

Análisis Matemático III

Javier Ortín Rodenas

Curso 2025-2026

Contenidos

IV Series de Fourier	3
1. Primeros conceptos	3
4.1.1 Definición de sistema ortonormal	3
4.1.2 Ejemplos de sistemas ortonormales	3
4.1.3 Teorema de óptima aproximación	4
4.1.4 Definición de coeficientes de Fourier	5
4.1.5 Unicidad de las Series de Fourier	6
4.1.6 Identidad de Parseval	7
4.1.7 Definición de sistema ortonormal completo	7
4.1.8 Ejemplo de sistema ortonormal completo	8
4.1.9 Ejemplo de cálculo de serie de Fourier	9
2. Estudio de la convergencia puntual	10
4.2.1 Teorema de Riesz-Fisher	10
4.2.2 Suma parcial como integral de semisumas	11
4.2.3 Lema de Riemann-Lebesgue	12
4.2.4 Funciones de variación acotada	14
4.2.5 Teorema de Localización de Riemann	14
4.2.6 Teorema de Jordan	15
4.2.7 Condición de Jordan	15
4.2.8 Teorema de Dini	16
4.2.9 Condición de Dini	17
4.2.10 Teorema de Carleson	18
4.2.11 Ejemplo sobre una función concreta	18
4.2.12 Definición de convergencia Cesàro	20
4.2.13 Teorema de Fejér	21
4.2.14 Propiedades de funciones continuas	21
4.2.15 Convergencia ante diferenciabilidad	24
4.2.16 Convergencia ante \mathcal{C}^2	24

IV Series de Fourier

Recordamos que $L_2(X, K) \equiv \frac{L_2(X, K)}{\sim}$ es un espacio de Hilbert; donde X es un K -espacio vectorial, y $f \sim g \iff f \stackrel{\mu-a.e.}{=} g$. El producto interior y su norma asociada se definen como:

$$\langle f, g \rangle = \int_X \bar{f} \cdot g \quad \|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

Nótese que cuando trabajamos con \mathbb{C} como cuerpo el producto interno tiene linealidad directa en una componente, mientras que tiene linealidad por el conjugado en la otra. Asimismo, el producto interno da lugar a escalares del propio cuerpo sobre el que se define, luego podría dar lugar a valores complejos. Además, el producto interno no commuta (en general) en \mathbb{C} .

La idea de esta unidad es “aproximar” una función $f \in L_2(X, K)$ como “suma” de funciones más elementales. En particular, a partir de ahora, consideraremos $X = I = [0, 2\pi]$, con $K = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} . Además, extenderemos las funciones en este conjunto con periodicidad 2π en \mathbb{R} .

§1. Primeros conceptos

4.1.1 Definición de sistema ortonormal

Dado un espacio de Hilbert V , un sistema ortonormal en V es un conjunto $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq V$ que verifica:

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

4.1.2 Ejemplos de sistemas ortonormales

- i) $K = \mathbb{R}$, $V = L_2([0, 2\pi], \mathbb{R})$. Consideramos el siguiente sistema:

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad \varphi_{2n-1}(t) = \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}} \quad \varphi_{2n}(t) = \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}}$$

Veamos que es ortonormal:

$$\int_0^{2\pi} \varphi_0^2(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} dt = 1$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \varphi_{2n+1}^2(t) dt &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(nt)}{\pi} dt \stackrel{u=nt}{=} \frac{1}{n\pi} \int_0^{2n\pi} \frac{1 + \cos(2u)}{2} du \stackrel{v=2u}{=} \\ &= \frac{1}{4n\pi} \int_0^{4n\pi} 1 + \cos(v) dv = \frac{4n\pi}{4n\pi} + 0 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \varphi_{2n}^2(t) dt &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(nt)}{\pi} dt \stackrel{u=nt}{=} \frac{1}{n\pi} \int_0^{2n\pi} \frac{1 - \cos(2u)}{2} du \stackrel{v=2u}{=} \\ &= \frac{1}{4n\pi} \int_0^{4n\pi} 1 - \cos(v) dv = \frac{4n\pi}{4n\pi} + 0 = 1 \end{aligned}$$

Por ser funciones con periodo 2π , para $n \in \mathbb{N}$ cualquiera, se cumple:

$$\int_0^{2\pi} \varphi_{2n+1}(t) dt = \int_0^{2\pi} \varphi_{2n}(t) dt = \int_0^{2\pi} \varphi_{2n+1}(t) \cdot \varphi_{2n}(t) dt = 0$$

Hemos demostrado que el sistema es ortonormal.

ii) Para $K = \mathbb{C}$, $V = L_2([0, 2\pi], \mathbb{C})$, el siguiente sistema es ortonormal:

$$\left\{ \varphi_n(t) = \frac{e^{i \cdot n \cdot t}}{\sqrt{\pi}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

4.1.3 Teorema de óptima aproximación

Sea V un K -espacio pre-Hilbert. Sea $\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\} \subseteq V$ un sistema ortonormal finito en V . Sea $f \in V$. Si W es la clausura $K\langle \varphi_0, \dots, \varphi_n \rangle$. Entonces, el elemento de W que mejor aproxima f (en cuanto a minimizar la norma de su diferencia) es

$$s_n = \sum_{k=0}^n \underbrace{\langle f, \varphi_k \rangle}_{c_k} \varphi_k$$

Es decir, dado $t_n = \sum_{k=0}^n b_k \cdot \varphi_k \in W$ cualquiera (formado a partir de escalares cualesquiera), se cumple $\|f - s_n\| \leq \|f - t_n\|$.

