Análisis Matemático III

Javier Ortín Rodenas

Curso 2025-2026

Contenidos

Introducción de la asignatura

La materia será la misma que en años anteriores, aunque habrá un cambio en la metodología de enseñanza: no habrá tutorías grupales. No obstante, sí habrá evaluación continua. Su funcionamiento se explicará posteriormente.

Preliminares

En la sección de preliminares se tratarán los siguientes temas:

- Cardinalidad de conjuntos
- Descomposición de abiertos de $\mathbb{R}^N$ en unión de cubos diádicos
- Series dobles

§1. Cardinalidad de conjuntos

0.1.1 Definición de cardinalidad, tipos de cardinalidad

Intuitivamente, podemos definir la cardinalidad de un conjunto como el número de elementos que tiene. Además, es lógico plantear la distinción entre conjuntos finitos e infinitos. Veamos cómo formalizar esta idea.

Sea A un conjunto no vacío, diremos que A es un conjunto finito de cardinalidad $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ si existe una aplicación biyectiva $\varphi : \{1, 2, \ldots, n\} \to A$.
Se considera que el conjunto vacío $\varnothing$ es finito con cardinal 0.

Sea A un conjunto cualquiera, diremos que es un conjunto infinito si existe cierta aplicación inyectiva $\varphi : \mathbb{N} \to A$. Dentro de esta clasificación, diremos que A es infinito numerable si existe una aplicación $\varphi : \mathbb{N} \to A$ biyectiva. Si esto último no fuese posible, diremos que A es infinito no numerable.

Aunque no entra dentro de los objetivos de esta asignatura, es interesante contemplar la siguiente observación: Si un conjunto no es un conjunto finito, podemos afirmar simplemente que es un conjunto "no finito". Si además incluimos el axioma de elección, sí podremos afirmar que tal conjunto es infinito. Dentro de los conjuntos infinitos, todos son o bien numerables o bien no numerables, sin intersección entre ambas categorías.

0.1.2 Ejemplos de conjuntos numerables

• $\mathbb{N}$: trivial, basta considerar la aplicación identidad.

• $\mathbb{Z}$: basta considerar la siguiente aplicación biyectiva:

$$\varphi(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{si } n \text{ es par} \\ -\frac{n-1}{2}, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \qquad \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\ \downarrow\varphi & \downarrow\varphi & \downarrow\varphi & \downarrow\varphi & \downarrow\varphi & \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & \cdots \end{array}$$

• $\mathbb{Q} := \left\{\frac{z}{n} : z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$. Denotaremos por $\hat{Q}$ al conjunto $\left\{\frac{z}{n} : z, n \in \mathbb{N}\right\}$. Como hemos visto en el apartado anterior, al ser $\mathbb{Z}$ numerable, $\hat{Q}$ y $\mathbb{Q}$ han de tener necesariamente la misma cardinalidad. Por tanto, basta con demostrar que $\hat{Q}$ es numerable, lo que haremos a continuación por medio de una doble desigualdad.

Representaremos los elementos de $\hat{Q}$ en una tabla infinita que recorreremos diagonalmente:

	1	2	3	4	$\dots$
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\dots$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\dots$
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\dots$
4	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Por tanto, obtenemos como resultado la siguiente aplicación $\varphi : \mathbb{N} \to \hat{Q}$ con

$$\varphi(1) = \frac{1}{1}, \quad \varphi(2) = \frac{2}{1}, \quad \varphi(3) = \frac{1}{2}, \quad \varphi(4) = \frac{3}{1}, \quad \varphi(5) = \frac{2}{2}, \quad \varphi(6) = \frac{1}{3} \dots$$

Aunque esta aplicación no es inyectiva (por ejemplo $\varphi(1) = \varphi(5)$), sí es suprayectiva. Por tanto, $\operatorname{card}\mathbb{N} \geq \operatorname{card}\hat{Q}$. Además, como $\mathbb{N} \subseteq \hat{Q}$, es evidente que $\operatorname{card}\mathbb{N} \leq \operatorname{card}\hat{Q}$. En consecuencia, $\operatorname{card}\mathbb{N} = \operatorname{card}\hat{Q}$; es decir, $\hat{Q}$ es numerable y por tanto también lo es $\mathbb{Q}$.

0.1.3 Ejemplos de conjuntos no numerables

Vemos que $\mathbb{R}$ es no numerable por reducción al absurdo. Supongamos que existe una aplicación biyectiva $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Así, ha de cumplirse $\varphi(\mathbb{N}) = \mathbb{R}$. Definiremos una sucesión de intervalos encajados como sigue:

- Tomamos a_1, b_1 cualesquiera tales que $a_1 < b_1$ y $\varphi(1) \notin [a_1, b_1]$
- Para $n > 1$, tomamos a_n, b_n tales que $a_n < b_n$, $[a_n, b_n] \subset (a_{n-1}, b_{n-1})$ y $\varphi(n) \notin [a_n, b_n]$

De este modo, obtenemos una sucesión de intervalos cerrados encajados tales que $\varphi(n) \notin [a_n, b_n]\ \forall n \in \mathbb{N}$. Denotando $I_i = [a_i, b_i]$, se cumple:

1. I_1 es compacto por el teorema de Heine-Borel
2. $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ verifica la propiedad de la intersección finita

Al ser una sucesión de intervalos cerrados encajados, juntando las dos nociones anteriores, podemos afirmar que se satisface la propiedad de la intersección infinita. Por tanto, se tiene:

$$\exists\ x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \Rightarrow x_0 \in \mathbb{R}\backslash\varphi(\mathbb{N}) \Rightarrow \varphi(\mathbb{N}) \neq \mathbb{R} \Rightarrow \varphi \text{ no es biyectiva}$$

Se contradice la hipótesis de partida. Por todo lo anterior, concluimos que $\mathbb{R}$ es no numerable.

La aplicación $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$ es biyectiva, luego el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ es no numerable. Por otro lado, podemos establecer una biyección entre este intervalo y cualquier otro intervalo abierto. Así, cualquier intervalo es no numerable.

0.1.4 Procesos que dan lugar a conjuntos numerables

Sea A un conjunto finito, sea B un conjunto infinito numerable. Entonces, $A \cup B$ y $A \times B$ son conjuntos infinitos numerables (o vacíos).

<u>**Demostración:**</u> Distinguiremos dos casos:

Si $A = \varnothing$, entonces $A \cup B = B$ que es infinito numerable por hipótesis. Además, $A \times B = \varnothing$ que es finito por definición.

Si $A \neq \varnothing$, como A es finito podemos afirmar que $A \backslash B = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}\}$ para cierto $n_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Por ser B infinito numerable, existe una aplicación biyectiva $\varphi : \mathbb{N} \to B$. Para ver que $A \cup B$ es infinito numerable, basta considerar la siguiente biyección:

$$\hat{\varphi}(n) = \begin{cases} a_n, & \text{si } n \leq n \leq n_1 \\ \varphi(n - n_1), & \text{si } n > n_1 \end{cases}$$

Esta biyección $\hat{\varphi}$ enumera primero todos los elementos de $A \backslash B$ (de haberlos) para luego enumerar todos los elementos de B en el orden original de φ.

Al ser A finito, podemos escribir $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n_2}\}$ para cierto $n_2 \in \mathbb{N}$. Para ver que $A \times B$ es infinito numerable, podemos enumerar sus elementos de la siguiente forma:

	1	2	$\ldots$	n_2
1	$(a_1, \varphi(1))$	$(a_2, \varphi(1))$	$\ldots$	$(a_{n_2}, \varphi(1))$
2	$(a_1, \varphi(2))$	$(a_2, \varphi(2))$	$\ldots$	$(a_{n_2}, \varphi(2))$
3	$(a_1, \varphi(3))$	$(a_2, \varphi(3))$	$\ldots$	$(a_{n_2}, \varphi(3))$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$

Basta enumerar los elementos de $A \times B$ recorriendo la tabla de izquierda a derecha y de arriba a abajo, pues cada fila tiene n_2 elementos y hay tantas filas como naturales.

0.1.5 Más procesos que dan lugar a conjuntos numerables

Sean A, B conjuntos infinitos numerables con $A \cap B = \varnothing$. Entonces, $A \cup B$ y $A \times B$ son conjuntos infinitos numerables.

