Análisis Matemático II

Javier Ortín Rodenas

Hoja de ejercicios

Contenidos

I Teoría de la medida e Integral de Lebesgue

§1. Medida exterior en $\mathbb{R}^N$

1.1.1 Ejercicio 5

a) Sea $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$, demuestra que todo cubrimiento finito de A formado por intervalos abiertos tiene longitud total mayor o igual a 1.

Demostración: Sea $\{I_i\}_{i=1}^n$ un recubrimiento por intervalos abiertos de A, con cada $I_i = (a_i, b_i)$ con $a_i < b_i$. Definimos el siguiente conjunto auxiliar:

$$\mathcal{A} := \{0,1\} \cup \Big([0,1] \cap \big\{a_i, b_i : i \in \{1,\dots,n\}\big\}\Big)$$

Este conjunto contiene a los extremos de los I_i que se encuentren entre 0 y 1. Al haber un número finito de intervalos, tenemos que $\mathcal{A}$ es finito, pudiendo ordenarlo como sigue:

$$\mathcal{A} = \{x_j\}_{j=0}^m \qquad x_0 = a < x_1 < \ldots < x_m = b \qquad \text{para cierto } m \in \mathbb{N}$$

Al estar en un caso finito, la unión de las clausuras es la clausura de las uniones. Por contención de las clausuras, se tiene:

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i \Rightarrow \overline{A} = [0,1] \cap \overline{\mathbb{Q}} = [0,1] \subseteq \overline{\bigcup_{i=1}^n I_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{I_i}$$

Sea $j \in \{1,\dots,m\}$ cualquiera, tenemos que $x_j \in [0,1] \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^n \overline{I_i}$ luego $\exists k \in \{1,\dots,n\}$ tal que $x_j \in [a_k, b_k]$. Veamos que $[x_{j-1}, x_j] \subseteq [a_k, b_k]$ también. Ambos conjuntos son cerrados y conexos con intersección no vacía. Por tanto, su intersección ha de ser conexa, cerrada y no vacía (es decir, un intervalo cerrado). Será de la forma $[u, x_j]$ con $u = \min\{a_k, x_{j-1}\}$. De tenerse $u \neq x_{j-1}$, se cumpliría $x_{j-1} < a_k < x_j$, lo que contradice la ordenación establecida para $\mathcal{A}$.

De este modo, como $v_1(I_i) = v_1(\overline{I_i})\ \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$, se cumple:

$$1 = v_1([0,1]) = \sum_{j=1}^{m} v_1(x_{j-1}, x_j) \leq \sum_{i=1}^{n} v_1(\overline{I_i}) = \sum_{i=1}^{n} v_1(I_i)$$

b) Deduce del apartado anterior que A no es compacto.

<u>Demostración:</u> Veamos que hay un recubrimiento de A del que no se puede extraer un subrecubrimiento finito. Para ello basta dar un recubrimiento de A por intervalos abiertos tales que la suma de sus medidas sea menor a 1. Como $\mathbb{Q}$ es numerable, A también lo es. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una enumeración cualquiera de A, definimos los siguientes intervalos:

$$I_n = (a_n - \frac{1}{2^{n+2}}, a_n + \frac{1}{2^{n+2}}) \quad \text{luego } A \subseteq \underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} I_i \text{ con } \sum_{i=1}^{\infty} v_1(I_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

c) Demuestra que la siguiente aplicación m definida sobre $\mathfrak{B}_N$ no es una medida:

$$m(A) = \inf \left\{ \sum i = 1^n v(I_i) : \overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} I_i \supseteq A \text{ con cada } I_i \text{ cubo abierto en} \mathbb{R}^N \right\}$$

<u>Demostración:</u>
En caso de serlo, para $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{B}_N$ con $i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \varnothing$ se cumpliría:

$$m\left(\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} E_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(E_i)$$

Todo conjunto unipuntual a con $a \in \mathbb{R}^N$ está en $\mathfrak{B}_N$ pues se puede expresar como un intervalo cerrado degenerado. Por tando, todo conjunto numerable está también en $\mathfrak{B}_N$. Consideramos el conjunto $A^N \subseteq [0,1]^N \in \mathfrak{B}_N$. Razonando como en el apartado anterior, todo cubrimiento finito de A^N por cubos ha de tener suma de volúmenes mayor o igual a 1, luego $m(A^N) = 1$. No obstante, podemos expresar A^N como unión numerable de conjuntos unipuntuales disjuntos, teniendo cada uno de ellos $m(\{b_n\}) = 0$ para $(b_n)_n$ una enumeración de A^N.

