Análisis Matemático III

Javier Ortín Rodenas

Curso 2025-2026

Contenidos

II Integral de Lebesgue

§1. Integral de Lebesgue para funciones no negativas

2.1.1 Convenio $0 \cdot \infty$

Consideramos $0 \cdot \infty = 0$ siempre y cuando al menos uno de los dos factores represente la medida de algún conjunto.

2.1.2 Definición de integral de funciones simples

Dado un espacio de medida (X, Σ, μ) y una función simple medible

$$s : X \longrightarrow [0, +\infty) \qquad \text{con expresión canónica } s = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_{A_i}$$

Definimos la integral de Lebesgue de s sobre X como el número:

$$\int_X s \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \mu(A_i)$$

<u>**Nota:**</u> Implícitamente, ya está definida la integral de s sobre $\Sigma(E)$ $\forall\, E \in \Sigma$:

$$\int_E s \, d\mu = \int_X s_{|E} \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \mu(E \cap A_i)$$

2.1.3 Linealidad del integrando

Dado un espacio de medida (X, Σ, μ). Sea $s : X \longrightarrow [0, \infty)$ una función simple y medible. Sean $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ con $i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \varnothing$. Entonces, se cumple:

$$\int_{\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i} s\,d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} s\,d\mu$$

Demostración: Sea $s = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot X_{A_i}$ la expresión canónica de s. Entonces,

$$\int_{\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i} s\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \mu\big(A_i \cap \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_i \cap E_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_i \cdot \mu(A_i \cap E_j) \right) = \sum_{j=i}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \mu(A_i \cap E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} s\,d\mu$$

2.1.4 Linealidad parcial

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sean $s, t : X \longrightarrow [0, \infty)$ funciones simples y medibles. Entonces, se cumple:

$$\int_X s + t\,d\mu = \int_X s\,d\mu + \int_X t\,d\mu$$

Demostración: Sean sus expresiones canónicas las siguientes:

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \mu(A_i) \qquad\qquad t = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \cdot \mu(B_j)$$

Entonces, como $\{A_i\}_{i=1}^n$ y $\{B_j\}_{j=1}^m$ son recubrimientos disjuntos de X, se tiene:

$$\int_X s\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{m} \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}} \alpha_i \cdot \mu(A_i \cap B_j)$$

$$\int_X t\,d\mu = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}} \beta_j \cdot \mu(A_i \cap B_j)$$

Sumando ambas expresiones obtenemos:

$$\int_X s\,d\mu + \int_X t\,d\mu = \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}} (\alpha_i+\beta_j)\cdot\mu(A_i\cap B_j) =$$

$$= \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}} \int_{A_i\cap B_j} s+t\,d\mu = \int_X s+t\,d\mu$$

La última igualdad se deduce de la linealidad del integrando.

2.1.5 Monotonía de la integral simple

Sea (X,Σ,μ) un espacio de medida. Sean $s,t : X \longrightarrow [0,\infty)$ funciones medibles simples tales que $s(x)\leq t(x)\forall x\in X$. Entonces, se cumple:

$$\int_X s\,d\mu \leq \int_X t\,d\mu$$

Demostración: Sean sus expresiones canónicas: $s=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot X_{A_i}$ $\;t=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\cdot X_{B_j}$.

$$\int_X s\,d\mu = \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}} \alpha_i\mu(A_i\cap B_j) \qquad \int_X t\,d\mu = \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}} \beta_j\mu(A_i\cap B_j)$$

Por hipótesis, tenemos que $s(x)\leq t(x)$ para todo $x\in X$. De este modo; sean $i\in\{1,\dots,n\}, j\in\{1,\dots,m\}$ cualesquiera, tenemos que o bien $\alpha_i\leq\beta_j$ o bien $A_i\cap B_j=\varnothing\Rightarrow\mu(A_i\cap B_j)=0$. Por tanto, cada sumando del sumatorio de la izquierda va a ser menor o igual que el término de mismos índices del sumatorio de la derecha, hemos demostrado el resultado.

2.1.6 Linealidad de la integral simple por constantes

Sea (X,Σ,μ) un espacio de medida. Sea $s=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\cdot X_{A_i}$ una función simple, medible y no negativa. Entonces:

$$\int_X c\cdot s\,d\mu = c\cdot\int_X s\,d\mu \quad \forall c\in\mathbb{R}$$

Demostración: Distinguimos dos casos:

- Si $c = 0$, entonces $s \cdot c \equiv 0$ y se cumple:

$$\int_X c \cdot s \, d\mu = \int_X 0 \, d\mu = 0 \cdot \mu(X) = 0 = 0 \cdot \int_X s \, d\mu$$

- Si $c \neq 0$, entonces:

$$\int_X c \cdot s \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} c \cdot \lambda_i \cdot X_{a_i} = c \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \mu(X_{A_i}) = c \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \mu(A_i) = c \cdot \int_X s \, d\mu$$

2.1.7 Integral de funciones medibles no negativas

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sea $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ medible. Se define la integral de Lebesgue de f sobre X como:

$$\int_X f \, d\mu = \sup \left\{ \int_X s \, d\mu \quad \text{con } 0 \leq s \leq s, \ s \text{ función simple medible} \right\} = \sup \mathcal{S}_X(f)$$

Nótese que el conjunto anterior no es vacío, pues $s \equiv 0$ está en él. Además, se puede extender la definición anterior a cualquier subconjunto medible de X.

2.1.8 Ejemplos de integrales

i) Función de Dirichlet: $X_{\mathbb{Q}}$.
Consideramos el espacio de medida $\big([0,1], \mathfrak{M}_1([0,1]), \mu_1\big)$. Esta función no es integrable en el sentido de Riemann, pues las sumas inferiores son siempre nulas y las superiores toman valor 1 (se debe a la densidad de los racionales y los irracionales). Veamos que $X_{\mathbb{Q}}$ sí es integrable en el sentido de Lebesgue.