Demostración: Al ser A y B infinitos numerables por hipótesis, podemos afirmar que existen ciertas aplicaciones biyectivas $\varphi_A : \mathbb{N} \to A$ y $\varphi_B : \mathbb{N} \to B$.

Para ver que $A \cup B$ es infinito numerable, basta considerar la siguiente biyección:

$$\varphi_{A\cup B}(n) = \begin{cases} \varphi_A\left(\frac{n+1}{2}\right), & \text{si } n \text{ es impar} \\ \varphi_B\left(\frac{n}{2}\right), & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Así, se enumeran alternativamente los elementos de A y B. Al ser $A \cap B = \varnothing$, es seguro que esta aplicación es biyectiva.

Finalmente, para ver que $A \times B$ es infinito numerable, podemos representar sus elementos de forma matricial utilizando un razonamiento diagonal análogo al empleado para ver que $\mathbb{Q}$ es numerable.

Nota: Aunque en esta demostración hemos supuesto que $A \cap B = \varnothing$, el resultado puede aplicarse también para conjuntos de intersección no vacía. Nótese que como A y B son infinito numerables, entonces $A \cap B$, $A \backslash B$ y $B \backslash A$ han de ser necesariamente conjuntos finitos o infinitos numerables. Finalmente, basta ver que $A \cup B = \big((A\backslash B) \cup (B\backslash A)\big) \cup (A \cap B)$, unión de conjuntos disjuntos. Como para el caso del producto cartesiano no se ha usado la hipótesis de que $A \cap B = \varnothing$, el resultado es válido en cualquier caso.

0.1.6 Unión numerable de conjuntos numerables

Sea $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ una colección de conjuntos numerables, entonces su unión es también un conjunto numerable.

Demostración: Utilizaremos también un argumento diagonal.

De manera similar a la demostración anterior, expresaremos la unión $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ a partir de conjuntos auxiliares disjuntos para simplificar el trato de los elementos duplicados:

- Para $n = 1$, definimos $B_1 := A_1$
- Para $n > 1$, definimos $B_n := A_n \backslash \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right) = A_n \backslash \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} B_k\right)$

De este modo, los B_i son disjuntos entre sí. Además, todos los A_i son numerables por hipótesis, cada B_i ha de ser finito o numerable. Según el carácter de cada uno de ellos, introducimos la siguiente notación:

$$\text{Caso finito: } B_i = \left\{b_1^i, b_2^i, \ldots, b_{n_i}^i\right\} \qquad \text{Caso numerable: } B_j = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} b_n^j$$

Con esta notación, expresaremos los elementos de cada B_i tabularmente:

	B_1	B_2	B_3	B_4	$\ldots$
1	b_1^1	b_1^2	b_1^3	b_1^4	$\ldots$
2	b_2^1		b_2^3	b_2^4	$\ldots$
3	b_3^1		b_3^3	b_3^4	$\ldots$
4	b_4^1		b_4^3	b_4^4	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Recorremos diagonalmente la matriz, saltando las celdas vacías en caso de haberlas (ocurriría en caso de que algún B_i fuese finito). Por ejemplo, el B_2 de la figura tiene tan solo un único elemento. Como hemos tomado $B_1 = A_1$, hay infinitos elementos al ser A_1 infinito numerable por hipótesis (no pueden ser finitos todos los B_i).

0.1.7 Definición de conjunto de partes

Sea A un conjunto cualquiera, se denomina "conjunto de partes de A" y se denota como $\mathcal{P}(A)$ al conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de A. En particular, siempre se cumple que $\varnothing, A \in \mathcal{P}(A)$.

Por ejemplo, para $A = \{1, 2\}$, se tiene que $\mathcal{P}(A) = \big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\big\}$.

0.1.8 Cardinal de partes de un conjunto finito

Sea A un conjunto finito, entonces $\operatorname{card} \mathcal{P}(A) = 2^{\operatorname{card} A} \in \mathbb{N}$.

Demostración: Distinguiremos dos casos:

Para $A = \varnothing$, se tiene que $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing\}$, luego $\operatorname{card} \mathcal{P}(A) = 1 = 2^0 = 2^{\operatorname{card} A}$.

Si $A \neq \varnothing$, sea $n := \operatorname{card} A \in \mathbb{N}$, podemos identificar cada subconjunto de A según la presencia o ausencia de cada uno de sus n elementos. Definimos el conjunto de las tuplas de ceros y unos de longitud n como sigue:

$$C := \big\{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) : \varepsilon_i \in \{0, 1\} \ \ \forall i \in \{1, \dots, n\}\big\}$$

Así, denotando $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, cada tupla de C puede asociarse biunívocamente a un subconjunto de A al indicar cada ε_i si el elemento a_i pertenece o no al subconjunto. Por tanto, la siguiente aplicación φ es biyectiva:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{P}(A) &\longrightarrow C \\ B &\longmapsto \prod_{i=1}^{n} f_i(B) \end{aligned} \qquad \text{donde} \qquad \begin{aligned} f_i : \mathcal{P}(A) &\longrightarrow \{0, 1\} \\ B &\longmapsto \begin{cases} 1, & \text{si } a_i \in B \\ 0, & \text{si } a_i \notin B \end{cases} \end{aligned}$$

0.1.9 El conjunto de partes incrementa la cardinalidad

Sea A un conjunto cualquiera. Entonces, $\operatorname{card} A < \operatorname{card} \mathcal{P}(A)$.

Demostración: Para todo conjunto A se cumple que $\operatorname{card} A \leq \operatorname{card} \mathcal{P}(A)$, pues $a \in A \Rightarrow \{a\} \in \mathcal{P}(A)$. Veamos ahora que no puede darse la igualdad por reducción al absurdo.

Supongamos que existe un conjunto A tal que $\operatorname{card} \mathcal{P}(A) = \operatorname{card} A$. En tal caso, ha de existir una aplicación biyectiva $\varphi : A \to \mathcal{P}(A)$. A partir de ella definimos el siguiente conjunto auxiliar: $B := \{a \in A : a \notin \varphi(a)\}$. Por construcción, B es un subconjunto de A, luego $B \in \mathcal{P}(A)$. Al ser φ biyectiva, existe cierto $z \in A$ tal que $\varphi(z) = B$.
Pueden darse dos casos:

1.) $z \in B = \varphi(z) \Rightarrow z \notin \varphi(z) = B$, contradicción.

2.) $z \notin B = \varphi(z) \Rightarrow z \in B = \varphi(z)$, contradicción

En cualquiera de ellos se llega a una contradicción. Por todo lo anterior, concluimos que $\operatorname{card} A < \operatorname{card} \mathcal{P}(A)$.

0.1.10 Cardinalidad de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

De manera similar a como hicimos para ver el cardinal de un conjunto finito, podemos identificar cada subconjunto de $\mathbb{N}$ en base a la presencia o ausencia de cada número natural en tal conjunto. Así, sabemos que existe una biyección entre los subconjuntos de $\mathbb{N}$ y las sucesiones formadas por ceros y unos:

$$\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \Big\{0, 1\Big\}^{\mathbb{N}} = \Big\{(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} : \varepsilon_i \in \{0, 1\} \;\; \forall i \in \mathbb{N}\Big\}$$

Además, podemos asociar cada sucesión de ceros y unos a la expresión en base 2 de un número real del intervalo $[0, 1]$. Aplicando lo visto en los resultados 0.1.3 y 0.1.4, tal intervalo tiene la misma cardinalidad que $\mathbb{R}$; es decir, $2^{\aleph_0}$.

0.1.11 Jerarquía de cardinalidades

En vista de los resultados anteriores, podemos establecer una jerarquía de cardinalidades. En primer lugar, está el conjunto vacío (de cardinal cero). A continuación, los conjuntos finitos de cardinal natural. Pasando ahora a los conjuntos infinitos, la menor cardinalidad posible es la de los conjuntos infinitos numerables, denotada por $\aleph_0$. Como consecuencia del resultado 0.1.9, sabemos que podemos encontrar conjuntos de cardinalidad cada vez mayor al considerar el conjunto de partes de la iteración anterior.

Cabe preguntarse si existe algún tipo de cardinalidad intermedia entre los infinitos de esta escala. Esta cuestión es la conocida como Hipótesis del Continuo (CH), y se sabe que no puede ser probada ni refutada a partir de los axiomas habituales de la teoría de conjuntos (ZFC). Por tanto, debe considerarse como un axioma adicional independiente de ZFC: el axioma del continuo.

