Álgebra Lineal y Geometría I

Apuntes elementales introductorios

Javier Ortín Rodenas

Estos apuntes han sido confeccionados por el alumno un año después de haber cursado la asignatura a la que hacen referencia, pero no recrean los apuntes originales del profesorado. Este documento ha sido escrito desde cero sin consultar el material del equipo docente y sirve como un ejercicio del autor para reflexionar sobre los conocimientos abordados entonces.

Contents

I Espacios vectoriales **3**

1. Cuerpos 3
   - 1.1 Definición de operación binaria interna 3
   - 1.2 Definición de cuerpo 3
   - 1.3 Números racionales 4
   - 1.4 Números naturales y enteros 5
   - 1.5 Conjuntos de matrices 5
   - 1.6 Proposición: Unicidad del elemento neutro 7
2. Introducción a los espacios vectoriales 8
   - 1.7 Definición de espacio vectorial 8
   - 1.8 Subespacios vectoriales 9
   - 1.9 Matrices como espacio vectorial 9
   - 1.10 Polinomios como espacio vectorial 10
   - 1.11 Funciones como espacio vectorial 11
   - 1.12 Subespacio intersección 12
   - 1.13 Subespacio suma 12
   - 1.14 Ejemplo de suma e intersección de polinomios 14
3. Sistemas de vectores 16
   - 1.15 Definición de sistema 16
   - 1.16 Sistemas libres y ligados 16
   - 1.17 Clausura de una familia, sistema generador 17
4. Bases y dimensiones 19
   - 1.18 Definición de base 19
   - 1.19 Tamaño de las bases 19
   - 1.20 Concepto de dimensión 20
   - 1.21 Base del espacio de polinomios 21
   - 1.22 Dimensión según cuerpo 21
   - 1.23 Dimensión máxima de un subespacio 22

I Espacios vectoriales

§1. Cuerpos

1.1 Definición de operación binaria interna

Sea K un conjunto no vacío, una operación binaria interna es una función que toma dos argumentos de entrada en K y tiene salida también en K. Es decir, diremos que $*$ es una operación binaria interna en K si puede ser definida como:

$$* : K \times K \longrightarrow K \qquad\qquad k_1, k_2 \rightsquigarrow k_1 * k_2$$

1.2 Definición de cuerpo

Sea K un conjunto no vacío. Sean $+$ (suma) y $\cdot *$ (multiplicación) dos operaciones binarias internas en K. Diremos que $(K, +, \cdot)$ tiene estructura de cuerpo si cumple todos los siguientes requisitos:

i) Existe un elemento neutro para la suma; es decir, al sumarlo a cualquier elemento de K no altera el resultado:

$$\exists\, 0_K \in K : k + 0_K = k \quad \forall k \in K$$

ii) Todo elemento de K tiene un opuesto para la suma:

$$\forall k \in K \quad \exists -k \in K \quad : \quad k + (-k) = 0_K$$

iii) Existe un elemento neutro para la multiplicación:

$$\exists\, 1_K \in K : k \cdot 1_K = k \quad \forall k \in K$$

iv) Para todo elemento de K salvo 0_K existe un inverso para la multiplicación:

$$\forall k \in K \backslash \{0_K\} \quad \exists\, k^{-1} : k \cdot k^{-1} = 1_K$$

v) La suma y la multiplicación son conmutativas:

$$\forall k_1, k_2 \in K \text{ se verifica:} \qquad k_1 + k_2 = k_2 + k_1 \qquad k_1 \cdot k_2 = k_2 \cdot k_1$$

vi) La multiplicación es distributiva respecto de la suma:

$$\forall k_1, k_2, k_3 \in K : \ \ k_1 \cdot (k_2 + k_3) = k_1 \cdot k_2 + k_1 \cdot k_3$$

En vista de esta definición, es claro que $(\mathbb{R}, +, \cdot\,)$ forma un cuerpo para la suma y multiplicación usuales para los números reales. Estas mismas operaciones definen también un cuerpo para los números complejos $\mathbb{C}$. Veamos algunos ejemplos y contraejemplos de esta definición.

1.3 Números racionales

Consideramos la suma y el producto usual en el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$. Cabe preguntarse si tiene estructura de cuerpo. Veamos que en efecto es así:

Por definición, $\mathbb{Q}$ está formado por divisiones de números enteros, luego podemos expresarlo de la siguiente forma:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \right\}$$

Sea $a \in \mathbb{Q}$ cualquiera, podemos reescribir $a = \frac{p}{q}$ para $p, q \in \mathbb{Z}$. Para hallar el opuesto a a basta tomar $-a = \frac{-p}{q}$ pues se cumple:

$$a + (-a) = \frac{p}{q} + \frac{-p}{q} = \frac{p-p}{q} = 0$$

Además, es claro que $-a \in \mathbb{Q}$ pues se cumple:

$$a = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \to p, q \in \mathbb{Z} \Rightarrow -p, q \in \mathbb{Z} \Rightarrow -a = \frac{-p}{q} \in \mathbb{Q}$$

Supongamos ahora que $a \neq 0$; de este modo, $p \neq 0$. Así, bastaría tomar $a^{-1} = \frac{q}{p}$ inverso de a bien definido.

$$a \cdot a^{-1} = \frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p} = \frac{p \cdot q}{p \cdot q} = 1 \qquad \text{Es en efecto su inverso}$$

Además, al ser a un número racional, p y q han de ser números enteros luego a^{-1} ha de ser también racional por definición.