Demostración:

Al ser un espacio Pre-Hilbert por hipótesis, tenemos que :

$$\begin{aligned}
& \|f - t_n\|^2 = \langle f - t_n, f - t_n \rangle = \langle f, f \rangle - \langle f, t_n \rangle - \langle t_n, f \rangle + \langle t_n, t_n \rangle = \\
& = \|f\|^2 - \left\langle f, \sum_{k=0}^n b_k \varphi_k \right\rangle - \left\langle \sum_{k=0}^n b_k \varphi_k, f \right\rangle + \left\langle \sum_{k=0}^n b_k \varphi_k, \sum_{k=0}^n b_k \varphi_k \right\rangle = \begin{array}{l} \text{linealidad} \\ \text{ortonormalidad} \end{array} \\
& = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n b_k \langle f, \varphi_k \rangle - \sum_{k=0}^n \bar{b}_k \langle f, \varphi_k \rangle + \sum_{k=0}^n \bar{b}_k \cdot b_k = \text{definición de } c_k \\
& = \|f\|^2 + \sum_{k=0}^n \left[-b_k c_k - \bar{b}_k c_k + |b_k|^2 \right] = (*)
\end{aligned}$$

Comparamos ahora con la siguiente expresión:

$$|b_k - c_k|^2 = (b_k - c_k)(\bar{b}_k - \bar{c}_k) = b_k \bar{b}_k - b_k \bar{c}_k - \bar{b}_k c_k + c_k \bar{c}_k = |b_k|^2 + |c_k|^2 - b_k \bar{c}_k - \bar{b}_k c_k$$

Sustituyendo en la igualdad anterior,

$$(*) = \|f\|^2 + \sum_{k=0}^n [|b_k - c_k|^2 - |c_k|^2]$$

En particular, para $b_k = c_k$ tenemos $\|f - s_n\|^2 \leq \|f - t_n\|^2$.

Motivados por este resultado, buscamos aproximar f por una “combinación lineal infinita” de funciones de un sistema ortonormal.

4.1.4 Definición de coeficientes de Fourier

Dada una función $f \in L_2([0, 2\pi])$, y un sistema ortonormal $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Se denomina “coeficiente n -ésimo de Fourier de f respecto de $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ” al escalar:

$$c_n := \langle f, \varphi_n \rangle = \int_0^{2\pi} \bar{f}(t) \cdot \varphi_n(t) dt$$

Definimos la suma parcial n -ésima de Fourier de f respecto de $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ como:

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k \cdot \varphi_k(x)$$

Análogamente, la serie de Fourier de f respecto de $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ viene dada por:

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \varphi_k(x)$$

4.1.5 Unicidad de las Series de Fourier

Sea $f \in L_2(I, K)$. Sea $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un sistema ortonormal. La serie de Fourier de f respecto de $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ está bien definida, pues existe un único elemento $s \in L_2(I, K)$ que verifica:

$$\|s - s_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Demostración:

Sean $p, q \in \mathbb{N}$ cualesquiera. Supongamos sin pérdida de generalidad que $q > p$. Entonces,

$$\begin{aligned} \|s_p - s_q\|^2 &= \left\| \sum_{k=p+1}^q s_k \right\|^2 = \left\langle \sum_{k=p+1}^q \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k, \sum_{k=p+1}^q \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\rangle \xrightarrow{\text{ortonormalidad}} \\ &= \sum_{k=p+1}^q |\langle f, \varphi_k \rangle|^2 = |a_p - a_q|^2 \quad \text{donde } a_n = \sum_{k=0}^n |\langle f, \varphi_k \rangle|^2 \end{aligned}$$

Por el Teorema de óptima aproximación, para $n \in \mathbb{N}$ cualquiera tenemos que:

$$\|f - s_n\|^2 = \|f\|^2 - \underbrace{\sum_{k=0}^n |\langle f, \varphi_k \rangle|^2}_{a_n} = \|f\|^2 - a_n$$

Esto implica que $\|f\|^2 \geq a_n$. Así, tomando límites en n tenemos que:

$$a := \sum_{k=0}^{\infty} |\langle f, \varphi_k \rangle|^2 \leq \|f\|^2$$

Esta es la conocida como **Desigualdad de Bessel**.