§2. Descomposición de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^N$ en cubos diádicos

0.2.1 Definición de intervalo diádico

Se llama "intervalo diádico de orden n" con $n \in \mathbb{N}$ a cualquier intervalo real de la forma $\left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right)$ con $j \in \mathbb{Z}$.

0.2.2 Propiedades de los intervalos diádicos

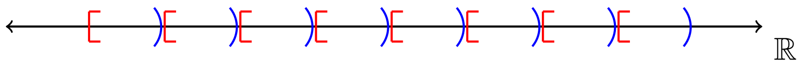
Fijado $n \in \mathbb{N}$ cualquiera, se tiene que la colección de todos los intervalos diádicos de orden n es numerable (pues hay uno por cada $j \in \mathbb{Z}$) y recubre $\mathbb{R}$:

$$\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right) = \mathbb{R}$$

Además, dos intervalos diádicos cualesquiera son disjuntos o bien coinciden:

$$i \neq j \Rightarrow \left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right) \bigcap \left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right) = \varnothing$$

Las dos propiedades anteriores pueden visualizarse en la siguiente figura:

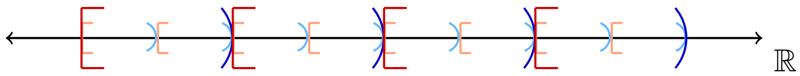


Para $n \in \mathbb{N}$ fijo, son disjuntos y cubren $\mathbb{R}$

Si I es un intervalo diádico de orden n y J es un intervalo diádico de orden $m \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$: entonces se cumple:

- O bien $I \subsetneq J$
- O bien $I \cap J = \varnothing$

La siguiente figura ilustra este hecho:



Intervalos diádicos de orden n y $n+1$

0.2.3 Definición de cubo diádico

Llamamos "cubo diádico de $\mathbb{R}^N$ de orden n" con $n, N \in \mathbb{N}$ a cualquier conjunto de la forma $I_1, \times I_2 \times \ldots \times I_N$ donde cada I_i es un intervalo diádico de orden n.

Denotaremos por $\mathcal{F}_n$ al conjunto de todos los cubos diádicos de orden n en $\mathbb{R}^N$.

0.2.4 Propiedades de los cubos diádicos

Los cubos diádicos de orden n son numerables y recubren R^N (consecuencia de la definición y de los resultados anteriores). Además, son disjuntos o coinciden; es decir:

$$\left.\begin{array}{l} C \in \mathcal{F}_n \\ D \in \mathcal{F}_n \\ C \neq D \end{array}\right\} \Rightarrow C \cap D = \varnothing$$

Como $C, D \in \mathcal{F}_m$, han de ser de la siguiente forma:

$$C = I_1 \times \ldots \times I_N \qquad\qquad D = J_1 \times \ldots \times J_N$$

donde los I_i y los J_j son intervalos diádicos de orden n. Por hipótesis, $C \neq D$ luego ha de existir cierto $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $I_k \neq J_k$. Por las propiedades de los intervalos diádicos, sabemos que esto implica que $I_k \cap J_k = \varnothing$. Esto a su vez implica que $C \cap D = \varnothing$.

De manera similar, si $C \in \mathcal{F}_n, D \in \mathcal{F}_m$ con $m \leq n$. Entonces o bien $C \subsetneq D$ o bien $C \cap D = \varnothing$. Por definición de $\mathcal{F}_n$ y $\mathcal{F}_m$, podemos afirmar que:

$$C = I_1 \times \ldots \times I_N \qquad\qquad D = J_1 \times \ldots \times J_N$$

Donde los I_i y los J_j son intervalos diádicos de orden n y m, respectivamente. Por las propiedades de los intervalos diádicos, para cada $k \in \{1, \ldots, N\}$ se tiene que o bien $I_k \subsetneq J_k$ o bien $I_k \cap J_k = \varnothing$. Si $\exists k_0 \in \{1, \ldots, N\}$ tal que $I_{k_0} \cap J_{k_0} = \varnothing$, entonces $C \cap D = \varnothing$. En caso contrario, $C \subsetneq D$.

0.2.5 Teorema de descomposición de abiertos en cubos diádicos

Para todo subconjunto no vacío y abierto en $\left(\mathbb{R}^N, \tau_{R^N}(d)\right)$, O, existe una colección numerable de cubos diádicos (posiblemente de órdenes distintos) de $\mathbb{R}^N$, $\{C_n : n \in \mathbb{N}\}$, tales que:

1.) $O = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$

2.) $\overline{C_n} \subseteq O \;\; \forall n \in \mathbb{N}$

3.) $i \neq j \Rightarrow C_i \cap C_j = \varnothing$

Demostración: Definiremos varios conjuntos auxiliares.

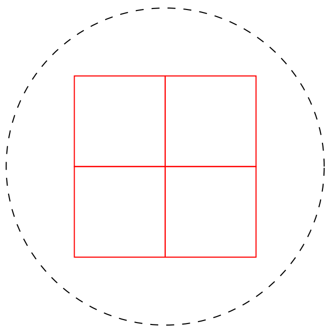
Definimos $\mathcal{G}_n := \left\{C \in \mathcal{F}_n : \overline{C} \subseteq O\right\}$. Cada una de estas colecciones de conjuntos es finita o numerable al serlo $\mathcal{F}_n$.

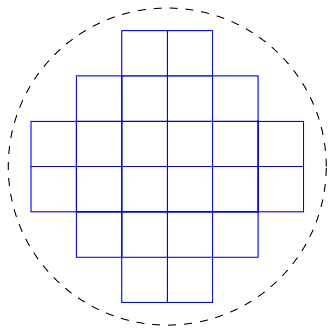
A partir de los $\mathcal{G}_n$ definiremos otra colección de conjuntos. Para $n = 1$, tomamos $\mathcal{H}_1 := \mathcal{G}_1$. Para $n > 1$, definimos

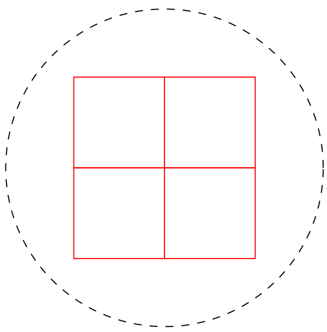
$$\mathcal{H}_n := \left\{ C \in \mathcal{G}_n : C \not\subseteq \bigcup_{k=1}^{n-1} \mathcal{H}_k \right\} = \left\{ C \in \mathcal{G}_n : C \cap \left[\bigcup_{k=1}^{n-1} \bigcup_{D \in \mathcal{H}_k} D_k \right] = \varnothing \right\}$$

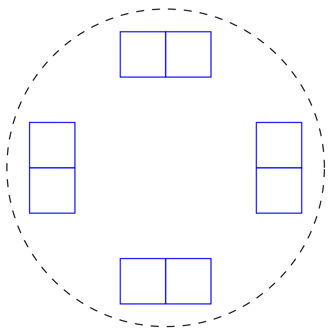
La última igualdad se deduce de las propiedades de los cubos diádicos. Por construcción, los $\mathcal{H}_n$ son numerables y disjuntos entre sí. Además, por construcción, la clausura de sus cubos está contenida en O. Queda probar el punto (1).

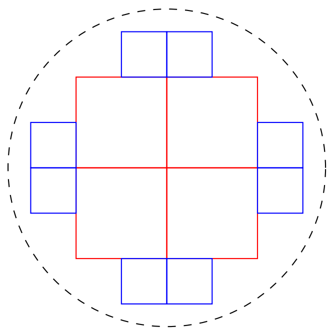
Intuitivamente, $\mathcal{G}_n$ modela los cubos de un cierto orden que "caben" en O. El paso a los $\mathcal{H}_n$ hace que solo se empiecen a usar cubos "más pequeños" en las zonas donde no "cabrían" cubos de un orden inferior ("más grandes").


$\mathcal{G}_1$


$\mathcal{G}_2$


$\mathcal{H}_1 = \mathcal{G}_1$


$\mathcal{H}_2$


$\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$

Probaremos que $\quad O = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{C\in\mathcal{H}_n} C \quad$ por doble contenido.