Tenemos que $X_{\mathbb{Q}}$ es una función simple, pues toma el valor 1 en $[0,1] \cap \mathbb{Q}$, que

es numerable, y el valor 0 en $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$, que es medible al ser el complementario del conjunto anterior en este espacio de medida. Su integral viene dada por:

$$\int_{[0,1]} X_{\mathbb{Q}} \, d\mu = 1 \cdot \mu([0,1] \cap \mathbb{Q}) + 0 \cdot \mu([0,1] \setminus \mathbb{Q}) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

$ii)$ Consideramos el mismo espacio de medida que en el caso anterior. Veamos que la función de Thomae es integrable. Se define como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \cup \{0\} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ para } p, q \text{ naturales primos entre sí} \end{cases}$$

Sabemos por Análisis Matemático II que esta función es integrable-Riemann en $[0,1]$ con valor de su integral igual a 0. Veamos que ocurre lo mismo con la integral de Lebesgue. Sea s una función simple medible tal que $0 \leq s \leq f$. Se cumple $M := \max s([0,1]) \leq 1$. Los puntos donde s toma valores positivos son a lo sumo numerables, pues se cumple:

$$f^{-1}\big((0,+\infty)\big) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{i=1}^{n} \frac{i}{n}$$

Los puntos donde s toma valores positivos han de estar contenidos en el conjunto anterior, que es numerable y tiene por tanto medida nula. De este modo, tenemos:

$$0 \leq \int_{[0,1]} s\, d\mu = 0\mu\big(s^{-1}(\{0\})\big) + M \cdot \mu\Big(s^{-1}\big((0,M]\big)\Big) = 0$$

2.1.9 Propiedades básicas

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sean $f, g : X \leftarrow [0, \infty]$ funciones medibles. Sean $E, F \in \Sigma$. Sea $c \in [0, +\infty)$. Se cumplen los siguientes enunciados:

i) $0 \leq f \leq g \Rightarrow \int_X f\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu$

ii) $\int_X c\dot{f}\, d\mu = c \cdot \int_X f\, d\mu$

iii) $f \equiv 0 \Rightarrow \int_X f\, d\mu = 0$

iv) $\mu(E) = 0 \leq \int_E f\, d\mu = 0$

v) Si $E \subseteq F$; entonces, $\int_E f\, d\mu = \int_D f \cdot X_E\, d\mu$ y $\int_E f\, d\mu \leq \int_D f\, d\mu$

<u>**Demostración:**</u>

$i)$ Sea $s : X \longrightarrow [0, +\infty)$ una función simple medible tal que $s \leq f$. Entonces se cumple $s \leq g$. Por tanto, siguiendo la notación del resultado 2.1.7, tenemos que $\mathcal{S}_X(f) \subseteq \mathcal{S}_X(g)$ luego ha de cumplirse:

$$\int_X f\, d\mu = \sup \mathcal{S}_X(f) \leq \sup \mathcal{S}_X(g) = \int_X g\, d\mu$$

ii) Distinguimos dos casos: En primer lugar, si $c = 0$ se tiene:

$$\int_X c \cdot f\, d\mu = \int_X 0\, d\mu = 0 = 0 \cdot \int_X f\, d\mu$$

Si $c \in (0, +\infty)$; entonces, tenemos:

$$c \cdot \int_X f\, d\mu = c \cdot \sup \left\{ \int_X s\, d\mu : \ 0 \leq s \leq f \quad \text{con } s \text{ función medible simple} \right\} = \sup c \cdot \mathcal{S}_X(f)$$

$$\int_X c \cdot f\, d\mu \sup \left\{ \int_X s\, d\mu : \ 0 \leq t \leq c \cdot f \quad \text{con } t \text{ función medible simple} \right\} = \sup \mathcal{S}_X(c \cdot f)$$

Al cumplirse $c \in (0, +\infty)$, tenemos que $0 \leq f \leq s \iff 0 \leq c \cdot s \leq c \cdot f$ luego las integrales han de coincidir.

iii iv) Trivial.

v) Comencemos por ver la primera parte. Sea una función simple y medible $s : F \longrightarrow [0, +\infty)$ tal que $s \leq f \cdot X_E$. Entonces se tiene $s_{|E}$ es simple también. Además, se cumple:

$$\int_F s\, d\mu = \int_E s_{|E}\, d\mu + \int_{F \setminus E} 0\, d\mu = \int_E s_{|E}\, d\mu$$

De manera similar, sea $t : E \longrightarrow [0, +\infty)$ simple tal que $t \leq f$, podemos extender t a F al considerar $\hat{t}(x) = t(x)$ si $x \in E$ ó 0 si $xF \setminus E$. La función resultante $\hat{t}$ es simple, medible y cumple $\hat{t} \leq f \cdot X_E$. De este modo,

$$\int_F \hat{t}\, d\mu = \int_{F \setminus E} 0\, d\mu + \int_E \hat{t}\, d\mu = \int_E t\, d\mu$$

Por tanto, se cumple $\mathcal{S}_E(f) = \mathcal{S}_F(f \cdot X_E)$ luego las integrales coinciden.

Este razonamiento de extender t a $\hat{t}$ demuestra también que $\mathcal{S}_E(f) \subseteq \mathcal{S}_F(f)$ luego por definición de supremo, se tiene:

$$\int_E f\,d\mu = \sup \mathcal{S}_E(f) \leq \sup \mathcal{S}_F(f) = \int_F f\,d\mu$$

Se cumple también la segunda parte.

