Análisis Matemático III

Javier Ortín Rodenas

Curso 2025-2026

Contenidos

Introducción de la asignatura

La materia será la misma que en años anteriores, aunque habrá un cambio en la metodología de enseñanza: no habrá tutorías grupales. No obstante, sí habrá evaluación continua. Su funcionamiento se explicará posteriormente.

Preliminares

En la sección de preliminares se tratarán los siguientes temas:

- Cardinalidad de conjuntos
- Descomposición de abiertos de $\mathbb{R}^N$ en unión de cubos diádicos
- Series dobles

§1. Cardinalidad de conjuntos

0.1 Definición de cardinalidad, tipos de cardinalidad

Intuitivamente, podemos definir la cardinalidad de un conjunto como el número de elementos que tiene. Además, es lógico plantear la distinción entre conjuntos finitos e infinitos. Veamos cómo formalizar esta idea.

Sea A un conjunto no vacío, diremos que A es un conjunto finito de cardinalidad $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ si existe una aplicación biyectiva $\varphi : \{1, 2, \ldots, n\} \to A$.
Se considera que el conjunto vacío $\varnothing$ es finito con cardinal 0.

Sea A un conjunto cualquiera, diremos que es un conjunto infinito si existe cierta aplicación inyectiva $\varphi : \mathbb{N} \to A$. Dentro de esta clasificación, diremos que A es infinito numerable si existe una aplicación $\varphi : \mathbb{N} \to A$ biyectiva. Si esto último no fuese posible, diremos que A es infinito no numerable.

Aunque no entra dentro de los objetivos de esta asignatura, es interesante contemplar la siguiente observación: Si un conjunto no es un conjunto finito, podemos afirmar simplemente que es un conjunto "no finito". Si además incluimos el axioma de elección, sí podremos afirmar que tal conjunto es infinito. Dentro de los conjuntos infinitos, todos son o bien numerables o bien no numerables, sin intersección entre ambas categorías.

0.2 Ejemplos de conjuntos numerables

• $\mathbb{N}$: trivial, basta considerar la aplicación identidad.

• $\mathbb{Z}$: basta considerar la siguiente aplicación biyectiva:

$$\varphi(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{si } n \text{ es par} \\ -\frac{n-1}{2}, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \qquad \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\ \downarrow\varphi & \downarrow\varphi & \downarrow\varphi & \downarrow\varphi & \downarrow\varphi & \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & \cdots \end{array}$$

• $\mathbb{Q} := \left\{\frac{z}{n} : z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$. Denotaremos por $\hat{Q}$ al conjunto $\left\{\frac{z}{n} : z, n \in \mathbb{N}\right\}$. Como hemos visto en el apartado anterior, al ser $\mathbb{Z}$ numerable, $\hat{Q}$ y $\mathbb{Q}$ han de tener necesariamente la misma cardinalidad. Por tanto, basta con demostrar que $\hat{Q}$ es numerable, lo que haremos a continuación por medio de una doble desigualdad.

Representaremos los elementos de $\hat{Q}$ en una tabla infinita que recorreremos diagonalmente:

	1	2	3	4	...
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	...
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	...
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	...
4	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Por tanto, obtenemos como resultado la siguiente aplicación $\varphi : \mathbb{N} \to \hat{Q}$ con

$$\varphi(1) = \frac{1}{1}, \quad \varphi(2) = \frac{2}{1}, \quad \varphi(3) = \frac{1}{2}, \quad \varphi(4) = \frac{3}{1}, \quad \varphi(5) = \frac{2}{2}, \quad \varphi(6) = \frac{1}{3} \cdots$$

Aunque esta aplicación no es inyectiva (por ejemplo $\varphi(1) = \varphi(5)$), sí es suprayectiva. Por tanto, $\operatorname{card} \mathbb{N} \leq \operatorname{card} \hat{Q}$. Además, como $\mathbb{N} \subseteq \hat{Q}$, es evidente que $\operatorname{card} \mathbb{N} \geq \operatorname{card} \hat{Q}$. En consecuencia, $\operatorname{card} \mathbb{N} = \operatorname{card} \hat{Q}$; es decir, $\hat{Q}$ es numerable y por tanto también lo es $\mathbb{Q}$.

