TG II

Javier Ortín Rodenas
Bruno Martín Rivera
Jorge Gota Ortín
Alejandra Sánchez Mayo

1 Enunciado:

Un toro es la superficie de revolución generada por una circunferencia al girar alrededor de un eje situado en su mismo plano y que no la corta.
Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $0 < a < b$.
Consideremos el toro cuya curva generatriz es la circunferencia de centro en el punto $(a, 0, 0)$ y radio b situada en el plano $y = 0$. Dicha circunferencia gira alrededor del eje z.

(i) Usando como parámetros $u \in (0, 2\pi)$, ángulo de giro del punto inicial respecto del eje x, y $v \in (0, 2\pi)$, ángulo de giro de dicho punto respecto del eje z, obtener una parametrización del toro, como superficie de revolución, de la forma

$$\begin{aligned} X : U = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

(ii) Con ayuda de dicha parametrización, obtener una ecuación cartesiana de la superficie generada, es decir, de modo que el toro se pueda expresar en la forma

$$\mathbb{T} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\right\}$$

donde F es una función que hay que determinar.

(iii) Determinar si X es una carta del toro de clase $C^k (k \geq 1)$.

(iv) Determinar el plano tangente al toro y el vector unitario normal en cada punto regular $p = X(q),\ q \in U$ del soporte $X(U)$

2 Solución

2.1 Primer apartado

Para parametrizar el toro, podemos centrarnos primero en parametrizar la curva generatriz para posteriormente modelar el proceso de revolución. En este caso, la curva generatriz es una circunferencia de centro $(a, 0, 0)$ y radio b contenida en el plano $y = 0$.

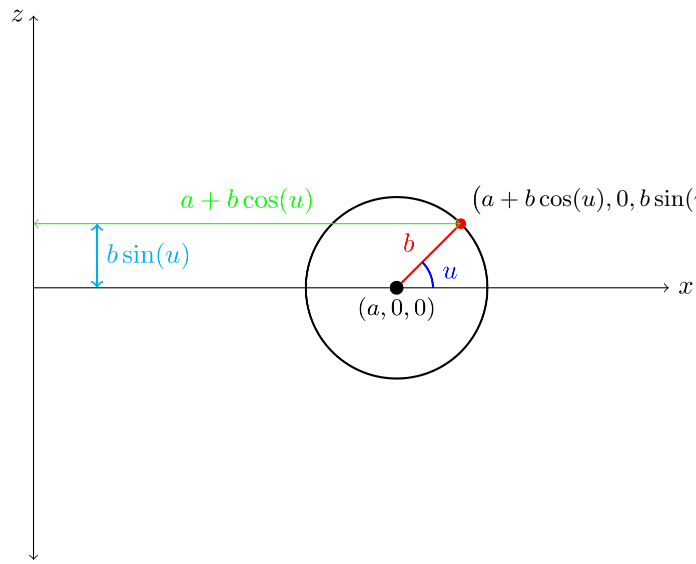

Figura 1: Representación de la circunferencia generatriz en el plano $y = 0$

Hemos utilizado coordenadas polares para parametrizar la circunferencia generatriz. En este caso, el radio de la circunferencia es b, luego es el coeficiente que multiplica al seno y al coseno del ángulo que forma cada punto con el eje x. Como la circunferencia se encuentra en el plano $y = 0$, la segunda componente tiene valor constante 0. Finalmente, sumamos las coordenadas del centro $(a, 0, 0)$ para obtener la parametrización final de la curva generatriz.

Queda parametrizar ahora el proceso de revolución. Como el eje de giro es el eje z, el radio de revolución de un punto de la circunferencia será su distancia hasta él; es decir, su componente x. El resultado final del proceso de revolución tendrá la misma coordenada z que el punto que lo generó. No obstante, las componentes x e y se verán modificadas según el ángulo de giro.

Sea $(x_0, 0, z_0)$ un punto cualquiera de la circunferencia generatriz, los puntos del toro resultantes de su revolución son los de la circunferencia de centro $(0, 0, z_0)$ y radio x_0 en el plano $z = z_0$. Razonando así para cada punto de la generatriz llegamos a la parametrización final del toro.

Veamos un ejemplo gráfico del proceso de revolución para un punto dado. Fijado el punto de la Figura 1, veamos qué sucede al girarlo sobre el eje z. La siguiente representación coincide con el escenario supuesto, pues $0 < b < a$ por hipótesis, lo que garantiza que la generatriz no corte al eje de giro.