$\supseteq$ Por definición de $\mathcal{H}_n$, $\quad \forall n \in \mathbb{N}$ se tiene $C \in \mathcal{H}_n \Rightarrow C \subsetneq \overline{C} \subsetneq O$

$\subseteq$ Sea $x_0 \in O \subseteq \mathbb{R}^N$ cualquiera, podemos expresarlo como $x_0 = (x_1, \ldots, x_N)$.

Al ser O abierto en $(\mathbb{R}^N, \tau_{\mathbb{R}^N}(d))$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ que verifica:

$$x_0 \in \prod_{i=1}^{N} \left(x_i - \frac{1}{2^{n_0}},\ x_i + \frac{1}{2^{n_0}} \right) \subset \prod_{i=1}^{N} \left[x_i - \frac{1}{2^{n_0}},\ x_i + \frac{1}{2^{n_0}} \right] \subset O$$

Además, para cada coordenada $1 \leq i \leq N$ tenemos que $\exists! j_i \in \mathbb{Z} : x_i \in \left[\frac{j_i-1}{2^{n_0}}, \frac{j_i}{2^{n_0}}\right)$. Así, para cada $i \in 1, \ldots, N$ se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{j_i-1}{2^{n_0}} \leq x_i \Rightarrow \frac{j_i}{2^{n_0}} \leq x_i + \frac{1}{2^{n_0}} \\ x_i < \frac{j_i}{2^{n_0}} \Rightarrow x_i - \frac{1}{2^{n_0}} < \frac{j_i-1}{2^{n_0}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\tfrac{j_i-1}{2^{n_0}}, \tfrac{j_i}{2^{n_0}}\right) \subset \left(x_i - \tfrac{1}{2^{n_0}}, x_i + \tfrac{1}{2^{n_0}}\right)$$

De este modo, $D_0 := \prod_{i=1}^{N} \left[\frac{j_i - 1}{2^{n_0}}, \frac{j_i}{2^{n_0}} \right) \subsetneq \prod_{i=1}^{N} \left[x_i - \frac{1}{2^{n_0}}, x_i + \frac{1}{2^{n_0}} \right] \subsetneq O.$

Y por tanto, $x_0 \in D_0 \subsetneq \overline{D_0} \subsetneq O$. A su vez, como $D_0 \in \mathcal{G}_{n_0}$, hemos demostrado también que el siguiente conjunto es no vacío:

$$\mathcal{A}_{x_0} := \Big\{ n \in \mathbb{N} : \exists\, C \in \mathcal{G}_n \text{ tal que } x_0 \in C \Big\}$$

Al ser A_{x_0} un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$, podemos afirmar que tiene mínimo, al que denotaremos m_0. Así, ha de existir $C_0 \in \mathcal{G}_{m_0}$ tal que $x_0 \in C_0$, veamos que $C_0 \in \mathcal{H}_{m_0}$. Por definición de $\mathcal{H}_{m_0}$, $C_0 \notin \mathcal{H}_{m_0} \Rightarrow C_0 \in \mathcal{G}_n$ para cierto $n < m_0$. Esto contradice que m_0 sea el mínimo de $\mathcal{A}_{x_0}$. Hemos demostrado que $C_0 \in \mathcal{H}_{m_0}$.

§3. Series dobles

El álgebra contempla únicamente la suma como operación binaria. Por la propiedad asociativa, es posible expresar cualquier suma finita como sumas binarias sucesivas. No obstante, el álgebra por sí misma no nos basta para sumar series.

0.3.1 Definición de sucesión doble

Llamamos "sucesión doble" a cualquier aplicación

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty - \infty\} \\ n, m &\longmapsto \gamma(n, m) = a_{nm} \end{aligned}$$

Diremos que a_{nm} es el término general de la sucesión.

0.3.2 Definición de serie doble

Dada una sucesión doble de término general a_{nm}, llamamos "serie doble de término general a_{nm}" a la expresión $\displaystyle\sum_{n,m} a_{nm}$ (que equivale a $\displaystyle\sum_{\substack{n=1\\m=1}} a_{nm}$).

Diremos que $\sum_{n,m} a_{nm}$ es convergente si sus sumas parciales convergen a un número real. Es decir, si: $\exists s \in \mathbb{R}$ que verifica:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \;\; n, m \geq n_0 \Rightarrow \left| s - \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{ij} \right| < \varepsilon$$

En este caso, diremos que este s es el "valor de la suma de la serie".

Diremos que $\sum_{n,m} a_{nm}$ es divergente a $+\infty(-\infty)$ si $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que dados $n, m \geq n_0$ se cumple:

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{ij} > K \qquad\qquad \left(\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{ij} < K \right)$$

En este caso, diremos que el valor de la suma de la sucesión es $+\infty(-\infty)$.

Es importante distinguir la igualdad de series como sucesiones y como valores. Veamos un ejemplo con series simples:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + 0 + 0 + 0 + \dots \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

Es claro que las series no tienen el mismo término general (no son iguales como series), pero sí tienen el mismo valor de suma (que es 1).

0.3.3 Teorema de series dobles no negativas

Dada una sucesión doble $\gamma : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow [0, +\infty]$ de término general a_{nm}, dada una biyección cualquiera $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, se cumple:

$$\sum_{n,m} a_{nm} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{g(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nm} \in [0, +\infty]$$

<u>Demostración:</u> Probaremos primero la igualdad respecto de la reordenación y después respecto de las series anidadas.

Si existe algún término $a_{n_0 m_0} = +\infty$, entonces la igualdad se cumple trivialmente al estar las sumas bien definidas ($\gamma(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \subseteq [0, +\infty]$). Supongamos entonces que todos los términos son finitos, veamos qué casos pueden darse:

- Primer caso: Supongamos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{g(n)} = s \in \mathbb{R}$.

Por definición, $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, n_0 \in \mathbb{N} : \ s - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{g(k)} < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$. Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera pero fijo, fijamos también el n_0 asociado. Como g es biyectiva, $\exists \, m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $g(\{1, \dots, n_0\}) \subseteq \{1, \dots, m_0\} \times \{1, \dots, m_0\}$. Al tratarse de series de términos no negativos, dados $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0, m \geq n_0$, se cumple:

$$\sum_{k=1}^{n_0} a_{g(k)} \leq \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{ij} \Rightarrow 0 \overset{(*)}{\leq} s - \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{ij} \leq s - \sum_{k=1}^{n_0} a_{g(k)} < \varepsilon$$

(*) La desigualdad se deduce de que la suma parcial de la serie doble es una reordenación de la suma parcial de la serie simple, siendo esta última absolutamente convergente. Como podemos hacer ε arbitrariamente pequeño, concluimos que las dos series tienen el mismo límite.

- Segundo caso: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{g(n)} = +\infty$.

Sea $K \in \mathbb{R}$, por definición, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{g(k)} > K \;\forall\, n \geq n_0$. Al ser g biyectiva, $\exists\, m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $g(1,\ldots,n_0) \subseteq \{1,\ldots,m_0\} \times \{1,\ldots,m_0\}$. Así, dados $n \geq m_0, m \geq m_0$ se tiene:

$$K < \sum_{k=1}^{n_0} a_{g(k)} \leq \sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}} a_{ij}$$

Es claro que la serie doble diverge a $+\infty$.

Queda probar la igualdad entre la serie doble y las series anidadas cuando todos los términos son finitos. Veamos qué ocurre según el carácter de la serie doble.

- Primer caso: $\sum_{n,m} a_{nm} = s \in [0, +\infty)$.

Sea $\varepsilon > 0$. Por definición de convergencia, sabemos que $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que dados $n \geq n_0, m \geq n_0$ se tiene:

$$\left| s - \sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}} a_{ij} \right| < \varepsilon$$

Nótese que debido a las propiedades algebraicas de la suma, en el caso finito se da la igualdad; es decir:

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

De este modo, sustituyendo en la definición de convergencia, dados $n \geq n_0, m \geq n_0$ obtenemos:

$$\left| s - \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \right| < \varepsilon \Rightarrow \varepsilon \geq \lim_{n} \left| s - \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \right| = \left| s - \sum_{j=1}^{m} \lim_{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \right) \right|$$

La igualdad se debe a aplicar las propiedades del límite con funciones continuas. Como la serie doble converge por hipótesis, también han de hacerlo las series de filas y columnas. Es por ello que podemos afirmar que el último límite existe.

