 5	3
1.1.2 Ejercicio 6	5
2. Conjuntos medibles	6
1.2.1 Ejercicio 2	6
1.2.2 Ejercicio 3	7
1.2.3 Ejercicio 5	8
3. Funciones medibles	10
1.3.1 Ejercicio 5	10
II Series de Fourier	12
1. Sistemas ortogonales	12
2.1.1 Ejercicio 1	12
2.1.2 Ejercicio 2	12
2.1.3 Ejercicio 3	14
2.1.4 Ejercicio 4	15
2. Funciones de variación acotada	18
2.2.1 Ejercicio 1	18
2.2.2 Ejercicio 2	19
2.2.3 Ejercicio 3	20
2.2.4 Ejercicio 4	20
3. Fallos en las condiciones de Dini o de Jordan	22
2.3.1 Ejercicio 1	22
2.3.2 Ejercicio 2	23
2.3.3 Ejercicio 3	24

I Teoría de la medida e Integral de Lebesgue

§1. Medida exterior en \mathbb{R}^N

1.1.1 Ejercicio 5

a) Sea $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, demuestra que todo cubrimiento finito de A formado por intervalos abiertos tiene longitud total mayor o igual a 1.

Demostración: Sea $\{I_i\}_{i=1}^n$ un recubrimiento por intervalos abiertos de A , con cada $I_i = (a_i, b_i)$ con $a_i < b_i$. Definimos el siguiente conjunto auxiliar:

$$\mathcal{A} := \{0, 1\} \cup \left([0, 1] \cap \{a_i, b_i : i \in \{1, \dots, n\}\} \right)$$

Este conjunto contiene a los extremos de los I_i que se encuentren entre 0 y 1. Al haber un número finito de intervalos, tenemos que \mathcal{A} es finito, pudiendo ordenarlo como sigue:

$$\mathcal{A} = \{x_j\}_{j=0}^m \quad x_0 = a < x_1 < \dots < x_m = b \quad \text{para cierto } m \in \mathbb{N}$$

Al estar en un caso finito, la unión de las clausuras es la clausura de las uniones. Por contención de las clausuras, se tiene:

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i \Rightarrow \overline{A} = [0, 1] \cap \overline{\mathbb{Q}} = [0, 1] \subseteq \overline{\bigcup_{i=1}^n I_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{I_i}$$

Sea $j \in \{1, \dots, m\}$ cualquiera, tenemos que $x_j \in [0, 1] \subseteq \bigcup_{i=1}^n \overline{I_i}$ luego $\exists k \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x_j \in [a_k, b_k]$. Veamos que $[x_{j-1}, x_j] \subseteq [a_k, b_k]$ también. Ambos conjuntos son cerrados y conexos con intersección no vacía. Por tanto, su intersección ha de ser conexa, cerrada y no vacía (es decir, un intervalo cerrado). Será de la forma $[u, x_j]$ con $u = \min\{a_k, x_{j-1}\}$. De tenerse $u \neq x_{j-1}$, se cumpliría $x_{j-1} < a_k < x_j$, lo que contradice la ordenación establecida para \mathcal{A} .

De este modo, como $v_1(I_i) = v_1(\bar{I}_i) \forall i \in \{1, \dots, n\}$, se cumple:

$$1 = v_1([0, 1]) = \sum_{j=1}^m v_1(x_{j-1}, x_j) \leq \sum_{i=1}^n v_1(\bar{I}_i) = \sum_{i=1}^n v_1(I_i)$$

b) Deduce del apartado anterior que A no es compacto.

Demostración: Veamos que hay un recubrimiento de A del que no se puede extraer un subrecubrimiento finito. Para ello basta dar un recubrimiento de A por intervalos abiertos tales que la suma de sus medidas sea menor a 1. Como \mathbb{Q} es numerable, A también lo es. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una enumeración cualquiera de A , definimos los siguientes intervalos:

$$I_n = (a_n - \frac{1}{2^{n+2}}, a_n + \frac{1}{2^{n+2}}) \quad \text{luego } A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i \text{ con } \sum_{i=1}^{\infty} v_1(I_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

c) Demuestra que la siguiente aplicación m definida sobre \mathfrak{B}_N no es una medida:

$$m(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n v(I_i) : \bigcup_{i=1}^n I_i \supseteq A \text{ con cada } I_i \text{ cubo abierto en } \mathbb{R}^N \right\}$$

Demostración:

En caso de serlo, para $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{B}_N$ con $i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \emptyset$ se cumpliría:

$$m\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(E_i)$$

Todo conjunto unipuntual a con $a \in \mathbb{R}^N$ está en \mathfrak{B}_N pues se puede expresar como un intervalo cerrado degenerado. Por tanto, todo conjunto numerable está también en \mathfrak{B}_N . Consideramos el conjunto $A^N \subseteq [0, 1]^N \in \mathfrak{B}_N$. Razonando como en el apartado anterior, todo cubrimiento finito de A^N por cubos ha de tener suma de volúmenes mayor o igual a 1, luego $m(A^N) = 1$. No obstante, podemos expresar A^N como unión numerable de conjuntos unipuntuales disjuntos, teniendo cada uno de ellos $m(\{b_n\}) = 0$ para $(b_n)_n$ una enumeración de A^N .