Por todo lo anterior, $\mathbb{Q}$ cuenta con opuestos e inversos dentro del propio conjunto. La conmutatividad y la distributivad son propiedades triviales del producto y la suma usual. Concluimos que tiene estructura de cuerpo.

1.4 Números naturales y enteros

Los números naturales no forman un cuerpo, pues no tienen opuesto para la suma. Por ejemplo, el opuesto del natural 5 es el número -5, que no pertenece a $\mathbb{N}$.

Aunque sí existen los opuestos para la suma en $\mathbb{Z}$, no es posible hallar inversos para el producto usual. Por ejemplo, el inverso del entero 2 es $\frac{1}{2}$, que no pertenece al conjunto de los números enteros.

1.5 Conjuntos de matrices

Ejercicio: Halla un conjunto de matrices que tenga estructura de cuerpo

El conjunto de matrices cualesquiera de números reales no es un cuerpo, pues no es posible sumar matrices de distinta dimensión (entendiendo por suma de matrices la suma término a término). Por tanto, si buscamos encontrar un conjunto de matrices que sí sea un cuerpo va a ser necesario considerar un conjunto en el que todas ellas tengan una misma dimensión dada.

No obstante, esto no es suficiente para que el conjunto sea un cuerpo, pues la multiplicación usual de matrices exige que el número de columnas de la primera matriz sea igual al número de columnas de la segunda. Al imponer también esta condición, es claro que el conjunto de matrices que buscamos ha de ser (como máximo) el de las matrices cuadradas de un cierto tamaño cualquiera.

Sea $n \in \mathbb{N}$ cualquiera, introducimos la siguiente notación:

$$M_n(\mathbb{R}) = \{A : A \text{ es una matriz } n \times n \text{ con coeficientes en } \mathbb{R}\}$$

Este conjunto no tiene estructura de cuerpo pues no todas las matrices cuadradas son invertibles. Para que así fuera, tendríamos que exigir que fuesen invertibles; es decir, que tengan determinante no nulo. Nótese que es necesario hacer una excepción para la matriz nula y poder tener así un elemento neutro de la suma.

Incluso habiendo exigido todas estas restricciones contamos aún con problemas. La multiplicación de matrices puede no ser conmutativa. Veamos un contraejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Un ejemplo de matrices que conmutan y son cerradas para el producto y la suma son las matrices diagonales. No obstante, si queremos que el conjunto tenga también determinante no nulo pueden ocurrir complicaciones:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las dos matrices sumandos tienen determinante no nulo, pero no es el caso de la tercera. Esto ocurre al aparecer filas nulas en un resultado que no es la matriz nula (elemento neutro de la suma). Para solventar este problema, podemos exigir que todos los escalares de la diagonal deban de valer lo mismo. De este modo, si apareciese alguna fila nula al sumar o multiplicar matrices, el resultado ha de ser necesariamente la matriz nula (que sí está "permitida").

Por todo lo anterior, concluimos que el conjunto de matrices diagonales $n \times n$ con coeficientes reales idénticos tiene estructura de cuerpo:

$$\{\lambda\,\mathrm{Id}_n : \ \lambda \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} \quad : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

De hecho, como hemos comprobado anteriormente que $\mathbb{Q}$ es un cuerpo, podemos considerar también las matrices con coeficientes diagonales idénticos en $\mathbb{Q}$ (o en cualquier otro cuerpo K).

1.6 Proposición: Unicidad del elemento neutro

Sea $(K, +, \cdot\,)$ un cuerpo cualquiera. Los elementos neutros 0_K y 1_K son únicos.

Demostración: Supongamos que existe más de uno para ver que son iguales

Veamos que el elemeneto neutro de la suma es único (el procedimiento para la multiplicación es análogo). Supongamos que existen dos elementos neutros de la suma en K: 0_k y $\hat{0}_K$.

Por ser $\hat{0}_K$ elemento neutro, $0_K = 0_K + \hat{0}_K$

Como 0_K es también elemento neutro, $\hat{0}_K = \hat{0}_K + 0_K$

Finalmente, como la suma ha de ser conmutativa pues K es un cuerpo, se tiene:

$$0_K = 0_K + \hat{0}_K = \hat{0}_K + 0_K = \hat{0}_K$$

Por todo lo anterior, concluimos que el elemento neutro es único.