La igualdad anterior se cumple para cualquier $\varepsilon > 0$ y para cualquier $m \geq n_0$. Haciendo ε arbitrariamente pequeño y tomando límites en m llegamos al resultado. El razonamiento para la otra serie anidada es análogo; así, concluimos:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nm} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} = \sum_{n,m} a_{nm}$$

- Segundo caso: $\sum_{n,m} a_{nm} = +\infty$. Si hubiese algún $n \in \mathbb{N}$ verificando $\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} = +\infty$ o si existiese algún $m \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_{nm} = +\infty$, las series anidadas divergerían trivialmente. Supongamos que no es el caso para ver que también se cumple el resultado.

Sea $K \in \mathbb{R}$ cualquiera, por definición de divergencia se cumple:

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall\, n \geq n_0, \forall m \geq n_0 \text{ se cumple } \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} > K$$

Nótese que hemos utilizado la igualdad entre la serie doble y las series anidadas para el caso finito. Además, dados $n \geq n_0, m \geq n_0$, se cumple:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} > K \Rightarrow K \leq \lim_{n} \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}\right)$$

Las series de suma de filas y columnas existen por hipótesis, luego la igualdad se cumple para todo $m \geq n_0$. Tomando límites en m podemos observar que $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nm} \geq K$. Como el K escogido fue arbitrario, se cumple para cualquier K real. Así, las series anidadas divergen a $+\infty$ (análogo para la otra serie anidada).

I Teoría de la medida

§1. Espacios de medida

1.1.1 Definición de σ-álgebra

Sea X un conjunto cualquiera, diremos que $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una σ-álgebra si cumple las siguientes propiedades:

S.1) $\varnothing \in \Sigma$

S.2) $\{E_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \Sigma \Rightarrow \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i \in \Sigma$

S.3) $E \in \Sigma \Rightarrow E^c := X \backslash E \in \Sigma$

Nótese que no es necesario exigir que X tenga ningún tipo de estructura (ni topológica, ni algebraica...).

1.1.2 Propiedades de las σ-álgebras

Sea X un conjunto, sea Σ una σ-álgebra de X. Sea $\{E_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \Sigma$, y $E, F \in \Sigma$. Entonces, se cumple:

i) $\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i \in \Sigma$

ii) $E \cup F \in \Sigma$

iii) $E \cap F \in \Sigma$

iv) $E \backslash F \in \Sigma$

Demostración:

i) Por la propiedad $(S.3)$ y la involución del complementario, un conjunto pertenece a una σ-álgebra si y solo si su complementario pertenece a ella. Por tanto, basta ver que: $X \setminus \left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} E_i\right) = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} (X \setminus E_i) \in \Sigma$.

Por la propiedad $(S.3)$, para cada $i \in \mathbb{N}$ tenemos que $X \setminus E_i \in \Sigma$, pues $E_i \in \Sigma$ por hipótesis. Finalmente, aplicando $(S.1)$ tenemos que su unión numerable se encuentra en Σ.

ii) Reescribiremos $E \cup F$ para hacer uso del resultado que acabamos de probar. Por $(S.1)$ sabemos que $\varnothing \in \Sigma$ luego podemos considerar la colección numerable de conjuntos de Σ, $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ donde $A_1 = E,\ \ A_2 = F$, y $A_n = \varnothing\ \ \forall\, n > 2$.

De este modo, $E \cup F = E \cup F \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \ldots = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \Sigma$.

iii) Como consecuencia de $(S.1)$ y de $(S.3)$, sabemos que $X \in \Sigma$. Así, basta considerar $B_1 = E$, $B_2 = F$, $B_n = X\ \ \forall\, n > 2$.

Aplicando el apartado (i), $E \cap F = E \cap F \cap X \cap X \cap \ldots = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i \in \Sigma$.

iv) Por definición de complementario, $E \setminus F = E \cap (X \setminus F)$. Por hipótesis, $E, F \in \Sigma$. Aplicando $(S.3)$, $(X \setminus F) \in \Sigma$. Finalmente, aplicando el apartado (iii), $E \cap (X \setminus F) \in \Sigma$.

1.1.3 Definición de espacio de medida

Sea X un conjunto cualquiera y Σ una σ-álgebra de X, diremos que $\mu : \Sigma \longrightarrow [0, +\infty]$ es una medida sobre Σ si verifica las siguientes propiedades:

M.1) $\mu(\varnothing) = 0$

M.2) Sean $\{E_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \Sigma$ tales que $i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \varnothing$; entonces,

$$\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(E_i)$$

A la tríada (X, Σ, μ) se la denomina “espacio de medida”, y a los conjuntos de Σ se los llama “conjuntos (μ-)medibles de X”.

1.1.4 Propiedades de los espacios de medida

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida, se cumple:

i) Sean $E, F \in \Sigma$ con $F \subseteq E$, se cumple $\mu(F) \leq \mu(E)$.
Si además se tiene que $\mu(F) < +\infty$, entonces $\mu(E \setminus F) = \mu(E) - \mu(F)$.

ii) Sean $\{E_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \Sigma$ tales que $E_i \subseteq E_{i+1} \ \forall\, i \in \mathbb{N}$.
Entonces, $\mu(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i) = \lim\limits_n \mu(E_n)$.

iii) Sean $\{E_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \Sigma$ tales que $E_{i+1} \subseteq E_i \ \forall\, i \in \mathbb{N}$, y $\mu(E_1) < +\infty$.
Entonces, $\mu(\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i) = \lim\limits_n \mu(E_n)$.

Demostración:

i) Reescribiendo como unión numerable de conjuntos disjuntos de Σ,

$$E = (E \setminus F) \cup F \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \dots$$

Aplicando $(M.3)$ y evaluando μ a ambos lados obtenemos:

$$\mu(E) = \mu(E \setminus F) + \mu(F) + \mu(\varnothing) + \mu(\varnothing) + \dots$$

Aplicando $(M.1)$ se deduce que $\mu(E) = \mu(E \setminus F) + \mu(F)$. Por la no negatividad de μ, se tiene que $\mu(E \setminus F) \geq 0 \Rightarrow \mu(F) \leq \mu(F)$.

Si además $\mu(F) < +\infty$, podemos despejar sin que ocurran indeterminaciones; así, $\mu(E \setminus F) = \mu(E) - \mu(F)$.

ii) Una vez más, reescribimos el conjunto a partir de uniones disjuntas:

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i = E_1 \cup \Big(E_2 \setminus E_1\Big) \cup \Big(E_3 \setminus (E_2 \cup E_1)\Big) \cup \Big(E_4 \setminus (E_1 \cup E_2 \cup E_3)\Big) \cup \dots$$

Como $E_i \subseteq E_{i+1}$ por hipótesis, podemos simplificar esta expresión:

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i = E_1 \cup (E_2 \setminus E_1) \cup (E_3 \setminus E_2) \cup (E_4 \setminus E_3) \cup \dots = E_1 \cup \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (E_{i+1} \setminus E_i)\right)$$

Así, $\mu\left(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i\right) = \mu(E_1) + \sum\limits_{i=2}^{\infty} \mu(E_i \setminus E_{i-1}) = (*)$.

