Análisis Matemático III

Javier Ortín Rodenas

Curso 2025-2026

Contenidos

Introducción de la asignatura

La materia será la misma que en años anteriores, aunque habrá un cambio en la metodología de enseñanza: no habrá tutorías grupales. No obstante, sí habrá evaluación continua. Su funcionamiento se explicará posteriormente.

Preliminares

En la sección de preliminares se tratarán los siguientes temas:

- Cardinalidad de conjuntos
- Descomposición de abiertos de $\mathbb{R}^N$ en unión de cubos diádicos
- Series dobles

§1. Cardinalidad de conjuntos

0.1.1 Definición de cardinalidad, tipos de cardinalidad

Intuitivamente, podemos definir la cardinalidad de un conjunto como el número de elementos que tiene. Además, es lógico plantear la distinción entre conjuntos finitos e infinitos. Veamos cómo formalizar esta idea.

Sea A un conjunto no vacío, diremos que A es un conjunto finito de cardinalidad $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ si existe una aplicación biyectiva $\varphi : \{1, 2, \ldots, n\} \to A$.
Se considera que el conjunto vacío $\varnothing$ es finito con cardinal 0.

Sea A un conjunto cualquiera, diremos que es un conjunto infinito si existe cierta aplicación inyectiva $\varphi : \mathbb{N} \to A$. Dentro de esta clasificación, diremos que A es infinito numerable si existe una aplicación $\varphi : \mathbb{N} \to A$ biyectiva. Si esto último no fuese posible, diremos que A es infinito no numerable.

Aunque no entra dentro de los objetivos de esta asignatura, es interesante contemplar la siguiente observación: Si un conjunto no es un conjunto finito, podemos afirmar simplemente que es un conjunto "no finito". Si además incluimos el axioma de elección, sí podremos afirmar que tal conjunto es infinito. Dentro de los conjuntos infinitos, todos son o bien numerables o bien no numerables, sin intersección entre ambas categorías.

0.1.2 Ejemplos de conjuntos numerables

• $\mathbb{N}$: trivial, basta considerar la aplicación identidad.

• $\mathbb{Z}$: basta considerar la siguiente aplicación biyectiva:

$$\varphi(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{si } n \text{ es par} \\ -\frac{n-1}{2}, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \qquad \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\ \downarrow\varphi & \downarrow\varphi & \downarrow\varphi & \downarrow\varphi & \downarrow\varphi & \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & \cdots \end{array}$$

• $\mathbb{Q} := \left\{\frac{z}{n} : z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$. Denotaremos por $\hat{Q}$ al conjunto $\left\{\frac{z}{n} : z, n \in \mathbb{N}\right\}$. Como hemos visto en el apartado anterior, al ser $\mathbb{Z}$ numerable, $\hat{Q}$ y $\mathbb{Q}$ han de tener necesariamente la misma cardinalidad. Por tanto, basta con demostrar que $\hat{Q}$ es numerable, lo que haremos a continuación por medio de una doble desigualdad.

Representaremos los elementos de $\hat{Q}$ en una tabla infinita que recorreremos diagonalmente:

	1	2	3	4	...
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	...
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	...
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	...
4	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Por tanto, obtenemos como resultado la siguiente aplicación $\varphi : \mathbb{N} \to \hat{Q}$ con

$$\varphi(1) = \frac{1}{1}, \quad \varphi(2) = \frac{2}{1}, \quad \varphi(3) = \frac{1}{2}, \quad \varphi(4) = \frac{3}{1}, \quad \varphi(5) = \frac{2}{2}, \quad \varphi(6) = \frac{1}{3} \dots$$

Aunque esta aplicación no es inyectiva (por ejemplo $\varphi(1) = \varphi(5)$), sí es suprayectiva. Por tanto, $\operatorname{card} \mathbb{N} \geq \operatorname{card} \hat{Q}$. Además, como $\mathbb{N} \subseteq \hat{Q}$, es evidente que $\operatorname{card} \mathbb{N} \leq \operatorname{card} \hat{Q}$. En consecuencia, $\operatorname{card} \mathbb{N} = \operatorname{card} \hat{Q}$; es decir, $\hat{Q}$ es numerable y por tanto también lo es $\mathbb{Q}$.

0.1.3 Ejemplos de conjuntos no numerables

Vemos que $\mathbb{R}$ es no numerable por reducción al absurdo. Supongamos que existe una aplicación biyectiva $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Así, ha de cumplirse $\varphi(\mathbb{N}) = \mathbb{R}$. Definiremos una sucesión de intervalos encajados como sigue:

- Tomamos a_1, b_1 cualesquiera tales que $a_1 < b_1$ y $\varphi(1) \notin [a_1, b_1]$
- Para $n > 1$, tomamos a_n, b_n tales que $a_n < b_n$, $[a_n, b_n] \subset (a_{n-1}, b_{n-1})$ y $\varphi(n) \notin [a_n, b_n]$

De este modo, obtenemos una sucesión de intervalos cerrados encajados tales que $\varphi(n) \notin [a_n, b_n]\ \forall n \in \mathbb{N}$. Denotando $I_i = [a_i, b_i]$, se cumple:

1. I_1 es compacto por el teorema de Heine-Borel
2. $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ verifica la propiedad de la intersección finita

Al ser una sucesión de intervalos cerrados encajados, juntando las dos nociones anteriores, podemos afirmar que se satisface la propiedad de la intersección infinita. Por tanto, se tiene:

$$\exists\ x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \Rightarrow x_0 \in \mathbb{R} \backslash \varphi(\mathbb{N}) \Rightarrow \varphi(\mathbb{N}) \neq \mathbb{R} \Rightarrow \varphi \text{ no es biyectiva}$$

Se contradice la hipótesis de partida. Por todo lo anterior, concluimos que $\mathbb{R}$ es no numerable.

La aplicación $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$ es biyectiva, luego el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ es no numerable. Por otro lado, podemos establecer una biyección entre este intervalo y cualquier otro intervalo abierto. Así, cualquier intervalo es no numerable.

0.1.4 Procesos que dan lugar a conjuntos numerables

Sea A un conjunto finito, sea B un conjunto infinito numerable. Entonces, $A \cup B$ y $A \times B$ son conjuntos infinitos numerables (o vacíos).

<u>**Demostración:**</u> Distinguiremos dos casos:

Si $A = \varnothing$, entonces $A \cup B = B$ que es infinito numerable por hipótesis. Además, $A \times B = \varnothing$ que es finito por definición.

Si $A \neq \varnothing$, como A es finito podemos afirmar que $A \backslash B = \{a_1, a_2, \dots, a_{n_1}\}$ para cierto $n_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Por ser B infinito numerable, existe una aplicación biyectiva $\varphi : \mathbb{N} \to B$. Para ver que $A \cup B$ es infinito numerable, basta considerar la siguiente biyección:

$$\hat{\varphi}(n) = \begin{cases} a_n, & \text{si } n \leq n \leq n_1 \\ \varphi(n - n_1), & \text{si } n > n_1 \end{cases}$$

Esta biyección $\hat{\varphi}$ enumera primero todos los elementos de $A \backslash B$ (de haberlos) para luego enumerar todos los elementos de B en el orden original de φ.

Al ser A finito, podemos escribir $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{n_2}\}$ para cierto $n_2 \in \mathbb{N}$. Para ver que $A \times B$ es infinito numerable, podemos enumerar sus elementos de la siguiente forma:

	1	2	$\dots$	n_2
1	$(a_1, \varphi(1))$	$(a_2, \varphi(1))$	$\dots$	$(a_{n_2}, \varphi(1))$
2	$(a_1, \varphi(2))$	$(a_2, \varphi(2))$	$\dots$	$(a_{n_2}, \varphi(2))$
3	$(a_1, \varphi(3))$	$(a_2, \varphi(3))$	$\dots$	$(a_{n_2}, \varphi(3))$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$

Basta enumerar los elementos de $A \times B$ recorriendo la tabla de izquierda a derecha y de arriba a abajo, pues cada fila tiene n_2 elementos y hay tantas filas como naturales.

0.1.5 Más procesos que dan lugar a conjuntos numerables

Sean A, B conjuntos infinitos numerables con $A \cap B = \varnothing$. Entonces, $A \cup B$ y $A \times B$ son conjuntos infinitos numerables.

<u>**Demostración:**</u> Al ser A y B infinitos numerables por hipótesis, podemos afirmar que existen ciertas aplicaciones biyectivas $\varphi_A : \mathbb{N} \to A$ y $\varphi_B : \mathbb{N} \to B$.

Para ver que $A \cup B$ es infinito numerable, basta considerar la siguiente biyección:

$$\varphi_{A\cup B}(n) = \begin{cases} \varphi_A\left(\frac{n+1}{2}\right), & \text{si } n \text{ es impar} \\ \varphi_B\left(\frac{n}{2}\right), & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Así, se enumeran alternativamente los elementos de A y B. Al ser $A \cap B = \varnothing$, es seguro que esta aplicación es biyectiva.

Finalmente, para ver que $A \times B$ es infinito numerable, podemos representar sus elementos de forma matricial utilizando un razonamiento diagonal análogo al empleado para ver que $\mathbb{Q}$ es numerable.

<u>**Nota:**</u> Aunque en esta demostración hemos supuesto que $A \cap B = \varnothing$, el resultado puede aplicarse también para conjuntos de intersección no vacía. Nótese que como A y B son infinito numerables, entonces $A \cap B$, $A \backslash B$ y $B \backslash A$ han de ser necesariamente conjuntos finitos o infinitos numerables. Finalmente, basta ver que $A \cup B = \big((A\backslash B) \cup (B\backslash A)\big) \cup (A \cap B)$, unión de conjuntos disjuntos. Como para el caso del producto cartesiano no se ha usado la hipótesis de que $A \cap B = \varnothing$, el resultado es válido en cualquier caso.

0.1.6 Unión numerable de conjuntos numerables

Sea $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ una colección de conjuntos numerables, entonces su unión es también un conjunto numerable.

<u>**Demostración:**</u> Utilizaremos también un argumento diagonal.

De manera similar a la demostración anterior, expresaremos la unión $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ a partir de conjuntos auxiliares disjuntos para simplificar el trato de los elementos duplicados:

- Para $n = 1$, definimos $B_1 := A_1$
- Para $n > 1$, definimos $B_n := A_n \backslash \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right) = A_n \backslash B_{n-1}$

De este modo, los B_i son disjuntos entre sí. Además, todos los A_i son numerables por hipótesis, cada B_i ha de ser finito o numerable. Según el carácter de cada uno de ellos, introducimos la siguiente notación:

$$\text{Caso finito: } B_i = \left\{b_1^i, b_2^i, \ldots, b_{n_i}^i\right\} \qquad \text{Caso numerable: } B_j = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} b_n^j$$

Con esta notación, expresaremos los elementos de cada B_i tabularmente:

	B_1	B_2	B_3	B_4	$\ldots$
1	b_1^1	b_1^2	b_1^3	b_1^4	$\ldots$
2	b_2^1		b_2^3	b_2^4	$\ldots$
3	b_3^1		b_3^3	b_3^4	$\ldots$
4	b_4^1		b_4^3	b_4^4	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Recorremos diagonalmente la matriz, saltando las celdas vacías en caso de haberlas (ocurriría en caso de que algún B_i fuese finito). Por ejemplo, el B_2 de la figura tiene tan solo un único elemento. Como hemos tomado $B_1 = A_1$, hay infinitos elementos al ser A_1 infinito numerable por hipótesis (no pueden ser finitos todos los B_i).

0.1.7 Definición de conjunto de partes

Sea A un conjunto cualquiera, se denomina "conjunto de partes de A" y se denota como $\mathcal{P}(A)$ al conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de A. En particular, siempre se cumple que $\varnothing, A \in \mathcal{P}(A)$.

Por ejemplo, para $A = \{1,2\}$, se tiene que $\mathcal{P}(A) = \big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\big\}$.

0.1.8 Cardinal de partes de un conjunto finito

Sea A un conjunto finito, entonces $\operatorname{card}\mathcal{P}(A) = 2^{\operatorname{card} A} \in \mathbb{N}$.

Demostración: Distinguiremos dos casos:

Para $A = \varnothing$, se tiene que $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing\}$, luego $\operatorname{card}\mathcal{P}(A) = 1 = 2^0 = 2^{\operatorname{card} A}$.

Si $A \neq \varnothing$, sea $n := \operatorname{card} A \in \mathbb{N}$, podemos identificar cada subconjunto de A según la presencia o ausencia de cada uno de sus n elementos. Definimos el conjunto de las tuplas de ceros y unos de longitud n como sigue:

$$C := \big\{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) : \varepsilon_i \in \{0,1\} \ \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}\big\}$$

Así, denotando $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, cada tupla de C puede asociarse biunívocamente a un subconjunto de A al indicar cada ε_i si el elemento a_i pertenece o no al subconjunto. Por tanto, la siguiente aplicación φ es biyectiva:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{P}(A) &\longrightarrow C \\ B &\longmapsto \prod_{i=1}^{n} f_i(B) \end{aligned} \qquad \text{donde} \qquad \begin{aligned} f_i : \mathcal{P}(A) &\longrightarrow \{0,1\} \\ B &\longmapsto \begin{cases} 1, & \text{si } a_i \in B \\ 0, & \text{si } a_i \notin B \end{cases} \end{aligned}$$

0.1.9 El conjunto de partes incrementa la cardinalidad

Sea A un conjunto cualquiera. Entonces, $\operatorname{card} A < \operatorname{card}\mathcal{P}(A)$.

Demostración: Para todo conjunto A se cumple que $\operatorname{card} A \leq \operatorname{card} \mathcal{P}(A)$, pues $a \in A \Rightarrow \{a\} \in \mathcal{P}(A)$. Veamos ahora que no puede darse la igualdad por reducción al absurdo.

Supongamos que existe un conjunto A tal que $\operatorname{card} \mathcal{P}(A) = \operatorname{card} A$. En tal caso, ha de existir una aplicación biyectiva $\varphi : A \to \mathcal{P}(A)$. A partir de ella definimos el siguiente conjunto auxiliar: $B := \{a \in A : a \notin \varphi(a)\}$. Por construcción, B es un subconjunto de A, luego $B \in \mathcal{P}(A)$. Al ser φ biyectiva, existe cierto $z \in A$ tal que $\varphi(z) = B$.
Pueden darse dos casos:

1.) $z \in B = \varphi(z) \Rightarrow z \notin \varphi(z) = B$, contradicción.

2.) $z \notin B = \varphi(z) \Rightarrow z \in B = \varphi(z)$, contradicción

En cualquiera de ellos se llega a una contradicción. Por todo lo anterior, concluimos que $\operatorname{card} A < \operatorname{card} \mathcal{P}(A)$.

0.1.10 Cardinalidad de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

De manera similar a como hicimos para ver el cardinal de un conjunto finito, podemos identificar cada subconjunto de $\mathbb{N}$ en base a la presencia o ausencia de cada número natural en tal conjunto. Así, sabemos que existe una biyección entre los subconjuntos de $\mathbb{N}$ y las sucesiones formadas por ceros y unos:

$$\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \Big\{0,1\Big\}^{\mathbb{N}} = \Big\{(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} : \varepsilon_i \in \{0,1\} \ \ \forall i \in \mathbb{N}\Big\}$$

Además, podemos asociar cada sucesión de ceros y unos a la expresión en base 2 de un número real del intervalo $[0,1]$. Aplicando lo visto en los resultados 0.1.3 y 0.1.4, tal intervalo tiene la misma cardinalidad que $\mathbb{R}$; es decir, $2^{\aleph_0}$.

0.1.11 Jerarquía de cardinalidades

En vista de los resultados anteriores, podemos establecer una jerarquía de cardinalidades. En primer lugar, está el conjunto vacío (de cardinal cero). A continuación, los conjuntos finitos de cardinal natural. Pasando ahora a los conjuntos infinitos, la menor cardinalidad posible es la de los conjuntos infinitos numerables, denotada por $\aleph_0$. Como consecuencia del resultado 0.1.9, sabemos que podemos encontrar conjuntos de cardinalidad cada vez mayor al considerar el conjunto de partes de la iteración anterior.