2.1.10 Teorema de la convergencia monótona

Dado un espacio de medida (X, Σ, μ). Sea $\{f_n : X \longrightarrow [0, +\infty]\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles tales que:

$$\forall\, x \in X \;\; \forall n \in \mathbb{N} : f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \qquad\qquad f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$$

Entonces, existe el límite de la integrales y coincide con la integral de la función límite:

$$\lim_n \int_X f_n\,d\mu = \int_X \lim_n f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu$$

Demostración:

Como $f_n \leq f_{n+1}$ por hipótesis para todo $n \in \mathbb{N}$. Aplicando la monotonía de la integral, tenemos:

$$\int_X f_n\,d\mu \leq \int_X f_{n+1}\,d\mu \Rightarrow \exists \lim_n \int_X f_n\,d\mu = \alpha \in [0, +\infty]$$

Al ser una sucesión monótona, o bien converge o diverge. Es por ello que podemos garantizar la existencia del límite, α.

Como $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty}$ de manera creciente para todo $x \in X$, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos $f_n \leq f \Rightarrow \int_X f_n\,d\mu \leq \int_X f\,d\mu \Rightarrow \alpha \leq \int_X f\,d\mu$. Queda demostrar $\int_X f\,d\mu \leq \alpha$. Para ello, sea $s : X \longrightarrow [0, +\infty]$ una función simple y medible con $s \leq f$, basta ver que $\int_X s\,d\mu \leq \alpha$.

Sea $c \in [0, 1)$. Para cada $x \in X$ existe $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $c \cdot s(x) \leq f_n(x) \leq f(x)$ $\forall n \geq n_x$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $s(x) = \infty$ para aquellos x con $f(x) = \infty$ par que se cumpla el razonamiento anterior. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos el siguiente conjunto:

$$E_n := \{x \in X : c \cdot s_x \leq f_k(x) \leq f(x) \;\; \forall k \geq n\} \quad \in \Sigma$$

Al ser s, f_n, f medibles, podemos garantizar que E_n es medible. Por definición, es claro que $E_n \subseteq E_{n+1}$ Además, se tiene $x \in X \Rightarrow x \in E_{n_x} \Rightarrow X = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$.

Sea $s = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot X_{A_i}$ la expresión canónica de s, se cumple:

$$\int_{E_n} c \cdot s \, d\mu \leq \int_{E_n} f_n \, d\mu \leq \int_{E_n} f \, d\mu$$

Pero por definición de integral simple, se cumple:

$$\int_{E_n} c \cdot s \, d\mu = c \cdot \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \mu(E_n \cap A_i) \xrightarrow{n \to \infty} c \cdot \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \mu(A_i) = c \cdot \int_X s \, d\mu$$

De este modo, tomando límites en la desigualdad anterior, $c \cdot \int_X s \, d\mu \leq \alpha$. Tomando $\lim_{c \to 1^-}$ concluimos que $\int_X s \, d\mu \leq \alpha$.

2.1.11 Integral de la suma

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sean $f, g : X \longrightarrow [0, +\infty]$ funciones medibles. Entonces, se cumple:

$$\int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu = \int_X f + g \, d\mu$$

Demostración:

Podemos afirmar que existe una colección de funciones simples y medibles $\{s_n, t_n : X \longrightarrow [0, +\infty]\}_{n \in \mathbb{N}}$ tales que para todo $x \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumpla:

$$s_n(x) \leq s_{n+1}(x) \leq f \quad t_n(x) \leq t_{n+1}(x) \leq g \quad s_n(x) \xrightarrow{n \to \infty} f(x) \quad t_n(x) \xrightarrow{n \to \infty} g(x)$$

Entonces, tenemos que $s_n + t_n \leq s_{n+1} + t_{n+1}$ y además $(s_n + t_n)(x) \xrightarrow{n \to \infty} (f + g)(x)$. Aplicando el Teorema de la Convergencia Monótona, tenemos:

$$\int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu = \lim_n \int_X s_n \, d\mu + \lim_n \int_X t_n \, d\mu = \lim \int_X s_n + t_n \, d\mu = \int_X f + g \, d\mu$$

2.1.12 Integrales en conjuntos disjuntos

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sea $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ una función medible. Sean $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \Sigma$ con $i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \varnothing$. Entonces, se cumple:

$$\int_{\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} E_i} f \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f \, d\mu$$

Demostración:

$$\int\limits_{\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i} f\,d\mu = \int_X f\cdot X_{\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i}\,d\mu = \int_X \sum_{i=1}^{n} f\cdot X_{E_i}\,d\mu \overset{2.1.11}{=} \sum_{i=1}^{n}\int_X f\cdot X_{E_i}\,d\mu$$

Tomando límites llegamos al resultado:

$$\int\limits_{\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i} f\,d\mu = \int_X \sum_{i=1}^{\infty} f\cdot X_{E_i}\,d\mu = \sum_{i=1}^{\infty}\int_X f\cdot X_{E_i}\,d\mu = \sum_{i=1}^{\infty}\int_{E_i} f\,d\mu$$

2.1.13 Lema de Fatou

Sea (X,Σ,μ) un espacio de medida. Sea una sucesión de funciones medibles $\{f_n : X \longrightarrow [0,+\infty]\}_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces, se cumple:

$$\int_X \underline{\lim}_n f_n\,d\mu \leq \underline{\lim}_n \int_X f_n\,d\mu$$

Demostración:

Por definición, $\underline{\lim}_n f_n = \lim_n \inf_{k\geq n} f_k(x) = \lim_n g_n(x)$ Para g_n medible. Además, $g_n \leq g_{n+1}$. De este modo **Nota:** En general, la igualdad no tiene por qué cumplirse:

$$f_n = X_{[n,+\infty)} \qquad \int_{\mathbb{R}} \lim_n f_n\,d\mu_1 = \int_{\mathbb{R}} 0\,d\mu_1 = 0 \qquad \int_{\mathbb{R}} f_n\,d\mu_1 = \infty \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

2.1.14 Definición de igualdad en casi todo punto

Sea (X,Σ,μ) un espacio de medida. Sean dos funciones $f,g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Se dice que f y g "son iguales en casi todo punto" si $\exists B\in\Sigma$ con $\mu(B)=0$ tal que:

$$\{x\in X : f(x)\neq g(x)\}\subseteq B$$

En tal caso, se denotará como $f \overset{\mu-a.e.}{=} g$ ó $f = g\ \mu - a.e.$, las letras "a.e." vienen del término inglés "*almost everywhere*".