Distinguimos dos casos en función de la medida de los E_i:

ii.a) Existe cierto $j \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(E_j) = +\infty$. Como $E_j \subseteq E_n \ \forall\, n \geq j$, aplicando las propiedad (i) de la medida, se tiene que $\mu(E_n) = +\infty \ \ \forall\, n \geq j$, luego ha de cumplirse $\lim\limits_n \mu(E_n) = +\infty$. Por otro lado, como $E_j \subseteq \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i$, se tiene que $+\infty = \mu(E_j) \leq \mu(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i)$, luego, $\lim\limits_n \mu(E_n) = \mu(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i) = +\infty$.

ii.b) En caso contrario al anterior, $\mu(E_i) < +\infty \ \ \forall\, i \in \mathbb{N}$. Desarrollando en $(*)$,

$$\begin{aligned}
\mu\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\Big) &= \mu(E_1) + \sum_{i=2}^{\infty} \mu(E_i \setminus E_{i-1}) = \mu(1) + \lim_n \sum_{i=2}^{n} \mu(E_i \setminus E_{i-1}) = \\
&= \lim_n \Big(\mu(E_1) + \mu(E_2 \setminus E_1) + \mu(E_3 \setminus E_2) + \ldots + \mu(E_n \setminus E_{n-1})\Big) = \\
&= \lim_n \Big(\mu(E_1) + \big(\mu(E_2) - \mu(E_1)\big) + \ldots + \big(\mu(E_n) - \mu(E_{n-1})\big)\Big) = \\
&= \lim_n \mu(E_n)
\end{aligned}$$

Hemos podido simplificar porque todas las medidas son finitas; de lo contrario, podrían producirse indeterminaciones.

iii) Por hipótesis, $E_{i+1} \subseteq E_i \ \ \forall\, i \in \mathbb{N}$, y $\mu(E_1) < +\infty$. De este modo, como todos los E_i son subconjuntos de E_1 han de tener medida finita también (propiedad (i) de la medida). Expresamos la intersección según el complementario respecto de E_1 como sigue: $E_1 \setminus \big(\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i\big) = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} \big(E_1 \setminus E_i\big)$.

Por hipótesis, $E_{i+1} \subseteq E_i \Rightarrow (E_1 \setminus E_i) \subseteq (E_1 \setminus E_{i+1})$. Como consecuencia, aplicando los apartados anteriores de este resultado,

$$\begin{aligned}
\mu(E_1) - \mu\Big(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} E_i\Big) &= \mu\Big(E_1 \setminus \big(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} E_i\big)\Big) = \mu\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (E_1 \setminus E_i)\Big) = \\
&= \lim_n \mu(E_1 \setminus E_n) = \mu(E_1) - \lim_n \mu(E_n)
\end{aligned}$$

Como todas las medidas son finitas, podemos despejar sin indeterminaciones:

$$\mu\Big(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} E_i\Big) = \lim_n \mu(E_n)$$

1.1.5 Espacio de medida inducido

Dado un espacio de medida (X, Σ, μ). Sea $A \in \Sigma$ cualquiera, definimos la siguiente colección $\Sigma(A) := \{B \cap A : B \in \Sigma\}$. Entonces, $(A, \Sigma(A), \mu_{|\Sigma(A)})$ es un espacio de medida.

__Demostración:__ Comencemos comprobando que $\Sigma(A)$ es en efecto una σ-álgebra.

$(S.1)$ Por ser Σ una σ-álgebra, $\varnothing \in \Sigma$. Así, basta tomar $B = \varnothing$. De este modo, $\varnothing = A \cap \varnothing \in \Sigma(A)$.

$(S.2)$ Sean $\{E_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \Sigma(A)$, buscamos $\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} E_i \in \Sigma(A)$. Por definición de $\Sigma(A)$, cada E_i será de la forma $A \cap F_i$ con $F_i \in \Sigma$. Así, se tiene:

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A \cap F_i = A \cap \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i \right) \in \Sigma(A)$$

Consideramos $B = \underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} F_i \in \Sigma$ al aplicar $(S.2)$ en Σ.

$(S.3)$ Sea $E \in \Sigma(A)$, buscamos $A \setminus E \in \Sigma(A)$. Por definición de $\Sigma(A)$, podemos afirmar que $E = A \cap B$ para cierto $B \in \Sigma$. Aplicando $(S.3)$, por ser Σ una σ-álgebra de X, $B \in \Sigma \Rightarrow X \setminus B \in \Sigma$. Así, $A \setminus E = A \cap (X \setminus B) \in \Sigma(A)$.

Queda ver que $\mu_{|\Sigma(A)}$ es una medida. Como $\Sigma(A) \subseteq \Sigma$, las propiedades de μ se trasladan trivialmente a $\mu_{|\Sigma(A)}$.

__Nota:__ Para definir una σ-álgebra inducida basta tomar $A \subseteq X$ cualquiera. No obstante, para que $\mu_{|\Sigma(A)}$ sea una medida, necesitamos que $\Sigma(A) \subseteq \Sigma$, y para ello es necesario exigir $A \in \Sigma$.

1.1.6 Medida de contar

Veamos dos ejemplos de espacios de medida:

•$(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$ donde m es la "medida de contar" y se define como

$$m(A) = \begin{cases} \operatorname{card} A & \text{si } A \text{ es finito} \\ +\infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$

•$(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mu)$ donde $\mu(B) = m(B \cap \mathbb{N})$.

Al ser el conjunto de partes una σ-álgebra trivialmente, basta ver que las medidas cumplen $(M.1)$ y $(M.2)$, lo que es evidente en vista de su definición.

En este tema buscamos establecer una medida en $\mathbb{R}^N$ basada en la longitud de los intervalos. Hemos de definir adecuadamente la σ-álgebra asociada, pues ha de incluir a todos los intervalos (y por tanto a todos los abiertos) y a sus complementarios (luego todos los cerrados). Sin embargo, como veremos más adelante, no es posible tomar simplemente $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$.

1.1.7 Subaditividad en espacios de medida

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida, sean $\{E_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \Sigma$. Entonces, se cumple:

$$\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(E_i)$$

__**Demostración:**__ Expresaremos $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i$ como unión de conjuntos disjuntos.

Definimos $F_1 := E_1 \in \Sigma$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n \in \Sigma$. Así, $F_{n+1} := E_{n+1} \setminus (E_1 \cup \ldots \cup E_n) \in \Sigma$. Veamos que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i$ por doble contenido.

$\subseteq$ $\forall\, i \in \mathbb{N},\, F_i \subseteq E_i \Rightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i$.

$\supseteq$ | Sea $x_0 \in \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i$; por definición, $\exists\, i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_0 \in E_{i_0}$.

Por tanto, el siguiente conjunto $\mathcal{A}_{x_0}$ es no vacío: $\mathcal{A}_{x_0} := \{n \in \mathbb{N} : x_0 \in E_n\}$. Al ser un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$, podemos afirmar que existe $m_0 := \min \mathcal{A}_{x_0}$. Por definición de $\mathcal{A}_{x_0}$

$$\left.\begin{array}{l} x_0 \in E_{m_0} \\ x_0 \notin E_i \ \ \forall\, i < m_0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_0 \in F_{m_0} \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i$$

Volviendo al problema de la subaditividad, se cumple:

$$\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i) = \mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i) = \mu(F_1) + \mu(F_2) + \ldots \leq \mu(E_1) + \mu(E_2) + \ldots = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(E_i)$$

La desigualdad se debe a que $\forall\, i \in \mathbb{N}, F_i \subseteq F_i \Rightarrow \mu(F_i) \leq \mu(E_i)$.

1.1.8 Definición de espacio de medida completo

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida, diremos que es un "completo" (o que Σ es completo respecto de μ) si se cumple:

$$\forall\, B \in \Sigma \text{ con } \mu(B) = 0,\ \ \forall\, A \subseteq B \text{ se tiene que } A \in \Sigma \text{ y por tanto } \mu(A) = 0$$

1.1.9 Compleción de un espacio de medida

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida cualquiera. Existe una σ-álgebra $\tilde{\Sigma}$ de X con $\Sigma \subseteq \tilde{\Sigma}$. y una medida $\tilde{\mu}$ sobre $\tilde{\Sigma}$ tales que $\tilde{\mu}_{|\Sigma} = \mu$ y $(X, \tilde{\Sigma}, \tilde{\mu})$ es completo.

De hecho, podemos hallar $\tilde{\Sigma}$ y $\tilde{\mu}$ para que $(X, \tilde{\Sigma}, \tilde{\mu})$ sea el menor espacio completo que contiene a (X, Σ, μ). Es decir, sea (X, Ω, ν) un espacio de medida completo tal que $\Sigma \subseteq \Omega$ y $\nu_{|\Sigma} = \mu$; entonces, $\tilde{\Sigma} \subseteq \Omega$.

En tal caso, diremos que $(X, \tilde{\Sigma}, \tilde{\mu})$ es la "compleción de (X, Σ, μ)".

Demostración: Definiremos el siguiente conjunto auxiliar:

$$\mathcal{N} := \{N \in \mathcal{P}(X) : \exists\, B \in \Sigma \text{ tal que } N \subseteq B \text{ y } \mu(B) = 0\}$$

Intuitivamente, $\mathcal{N}$ contiene todos los conjuntos que podrían faltarle a Σ para que (X, Σ, μ) fuese un espacio de medida completo. Veamos cómo expandir Σ incluyendo estos conjuntos sin introducir otros nuevos que necesitemos completar.