Cabe preguntarse si existe algún tipo de cardinalidad intermedia entre los infinitos de esta escala. Esta cuestión es la conocida como Hipótesis del Continuo (CH), y se sabe que no puede ser probada ni refutada a partir de los axiomas habituales de la teoría de conjuntos (ZFC). Por tanto, debe considerarse como un axioma adicional independiente de ZFC: el axioma del continuo.

§2. Descomposición de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^N$ en cubos diádicos

0.2.1 Definición de intervalo diádico

Se llama "intervalo diádico de orden n" con $n \in \mathbb{N}$ a cualquier intervalo real de la forma $\left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right)$ con $j \in \mathbb{Z}$.

0.2.2 Propiedades de los intervalos diádicos

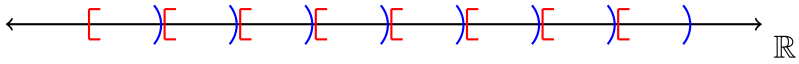
Fijado $n \in \mathbb{N}$ cualquiera, se tiene que la colección de todos los intervalos diádicos de orden n es numerable (pues hay uno por cada $j \in \mathbb{Z}$) y recubre $\mathbb{R}$:

$$\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right) = \mathbb{R}$$

Además, dos intervalos diádicos cualesquiera son disjuntos o bien coinciden:

$$i \neq j \Rightarrow \left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right) \bigcap \left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right) = \varnothing$$

Las dos propiedades anteriores pueden visualizarse en la siguiente figura:

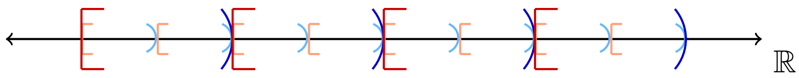


Para $n \in \mathbb{N}$ fijo, son disjuntos y cubren $\mathbb{R}$

Si I es un intervalo diádico de orden n y J es un intervalo diádico de orden $m \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$: entonces se cumple:

- O bien $I \subsetneq J$
- O bien $I \cap J = \varnothing$

La siguiente figura ilustra este hecho:



Intervalos diádicos de orden n y $n + 1$

0.2.3 Definición de cubo diádico

Llamamos "cubo diádico de $\mathbb{R}^N$ de orden n" con $n, N \in \mathbb{N}$ a cualquier conjunto de la forma $I_1, \times I_2 \times \ldots \times I_N$ donde cada I_i es un intervalo diádico de orden n.

Denotaremos por $\mathcal{F}_n$ al conjunto de todos los cubos diádicos de orden n en $\mathbb{R}^N$.

0.2.4 Propiedades de los cubos diádicos

Los cubos diádicos de orden n son numerables y recubren R^N (consecuencia de la definición y de los resultados anteriores). Además, son disjuntos o coinciden; es decir:

$$\left.\begin{array}{l} C \in \mathcal{F}_n \\ D \in \mathcal{F}_n \\ C \neq D \end{array}\right\} \Rightarrow C \cap D = \varnothing$$

Como $C, D \in \mathcal{F}_m$, han de ser de la siguiente forma:

$$C = I_1 \times \ldots \times I_N \qquad\qquad D = J_1 \times \ldots \times J_N$$

donde los I_i y los J_j son intervalos diádicos de orden n. Por hipótesis, $C \neq D$ luego ha de existir cierto $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $I_k \neq J_k$. Por las propiedades de los intervalos diádicos, sabemos que esto implica que $I_k \cap J_k = \varnothing$. Esto a su vez implica que $C \cap D = \varnothing$.

De manera similar, si $C \in \mathcal{F}_n, D \in \mathcal{F}_m$ con $m \leq n$. Entonces o bien $C \subsetneq D$ o bien $C \cap D = \varnothing$. Por definición de $\mathcal{F}_n$ y $\mathcal{F}_m$, podemos afirmar que:

$$C = I_1 \times \ldots \times I_N \qquad\qquad D = J_1 \times \ldots \times J_N$$

Donde los I_i y los J_j son intervalos diádicos de orden n y m, respectivamente. Por las propiedades de los intervalos diádicos, para cada $k \in \{1, \ldots, N\}$ se tiene que o bien $I_k \subsetneq J_k$ o bien $I_k \cap J_k = \varnothing$. Si $\exists k_0 \in \{1, \ldots, N\}$ tal que $I_{k_0} \cap J_{k_0} = \varnothing$, entonces $C \cap D = \varnothing$. En caso contrario, $C \subsetneq D$.

0.2.5 Teorema de descomposición de abiertos en cubos diádicos

Para todo subconjunto no vacío y abierto en $\left(\mathbb{R}^N, \tau_{R^N}(d)\right)$, O, existe una colección numerable de cubos diádicos (posiblemente de órdenes distintos) de $\mathbb{R}^N$, $\{C_n : n \in \mathbb{N}\}$, tales que:

1.) $O = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$

2.) $\overline{C_n} \subseteq O \ \ \forall n \in \mathbb{N}$

3.) $i \neq j \Rightarrow C_i \cap C_j = \varnothing$

<u>**Demostración:**</u> Definiremos varios conjuntos auxiliares.

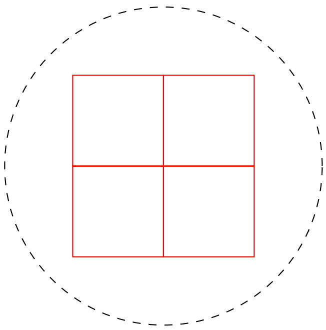
Definimos $\mathcal{G}_n := \left\{C \in \mathcal{F}_n : \overline{C} \subseteq O\right\}$. Cada una de estas colecciones de conjuntos es finita o numerable al serlo $\mathcal{F}_n$.

A partir de los $\mathcal{G}_n$ definiremos otra colección de conjuntos. Para $n = 1$, tomamos $\mathcal{H}_1 := \mathcal{G}_1$. Para $n > 1$, definimos

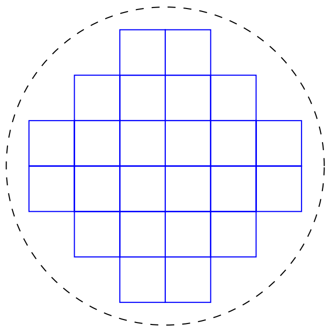
$$\mathcal{H}_n := \left\{ C \in \mathcal{G}_n : C \nsubseteq \bigcup_{k=1}^{n-1} \mathcal{H}_k \right\} = \left\{ C \in \mathcal{G}_n : C \cap \left[\bigcup_{k=1}^{n-1} \bigcup_{D \in \mathcal{H}_k} D_k \right] = \varnothing \right\}$$

La última igualdad se deduce de las propiedades de los cubos diádicos. Por construcción, los $\mathcal{H}_n$ son numerables y disjuntos entre sí. Además, por construcción, la clausura de sus cubos está contenida en O. Queda probar el punto (1).

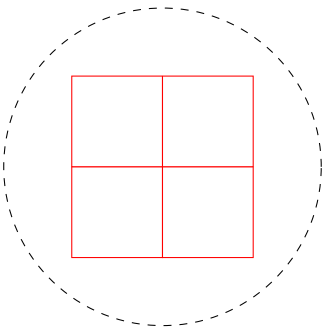
Intuitivamente, $\mathcal{G}_n$ modela los cubos de un cierto orden que "caben" en O. El paso a los $\mathcal{H}_n$ hace que solo se empiecen a usar cubos "más pequeños" en las zonas donde no "cabrían" cubos de un orden inferior ("más grandes").



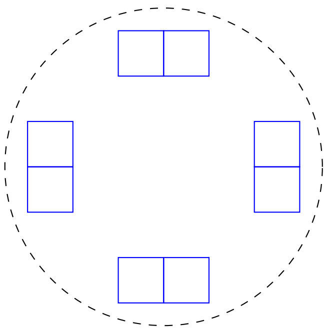
$\mathcal{G}_1$



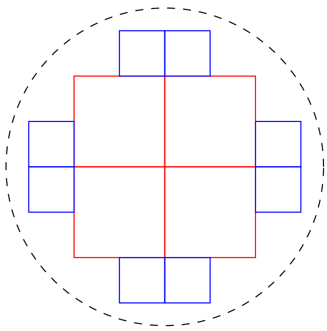
$\mathcal{G}_2$



$\mathcal{H}_1 = \mathcal{G}_1$



$\mathcal{H}_2$



$\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$

Probaremos que $\quad O = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{C\in\mathcal{H}_n} C \quad$ por doble contenido.

$\boxed{\supseteq}$ Por definición de $\mathcal{H}_n$, $\quad \forall n \in \mathbb{N}$ se tiene $C \in \mathcal{H}_n \Rightarrow C \subsetneq \overline{C} \subsetneq O$

$\boxed{\subseteq}$ Sea $x_0 \in O \subseteq \mathbb{R}^N$ cualquiera, podemos expresarlo como $x_0 = (x_1, \ldots, x_N)$.

Al ser O abierto en $(\mathbb{R}^N, \tau_{\mathbb{R}^N}(d))$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ que verifica:

$$x_0 \in \prod_{i=1}^{N} \left(x_i - \frac{1}{2^{n_0}},\ x_i + \frac{1}{2^{n_0}} \right) \subset \prod_{i=1}^{N} \left[x_i - \frac{1}{2^{n_0}},\ x_i + \frac{1}{2^{n_0}} \right] \subset O$$

Además, para cada coordenada $1 \leq i \leq N$ tenemos que $\exists! j_i \in \mathbb{Z} : x_i \in \left[\frac{j_i-1}{2^{n_0}}, \frac{j_i}{2^{n_0}}\right)$. Así, para cada $i \in 1, \ldots, N$ se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{j_i-1}{2^{n_0}} \leq x_i \Rightarrow \frac{j_i}{2^{n_0}} \leq x_i + \frac{1}{2^{n_0}} \\ x_i < \frac{j_i}{2^{n_0}} \Rightarrow x_i - \frac{1}{2^{n_0}} < \frac{j_i-1}{2^{n_0}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\frac{j_i-1}{2^{n_0}}, \frac{j_i}{2^{n_0}}\right) \subset \left(x_i - \frac{1}{2^{n_0}}, x_i + \frac{1}{2^{n_0}}\right)$$

De este modo, $D_0 := \prod_{i=1}^{N} \left[\frac{j_i - 1}{2^{n_0}}, \frac{j_i}{2^{n_0}} \right) \subsetneq \prod_{i=1}^{N} \left[x_i - \frac{1}{2^{n_0}}, x_i + \frac{1}{2^{n_0}} \right] \subsetneq O.$

Y por tanto, $x_0 \in D_0 \subsetneq \overline{D_0} \subsetneq O$. A su vez, como $D_0 \in \mathcal{G}_{n_0}$, hemos demostrado también que el siguiente conjunto es no vacío:

$$\mathcal{A}_{x_0} := \Big\{ n \in \mathbb{N} : \exists\, C \in \mathcal{G}_n \text{ tal que } x_0 \in C \Big\}$$

Al ser A_{x_0} un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$, podemos afirmar que tiene mínimo, al que denotaremos m_0. Así, ha de existir $C_0 \in \mathcal{G}_{m_0}$ tal que $x_0 \in C_0$, veamos que $C_0 \in \mathcal{H}_{m_0}$. Por definición de $\mathcal{H}_{m_0}$, $C_0 \notin \mathcal{H}_{m_0} \Rightarrow C_0 \in \mathcal{G}_n$ para cierto $n < m_0$. Esto contradice que m_0 sea el mínimo de $\mathcal{A}_{x_0}$. Hemos demostrado que $C_0 \in \mathcal{H}_{m_0}$.

§3. Series dobles

El álgebra contempla únicamente la suma como operación binaria. Por la propiedad asociativa, es posible expresar cualquier suma finita como sumas binarias sucesivas. Para No obstante, el álgebra por sí misma no nos basta para sumar series.

0.3.1 Definición de sucesión doble

Llamamos "sucesión doble" a cualquier aplicación

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty - \infty\} \\ n, m &\longmapsto \gamma(n, m) = a_{nm} \end{aligned}$$

Diremos que a_{nm} es el término general de la sucesión.

0.3.2 Definición de serie doble

Dada una sucesión doble de término general a_{nm}, llamamos "serie doble de término general a_{nm}" a la expresión $\displaystyle\sum_{n,m} a_{nm}$ (que equivale a $\displaystyle\sum_{\substack{n=1 \\ m=1}} a_{nm}$).

Diremos que $\sum_{n,m} a_{nm}$ es convergente si sus sumas parciales convergen a un número real. Es decir, si: $\exists s \in \mathbb{R}$ que verifica:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \;\; n, m \geq n_0 \Rightarrow \left| s - \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{ij} \right| < \varepsilon$$

En este caso, diremos que este s es el "valor de la suma de la serie".

Diremos que $\sum_{n,m} a_{nm}$ es divergente a $+\infty(-\infty)$ si $\forall K \in \mathbb{R}\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que dados $n, m \geq n_0$ se cumple:

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{ij} > K \qquad\qquad \left(\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{ij} < K \right)$$

En este caso, diremos que el valor de la suma de la sucesión es $+\infty(-\infty)$.

Es importante distinguir la igualdad de series como sucesiones y como valores. Veamos un ejemplo con series simples:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + 0 + 0 + 0 + \dots \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

Es claro que las series no tienen el mismo término general (no son iguales como series), pero sí tienen el mismo valor de suma (que es 1).

0.3.3 Teorema de series dobles no negativas

Dada una sucesión doble $\gamma : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow [0, +\infty]$ de término general a_{nm}, dada una biyección cualquiera $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, se cumple:

$$\sum_{n,m} a_{nm} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{g(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nm} \in [0, +\infty]$$

<u>Demostración:</u> Probaremos primero la igualdad respecto de la reordenación y después respecto de las series anidadas.

Si existe algún término $a_{n_0 m_0} = +\infty$, entonces la igualdad se cumple trivialmente al estar las sumas bien definidas ($\gamma(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \subseteq [0, +\infty]$). Supongamos entonces que todos los términos son finitos, veamos qué casos pueden darse:

- Primer caso: Supongamos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{g(n)} = s \in \mathbb{R}$.

Por definición, $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, n_0 \in \mathbb{N} : \;\; s - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{g(k)} < \varepsilon \;\; \forall n \geq n_0$. Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera pero fijo, fijamos también el n_0 asociado. Como g es biyectiva, $\exists \, m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $g(\{1, \dots, n_0\}) \subseteq \{1, \dots, m_0\} \times \{1, \dots, m_0\}$. Al tratarse de series de términos no negativos, dados $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0, m \geq n_0$, se cumple:

$$\sum_{k=1}^{n_0} a_{g(k)} \leq \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{ij} \Rightarrow 0 \overset{(*)}{\leq} s - \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{ij} \leq s - \sum_{k=1}^{n_0} a_{g(k)} < \varepsilon$$

(*) La desigualdad se deduce de que la suma parcial de la serie doble es una reordenación de la suma parcial de la serie simple, siendo esta última absolutamente convergente. Como podemos hacer ε arbitrariamente pequeño, concluimos que las dos series tienen el mismo límite.

- Segundo caso: $\sum_{n=1} \infty a_{g(n)} = +\infty$.

Sea $K \in \mathbb{R}$, por definición, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=1}^{n} a_{g(k)} > K \ \forall\, n \geq n_0$. AL ser g biyectiva, $\exists\, m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $g(1, \ldots, n_0) \subseteq \{1, \ldots, m_0\} \times \{1, \ldots, m_0\}$. Así, dados $n \geq m_0, m \geq m_0$ se tiene:

$$K < \sum_{k=1}^{n_0} a_{g(k)} \leq \sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}} a_{ij}$$

Es claro que la serie doble diverge a $+\infty$.

Queda probar la igualdad entre la serie doble y las series anidadas cuando todos los términos son finitos. Veamos qué ocurre según el carácter de la serie doble.

- Primer caso: $\sum_{n,m} a_{nm} = s \in [0, +\infty)$.