Por tanto, tenemos que $(a_n)_n$ es de Cauchy, luego $(s_n)_n$ ha de serlo también. Al estar además en un espacio de Banach, podemos asegurarnos de que $(s_n)_n$ es convergente a s .

Nota:

Este resultado garantiza la convergencia en norma de las sumas parciales de Fourier a su límite. No tiene por qué darse $f(x) = s(x)$. Cabe preguntarse si esto es a su vez equivalente a $\|f - s_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Pasaremos a estudiar escenarios donde puede ocurrir.

4.1.6 Identidad de Parseval

Sea $f \in L_2(I, K)$. Sea $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L_2(I, K)$ un sistema ortonormal. Sea $c_n := \langle f, \varphi_n \rangle$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$\|f - s_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \iff \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = \|f\|^2$$

Demostración:

Por el Teorema de óptima aproximación, sabemos que:

$$\|f - s_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n |c_k|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Despejamos y tomamos límites:

$$\lim_n \|f - s_n\|^2 = 0 \iff \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 = \|f\|^2$$

4.1.7 Definición de sistema ortonormal completo

Sea H un espacio de Hilbert. Sea $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un sistema ortonormal. Se dice “completo” si satisface la Identidad de Parseval para cualquier $f \in H$. Es decir,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle = \|f\|^2 \quad \forall f \in H$$

Nota:

Por la Desigualdad de Bessel, sabemos que $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|f\|^2$. Exigir la igualdad equivale a decir que la norma se resume completamente por el sistema ortonormal: el sistema puede aportar información sobre todo el espacio H . Por tanto, toda componente de f queda recogida por cierto φ_n , luego $f \neq 0$ implica que no es ortogonal a todo el sistema.

4.1.8 Ejemplo de sistema ortonormal completo

En $L_2(I, K)$, el siguiente sistema ortonormal es completo:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(t)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(t)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2t)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(2t)}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$$

La demostración es demasiado larga, luego no se verá.

Este es el sistema ortonormal más utilizado, y la serie de Fourier de una función f respecto de él, se denomina simplemente “serie de Fourier de f ”. Viene representada por:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \right]$$

Donde “ \sim ” significa convergencia en media cuadrática. Podemos obtener los coeficientes a_n, b_n por identificación al aplicar la ortonormalidad. Por definición, la suma parcial k -ésima de Fourier de f viene dada por:

$$s_k(t) = \sum_{n=0}^k \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n(t) = \frac{c_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^k \left[c_{2n-1} \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}} + c_{2n} \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}} \right]$$

De este modo, comparando:

$$a_n = \frac{c_{2n-1}}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle f, \varphi_{2n-1} \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}(t) \cdot \cos(nt) dt$$

$$b_n = \frac{c_{2n}}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle f, \varphi_{2n} \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}(t) \cdot \sin(nt) dt$$

4.1.9 Ejemplo de cálculo de serie de Fourier

Hallemos la serie de Fourier de la siguiente función f :

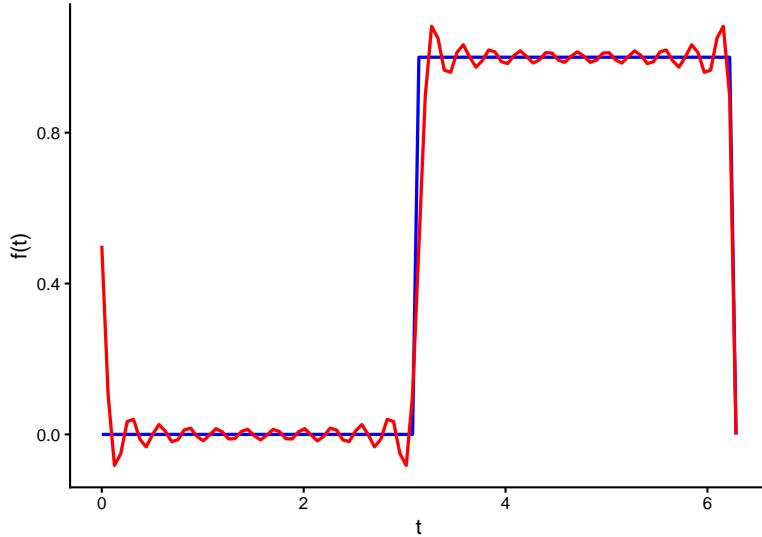
$$f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \pi) \cup \{2\pi\} \\ 1 & \text{si } x \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 0 \cdot \cos(nt) dt + \frac{1}{\pi} \int_\pi^{2\pi} 1 \cdot \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n} \sin(nt) \right]_{t=\pi}^{t=2\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \cos(nt) \right]_{t=\pi}^{t=2\pi} = \frac{-1}{n\pi} (\underbrace{\cos(2n\pi)}_0 - \cos(n\pi)) = \begin{cases} -\frac{2}{n\pi} & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Por tanto, tenemos que:

$$f(t) \sim \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin((2n+1)t)$$



Aproximación de f por su serie de Fourier

Para $t = \pi$, tenemos que $f(\pi) = 1$, pero $s(\pi) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} 0 = \frac{1}{2}$. ¿Por qué ocurre esto? ¿Cuándo se da la convergencia puntual? ¿En qué partes de la función? El siguiente apartado de esta unidad estudia estas preguntas.