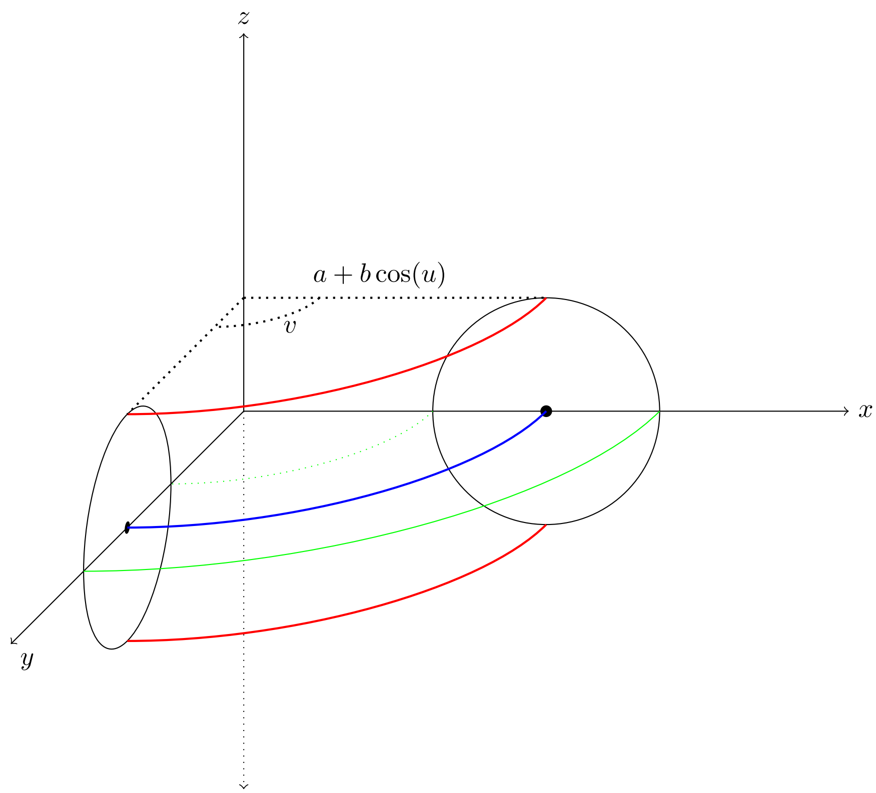

Figura 2: Giro sobre el eje z de la generatriz en el primer cuadrante

Por todo lo anterior, la parametrización del toro es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
X : U = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
(u,v) &\longmapsto X(u, v) = \Big(\big(a + b\cos(u)\big)\cos(v),\ \big(a + b\cos(u)\big)\sin(v),\ b\sin(u) \Big)
\end{aligned}
$$

2.2 Segundo apartado

Veamos cómo definir el toro parametrizado en el apartado anterior con una ecuación cartesiana. Es decir, buscamos que no aparezcan los parámetros u y v, sino que solo intervengan las variables x, y, z. Planteamos el siquiente sistema para después obtener una única ecuación:

$$\begin{cases} x = \Big(a + b\cos(u)\Big)\cos(v) \\ y = \Big(a + b\cos(u)\Big)\sin(v) \\ z = b\sin(u) \end{cases}$$

Relacionamos las ecuaciones del sistema mediante identidades trigonométricas:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = \Big(a + b\cos(u)\Big)^2 \cos^2(v) + \Big(a + b\cos(u)\Big)^2 \sin^2(v) = \\ = \Big(a + b\cos(u)\Big)^2 = a^2 + 2ab\cos(u) + b^2\cos^2(u) \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + 2ab\cos(u) + b^2\cos^2(u) + b^2\sin^2(u) = a^2 + 2ab\cos(u) + b^2$$

Notamos que el coseno sigue presente, de manera similar a cómo ocurría en la expresión de $x^2 + y^2$. Buscamos definir el toro a partir de esta correlación.

$$(x^2+y^2+z^2+a^2-b^2)^2 = \big(2a^2 + 2ab\cos(u)\big)^2 = 4a^4+4a^3b\cos(u)+4a^2b^2\cos^2(u)$$

Finalmente, sacando factor común obtenemos la ecuación cartesiana del toro:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - b^2)^2 = 4a^2(a^2 + 2ab\cos(u) + b^2\cos^2(u)) = 4a(x^2 + y^2)$$

Por todo lo anterior, si definimos la siguiente función, podremos escribir el toro como su conjunto de ceros.

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x{,}y, z) &\longmapsto F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - b^2)^2 - 4a(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

$$\mathbb{T} = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\big\}$$

2.3 Tercer apartado

Para comprobar que X es una carta de clase $\mathcal{C}^k (k \geq 1)$, han de verificarse simultáneamente las siguientes condiciones:

- X es de clase $\mathcal{C}^k$
- $X : U \longrightarrow X(U)$ es un homeomorfismo con la topología heredada
- $d(X)(u,v)$ tiene rango 2 $\quad \forall (u,v) \in U$

Veamos que X no es una carta al comprobar que su matriz Jacobiana (y por tanto su diferencial) no siempre tiene rango máximo. Para ello, mostraremos un contraejemplo donde la diferencial de X no tiene rango 2. Podemos comprobarlo al calcular el determinante de las submatrices cuadradas de su matriz Jacobiana.

$$J_X(u,v) = \begin{pmatrix} -b\sin(u)\cos(v) & -\big(a + b\cos(u)\big)\sin(v) \\ -b\sin(u)\sin(v) & \big(a + b\cos(u)\big)\cos(v) \\ b\cos(u) & 0 \end{pmatrix}$$

Veamos qué ocurre para el punto $(u,v) = (\pi, \frac{\pi}{2}) \in (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) = U$.

$$J_X(\pi,\pi) = \begin{pmatrix} -b\cos(v) & -a\sin(v) \\ -b\sin(v) & a\cos(v) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En estas condiciones, es evidente que los determinantes de las submatrices cuadradas son todos nulos. Por tanto, $r\big(J_X(\pi,\pi)\big) \neq 2$, lo que demuestra que X no es una carta.