0.3 Ejemplos de conjuntos no numerables

Vemos que $\mathbb{R}$ es no numerable por reducción al absurdo. Supongamos que existe una aplicación biyectiva $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Así, ha de cumplirse $\varphi(\mathbb{N}) = \mathbb{R}$. Definiremos una sucesión de intervalos encajados como sigue:

- Tomamos a_1, b_1 cualesquiera tales que $a_1 < b_1$ y $\varphi(1) \notin [a_1, b_1]$
- Para $n > 1$, tomamos a_n, b_n tales que $a_n < b_n$, $[a_n, b_n] \subset (a_{n-1}, b_{n-1})$ y $\varphi(n) \notin [a_n, b_n]$

De este modo, obtenemos una sucesión de intervalos cerrados encajados tales que $\varphi(n) \notin [a_n, b_n]$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Denotando $I_i = [a_i, b_i]$, se cumple:

1. I_1 es compacto por el teorema de Heine-Borel
2. $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ verifica la propiedad de la intersección finita

Al ser una sucesión de intervalos cerrados encajados, juntando las dos nociones anteriores, podemos afirmar que se satisface la propiedad de la intersección infinita. Por tanto, se tiene:

$$\exists\ x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \Rightarrow x_0 \in \mathbb{R} \backslash \varphi(\mathbb{N}) \Rightarrow \varphi(\mathbb{N}) \neq \mathbb{R} \Rightarrow \varphi \text{ no es biyectiva}$$

Se contradice la hipótesis de partida. Por todo lo anterior, concluimos que $\mathbb{R}$ es no numerable.

La aplicación $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$ es biyectiva, luego el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ es no numerable. Por otro lado, podemos establecer una biyección entre este intervalo y cualquier otro invervalo abierto. Así, cualquier intervalo es no numerable.

0.4 Procesos que dan lugar a conjuntos numerables

Sea A un conjunto finito, sea B un conjunto infitnito numerable. Entonces, $A \cup B$ y $A \times B$ son conjuntos infinitos numerables (o vacíos).

<u>**Demostración:**</u> Distinguiremos dos casos:

Si $A = \varnothing$, entonces $A \cup B = B$ que es infinito numerable por hipótesis. Además, $A \times B = \varnothing$ que es finito por definición.

Si $A \neq \varnothing$, como A es finito podemos afimar que $A \backslash B = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}\}$ para cierto $n_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Por ser B infinito numerable, existe una aplicación biyectiva $\varphi : \mathbb{N} \to B$. Para ver que $A \cup B$ es infinito numerable, basta considerar la siguiente biyección:

$$\hat{\varphi}(n) = \begin{cases} a_n, & \text{si } n \leq n \leq n_1 \\ \varphi(n - n_1), & \text{si } n > n_1 \end{cases}$$

Esta biyección $\hat{\varphi}$ enumera primero todos los elementos de $A \backslash B$ (de haberlos) para luego enumerar todos los elementos de B en el orden original de φ.

Al ser A finito, podemos escribir $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n_2}\}$ para cierto $n_2 \in \mathbb{N}$. Para ver que $A \times B$ es infinito numerable, podemos enumerar sus elementos de la siguiente forma:

	1	2	$\ldots$	n_2
1	$(a_1, \varphi(1))$	$(a_2, \varphi(1))$	$\ldots$	$(a_{n_2}, \varphi(1))$
2	$(a_1, \varphi(2))$	$(a_2, \varphi(2))$	$\ldots$	$(a_{n_2}, \varphi(2))$
3	$(a_1, \varphi(3))$	$(a_2, \varphi(3))$	$\ldots$	$(a_{n_2}, \varphi(3))$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$

Basta enumerar los elementos de $A \times B$ recorriendo la tabla de izquierda a derecha y de arriba a abajo, pues cada fila tiene n_2 elementos y hay tantas filas como naturales.