§2. Estudio de la convergencia puntual

4.2.1 Teorema de Riesz-Fisher

Sea $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L_2(I, K)$ un sistema ortonormal. Sea $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq K$ que verifica $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$. Entonces, existe una función f de $L_2(I, K)$ que cumple simultáneamente:

$$c_n = \langle f, \varphi_n \rangle \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < \|f\|^2$$

Demostración:

Recordemos que la sucesión $(s_n)_n = (\sum_{k=0}^n c_k \varphi_k)_n$ es de Cauchy, pues dados $p, q \in \mathbb{N}$ con $p < q$, se cumple:

$$\|s_p - s_q\|^2 = \left\| \sum_{k=p+1}^q s_k \right\|^2 = \sum_{k=p+1}^q |c_k|^2 \xrightarrow{p,q \rightarrow \infty} 0$$

Por hipótesis, $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$ luego el término general tiende a cero. Así, la suma de términos generales también tenderá a cero al considerar un índice inicial cada vez más alto.

Al trabajar con un espacio de Hilbert, podemos asegurar que existe $f \in L_2(I, K)$ tal que $\|s_n - f\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Sea $k \in \mathbb{N}$ cualquiera, veamos que $c_k = \langle f, \varphi_k \rangle$:

$$|c_k - \langle f, \varphi_k \rangle| \xrightarrow{n \geq k} |\langle s_n, \varphi_k \rangle - \langle f, \varphi_k \rangle| = |\langle s_n - f, \varphi_k \rangle|$$

Aplicando ahora la Desigualdad de Cauchy Schwartz,

$$|\langle s_n - f, \varphi_k \rangle| \leq \|s_n - f\| \cdot \|\varphi_k\| = \|s_n - f\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Aplicando ahora el Teorema de óptima aproximación,

$$0 \xleftarrow{n \rightarrow \infty} \|s_n - f\| = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2$$

Por tanto, tenemos que $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 = \|f\|^2$.

4.2.2 Suma parcial como integral de semisumas

Sea $f \in L_2([0, 2\pi], \mathbb{R})$ extendida con periodo 2π a \mathbb{R} . Entonces, la suma parcial n -ésima de la serie de Fourier de f satisface:

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x+t) + f(x-t)) D_n(t) dt$$

$$\text{Donde } D_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 2\pi n \\ \frac{1}{2 \sin(\frac{t}{2})} \sin\left((n + \frac{1}{2}) \cdot t\right) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demostración:

Por definición de la suma parcial,

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \sum_{k=0}^n \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k(x) = \sum_{k=0}^n \varphi_k(x) \cdot \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \varphi_k(t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt + \sum_{k=1}^n \left[\frac{\cos(kx)}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(kt) \cdot f(t) dt \right] + \sum_{k=1}^n \left[\frac{\sin(kx)}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(kt) \cdot f(t) dt \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx) \cos(kt) + \sin(kx) \sin(kt) \right) \right] dt = \underset{\substack{\text{identidad trigonométrica} \\ \text{coseno de la suma}}}{=} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx - kt) \right) \right] dt \end{aligned}$$

Sea $k \leq n$ cualquiera, para $A = \frac{1}{2}(x-t)$ y $B = k(x-t)$, usamos la siguiente identidad trigonométrica: $\sin(A+B) - \sin(B-A) = 2 \sin(A) \cos(B)$. Por tanto, tenemos:

$$\sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)(x-t)\right) - \sin\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)(x-t)\right) = 2 \sin\left(\frac{x-t}{2}\right) \cos\left(k(x-t)\right)$$

Sumamos ahora en k hasta llegar a n . Al ser una suma telescopica,

$$\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)(x-t)\right) - \sin\left(\frac{x-t}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{x-t}{2}\right) \sum_{k=1}^n \cos(kx - kt)$$

Despejando,

$$\sum_{k=1}^n \cos(kx - kt) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})(x - t))}{2 \sin(\frac{x-t}{2})} - \frac{1}{2}$$

Continuamos ahora en la igualdad de la integral inicial:

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \frac{\sin((n + \frac{1}{2})(x - t))}{2 \sin(\frac{x-t}{2})} dt = \underset{u=x-t}{\text{cambio de variable}} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_x^{x-2\pi} f(x-u) \cdot D_n(u) du = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-u) \cdot D_n(u) du = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^\pi f(x-u) \cdot D_n(u) du + \int_\pi^{2\pi} f(x-u) \cdot D_n(u) du \right] \stackrel{v=2\pi-u}{=} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^\pi f(x-u) \cdot D_n(u) du + \int_0^\pi f(x+v) \cdot D_n(v) dv \right] \end{aligned}$$

Queda demostrada la igualdad. Expliquemos el último paso con algo más de detalle:

$$\int_\pi^{2\pi} f(x-u) \cdot D_n(u) du = - \int_\pi^0 f(x-(2\pi-v)) \cdot D_n(2\pi-v) dv$$

Al ser tanto f como D_n funciones de periodo 2π , su producto también lo es. Por tanto, podemos simplificar esta expresión para que coincida con la del enunciado.