§2. Introducción a los espacios vectoriales

1.7 Definición de espacio vectorial

El concepto de espacio vectorial depende del de cuerpo, pues todo espacio vectorial está asociado a un cuerpo determinado. Sea $(K, + \cdot)$ un cuerpo cualquiera, sea V un conjunto no vacío. Para que V sea un K-espacio vectorial ha de ser cerrado respecto de la suma de vectores y respecto del producto por escalares; es decir:

i) Cerrado para la suma de vectores: $\forall v, w \in V \ : v + w \in V$

ii) Cerrado para el producto por escalares: $\forall v \in V \ \forall \lambda \in K \ \lambda v \in V$

Como alternativa, basta comprobar únicamente que se cumpla la siguiente condición:

$\hat{i})$ $\forall v, w \in V \quad \forall \alpha, \beta \in K \ : \ \alpha v + \beta w \in V$

Finalmente, las operaciones de suma de vectores y producto por escalares han de cumplir los ocho siguientes axiomas:

E.1) La suma es conmutativa: $\quad v + w = w + v \quad \forall v, w \in V$

E.2) La suma es asociativa: $\quad u + (v + w) = (u + v) + w \quad \forall u, v, w \in V$

E.3) Existencia del elemento neutro: $\quad \exists 0_V \in V : v + 0_V = v \quad \forall v \in V$

E.4) Existencia de los opuestos: $\quad \forall v \in V \ \exists - v \in V : v + (-v) = 0_V$

E.5) El producto por escalares es asociativo: $\quad \alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha \cdot \beta) \cdot v \ \forall \alpha, \beta \in K \ \forall v \in V$

E.6) Elemento neutro del producto por escalares: $\quad 1_K v = v \ \ \forall v \in V$

E.7) Distributividad respecto de la suma vectorial:
$\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w \ \ \forall \lambda \in K \ \ \forall v, w \in V$

E.8) Distributividad respecto de la suma escalar:
$(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v \ \ \forall \alpha, \beta \in K \ \ \forall v \in V$

En los ejercicios prácticos de esta asignatura los ocho axiomas suelen cumplirse trivialmente, por lo que basta comprobar que V sea cerrado para la suma y para el producto por escalares, además de ser un conjunto no vacío.

Nótese que con los contenidos vistos hasta ahora los vectores no se multiplican entre sí, sino que únicamente se suman vectores cuantificados por escalares (estos últimos actúan como "pesos" o "coeficientes" de los primeros).

Por las definiciones de cuerpo y de espacio vectorial es evidente que todo cuerpo es un espacio vectorial sobre sí mismo. Veamos otros ejemplos no tan triviales.

1.8 Subespacios vectoriales

Sea K un cuerpo, sea V un K-espacio vectorial, sea $W \subseteq V$ con $0_V \in W$. Diremos que W es un subespacio vectorial de V si se cumple:

i) $v + w \in W \quad \forall v, w \in W$

ii) $\lambda v \in W \quad \forall \lambda \in K, \ \forall v \in W$

O alternativamente, si se cumple:

$\hat{i}$) $\alpha v + \beta w \in W \quad \forall \alpha, \beta \in K, \ \forall v, w \in W$

En tal caso, W es un K-espacio vectorial contenido en V, y se denota $W < V$.

1.9 Matrices como espacio vectorial

Sea K un cuerpo, sean $n, m \in \mathbb{N}$ cualesquiera, el conjunto de matrices $n \times m$ con coeficientes en K es un K-espacio vectorial. Introducimos la siguiente notación:

$$M_{n,m}(K) = \{A : A \text{ es un matriz } n \times m \text{ con coeficientes en } K\}$$

En este caso, los escalares serían los elementos de K, mientras que los vectores serían las matrices de $M_{n,m}(K)$. Veamos que es, en efecto, un espacio vectorial.

En primer lugar, consideramos la suma de matrices como la suma término a término. Al haber fijado la dimensión $n \times m$, esta operación está bien definida. Además, la suma de matrices $n \times m$ da luegar también a una matriz $n \times m$. Finalmente, como K es un cuerpo, la suma de elementos de K es también un elemento de K. Por tanto, el resultado de sumar dos matrices de $M_{n,m}(K)$ es también una matriz de $M_{n,m}(K)$.

De manera simlar, el producto por escalares no afecta a la dimensión del resultado, y al ser K un cuerpo el producto es una operación binaria interna. De este modo, $M_{n,m}(K)$ es cerrado respecto del producto por escalares de K. Por todo lo anterior, $M_{n,m}(K)$ es un K-espacio vectorial.