Sea $\varepsilon > 0$. Por definición de convergencia, sabemos que $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que dados $n \geq n_0, m \geq n_0$ se tiene:

$$\left| s - \sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}} a_{ij} \right| < \varepsilon$$

Nótese que debido a las propiedades algebraicas de la suma, en el caso finito se da la igualdad; es decir:

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

De este modo, sustituyendo en la definición de convergencia, dados $n \geq n_0, m \geq n_0$ obtenemos:

$$\left| s - \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \right| < \varepsilon \Rightarrow \varepsilon \geq \lim_{n} \left| s - \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \right| = \left| s - \sum_{j=1}^{m} \lim_{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \right) \right|$$

La igualdad se debe a aplicar las propiedades del límite con funciones continuas.

Como la serie doble converge por hipótesis, también han de hacerlo las series de filas y columnas. Es por ello que podemos afirmar que el último límite existe.

La igualdad anterior se cumple para cualquier $\varepsilon > 0$ y para cualquier $m \geq n_0$. Haciendo ε arbitrariamente pequeño y tomando límites en m llegamos al resultado. El razonamiento para la otra serie anidada es análogo; así, concluimos:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nm} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} = \sum_{n,m} a_{nm}$$

- Segundo caso: $\sum_{n,m} a_{nm} = +\infty$. Si hubiese algún $n \in \mathbb{N}$ verificando $\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} = +\infty$ o si existiese algún $m \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_{nm} = +\infty$, las series anidadas divergerían trivialmente. Supongamos que no es el caso para ver que también se cumple el resultado.

Sea $K \in \mathbb{R}$ cualquiera, por definición de divergencia se cumple:

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall\, n \geq n_0, \forall m \geq n_0 \text{ se cumple } \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} > K$$

Nótese que hemos utilizado la igualdad entre la serie doble y las series anidadas para el caso finito. Además, dados $n \geq n_0, m \geq n_0$, se cumple:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} > K \Rightarrow K \leq \lim_{n} \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}\right)$$

Las series de suma de filas y columnas existen por hipótesis, luego la igualdad se cumple para todo $m \geq n_0$. Tomando límites en m podemos observar que $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nm} \geq K$. Como el K escogido fue arbitrario, se cumple para cualquier K real. Así, las series anidadas divergen a $+\infty$ (análogo para la otra serie anidada).

I Teoría de la medida

§1. Espacios de medida

1.1.1 Definición de σ-álgebra

Sea X un conjunto cualquiera, diremos que $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una σ-álgebra si cumple las siguientes propiedades:

S.1) $\varnothing \in \Sigma$

S.2) $\{E_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \Sigma \Rightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i \in \Sigma$

S.3) $E \in \Sigma \Rightarrow E^c := X \backslash E \in \Sigma$

Nótese que no es necesario exigir que X tenga ningún tipo de estructura (ni topológica, ni algebraica...).

1.1.2 Propiedades de las σ-álgebras

Sea X un conjunto, sea Σ una σ-álgebra de X. Sea $\{E_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \Sigma$, y $E, F \in \Sigma$. Entonces, se cumple:

i) $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} E_i \in \Sigma$

ii) $E \cup F \in \Sigma$

iii) $E \cap F \in \Sigma$

iv) $E \backslash F \in \Sigma$

Demostración:

i) Por la propiedad $(S.3)$ y la involución del complementario, un conjunto pertenece a una σ-álgebra si y solo si su complementario pertenece a ella. Por tanto, basta ver que: $X \setminus \left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} E_i\right) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (X \setminus E_i) \in \Sigma$.

Por la propiedad $(S.3)$, para cada $i \in \mathbb{N}$ tenemos que $X \setminus E_i \in \Sigma$, pues $E_i \in \Sigma$ por hipótesis. Finalmente, aplicando $(S.1)$ tenemos que su unión numerable se encuentra en Σ.

ii) Reescribiremos $E \cup F$ para hacer uso del resultado que acabamos de probar. Por $(S.1)$ sabemos que $\varnothing \in \Sigma$ luego podemos considerar la colección numerable de conjuntos de Σ, $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ donde $A_1 = E$, $A_2 = F$, y $A_n = \varnothing \ \forall\, n > 2$.

De este modo, $E \cup F = E \cup F \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \ldots = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \Sigma$.

iii) Como consecuencia de $(S.1)$ y de $(S.3)$, sabemos que $X \in \Sigma$. Así, basta considerar $B_1 = E$, $B_2 = F$, $B_n = X \ \forall\, n > 2$.

Aplicando el apartado (i), $E \cap F = E \cap F \cap X \cap X \cap \ldots = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i \in \Sigma$.

iv) Por definición de complementario, $E \setminus F = E \cap (X \setminus F)$. Por hipótesis, $E, F \in \Sigma$. Aplicando $(S.3)$, $(X \setminus F) \in \Sigma$. Finalmente, aplicando el apartado (iii), $E \cap (X \setminus F) \in \Sigma$.

1.1.3 Definición de espacio de medida

Sea X un conjunto cualquiera y Σ una σ-álgebra de X, diremos que $\mu : \Sigma \longrightarrow [0, +\infty]$ es una medida sobre Σ si verifica las siguientes propiedades:

M.1) $\mu(\varnothing) = 0$

M.2) Sean $\{E_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \Sigma$ tales que $i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \varnothing$; entonces,

$$\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(E_i)$$

A la tríada (X, Σ, μ) se la denomina “espacio de medida”, y a los conjuntos de Σ se los llama “conjuntos (μ-medibles) de X”.

1.1.4 Propiedades de los espacios de medida

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida, se cumple:

i) Sean $E, F \in \Sigma$ con $F \subseteq E$, se cumple $\mu(F) \leq \mu(E)$.
Si además se tiene que $\mu(F) < +\infty$, entonces $\mu(E \setminus F) = \mu(E) - \mu(F)$.

ii) Sean $\{E_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \Sigma$ tales que $E_i \subseteq E_{i+1} \ \ \forall\, i \in \mathbb{N}$.
Entonces, $\mu(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i) = \lim\limits_n \mu(E_n)$.

iii) Sean $\{E_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \Sigma$ tales que $E_{i+1} \subseteq E_i \ \ \forall\, i \in \mathbb{N}$, y $\mu(E_1) < +\infty$.
Entonces, $\mu(\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i) = \lim\limits_n \mu(E_n)$.

<u>**Demostración:**</u>

$i)$ Reescribiendo como unión numerable de conjuntos disjuntos de Σ,

$$E = (E \setminus F) \cup F \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \dots$$

Aplicando $(M.3)$ y evaluando μ a ambos lados obtenemos:

$$\mu(E) = \mu(E \setminus F) + \mu(F) + \mu(\varnothing) + \mu(\varnothing) + \dots$$

Aplicando $(M.1)$ se deduce que $\mu(E) = \mu(E \setminus F) + \mu(F)$. Por la no negatividad de μ, se tiene que $\mu(E \setminus F) \geq 0 \Rightarrow \mu(F) \leq \mu(F)$.

Si además $\mu(F) < +\infty$, podemos despejar sin que ocurran indeterminaciones; así, $\mu(E \setminus F) = \mu(E) - \mu(F)$.

$ii)$ Una vez más, reescribimos el conjunto a partir de uniones disjuntas:

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i = E_1 \cup \Big(E_2 \setminus E_1\Big) \cup \Big(E_3 \setminus (E_2 \cup E_1)\Big) \cup \Big(E_4 \setminus (E_1 \cup E_2 \cup E_3)\Big) \cup \dots$$

Como $E_i \subseteq E_{i+1}$ por hipótesis, podemos simplificar esta expresión:

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i = E_1 \cup (E_2 \setminus E_1) \cup (E_3 \setminus E_2) \cup (E_4 \setminus E_3) \cup \dots = E_1 \cup \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (E_{i+1} \setminus E_i)\right)$$

Así, $\mu\left(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i\right) = \mu(E_1) + \sum\limits_{i=2}^{\infty} \mu(E_i \setminus E_{i-1}) = (*)$.

Distinguimos dos casos en función de la medida de los E_i:

ii.a) Existe cierto $j \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(E_j) = +\infty$. Como $E_j \subseteq E_n \ \forall\, n \geq j$, aplicando las propiedad (i) de la medida, se tiene que $\mu(E_n) = +\infty \ \ \forall\, n \geq j$, luego ha de cumplirse $\lim\limits_n \mu(E_n) = +\infty$. Por otro lado, como $E_j \subseteq \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i$, se tiene que $+\infty = \mu(E_j) \leq \mu(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i)$, luego, $\lim\limits_n \mu(E_n) = \mu(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i) = +\infty$.

ii.b) En caso contrario al anterior, $\mu(E_i) < +\infty \ \ \forall\, i \in \mathbb{N}$. Desarrollando en $(*)$,

$$\begin{aligned}
\mu\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\Big) &= \mu(E_1) + \sum_{i=2}^{\infty} \mu(E_i \setminus E_{i-1}) = \mu(1) + \lim_n \sum_{i=2}^{n} \mu(E_i \setminus E_{i-1}) = \\
&= \lim_n \Big(\mu(E_1) + \mu(E_2 \setminus E_1) + \mu(E_3 \setminus E_2) + \ldots + \mu(E_n \setminus E_{n-1})\Big) = \\
&= \lim_n \Big(\mu(E_1) + \big(\mu(E_2) - \mu(E_1)\big) + \ldots + \big(\mu(E_n) - \mu(E_{n-1})\big)\Big) = \\
&= \lim_n \mu(E_n)
\end{aligned}$$

Hemos podido simplificar porque todas las medidas son finitas; de lo contrario, podrían producirse indeterminaciones.

iii) Por hipótesis, $E_{i+1} \subseteq E_i \ \ \forall\, i \in \mathbb{N}$, y $\mu(E_1) < +\infty$. De este modo, como todos los E_i son subconjuntos de E_1 han de tener medida finita también (propiedad (i) de la medida). Expresamos la intersección según el complementario respecto de E_1 como sigue: $\ E_1 \setminus \big(\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i\big) = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} \big(E_1 \setminus E_i\big)$.

Por hipótesis, $E_{i+1} \subseteq E_i \Rightarrow (E_1 \setminus E_i) \subseteq (E_1 \setminus E_{i+1})$. Como consecuencia, aplicando los apartados anteriores de este resultado,

$$\begin{aligned}
\mu(E_1) - \mu\Big(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} E_i\Big) &= \mu\Big(E_1 \setminus \big(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} E_i\big)\Big) = \mu\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (E_1 \setminus E_i)\Big) = \\
&= \lim_n \mu(E_1 \setminus E_n) = \mu(E_1) - \lim_n \mu(E_n)
\end{aligned}$$

Como todas las medidas son finitas, podemos despejar sin indeterminaciones:

$$\mu\Big(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} E_i\Big) = \lim_n \mu(E_n)$$

1.1.5 Espacio de medida inducido

Dado un espacio de medida (X, Σ, μ). Sea $A \in \Sigma$ cualquiera, definimos la siguiente colección $\Sigma(A) := \{B \cap A : B \in \Sigma\}$. Entonces, $(A, \Sigma(A), \mu_{|\Sigma(A)})$ es un espacio de medida.

<u>Demostración:</u> Comencemos comprobando que $\Sigma(A)$ es en efecto una σ-álgebra.

$(S.1)$ Por ser Σ una σ-álgebra, $\varnothing \in \Sigma$. Así, basta tomar $B = \varnothing$. De este modo, $\varnothing = A \cap \varnothing \in \Sigma(A)$.

$(S.2)$ Sean $\{E_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \Sigma(A)$, buscamos $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i \in \Sigma(A)$. Por definición de $\Sigma(A)$, cada E_i será de la forma $A \cap F_i$ con $F_i \in \Sigma$. Así, se tiene:

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A \cap F_i = A \cap \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i \right) \in \Sigma(A)$$

Consideramos $B = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} F_i \in \Sigma$ al aplicar $(S.2)$ en Σ.

$(S.3)$ Sea $E \in \Sigma(A)$, buscamos $A \setminus E \in \Sigma(A)$. Por definición de $\Sigma(A)$, podemos afirmar que $E = A \cap B$ para cierto $B \in \Sigma$. Aplicando $(S.3)$, por ser Σ una σ-álgebra de X, $B \in \Sigma \Rightarrow X \setminus B \in \Sigma$. Así, $A \setminus E = A \cap (X \setminus B) \in \Sigma(A)$.

Queda ver que $\mu_{|\Sigma(A)}$ es una medida. Como $\Sigma(A) \subseteq \Sigma$, las propiedades de μ se trasladan trivialmente a $\mu_{|\Sigma(A)}$.

<u>Nota:</u> Para definir una σ-álgebra inducida basta tomar $A \subseteq X$ cualquiera. No obstante, para que $\mu_{|\Sigma(A)}$ sea una medida, necesitamos que $\Sigma(A) \subseteq \Sigma$, y para ello es necesario exigir $A \in \Sigma$.

1.1.6 Medida de contar

Veamos dos ejemplos de espacios de medida:

•$(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$ donde m es la "medida de contar" y se define como

$$m(A) = \begin{cases} \operatorname{card} A & \text{si } A \text{ es finito} \\ +\infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$

•$(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mu)$ donde $\mu(B) = m(B \cap \mathbb{N})$.

Al ser el conjunto de partes una σ-álgebra trivialmente, basta ver que las medidas cumplen $(M.1)$ y $(M.2)$, lo que es evidente en vista de su definición.

En este tema buscamos establecer una medida en $\mathbb{R}^N$ basada en la longitud de los intervalos. Hemos de definir adecuadamente la σ-álgebra asociada, pues ha de incluir a todos los intervalos (y por tanto a todos los abiertos) y a sus complementarios (luego todos los cerrados). Sin embargo, como veremos más adelante, no es posible tomar simplemente $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$.

1.1.7 Subaditividad en espacios de medida

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida, sean $\{E_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \Sigma$. Entonces, se cumple:

$$\mu(\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} E_i) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(E_i)$$

<u>**Demostración:**</u> Expresaremos $\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} E_i$ como unión de conjuntos disjuntos.

Definimos $F_1 := E_1 \in \Sigma$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n \in \Sigma$. Así, $F_{n+1} := E_{n+1} \setminus (E_1 \cup \ldots \cup E_n) \in \Sigma$. Veamos que $\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} F_i = \underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} E_i$ por doble contenido.

$\subseteq$ | $\forall\, i \in \mathbb{N},\ F_i \subseteq E_i \Rightarrow \underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} F_i \subseteq \underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} E_i$.

$\supseteq$ | Sea $x_0 \in \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i$; por definición, $\exists\, i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_0 \in E_{i_0}$.

Por tanto, el siguiente conjunto $\mathcal{A}_{x_0}$ es no vacío: $\mathcal{A}_{x_0} := \{n \in \mathbb{N} : x_0 \in E_n\}$. Al ser un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$, podemos afirmar que existe $m_0 := \min \mathcal{A}_{x_0}$. Por definición de $\mathcal{A}_{x_0}$

$$\left.\begin{array}{l} x_0 \in E_{m_0} \\ x_0 \notin E_i \;\; \forall\, i < m_0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_0 \in F_{m_0} \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i$$

Volviendo al problema de la subaditividad, se cumple:

$$\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i) = \mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i) = \mu(F_1) + \mu(F_2) + \ldots \leq \mu(E_1) + \mu(E_2) + \ldots = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(E_i)$$

La desigualdad se debe a que $\forall\, i \in \mathbb{N}, F_i \subseteq F_i \Rightarrow \mu(F_i) \leq \mu(E_i)$.

1.1.8 Definición de espacio de medida completo

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida, diremos que es un "completo" (o que Σ es completo respecto de μ) si se cumple:

$$\forall\, B \in \Sigma \text{ con } \mu(B) = 0, \;\; \forall\, A \subseteq B \text{ se tiene que } A \in \Sigma \text{ y por tanto } \mu(A) = 0$$

1.1.9 Compleción de un espacio de medida

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida cualquiera. Existe una σ-álgebra $\tilde{\Sigma}$ de X con $\Sigma \subseteq \tilde{\Sigma}$. y una medida $\tilde{\mu}$ sobre $\tilde{\Sigma}$ tales que $\tilde{\mu}_{|\Sigma} = \mu$ y $(X, \tilde{\Sigma}, \tilde{\mu})$ es completo.