Basta considerar la siguiente definición de $\tilde{\Sigma}$:

$$\tilde{\Sigma} := \{A \cup N : A \in \Sigma, N \in \mathcal{N}\}$$

Para verificar que $\tilde{\Sigma}$ cumple las propiedades que deseamos, introduciremos la siguiente observación: Sean $A \in \Sigma, N \in \mathcal{N}$. Existen $N_0 \in \mathcal{N}$, $M \in \Sigma$ tales que:

$$A \cup N = A \cup N_0 \qquad N_0 \subseteq M \qquad \mu(M) = 0 \qquad A \cap M = \varnothing$$

Veamos la demostración:

Al considerar $N_0 := N \setminus A$ es claro que $A \cup N = A \cup (N \setminus A) = A \cup N_0$.
Como $N \in \mathcal{N}$, se tiene que $\exists\, B \in \Sigma$ con $N \subseteq B$ y $\mu(B) = 0$.
Así, tomando $M := B \setminus A \in \Sigma$ se cumple $A \cap M = \varnothing$.
Además, $N \subseteq B \Rightarrow N_0 = N \setminus A \subseteq B \setminus A = M$.
Finalmente, $M \subseteq B \Rightarrow 0 \leq \mu(M) \leq \mu(B) = 0 \Rightarrow \mu(M) = 0$.

Comprobemos ahora que $\tilde{\Sigma}$ es en efecto una σ-álgebra de X.

$(S.1)$ Buscamos $\varnothing \in \tilde{\Sigma}$

Para ello hay que expresar $\varnothing = A \cup N$ con $A \in \Sigma$, $N \in \mathcal{N}$.
Tenemos que $\varnothing \in \Sigma$ por ser Σ una σ-álgebra.
Además, $\varnothing \subseteq \varnothing$ con $\varnothing \in \Sigma$ y $\mu(\varnothing) = 0$.
Por tanto, tenemos que $\varnothing \in \mathcal{N}$ al tomar $B = \varnothing$ en la definición de $\mathcal{N}$.
Así, tomando $A = N = \varnothing$, $\varnothing = A \cup N = \varnothing \cup \varnothing \in \tilde{\Sigma}$.

$(S.2)$ Sean $\{E_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \tilde{\Sigma}$, buscamos $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i \in \tilde{\Sigma}$.

Por definición de $\tilde{\Sigma}$, $\forall\, j \in \mathbb{N} : E_j = A_j \cup N_j$ con $A_j \in \Sigma$, $N_j \in \mathcal{N}$.
Entonces, $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (A_i \cup N_i) = \big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\big) \cup \big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} N_i\big)$.
Se tiene $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \Sigma$. Queda ver $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} N_i \in \mathcal{N}$ para llegar al resultado.

Por definición de $\mathcal{N}$, $\forall\, j \in \mathbb{N} : \exists\, B_j \in \Sigma$ con $N_j \subseteq B_j$ y $\mu(B_j) = 0$.

Así, $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} N_i \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} M_i$ y $0 \leq \mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(B_i) = 0$ por subaditividad.

Por todo lo anterior, $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} N_i \in \mathcal{N} \Rightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i \in \tilde{\Sigma}$.

$(S.3)$ Sea $E \in \tilde{\Sigma}$, buscamos $E^c = X \setminus E \in \tilde{\Sigma}$.

Razonando como antes, $E = A \cup N$ con $A \in \Sigma, N \in \mathcal{N}$.

Por la observación anterior, sabemos que: $\exists\, M \in \Sigma$, $N_0 \in \mathcal{N}$ tales que:

$$E = A \cup N = A \cup N_0 \qquad N_0 \subseteq M \qquad M \cap A = \varnothing \qquad \mu(M) = 0$$

Así, $E = A \cup N_0 = A \cup (M \cap N_0) = (A \cup M) \cap (A \cup N_0)$.

Aplicando las leyes de De Morgan, $E^c = (A \cup M)^c \cup (A \cup N_0)^c$.

Centrándonos en este segundo término, como $N_0 \subseteq M$, se tiene:

$$\begin{aligned}(A \cup N_0)^c = A^c \cap N_0^c = A^c \cap \big((M \setminus N) \cup M^c\big) = \\ = \big(A^c \cap (M \setminus N_0)\big) \cup (A^c \cap M^c) = (M \setminus N_0) \cup (A \cup M)^c\end{aligned}$$

De este modo, $E^c = (A \cup M)^c \cup (M \setminus N_0)$.

Como $(A \cup M)^c \in \Sigma$, y $(M \setminus N_0) \in \mathcal{N}$, se tiene que $E^c \in \tilde{\Sigma}$.

Veamos ahora cómo extender μ a $\tilde{\mu}$ para que abarque $\tilde{\Sigma}$.

$$\tilde{\mu} : \tilde{\Sigma} :\longrightarrow [0, +\infty] \quad E \longmapsto \tilde{\mu}(E) := \mu(A) \text{ donde } E = A \cup N \text{ con } A \in \Sigma, N \in \mathcal{N}$$

Veamos en primer lugar que $\tilde{\mu}$ está bien definida. Es decir, un mismo conjunto $E \in \tilde{\Sigma}$ tiene siempre la misma medida sin importar la descomposición que consideremos. Sea $E = A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2 \in \tilde{\Sigma}$ con $A_1, A_2 \in \Sigma$, $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$, buscamos comprobar que $\mu(A_1) = \mu(A_2)$.

Para cada $i = 1, 2$ $N_i \in \mathcal{N} \Rightarrow \exists\, B_i \in \Sigma$ tal que $N_i \subseteq B_i$ y $\mu(B) = 0$.

Así, $A_1 \subseteq A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2 \subseteq A_2 \cup B_2$.

Por tanto, $\mu(A_1) \leq \mu(A_2 \cup B_2) \leq \mu(A_2) + \mu(B_2) = \mu(A_2)$.

Análogamente, $\mu(A_2) \leq \mu(A_1)$ luego $\mu(A_1) = \mu(A_2)$.

Veamos ahora que $\tilde{\mu}$ es en efecto una medida.

$(M.1)$ Buscamos $\tilde{\mu}(\varnothing) = 0$.

Basta ver tomar $A = N = \varnothing$ en la definición de $\tilde{\Sigma}$.

Aplicando $(M.1)$ en μ, $\tilde{\mu}(\varnothing) = \mu(\varnothing) = 0$.

$(M.2)$ Sean $\{E_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \tilde{\Sigma}$ disjuntos, buscamos $\tilde{\mu}(\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} E_i) = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \tilde{\mu}E_i$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, existen $A_i \in \Sigma$, $N_i \in \mathcal{N}$ tales que $E_i = A_i \cup N_i$.

Así, aplicando la definición de $\tilde{\mu}$ y aplicando $(M.2)$ en μ,

$$\tilde{\mu}(\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} E_i) = \tilde{\mu}(\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} A_i \cup N_i) = \mu(\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \tilde{\mu}(E_i)$$

Es claro que $\tilde{\mu}_{|\Sigma} = \mu$ pues se cumple:

$$A \in \Sigma \Rightarrow A = A \cup \varnothing \text{ con } \mu(\varnothing) = 0 \text{ luego } \tilde{\mu}(A) = \mu(A)$$

Comprobemos ahora que $(X, \tilde{\Sigma}, \tilde{\mu})$ es un espacio de medida completo. Sean $E \subseteq F \in \tilde{\Sigma}$ con $\tilde{\mu}(F) = 0$, buscamos $E \in \tilde{\Sigma}$.

Por definición, $F = A \cup N$ para ciertos $A \in \Sigma, N \in \mathcal{N}$.

Además, $N \in \mathcal{N} \Rightarrow \exists\, B \in \Sigma$ tal que $N \subseteq B$ y $\mu(B) = 0$.

Por hipótesis, $\tilde{\mu}(F) := \mu(A) = 0$.

Así, $E \subseteq F = A \cup N \subseteq A \cup B$, y $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B) = 0$.

Por tanto, $E \in \mathcal{N} \subseteq \tilde{\Sigma}$.