2.1.15 Medibilidad de funciones iguales en casi todo punto

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida completo. Sean $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ funciones tales que $f \overset{\mu-a.e.}{=} g$. Si f es medible; entonces, g es medible también.
<u>Demostración:</u>

Sea $A := \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$. Por hipótesis, $f \overset{\mu-a.e.}{=} g$ luego $\exists\, B \in \Sigma$ con $\mu(B) = 0$ tal que $A \subseteq B$. Al ser (X, Σ, μ) completo por hipótesis, tenemos que $A \in \Sigma$ también. De este modo, sea $\alpha \in \mathbb{R}$ cualquiera,

$$\{x \in X : g(x) < \alpha\} = \underbrace{\{x \in X : f(x) < \alpha\} \cap (X \setminus A)}_{} : \in \Sigma \cup \underbrace{\{x \in X : g(x) < \alpha\} \cap A}_{\in \Sigma} \in \Sigma$$

El primer subconjunto es medible por ser f medible por hipótesis. El segundo conjunto es medible al tener también medida nula por ser un subconjunto de A.

2.1.16 Integral de funciones iguales en casi todo punto

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sean $f, g : X \longrightarrow [0, +\infty]$ funciones medibles. Entonces, se cumple:

$$f \overset{\mu-a.e.}{=} g \Rightarrow \int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu$$

<u>Demostración:</u> Por ser f, g medibles, $A := \{x \in X : f(x) \neq g(x)\} \in \Sigma$.

Además, $f \overset{\mu-a.e.}{=} g$luego $\mu(A) = 0$. De este modo,

$$\int_X f \, d\mu = \int_{X \setminus A} f \, d\mu + \int_A f \, d\mu = \int_{X \setminus A} f \, d\mu + 0 =$$
$$= \int_{X \setminus A} g \, d\mu + 0 = \int_{X \setminus A} g \, d\mu + \int_A g \, d\mu = \int_X g \, d\mu$$

<u>Nota:</u> Al definir la integral de Lebesgue para funciones cualesquiera, este resultado será también válido.

2.1.17 Integral de funciones nulas en casi todo punto

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sea $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ una función medible. Entonces,

$$f \overset{\mu-a.e.}{=} 0 \iff \int_X f \, d\mu = 0$$

Demostración:

$\Rightarrow$ Se tiene como aplicación directa del resultado anterior.

$\Leftarrow$ Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos $E_n := \{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{n}\} \overset{f \text{ medible}}{\in} \Sigma$.

Sea $E := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \Sigma$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple:

$$0 \leq \frac{1}{n} \cdot \mu(E_n) = \int_X \frac{1}{n} \cdot X_{E_n} \, d\mu \leq \int_{E_n} f \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu = 0$$

Por tanto, $\mu(E_n) = 0$ luego $\mu(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = 0 \Rightarrow f \overset{\mu-a.e.}{=} 0$.

Nota:

$\Rightarrow$ La implicación es válida para $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

$\Leftarrow$ Es necesario exigir $f \geq 0$. Por ejemplo, $\int_{[0,2\pi]} \sin(x) \, d\mu(x) = 0$.

§2. Integral de Lebesgue para funciones $f : x \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$

2.2.1 Funciones integrables y sumables

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sea $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible. Diremos que "f es integrable sobre X" si cumple cualquiera de las siguientes dos condiciones:

$$\int_X f^+ \, d\mu < \infty \qquad\qquad \int_X f^- \, d\mu < \infty$$

Si f cumple simultáneamente ambas condiciones, diremos que "f es sumable" (toda función sumable es integrable). En cualquier caso, podemos definir la integral de f sobre X como:

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu$$

Nótese que como consecuencia inmediata de las definiciones anteriores, los siguientes enunciados son equivalentes:

i) f sumable

ii) f^+ y f^- sumables

iii) $|f|$ sumable

iv) $\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu \in \mathbb{R}$

v) $\int_{\mathbb{R}} |f| \, d\mu \in \mathbb{R}$

2.2.2 Desigualdad triangular

Dado un espacio de medida (X, Σ, μ). Sea $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrable. Se cumple:

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| \leq \int_X |f| \, d\mu$$

Demostración: Basta aplicar la desigualdad triangular de los números reales

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| = \left| \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu \right| \leq \left| \int_X f^+ \, d\mu \right| + \left| \int_X f^- \, d\mu \right| =$$

$$= \int_X f^+ \, d\mu + \int_X f^- \, d\mu = \int_X |f| \, d\mu$$

2.2.3 Definición de conjunto de funciones sumables

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Denotaremos al conjunto de funciones sumables $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ como $\mathcal{L}_1$ o como $\mathcal{L}_1(X, \Sigma, \mu)$. Sea $E \in \Sigma$, utilizaremos la siguiente notación abreviada: $\mathcal{L}_1(E) = \mathcal{L}_1\big(E, \Sigma(E), \mu_{|\Sigma(E)}\big)$.

2.2.4 Teorema de estructura de $\mathcal{L}_1$

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida, se cumple:

i) $\mathcal{L}_1$ es un espacio vectorial.

ii) $\int_X : \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathbb{R} \quad f \longmapsto \int_X f\, d\mu$ es una aplicación lineal.