De hecho, podemos hallar $\tilde{\Sigma}$ y $\tilde{\mu}$ para que $(X, \tilde{\Sigma}, \tilde{\mu})$ sea el menor espacio completo que contiene a (X, Σ, μ). Es decir, sea (X, Ω, ν) un espacio de medida completo tal que $\Sigma \subseteq \Omega$ y $\nu_{|\Sigma} = \mu$; entonces, $\tilde{\Sigma} \subseteq \Omega$.

En tal caso, diremos que $(X, \tilde{\Sigma}, \tilde{\mu})$ es la "compleción de (X, Σ, μ)".

Demostración: Definiremos el siguiente conjunto auxiliar:

$$\mathcal{N} := \{N \in \mathcal{P}(X) : \exists\, B \in \Sigma \text{ tal que } N \subseteq B \text{ y } \mu(B) = 0\}$$

Intuitivamente, $\mathcal{N}$ contiene todos los conjuntos que podrían faltarle a Σ para que (X, Σ, μ) fuese un espacio de medida completo. Veamos cómo expandir Σ incluyendo estos conjuntos sin introducir otros nuevos que necesitemos completar.

Basta considerar la siguiente definición de $\tilde{\Sigma}$:

$$\tilde{\Sigma} := \{A \cup N : A \in \Sigma, N \in \mathcal{N}\}$$

Para verificar que $\tilde{\Sigma}$ cumple las propiedades que deseamos, introduciremos la siguiente observación: Sean $A \in \Sigma, N \in \mathcal{N}$. Existen $N_0 \in \mathcal{N}$, $M \in \Sigma$ tales que:

$$A \cup N = A \cup N_0 \qquad N_0 \subseteq M \qquad \mu(M) = 0 \qquad A \cap M = \varnothing$$

Veamos la demostración:

Al considerar $N_0 := N \setminus A$ es claro que $A \cup N = A \cup (N \setminus A) = A \cup N_0$.
Como $N \in \mathcal{N}$, se tiene que $\exists\, B \in \Sigma$ con $N \subseteq B$ y $\mu(B) = 0$.
Así, tomando $M := B \setminus A \in \Sigma$ se cumple $A \cap M = \varnothing$.
Además, $N \subseteq B \Rightarrow N_0 = N \setminus A \subseteq B \setminus A = M$.
Finalmente, $M \subseteq B \Rightarrow 0 \leq \mu(M) \leq \mu(B) = 0 \Rightarrow \mu(M) = 0$.

Comprobemos ahora que $\tilde{\Sigma}$ es en efecto una σ-álgebra de X.

$(S.1)$ Buscamos $\varnothing \in \tilde{\Sigma}$

Para ello hay que expresar $\varnothing = A \cup N$ con $A \in \Sigma$, $N \in \mathcal{N}$.
Tenemos que $\varnothing \in \Sigma$ por ser Σ una σ-álgebra.
Además, $\varnothing \subseteq \varnothing$ con $\varnothing \in \Sigma$ y $\mu(\varnothing) = 0$.
Por tanto, tenemos que $\varnothing \in \mathcal{N}$ al tomar $B = \varnothing$ en la definición de $\mathcal{N}$.
Así, tomando $A = N = \varnothing$, $\varnothing = A \cup N = \varnothing \cup \varnothing \in \tilde{\Sigma}$.

$(S.2)$ Sean $\{E_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \tilde{\Sigma}$, buscamos $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \in \tilde{\Sigma}$.

Por definición de $\tilde{\Sigma}$, $\forall\, j \in \mathbb{N} : E_j = A_j \cup N_j$ con $A_j \in \Sigma$, $N_j \in \mathcal{N}$.

Entonces, $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A_i \cup N_i) = \big(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\big) \cup \big(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} N_i\big)$.

Se tiene $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \Sigma$. Queda ver $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} N_i \in \mathcal{N}$ para llegar al resultado.

Por definición de $\mathcal{N}$, $\forall\, j \in \mathbb{N} : \exists\, B_j \in \Sigma$ con $N_j \subseteq B_j$ y $\mu(B_j) = 0$.

Así, $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} N_i \subseteq \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} M_i$ y $0 \leq \mu(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} B_i) \leq \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \mu(B_i) = 0$ por subaditividad.

Por todo lo anterior, $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} N_i \in \mathcal{N} \Rightarrow \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i \in \tilde{\Sigma}$.

$(S.3)$ Sea $E \in \tilde{\Sigma}$, buscamos $E^c = X \setminus E \in \tilde{\Sigma}$.
Razonando como antes, $E = A \cup N$ con $A \in \Sigma, N \in \mathcal{N}$.
Por la observación anterior, sabemos que: $\exists\, M \in \Sigma$, $N_0 \in \mathcal{N}$ tales que:

$$E = A \cup N = A \cup N_0 \qquad N_0 \subseteq M \qquad M \cap A = \varnothing \qquad \mu(M) = 0$$

Así, $E = A \cup N_0 = A \cup (M \cap N_0) = (A \cup M) \cap (A \cup N_0)$.
Aplicando las leyes de De Morgan, $E^c = (A \cup M)^c \cup (A \cup N_0)^c$.
Centrándonos en este segundo término, como $N_0 \subseteq M$, se tiene:

$$\begin{aligned}(A \cup N_0)^c = A^c \cap N_0^c = A^c \cap \big((M \setminus N) \cup M^c\big) &= \\ = \big(A^c \cap (M \setminus N_0)\big) \cup (A^c \cap M^c) &= (M \setminus N_0) \cup (A \cup M)^c\end{aligned}$$

De este modo, $E^c = (A \cup M)^c \cup (M \setminus N_0)$.
Como $(A \cup M)^c \in \Sigma$, y $(M \setminus N_0) \in \mathcal{N}$, se tiene que $E^c \in \tilde{\Sigma}$.

Veamos ahora cómo extender μ a $\tilde{\mu}$ para que abarque $\tilde{\Sigma}$.

$$\tilde{\mu} : \tilde{\Sigma} :\longrightarrow [0, +\infty] \quad E \longmapsto \tilde{\mu}(E) := \mu(A) \text{ donde } E = A \cup N \text{ con } A \in \Sigma, N \in \mathcal{N}$$

Veamos en primer lugar que $\tilde{\mu}$ está bien definida. Es decir, un mismo conjunto $E \in \tilde{\Sigma}$ tiene siempre la misma medida sin importar la descomposición que consideremos. Sea $E = A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2 \in \tilde{\Sigma}$ con $A_1, A_2 \in \Sigma$, $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$, buscamos comprobar que $\mu(A_1) = \mu(A_2)$.

Para cada $i = 1, 2$ $N_i \in \mathcal{N} \Rightarrow \exists\, B_i \in \Sigma$ tal que $N_i \subseteq B_i$ y $\mu(B) = 0$.
Así, $A_1 \subseteq A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2 \subseteq A_2 \cup B_2$.
Por tanto, $\mu(A_1) \leq \mu(A_2 \cup B_2) \leq \mu(A_2) + \mu(B_2) = \mu(A_2)$.
Análogamente, $\mu(A_2) \leq \mu(A_1)$ luego $\mu(A_1) = \mu(A_2)$.

Veamos ahora que $\tilde{\mu}$ es en efecto una medida.

$(M.1)$ Buscamos $\tilde{\mu}(\varnothing) = 0$.

Basta ver tomar $A = N = \varnothing$ en la definición de $\tilde{\Sigma}$.

Aplicando $(M.1)$ en μ, $\tilde{\mu}(\varnothing) = \mu(\varnothing) = 0$.

$(M.2)$ Sean $\{E_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \tilde{\Sigma}$ disjuntos, buscamos $\tilde{\mu}(\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} E_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \tilde{\mu}E_i$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, existen $A_i \in \Sigma$, $N_i \in \mathcal{N}$ tales que $E_i = A_i \cup N_i$.

Así, aplicando la definición de $\tilde{\mu}$ y aplicando $(M.2)$ en μ,

$$\tilde{\mu}(\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} E_i) = \tilde{\mu}(\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} A_i \cup N_i) = \mu(\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \tilde{\mu}(E_i)$$

Es claro que $\tilde{\mu}_{|\Sigma} = \mu$ pues se cumple:

$$A \in \Sigma \Rightarrow A = A \cup \varnothing \text{ con } \mu(\varnothing) = 0 \text{ luego } \tilde{\mu}(A) = \mu(A)$$

Comprobemos ahora que $(X, \tilde{\Sigma}, \tilde{\mu})$ es un espacio de medida completo. Sean $E \subseteq F \in \tilde{\Sigma}$ con $\tilde{\mu}(F) = 0$, buscamos $E \in \tilde{\Sigma}$.

Por definición, $F = A \cup N$ para ciertos $A \in \Sigma, N \in \mathcal{N}$.

Además, $N \in \mathcal{N} \Rightarrow \exists\, B \in \Sigma$ tal que $N \subseteq B$ y $\mu(B) = 0$.

Por hipótesis, $\tilde{\mu}(F) := \mu(A) = 0$.

Así, $E \subseteq F = A \cup N \subseteq A \cup B$, y $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B) = 0$.

Por tanto, $E \in \mathcal{N} \subseteq \tilde{\Sigma}$.

Por último, queda comprobar que la compleción es el mínimo espacio de medida completo que contiene al original. Sea (X, Ω, ν) un espacio de medida completo tal que $\Sigma \subseteq \Omega$ y $\nu_{|\Sigma} = \mu$. Entonces, $\tilde{\Sigma} \subseteq \Omega$.

Por ser (X, Ω, ν) completo, $\mathcal{N} \subseteq \Omega$.

Además, $\Sigma \subseteq \Omega$ por hipótesis.

De este modo, se cumple:

$$\left.\begin{array}{l} A \in \Sigma \\ N \in \mathcal{N} \end{array}\right\} A \cup N \in \Omega \text{ aplicando } (S.2) \text{ en } \Omega$$

Concluimos que $\tilde{\Sigma} \subseteq \Omega$.

Hemos demostrado que se cumplen todas las hipótesis.

§2. El espacio de medida de Lebesgue $(R^N, \mathfrak{M}_N, \mu_N)$

1.2.1 Definiciones de intervalos y cubos

Llamaremos "intervalo degenerado" a cualquier conjunto vacío o unitario (unipuntual). Por ejemplo $\varnothing = (2, -1)$, $\{a\} = [a, a] \;\; \forall\, a \in \mathbb{R}$.

Denominamos "cubo de $\mathbb{R}^N$" a cualquier conjunto $C = I_1 \times \ldots \times I_N$ donde I_i es un intervalo $\;\forall\, i \in \{1, \ldots, N\}$. Si al menos uno de los intervalos que forman el cubo es degenerado, diremos que es un "cubo degenerado de $\mathbb{R}^N$".

1.2.2 Definición del volumen de un cubo

Sea $C = I_1 \times \ldots \times I_N$ un cubo de $\mathbb{R}^N$ con $a_j, b_j \in \overline{\mathbb{R}}$ los extremos de cada intervalo I_j. Llamaremos "volumen de C" a su imagen por la siguiente función:

$$v_N(C) := \begin{cases} 0 & \text{si } C \text{ es degenerado} \\ \prod_{i=1}^{N} |b_i - a_i| & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

1.2.3 Definición de medida exterior

Sea A un subconjunto cualquiera de $\mathbb{R}^N$, se define su medida exterior como el número dado por:

$$\mu_N^*(A) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} v_N(I_i) : \{I_i : i \in \mathbb{N}\} \text{ cubos abiertos que recubren } A \right\} \in [0, +\infty]$$

Donde v_N es la el volumen de los cubos anterior.

Nota: A pesar de su nombre, la medida exterior no es una medida.

1.2.4 Corolario de la definición anterior

Sea A un conjunto cualquiera, introducimos la siguiente notación:

$$\mathcal{M}(A) := \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} v_N(I_i) : \{I_i : i \in \mathbb{N}\} \text{ cubos abiertos que recubren } A \right\}$$

Por definición, $\mu_N^*(A) := \inf \mathcal{M}(A)$. Así, sean $\{I_i : i \in \mathbb{N}\}$ cubos abiertos tales que $A \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} I_i$; entonces $\sum_{i=1}^{\infty} v_N(I_i) \in \mathcal{M}(A)$ luego $\mu_N^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty}(I_i)$ por definición de ínfimo.

De manera similar, sea $\varepsilon > 0$, si $\mu_N^*(A) < \infty$, podemos encontrar $\{I_i : i \in \mathbb{N}\}$ cubos abiertos con $A \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} I_i$ tales que $\sum_{i=1}^{\infty} v_N(I_i) < \mu_N^*(A) + \varepsilon$. De no ser así, se contradiría la definición de ínfimo. Si $\mu_N^*(A) = +\infty$, la desigualdad ha de ser no estricta.

1.2.5 Ejemplos básicos de medida exterior

i) $\mu_N^*(\varnothing) = 0$ pues $\varnothing \subseteq \varnothing \cup \varnothing \cup \ldots$ Así, $0 \leq \mu_N^*(\varnothing) \leq \sum_{i=1}^{\infty} v_N(\varnothing) = 0$.

ii) Sea $C = I_1 \times \ldots \times I_N$ un cubo degenerado acotado; entonces $\mu_N^*(C) = 0$.

Si $C = \varnothing$ ya se tiene por el apartado anterior.

En caso contrario, $\exists\, j \in \{1, \ldots, N\}$ tal que $I_j = \{a\}$ para cierto $a \in \mathbb{R}$.

Supongamos $j = 1$ por simplicidad (el resto de casos son análogos).

Para cada I_k denotamos a_k y b_k a sus extremos izquierdo y derecho.

Sea $\varepsilon > 0$, $C \subseteq C_\varepsilon := (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \times (a_2 - \varepsilon, b_2 + \varepsilon) \times \ldots \times (a_N - \varepsilon, b_N + \varepsilon)$.

Así, $0 \leq \mu_N^*(C) \leq v_N(C\varepsilon) = 2\varepsilon \cdot (b_2 - a_2 + 2\varepsilon) \cdot \ldots \cdot (b_N - a_N + 2\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$

iii) Sea A numerable (puede ser no acotado); entonces, $\mu_N^*(A) = 0$.

Por ser A numerable, es de la forma $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera pero fijo, se cumple: $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n}$.

Para cada a_n tomamos un cubo abierto I_n de volumen $\frac{\varepsilon}{2^n}$ tal que $a_n \in I_n$.

Así, $0 \leq \mu_N^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} v_N(I_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$.

1.2.6 Proposición de propiedades de μ_N^*

μ_N^* cumple las siguientes propiedades:

i) Monotonía: Sean $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^N$. Entonces, $\mu_N^*(A) \leq \mu_N^*(B)$.

ii) Subaditividad: $\{A_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \mu_N^*(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_N^*(A_i)$

<u>**Demostración:**</u>

i) Seguiremos la notación del corolario 1.2.4.
Como $A \subseteq B$ por hipótesis, todo recubrimiento por cubos abiertos de B es un recubrimiento de A también.
De este modo, $\mathcal{M}(B) \subseteq \mathcal{M}(A)$.
Por tanto, $\mu_N^*(A) = \inf \mathcal{M}(A) \leq \inf \mathcal{M}(B) = \mu_N^*(B)$.

ii) Veamos que se cumple la subaditividad.
Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera pero fijo, $\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$.
Para cada A_n y cada ε_n, aplicando el colorario 1.2.4 $\exists\, \{I_{n,i} : i \in \mathbb{N}\}$ cubos abiertos tales que $A_n \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} I_{n,i}$ y $\sum_{i=1}^{\infty} v_N(I_{n,i}) \leq \mu_N^*(A_N) + \varepsilon_n$.
Se cumple $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{i\in\mathbb{N}} I_{n,i}$ con $\{I_{n,i} : n, i \in \mathbb{N}\}$ numerable.
Por todo lo anterior,

$$\mu_N^*(A_n) \leq \sum_{n,i} \mu_N^*(I_{n,i}) \overset{(*_1)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} v_N(I_{n,i}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_N^*(A_n) + \varepsilon_n \overset{(*_2)}{=}$$
$$\overset{(*_2)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_N^*(A_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n = \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_N^*(A_n) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_N^*(A_n)$$

$(*_1)$ Se debe a la no negatividad de los términos sumados.
$(*_2)$ Al ser no negativas, las series o convergen o divergen, luego podemos descomponer en dos sumatorios distintos.