1.1.2 Ejercicio 6

Demuestra que existe un conjunto abierto O en $\mathbb{R}$ y un $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier recubrimiento finito de O formado por intervalos abiertos, $\{J_i\}_{i=1}^m$ se cumple $\mu(\bigcup_{i=1}^{n} J_i \setminus O) > \varepsilon$. **Demostración:**

Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos $I_n = (n - \frac{1}{3}, n + \frac{1}{3})$. Consideramos el abierto $O = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} I_i$. Sea $\{J_i\}_{i=1}^m$ un recubrimiento finito de O por intervalos abiertos. Al ser O no acotado, tiene que haber cierto $k \in \{1, \ldots, m\}$ tal que J_k contiene a infinitos intervalos I_n. Dados dos de estos intervalos consecutivos, la distancia entre el extremo derecho del primero y el extremo izquierdo del segundo viene dada por:

$$\left(n + 1 - \frac{1}{3}\right) - \left(n + \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Por tanto, $J_k \setminus O$ ha de contener infinitos intervalos disjuntos de longitud $\frac{1}{3}$ luego tiene medida infinita. Se cumple el resultado para $\varepsilon > 0$ cualquiera.

§2. Conjuntos medibles

1.2.1 Ejercicio 2

Sea $A \in \mathfrak{M}_N$ con $\mu(A) < \infty$. Sea $\varepsilon > 0$, demuestra que existe $K \subseteq A$ conjunto compacto tal que $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$. ¿Se cumple también si $\mu(A) = \infty$?
<u>**Demostración:**</u>

Sea $A_n = A \cap [-n, n]$, tenemos que $(A_n)_n$ es una sucesión creciente de conjuntos medible que tiene como unión el conjunto A. Por tanto, se tiene

$$\infty > \mu(A)\mu(\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} A_i) = \lim_n \mu(A_n)$$

Por tanto, existe cierto $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(A) - \mu(A_{n_0}) = \mu(A \setminus A_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Hemos podido despejar sin indeterminaciones al estar en un caso de medida finita.

Como A_{n_0} es medible, sabemos que existe un conjunto cerrado $C \subseteq A_{n_0}$ tal que $\mu(A_{n_0} \setminus C) < \frac{\varepsilon}{2}$. Al ser A_{n_0} acotado y estar C contenido en él, tenemos que C es compacto. Por todo lo anterior:

$$\mu(A \setminus C) = \mu(A) - \mu(C) = \mu(A) - \mu(A_{n_0}) + \mu(A_{n_0}) - \mu(C) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

En cambio, para el caso infinito, no tiene por qué cumplirse. Sea $A = R^N$, en la topología usual, los conjuntos compactos son aquellos cerrados y acotados. En espacios métricos, un conjunto es acotado sii existe una bola de radio finito que lo contiene. Por el Teorema de Hausdorff, podemos considerar la norma $||\cdot||_1$, que tiene como bolas a los cubos. Por tanto, todo compacto K va a estar contenido en una bola de radio finito; es decir, en un cubo de volumen (medida) finito. Despejando:

$$\mu(\mathbb{R}^N \setminus K) = \mu(\mathbb{R}^N) - \mu(K) = \infty - \mu(K) = \infty > \varepsilon \ \forall \varepsilon \in (0, +\infty)$$

1.2.2 Ejercicio 3

Sea $A \in \mathfrak{M}_N$, ¿son ciertas las siguientes implicaciones?

i) $\mathring{A} \neq \varnothing \Rightarrow \mu(A) = 0$.

ii) $\mathring{A} = \varnothing \Rightarrow \mu(A) = 0$.

iii) A abierto $\Rightarrow \mu(Fr.\, A) = 0$.

iv) A no numerables $\Rightarrow \mu(A) > 0$.

Demostración:
i) Falso: basta considerar $\mathbb{R}^N$.

ii) Falso: basta considerar $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (o cualquier variante N-dimensional).

iii) Utilizaremos una variación del conjunto de Cantor. En cada iteración "eliminamos" la parte central de longitud $\frac{1}{4^n}$ de cada intervalo. Veamos ejemplos de algunas iteraciones:

$$\left[0, 1\right]$$

$$\left[0, \frac{3}{8}\right] \qquad \left[\frac{5}{8}, 1\right]$$

$$\left[0, \frac{1}{8}\right] \qquad \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right] \qquad \left[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right] \qquad \left[\frac{7}{8}, 1\right]$$

En la n-ésima iteración eliminamos 2^{n-1} intervalos cada uno de longitud $\frac{1}{4^n}$. Como los intervalos quitados son disjuntos, podemos calcular su medida total como la suma de las longitudes quitadas. Sea L_n la longitud quitada en la n-ésima iteración,

$$L_n = 2^{n-1} \cdot \frac{1}{4^n} = \frac{1}{2^n + 1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} L_n = \frac{1}{2}$$

Considerando $O = (0,1) \backslash C$ para C la intersección de todas las iteraciones, tenemos que la frontera de O es C, que tiene como medida $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

iv) Falso: basta considerar $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1.2.3 Ejercicio 5

Demuestra que para cada $A \in \mathfrak{M}_1$ con $\mu(A) < \infty$ y cada $\varepsilon > 0$ existe una colección finita de intervalos disjuntos y abiertos $\{I_i\}_{i=1}^m$ tales que:

$$\mu\left(A \Delta \bigcup_{i=1}^{m} I_i\right) < \varepsilon \qquad \text{con } A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Demostración:

Por ser A un conjunto medible, es de la forma $A = (\bigcap_{i \in \mathbb{N}} G_i) \cup M$ para $(G_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de abiertos de $\mathbb{R}^N$ y M un conjunto de medida nula.