1.1.2 Ejercicio 6

Demuestra que existe un conjunto abierto O en \mathbb{R} y un $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier recubrimiento finito de O formado por intervalos abiertos, $\{J_i\}_{i=1}^m$ se cumple $\mu(\bigcup_{i=1}^m J_i \setminus O) > \varepsilon$.

Demostración:

Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos $I_n = (n - \frac{1}{3}, n + \frac{1}{3})$. Consideramos el abierto $O = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i$. Sea $\{J_i\}_{i=1}^m$ un recubrimiento finito de O por intervalos abiertos. Al ser O no acotado, tiene que haber cierto $k \in \{1, \dots, m\}$ tal que J_k contiene a infinitos intervalos I_n . Dados dos de estos intervalos consecutivos, la distancia entre el extremo derecho del primero y el extremo izquierdo del segundo viene dada por:

$$\left(n + 1 - \frac{1}{3}\right) - \left(n + \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Por tanto, $J_k \setminus O$ ha de contener infinitos intervalos disjuntos de longitud $\frac{1}{3}$ luego tiene medida infinita. Se cumple el resultado para $\varepsilon > 0$ cualquiera.

§2. Conjuntos medibles

1.2.1 Ejercicio 2

Sea $A \in \mathfrak{M}_N$ con $\mu(A) < \infty$. Sea $\varepsilon > 0$, demuestra que existe $K \subseteq A$ conjunto compacto tal que $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$. ¿Se cumple también si $\mu(A) = \infty$?

Demostración:

Sea $A_n = A \cap [-n, n]$, tenemos que $(A_n)_n$ es una sucesión creciente de conjuntos medible que tiene como unión el conjunto A . Por tanto, se tiene

$$\infty > \mu(A) = \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \lim_n \mu(A_n)$$

Por tanto, existe cierto $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(A) - \mu(A_{n_0}) = \mu(A \setminus A_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Hemos podido despejar sin indeterminaciones al estar en un caso de medida finita.

Como A_{n_0} es medible, sabemos que existe un conjunto cerrado $C \subseteq A_{n_0}$ tal que $\mu(A_{n_0} \setminus C) < \frac{\varepsilon}{2}$. Al ser A_{n_0} acotado y estar C contenido en él, tenemos que C es compacto. Por todo lo anterior:

$$\mu(A \setminus C) = \mu(A) - \mu(C) = \mu(A) - \mu(A_{n_0}) + \mu(A_{n_0}) - \mu(C) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

En cambio, para el caso infinito, no tiene por qué cumplirse. Sea $A = \mathbb{R}^N$, en la topología usual, los conjuntos compactos son aquellos cerrados y acotados. En espacios métricos, un conjunto es acotado sii existe una bola de radio finito que lo contiene. Por el Teorema de Hausdorff, podemos considerar la norma $\|\cdot\|_1$, que tiene como bolas a los cubos. Por tanto, todo compacto K va a estar contenido en una bola de radio finito; es decir, en un cubo de volumen (medida) finito. Despejando:

$$\mu(\mathbb{R}^N \setminus K) = \mu(\mathbb{R}^N) - \mu(K) = \infty - \mu(K) = \infty > \varepsilon \quad \forall \varepsilon \in (0, +\infty)$$

1.2.2 Ejercicio 3

Sea $A \in \mathfrak{M}_N$, ¿son ciertas las siguientes implicaciones?

- i) $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset \Rightarrow \mu(A) = 0$.
- ii) $\overset{\circ}{A} = \emptyset \Rightarrow \mu(A) = 0$.
- iii) A abierto $\Rightarrow \mu(Fr. A) = 0$.
- iv) A no numerables $\Rightarrow \mu(A) > 0$.

Demostración:

i) Falso: basta considerar \mathbb{R}^N .

ii) Falso: basta considerar $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (o cualquier variante N -dimensional).

iii) Utilizaremos una variación del conjunto de Cantor. En cada iteración “eliminamos” la parte central de longitud $\frac{1}{4^n}$ de cada intervalo. Veamos ejemplos de algunas iteraciones:

$$\left[0, 1\right]$$

$$\left[0, \frac{3}{8}\right]$$

$$\left[\frac{5}{8}, 1\right]$$

$$\left[0, \frac{1}{8}\right]$$

$$\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right]$$

$$\left[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right]$$

$$\left[\frac{7}{8}, 1\right]$$

En la n -ésima iteración eliminamos 2^{n-1} intervalos cada uno de longitud $\frac{1}{4^n}$. Como los intervalos quitados son disjuntos, podemos calcular su medida total como la suma de las longitudes quitadas. Sea L_n la longitud quitada en la n -ésima iteración,

$$L_n = 2^{n-1} \cdot \frac{1}{4^n} = \frac{1}{2^n + 1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} L_n = \frac{1}{2}$$