1.10 Polinomios como espacio vectorial

Sea K un cuerpo, sea $K[X]$ el conjunto de polinomios en la variable X con coeficientes en K, veamos que es un K-espacio vectorial. Sean $p, q \in P[K]$, supongamos que p es de grado n y q de grado m para ciertos $n, m \in \mathbb{N}$. Por tanto, podemos expresarlos de la siguiente forma para ciertos $a_i, b_i \in K$:

$$p = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$$
$$q = b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + \ldots + b_1 X + b_0$$

En este caso, realizaremos una única comprobación. Sean $\alpha, \beta \in K$, definimos $N := \max\{n, m\}$. De este modo:

$$\begin{aligned} \alpha p + \beta q = (\alpha a_N + \beta b_N) X^N + \ldots (\alpha a_1 + \beta b_1) X + (\alpha a_0 + \beta b_0) = \\ = c_N X^N + \ldots + c_1 X + c_0 \quad \text{para } c_i = \alpha a_i + \beta b_i \end{aligned}$$

Como K es un cuerpo y $\alpha, \beta, a_i, b_i \in K$, los c_i también pertenecen a K. Por tanto, tenemos que $\alpha p + \beta q \in K[X]$ luego $K[X]$ es un K-espacio vectorial. Cabe preguntarse si existen subconjuntos de $K[X]$ que sean también espacios vectoriales (es decir, que sean subespacios vectoriales de $K[X]$).

Sea $n \in \mathbb{N}$ cualquiera, consideremos el conjunto de polinomios de $K[X]$ de grado mayor o igual que n. Este conjunto no es un espacio vectorial, pues no es cerrado para la suma. Por ejemplo, para $n = 3$ y $K = \mathbb{R}$ tenemos:

$$(X^4 + 2X^3 + 3X) + (-X^4 - 2X^3 + 2) = 3X + 2 \quad \text{que tiene grado } 1 < 3$$

Además, este conjunto no cumple con el axioma E.3) de la definición de espacio vectorial, pues el elemento neutro de la suma es el polinomio nulo, que no pertenece a este conjunto al tener grado 0.

El conjunto de polinomios de $K[X]$ con grado menor o igual que n sí es un espacio vectorial, y se denota $K_n[X]$. La demostración es idéntica a la vista para $K[X]$ notando que los polinomios p y q serían ambos de grado menor o igual que n luego bastaría tomar $N = n$.

1.11 Funciones como espacio vectorial

Sea A un conjunto no vacío cualquiera. Sea K un cuerpo, sea V un K-espacio vectorial. Consideramos el conjunto de funciones $\{f : A \longrightarrow V\}$.Veamos que es un K-espacio vectorial.

La suma de dos funciones $f, g : A \longrightarrow V$ es también una función de este conjunto, pues se cumple:

$$\forall x \in A : f(x), g(x) \in V \Rightarrow f(x) + g(x) = (f + g)(x) \in V$$

Del mismo modo, sea $\lambda \in K$ cualquiera, por ser V un K-espacio vectorial se tiene:

$$\forall x \in A : f(x) \in A \Rightarrow \lambda\, f(x) = (\lambda f)(x) \in V$$

Es claro que es un espacio vectorial al ser cerrado para la suma y para el producto por escalares. Además, el subconjunto $\{f : A \longrightarrow V \text{ tal que } f \text{ es continua}\}$ es también un espacio vectorial, pues la suma de dos funciones continuas es también una función continua, y lo mismo ocurre con el producto por escalares (sería un subespacio vectorial del caso anterior).

1.12 Subespacio intersección

Sea K un cuerpo, sea V un K-espacio vectorial. Sean U, W subespacios vectoriales de V, definmos el subespacio intersección de U y W, $U \cap W$ como:

$$U \cap W := \{v \in V : v \in U \text{ y } v \in W\}$$

Veamos que el subespacio intersección $U \cap W$ es el mayor subespacio contenido simultáneamente en V y W.

<u>Demostración:</u> En primer lugar, veamos que es un subespacio vectorial.

Al ser U, W subespacios de V, tenemos $0_V \in U$, $0_V \in W$ luego $0_V \in U \cap W$. Veamos que es un subespacio por la definición. Para ello, comprobemos que es cerrado para la suma de vectores. Sean $v, w \in U \cap W$, al ser U y W subespacios vectoriales de V:

$$v, w \in U \Rightarrow v + w \in U \qquad\qquad v, w \in W \Rightarrow v + w \in W$$

Por tanto, es claro que $v+w \in U \cap W$. Veamos ahora que es cerrado para el producto por escalares. Del mismo modo, sea $\lambda \in K$ sea $v \in U \cap W$, se tiene:

$$v \in U \Rightarrow \lambda v \in U \qquad\qquad v \in W \Rightarrow \lambda v \in W$$

Hemos comprobado que $U \cap W$ es un subespacio vectorial de U y de W (luego de V también). Queda ver que es el mayor subespacio que contiene a U y a W.

Supongamos que existe T subespacio de V tal que $T \subseteq U, T \subseteq W$. Veamos que $T \subseteq U \cap W$. Sea $t \in T$ cualquiera, se tiene $t \in U$, $t \in W$. Por tanto, ha de cumplirse $t \in U \cap W$; luego $T \subseteq U \cap W$.