Como M no interfiere en la medida, tenemos que $\mu(A) = \lim_n \mu(G_n) < \infty$. Por definición de límite, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(G_{n_0} \setminus A) = \mu(G_{n_0}) - \mu(A) < \frac{\varepsilon}{2}$. Hemos podido pasar a la medida de la diferencia de conjuntos al estar en el caso de medida finita. Por simplicidad, denotaremos $G = G_{n_0}$.

Al ser G abierto, podemos expresarlo como unión numerable de bolas abiertas $\{J_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos $O_n = \bigcup_{i=1}^{n} J_i$. Tenemos que $(O_n)_n$ es una sucesión de conjuntos crecientes cuya unión es igual a G. Razonando como en el caso anterior:

$$\mu(G) = \mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} O_i) = \lim_n \mu(O_n) \Rightarrow \exists\, n_1 \in \mathbb{N} : \mu(G \setminus O_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Tomamos como $\{I_i\}_{i=1}^n$ las componentes conexas de $\{J_i\}_{i=1}^{n_1}$, que son disjuntas e intervalos (en $\mathbb{R}$ los conjuntos conexos son precisamente los intervalos). Además, hay un número finito de ellas (en el peor de los casos, cada J_i sería una componente conexa). De este modo, aplicando la monotonía de la medida:

$$\mu\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} I_i\right) \leq \mu\left(G \setminus \bigcup_{i=1}^{n} I_i\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} I_i \setminus A\right) \leq \mu\left(G \setminus A\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sumando se llega al resultado.

§3. Funciones medibles

1.3.1 Ejercicio 5

Sea $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ uniformemente continua y acotada, demuestra que la siguiente función es medible:

$$\varphi : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad t \longmapsto \varphi(t) = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f(x+t) - f(x)|$$

<u>**Demostración:**</u>

Por ser f acotada, tenemos que $\exists\, M \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq M \forall x \in \mathbb{R}^N$. De este modo, sean $x, y \in \mathbb{R}^N$, tenemos:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| \leq M + M = 2M$$

Por tanto, concluimos que φ es también acotada. Veamos que es medible por la definición.

Sea $K := \sup_{t \in \mathbb{R}^N} \varphi(t)$, como φ solo toma valores no negativos tenemos que:

$$\varphi^{-}1\Big((-\infty, 0]\Big) = \varnothing \in \mathfrak{M}_N \qquad\qquad \varphi^{-}1\Big((-\infty, K]\Big) = \mathbb{R}^N \in \mathfrak{M}_N$$

Fijando ahora $\varepsilon \in (0, K)$ cualquiera, veamos que $\varphi\Big((-\infty, \varepsilon]\Big)$ es medible. Al ser f uniformemente continua por hipótesis, tenemos que para el ε fijado existe un $\delta > 0$ tal que:

$$||x - y|| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$$

Podemos reescribir $y = x + t$ para $t = y - x \in \mathbb{R}^N$. De este modo; sea $t \in \mathbb{R}^N$, se tiene:

$$||t|| < \delta \Rightarrow |f(x+t) - f(x)| < \varepsilon$$

Se cumple la condición para todo x de $\mathbb{R}^N$. Al tomar supremos, la desigualdad pasa a ser no estricta, y el término mayorado por ε se corresponde con $\varphi(t)$ por definición:

$$||t|| < \delta \Rightarrow \varphi(t) = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |f(x+t) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Así, sea $(t_n)_n$ una sucesión que tiende al origen, ha de "atravesar" todos las bolas de radio δ asociado a valores de ε arbitrariamente pequeños. Por tanto, podemos concluir que ϕ es continua en el origen.

Sean $s, t \in \mathbb{R}^N$ cualesquiera, se cumple:

$$\begin{aligned}\varphi(t) = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |f(x+t) - f(x)| &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |f(x+t) - f(x+s)| + |f(x+s) - f(x)| \leq \\ &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |f(x+t) - f(x+s)| + \sup_{y\in\mathbb{R}^N} |f(y+s) - f(y)| \overset{z=x+s}{=} \sup_{z\in\mathbb{R}^N} |f\big(z + (t-s)\big) - f(z)| + \varphi(s)\end{aligned}$$

Despejando, obtenemos $0 \leq \varphi(t) - \varphi(s) \leq \varphi(t-s) \xrightarrow{s\to t} \varphi(0) = 0$.

Por todo lo anterior, concluimos que φ es continua y acotada, luego es medible en $\mathfrak{B}_N$ y en $\mathfrak{M}_N$