1.2.7 Volumen de un intervalo real

Sea $C = [a, b]$ con $a \leq b$ un intervalo real compacto. Entonces, se cumple:

$$\mu^*(C) = v(C) = v(\mathring{C}) = \mu^*(\mathring{C})$$

Donde $v = v_1$, $\mu^* = \mu_1^*$, y $\mathring{C} = \operatorname{int} C = (a, b)$.

<u>**Demostración:**</u> Vemos el caso $N = 1$ aunque el resto son análogos.

Por definición, $v(C) = b - a = v(\mathring{C})$. Veamos que $\mu^*(C) = \mu^*(\mathring{C})$. Por la monotonía, $\mathring{C} \subseteq C \Rightarrow$. Aplicando la subaditividad:

$$\mu^*(\mathring{C}) \leq \mu^*(C) = \mu^*(\mathring{C} \cup \{a, b\}) \leq \mu^*(\mathring{C}) + \mu^*(\{a, b\})) = \mu^*(\mathring{C}) + 0$$

Queda ver que $v(C) = \mu^*(C)$ para llegar a la conclusión deseada. Sabemos que $\mu^*(C) \leq v(C)$ por el colorario 1.2.4, luego basta ver que $\mu^*(C) \geq v(C)$.

Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera pero fijo, por (1.2.4) existen $\{I_i : i \in \mathbb{N}\}$ intervalos abiertos tales que $C \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i$ y $\mu^*(C) + \varepsilon \geq \sum_{i=1}^{\infty} v(I_i)$. Nótese que debido a esta última condición han de ser todos acotados.

Por ser C compacto, podemos fijar $n \in \mathbb{N}$ tal que $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} I_i$. Por ser acotados, cada I_k con $k \in \{1, \ldots, n\}$ va a ser de la forma (a_k, b_k). El conjunto de extremos de estos intervalos es finito, luego el siguiente conjunto también lo será:

$$\mathcal{A} := [a, b] \cap \left(\left\{ a_k, b_k : k \in \{1, \ldots, n\} \right\} \cup \{a, b\} \right)$$

Este conjunto contiene los extremos del intervalo C original, así como los extremos de los I_k que se encuentren dentro de C. Como $\mathcal{A}$ es finito, fijamos $m \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{card} \mathcal{A} = m + 1$. Podemos ordenar este conjunto; es decir, podemos renombrar sus elementos para que se cumpla:

$$\mathcal{A} = \left\{ x_i : i \in \{0, 1, \ldots, m\} \right\} \quad \text{donde } a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{m-1} < x_m = b$$

Sea $j \in \{1, \ldots, m\}$ cualquiera pero fijo, $x_j \in C \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} I_i$, luego $\exists k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x_j \in I_k$. Veamos que $(x_{j-1}, x_j) \subseteq I_k$.

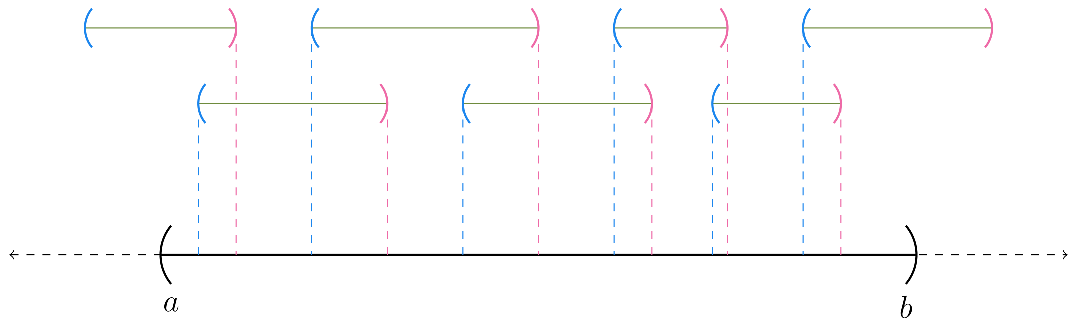
Ambos conjuntos son conexos y abiertos, luego su intersección ha de serlo también:

$$(x_{j-1}, x_j) \cap I_k = (u, v) \qquad \text{donde} \quad u = \max\{x_{j-1}, a_k\},\ v = \min\{x_j, b_k\}$$

1. Como $x_j \in I_k = (a_k, b_k)$, tenemos necesariamente $v = x_j < b_k$.

2. Si $u = a_k$, se tiene que $x_{j-1} < a_k < x_j$ siendo los tres extremos de intervalos.

En vista del segundo punto, se tiene que hay un extremo de I_k en (x_{j-1}, x_j), lo que contradice la definición de $\mathcal{A}$. Por tanto, $x_{j-1}, x_j \in I_k \Rightarrow (x_{j-1}, x_j) \subseteq I_k$. Veamos una ilustración de cómo se obtienen los elementos de $\mathcal{A}$ a partir de los I_k:



Los elementos de $\mathcal{A}$ son los extremos izquierdos y derechos de los intervalos I_k que se encuentren dentro de $C = (a, b)$. Gráficamente, podemos obtenerlos "proyectando" como en la figura anterior.

De este modo, se cumple:

$$v(C) = v([a,b]) = \sum_{i=1}^{m} x_i - x_{i-1} \leq \sum_{k=1}^{n} v(I_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} v(I_k) \leq \mu^*(C) + \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \mu^*(C)$$

Nota: Esta demostración puede extenderse análogamente para cubos compactos de dimensión N finita arbitrariamente grande. Alternativamente, un resultado de la hoja de ejercicios permite extender esta proposición habiendo demostrado únicamente el caso $N = 1$.

1.2.8 Definición de conjunto medible Lebesgue

Diremos que $E \subseteq \mathbb{R}^N$ es un conjunto medible Lebesgue si para todo cubo abierto acotado C se cumple $V_N(C) = \mu_N^*(C \cap E) + \mu_N^*(C \cap E^c)$.

Como $v_N(C) = \mu_N^*(C) \leq \mu^*(C \cap E) + \mu^*(C \cap E^c)$ por la subaditividad, bastaría comprobar que $v_N(C) \geq \mu^*(C \cap E) + \mu^*(C \cap E^c)$.

A la colección de todos los conjuntos medibles de $\mathbb{R}^N$ la denotamos $\mathfrak{M}_N$.

1.2.9 Definición de semiespacio de $\mathbb{R}^N$

Diremos que $S = I_1 \times \ldots \times I_N \subseteq \mathbb{R}^N$ es un semiespacio si $\exists j \in \{1, \ldots, N\}$ tal que $k \neq j \Rightarrow I_k = \mathbb{R}$ y además I_j es de la forma $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, $[a, +\infty)$, o $(a, +\infty)$, para cierto $a \in \mathbb{R}$.

1.2.10 Conjuntos que pertenecen a $\mathfrak{M}_N$

i) $\mu_N^*(E) = 0 \Rightarrow E \in \mathfrak{M}_N$. En particular, $\varnothing \in \mathfrak{M}_N$.

ii) $E \in \mathfrak{M}_N \Rightarrow E^c \in \mathfrak{M}_N$

iii) Todo semiespacio abierto en $\mathbb{R}^N$ es medible Lebesgue.

Demostración:

i) Sea $E \subseteq \mathbb{R}^N$ con $\mu_N^*(E) = 0$, sea C un cubo abierto acotado de $\mathbb{R}^N$. Se tiene que $C \cap E \subseteq E$ luego este conjunto es también de medida exterior nula. Así, vemos que se cumple la definición aplicando la subaditividad:

$$\mu_N^*(C \cap E) + \mu_N^*(C \cap E^c) = \mu_N^*(C \cap E^C) \leq \mu_N^*(C) = v_N(C)$$

ii) Sea $E \in \mathfrak{M}_N$, sea C cubo abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$, se cumple:

$$v_N(C) \overset{E \in \mathfrak{M}_N}{=} \mu_N^*(C \cap E) + \mu_N^*\big(C \cap E^c\big) = \mu_N^*(C \cap E^c) + \mu_N^*(C \cap (E^c)^c)$$

Tenemos que $E^c \in \mathfrak{M}_N$ por definición.

iii) Sea $H = (a, +\infty) \times \mathbb{R} \times \overset{N-1}{\ldots} \times \mathbb{R}$ un semiespacio abierto de $\mathbb{R}^N$ (el resto de casos son análogos). Sea $C = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_N, b_N)$ un cubo abierto acotado cualquiera. Se tiene:

$$C \cap H = I_1 \times (a_2, b_2) \times (a_N, b_N) \qquad C \cap H^c = I_1 \times (a_2, b_2) \times (a_N, b_N)$$

$$\text{donde } I_1 = \begin{cases} (a_1, b_1) & \text{si } a \leq a_1 \\ (a, b_1) & \text{si } a_1 < a < b_1 \\ \varnothing & \text{si } a \geq b_1 \end{cases} \qquad \text{donde } J_1 = \begin{cases} \varnothing & \text{si } a \leq a_1 \\ (a_1, a] & \text{si } a_1 < a < b_1 \\ (a_1, b_1) & \text{si } a \geq b_1 \end{cases}$$

De los tres posibles casos, solo $a_1 < a < b_1$ es no trivial. En tal caso, $\mu_N^*(C \cap H) = v_N(C \cap H)$, $\mu_N^*(C \cap H^c) = v_N(C \cap H^c)$. Por tanto:

$$\begin{aligned} \mu_N^*(C \cap H) + \mu_N^*(C \cap H^c) &= (b_2 - a_2) \cdot \ldots \cdot (b_N - a_N) \cdot (b_1 - a + a - a_1) = \\ &= (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \ldots \cdot (b_N - a_N) = v_N(C) \end{aligned}$$

Tenemos que $H \in \mathfrak{M}_N$ por definición.

1.2.11 Caracterización de $\mathfrak{M}_N$ por conjuntos cualesquiera

Dado $E \subseteq \mathbb{R}^N$, los siguientes enunciados son equivalentes:

i) $E \in \mathfrak{M}_N$

ii) $\forall A \subseteq \mathbb{R}^N$ se cumple $\mu_N^*(A) = \mu_N^*(A \cap E) + \mu_N^*(A \cap E^c)$

iii) $\forall A \subseteq \mathbb{R}^N$ se cumple $\mu_N^*(A) \geq \mu_N^*(A \cap E) + \mu_N^*(A \cap E^c)$

Demostración: Se tiene que (ii) y (iii) son equivalentes por la subaditividad.

$i \Rightarrow ii$ Si $\mu_N^*(A) = +\infty$ se cumple trivialmente. Veamos el caso finito.

Si $\mu_N^*(A) < +\infty$, dado $\varepsilon > 0$, existen $\{I_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ cubos abiertos tales que $A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i$ y $\sum_{i=1}^{\infty} v_N(I_i) < \mu_N^*(A) + \varepsilon$. Esta segunda condición garantiza que los I_i son todos acotados. Además, como $E \in \mathfrak{M}_N$, podemos reescribir la expresión como:

$$\mu_N^*(A) + \varepsilon \geq \sum_{i=1}^{\infty} v_N(I_i) \overset{E\in\mathfrak{M}_N}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_N^*(I_i \cap E) + \mu_N^*(I_i \cap E^c) \geq$$
$$\geq \mu_N^*\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}(I_i \cap E)\right) + \mu_N^*\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}(I_i \cap E^c)\right) = \mu_N^*\left((\bigcup_{i\in\mathbb{N}} I_i) \cap E\right) + \mu_N^*\left((\bigcup_{i\in\mathbb{N}} I_i) \cap E^c\right) \geq$$
$$\geq \mu_N^*(A \cap E) + \mu_N^*(A \cap E^c)$$

Hemos utilizado la subaditividad y la monotonía para deducir las desigualdades. Para ver el resultado basta tomar límite cuando $\varepsilon \to 0$.

$ii \Rightarrow i$ Se cumple trivialmente.

1.2.12 Propiedades de $\mathfrak{M}_N$

Sean $E, F \in \mathfrak{M}_N$, entonces se cumple:

$$i) E \cup F \in \mathfrak{M}_N \qquad ii) E \cap F \in \mathfrak{M}_N \qquad iii) E \setminus F \in \mathfrak{M}_N$$

Demostración:

i) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^N$ cualquiera, aplicaremos la caracterización anterior. Como $E \in \mathfrak{M}_N$ por hipótesis, $\mu_N^*(A) = \mu_N^*(A \cap E) + \mu_N^*(A \cap E^c)$. Como $F \in \mathfrak{M}_N$ también, aplicamos la caracterización en $A \cap E^c$ como sigue:

$$\begin{aligned}
\mu_N^*(A) &= \mu_N^*(A \cap E) + \mu_N^*\big(A \cap (E^c \cap F)\big) + \mu_N^*\big(A \cap (E^c \cap F^c)\big) = \\
&= \mu_N^*(A \cap E) + \mu_N^*\big(A \cap (F \setminus E)\big) + \mu_N^*\big(A \cap (E \cup F)^c\big) \geq \\
&\geq \mu_N^*\big(A \cap (E \cup F \setminus E)\big) + \mu_N^*\big(A \cap (E \cup F)^c\big) = \\
&= \mu_N^*\big(A \cap (E \cup F)\big) + \mu_N^*\big(A \cap (E \cup F)^c\big)
\end{aligned}$$

Las desigualdades se deducen de la subaditividad y la monotonía de la medida exterior.

ii) Como sabemos que $\mathfrak{M}_N$ es cerrado respecto del complementario, se tiene

$E \cap F \in \mathfrak{M}_N \iff (E \cap F)^c = E^c \cup F^c \in \mathfrak{M}_N$. Aplicando este mismo resultado, se tiene:

$$E \in \mathfrak{M}_N \Rightarrow E^c \in \mathfrak{M}_N \qquad\qquad F \in \mathfrak{M}_N \Rightarrow F^c \in \mathfrak{M}_N$$

Finalmente, aplicando el apartado anterior llegamos al resultado.

iii) De manera similar, tenemos $E \setminus F = E \cap F^c$. Así, $F \in \mathfrak{M}_N \Rightarrow F^c \in \mathfrak{M}_N$. Aplicando el apartado inmediatamente anterior llegamos al resultado.

1.2.13 Aditividad finita de conjuntos en $\mathfrak{M}_N$ disjuntos

Sean $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{M}_N$ tales que $i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \varnothing$. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^N$ cualquiera. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple $\mu_N^*\big(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} E_i)\big) = \sum_{i=1}^{n} \mu_N^*(A \cap E_i)$.

<u>**Demostración:**</u> Lo demostraremos por inducción. Para $n = 1$ es trivial.

Supongamos que se cumple para n y probemos que se cumple para $n+1$. Como $E_{n+1} \in \mathfrak{M}_N$ por hipótesis, se tiene que:

$$\mu_N^*\big(A \cap \bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\big) = \mu_N^*\big(A \cap \bigcup_{i=1}^{n+1} E_i \cap E_{n+1}\big) + \mu_N^*\big(A \cap \bigcup_{i=1}^{n+1} E_i \cap E_{n+1}^c\big)$$

Sabemos además que $i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \varnothing$ por hipótesis, luego se tiene que:

$$\mu_N^*\big(A \cap \bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\big) = \mu_N^*(A \cap E_{n+1}) + \mu_N^*\Big(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big) =$$
$$= \mu_N^*(A \cap E_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} \mu_N^*(A \cap E_i) = \sum_{i=1}^{n+1} \mu_N^*(A \cap E_i)$$

La segunda igualdad se deduce de aplicar la hipótesis de inducción.

1.2.14 Teorema del espacio de medida de Lebesgue

Para $\mu_N := \mu^*_{N|\mathfrak{M}_N}$ se tiene que $(\mathbb{R}^N, \mathfrak{M}_N, \mu_N)$ es un espacio de medida completo. Además, $\tau_{\mathbb{R}^N} \subseteq \mathfrak{M}_N$ y $\mu_N(C) = v_N(C)$ para todo cubo abierto C.

Demostración:

En primer lugar, veamos que $\mathfrak{M}_N$ es una σ-álgebra. Sabemos que cumple $(S.1)$ y $(S.3)$ gracias al resultado 1.2.10, luego queda comprobar que cumple $(S.2)$. Sean $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{M}_N$, buscamos $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i \in \mathfrak{M}_N$.

Disjuntificamos: $F_1 := E_1$, $F_{n+1} := E_{n+1} \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$.

De este modo, se tiene que $\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i = \bigcup\limits_{i=1} F_i \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$, luego $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} F_i$.

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^N$ cualquiera, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i \in \mathfrak{M}_N \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\mu^*_N(A) &= \mu^*_N(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i) + \mu^*_N\big(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} E_i)^c\big) \geq \\
&\geq \mu^*_N(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} F_i) + \mu^*_N\big(A \cap (\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i)^c\big) \overset{1.2.13}{=} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mu^*_N(A \cap F_i) + \mu^*_N\big(A \cap (\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i)^c\big) \xrightarrow{n\to\infty} \\
&\xrightarrow{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*_N(A \cap F_i) + \mu^*_N\big(A \cap (\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i)^c\big) \geq \\
&\geq \mu^*_N\big(A \cap \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i\big) + \mu^*_N\big(A \cap (\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i)^c\big) = \mu^*_N\big(A \cap \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\big) + \mu^*_N\big(A \cap (\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i)^c\big)
\end{aligned}$$

Llegamos a la conclusión deseada.

Hemos visto que $\mathfrak{M}_N$ es una σ-álgebra de $\mathbb{R}^N$. Veamos que μ_N es una medida. Sabemos que se cumple $(M.1)$ por el resultado 1.2.10, luego falta probar que cumple $(M.2)$. Sean $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{M}_N$ tales que $i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \varnothing$, buscamos $\mu_N(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu_N(E_i)$.

Aplicando el resultado anterior, sea $n \in \mathbb{N}$, se cumple:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_N(E_i) \overset{1.2.13}{=} \mu_N(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) \overset{\text{Monotonía}}{\leq} \mu_N(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i) \overset{\text{Subaditividad}}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_N(E_i)$$

Tomando límite cuando $n \to \infty$ podemos deducir que μ_N es, en efecto, una medida. Veamos que $(\mathbb{R}^N, \mathfrak{M}_N, \mu_N)$ es un espacio de medida completo. Sea $E \in \mathfrak{M}_N$ tal que $\mu_N(E) = 0$, sea $F \subseteq E$. Buscamos $F \in \mathfrak{M}_N$.

Por monotonía, $F \subseteq E \Rightarrow 0 \leq \mu_N^*(F) \leq \mu_N^*(E) = 0$.

Al ser un conjunto de medida exterior nula, sabemos que $F \in \mathfrak{M}_N$.

Hemos comprobado que es un espacio métrico completo. Veamos que pertenecen a él todos los conjuntos abiertos; es decir, $\tau_{\mathbb{R}^N} \subseteq \mathfrak{M}_N$.

Todo cubo abierto C es intersección finita de semiespacios abiertos de $\mathbb{R}^N$.

Como estos son medibles Lebesgue, $C \in \mathfrak{M}_N$.

Definimos $\mathcal{A} := \big\{(p_1, q_1) \times \ldots \times (p_N, q_N) : p_i, q_i \in \mathbb{Q}\ \forall i \in \{1, \ldots, N\}\big\}$.

Se tiene que $\mathcal{A}$ es una base numerable de $\tau_{\mathbb{R}^N}$.

Por tanto, todo abierto $O \in \tau_{\mathbb{R}^N}$ es unión numerable de elementos de $\mathcal{A}$.

Además $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{M}_N$ al estar formada por cubos abiertos.

Aplicando las propiedades de σ-álgebra, $\tau_{\mathbb{R}^N} \subseteq \mathfrak{M}_N$.

Queda únicamente por comprobar que la medida de todo cubo abierto C coincide con su volumen. Se cumple trivialmente, pues $\mu_N(C) = \mu_N^*(C) = v_N(C)$ por definición y por el resultado 1.2.7.

1.2.15 σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^N$

Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de todas las σ-álgebras de $\mathbb{R}^N$ que contienen a todos los abiertos de la topología usual; es decir,

$$\mathcal{S} := \{\Sigma : \tau_{\mathbb{R}^N} \subseteq \Sigma \text{ con } \Sigma\ \ \sigma\text{-álgebra de } \mathbb{R}^N\}$$

Definimos la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^N$ como $\mathfrak{B}_N := \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{S}} \Sigma$. Veamos que $\mathfrak{B}_N$ es la menor σ-álgebra de $\mathbb{R}^N$ que contiene a $\tau_{\mathbb{R}^N}$.

<u>Demostración:</u> Veamos en primer lugar que $\mathfrak{B}_N$ es una σ-álgebra de $\mathbb{R}^N$.

$(S.1)$ Buscamos ver que $\varnothing \in \mathfrak{B}_N$.

Para cada Σ in $\mathcal{S}$, tenemos que $\varnothing \in \Sigma$ aplicando $(S.1)$ en Σ.

Por tanto, $\varnothing \in \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{S}} \Sigma = \mathfrak{B}_N$.

$(S.2)$ Sean $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{B}_N$, buscamos $\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} E_i \in \mathfrak{B}_N$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, $E_i \in \mathfrak{B}_N = \underset{\Sigma\in\mathcal{S}}{\cap} \Sigma \Rightarrow E_i \in \Sigma \ \forall\, \Sigma \in \mathcal{S}$.

Sea $\Sigma \in \mathcal{S}$ cualquiera, aplicando $(S.2)$, $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \Sigma \Rightarrow \underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} E_i \in \Sigma$.

Por tanto, $\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} E_i \in \Sigma \ \forall\, \Sigma \in \mathcal{S} \Rightarrow \underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} E_i \in \mathfrak{B}_N$.

$(S.3)$ Sea $E \in \mathfrak{B}_N$, buscamos $E^c \in \mathfrak{B}_N$.

Para cualquier $\Sigma \in \mathcal{S}$ se tiene $E \in \Sigma \Rightarrow E^c \in \Sigma$ por $(S.3)$.

Así, $E^c \in \Sigma \ \forall\, \Sigma \in \mathcal{S} \Rightarrow E^c \in \mathfrak{B}_N$.

Hemos comprobado que $\mathfrak{B}_N$ es, en efecto, una σ-álgebra de $\mathbb{R}^N$. Queda comprobar que es la menor que contiene a $\tau_{\mathbb{R}^N}$. Sea $\mathcal{D}$ una σ-álgebra de $\mathbb{R}^N$ tal que $\tau_{\mathbb{R}^N} \subseteq \mathcal{D}$, veamos que $\mathfrak{B}_N \subseteq \mathcal{D}$. Para ello, basta notar que $\mathcal{D} \in \mathcal{S}$ por definición, luego $\mathfrak{B}_N \subseteq \mathcal{D}$ por definición.

1.2.16 Teorema de caracterización topológica de $\mathfrak{M}_N$

Sea $E \subseteq \mathbb{R}^N$, los siguientes enunciados son equivalentes:

i) $E \in \mathfrak{M}_N$

ii) $\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, O \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto tal que $E \subseteq O$ y $\mu_N^*(O \setminus E) < \varepsilon$.

iii) $\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, C \subseteq \mathbb{R}^N$ cerrado tal que $C \subseteq E$ y $\mu_N^*(E \setminus C) < \varepsilon$.

iv) $\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, O \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto $\exists\, C \subseteq \mathbb{R}^N$ cerrado, tales que $C \subseteq E \subseteq O$ y además $\mu_N(O \setminus C) < \varepsilon$.

<u>**Demostración:**</u>

$\boxed{i \Rightarrow ii}$ Sea $E \in \mathfrak{M}_N$, $\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, \{I_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ colección de cubos abiertos tales que

$E \subseteq \underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} I_i$ y $\sum_{i=1}^{\infty} v_N(I_i) \leq \mu_N(E) + \varepsilon$.

Definimos $O := \underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} I_i$. Se tiene $E \subseteq O$ con $O \in \tau_{\mathbb{R}^N}$. Según el valor de $\mu_N(E)$ podemos distinguir dos casos.

- Si $\mu_N(E) < +\infty$, se cumple:

$$\mu_N(O \setminus E) = \mu_N(O) - \mu_N(E) \leq \mu_N(E) + \varepsilon - \mu_N(E) = \varepsilon$$

• Si $\mu_N(E) = +\infty$, consideramos los cubos $C_n := [-n, n]^N$ con $n \in \mathbb{N}$.
Definimos $D_1 := C_1$, $D_{n+1} = C_{n+1} \setminus C_n$, luego $\{D_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{M}_N$.
Además, se tiene $i \neq j \Rightarrow D_i \cap D_j = \varnothing$, y $\mu_N(D_i) < +\infty \ \forall i \in \mathbb{N}$.
Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $E_n := E \cap D_n \in \mathfrak{M}_N$. Por tanto, verifican:

$$E = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i \qquad i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \varnothing \qquad \mu_N(E_i) < +\infty \ \forall \ \in \mathbb{N}$$

Fijado $\varepsilon > 0$ cualquiera, aplicando el caso anterior, tenemos que para cada E_n existe un abierto O_n tal que $E_n \subseteq O_n$ y $\mu_N(O_n \setminus E_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Sea $O := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} O_i$, se cumple $E \subseteq O$ y además:

$$\mu_N(O \setminus E) = \mu_N\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} O_i \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\Big) \leq \sum_{i=i}^{\infty} \mu_N(O_i \setminus E_i) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

$i \Rightarrow iii$ | Sea $E \in \mathfrak{M}_N$, sea $\varepsilon > 0$, sabemos que $E^c \in \mathfrak{M}_N$ y que $(i \Rightarrow ii)$, luego

existe $O \in \tau_{\mathbb{R}^N}$ tal que $E^c \subseteq O$ y además $\mu_N(O \setminus E^c) < \varepsilon$.
Sea $C := O^c$ cerrado, se tiene $E^c \subseteq O \Rightarrow O^c = C \subseteq (E^c)^c = E$.
Finalmente, $\varepsilon > \mu_N(O \setminus E^c) = \mu_N\big(O \cap (E^c)^c\big) = \mu_N(E \cap C^c) = \mu_N(E \setminus C)$.

$i \Rightarrow iv$ | Sea $E \in \mathfrak{M}_N$, sea $\varepsilon > 0$. Aplicando $(i \Rightarrow ii)$ y $(i \Rightarrow iii)$, se tiene:

$\exists\, O$ abierto, $\exists\, C$ cerrado tales que $C \subseteq E \subseteq O$ y $\mu_N(O \setminus E) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\mu(E \setminus C) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Así, $\mu_N(O \setminus C) \leq \mu_N\Big((O \setminus E) \cup (E \setminus C)\Big) \leq \mu_N(O \setminus E) + \mu_N(E \setminus C) < \varepsilon$.

$iv \Rightarrow {}^{ii}_{iii}$ | Por hipótesis, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, O \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto, $\exists\, C \subseteq \mathbb{R}^N$ cerrado

con $C \subseteq E \subseteq O$ tales que $\mu_N(O \setminus C) < \varepsilon$.

Entonces, $E \subseteq O \Rightarrow (E \setminus C) \subseteq (O \subseteq C) \Rightarrow \mu_N(E \setminus C) \leq \mu_N(O \setminus C) < \varepsilon$.
Del mismo modo, $C \subseteq E \Rightarrow (O \setminus E) \subseteq (O \setminus C) \Rightarrow \mu_N(O \setminus E) \leq \mu_N(O \setminus C) < \varepsilon$.

$\boxed{ii \Rightarrow i}$ Por hipótesis, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ existe O_n abierto con $E \subseteq O_n$ y $\mu_N^*(O_n \setminus E) < \frac{1}{n}$.

Consideramos los abiertos $G_n := \bigcap\limits_{i=1}^{n} O_i$, luego $G_{n+1} \subseteq G_n$ y $E \subseteq G_n\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Además, $\mu_N^*(G_n \setminus E) \leq \mu_N^*(O_n \setminus E) < \frac{1}{n}$.
Sea $G := \bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} G_i$, se tiene que $G \in \mathfrak{M}_N$ y $E \subseteq G$. Veamos que $G \setminus E \in \mathfrak{M}_N$.
$\mu_N^*(G \setminus E) \leq \mu_N^*(G_n \setminus E) < \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Así, $G \setminus E \in \mathfrak{M}_N$ al tener medida nula.
De este modo, $E = G \setminus (G \setminus E) \in \mathfrak{M}_N$ por ser diferencia de conjuntos de $\mathfrak{M}_N$.

$\boxed{iii \Rightarrow i}$ Por hipótesis, $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, C_n$ cerrado con $C_n \subseteq E$ tal que $\mu_N^*(E \setminus C) < \frac{1}{n}$.

Definimos $D_n := \bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i$, luego $D_n \subseteq D_{n+1} \subseteq E$ y $\mu_N(E \setminus D_n) < \frac{1}{n}\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Consideramos $D := \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} D_i$ luego $D \subseteq E$ y $D \in \mathfrak{M}_N$ al estar $C_n \in \mathfrak{M}_N\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.
Se cumple $\mu_N^*(E \setminus D) \leq \mu_N^*(E \setminus D_n) < \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, luego $E \setminus D \in \mathfrak{M}_N$.
Finalmente, $E = D \cup (E \setminus D) \in \mathfrak{M}_N$ al ser unión de conjuntos de $\mathfrak{M}_N$.

1.2.17 Observación sobre cómo expresar conjuntos de $\mathfrak{M}_N$

En vista de la demostración anterior, sabemos que es posible expresar todo $E \in \mathfrak{M}_N$ de las siguientes formas:

$$E = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \right) \setminus N \qquad\qquad E = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \right) \cup M$$

Donde $N := G \setminus E$ y $M := E \setminus D$ según la notación de la demostración anterior (ambos con medida exterior nula).

Nótese que $(G_n)_n$ es una sucesión de abiertos decreciente y que su intersección numerable es un boreliano. Análogamente, $(D_n)_n$ es una sucesión creciente de cerrados cuya unión numerable es un conjunto boreliano.

1.2.18 Relación por compleción entre $\mathfrak{B}_N$ y $\mathfrak{M}_N$

Considerando la misma medida (la medida de Lebesgue), se tiene que el espacio de medida de Lebesgue es la compleción del espacio de medida boreliano; es decir,

$$\left(\mathbb{R}^N, \mathfrak{M}_N, \mu_N\right) = \left(\mathbb{R}^N, \widetilde{\mathfrak{B}_N}, \widetilde{\mu_{N|\mathfrak{B}_N}}\right)$$

Demostración: Basta comprobar que $\mathfrak{M}_N = \widetilde{\mathfrak{B}_N}$ por doble contenido.

Recordando la notación del resultado 1.1.9 para este caso, consideramos:

$$\mathcal{N} := \left\{M \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) : \exists\, B \in \mathfrak{B}_N \text{ tal que } M \subseteq B \text{ y } \mu_{N|\mathfrak{B}_N}(B) = 0\right\}$$

$\supseteq$ Sea $E \in \widetilde{\mathfrak{B}_N}$ cualquiera, podemos expresarlo como $E = A \cup M$ para ciertos $A \in \mathfrak{B}_N$, $M \in \mathcal{N}$ (se comprobó en el resultado 1.1.9).

Al tener medida nula, $M \in \mathfrak{M}_N$. Además, $A \in \mathfrak{B}_N \subseteq \mathfrak{M}_N$ por la definición de $\mathfrak{B}_N$ pues $\tau_{\mathbb{R}^N} \subseteq \mathfrak{M}_N$. De este modo, $E = A \cup M \in \mathfrak{M}_N$.

$\subseteq$ Sea $E \in \mathfrak{M}_N$, por la observación anterior, podemos expresarlo como $E = D \cup M$, para ciertos $D \in \mathfrak{B}_N$ y $\mu_N(M) = 0$.