4.2.3 Lema de Riemann-Lebesgue

Sea $f \in L_1(J, \mathbb{R})$ con J un intervalo compacto real. Entonces, para $\beta \in \mathbb{R}$ cualquiera, se cumple:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_J f(t) \cdot \sin(\alpha t + \beta) dt = 0$$

Demostración:

Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera, pero fijo. Veamos primero que el resultado es cierto para funciones características sobre un intervalo compacto $[c, d] \subseteq J$.

$$f : J \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [c, d] \\ 0 & \text{si } x \in J \setminus [c, d] \end{cases}$$

Entonces, para este caso,

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_J f(t) \sin(\alpha t + \beta) dt &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_c^d \sin(\alpha t + \beta) dt = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left[\frac{-1}{\alpha} \cos(\alpha t + \beta) \right]_{t=c}^{t=d} = 0\end{aligned}$$

El límite es nulo al tratarse de un infinitésimo por una función acotada. Hemos comprobado que se cumple para este tipo de funciones.

Aplicaremos ahora el siguiente resultado (no veremos su demostración):

Sean $f \in L_1([a, b], \mathbb{R})$ cualquiera, $\varepsilon > 0$ cualquiera. Existen $g \in L_1([a, b], \mathbb{R})$ y $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ combinación lineal de funciones características de intervalos compactos en $[a, b]$ tales que:

$$f = s + g \quad \int_a^b |g(t)| dt < \varepsilon$$

Así, para $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$, sabemos que existen $g \in L_1(J, \mathbb{R})$, $s : J \rightarrow \mathbb{R}$ combinación lineal de funciones características de intervalos compactos de J tales que:

$$f = s + g \quad \int_J |g(x)| dx < \varepsilon_1$$

Como ya hemos demostrado el apartado anterior para funciones características, sabemos que para $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\alpha \geq M$ se cumple:

$$\left| \int_J s(t) \cdot \sin(\alpha t + \beta) dt \right| < \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$$

De este modo, dado $\alpha \geq M$, tenemos:

$$\begin{aligned}&\left| \int_J f(t) \cdot \sin(\alpha t + \beta) dt \right| \leq \\ &\leq \left| \int_J \left(\underbrace{f(t) - s(t)}_{g(t)} \right) \sin(\alpha t + \beta) dt \right| + \left| \int_J s(t) \cdot \sin(\alpha t + \beta) dt \right| \leq \\ &\leq \int_J |g(t) \cdot \sin(\alpha t + \beta)| dt + \varepsilon_2 \leq \int_J |g(t)| dt + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\end{aligned}$$

4.2.4 Funciones de variación acotada

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Sea $\mathcal{P}([a, b])$ el conjunto de particiones del intervalo $[a, b]$. Consideraremos cada partición como:

$$p = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n_p} = b\} \in \mathcal{P}([a, b])$$

Definimos la variación de f en $[a, b]$ como:

$$V_f(a, b) = \sup_{p \in \mathcal{P}([a, b])} \sum_{i=1}^{n_p} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

Si $V_f(a, b) < \infty$, se dice que “ f es de variación acotada en $[a, b]$ ”.

4.2.5 Teorema de Localización de Riemann

Sea $f \in L_1([0, 2\pi], \mathbb{R})$ una función de periodo 2π en \mathbb{R} . Entonces, la serie de Fourier de f converge en x si y solo si $\exists \delta \in (0, \pi)$ tal que:

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\delta \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \cdot \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{t} dt$$

En tal caso, converge al valor de dicho límite.

Demostración:

Dado $x \in \mathbb{R}$ cualquiera. Por el resultado 4.2.2, la serie de Fourier de f converge en x si y solo si:

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x+t) + f(x-t)) \cdot \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{2 \sin(\frac{t}{2})} dt$$

Consideramos el siguiente límite auxiliar:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2 \sin(\frac{t}{2})} \right) \cdot (f(x+t) + f(x-t)) \cdot \sin((n + \frac{1}{2})t) dt$$

Al ser $f \in L_1([0, 2\pi], \mathbb{R})$ con periodo 2π por hipótesis, $f(x-t)$ y $f(x+t)$ han de serlo también. Además, la función $\frac{1}{t} - \frac{1}{2 \sin(\frac{t}{2})}$ es de variación acotada en $[0, \pi]$ (sin demostración), luego es $L_1([0, \pi], \mathbb{R})$. Aplicando el Lema de Riemann-Lebesgue,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2 \sin(\frac{t}{2})} \right) \cdot (f(x+t) + f(x-t)) \cdot \sin \left((n + \frac{1}{2})t \right) dt = 0$$

Por tanto, comparando con el límite original,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x+t) + f(x-t)) \cdot \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{t} dt$$

Sea $\delta \in (0, \pi)$ cualquiera, podemos dividir la integral como sigue:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\delta (f(x+t) + f(x-t)) \cdot \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{t} dt + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi (f(x+t) + f(x-t)) \cdot \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{t} dt \end{aligned}$$

El segundo sumando es nulo por el Lema de Riemann-Lebesgue.

4.2.6 Teorema de Jordan

Si $g : [0, \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de variación acotada. Entonces, se cumple:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\delta g(t) \cdot \frac{\sin(\alpha t)}{t} dt = \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) =: g(0^+)$$

Demostración: No se verá la demostración.

4.2.7 Condición de Jordan

Sea $f \in L_1([0, 2\pi], \mathbb{R})$ una función con periodo 2π que además es de variación acotada en $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ para ciertos $x \in [0, 2\pi]$, $\varepsilon > 0$. Entonces, la serie de Fourier de f converge en x si y solo si:

$$\exists \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2}$$

En tal caso, converge al límite anterior.

Demostración:

Fijado el x del enunciado, tenemos que $g_1(t) := f(x-t)$ y $g_2(t) := f(x+t)$ son de variación acotada en $[-\varepsilon, \varepsilon]$. En particular, son de variación acotada en $[0, \varepsilon]$. Aplicando el Teorema de Jordan,

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\varepsilon g_1(t) \cdot \frac{\sin(\alpha t)}{t} dt = \lim_{t \rightarrow 0^+} g_1(t)$$

Del mismo modo,

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\varepsilon g_2(t) \cdot \frac{\sin(\alpha t)}{t} dt = \lim_{t \rightarrow 0^+} g_2(t)$$

Aplicamos ahora el Teorema de Localización de Riemann para $\delta = \varepsilon$:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\varepsilon \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \cdot \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{t} dt = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\varepsilon \frac{f(x+t)}{2} \cdot \frac{\sin(\alpha t)}{t} dt + \frac{2}{\pi} \int_0^\varepsilon \frac{f(x-t)}{2} \cdot \frac{\sin(\alpha t)}{t} dt = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \end{aligned}$$

Como el Teorema de Localización de Riemann garantiza la convergencia al valor del límite, concluimos la demostración.

4.2.8 Teorema de Dini

Sea $g : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\exists \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) =: g(0^+)$. Entonces, si existe $\delta \in (0, b)$ tal que

$$\frac{g(t) - g(0^+)}{t} \in L_1([0, \delta], \mathbb{R})$$

se verifica:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\delta g(t) \cdot \frac{\sin(\alpha t)}{t} dt = g(0^+)$$

Demostración:

Supongamos que existe tal $\delta \in (0, b)$. Así, podemos reescribir el límite del enunciado como:

$$\begin{aligned} & \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\delta g(t) \cdot \frac{\sin(\alpha t)}{t} dt = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\delta (g(t) - g(0^+)) \cdot \frac{\sin(\alpha t)}{t} dt + \frac{2}{\pi} \int_0^\delta g(0^+) \cdot \frac{\sin(\alpha t)}{t} dt \end{aligned}$$

Por hipótesis, $\frac{g(t)-g(0^+)}{t} \in L_1([0, \delta], \mathbb{R})$. Aplicando el Lema de Riemann-Lebesgue,

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\delta \frac{g(t) - g(0^+)}{t} \cdot \sin(\alpha t) dt = 0$$

Volviendo a la igualdad anterior,

$$\begin{aligned} & \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\delta g(t) \cdot \frac{\sin(\alpha t)}{t} dt = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\delta g(0^+) \cdot \frac{\sin(\alpha t)}{t} dt = \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot g(0^+) \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^\delta \frac{\sin(\alpha t)}{t} dt \stackrel{u=\alpha t}{=} \frac{2}{\pi} \cdot g(0^+) \int_0^\infty \frac{\sin(u)}{u} du = g(0^+) \end{aligned}$$

El último paso se debe a ser la integral bien conocida.

4.2.9 Condición de Dini

Sea $f \in L_1([0, 2\pi], \mathbb{R})$ con periodo 2π . Fijado $x \in \mathbb{R}$ cualquiera, consideramos la función $g(t) := \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2}$. Si existen $g(0^+) := \lim_{t \rightarrow 0^+}$ y $\delta > 0$ tal que la función $\frac{g(t)-g(0^+)}{t} \in L_1([0, \delta], \mathbb{R})$. Entonces, la serie de Fourier de f converge en x y lo hace al valor:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2}$$

Demostración: Análoga a la condición de Jordan.