<u>**Demostración:**</u>

i) Sean $f, g \in \mathcal{L}_1$. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Veamos que $\alpha \cdot f + \beta \cdot g \in \mathcal{L}_1$.

$$\left| \int_X \alpha \cdot f + \beta \cdot g\, d\mu \right| \leq \int_X |\alpha \cdot f + \beta \cdot g|\, d\mu = |\alpha| \int_X |f|\, d\mu + |\beta| \int_X |g|\, d\mu \in \mathbb{R}$$

ii) Sean $\lambda \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{L}_1$. Veamos que $\int_X \lambda \cdot f\, d\mu = \lambda \cdot \int_X f\, d\mu$. Distinguiremos tres casos:

- Si $\lambda = 0$, $\int_X \lambda \cdot f\, d\mu = \int_X 0\, d\mu = 0 = 0 \cdot \int_X f\, d\mu$.
- Si $\lambda > 0$, entonces $(\lambda f)^+ = \lambda \cdot f^+$ y $(\lambda f)^- = \lambda \cdot f^-$. Por tanto,

$$\int_X \lambda f\, d\mu = \int_X (\lambda f)^+\, d\mu + \int_X (\lambda f)^-\, d\mu = \lambda \int_X f^+\, d\mu - \lambda \int_X f^-\, d\mu =$$
$$= \lambda \left(\int_X f^+\, d\mu - \int_X f^-\, d\mu \right) = \lambda \int_X f\, d\mu$$

- Si $\lambda < 0$, entonces $(\lambda f)^+ = -\lambda \cdot f^-$ y $(\lambda f)^- = -\lambda \cdot f^+$. Por tanto,

$$\int_X \lambda f\, d\mu = \int_X (\lambda f)^+\, d\mu - \int_X (\lambda f)^-\, d\mu = -\lambda \int_X f^- d\mu + \lambda \int_X f^+\, d\mu =$$
$$= \lambda \left(\int_X f^+\, d\mu - \int_X f^-\, d\mu \right) = \lambda \int_X f\, d\mu$$

Sean $f, g \in \mathcal{L}_1$, veamos que $\int_X f + g \, d\mu = \int_X f \, d\mu + + \int_X g \, d\mu$.
Despejamos para reescribir las partes positiva y negativa de $f + g$ según las de f y las de g:

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f+g = f^+ - f^- + g^+ - g^- \Rightarrow (f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$$

De este modo, se cumple:

$$\int_X (f+g)^+ \, d\mu + \int_X f^- \, d\mu + \int_X g^- \, d\mu = \int_X (f+g)^- \, d\mu + \int_X f^+ \, d\mu + \int_X g^- \, d\mu \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_X (f+g)^+ \, d\mu - \int_X (f+g)^- \, d\mu}_{\int_X f+g \, d\mu} = \underbrace{\int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu}_{\int_X f \, d\mu} + \underbrace{\int_X g^+ \, d\mu - \int_X g^- \, d\mu}_{\int_X g \, d\mu}$$

Hemos tenido que estructurar esta última parte de la demostración de esta manera al tener que aplicar la linealidad de la integral para funciones no negativas.

2.2.5 Integral de funciones sumables en conjuntos disjuntos

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sea $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \Sigma$ tal que $i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \varnothing$. Sea $f \in \mathcal{L}_1$. Entonces, se cumple:

$$\int_{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i} f \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f \, d\mu$$

Demostración: Consecuencia del resultado 2.1.12 y de la definición de $\mathcal{L}_1$.

$$\int_{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i} f \, d\mu = \int_{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i} f^+ \, d\mu - \int_{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i} f^- \, d\mu = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f^+ \, d\mu \right) + \left(\sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f^- \, d\mu \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_{E_i} f^+ \, d\mu - \int_{E_i} f^- \, d\mu \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f \, d\mu$$

Hemos necesitado la hipótesis de f sumable para poder agrupar los dos sumatorios en uno solo.

2.2.6 Funciones μ-a.e. a sumables en $\mathcal{L}_1$

Dado un espacio de medida (X, Σ, μ). Sea $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ con $f \in \mathcal{L}_1$. Entonces existe una función $g \in \mathcal{L}_1$ tal que $f \overset{\mu-a.e.}{=} g$.

<u>Demostración:</u> Comencemos por aclarar la diferencia entre sumable y $\mathcal{L}_1$.

Toda función $\mathcal{L}_1$ es sumable, pero no al revés. No podemos garantizar que f sea $\mathcal{L}_1$, pues su codominio es $\overline{\mathbb{R}}$ y no $\mathbb{R}$. Por tanto, buscamos una función $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ sumable tal que $f \overset{\mu-a.e.}{=} g$.

Por ser f sumable, los dos siguientes conjuntos tienen medida nula (de no ser así tendríamos que $\int_A f^+ \, d\mu = \infty$ ó $\int_B f^- \, d\mu = -\infty$):

$$A = \{x \in X : f(x) = +\infty\} \qquad\qquad B := \{x \in X : f(x) = -\infty\}$$

Por ser f medible, ambos conjuntos son medibles. Basta definir g como sigue:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X \setminus (A \cup B) \\ 0 & \text{si } x \in A \cup B \end{cases} \Rightarrow g = f \cdot \mathcal{X}_{X \setminus (A \cup B)} \text{ medible}$$

De este modo, $f \overset{\mu-a.e.}{=} g$ y aplicando el resultado 2.1.16 tenemos que g es sumable luego $g \in \mathcal{L}_1$.

2.2.7 Teorema de Convergencia Dominada

Dado un espacio de medida (X, Σ, μ). Sea una colección de funciones medibles $\{f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ tales que $f_n(x) \xrightarrow{n \to \infty} f(x)$ para todo $x \in X$ para cierta función f. Si existe $g \in \mathcal{L}_1$ tal que $|f_n| \leq g \;\; \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces, se cumple:

i) $f \in \mathcal{L}_1$

ii) $\left(\int_X |f_n - f| \, d\mu\right) \xrightarrow{n \to \infty} 0$

iii) $\int_X f_n \, d\mu \xrightarrow{n \to \infty} \int_X f \, d\mu$

<u>Demostración:</u>

i) $\forall n \in \mathbb{N} \;\; \forall x \in X : |f_n(x)| \leq g(x) \Rightarrow |f(x)| \leq g(x) \Rightarrow \int_X |f| \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu < \infty$.