Considerando $O = (0, 1) \setminus C$ para C la intersección de todas las iteraciones, tenemos que la frontera de O es C , que tiene como medida $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

iv) Falso: basta considerar $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1.2.3 Ejercicio 5

Demuestra que para cada $A \in \mathfrak{M}_1$ con $\mu(A) < \infty$ y cada $\varepsilon > 0$ existe una colección finita de intervalos disjuntos y abiertos $\{I_i\}_{i=1}^m$ tales que:

$$\mu\left(A \Delta \bigcup_{i=1}^m I_i\right) < \varepsilon \quad \text{con } A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Demostración:

Por ser A un conjunto medible, es de la forma $A = (\bigcap_{i \in \mathbb{N}} G_i) \setminus M$ para $(G_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de abiertos de \mathbb{R}^N y M un conjunto de medida nula.

Como M no interfiere en la medida, tenemos que $\mu(A) = \lim_n \mu(G_n) < \infty$. Por definición de límite, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(G_{n_0} \setminus A) = \mu(G_{n_0}) - \mu(A) < \frac{\varepsilon}{2}$. Hemos podido pasar a la medida de la diferencia de conjuntos al estar en el caso de medida finita. Por simplicidad, denotaremos $G = G_{n_0}$.

Al ser G abierto, podemos expresarlo como unión numerable de bolas abiertas $\{J_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos $O_n = \bigcup_{i=1}^n J_i$. Tenemos que $(O_n)_n$ es una sucesión de conjuntos crecientes cuya unión es igual a G . Razonando como en el caso anterior:

$$\mu(G) = \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} O_i\right) = \lim_n \mu(O_n) \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N} : \mu(G \setminus O_{n_1}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Tomamos como $\{I_i\}_{i=1}^{n_1}$ las componentes conexas de O_{n_1} , que son disjuntas e intervalos (en \mathbb{R} los conjuntos conexos son precisamente los intervalos). Además, hay un número finito de ellas (en el peor de los casos, cada J_i con $1 \leq i \leq n_1$ sería

una componente conexa). De este modo, aplicando la monotonía de la medida:

$$\mu\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^n I_i\right) \leq \mu\left(G \setminus \bigcup_{i=1}^n I_i\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n I_i \setminus A\right) \leq \mu(G \setminus A) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sumando se llega al resultado.

§3. Funciones medibles

1.3.1 Ejercicio 5

Sea $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ uniformemente continua y acotada, demuestra que la siguiente función es medible:

$$\varphi : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \quad t \longmapsto \varphi(t) = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f(x+t) - f(x)|$$

Demostración:

Por ser f acotada, tenemos que $\exists M \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq M \forall x \in \mathbb{R}^N$. De este modo, sean $x, y \in \mathbb{R}^N$, tenemos:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| \leq M + M = 2M$$

Por tanto, concluimos que φ es también acotada. Veamos que es medible por la definición.

Sea $K := \sup_{t \in \mathbb{R}^N} \varphi(t)$, como φ solo toma valores no negativos tenemos que:

$$\varphi^{-1}\left((-\infty, 0]\right) = \emptyset \in \mathfrak{M}_N \quad \varphi^{-1}\left((-\infty, K]\right) = \mathbb{R}^N \in \mathfrak{M}_N$$

Fijando ahora $\varepsilon \in (0, K)$ cualquiera, veamos que $\varphi\left((-\infty, \varepsilon]\right)$ es medible. Al ser f uniformemente continua por hipótesis, tenemos que para el ε fijado existe un $\delta > 0$ tal que:

$$\|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$$

Podemos reescribir $y = x + t$ para $t = y - x \in \mathbb{R}^N$. De este modo; sea $t \in \mathbb{R}^N$, se tiene:

$$\|t\| < \delta \Rightarrow |f(x+t) - f(x)| < \varepsilon$$

Se cumple la condición para todo x de \mathbb{R}^N . Al tomar supremos, la desigualdad

pasa a ser no estricta, y el término mayorado por ε se corresponde con $\varphi(t)$ por definición:

$$\|t\| < \delta \Rightarrow \varphi(t) = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f(x+t) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Así, sea $(t_n)_n$ una sucesión que tiende al origen, ha de "atravesar" todas las bolas de radio δ asociado a valores de ε arbitrariamente pequeños. Por tanto, podemos concluir que ϕ es continua en el origen.

Sean $s, t \in \mathbb{R}^N$ cualesquiera, se cumple:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f(x+t) - f(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f(x+t) - f(x+s)| + |f(x+s) - f(x)| \leq \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f(x+t) - f(x+s)| + \sup_{y \in \mathbb{R}^N} |f(y+s) - f(y)| \stackrel{z=x+s}{=} \sup_{z \in \mathbb{R}^N} |f(z+(t-s)) - f(z)| + \varphi(s) \end{aligned}$$

Despejando, obtenemos $0 \leq \varphi(t) - \varphi(s) \leq \varphi(t-s) \xrightarrow{s \rightarrow t} \varphi(0) = 0$.