Al ser f 2π -periódica por hipótesis, también ha de serlo g . Razonando como en la Condición de Jordan,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\delta \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \cdot \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{t} dt = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\delta \frac{f(x+t)}{2} \cdot \frac{\sin(\alpha t)}{t} dt + \frac{2}{\pi} \int_0^\delta \frac{f(x-t)}{2} \cdot \frac{\sin(\alpha t)}{t} dt = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \end{aligned}$$

Hemos aplicado el Teorema de Dini al primer sumando (las hipótesis de este enunciado nos garantizan las condiciones para ello), y el Lema de Riemann-Lebesgue al segundo.

4.2.10 Teorema de Carleson

Si $f \in L_2([0, 2\pi], \mathbb{R})$; entonces, la serie de Fourier de f converge y además converge a $f(x)$ en casi todo punto.

Demostración: Sin demostración.

La continuidad no basta para garantizar la convergencia puntual. ¿Qué propiedades sí nos puede garantizar la continuidad?

4.2.11 Ejemplo sobre una función concreta

Consideramos la función $f(x) = x$ en $[0, 2\pi]$ extendida periódicamente a \mathbb{R} . Veamos cómo calcular su serie de Fourier y estudiemos su convergencia puntual.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

Comencemos calculando los coeficientes:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t dt = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2^2\pi^2}{2} = 2\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{t \sin(nt)}{n} - \frac{1}{n} \int \sin(nu) du \right]_{t=0}^{t=2\pi} =$$

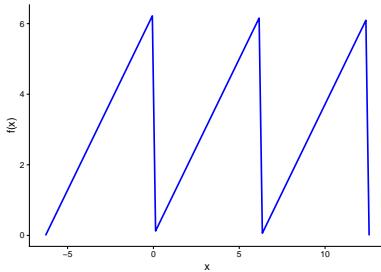
$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{t \sin(nt)}{n} + \frac{\cos(nt)}{n^2} \right]_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\cos(2n\pi)}{n^2} - \frac{\cos(0)}{n^2} \right) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \sin(nt) dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{-t \cos(nt)}{n} - \frac{1}{n} \int -\cos(nu) du \right]_{t=0}^{t=2\pi} =$$

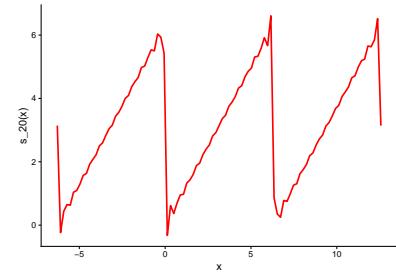
$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{-t \cos(nt)}{n} + \frac{\sin(nt)}{n^2} \right]_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{0 \cdot \cos(0)}{n} - \frac{2\pi \cos(2n\pi)}{n} \right) = -\frac{2}{n}$$

De este modo,

$$f(x) \sim \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$



Representación de f



Serie de Fourier de f con 20 términos

- Condición de Jordan: Si $x \in [0, 2\pi)$, f es monótona y por tanto esta variación acotada en $(x - \delta, x + \delta)$ para cierto $\delta > 0$. Si $x = 0$ ó $x = 2\pi$, f es suma de funciones monótonas luego también es de variación acotada en $(x - \delta, x + \delta)$ para cierto $\delta > 0$. De este modo, la serie de Fourier de f converge $\forall x \in \mathbb{R}$, y lo hace al valor:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2}$$

Tenemos que para todo $x \in (0, 2\pi)$ converge a $f(x) = x$, y para $x \in \{0, 2\pi\}$ converge a $\frac{0+2\pi}{2} = \pi$. Estas convergencias pueden extenderse por periodicidad en \mathbb{R} .

Por tanto, $\forall x \in (0, 2\pi)$ se cumple:

$$x = \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} \stackrel{x=\frac{\pi}{2}}{\Rightarrow} \frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

- Condición de Dini: Para $x \in [0, 2\pi]$ fijo, consideramos la siguiente función auxiliar con periodo 2π :

$$g(t) := \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2}$$

Para el caso $x \in (0, 2\pi)$, tenemos que $g(t) = \frac{t-t}{2} = 0$. Además, existe $g(0^+) = 0$ y se cumple:

$$\frac{g(t) - g(0^+)}{t} = \frac{0}{t} = 0 \in L_1([0, \delta], \mathbb{R}) \text{ para cierto } \delta > 0$$

Por tanto, la serie de Fourier de f converge a $g(0^+) = x$ para cualquier $x \in (0, 2\pi)$.

Si $x \in \{0, 2\pi\}$, $g(t) = \frac{2\pi+t-t}{2} = \pi$ luego $g(0^+) = \pi$. De este modo,

$$\frac{g(t) - g(0^+)}{t} = \frac{\pi - \pi}{t} = 0 \in L_1([0, \delta], \mathbb{R}) \text{ para cierto } \delta > 0$$

En este caso, la serie de Fourier de f converge a $g(0^+) = \pi$.