ii) $\forall n \in \mathbb{N} \quad : |f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g$ Luego $f_n + f \in \mathcal{L}_1$. Despejando, $2g - |fn - f| \leq 0$. Por tanto, estamos en condiciones de aplicar el Lema de Fatou,

$$\int_X \underline{\lim_n} 2g - |f_n - f| \, d\mu \leq \underline{\lim_n} \int_X 2g - |f_n - f| \, d\mu$$

Por hipótesis, sabemos que existe $\lim_n 2g - |f_n - f| = 2g$ luego podemos pasar del límite inferior al límite en el primer miembro de la desigualdad. Desglosando la integral de la resta como resta de integrales y aplicando las definiciones de límite inferior y superior:

$$\int_X 2g \, d\mu \leq \underline{\lim_n} \left(\int_X 2g \, d\mu - \int_X |f_n - f| \, d\mu \right) = \int_X 2g \, d\mu - \overline{\lim_n} \int_X |f_n - f| \, d\mu$$

Restando $\int_X 2g \, d\mu$ en ambos lados:

$$0 \leq -\overline{\lim_n} \int_X |f_n - f| \, d\mu \Rightarrow 0$$

iii) Por el apartado anterior, sabemos que $\forall \, \varepsilon > 0 \; \exists \, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que que $\forall \, n \geq n_0$ se cumple:

$$\left| \int_X f_n \, d\mu - \int_X f \, d\mu \right| \overset{(*)}{=} \left| \int_X f - f_n \, d\mu \right| \overset{2.2.2}{\leq} \int_X |f_n - f| \, d\mu < \varepsilon$$

(*) Hemos aplicado la linealidad de la integral en $\mathcal{L}_1$ pues $f, f_n \in \mathcal{L}_1$.

§3. Cálculo de la integral de Lebesgue en $\mathbb{R}$

2.3.1 Equivalencia de las integrales de Riemann y Lebesgue

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:

i) $\mu_1\Big(\{x \in X : f \text{ es discontinua en } x\}\Big) = 0$.

ii) f es integrable Riemann; es decir, $f \in \mathcal{R}\big([a,b]\big)$.

Además, si $f \in \mathcal{R}\big([a,b]\big)$; entonces, $\int_{[a,b]} f \, d\mu = \int_a^b f$.

<u>**Demostración:**</u>

Al estar acotada, $\exists\, M \in [0,+\infty)$ tal que $|f(x)| \leq M \ \forall \ \in [a,b]$. Consideramos una sucesión de particiones de $[a,b]$,

$$P_n = \{x_0^n = a < x_1^n < \ldots < x_{k_n}^n = b\}$$

de modo que para cada $n \in \mathbb{N}$ P_n verifica simultáneamente las siguientes condiciones:

$$x_i^n - x_{i-1}^n < \frac{1}{n} \qquad\qquad P_n \subseteq P_{n+1}$$

Sea $n \in \mathbb{N}$, sea $i \in \{1, \ldots, k_n\}$. Introducimos la siguiente notación:

$$M_i^n := \sup\Big\{f(x) : x \in [x_{i-1}^n, x_i^i]\Big\} \qquad m_i^n := \inf\Big\{f(x) : x \in [x_{i-1}^n, x_i^i]\Big\}$$

De este modo, $-M \leq m_i^n \leq M_i^n \leq M$. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$ las dos siguientes funciones son simples y μ_1-medibles:

$$s_n := \sum_{i=1}^{k_n} M_i^n \cdot X_{[x_{i-1}^n, x_i^n]} \qquad\qquad t_n := \sum_{i=1}^{k_n} m_i^n \cdot X_{[x_{i-1}^n, x_i^n]}$$

Por definición de integral de funciones simples, tenemos que las integrales de s_n y

t_n son las sumas superior e inferior de Darboux de P_n, respectivamente. Es decir,

$$\int_{[a,b]} s_n\, d\mu = \sum_{i=1}^{k_n} M_i^n \cdot \mu([x_{i-1}^n, x_i^n]) = \sum_{i=1}^{k_n} M_i^n \cdot (x_i^n - x_{i-1}^n) = \overline{S}(f, P_n) < \sum_{i=1}^{k_n} M_i^n \cdot \frac{1}{n}$$

$$\int_{[a,b]} t_n\, d\mu = \sum_{i=1}^{k_n} m_i^n \cdot \mu([x_{i-1}^n, x_i^n]) = \sum_{i=1}^{k_n} m_i^n \cdot (x_i^n - x_{i-1}^n) = \underline{S}(f, P_n) < \sum_{i=1}^{k_n} m_i^n \cdot \frac{1}{n}$$

El conjunto de vértices de todas las particiones P_n es numerable:

$$V := \Big\{ x_i^n : n \in \mathbb{N}, i \in \{1, \ldots, k_n\} \Big\}$$

Además, sea $n \in X$, por hipótesis, tenemos $P_n \subseteq P_{n+1}$. Sea $x \in [a, b]$, tenemos $s_n(x) \geq s_{n+1}(x)$ y $t_n(x) \leq t_{n+1}(x)$. Al ser funciones monótonas y acotadas, podemos asegurar que existe su límite. Sean s y t los límites de s_n y t_n, respectivamente. Sea $x_0 \in [a, b] \setminus V$. Veamos que f es continua en x_0 si y solo si $s(x_0) = t(x_0)$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Por hipótesis, $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Elegimos $n \in \mathbb{N}$ tal que si $j \in \mathbb{N}$ es tal que $x_0 \in (x_{j-1}^n, x_j^n)$ entonces $(x_{j-1}^n; x_j^n) \subseteq (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Así, para cualquier $x \in (x_{j-1}^n, x_j^n)$ se cumple:

$$f(x_0) - \varepsilon \leq m_j^n \leq f(x) \leq M_j^n \leq f(x_0) + \varepsilon$$

Por tanto, $0 \leq s(x_0) - t(x_0) \leq s_n(x_0) - t_n(x_0) \leq 2\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos $s(x_0) = f(x_0) = t(x_0)$ para ver f continua en x_0.

$$\lim_n s_n(x_0) = s(x_0) = f(x_0) = t(x_0) = \lim_n t_n(x_0)$$

Así, sea $\varepsilon > 0\ \exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq s_n(x_0) - t_n(x_0) < \varepsilon$. Fijamos este n. Sea $j \in \{1, \ldots, k_n\}$ el único tal que $x_0 \in (x_{j-1}^n, x_j^n)$. Tomamos $\delta > 0$ suficientemente pequeño como para que $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (x_{j-1}^n, x_j^n)$. De este modo, para $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, se cumple:

$$f(x_0) - \varepsilon < t_n(x_0) = m_j^n \leq f(x) \leq M_j^n = s_n(x_0) < f(x_0) + \varepsilon$$

Tenemos que f es continua en x_0 por definición.