Por todo lo anterior, concluimos que φ es continua y acotada, luego es medible en \mathfrak{B}_N y en \mathfrak{M}_N

II Series de Fourier

§1. Sistemas ortogonales

2.1.1 Ejercicio 1

Una colección finita de funciones $(\varphi_k)_{k=0}^n$ (todas con dominio I) se dice *linealmente independiente* si

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k \varphi_k \equiv 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_k = 0 \text{ para todo } 0 \leq k \leq n.$$

Una colección de funciones $(\varphi_k)_{k=0}^\infty$ se dice *linealmente independiente* si todo subconjunto finito suyo es linealmente independiente. Prueba que todo sistema ortonormal sobre I es linealmente independiente.

Demostración:

Sea $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un sistema ortonormal con dominio I . Sea $A := \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{N}$ finito. Supongamos que se cumple $\sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_{a_k} \equiv 0$.

Fijado $j \in \{1, \dots, n\}$ cualquiera, tenemos:

$$\langle \varphi_{a_j}, 0 \rangle = 0 = \left\langle \varphi_{a_j}, \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_{a_k} \right\rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle \varphi_{a_j}, \varphi_{a_k} \rangle = \lambda_j$$

La última igualdad se deduce como aplicación directa de la ortonormalidad. Como el j escogido fue arbitrario, concluimos que el sistema es linealmente independiente.

2.1.2 Ejercicio 2

Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt. Sea $(f_n)_{n=0}^\infty$ un sistema de funciones linealmente independientes en $L^2(I)$. Sea la sucesión de funciones dada

recursivamente por

$$g_0 := f_0, \quad g_{n+1} := f_{n+1} - \sum_{k=0}^n \frac{\langle f_{n+1}, g_k \rangle}{\langle g_k, g_k \rangle} g_k.$$

Demuestra que $(g_n)_{n=0}^\infty$ es un sistema ortogonal y que

$$\text{span}\{f_k\}_{k=0}^n = \text{span}\{g_k\}_{k=0}^n$$

para todo n .

Demostración: Aplicaremos inducción.

En primer lugar, probaremos que $\{g_k\}_{k=0}^n$ es ortogonal para todo $n \in \mathbb{N}$. Comprobemos el caso base:

$$g_1 = f_1 - \frac{\langle f_1, g_0 \rangle}{\langle g_0, g_0 \rangle} g_0 = f_1 - \frac{\langle f_1, f_0 \rangle}{\langle f_0, f_0 \rangle} f_0$$

Aplicando la linealidad del producto interno,

$$\langle g_1, g_0 \rangle = \langle f_1, f_0 \rangle - \frac{\langle f_1, f_0 \rangle}{\langle f_0, f_0 \rangle} \cdot \langle f_0, f_0 \rangle = 0$$

Supongamos que la hipótesis es cierta para n y comprobemos que se cumple para $n+1$. Sea $j \in \{1, \dots, n\}$, aplicando de nuevo la linealidad,

$$\begin{aligned} g_{n+1} = f_{n+1} - \sum_{k=0}^n \frac{\langle f_{n+1}, g_k \rangle}{\langle g_k, g_k \rangle} g_k &\Rightarrow \langle g_{n+1}, g_j \rangle = \langle f_{n+1}, g_j \rangle - \sum_{k=0}^n \frac{\langle f_{n+1}, g_k \rangle}{\langle g_k, g_k \rangle} \cdot \langle g_k, g_j \rangle = \\ &= \langle f_{n+1}, g_j \rangle - \frac{\langle f_{n+1}, g_j \rangle}{\langle g_j, g_j \rangle} \cdot \langle g_j, g_j \rangle = 0 \end{aligned}$$

Tenemos la ortogonalidad. Queda ver que se respetan las clausuras.

Puesto que $f_0 = g_0$, tenemos el caso base. Supongamos que se cumple para n

y veamos que es cierto para $n + 1$.

$$g_{n+1} = f_{n+1} - \sum_{k=0}^n \frac{\langle f_{n+1}, g_k \rangle}{\langle g_k, g_k \rangle} g_k \in K\langle g_0, \dots, g_n, f_{n+1} \rangle = K\langle f_0, \dots, f_n, f_{n+1} \rangle$$

$$f_{n+1} = g_{n+1} + \sum_{k=0}^n \frac{\langle f_{n+1}, g_k \rangle}{\langle g_k, g_k \rangle} g_k \in K\langle g_0, \dots, g_n, g_{n+1} \rangle$$

Tenemos que $K\langle g_0, \dots, g_n, g_{n+1} \rangle = K\langle f_0, \dots, f_n, f_{n+1} \rangle$ por doble contenido.

2.1.3 Ejercicio 3

Demuestra que el sistema de polinomios $(x^n)_{n=0}^\infty$ es linealmente independiente. Calcula las cuatro primeras funciones que se obtienen al aplicar el proceso de ortonormalización de Gram–Schmidt sobre el intervalo $[-1, 1]$ (De este procedimiento pueden obtenerse los llamados *polinomios de Legendre*).

Demostración:

Todo polinomio no nulo puede tener a lo sumo un número de raíces igual a su grado. Por tanto, sea $n \in \mathbb{N}$ cualquiera,

$$\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n \equiv 0 \iff \alpha_i = 0 \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}$$

El sistema es linealmente independiente por definición. Apliquemos ahora el proceso de Gram-Schmidt.

$$\int_{-1}^1 x \cdot 1 \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 = 0 \Rightarrow p_1 = x - \frac{\langle x, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = x$$

$$\int_{-1}^1 x \cdot x^2 \, dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-1}^1 = 0 \quad \int_{-1}^1 x^2 \cdot 1 \, dx = \frac{2}{3} \quad p_2 = x^2 - \frac{2}{3\langle 1, 1 \rangle} 1 - \frac{0}{\langle x, x \rangle} x = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$\int_{-1}^1 x^3 \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) dx = 0 = \int_{-1}^1 x^3 \cdot 1 dx$$

$$\int_{-1}^1 x^3 \cdot x dx = \frac{2}{5}$$

$$p_3 = x^3 - \frac{2}{5\langle x, x \rangle} x = x^3 - \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{2} x = x^3 - \frac{3}{5} x$$

El proceso de Gram-Schmidt no garantiza la ortonormalidad, sino únicamente la ortogonalidad. Tras normalizar, se obtienen los siguientes vectores.

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{45}{8}} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right), \sqrt{\frac{175}{8}} \left(x^3 - \frac{3}{5}x \right) \right\}$$

2.1.4 Ejercicio 4

Sea $I := [0, 2\pi]$ y sea $(\varphi_n)_{n=0}^\infty$ un sistema ortonormal en $\mathcal{L}_2(I)$. Demuestra los siguientes apartados:

(1) los siguientes enunciados son equivalentes:

- (a) dadas f y g en $\mathcal{L}_2(I)$, $\langle f, \varphi_n \rangle = \langle g, \varphi_n \rangle$ para todo n implica $f \stackrel{\mu-a.e.}{=} g$.
- (b) dada $f \in \mathcal{L}_2(I)$, $\langle f, \varphi_n \rangle = 0$ para todo n implica $f \stackrel{\mu-a.e.}{=} 0$.
- (c) Si T es un sistema ortonormal que contiene a $(\varphi_n)_{n=0}^\infty$, entonces $T = (\varphi_n)_{n=0}^\infty$ (en cuyo caso se dice que $(\varphi_n)_{n=0}^\infty$ es un sistema ortonormal maximal).

(2) Supón que $(\varphi_n)_{n=0}^\infty$ satisface el enunciado (c). Demuestra que toda $f \in \mathcal{L}_2(I)$ verifica

$$\left\| f - \sum_{k=0}^n \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

¿Es $(\varphi_n)_{n=0}^\infty$ una base (algebraica, también llamada de Hämel) del espacio vectorial $\mathcal{L}_2(I)$?

(3) Demuestra que los sistemas

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots \right)$$

y $(e^{inx}/\sqrt{2\pi})_{n \in \mathbb{Z}}$ son sistemas ortonormales maximales.

Demostración:

(1) Veamos que se cumplen todas las implicaciones:

$a \Rightarrow b$ | Se tiene al considerar $g = 0$.

$b \Rightarrow c$ | Supongamos que existe $f \in T \setminus \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

Al ser, T ortonormal, $\{f\} \cup \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ha de serlo también. De este modo, $\langle f, \varphi_n \rangle = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Aplicando la hipótesis, tenemos que $f \stackrel{\mu-a.e.}{=} 0$. Sabemos por el primer ejercicio de esta sección que todo sistema ortonormal es linealmente independiente, lo que entra en contradicción con $f \stackrel{\mu-a.e.}{=} 0$.

$c \Rightarrow a$ | Supongamos $f, g \in \mathcal{L}_2([0, 2\pi])$ tales que $\langle f, \varphi_n \rangle = \langle g, \varphi_n \rangle \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Supongamos además que f y g no son iguales en casi todo punto; es decir, $f - g \neq 0$ en $L_2([0, 2\pi])$.

Sea $T = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Aplicando la hipótesis, para $n \in \mathbb{N}$ cualquiera,

$$\langle f - g, \varphi_n \rangle = \langle f, \varphi_n \rangle - \langle g, \varphi_n \rangle = 0$$

De este modo, $f - g$ es un vector no nulo ortogonal a todos los de T . Por tanto, normalizando, $\left\{ \frac{f-g}{\|f-g\|} \right\} \cup T$ es un sistema ortonormal. Aplicando la hipótesis de maximalidad, ha de cumplirse $\frac{f-g}{\|f-g\|} \stackrel{\mu-a.e.}{=} \varphi_j$ para cierto $j \in \mathbb{N}$.

Como T es ortonormal, tenemos que:

$$\|f - g\| \cdot \|\varphi_j\|^2 = \langle f - g, \varphi_j \rangle = \langle f, \varphi_j \rangle - \langle g, \varphi_j \rangle \neq 0$$

Hemos llegado a una contradicción.

(2) Como hemos demostrado la caracterización en el apartado anterior, suponer que el sistema ortonormal T verifica (c) es equivalente a suponer que verifica (a).

Por el resultado 4.1.5 de los apuntes de Teoría, sabemos que $s := \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k$ converge y está bien definida. Sea $j \in \mathbb{N}$ cualquiera,

$$\langle s, \varphi_j \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k, \varphi_j \right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \cdot \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle = \langle f, \varphi_j \rangle$$

Por tanto, en vista de la afirmación (a), es claro que $f \stackrel{\mu-a.e.}{=} s$. Por Análisis Matemático I, sabemos que la norma es una aplicación continua. De este modo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{k=0}^n \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\| = \left\| f - \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\| = 0$$

La convergencia se da en norma, pero no tiene por qué ocurrir que $f = s$. Por tanto, sí sería una base de $L_2(I)$, pero no de $\mathcal{L}_2(I)$ al no ser este último un espacio de Banach.

§2. Funciones de variación acotada

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida sobre un intervalo compacto no degenerado y sea $P := \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b\}$ una partición finita de $[a, b]$. Llamamos variación de f , semi-variación positiva de f y semi-variación negativa de f respecto de P a los valores respectivos

$$V(f, P) := \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|,$$

$$V^+(f, P) := \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1}))^+,$$

$$V^-(f, P) := \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1}))^-,$$

donde, para $x \in \mathbb{R}$, $x^+ := \max\{x, 0\}$ y $x^- := \max\{-x, 0\}$.

Como de costumbre, denotaremos por $\mathcal{P}([a, b])$ al conjunto de todas las particiones finitas de $[a, b]$. Se llama variación de f al valor

$$V(f) := \sup\{V(f, P) : P \in \mathcal{P}([a, b])\}.$$

Si $V(f) < \infty$, se dice que f es de variación acotada. Las semi-variaciones positiva y negativa de f se definen como

$$V^+(f) := \sup\{V^+(f, P) : P \in \mathcal{P}([a, b])\}, \quad V^-(f) := \sup\{V^-(f, P) : P \in \mathcal{P}([a, b])\}.$$

2.2.1 Ejercicio 1

Demuestra que una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es de variación acotada si y sólo si sus semi-variaciones positiva y negativa son ambas finitas.

Demostración:

Sea $P := \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b\} \in \mathcal{P}([a, b])$ cualquiera, tenemos:

$$V(f, P) := \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^n \left(f(t_i) - f(t_{i-1}) \right)^+ + \left(f(t_i) - f(t_{i-1}) \right)^- = V^+(f, P) + V^-(f, P)$$

Tomando supremos, llegamos a que $V(f) \leq V^+(f) + V^-(f)$. Por tanto, si las semi-variaciones positiva y negativa son finitas, también tendrá que serlo $V(f)$.

En cuanto a la otra implicación, supongamos ahora que $V(f)^+ = \infty$ para ver que $V(f) = \infty$ (el caso $V^-(f) = \infty$ es análogo). Sea $K \in \mathbb{R}$; por hipótesis, existe $P \in \mathcal{P}([a, b])$ tal que $V^+(f, P) > K$. Por tanto,

$$V(f, P) = V^+(f, P) + V^-(f, P) \geq V^+(f, P) > K$$

2.2.2 Ejercicio 2

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función de variación acotada tal que $f(a) = 0$. Demuestra que $f = g - h$, donde

$$g(x) = V^+(f; [a, x]), \quad h(x) = V^-(f; [a, x])$$

Demostración:

Fijamos $x \in [a, b]$ cualquiera. Sea $P = \{a = t_0 < \dots < t_n = x\} \in \mathcal{P}([a, x])$ cualquiera, se cumple:

$$\begin{aligned} V^+(f|_{[a, x]}, P) - V^-(f|_{[a, x]}, P) &= \sum_{i=1}^n \left(f(t_i) - f(t_{i-1}) \right)^+ - \left(f(t_i) - f(t_{i-1}) \right)^- = \\ &= \sum_{i=1}^n f(t_i) - f(t_{i-1}) = f(x) - f(a) = f(x) \end{aligned}$$

Se tiene por ser telescópica la suma. Tomando supremos (podemos hacerlo adecuadamente al ser de variación acotada) se llega al resultado.

2.2.3 Ejercicio 3

Demuestra que toda función de variación acotada f sobre un intervalo compacto $[a, b]$ puede descomponerse como $f = g_1 - g_2$, donde g_1 y g_2 son dos funciones crecientes y acotadas en $[a, b]$.

Demostración:

Por el ejercicio anterior, sabemos que para las siguientes funciones,

$$g_1(x) = V^+(f|_{[a,x]}) + f(a) \qquad g_2(x) = V^-(f|_{[a,x]})$$

se cumple que $f(x) = g_1(x) - g_2(x)$. Veamos que g_2 es monótona (el caso g_1 es análogo).

Sean $x, y \in [a, b]$ con $x < y$, veamos que $g_2(x) \leq g_2(y)$.

Sea $P = \{a = t_0 < \dots < t_n = x\} \in \mathcal{P}([a, x])$, consideramos $\hat{P} := P \cup \{y\} \in \mathcal{P}([a, y])$. Así,

$$\begin{aligned} V^-(f|_{[a,x]}, P) &= \sum_{i=1}^n \left(f(t_i) - f(t_{i-1}) \right)^- \leq \left(f(y) - f(x) \right)^- + \sum_{i=1}^n \left(f(t_i) - f(t_{i-1}) \right)^- = \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \left(f(t_i) - f(t_{i-1}) \right)^- = V^-(f|_{[a,y]}, \hat{P}) \end{aligned}$$

En vista del primer ejercicio de esta sección, al ser f de variación acotada, también lo son g_1 y g_2 (luego son acotadas). Tomando supremos podemos ver que son crecientes.

2.2.4 Ejercicio 4

Demuestra que si una función f es de variación acotada, entonces todas sus discontinuidades son de salto finito o evitables.

Demostración:

Por el ejercicio anterior, sabemos que es posible descomponer f como $f = g_1 - g_2$

con g_1, g_2 funciones crecientes acotadas. Basta ver que las discontinuidades de una función g creciente son de salto finito. Para ello, veamos que existen siempre los límites laterales de g .

Fijado x cualquiera, consideramos el siguiente conjunto:
 $\mathcal{A} := \{g(t) : t < x\}$, que está acotado superiormente por ser g creciente. De este modo, podemos considerar $A := \sup \mathcal{A}$.

Por definición de supremo, para $\varepsilon > 0$ cualquiera, existe $\delta > 0$ tal que:

$$g(x - \delta) > A - \varepsilon$$

Al ser g creciente, para cada $t \in (x - \delta, x)$, se cumple:

$$A - \varepsilon < g(x - \delta) \leq g(t) \leq A \quad -A \leq -A < \varepsilon - A$$

De este modo, sumando, $-\varepsilon < g(t) - A < \varepsilon$. Tenemos que existe el límite izquierdo. Análogamente, podemos comprobar la existencia del derecho.

Volviendo al problema original, tenemos $f = g_1 - g_2$ con g_1 y g_2 monótonas y acotadas. Por tanto, todas sus discontinuidades han de ser de salto finito. Al pasar a la resta, podrían producirse además discontinuidades evitables. Por ejemplo,

$$g_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad g_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Toda discontinuidad de f ha de corresponderse con una discontinuidad de g_1 o de g_2 (o de ambas a la vez), luego han de ser de salto finito o evitables.

§3. Fallos en las condiciones de Dini o de Jordan

2.3.1 Ejercicio 1

Consideremos la siguiente función:

$$f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longmapsto f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

extendida por periodicidad 2π en \mathbb{R} . Demuestra que f es continua en \mathbb{R} , y que en $x = 0$ no se verifica la condición de Jordan, pero sí la de Dini.

Demostración:

Para $x = 0$, $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0} t \sin\left(\frac{1}{t}\right) = 0 = f(x)$: producto de un infinitésimo por una función acotada.

En el resto de $[-\pi, \pi]$, f es claramente continua al ser producto de funciones continuas. Finalmente, por ser una función con simetría par, es continua en la frontera de las expansiones por periodicidad:

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = f(\pi) = \pi \sin\left(\frac{1}{\pi}\right) = -\pi \sin\left(-\frac{1}{\pi}\right) = f(-\pi) = \lim_{x \rightarrow -\pi^+} f(x)$$

Para ver que no se cumple la condición de Jordan, hemos de comprobar que f no es de variación acotada en $[-\varepsilon, \varepsilon]$ para ningún $\varepsilon > 0$. Es decir,

$$\forall \varepsilon > 0, \forall K \in \mathbb{R} \quad \exists P \in \mathcal{P}([-\varepsilon, \varepsilon]) : V(f, P) > K$$

Consideramos la siguiente sucesión: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{2}{n\pi}\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Sea $\varepsilon > 0$, sea $K \in \mathbb{R}$. Por la propiedad arquimediana, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ para todo $n \geq n_0$. Dado $n \geq n_0$, evaluamos f en un término de la sucesión:

$$f(a_n) = \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \cdot b_n \quad \text{con } b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } \text{mod }_2(n) = 0 \\ 1 & \text{si } \text{mod }_4(n) = 1 \\ -1 & \text{si } \text{mod }_4(n) = 3 \end{cases}$$

Comparando con la expresión de la variación de f en una partición, tenemos que:

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |f(a_k) - f(a_{k-1})| \geq \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{k-1} > \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{k-1} = \infty$$

Por tanto, podemos tomar un subconjunto finito de la sucesión contenido en $[-\varepsilon, \varepsilon]$ tal que la variación que induzca cualquier partición que lo contenga sea mayor que K . Hemos comprobado que no se cumple la condición de Jordan.