Como $\mu_N(M) = 0$, existe una secuencia de abiertos $\{O_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tales que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ se cumple $M \subseteq O_{n+1} \subseteq O_n$ y $\mu_N(O_n) = \frac{1}{n}$. Al ser abiertos, $O_n \in \mathfrak{B}_N\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Por tanto, el siguiente conjunto a definir es boreliano también: $G := \bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} O_i \in \mathfrak{M}_N$ y cumple $M \subseteq G$. Dado $n \in \mathbb{N}$ cualquiera, se tiene:

$$G \subseteq O_n \Rightarrow \mu_N(G) \leq \mu_N(O_n) = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

De este modo, $M \subseteq G$ con $G \in \mathfrak{B}_N$ tal que $\mu_N(G) = 0$ luego $M \in \mathcal{N}$ por definición. Al estar trabajando con la compleción, $\mathcal{N} \subseteq \widetilde{\mathfrak{B}_N}$. Por todo lo anterior,

$$E = \underbrace{D}_{\in\mathfrak{B}_N} \cup \underbrace{M}_{\in\widetilde{\mathfrak{B}_N}} \in \widetilde{\mathfrak{B}_N}$$

§3. Funciones medibles

1.3.1 Definición de función medible

Dado un espacio de medida (X, Σ, μ) y una función $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Diremos que f es medible si cumple cualquiera de las siguientes afirmaciones (son equivalentes):

i) $\forall\, \alpha \in \mathbb{R} : \{x \in X : f(x) < \alpha\} \in \Sigma$

ii) $\forall\, \alpha \in \mathbb{R} : \{x \in X : f(x) \leq \alpha\} \in \Sigma$

iii) $\forall\, \alpha \in \mathbb{R} : \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \Sigma$

iv) $\forall\, \alpha \in \mathbb{R} : \{x \in X : f(x) \geq \alpha\} \in \Sigma$

i') $\forall\, \beta \in \overline{\mathbb{R}} : \{x \in X : f(x) < \beta\} \in \Sigma$

ii') $\forall\, \beta \in \overline{\mathbb{R}} : \{x \in X : f(x) \leq \beta\} \in \Sigma$

iii') $\forall\, \beta \in \overline{\mathbb{R}} : \{x \in X : f(x) > \beta\} \in \Sigma$

iv') $\forall\, \beta \in \overline{\mathbb{R}} : \{x \in X : f(x) \geq \beta\} \in \Sigma$

Demostración: Sean $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$ fijos.

$i \Rightarrow ii$ $\quad \{x \in X : f(x) \leq \alpha\} = \displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{x \in X : f(x) < \alpha + \frac{1}{n}\right\} \in \Sigma$

$ii \Rightarrow iii$ $\quad \{x \in X : f(x) > \alpha\} = \Big(\{x \in X : f(X) \leq \alpha\}\Big)^c \in \Sigma$

$iii \Rightarrow iv$ $\quad \{x \in X : f(x) \geq \alpha\} = \displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{x \in X : f(x) > \alpha - \frac{1}{n}\right\} \in \Sigma$

$iv \Rightarrow i$ $\quad \{x \in X : f(x) < \alpha\} = \Big(\{x \in X : f(X) \geq \alpha\}\Big)^c \in \Sigma$

Como $R \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, basta considerar $\beta \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R} = \{+\infty, -\infty\}$ para los siguientes casos.

$i \Rightarrow i'$ $\quad \{x \in X : f(x) < +\infty\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f(x) < n\} \in \Sigma$

$\{x \in X : f(x) < -\infty\} = \varnothing \in \Sigma$

$i' \Rightarrow ii'$ $\quad \{x \in X : f(x) \leq \infty\} = X \in \Sigma$

$\{x \in X : f(x) \leq -\infty\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f(x) < -n\}$

$ii' \Rightarrow iii'$ $\quad \{x \in X : f(x) > \beta\} = \Big(\{x \in X : f(x) \leq \beta\}\Big)^c \in \Sigma$

$iii' \Rightarrow iv'$ $\quad \{x \in X : f(x) \geq \infty\} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f(x) > n\} \in \Sigma$

$$\{x \in X : f(x) \geq -\infty\} = X \in \Sigma$$

$iv' \Rightarrow i'$ $\quad \{x \in X : f(x) < \beta\} = \Big(\{x \in X : f(x) \geq \beta\}\Big)^c \in \Sigma$

1.3.2 Ejemplos de funciones medibles

i) Toda función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible en $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$.

ii) Toda función continua $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible en $(\mathbb{R}^N, \mathfrak{M}_N, \mu_N)$ y en $(\mathbb{R}^N, \mathfrak{B}_N, \mu_{N|\mathfrak{B}_N})$.

iii) Si $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es medible en (X, Σ, μ); entonces, $f_{|A}$ es medible en $(A, \Sigma(A), \mu_{|\Sigma(A)})$ para $A \in \Sigma$ cualquiera.

<u>**Demostración:**</u>

$i)$ Se cumple trivialmente por ser la σ-álgebra $\mathcal{P}(X)$.

$ii)$ Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ cualquiera, por continuidad de f sabemos que

$$f^{-1}\Big((-\infty, \alpha)\Big) = \{x \in \mathbb{R}^N : f(x) < \alpha\} \in \tau_{\mathbb{R}^N} \subseteq \mathfrak{B}_N \subseteq \mathfrak{M}_N$$

Tenemos que f es medible en ambos espacios de medida por definición.

iii) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ cualquiera, sabemos que $\{x \in X : f(x) < \alpha\} \in \Sigma$ al ser f medible en (X, Σ, μ). Sea $A \in \Sigma$ cualquiera, se tiene:

$$f_{|A}^{-1}\Big((-\infty, \alpha)\Big) = \{a \in A : f_{|A}(a) < \alpha\} = \underbrace{\{x \in X : f(x) < \alpha\}}_{\in \Sigma} \cap A \in \Sigma(A)$$

El conjunto está en la σ-álgebra inducida por definición.

1.3.3 Medibilidad por imagen inversa de abiertos

Dado un espacio de medida (X, Σ, μ). Dada una función $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) f es medible

ii) Para todo $O \in \tau_{\overline{\mathbb{R}}}$ se cumple $f^{-1}(O) \in \Sigma$

<u>**Demostración:**</u>

$ii \Rightarrow i$ Trivial, basta tomar $O = [-\infty, \alpha)$ abierto de $\overline{\mathbb{R}}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

$i \Rightarrow ii$ Sea O un abierto cualquiera de $\overline{\mathbb{R}}$, sabemos que es unión de sus

componentes conexas, habiendo un número a lo sumo numerable (pues hay una base numerable y son abiertas) de ellas. Así, tenemos $O = \bigcup\limits_{i \in I} J_i$ con $I \subseteq \mathbb{N}$. Además, $i \neq j \Rightarrow J_i \cap J_j = \varnothing$ por ser disjuntas las componentes conexas. En $\overline{R}$, los conjuntos conexos son precisamente los intervalos, luego $\forall\, i \in I$ J_i ha de ser de una de las siguientes formas:

$$J_i = \overline{\mathbb{R}} \qquad J_i = [-\infty, \beta_i) \qquad J_i = (\alpha_i, \infty] \qquad J_i = (\alpha_i, \beta_i) = [-\infty, \beta_i) \cap (\alpha_i, \infty]$$

Donde $-\infty \leq \alpha_i < \beta_i \leq \infty$. En cualquier caso, se tiene $f^{-1}(J_i) \in \Sigma$ por ser f medible por definición de medible.

Por tanto, $f^{-1}(O) = f^{-1}\Big(\bigcup\limits_{i \in I} J_i\Big) = \bigcup\limits_{i \in I} \underbrace{f^{-1}(J_i)}_{\in \Sigma} \in \Sigma$.

1.3.4 Medibilidad de máximo, mínimo, supremo e ínfimo

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sea $\{f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles en él. Entonces, se cumple:

i) $\max\{f_1, \ldots, f_n\}$ es medible $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

ii) $\min\{f_1, \ldots, f_n\}$ es medible $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

iii) $\sup\{f_i : i \in \mathbb{N}\}$ es medible.

iv) $\inf\{f_i : i \in \mathbb{N}\}$ es medible.

v) $\underline{\lim}_n\{f_n : n \in \mathbb{N}\} := \liminf_n\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es medible.

vi) $\overline{\lim}_n\{f_n : n \in \mathbb{N}\} := \limsup_n\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es medible.

vii) Si $\exists \lim_n f_n(x)\ \forall\, x \in X$; entonces, $\lim_n f_n$ es medible.

<u>**Demostración:**</u> Fijamos $\alpha \in \mathbb{R}$ cualquiera.

i) Sea $n \in \mathbb{N}$ cualquiera, podemos expresar la preimagen como:

$$\Big\{x \in X : \max\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\} < \alpha\Big\} = \bigcap_{i=1}^{n} \underbrace{\{x \in X : f_i(x) < \alpha\}}_{\in\Sigma} \in \Sigma$$

ii) Del mismo modo, sea $n \in \mathbb{N}$ cualquiera,

$$\Big\{x \in X : \min\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\} > \alpha\Big\} = \bigcap_{i=1}^{n} \underbrace{\{x \in X : f_i(x) > \alpha\}}_{\in\Sigma} \in \Sigma$$

iii) Utilizando desigualdades no estrictas (importante), te tiene:

$$\Big\{x \in X : \sup\{f_i(x) : i \in \mathbb{N}\} \le \alpha\Big\} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \underbrace{\{x \in X : f_i(x) \le \alpha\}}_{\in\Sigma} \in \Sigma$$

iv) Análogamente,

$$\Big\{x \in X : \inf\{f_i(x) : i \in \mathbb{N}\} \ge \alpha\Big\} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \underbrace{\{x \in X : f_i(x) \ge \alpha\}}_{\in\Sigma} \in \Sigma$$

v) Por definición, $\underline{\lim}_n f_n(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} f_k(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n(x)$ para $g_n(x) = \inf_{k\geq n} f_k(x)$, que es medible por el apartado anterior. Aplicando el apartado (iv) respecto de las g_n llegamos al resultado.

vi) Análogamente, $\overline{\lim}_n f_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} f_k(x)$.

vii) Si existe, el límite coincide con los límites superior e inferior, que son funciones medibles.

1.3.5 Suma, producto por escalares y cuadrado de funciones medibles

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida, sean $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ funciones medibles en él. Se cumplen los siguientes enunciados:

i) $f + g$ es medible (si está bien definida para todo $x \in X$).

ii) $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda\, f$ es medible (si está bien definida).

iii) f^2 es medible (siempre está bien definida).

<u>**Demostración:**</u> Fijamos $\alpha \in \mathbb{R}$ cualquiera.

i) Se cumple (importante utilizar desigualdad estricta):

$$
\begin{aligned}
\{x \in X : (f+g)(x) < \alpha\} &= \{x \in X : f(x) < \alpha - g(x)\} = && \mathbb{Q} \text{ es denso en } \mathbb{R}\\
&= \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \{x \in X : f(x) < q < \alpha - g(x)\} = \\
&= \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \Big(\{x \in X : f(x) < q\} \cap \{x \in X : q < \alpha - g(x)\}\Big) \in \Sigma && \mathbb{Q} \text{ numerable}
\end{aligned}
$$

ii) Si $\lambda = 0$, $\lambda\, f \equiv 0$ es medible trivialmente.

- Si $\lambda > 0$, $\{x \in X : \lambda\, f(x) < \alpha\} = \{x \in X : f(x) < \frac{\alpha}{\lambda}\} \in \Sigma$.
- Si $\lambda > 0$, $\{x \in X : \lambda\, f(x) < \alpha\} = \{x \in X : f(x) > \frac{\alpha}{\lambda}\} \in \Sigma$.

$iii)$ Distinguimos dos casos:

•Si $\alpha \leq 0$, $\{x \in X : f^2(x) < \alpha\} = \varnothing \in \Sigma$.

• Si $\alpha > 0$, entonces se cumple:

$$\{x \in X : f^2(X) < \alpha\} = \underbrace{\{x \in X : f(x) < \sqrt{\alpha}\}}_{\in\Sigma} \cap \underbrace{\{x \in X : f(x) > -\sqrt{\alpha}\}}_{\in\Sigma} \in \Sigma$$

1.3.6 Medibilidad del límite cuando no existe

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida, sea $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles en él. Definimos $A := \{x \in X : \nexists \lim_n f_n(x)\}$. Se tiene que A es medible.

<u>**Demostración:**</u>

Por el resultado 1.3.4, sabemos que $\underline{\lim}_n f_n$ y que $\overline{\lim}_n f_n$ son funciones medibles. Así, aplicando el resultado anterior, tenemos que $g := \underline{\lim}_n f_n - \overline{\lim}_m f_m$ es también medible.

Para ver $A \in \Sigma$ basta ver $A^c \in \Sigma$. El límite existe si y solo si los límites superior e inferior coinciden. Por tanto, se cumple:

$$A^c = g^{-1}(\{0\}) = \underbrace{\{x \in X : g(x) \leq 0\}}_{\in\Sigma} \cap \underbrace{\{x \in X : g(x) \geq 0\}}_{\in\Sigma} \in \Sigma$$

1.3.7 Composición de funciones medibles

En general, no siempre tiene sentido hablar de medibilidad respecto de funciones compuestas. No obstante, existen casos donde sí lo tiene. Por ejemplo, existen funciones medibles en $(\mathbb{R}^N, \mathfrak{M}_N, \mu_N)$ cuya composición no es medible en este espacio, aunque en ocasiones la composición sí puede respetar la medibilidad.

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sea $f : X \longrightarrow A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ una función medible. Sea $g : A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ continua. Entonces, $(g \circ f)$ es medible.

Demostración: Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ cualquiera; entonces,

$$(g \circ f)^{-1}\Big([-\infty, \alpha)\Big) = f^{-1}\Bigg(\underbrace{g^{-1}\Big([-\infty, \alpha)\Big)}_{\in \tau_{\overline{\mathbb{R}}}}\Bigg) \in \Sigma$$

Por continuidad de g, la preimagen del abierto $[-\infty, \alpha)$ de $\overline{\mathbb{R}}$ es también un abierto. Aplicando ahora el resultado 1.3.3., por ser f medible, tenemos que la preimagen de este abierto por f pertenece a Σ.

1.3.8 Operaciones en $\overline{\mathbb{R}}$

Sea $k \in \mathbb{R}$, se cumple, $+\infty + k = +\infty$, $-\infty + k = -\infty$. Además,

$$\begin{array}{ll} +\infty \cdot k = +\infty \text{ si } k \in (0, +\infty] & +\infty \cdot k = -\infty \text{ si } k \in [-\infty, 0) \\ -\infty \cdot k = -\infty \text{ si } k \in (0, +\infty] & -\infty \cdot k = +\infty \text{ si } k \in [-\infty, 0) \end{array}$$

Las operaciones $0 \cdot +\infty$ y $0 \cdot -\infty$ no están definidas. Nótese que $\overline{\mathbb{R}}$ no es un cuerpo.

1.3.9 Cociente de una función medible

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sea $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$ medible. Entonces, $\frac{1}{f}$ es también medible.

Demostración: Consecuencia directa del resultado 1.3.7. Se tiene $\frac{1}{f} = g \circ f$ con $g : \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ continua.

1.3.10 Composición de funciones medibles en $\mathfrak{B}_1$

Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ medibles en $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_1, \mu_1)$. Entonces, $g \circ f$ es también medible en este espacio de medida.

Demostración: Definimos el siguiente conjunto $\mathcal{A}$. Veamos que $\tau_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{A}$.

$$\mathcal{A} := \{B \in \mathfrak{B}_1 : f^{-1}(B) \in \mathfrak{B}_1\}$$

Sea $O \in \tau_{\mathbb{R}}$; por ser f medible sabemos $f^{-1}(O) \in \mathfrak{B}_1$, luego $O \in \mathcal{A}$ por definición. Veamos que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra:

$(S.1)$ $\varnothing = f^{-1}(\varnothing)$ con $\varnothing \in \mathfrak{B}_1$, luego $\varnothing \in \mathcal{A}$.

$(S.2)$ Sean $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$, $f^{-1}\Big(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i\Big) = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} \underbrace{f^{-1}(E_i)}_{\in\mathfrak{B}_1} \in \mathfrak{B}_1$.

$(S.3)$ Sea $E \in \mathcal{A}$, $f^{-1}(E^c) = \big(f^{-1}(E)\big)^c \in \mathfrak{B}_1$.