0.5 Más procesos que dan lugar a conjuntos numerables

Sean A, B conjuntos infinitos numerables con $A \cap B = \varnothing$. Entonces, $A \cup B$ y $A \times B$ son conjuntos infinitos numerables.

<u>**Demostración:**</u> Al ser A y B infinitos numerables por hipótesis, podemos afirmar que existen ciertas aplicaciones biyectivas $\varphi_A : \mathbb{N} \to A$ y $\varphi_B : \mathbb{N} \to B$.

Para ver que $A \cup B$ es infinito numerable, basta considerar la siguiente biyección:

$$\varphi_{A\cup B}(n) = \begin{cases} \varphi_A\left(\frac{n+1}{2}\right), & \text{si } n \text{ es impar} \\ \varphi_B\left(\frac{n}{2}\right), & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Así, se enumeran alternativamente los elementos de A y B. Al ser $A \cap B = \varnothing$, es seguro que esta aplicación es biyectiva.

Finalmente, para ver que $A \times B$ es infinito numerable, podemos representar sus elementos de forma matricial utilizando un razonamiento diagonal análogo al empleado para ver que $\mathbb{Q}$ es numerable.

<u>**Nota:**</u> Aunque en esta demostración hemos supuesto que $A \cap B = \varnothing$, el resultado puede aplicarse también para conjuntos de intersección no vacía. Nótese que como A y B son infinito numerables, entonces $A \cap B$, $A \backslash B$ y $B \backslash A$ han de ser necesariamente conjuntos finitos o infinitos numerables. Finalmente, basta ver que $A \cup B = \big((A \backslash B) \cup (B \backslash A)\big) \cup (A \cap B)$, unión de conjuntos disjuntos. Como para el caso del producto cartesiano no se ha usado la hipótesis de que $A \cap B = \varnothing$, el resultado es válido en cualquier caso.

0.6 Unión numerable de conjuntos numerables

Sea $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ una colección de conjuntos numerables, entonces su unión es también un conjunto numerable.

<u>**Demostración:**</u> Utilizaremos también un argumento diagonal.

De manera similar a la demostración anterior, expresaremos la unión $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ a partir de conjuntos auxiliares disjuntos para simplificar el trato de los elementos duplicados:

- Para $n = 1$, definimos $B_1 := A_1$
- Para $n > 1$, definimos $B_n := A_n \backslash \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right) = A_n \backslash B_{n-1}$

De este modo, los B_i son disjuntos entre sí. Además, todos los A_i son numerables por hipótesis, cada B_i ha de ser finito o numerable. Según el carácter de cada uno de ellos, introducimos la siguiente notación:

$$\text{Caso finito: } B_i = \left\{b_1^i, b_2^i, \ldots, b_{n_i}^i\right\} \qquad \text{Caso numerable: } B_j = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} b_n^j$$

Con esta notación, expresaremos los elementos de cada B_i tabularmente:

	B_1	B_2	B_3	B_4	$\ldots$
1	b_1^1	b_1^2	b_1^3	b_1^4	$\ldots$
2	b_2^1		b_2^3	b_2^4	$\ldots$
3	b_3^1		b_3^3	b_3^4	$\ldots$
4	b_4^1		b_4^3	b_4^4	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Recorremos diagonalmente la matriz, saltando las celdas vacías en caso de haberlas (ocurriría en caso de que algún B_i fuese finito). Por ejemplo, el B_2 de la figura tiene tan solo un único elemento. Como hemos tomado $B_1 = A_1$, hay infinitos elementos al ser A_1 infinito numerable por hipótesis (no pueden ser finitos todos los B_i).

0.7 Definición de conjunto de partes

Sea A un conjunto cualquiera, se denomina "conjunto de partes de A" y se denota como $\mathcal{P}(A)$ al conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de A. En particular, siemrpe se cumple que $\varnothing, A \in \mathcal{P}(A)$.

Por ejemplo, para $A = \{1, 2\}$, se tiene que $\mathcal{P}(A) = \big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\big\}$.

0.8 Cardinal de partes de un conjunto finito

Sea A un conjunto finito, entonces $\operatorname{card} \mathcal{P}(A) = 2^{\operatorname{card} A} \in \mathbb{N}$.

Demostración: Distinguiremos dos casos:

Para $A = \varnothing$, se tiene que $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing\}$, luego $\operatorname{card} \mathcal{P}(A) = 1 = 2^0 = 2^{\operatorname{card} A}$.

Si $A \neq \varnothing$, sea $n := \operatorname{card} A \in \mathbb{N}$, podemos identificar cada subconjunto de A según la presencia o ausencia de cada uno de sus n elementos. Definimos el conjunto de las tuplas de ceros y unos de longitud n como sigue:

$$C := \big\{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) : \varepsilon_i \in \{0, 1\} \;\; \forall i \in \{1, \ldots, n\}\big\}$$

Así, denotando $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, cada tupla de C puede asociarse biunívocamente a un subconjunto de A al indicar cada ε_i si el elemento a_i pertenece o no al subconjunto. Por tanto, la siguiente aplicación φ es biyectiva:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{P}(A) &\longrightarrow C \\ B &\longmapsto \prod_{i=1}^{n} f_i(B) \end{aligned} \qquad \text{donde} \qquad \begin{aligned} f_i : \mathcal{P}(A) &\longrightarrow \{0, 1\} \\ B &\longmapsto \begin{cases} 1, & \text{si } a_i \in B \\ 0, & \text{si } a_i \notin B \end{cases} \end{aligned}$$

0.9 El conjunto de partes incrementa la cardinalidad

Sea A un conjunto cualquiera. Entonces, $\operatorname{card} A < \operatorname{card} \mathcal{P}(A)$.

Demostración: Para todo conjunto A se cumple que $\operatorname{card} A \leq \operatorname{card} \mathcal{P}(A)$, pues $a \in A \Rightarrow \{a\} \in \mathcal{P}(A)$. Veamos ahora que no puede darse la igualdad por reducción al absurdo.

Supongamos que existe un conjunto A tal que $\operatorname{card} \mathcal{P}(A) = \operatorname{card} A$. En tal caso, ha de existir una aplicación biyectiva $\varphi : A \to \mathcal{P}(A)$. A partir de ella definimos el siguiente conjunto auxiliar: $B := \{a \in A : a \notin \varphi(a)\}$. Por construcción, B es un subconjunto de A, luego $B \in \mathcal{P}(A)$. Al ser φ biyectiva, existe cierto $z \in A$ tal que $\varphi(z) = B$.
Pueden darse dos casos:

1.) $z \in B = \varphi(z) \Rightarrow z \notin \varphi(z) = B$, contradicción.

2.) $z \notin B = \varphi(z) \Rightarrow z \in B = \varphi(z)$, contradicción

En cualquiera de ellos se llega a una contradicción. Por todo lo anterior, concluimos que $\operatorname{card} A < \operatorname{card} \mathcal{P}(A)$.

0.10 Cardinalidad de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

De manera similar a como hicimos para ver el cardinal de un conjunto finito, podemos identificar cada subconjunto de $\mathbb{N}$ en base a la presencia o ausencia de cada número natural en tal conjunto. Así, sabemos que existe una biyección entre los subconjuntos de $\mathbb{N}$ y las sucesiones formadas por ceros y unos:

$$\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \Big\{0,1\Big\}^{\mathbb{N}} = \Big\{(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} : \varepsilon_i \in \{0,1\} \ \ \forall i \in \mathbb{N}\Big\}$$

Ademnás, podemos asociar cada sucesión de ceros y unos a la expresión en base 2 de un núero real del intervalo $[0,1]$. Aplicando lo visto en los resultados 0.3 y 0.4, tal intervalo tiene la misma cardinalidad que $\mathbb{R}$; es decir, $2^{\aleph_0}$.

0.11 Jerarquía de cardinalidades

En vista de los resultados anteriores, podemos establecer una jerarquía de cardinalidades. En primer lugar, está el conjunto vacío (de cardinal cero). A continuación, los conjuntos finitos de cardinal natural. Pasando ahora a los conjuntos infinitos, la menor cardinalidad posible es la de los conjuntos infinitos numerables, denotada por $\aleph_0$. Como consecuencia del resultado 0.9, sabemos que podemos encontrar conjuntos de cardinalidad cada vez mayor al considerar el conjunto de partes de la iteración anterior.

Cabe preguntarse si existe algún tipo de cardinalidad intermedia entre los infinitos de esta escala. Esta cuestión es la conocida como Hipótesis del Continuo (CH), y se sabe que no puede ser probada ni refutada a partir de los axiomas habituales de la teoría de conjuntos (ZFC). Por tanto, debe considerarse como un axioma adicional independiente de ZFC: el axioma del continuo.

§2. Descomposición de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^N$ en cubos diádicos

0.12 Definición de intervalo diádico

Se llama "intervalo diádico de orden n" con $n \in \mathbb{N}$ a cualquier intervalo real de la forma $\left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right)$ con $j \in \mathbb{Z}$.

0.13 Propiedades de los intervalos diádicos

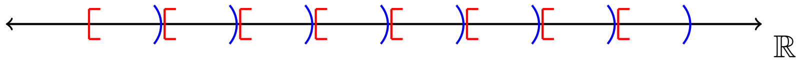
Fijado $n \in \mathbb{N}$ cualquiera, se tiene que la colección de todos los intervalos diádicos de orden n es numerable (pues hay uno por cada $j \in \mathbb{Z}$) y recubre $\mathbb{R}$:

$$\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right) = \mathbb{R}$$

Además, dos intervalos diádicos cualesquiera son disjuntos o bien coinciden:

$$i \neq j \Rightarrow \left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right) \bigcap \left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right) = \varnothing$$

Las dos propiedades anteriores pueden visualizarse en la siguiente figura:

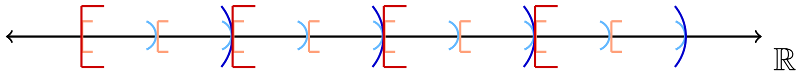


Para $n \in \mathbb{N}$ fijo, son disjuntos y cubren $\mathbb{R}$

Si I es un intervalo diádico de orden n y J es un intervalo diádico de orden $m \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$: entonces se cumple:

- O bien $I \subsetneq J$
- O bien $I \cap J = \varnothing$

La siguiente figura ilustra este hecho:



Intervalos diádicos de orden n y $n+1$

0.14 Definición de cubo diádico

Llamamos "cubo diádico de $\mathbb{R}^N$ de orden n" con $n, N \in \mathbb{N}$ a cualquier conjunto de la forma $I_1, \times I_2 \times \ldots \times I_N$ donde cada I_i es un intervalo diádico de orden n.

Denotaremos por $\mathcal{F}_n$ al conjunto de todos los cubos diádicos de orden n en $\mathbb{R}^N$.

0.15 Propiedades de los cubos diádicos

Los cubos diádicos de orden n son numerables y recubren R^N (consecuencia de la definición y de los resultados anteriores). Además, son disjuntos o coinciden; es decir:

$$\left.\begin{array}{l} C \in \mathcal{F}_n \\ D \in \mathcal{F}_n \\ C \neq D \end{array}\right\} \Rightarrow C \cap D = \varnothing$$

Como $C, D \in \mathcal{F}_m$, han de ser de la siguiente forma:

$$C = I_1 \times \ldots \times I_N \qquad\qquad D = J_1 \times \ldots \times J_N$$

donde los I_i y los J_j son intervalos diádicos de orden n. Por hipótesis, $C \neq D$ luego ha de existir cierto $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $I_k \neq J_k$. Por las propiedades de los intervalos diádicos, sabemos que esto implica que $I_k \cap J_k = \varnothing$. Esto a su vez implica que $C \cap D = \varnothing$.

De manera similar, si $C \in \mathcal{F}_n, D \in \mathcal{F}_m$ con $m \leq n$. Entonces o bien $C \subsetneq D$ o bien $C \cap D = \varnothing$. Por definición de $\mathcal{F}_n$ y $\mathcal{F}_m$, podemos afirmar que:

$$C = I_1 \times \ldots \times I_N \qquad\qquad D = J_1 \times \ldots \times J_N$$

Donde los I_i y los J_j son intervalos diádicos de orden n y m, respectivamente. Por las propiedades de los intervalos diádicos, para cada $k \in \{1, \ldots, N\}$ se tiene que o bien $I_k \subsetneq J_k$ o bien $I_k \cap J_k = \varnothing$. Si $\exists k_0 \in \{1, \ldots, N\}$ tal que $I_{k_0} \cap J_{k_0} = \varnothing$, entonces $C \cap D = \varnothing$. En caso contrario, $C \subsetneq D$.

0.16 Teorema de descomposición de abiertos en cubos diádicos

Para todo subconjunto no vacío y abierto en $\left(\mathbb{R}^N, \tau_{R^N}(d)\right)$, O, existe una colección numerable de cubos diádicos (posiblemente de órdenes distintos) de $\mathbb{R}^N$, $\{C_n : n \in \mathbb{N}\}$, tales que:

1.) $O = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$

2.) $\overline{C_n} \subseteq O \;\; \forall n \in \mathbb{N}$

3.) $i \neq j \Rightarrow C_i \cap C_j = \varnothing$

Demostración: Definiremos varios conjuntos auxiliares.

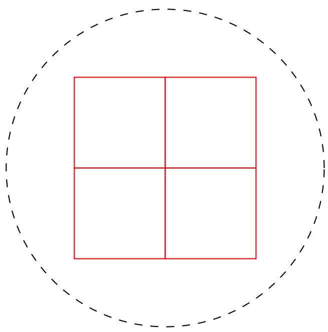
Definimos $\mathcal{G}_n := \left\{C \in \mathcal{F}_n : \overline{C} \subseteq O\right\}$. Cada una de estas colecciones de conjuntos es finita o numerable al serlo $\mathcal{F}_n$.

A partir de los $\mathcal{G}_n$ definiremos otra colección de conjuntos. Para $n = 1$, tomamos $\mathcal{H}_1 := \mathcal{G}_1$. Para $n > 1$, definimos

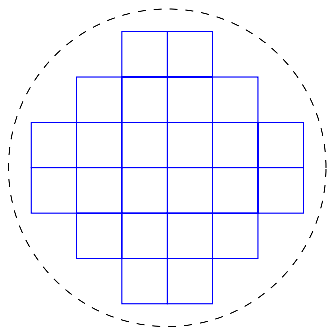
$$\mathcal{H}_n := \left\{ C \in \mathcal{G}_n : C \not\subseteq \bigcup_{k=1}^{n-1} \mathcal{H}_k \right\} = \left\{ C \in \mathcal{G}_n : C \cap \left[\bigcup_{k=1}^{n-1} \bigcup_{D \in \mathcal{H}_k} D_k \right] = \varnothing \right\}$$

La última igualdad se deduce de las propiedades de los cubos diádicos. Por construcción, los $\mathcal{H}_n$ son numerables y disjuntos entre sí.