Nota: La continuidad no basta para garantizar la convergencia puntual.

4.2.12 Definición de convergencia Cesàro

Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Sea $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\sum_{k=1}^n a_k)_{n \in \mathbb{N}}$ la correspondiente sucesión de sumas parciales. Se dice que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es sumable Cesàro si verifica:

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k = \sigma \in \mathbb{R}$$

En tal caso, diremos que σ es la “suma Cesàro de la serie”.

Nota: Sin demostración:

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge a s ; entonces, a_n es sumable Cesàro a $\sigma = s$.

4.2.13 Teorema de Fejér

Dada una función $f \in L_1([0, 2\pi], \mathbb{R})$ con periodo 2π en \mathbb{R} . Consideramos la siguiente función:

$$s(x) := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \quad \text{en } x \in A := \left\{ x \in [0, 2\pi] : s(x) \text{ bien definida} \right\}$$

Entonces, la serie de Fourier de f converge Cesàro $\forall x \in A$ a $s(x)$.

Además, si f es continua en \mathbb{R} , las sumas de Fejér (σ_n) convergen de manera uniforme a s en $A = \mathbb{R}$; es decir,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |\sigma_n(x) - s(x)| < \varepsilon \ \forall x \in \mathbb{R} \ \forall n \geq n_0$$

Demostración: Sin demostración.

4.2.14 Propiedades de funciones continuas

Sea f una función continua en \mathbb{R} con periodo 2π ; entonces,

i) $\|s_n - f\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

ii) Se cumple la identidad de Parseval en $[0, 2\pi]$:

$$\|f\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$$

iii) Si la serie de Fourier de f converge en x , converge a $f(x)$.

iv) La serie de Fourier es integrable término a término:

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{a_0}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) dt$$

Demostración:

i Al ser f continua, es $L_2([0, 2\pi], \mathbb{R})$. Basta aplicar el Teorema de Carleson.

ii Se tiene al haber usado un sistema ortonormal completo.

iii Como f es continua en \mathbb{R} , es $L_1([0, 2\pi], \mathbb{R})$. Aplicando el Teorema de Fèjer, las sumas σ_n convergen uniformemente a s , luego

$$\sigma_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} s(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} = f(x)$$

iv Sea $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

$$\text{Sea } g(x) = f(x) - \frac{a_0}{2} = f(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dt = f(x) - m$$

Es claro que g es continua y 2π -periódica en \mathbb{R} por serlo f . La serie de Fourier de g será:

$$g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

Donde los a_n, b_n coinciden con los coeficientes de Fourier de la serie de f .

La función $G(x) := \int_0^x g(t) dt$ es $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ y 2π -periódica

Su serie de Fourier viene dada por:

$$G(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)$$

Veamos la relación que hay entre A_n, B_n con a_n, b_n .

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G(t) \cos(nt) dt = \quad \text{Integración por partes: } \begin{matrix} u=G(t) \\ dv=\cos(nt) \end{matrix}$$

$$= \left[\frac{1}{n\pi} G(t) \sin(nt) \right]_{t=0}^{t=2\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \sin(nt) dt = -\frac{1}{n} b_n$$

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G(t) \sin(nt) dt = \quad \begin{matrix} u=G(t) \\ dv=\sin(nt) \end{matrix} \\ &= \left[-\frac{1}{n\pi} G(t) \cos(nt) \right]_{t=0}^{t=2\pi} + \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{n} a_n \end{aligned}$$

Por tanto, comparando con F ,

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x m dt + \int_0^x g(t) dt = mx + G(x)$$

Por el Teorema de Fejér, como g es continua en \mathbb{R} y con periodo 2π , tenemos que las $\sigma_n^g(t)$ convergen uniformemente a $g(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. De este modo, al tener convergencia uniforme podemos intercambiar el límite con la integral:

$$G(x) = \int_0^x g(t) dt = \int_0^x \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^g(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x \sigma_n^g(t) dt$$

Sea $n \in \mathbb{N}$ cualquiera, $\sigma_n^g = \frac{1}{n} (s_1^g + \dots + s_n^g)$. Por haber escogido g y no f , tenemos que todas las s_k^g tienen su término independiente nulo.

4.2.15 Convergencia ante diferenciabilidad

Sea $f \in L_2([0, 2\pi], \mathbb{R})$ una función con periodo 2π en \mathbb{R} . Si f es diferenciable en x_0 ; entonces, su serie de Fourier converge en x_0 a $f(x_0)$.

Demostración: Sin demostración.

4.2.16 Convergencia ante C^2

Sea $f \in C^2(\mathbb{R})$ una función con periodo 2π . Entonces, la serie de Fourier de f converge uniformemente a $f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Esto a su vez implica que la serie de Fourier es derivable término a término.

Demostración: Sin demostración.