Volvamos al problema principal.

$\Rightarrow\!\rfloor$ Supongamos $\mu\Big(\{x \in X : f \text{ es discontinua en } x\}\Big) = 0.$

Denotando D al conjunto anterior, tenemos que $\mu(D) = 0 \Rightarrow \mu(D \cap V) = 0$ para V el conjunto de vértices de las particiones P_n. De este modo, $s \overset{\mu-a.e.}{=} t \Rightarrow s - t \overset{\mu-a.e.}{=} 0$. Por tanto, aplicando el resultado 2.1.16,

$$0 = \int_{[a,b]} s - t \, d\mu = \int_{[a,b]} \lim_n s_n - t_n \, d\mu \overset{TCD}{=} \lim_n \int_{[a,b]} s_n - t_n \, d\mu = \lim_n \overline{S}(f, P_n) - \underline{S}(f, P_n)$$

Según el criterio de Cauchy de integración Riemann, tenemos que $f \in \mathcal{R}([a, b])$.

$\Rightarrow\!\rfloor$ Por el criterio de Cauchy de integración Riemann, podemos

suponer que existe $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de particiones de $[a, b]$ tales que $\overline{S}(f, P_n) - \underline{S}(f, P_n) < \frac{1}{n}$. Entonces:

$$0 \leq \int_{[a,b]} s - t \, d\mu = \int_{[a,b]} \lim_n s_n - t_n \, d\mu = \lim_n \int_{[a,b]} s_n - t_n \, d\mu = \lim_n \overline{S}(f, P_n) - \underline{S}(f, P_n) = 0$$

De este modo, $s \overset{\mu-a.e.}{=} f \overset{\mu-a.e.}{=} t$ luego al estar en un espacio de medida completo tenemos que f es medible. Por tanto,

$$\begin{aligned}
&\underline{S}(f, P_n) \xrightarrow{n\to\infty} \int_a^b f \\
&\underline{S}(f, P_n) = \int_{[a,b]} t_n \, d\mu \overset{TCD}{=} \int_{[a,b]} t \, d\mu = \int_{[a,b]} f \, d\mu
\end{aligned}$$

2.3.2 Definición de función localmente integrable

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Diremos que "$f$ es localmente integrable en A" si $f \in \mathcal{R}([a, b])$ para todo $[a, b] \subseteq A$. En tal caso, lo denotaremos como $f \in \mathcal{R}^l(A)$.

Sean $-\infty < a < b < +\infty$, hay cuatro casos básicos:

$$f \in \mathcal{R}\big([a, +\infty)\big) \qquad f \in \mathcal{R}\big((-\infty, b]\big) \qquad f \in \mathcal{R}\big([a, b)\big) \qquad f \in \mathcal{R}\big((a, b]\big)$$

Por ejemplo, para el primer caso, diremos que $\int_a^\infty f$ es...

i) Convergente, si $\exists \lim\limits_{x\to\infty} \displaystyle\int_a^x f = l \in \mathbb{R}$.

ii) Divergente, si $\exists \lim\limits_{x\to\infty} \displaystyle\int_a^x f \in \{+\infty, -\infty\}$.

iii) Oscilante, si Convergente, si $\nexists \lim\limits_{x\to\infty} \displaystyle\int_a^x f$.

Podemos extender estas definiciones para el resto de casos de manera análoga.

2.3.3 Medibilidad de funciones localmente integrables

Sea $f \in \mathcal{R}\big([a, +\infty)\big)$ (o cualquier caso anterior); entonces, f es μ_1-medible.

Demostración:

Por hipótesis, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ tenemos que $f \in \mathcal{R}\big([a, a+n]\big)$. Aplicando el resultado 2.3.1, tenemos que f es medible en $\Big([a, a+n], \mathfrak{M}_1([a, +n]), \mu_{1|\mathfrak{M}_1([a,a+n])}\Big)$. Esto a su vez equivale a $f \cdot X_{[a,a+n]}$ medible en $(\mathbb{R}, \mathfrak{M}_1, \mu_1)$. Finalmente, como el límite puntual respeta la medibilidad, basta ver que:

$$f \cdot X_{[a,a+n]} \xrightarrow{n\to\infty} f \cdot X_{[a,+\infty)}$$

2.3.4 Integral de Lebesgue e integral impropia de Riemann

En las siguientes condiciones, la integral de Lebesgue es equivalente a la integral impropia de Riemann:

i) $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^\infty f = \int_{[a,+\infty)} f\, d\mu_1$.

ii) $\int_a^\infty |f| < \infty \Rightarrow \int_a^\infty f = \int_{[a,+\infty)} f\, d\mu_1$.