Por tanto, tenemos que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra de $\mathbb{R}$ con $\tau_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{A}$. Por definición de $\mathfrak{B}_1$, se cumple $\mathfrak{B}_1 \subseteq \mathcal{A}$. Por definición de $\mathcal{A}$, se tiene además $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{B}_1$ luego se cumple la igualdad. Por tanto, sea $O \in \tau_{\mathbb{R}}$ cualquiera, sea cumple:

$$(g \circ f)^{-1}(O) = f^{-1}\Big(\underbrace{g^{-1}(O)}_{\in\mathfrak{B}_1}\Big) \in \mathfrak{B}_N$$

Nota: Esta caracterización de medibilidad funciona para $\mathfrak{B}_1$, pero no para $\mathfrak{M}_N$.

1.3.11 Definición de función característica

Dado un conjunto cualquiera X, sea $A \subseteq X$ cualquiera. Llamaremos "función característica de A en X" (o "indicadora") a la siguiente función (se denota por 1_A o X_A):

$$1_A, X_A : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \qquad x \longmapsto 1_A(x) = X_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

1.3.12 Medibilidad según función característica

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida, sea $A \subseteq X$. Se cumple:

$$\mathcal{X}_A \text{ es medible} \iff A \in \Sigma$$

Demostración:

$$\mathcal{X}_A^{-1}\Big([\alpha, \infty]\Big) = \begin{cases} X & \text{si } \alpha \leq 0 \quad \text{siempre en } \Sigma \\ A & \text{si } \alpha \in (0, 1] \\ \varnothing & \text{si } \alpha > 1 \quad \text{siempre en } \Sigma \end{cases}$$

Tenemos que $\mathcal{X}_A$ es medible si y solo si $\mathcal{X}_A^{-1}\Big([\alpha, \infty]\Big) \in \Sigma \ \forall \, \alpha \in (0, 1]$, lo que a su vez equivale a exigir $A \in \Sigma$.

1.3.13 Definición de función simple

Llamamos "función simple" $s : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ a cualquier función cuya imagen es un conjunto finito.

Denotando $s(X) = \{\lambda_1 < \ldots < \lambda_n\}$ con $n \in \mathbb{N}$ fijo, llamaremos "expresión canónica" de s a la siguiente expresión:

$$s = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \mathcal{X}_{A_i} \qquad \text{donde } A_i = s^{-1}\Big(\{\lambda_i\}\Big) \ \forall \, i \in \{1, \ldots, n\}$$

Nótese que $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ y que $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$.

1.3.14 Medibilidad de funciones simples

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sea $s : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función simple tal que $s(X) = \{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$ con $\lambda_1 < \ldots < \lambda_n$. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:

i) s es medible

ii) $A_i := s^{-1}(\{\lambda_i\}) \in \Sigma \ \forall\, i \in \{1, \dots, n\}$

Demostración:

$ii \Rightarrow i$ como los A_i son medibles por hipótesis, aplicando el resultado 1.3.12, tenemos que las funciones características X_{A_i} son medibles. Aplicando ahora el resultado 1.3.5, concluimos que:

$$s = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot X_{A_i} \quad \text{es medible}$$

$\neg ii \Rightarrow \neg i)$ Por hipótesis, $\exists\, j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $A_j \notin \Sigma$.

Veamos que s no es medible. En caso de serlo, se cumpliría:

$$\underbrace{s^{-1}\Big([-\infty, \lambda_j]\Big)}_{\in\Sigma} \cap \underbrace{s^{-1}\Big([\lambda_j, +\infty]\Big)}_{\in\Sigma} \in \Sigma$$

Como la preimagen respeta la intersección, se tiene:

$$s^{-1}\Big([-\infty, \lambda_j]\Big) \cap s^{-1}\Big([\lambda_j, +\infty]\Big) = s^{-1}\Big([-\infty, \lambda_j] \cap [\lambda_j, +\infty]\Big) = s^{-1}(\{\lambda_j\}) = A_j \in \Sigma$$

Hemos llegado a una contradicción. Por tanto, s no puede ser medible.

1.3.15 Producto de funciones medibles

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sean $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medibles. Si $f \cdot g$ está bien definida para todo $x \in X$; entonces, es medible.

Demostración: Hemos de considerar varios casos.

Si $f + g$ está bien definida, se cumple: $f \cdot g = \frac{1}{2}\Big((f + g)^2 - f^2 - g^2\Big)$. En esta región, a la que denotaremos A_0, $f \cdot g$ es medible como consecuencia del resultado 1.3.5. La expresión anterior no está definida para los x pertenecientes a los siguientes conjuntos:

$$
\begin{array}{ll}
A_1 := f^{-1}\big(\{+\infty\}\big) \cap g^{-1}\Big([-\infty, 0)\Big) & A_5 := g^{-1}\big(\{+\infty\}\big) \cap f^{-1}\Big((-\infty, 0)\Big) \\
A_2 := f^{-1}\big(\{+\infty\}\big) \cap g^{-1}\Big((0, +\infty]\Big) & A_6 := g^{-1}\big(\{+\infty\}\big) \cap f^{-1}\Big((0, +\infty)\Big) \\
A_3 := f^{-1}\big(\{-\infty\}\big) \cap g^{-1}\Big([-\infty, 0)\Big) & A_7 := g^{-1}\big(\{-\infty\}\big) \cap f^{-1}\Big((-\infty, 0)\Big) \\
A_4 := f^{-1}\big(\{-\infty\}\big) \cap g^{-1}\Big((0, +\infty]\Big) & A_8 := g^{-1}\big(\{-\infty\}\big) \cap f^{-1}\Big((0, +\infty)\Big)
\end{array}
$$

Es evidente que $(f \cdot g)_{|A_i} \equiv +\infty$ y que $(f \cdot g)_{|A_j} \equiv -\infty$ para $i \in \{2, 3, 6, 7\}$, y para $j \in \{1, 4, 5, 8\}$. Así, al ser constantes, las restricciones son medibles en $(A_k, \Sigma(A_k), \mu_{|\Sigma(A_k)})$ con $k \in \{1, \dots, 8\}$.

Por tanto, para cada $i \in \{0, 1, \dots, 8\}$ tenemos que $(f \cdot g)_{|A_i}$ es medible en $(A_i, \Sigma(A_i), \mu_{|\Sigma(A_i)})$. Esto equivale a que $f \cdot g \cdot X_{A_i}$ es medible en (X, Σ, μ). Finalmente, se cumple:

$$
f \cdot g = \sum_{k=0}^{8} f \cdot g \cdot X_{A_k} \quad \text{es medible}
$$

Al ser disjuntos los A_i la función está bien definida. Además, es medible en (X, Σ, μ) al ser suma de funciones medibles en este espacio.

1.3.16 Definición de parte positiva y negativa

Dada una función $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, llamaremos "parte positiva de f" y "parte negativa de f", respectivamente, a las siguientes funciones:

$$
f^+(x) = \max\{0, f(x)\} \text{ con } x \in X \qquad f^-(x) = \max\{0, -f(x)\} \text{ con } x \in X
$$

De este modo, $f = f^+ - f^-$ y $|f| = f^+ + f^-$. Además, para cada $x_0 \in X$, al menos un valor $f^+(x_0)$ ó $f^-(x_0)$ ha de ser nulo. Si f es medible, entonces lo son también f^+ y f^-.

$$
(f^+)^{-1}\Big([-\infty, \alpha)\Big) = \begin{cases} \varnothing & \text{si } \alpha \leq 0 \\ f^{-1}\Big([-\infty, \alpha) \cap [-\infty, 0]\Big) & \text{si } \alpha > 0 \end{cases}
$$

En cualquier caso, el resultado pertenece a Σ al ser f medible. Análogo para f^-.

1.3.17 Funciones medibles como límite de simples

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sea $f : X \longrightarrow [0, \infty]$ una función medible en él. Entonces existe una sucesión de funciones simples medibles $s_n : X \longrightarrow [0, +\infty]$ tales que para todo $x \in X$ se cumple:

i) $\forall\ n \in \mathbb{N} : s_n(x) \leq s_{n+1}$

ii) $\exists\ \lim_n s_n(x) = f(x)$

Nota: Este teorema afirma la existencia de una sucesión creciente de funciones (primer apartado) pero las funciones de la sucesión no tienen por qué ser crecientes.

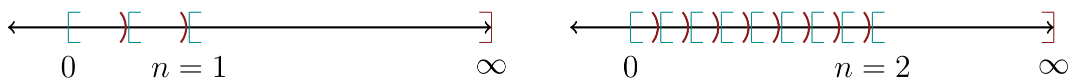
Demostración: Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos los siguientes conjuntos:

$$E_n := f^{-1}\Big([n, +\infty]\Big) \in \Sigma$$
$$E_{n,i} := f^{-1}\left(\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right)\right) \in \Sigma \quad \text{con } i \in \{1, \dots, n \cdot 2^n\}$$

Así, para n fijo, $i \neq j \Rightarrow E_{n,i} \cap E_{n,j} = \varnothing$. Además, definiremos la siguiente función:

$$s_n(x) = n \cdot X_{E_n}(x) + \sum_{i=1}^{n \cdot 2^n} \left(\frac{i-1}{2^n} \cdot X_{E_{n,i}}(x) \right)$$

Esta función asigna a cada $x \in X$ el mínimo del conjunto E_n ó $E_{n,i}$ donde se encuentra x. Al tomar un conjunto finito de valores, es una función simple. Además, al ser medibles las preimágenes de sus valores, tenemos que s_n es también medible.



Conjuntos inducidos para los casos $n = 1$ y $n = 2$.

Sea $x_0 \in X$ cualquiera, dependiendo del valor de $f(x_0)$ pueden darse dos casos:

• Si $f(x_0) = +\infty$, $f(x_0) \in [n, +\infty]\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, luego $s_n(x_0) = n \xrightarrow{n \to \infty} \infty = f(x_0)$ de manera creciente.

• Si $f(x_0) \in (0, +\infty)$, podemos tomar $m := \{n \in \mathbb{N} : n > f(x_0)\}$. Así, se cumple $s_1(x_0) = 1 < s_2(x_0) = 2 < \ldots < s_{m-1}(x_0) = m - 1 < s_m(x_0) < m$.

Para $n \geq m$, tenemos que $\exists! i_n \in \{1, \ldots, n \cdot 2^n\}$ que verifica:

$$f(x_0) \in \left[\frac{i_n - 1}{2^n}, \frac{i_n}{2^n}\right) = \left[\frac{2i_n - 2}{2^{n+1}}, \frac{2i_n - 1}{2^{n+1}}\right) \cup \left[\frac{2i_n - 1}{2^{n+1}}, \frac{2i_n}{2^{n+1}}\right)$$

De este modo, $s_n(x_0) = \frac{i_n - 1}{2^n}$ y además $s_{n+1}(x_0) \in \left\{\frac{2i_n-2}{2^{n+1}}, \frac{2i_n-1}{2^{n+1}}\right\}$ luego ha de cumplirse necesariamente $s_n(x_0) \leq s_{n+1}(x_0)$. Al ser una sucesión no decreciente y acotada, podemos afirmar que $\exists\, l := \lim_n s_n(x_0) \in (0, +\infty)$. Veamos que $l = f(x_0)$. Dado $n \geq m$, se cumple:

$$s_n(x) = \frac{i_n - 1}{2^n} \leq f(x_0) < \frac{i_n}{2^n} = \frac{i_n - 1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = s_n(x_0) + \frac{1}{2^n}$$

Tomando límites cuando $n \to \infty$, concluimos que $l \leq f(x_0) \leq l$.

1.3.18 Convergencia uniforme para funciones acotadas

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sea $f : X \longrightarrow [0, +\infty)$ una función medible y acotada. Entonces existe una sucesión de funciones simples $s_n : X \longrightarrow [0, \infty)$ tales que:

i) $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, x \in X : s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$

ii) $s_n \xrightarrow{u} f$

Nota: Podemos suponer que f está estrictamente acotada por 1. En caso contrario, estará estrictamente acotada por cierto $K \in (0, +\infty)$. Podemos aplicar el resultado a $\frac{f}{K}$, que estará acotada por 1, y multiplicar las funciones simples por K con el fin de que se cumpla para la f original.

Demostración:

En vista del resultado anterior, queda comprobar que la convergencia es uniforme. Siguiendo la notación de la demostración anterior,

$$s_n = n \cdot X_{E_n} + \sum_{i=1}^{n \cdot 2^n} \left(\frac{i-1}{2^n} \cdot X_{E_{n,i}} \right)$$

Al suponer que f está estrictamente acotada por 1, el primer sumando es siempre nulo. Por tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $E_n = f^{-1}\Big([n, +\infty]\Big) = \varnothing$, $\forall\, x \in X :$ $f(x) \in \left[\frac{i_{n,x}-1}{2^n}, \frac{i_{n,x}}{2^n}\right)$ para cierto $i_{n,x} \in \{1, \ldots, n \cdot 2^n\}$. De este modo,

$$|s_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \to \infty} 0 \quad \text{uniformemente para cualquier } x \in X$$

II Integral de Lebesgue

§1. Integral de Lebesgue para funciones no negativas

2.1.1 Convenio $0 \cdot \infty$

Consideramos $0 \cdot \infty = 0$ siempre y cuando al menos uno de los dos factores represente la medida de algún conjunto.

2.1.2 Definición de integral de funciones simples

Dado un espacio de medida (X, Σ, μ) y una función simple medible

$$s : X \longrightarrow [0, +\infty) \qquad \text{con expresión canónica } s = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_{A_i}$$

Definimos la integral de Lebesgue de s sobre X como el número:

$$\int_X s \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \mu(A_i)$$

<u>**Nota:**</u> Implícitamente, ya está definida la integral de s sobre $\Sigma(E)$ $\forall\, E \in \Sigma$:

$$\widehat{\int_E} s \, d\mu = \widehat{\int_X} s_{|E} \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \mu(E \cap A_i)$$

2.1.3 Linealidad del integrando

Dado un spacio de medida (X, Σ, μ). Sea $s : X \longrightarrow [0, \infty)$ una función simple y medible. Sean $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ con $i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \varnothing$. Entonces, se cumple:

$$\int_{\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} E_i} s\, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} s\, d\mu$$

Demostración: Sea $s = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot X_{A_i}$ la expresión canónica de s. Entonces,

$$\int_{\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} E_i} s\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \mu\big(A_i \cap \underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} E_i\big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_i \cap E_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_i \cdot \mu(A_i \cap E_j) \right) = \sum_{j=i}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \mu(A_i \cap E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} s\, d\mu$$

2.1.4 Linealidad parcial

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sean $s, t : X \leftarrow [0, \infty)$ funciones simples y medibles. Entonces, se cumple:

$$\int_X s + t\, d\mu = \int_X s\, d\mu + \int_X t\, d\mu$$

Demostración: Sean sus expresiones canónicas las siguientes:

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \mu(A_i) \qquad\qquad t = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \cdot \mu(B_j)$$

Entonces, como $\{A_i\}_{i=1}^n$ y $\{B_j\}_{j=1}^m$ son recubrimientos disjuntos de X, se tiene:

$$\int_X s\,d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^m \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} \alpha_i \cdot \mu(A_i \cap B_j)$$

$$\int_X t\,d\mu = \sum_{j=1}^m \beta_j \sum_{i=1}^n \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} \beta_j \cdot \mu(A_i \cap B_j)$$

Sumando ambas expresiones obtenemos:

$$\int_X s\,d\mu + \int_X t\,d\mu = \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} (\alpha_i + \beta_j) \cdot \mu(A_i \cap B_j) =$$

$$= \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} \int_{A_i\cap B_j} s + t\,d\mu = \int_X s + t\,d\mu$$

La última igualdad se deduce de la linealidad del integrando.

2.1.5 Monotonía de la integral simple

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sean $s, t : X \longrightarrow [0, \infty)$ funciones medibles simples tales que $s(x) \leq t(x) \forall x \in X$. Entonces, se cumple:

$$\int_X s\,d\mu \leq \int_X t\,d\mu$$

Demostración:

$$\int f\,d\mu$$

Entonces...