1.13 Subespacio suma

Sea K un cuerpo, sea V un K-espacio vectorial. Sean U, W subespacios de V. Definimos el subespacio suma de U y W, $U + W$ como:

$$U + w := \{u + w : u \in U, w \in W\}$$

Veamos que $U + W$ es el menor subespacio de V que contiene a U y a W.
Demostración: En primer lugar, veamos que es un subespacio vectorial.

Al ser U, W subespacios vectoriales tenemos $0_V \in U$, $0_V \in W$, luego basta tomar $u = 0_V = w$ para ver $u+v = 0_V + 0_V \in U + W$. Veamos ahora que es cerrado para la suma de vectores. Sean $v_1, v_2 \in U + W$, por definición, podemos expresarlos como:

$$v_1 = u_1 + w_1 \qquad v_2 = u_2 + w_2 \qquad \text{para ciertos } u_1, u_2 \in U \;\; w_1, w_2 \in W$$

Al ser U y W subespacios de V, se tiene:

$$u_1, u_2 \in U \Rightarrow u_1 + u_2 \in U \qquad w_1, w_2 \in U \Rightarrow w_1 + w_2 \in W$$

$$v_1 + v_2 = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2) \in U + W$$

Comprobemos que es cerrado para el producto por escalares. Sea $v = u+w \in U+W$ con $u \in U, w \in W$ cualquiera, sea $\lambda \in K$ cualquiera. Tenemos:

$$u \in U \Rightarrow \lambda u \in U \qquad w \in W \Rightarrow \lambda w \in W \qquad \lambda v = (\lambda u) + (\lambda w) \in U + W$$

Finalemnte, queda por ver que $U+W$ es el menor subespacio de V que contiene a U y a W. Supongamos T subespacio de V con $U \subseteq T$, $W \subseteq T$ para ver $U + W \subseteq T$. Sea $v \in U + W$ cualquiera, podemos escribirlo como $v = u + w$ para ciertos $u \in U$, $w \in W$. Por tanto, se tiene:

$$u \in U \subseteq T \Rightarrow u \in T \qquad w \in W \subseteq T \Rightarrow w \in T$$

Además, al ser T subespacio vectorial de V por hipótesis, ha de ser cerrado respecto de la suma de vectores. Por tanto, se cumple $v = u + w \in T$. Como el v elegido es arbitrario, concluimos que $U + W \subseteq T$.

1.14 Ejemplo de suma e intersección de polinomios

Considere el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}_3[X]$. Demuestre que los siguientes subconjuntos S y T son subespacios vectoriales. Halle una base de $T \cap S$ y otra de $T + S$.

$$S := \big\{p \in \mathbb{R}_2[X] : p(0) = 0\big\}$$
$$T := \big\{p \in \mathbb{R}_3[X] : \text{ los coeficientes de grado par de } p \text{ son nulos}\big\}$$

Solución: Veamos que son espacios vectoriales. En primer lugar, observemos que $0_V \in S, 0_V \in T$. Queda ver que ambos son cerrados respecto de la suma de vectores y respecto del producto por escalares. Comencemos por S.

Como al sustituir la variable X por 0 en un polinomio p cualquiera de $\mathbb{R}[X]$ los términos de grado mayor que cero se anulan, el resultado de $p(0)$ será el término independiente del polinomio p. Como consecuencia, los polinomios de S seran aquellos polinomios con grado menor o igual a dos cuyo término independiente es nulo. Así, sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sean $p, q \in S$, podemos expresar la siguiente suma como:

$$\alpha p + \beta q = \alpha\left(aX^2 + bX\right) + \beta\left(cX^2 + dX\right) = (\alpha a + \beta c)X^2 + (\alpha c + \beta d)X$$

Es evidente que $\big(\alpha p + \beta q\big)(0) = 0$ y que tal polinomio tiene grado menor o igual que 2, luego S es un espacio vectorial. Pasemos ahora a T.

Sean $p, q \in T$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, por definición de T existen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que:

$$p = aX^3 + 0X^2 + bX + 0 \qquad\qquad q = cX^3 + 0X^2 + dX + 0$$

Por tanto, podemos comprobar que T es un espacio vectorial al verificar:

$$\alpha p + \beta q = (a + c)X^3 + 0X^2 + (b + d)X + 0 \in T$$

Veamos ahora qué expresión tiene $T \cap S$. Para ello, veamos qué expresión tendría un elemento común a ambos subespacios. En primer lugar, al ser parte de S, sus términos de grado 3 y 0 han de ser necesariamente nulos. Además, al pertenecer a T

tendría que anularse también su término de grado 2. Como S y T son subespacios de $\mathbb{R}_3[X]$, esto solo nos deja el término de grado 1. Por tanto, la familia $\{X\}$ es sistema generador de $S \cap T$. Al estar formada únicamente por un único vector no nulo es trivialmente libre, luego es una base.

Queda hallar una base de $S+T$. Ya hemos razonado qué expresión podrían tener los elementos de cada uno de ellos. Veamos cómo podría ser la suma de ambos. Sean $p \in S$, $q \in T$, podemos escribirlos como:

$$p = aX^2 + b^X \qquad q = cX^3 + dX \qquad \text{para ciertos } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

La expresión de su suma será por tanto:

$$p + q = cX^3 + aX^2 + (b+d)X = \alpha X^3 + \beta X^2 + \gamma X$$

En vista de la última expresión, es claro que la familia $\{X^3, X^2, X\}$ genera el subespacio $S+T$ entero. Además, es evidente que es libre (de hecho es un subconjunto de la base canónica de $\mathbb{R}_3[X]$ luego ha de serlo). Por tanto, este sistema es una base de $S+T$.

§3. Sistemas de vectores

1.15 Definición de sistema

A partir de ahora nos referiremos a los conjuntos de vectores de un espacio vectorial como "familias" o "sistemas" de vectores.

1.16 Sistemas libres y ligados

Diremos que un sistema de vectores es "libre" si todos los vectores que lo forman son linealmente independientes entre sí. Esto quiere decir que ningún vector del sistema puede ser expresado como combinación lineal de los demás.

Por el contrario, si el sistema no es libre diremos que es "ligado". En tal caso, (negando la definición de sistema libre) existe al menos un vector del sistema que puede ser expresado como combinación lineal de los demás.

Sea K un cuerpo, sea V un K-espacio vectorial, sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ un sistema de vectores de V. Supongamos que tal sistema no es libre. Así, existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ para el que se cumple:

$$v_i = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_n v_n \tag{1}$$

Nótese que si $v_i \neq 0_V$ necesariamente ha de cumplirse $\lambda_j \neq 0$ para cierto índice $j \in \{1, \ldots, n\} \backslash \{i\}$. De este modo, despejando:

$$0_V = v_i + (-v_i) = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1} - v_i + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_n v_n \tag{2}$$

En el caso $v_i \neq 0_V$ tenemos que es posible escribir el 0_V como una combinación lineal del sistema donde haya al menos un coeficiente no nulo (sería el λ_j mencionado anteriormente). Podemos pasar de la ecuación (1) a la (2) y viceversa sin más que despejar. Por tanto, si podemos expresar el 0_V como combinación lineal del sistema con al menos un coeficiente no nulo sera porque hay un vector no nulo que es combinación de los demás (las implicaciones son bidireccionales).

Sea $v \in V$ cualquiera, veamos que $0_K v = 0_V$:

$$0_V = v + (-v) = 1_K v + 1_K(-v) = 1_K v + (-1_K)v = (1_K - 1_K)v = 0_K v$$

Por tanto, cualquier sistema con el 0_V en él va a ser ligado, pues siempre va a poder ser expresado como combinación lineal del resto de vectores al tomar 0_K como coeficientes para todos los escalares. El sistema $\{0_V\}$ también se considera ligado.

Por todo lo anterior, concluimos que las dos siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es un sistema libre

ii) $0_V = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \Rightarrow \lambda_i = 0_K \;\; \forall i \in \{1, \ldots, n\}$

1.17 Clausura de una familia, sistema generador

Sea K un cuerpo, sea V un K-espacio vectorial. Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ un sistema de vectores de V. Se define la clausura de $\{v_1, \ldots, v_n\}$ en K como:

$$K\langle v_1, \ldots, v_n \rangle := \left\{ \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n : \lambda_i \in K \;\; \forall i \in \{1, \ldots, n\} \right\}$$

Diremos que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es sistema generador de V si su clausura es el propio V. Además, veamos que la clausura de un sistema es un espacio vectorial. De hecho, es el menor subespacio vectorial que contiene a dicha familia.

Demostración:

En primer lugar, veamos que es un espacio vectorial. Sean $u, w \in K\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$, podemos escribirlos de la siguiente forma:

$$u = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \qquad\qquad w = \gamma_1 v_1 + \ldots + \gamma_n v_n$$

Sean $\alpha, \beta \in K$, veamos que $\alpha u + \beta w \in K\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$:

$$\begin{aligned} \alpha u + \beta w &= \alpha\lambda_1 v_1 + \ldots + \alpha\lambda_n v_n + \beta\gamma_1 v_1 + \ldots + \beta\gamma_n v_n = \\ &= (\alpha\lambda_1 + \beta\gamma_1)v_1 + \ldots + (\alpha\lambda_n + \beta\gamma_n)v_n \end{aligned}$$

Al ser K un cuerpo, como $\alpha, \beta, \lambda_i, \beta_i \in K \Rightarrow (\alpha\lambda_i + \beta\gamma_i) \in K \ \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$. De este modo, es claro que $\alpha u + \beta w \in K \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$, luego la clausura es un espacio vectorial. Queda ver que es el menor espacio vectorial que contiene a $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Supongamos que exite T un K-espacio vectorial tal que $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq T$. Veamos que la clausura de los v_i está contenida en T. Sea $u \in K \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ cualquiera, podemos expresarlo como $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$.

Como T es un espacio vectorial y $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq T$ por hipótesis, tenemos que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene $\lambda_i v_i \in T$ (pues es cerrado respecto del producto por escalares). Además, como es cerrado respecto de la suma de vectores se tiene $u = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_v \in T$. Hemos llegado al resultado que buscábamos.

§4. Bases y dimensiones

1.18 Definición de base

Sea K un cuerpo, sea V un K-espacio vectorial. Diremos que una familia de vectores de V es una "base" de V si es simultáneamente un sistema generador y libre.

Cabe preguntarse qué propiedades tienen las bases. El objeto de esta sección es justificar por qué es tan importante el concepto de base en el algebra lineal.

1.19 Tamaño de las bases

Sea K un cuerpo, sea V un K-espacio vectorial, veamos que todas las bases de V tienen el mismo tamaño. Para ello, basta demostar el siguiente resultado. Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una familia libre de vectores, sea $\{w_1, \ldots, w_m\}$ un sistema generador de V; entonces, $n \leq m$.

<u>Demostración:</u> Veamos que es así por reducción al absurdo.

Supongamos $n > m$. Por ser $\{w_1, \ldots, w_m\}$ sistema generador de V, su clausura es el propio V. De este modo, $v_i \in K\langle w_1, \ldots, w_m\rangle \ \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$. En particualar, podemos escribir $v_1 = \lambda_1^1 w_1 + \ldots + \lambda_m^1 w_m$. Al ser la familia de los v_i libre por hipótesis, ninguno de ellos es el 0_V; por tanto, debe haber cierto $\lambda_j^1 \neq 0$. Al escoger este escalar no nulo podemos tomar su inverso y poder despejar de la siguiente forma:

$$w_j = (-\lambda_j^1)^{-1}\big(- v_1 + \lambda_1^1 w_1 + \ldots + \lambda_{j-1}^1 w_{j-1} + \lambda_{j+1}^1 w_{j+1} + \ldots + \lambda_m^1 w_m\big)$$

En vista de esta expresión, es claro que w_j pertenece a la clausura de la familia $\{v_1\} \cup \big\{w_i : i \in \{1, \ldots, m\} \backslash \{j\}\big\}$. Por tanto, la clausura de w_j estará contenida en la de esta familia. Además, por definición de clausura, es claro que:

$$K\langle F\rangle \subseteq K\langle G\rangle \Rightarrow K\langle F \cup H\rangle \subseteq K\langle G \cup H\rangle \ \text{ para } F, G, H \text{ sistemas de vectores}$$

Aplicándolo a este caso en particular, tenemos que:

$$V = K\langle w_1, \dots, w_m \rangle \subseteq K\langle v_1, w_1, \dots w_{j-1}, w_{j+1}, \dots, w_m \rangle$$

Pero al ser estar este último sistema de vectores contenido en el espacio vectorial V, su clausura ha de estar contenida en el propio V. Por tanto, $\{v_1, w_1, \dots w_{j-1}, w_{j+1}, \dots, w_m\}$ es sistema generador de V.

Observemos que este procedimiento que hemos realizado con v_1 puede ser repetido para $v_2, \dots, v_m$. Como $v_2 \in V = K\langle v_1, w_1, \dots w_{j-1}, w_{j+1}, \dots, w_m \rangle$, podemos expresarlo como combinación lineal de vectores de este sistema. Además, recordemos que $\{v_i\}_{i=1}^n$ es una familia de vectores libres, luego $v_2 \neq 0_V$. Por tanto, al menos uno de los escalares de la combinación lineal va a ser no nulo. Más aún, podemos asegurar que será un escalar asociado a cierto w_k (con $k \in \{1, \dots, m\} \backslash \{j\}$ fijo), pues de lo contrario $\{v_1, v_2\}$ no sería un sistema libre. Al reemplazar w_k por v_2 seguimos teniendo un sistema generador de V (tal y como hicimos con v_1).

Reiterando, llegamos a que $\{v_1, \dots, v_m\}$ es un sistema generador de V. Como hemos supuesto (hipótesis del absurdo) $n > m$, tenemos que los vectores $\{v_{m+1}, \dots, v_n\}$ no pertenecen a la clausura de $\{v_1, \dots, v_m\}$, pues de lo contrario $\{v_1, \dots, v_n\}$ no sería un sistema libre. Esto supone una contradicción, pues $\{v_1, \dots, v_m\}$ es un sistema generador, luego necesariamente ha de cumplirse:

$$\{v_{m+1}, \dots, v_n\} \subseteq K\langle v_1, \dots, v_m \rangle = V \Rightarrow \{v_1, \dots, v_n\} \text{ no es libre}$$

Se contradice la hipótesis, por lo que hemos llegado a una contradicción. Por todo lo anterior, concluimos que $n < m$.

1.20 Concepto de dimensión

En vista del resultado anterior, es evidente que todas las bases de un determinado espacio vectorial han de tener el mismo número de vectores. Es precisamente este número a lo que denominamos "dimensión" de un espacio vectorial.