Demostración:

$i)$ Al ser $f \geq 0$, podemos garantizar $\exists \lim_{x\to\infty} \displaystyle\int_a^x f \in [0,+\infty]$ pues no puede oscilar. Aplicando la caracterización sucesional del límite, tenemos:

$$\int_a^\infty f = \lim_n \int_a^x f = \lim_n \int_a^{a+n} f \overset{2.3.1}{=} \lim_n \int_{[a,a+n]} f\, d\mu_1 = \lim_n \int_{[a,+\infty)} f \cdot X_{[a,a+n]}\, d\mu_1 \overset{TCM}{=}$$

$$= \int_{[a,+\infty)} \lim_n f \cdot X_{[a,a`n']}\, d\mu_1 = \int_{[a,+\infty)} f\, d\mu_1$$

$ii)$ Supongamos que $\exists \int_a^\infty f < \infty \Rightarrow \exists \int_a^\infty f < \infty$. Aplicando el apartado

anterior,

$$\exists \int_{[a,+\infty]} |f|\, d\mu_1 = \int_a^\infty |f| < \infty \Rightarrow |f|, f \in \mathcal{L}_1\big([a,+\infty)\big)$$

Por definición de $\mathcal{L}_1\big([a,+\infty)\big)$, $\exists \int_{[a,\infty)} f\, d\mu_1 \in \mathbb{R}$. Ahora, aplicando la caracterización sucesional del límite y el Teorema de la Convergencia Dominada:

$$\int_a^\infty f = \lim_{x\to\infty} \int_a^x f = \lim_{n\to\infty} \int_a^{a+n} f \overset{2.3.1}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{[a,a+n]} f\, d\mu_1 = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,+\infty)} f \cdot X_{[a,a+n]}\, d\mu_1 \overset{TCMD}{=}$$

$$= \int_{[a,+\infty]} \lim_{n\to\infty} f \cdot X_{a,a+n}\, d\mu_1 = \int_{[a,+\infty)} f\, d\mu_1$$

2.3.5 Ejemplo de no equivalencia

Veamos que no siempre se da la equivalencia. Por ejemplo, para la siguiente función f:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} \cdot X_{[n-1,n)}(x)$$

Veamos que f no cumple ninguna de las hipótesis del resultado anterior:

$$\int_0^\infty f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} < \infty \qquad \int_0^\infty |f| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Tenemos que f no es no negativa, y que $|f| \notin \mathcal{L}_1$. Veamos que f no es integrable Lebesgue a pesar de sí ser integrable Riemann (impropiamente):

$$\int_0^\infty f^+ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = \infty \qquad \int_0^\infty f^- = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \infty$$

2.3.6 Definición de integral impropia de Lebesgue

Si $f : [a, +\infty) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ cumple $f \notin \mathcal{L}_1\big([(]a, +\infty)\big)$ pero $f \in \mathcal{L}_1\big([a, x]\big)\ \forall\ \in (a, \infty)$. Entonces, f es medible en $[a, \infty)$. Se dice que f es impropiamente integrable en el sentido de Lebesgue sobre $[a, \infty)$ si:

$$\exists \lim_{x\to\infty} \int_{[a,x]} f\, d\mu_1 = l \in \overline{\mathbb{R}} \qquad \text{en tal caso, se denota } \int_{[a,+\infty)} f\, d\mu_1 = l$$

En el ejemplo anterior, f no es integrable en el sentido usual. Veamos que sí lo es en el impropio:

2.3.7 Derivación bajo el signo integral

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sea $E \in \Sigma$. Sea $f : E \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función con $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo tal que $\forall\, t \in I\ f(\cdot, t) \in \mathcal{L}_1(E)$ para:

$$f(\cdot, t) : E \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto f(\cdot, t)(x) = f(x, t)$$

Si existe $\frac{\partial f}{\partial t} : E \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ y además existe también $\phi \in \mathcal{L}_1(E)$ tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq \varphi(x)\ \ \forall\, (x, t) \in (E, I)$$

Entonces, sea $t_0 \in I$, se cumple:

$$\exists \, \frac{df}{dt} \int_E f(\cdot, t_0)(x) \, d\mu(x) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) \, d\mu(x)$$

Notación: Cuando operemos con una función que tenga como argumento más de una variable, integrando una de ellas y dejando las demás constantes, usaremos $d\mu(x)$ para referirnos a la variable sobre la que integramos. Por ejemplo, en $\int_E g(x,t) \, d\nu(x)$ se integra solo sobre x, dejando t fija.

Demostración:

Fijamos $t_0 \in I$ cualquiera. Por definición de derivada, sea $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq I \setminus \{t_0\}$ con $t_n \xrightarrow{n\to\infty} t_0$, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_E f(x,t_n) \, d\mu(x) - \int_E f(x,t_0) \, d\mu(x)}{t_n - t_0} = \lim_{n\to\infty} \int_E \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0} = (*)$$

Aplicamos el Teorema del Valor Medio de derivación a I_{t_n,t_0} (intervalo de extremos t_n y t_0). Como consecuencia, $\exists \, \xi_n \in I_{t_n,t_0} \subseteq I$ tal que:

$$(*) = \lim_{n\to\infty} \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x, \xi_n) \, d\mu$$

Por hipótesis, sabemos que:

$$\forall \, x \in E : \left| \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, \xi_n) \right| \leq \varphi(x)$$

Luego estamos en condiciones de aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada:

$$(*) = \lim_{n\to\infty} \int_E \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0} \, d\mu(x) = \int_E \lim_{n\to\infty} \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0} \, d\mu = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) \, d\mu(x)$$

2.3.8 Integrales de funciones de componentes en $\mathbb{R}^2$

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un abierto. Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo no degenerado. Sean $a, b : I \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables en I tales que $\forall\, t \in I$ se cumplen las dos siguientes condiciones:

$$a(t) \leq b(t) \qquad\qquad \{t\} \times \big[a(t), b(t)\big] \subseteq \Omega$$

Definimos la siguiente función:

$$F : I \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \qquad\qquad t \longmapsto F(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(t,x)dx$$

Entonces, para todo $t \in I$ se cumple:

$$\exists F'(t) = f\big(t, b(t)\big) \cdot b'(t) - f\big(t, a(t)\big) \cdot a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)dx$$

<u>Demostración:</u> Comencemos ilustrando lo que estamos haciendo: