

TG IV

Grupo S

Javier Ortín Rodenas
Bruno Martín Rivera
Jorge Gota Ortín
Alejandra Sánchez Mayo

1 Enunciado:

1. Dado C el cilindro $x^2 + y^2 = 1$, considere el difeomorfismo siguiente:

$$\phi_1 : C \longrightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{S, N\} \quad (x, y, z) \longmapsto \phi_1(x, y, z) = (x \operatorname{sech} z, y \operatorname{sech} z, \tanh z)$$

¿Preserva ángulos? ¿Es una isometría local? ¿Es isoareal?

2. Dado C_t el cilindro truncado $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, -1 < z < 1\}$, considere el difeomorfismo ϕ_2 definido como sigue:

$$\phi_2 : C_t \longrightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{S, N\} \quad (x, y, z) \longmapsto \phi_2(x, y, z) = (x\sqrt{1-z^2}, y\sqrt{1-z^2}, z)$$

¿Preserva áreas? ¿Es una isometría local? ¿Preserva ángulos?

2 Solución

2.1 Primer apartado

En primer lugar, debemos de parametrizar el cilindro C . Podemos hacerlo a partir de la siguiente función:

$$X : [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \longrightarrow C \quad (\theta, z) \longmapsto X(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z)$$

Veamos qué expresión toma $\bar{X} = (\phi \circ X)$ al componerlas:

$$\bar{X} : [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{S, N\} \quad (\theta, z) \longmapsto \bar{X}(\theta, z) = \left(\frac{\cos \theta}{\cosh z}, \frac{\sin \theta}{\cosh z}, \tanh z \right)$$

Para comprobar si la aplicación ϕ preserva ángulos, tenemos que comprobar si es o no conforme. Por tanto, hemos de hallar los coeficientes de la Primera Forma Fundamental de X y de \bar{X} para intentar definir así una aplicación λ adecuada.

Halleemos las derivadas parciales de X :

$$X_\theta(\theta, z) = (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \quad X_z(\theta, z) = (0, 0, 1)$$

De este modo, los coeficientes de la PFF de X vienen dados por:

$$\begin{aligned} E(\theta, x) &= X_\theta(\theta, z) \cdot X_\theta(\theta, z) = (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta, 0) = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \\ F(\theta, x) &= X_\theta(\theta, z) \cdot X_z(\theta, z) = (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0 \\ G(\theta, x) &= X_z(\theta, z) \cdot X_z(\theta, z) = (0, 0, 1) \cdot (0, 0, 1) = 1 \end{aligned}$$

Veamos qué ocurre con \bar{X} . Cabe recordar que $\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$.

$$\bar{X}_\theta(\theta, x) = \left(\frac{-\sin \theta}{\cosh z}, \frac{\cos \theta}{\cosh z}, 0 \right) \quad \bar{X}_z(\theta, x) = \left(\frac{-\cos \theta \cdot \sinh z}{\cosh^2 z}, \frac{-\sin \theta \sinh z}{\cosh^2 z}, \frac{1}{\cosh^2 z} \right)$$

Calculamos ahora los coeficientes de la PFF de \bar{X} :

$$\begin{aligned} \bar{E}(\theta, x) &= \bar{X}_\theta(\theta, z) \cdot \bar{X}_\theta(\theta, z) = \frac{1}{\cosh^2 z} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = \frac{1}{\cosh^2 z} \\ \bar{F}(\theta, x) &= \bar{X}_\theta(\theta, z) \cdot \bar{X}_z(\theta, z) = \frac{\cos \theta \cdot \sin \theta}{\cosh^2 z} (1 - 1) = 0 \\ \bar{G}(\theta, x) &= \bar{X}_z(\theta, z) \cdot \bar{X}_z(\theta, z) = \frac{1}{\cosh^4 z} (\cos^2 \theta \cdot \sinh^2 z + \sin^2 \theta \cdot \sinh^2 z + 1) = \\ &= \frac{1}{\cosh^4 z} (\sinh^2 z + 1) = \frac{1}{\cosh^4 z} (\cosh^2 z) = \frac{1}{\cosh^2 z} \end{aligned}$$

En vista de lo anterior, es claro que ϕ_1 preserva ángulos, pues es una aplicación conforme. Basta tomar la aplicación λ definida como sigue:

$$\lambda : C \longrightarrow \mathbb{R} \quad p = X(\theta, z) \longmapsto \lambda(p) = \frac{1}{\cosh z} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

Tenemos que λ no se anula y es diferenciable al ser composición de funciones diferenciables. Además, verifica las siguientes tres ecuaciones:

$$\bar{E} = \lambda(p)^2 E \quad \bar{F} = \lambda(p)^2 E \quad \bar{G} = \lambda(p)^2 E$$

Por un resultado teórico, sabemos que se cumple lo siguiente:

$$\phi_1 \text{ isoareal} \iff EG - F^2 = \bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2$$

Veamos si se cumple o no la igualdad:

$$EG - F^2 = 1 \cdot 1 - 0^2 = 1$$

$$\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2 = \frac{1}{\cosh^2 z} \cdot \frac{1}{\cosh^2 z} - 0 = \frac{1}{\cosh^4 z} = \frac{16}{(e^z + e^{-z})^4}$$

La igualdad no se cumple para $z \neq 1$ luego ϕ_2 no es isoareal. Además, podemos concluir que no es una isometría gracias al siguiente resultado:

$$\phi_1 \text{ isometría} \iff \phi_1 \text{ conforme e isoareal}$$

Al no ser isoareal, no puede ser una isometría como consecuencia de esta caracterización.

2.2 Segundo apartado

El cilindro C_t es un subconjunto del cilindro C del apartado anterior. Por tanto, podemos utilizar la misma parametrización restringiendo los valores que puede tomar la tercera componente.

$$X : [0, 2\pi) \times (-1, 1) \longrightarrow C \quad (\theta, z) \longmapsto X(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z)$$

Al no haber modificado la expresión de X nos sirve el razonamiento del apartado anterior para deducir:

$$E(\theta, z) = 1 \quad F(\theta, z) = 0 \quad G(\theta, z) = 1$$

Veamos qué expresión tiene ahora $\bar{X} = (\phi_2 \circ X)$:

$$\bar{X} : [0, 2\pi) \times (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{S, N\} \quad (\theta, z) \longmapsto \bar{X}(\theta, z) = (\cos \theta \sqrt{1 - z^2}, \sin \theta \sqrt{1 - z^2}, z)$$

Halleemos ahora sus derivadas parciales:

$$\bar{X}_\theta(\theta, z) = (-\sin \theta \sqrt{1 - z^2}, \cos \theta \sqrt{1 - z^2}, 0) \quad \bar{X}_z(\theta, z) = \left(\frac{-z \cos \theta}{1 - z^2}, \frac{-z \sin \theta}{1 - z^2}, 1 \right)$$

De este modo, los coeficientes de la PFF de \bar{X} vienen dados por:

$$\bar{E}(\theta, x) = \bar{X}_\theta(\theta, z) \cdot \bar{X}_\theta(\theta, z) = (1 - z^2)(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = 1 - z^2$$

$$\bar{F}(\theta, x) = \bar{X}_\theta(\theta, z) \cdot \bar{X}_z(\theta, z) = \frac{z \cos \theta \cdot \sin \theta}{\sqrt{1 - z^2}}(1 - 1 + 0) = 0$$

$$\bar{G}(\theta, x) = \bar{X}_z(\theta, z) \cdot \bar{X}_z(\theta, z) = \frac{z^2}{1 - z^2} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + 1 = \frac{1}{1 - z^2}$$

Veamos que ϕ_2 no es conforme por reducción al absurdo. Supongamos que sí lo es; en tal caso, existiría una función $\lambda : S_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\bar{E} = \lambda(p)^2 E \quad \bar{F} = \lambda(p)^2 F \quad \bar{G} = \lambda(p)^2 G$$

De este modo, como $\bar{E} = 1 - z^2$ y $E = 1$, necesariamente ha de cumplirse $\lambda(p)^2 = 1 - z^2$ para satisfacer la condición $\bar{E} = \lambda(p)^2 E$. No obstante; esto nos genera un problema, pues al imponer esta restricción puede no cumplirse $\bar{G} = \lambda(p)^2 G$, pues $G = 1$ y sabemos $\bar{G} = \frac{1}{1 - z^2}$. Por todo lo anterior:

$$\bar{E} = \lambda(p)^2 E \Rightarrow \lambda(p)^2 = 1 - z^2 \Rightarrow \lambda(p)^2 G = (1 - z^2)1 = 1 - z^2 \neq \bar{G} = \frac{1}{1 - z^2}$$

Por todo lo anterior, ninguna aplicación λ puede satisfacer simultáneamente $\bar{E} = \lambda(p)^2 E$ y $\bar{G} = \lambda(p)^2 G$. Hemos llegado a una contradicción, luego ϕ_2 no puede ser conforme.

Como consecuencia, al no ser conforme ϕ_2 no puede ser una isometría (pues ser isometría equivale a ser simultáneamente conforme e isoareal). No obstante, sí podría preservar áreas. Para comprobarlo basta ver si se cumple la igualdad $EG - F^2 = \bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2$.

$$EG - F^2 = 1 \cdot 1 - 0^2 = 1$$

$$\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2 = (1 - z^2) \cdot \frac{1}{1 - z^2} - 0^2 = 1$$

Por todo lo anterior, ϕ_2 preserva áreas pero no ángulos, luego no es una isometría.