En esta asignatura trabajaremos con espacios vectoriales de dimensión finita, aunque no todos son así. Veamos un ejemplo de espacio vectorial de dimensión infinita para ilustrar por qué podría ocurrir esto (no se ahondará en espacios vectoriales de dimensión infinita más allá de este caso).

1.21 Base del espacio de polinomios

Sea K un cuerpo, ya hemos comprobado que los polinomios en la variable X con coeficientes en K forman un K-espacio vectorial. Es sencillo ver que podemos crear un sistema libre finito arbitrariamente grande, pero que no llegue a ser nunca sistema generador de $K[X]$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ cualquiera pero fijo, podemos tomar el sistema $\{1, X, X^2, \dots, X^n\}$. Es evidente que este sistema es libre, pues ningún vector de él puede ser expresado como combinación lineal del resto. No obstante, no es sistema generador de $K[X]$, pues el polinomio X^{n+1} no pertenece a la clausura de esta familia, pero sí a $K[X]$. Finalemnte, como el n escogido es arbitrario, podemos hacerlo tan grande como queramos, pero la familia resultante no será nunca un sistema generador.

Al restringirnos a $K_n[X]$ sí es posible dar una base, pues bastaría considerar el sistema $\{1, X, \dots, X^n\}$. Como consecuencia, $K_n[X]$ es un K-espacio vectorial de dimensión $n + 1$.

1.22 Dimensión según cuerpo

Sean dos cuerpos K_1 y K_2, sea V un conjunto que tiene estructura tanto de K_1-espacio vectorial como de K_2-espacio vectorial. Podríamos pensar que la dimensión de V tendría que ser la misma en ambos casos, pero no tiene por qué ser así; es decir, la dimensión está ligada al cuerpo asociado. Veamos un ejemplo para ilustrar esta situación.

Los números complejos se definen como $\mathbb{C} := \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$. En vista de esta definición, es claro que $\mathbb{R}\langle 1, i\rangle = \mathbb{C}$, y como $\{1, i\}$ es un sistema libre, concluimos que es base de $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial (su dimensión sería 2).

No obstante, tenemos que $\mathbb{C}\langle 1\rangle = \mathbb{C}$, luego $\{1\}$ es base de $\mathbb{C}$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial (su dimensión en este caso sería 1).

En general, todo cuerpo K es un K-espacio vectorial de dimensión 1, pues basta tomar $\{1_K\}$ como base. No obstante, podría ser posible expresar K como espacio vectorial según otro cuerpo como es el caso de los complejos según los reales.

1.23 Dimensión máxima de un subespacio

Sea K un cuerpo, sea V un K-espacio vectorial. Sea S un subespacio de V tal que $\dim S = \dim V = n$. Entonces, $S = V$

Demostración:

Como S es un subespacio de V, se cumple $S \subseteq V$ trivialmente. Queda ver $V \subseteq S$. Sea $B_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V, sea $B_S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ una base de S. Como $s_1 \in K\langle v_1, \ldots, v_n\rangle = V$, podemos expresar s_1 como combinación lineal de los vectores de la base de V. Al ser B_S un sistema libre, $s_1 \neq 0_V$ luego:

$$s_1 = \lambda_1^1 v_1 + \ldots + \lambda_{j1}^1 v_{j1} + \ldots + \lambda_n^1 v_n \quad \text{para } \lambda_{j1} \neq 0_K$$

De este modo, esta bien definido el inverso de λ_{j1} y podemos despejar como sigue:

$$v_{j1} = (\lambda_{j1}^1)^{-1}\big(\lambda_1^1 v_1 + \ldots - s_1 \ldots + \lambda_n^1 v_n\big)$$

De este modo, es claro que $v_{j1} \in K\left\langle s_1, v_1, \overset{\neq j1}{\ldots}, v_n\right\rangle$ luego la clausura de este sistema ha de ser V. Siguiendo este mismo razonamiento para s_2, tenemos:

$$s_2 = \lambda_{j1}^2 s_1 + \lambda_1^2 v_1 + \overset{\neq j1}{\ldots} + \lambda_{j2}^2 v_{j2} + \overset{\neq j1}{\ldots} + \lambda_n^2 v_n \quad \text{para } \lambda_{j2} \neq 0_K$$

Por tanto, como en el caso anterior, se tiene:

$$v_{j_2} = (\lambda_{j_2}^2)^{-1}\big(-s_2 + \lambda_{j1}^2 s_1 + \lambda_1^2 v_1 + \overset{\neq j_1, \neq j_2}{\ldots} + \lambda_{j2}^2 v_{j2} + \lambda_n^2 v_n\big)$$

Por tanto, se cumple que $v_{j_2} \in K\left\langle s_1, s_2, v_1, \overset{\neq j_1, \neq j_2}{\ldots}, v_n\right\rangle$. Reiterando, concluimos que la clausura de B_S es la misma que la de B_V; es decir, V. De este modo, $V \subseteq S$ y por ello $S = V$.