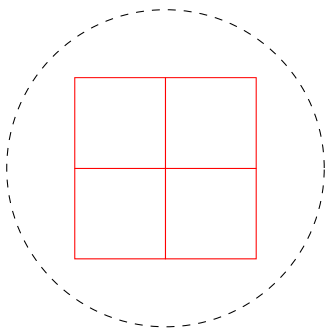
Intuitivamente, $\mathcal{G}_n$ modela los cubos de un cierto orden que "caben" en O. El paso a los $\mathcal{H}_n$ hace que solo se empiecen a usar cubos "más pequeños" en las zonas donde no "cabrían" cubos de un orden inferior ("más grandes").



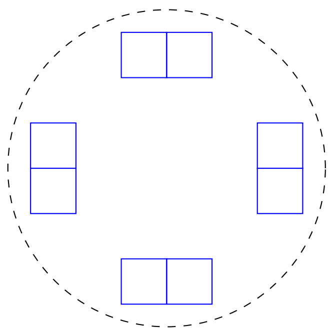
$\mathcal{G}_1$



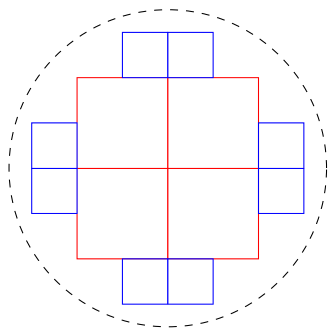
$\mathcal{G}_2$



$\mathcal{H}_1 = \mathcal{G}_1$



$\mathcal{H}_2$



$\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$

Probaremos que $\displaystyle O = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{C \in \mathcal{H}_n} C$ por doble contenido.

$\supseteq$ Por definición de $\mathcal{H}_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene $C \in \mathcal{H}_n \Rightarrow C \subsetneq \overline{C} \subsetneq O$

$\subseteq$ Sea $x_0 \in O \subseteq \mathbb{R}^N$ cualquiera, podemos expresarlo como $x_0 = (x_1, \ldots, x_N)$.

Al ser O abierto en $(\mathbb{R}^N, \tau_{\mathbb{R}^N}(d))$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ que verifica:

$$x_0 \in \prod_{i=1}^{N} \left(x_i - \frac{1}{2^{n_0}},\ x_i + \frac{1}{2^{n_0}} \right) \subset \prod_{i=1}^{N} \left[x_i - \frac{1}{2^{n_0}},\ x_i + \frac{1}{2^{n_0}} \right] \subset O$$

Además, para cada coordenada $1 \leq i \leq N$ tienemos que $\exists! j_i \in \mathbb{Z} : x_i \in \left[\frac{j_i - 1}{2^{n_0}}, \frac{j_i}{2^{n_0}} \right)$.
Así, para cada $i \in 1, \ldots, N$ se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{j_i-1}{2^{n_0}} \leq x_i \Rightarrow \frac{j_i}{2^{n_0}} \leq x_i + \frac{1}{2^{n_0}} \\ x_i < \frac{j_i}{2^{n_0}} \Rightarrow x_i - \frac{1}{2^{n_0}} < \frac{j_i-1}{2^{n_0}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\tfrac{j_i-1}{2^{n_0}}, \tfrac{j_i}{2^{n_0}} \right) \subset \left(x_i - \tfrac{1}{2^{n_0}}, x_i + \tfrac{1}{2^{n_0}} \right)$$

De este modo, $C := \displaystyle\prod_{i=1}^{N} \left[\frac{j_i - 1}{2^{n_0}}, \frac{j_i}{2^{n_0}} \right) \subset \prod_{i=1}^{N} \left[x_i - \frac{1}{2^{n_0}}, x_i + \frac{1}{2^{n_0}} \right]$