Veamos ahora que sí se verifica la condición de Dini. Como ya hemos comprobado antes, la función f tiene simetría par. Por tanto, para $t > 0$ se tiene:

$$g(t) := \frac{f(t) + f(-t)}{2} = \frac{2f(t)}{2} = f(t)$$

Tomando límites, $g(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = 0$, como ya estudiamos antes. De este modo, sea $\delta \in (0, \pi)$ cualquiera,

$$\frac{g(t) - g(0^+)}{t} = \frac{f(t)}{t} = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{t}\right) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases} \in L_1([0, \delta])$$

Es $L_1([0, \delta])$ en virtud del criterio de integración de Lebesgue, pues la función es acotada y tiene un conjunto de discontinuidades de medida nula. Hemos comprobado que se cumple la condición de Dini.

2.3.2 Ejercicio 2

Consideremos la siguiente función:

$$f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longmapsto f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\log\left(\frac{1}{|x|}\right)} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

extendida por periodicidad 2π en \mathbb{R} . Demuestra que f es continua en \mathbb{R} , y que en $x = 0$ no se verifica la condición de Dini, pero sí la de Jordan.

Demostración:

En primer lugar, veamos que es continua. Como $\lim_{x \rightarrow \infty} \log(x) = \infty$, tenemos que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$. Además, al tener f simetría par tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = f(\pi) = f(-\pi) = \lim_{x \rightarrow -\pi^+}$$

Por tanto, f es continua en $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Veamos que f sí cumple la condición de Jordan. Sea $\varepsilon \in (0, \pi)$ cualquiera, tenemos que f es monótona en $[-\varepsilon, 0]$ y en $[0, \varepsilon]$, luego es de variación acotada. Como es continua en \mathbb{R} , es $L_1([0, 2\pi])$. Por tener simetría par,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t) + f(-t)}{2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0) = 0$$

Veamos ahora que no cumple la condición de Dini. Reutilizando lo explicado para la Condición de Jordan, fijamos $\delta > 0$ arbitrariamente pequeño. Se tiene:

$$g(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} = f(t) \quad \frac{g(t) - g(0^+)}{t} = \frac{g(t)}{t} = \frac{1}{t \cdot \log\left(\frac{1}{|t|}\right)}$$

Para $t > 0$ suficientemente pequeño, $\frac{1}{t} > e$, luego $\log\left(\frac{1}{t}\right) > 1$. De este modo,

$$\left| \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\log\left(\frac{1}{t}\right)} \right| \geq \left| \frac{1}{t} \right| \notin L_1([0, \delta])$$

Por tanto, no se satisface la condición de Dini.

2.3.3 Ejercicio 3

Consideremos la función $h(x) = f(x) \cdot \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$, donde f es la función del ejercicio anterior. Si la extendemos por periodicidad en \mathbb{R} , ¿dónde es continua? ¿Satisface

la condición de Jordan? ¿Y la de Dini?

$$h : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longmapsto h(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{\log\left(\frac{1}{|x|}\right)} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Demostración:

En primer lugar, tenemos que la función es continua en 0, pues $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0 = h(0)$ al ser f un infinitésimo y $\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$ una función acotada. Una vez más, la función tiene simetría par, luego:

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} h(x) = h(\pi) = h(-\pi) = \lim_{x \rightarrow -\pi^+} h(x)$$

Por tanto, tenemos que h es continua en $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Veamos que no verifica la condición de Jordan. Consideramos la siguiente sucesión: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{2}{n\pi}\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Para $\varepsilon > 0$ cualquiera, la sucesión estará contenida en $[-\varepsilon, \varepsilon]$ a partir de cierto término n_0 . Dado $n \geq n_0$, comparando con la variación de h ,

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |f(a_k) - f(a_{k-1})| \geq \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{\log\left(\frac{\pi}{2} \cdot k\right)} = \infty$$

Como la serie diverge, podemos tomar sumas parciales arbitrariamente grandes. Así, para cada $K \in \mathbb{R}$ es posible tomar $P \in \mathcal{P}([-\varepsilon, \varepsilon])$ tal que $V(h, P) > K$. Concluimos que no cumple la condición de Jordan.

Veamos que no cumple la condición de Dini. Sea $\delta > 0$ cualquiera, sabemos que:

$$g(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} = f(t) \quad \hat{g}(t) := \frac{g(t) - g(0^+)}{t} = \frac{g(t)}{t} = \frac{\sin^2\left(\frac{1}{t}\right)}{t \cdot \log\left(\frac{1}{|t|}\right)}$$

Como $\left|\sin^2\left(\frac{1}{t}\right)\right| \leq 1$ y para t suficientemente pequeño tenemos que $|f(t)| \leq 1$. Entonces, se cumple:

$$|\hat{g}(t)| \leq \frac{1}{t} \notin L_1([0, \delta])$$

Hemos comprobado que no cumple la condición de Dini.