Por último, queda comprobar que la compleción es el mínimo espacio de medida completo que contiene al original. Sea (X, Ω, ν) un espacio de medida completo tal que $\Sigma \subseteq \Omega$ y $\nu_{|\Sigma} = \mu$. Entonces, $\tilde{\Sigma} \subseteq \Omega$.

Por ser (X, Ω, ν) completo, $\mathcal{N} \subseteq \Omega$.

Además, $\Sigma \subseteq \Omega$ por hipótesis.

De este modo, se cumple:

$$\left.\begin{array}{l} A \in \Sigma \\ N \in \mathcal{N} \end{array}\right\} A \cup N \in \Omega \text{ aplicando } (S.2) \text{ en } \Omega$$

Concluimos que $\tilde{\Sigma} \subseteq \Omega$.

Hemos demostrado que se cumplen todas las hipótesis.

§2. El espacio de medida de Lebesgue $(R^N, \mathfrak{M}_N, \mu_N)$

1.2.1 Definiciones de intervalos y cubos

Llamaremos "intervalo degenerado" a cualquier conjunto vacío o unitario (unipuntual). Por ejemplo $\varnothing = (2, -1)$, $\{a\} = [a, a]\ \ \forall\, a \in \mathbb{R}$.

Denominamos "cubo de $\mathbb{R}^N$" a cualquier conjunto $C = I_1 \times \ldots \times I_N$ donde I_i es un intervalo $\ \forall\, i \in \{1, \ldots, N\}$. Si al menos uno de los intervalos que forman el cubo es degenerado, diremos que es un "cubo degenerado de $\mathbb{R}^N$".

1.2.2 Definición del volumen de un cubo

Sea $C = I_1 \times \ldots \times I_N$ un cubo de $\mathbb{R}^N$ con $a_j, b_j \in \overline{\mathbb{R}}$ los extremos de cada intervalo I_j. Llamaremos "volumen de C" a su imagen por la siguiente función:

$$v_N(C) := \begin{cases} 0 & \text{si } C \text{ es degenerado} \\ \prod_{i=1}^{N} |b_i - a_i| & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

1.2.3 Definición de medida exterior

Sea A un subconjunto cualquiera de $\mathbb{R}^N$, se define su medida exterior como el número dado por:

$$\mu_N^*(A) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} v_N(I_i) : \{I_i : i \in \mathbb{N}\} \text{ cubos abiertos que recubren } A \right\} \in [0, +\infty]$$

Donde v_N es la el volumen de los cubos anterior.

<u>**Nota:**</u> A pesar de su nombre, la medida exterior no es una medida.

1.2.4 Corolario de la definición anterior

Sea A un conjunto cualquiera, introducimos la siguiente notación:

$$\mathcal{M}(A) := \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} v_N(I_i) : \{I_i : i \in \mathbb{N}\} \text{ cubos abiertos que recubren } A \right\}$$

Por definición, $\mu_N^*(A) := \inf \mathcal{M}(A)$. Así, sean $\{I_i : i \in \mathbb{N}\}$ cubos abiertos tales que $A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i$; entonces $\sum_{i=1}^{\infty} v_N(I_i) \in \mathcal{M}(A)$ luego $\mu_N^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} v_N(I_i)$ por definición de ínfimo.

De manera similar, sea $\varepsilon > 0$, si $\mu_N^*(A) < \infty$, podemos encontrar $\{I_i : i \in \mathbb{N}\}$ cubos abiertos con $A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i$ tales que $\sum_{i=1}^{\infty} v_N(I_i) < \mu_N^*(A) + \varepsilon$. De no ser así, se contradiría la definición de ínfimo. Si $\mu_N^*(A) = +\infty$, la desigualdad ha de ser no estricta.

1.2.5 Ejemplos básicos de medida exterior

i) $\mu_N^*(\varnothing) = 0$ pues $\varnothing \subseteq \varnothing \cup \varnothing \cup \ldots$ Así, $0 \leq \mu_N^*(\varnothing) \leq \sum_{i=1}^{\infty} v_N(\varnothing) = 0$.

ii) Sea $C = I_1 \times \ldots \times I_N$ un cubo degenerado acotado; entonces $\mu_N^*(C) = 0$.
Si $C = \varnothing$ ya se tiene por el apartado anterior.
En caso contrario, $\exists\, j \in \{1, \ldots, N\}$ tal que $I_j = \{a\}$ para cierto $a \in \mathbb{R}$.
Supongamos $j = 1$ por simplicidad (el resto de casos son análogos).
Para cada I_k denotamos a_k y b_k a sus extremos izquierdo y derecho.
Sea $\varepsilon > 0$, $C \subseteq C_\varepsilon := (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \times (a_2 - \varepsilon, b_2 + \varepsilon) \times \ldots \times (a_N - \varepsilon, b_N + \varepsilon)$.
Así, $0 \leq \mu_N^*(C) \leq v_N(C\varepsilon) = 2\varepsilon \cdot (b_2 - a_2 + 2\varepsilon) \cdot \ldots \cdot (b_N - a_N + 2\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$

iii) Sea A numerable (puede ser no acotado); entonces, $\mu_N^*(A) = 0$.
Por ser A numerable, es de la forma $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.
Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera pero fijo, se cumple: $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n}$.
Para cada a_n tomamos un cubo abierto I_n de volumen $\frac{\varepsilon}{2^n}$ tal que $a_n \in I_n$.
Así, $0 \leq \mu_N^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} v_N(I_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$.

1.2.6 Proposición de propiedades de μ_N^*

μ_N^* cumple las siguientes propiedades:

i) Monotonía: Sean $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^N$. Entonces, $\mu_N^*(A) \leq \mu_N^*(B)$.

ii) Subaditividad: $\{A_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \mu_N^*(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu_N^*(A_i)$

<u>**Demostración:**</u>

i) Seguiremos la notación del corolario 1.2.4.
Como $A \subseteq B$ por hipótesis, todo recubrimiento por cubos abiertos de B es un recubrimiento de A también.
De este modo, $\mathcal{M}(B) \subseteq \mathcal{M}(A)$.
Por tanto, $\mu_N^*(A) = \inf \mathcal{M}(A) \leq \inf \mathcal{M}(B) = \mu_N^*(B)$.

ii) Veamos que se cumple la subaditividad.
Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera pero fijo, $\varepsilon = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$.
Para cada A_n y cada ε_n, aplicando el colorario 1.2.4 $\exists\, \{I_{n,i} : i \in \mathbb{N}\}$ cubos abiertos tales que $A_n \subseteq \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} I_{n,i}$ y $\sum\limits_{i=1}^{\infty} v_N(I_{n,i}) \leq \mu_N^*(A_N) + \varepsilon_n$.
Se cumple $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} I_{n,i}$ con $\{I_{n,i} : n, i \in \mathbb{N}\}$ numerable.
Por todo lo anterior,

$$\mu_N^*(A_n) \leq \sum_{n,i} \mu_N^*(I_{n,i}) \overset{(*_1)}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} v_N(I_{n,i}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_N^*(A_n) + \varepsilon_n \overset{(*_2)}{=}$$

$$\overset{(*_2)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_N^*(A_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n = \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_N^*(A_n) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_N^*(A_n)$$

$(*_1)$ Se debe a la no negatividad de los términos sumados.
$(*_2)$ Al ser no negativas, las series o convergen o divergen, luego podemos descomponer en dos sumatorios distintos.

1.2.7 Volumen de un intervalo real

Sea $C = [a, b]$ con $a \leq b$ un intervalo real compacto. Entonces, se cumple:

$$\mu^*(C) = v(C) = v(\mathring{C}) = \mu^*(\mathring{C})$$

Donde $v = v_1$, $\mu^* = \mu_1^*$, y $\mathring{C} = \operatorname{int} C = (a, b)$.

<u>**Demostración:**</u> Vemos el caso $N = 1$ aunque el resto son análogos.

Por definición, $v(C) = b - a = v(\mathring{C})$. Veamos que $\mu^*(C) = \mu^*(\mathring{C})$. Por la monotonía, $\mathring{C} \subseteq C \Rightarrow$. Aplicando la subaditividad:

$$\mu^*(\mathring{C}) \leq \mu^*(C) = \mu^*(\mathring{C} \cup \{a, b\}) \leq \mu^*(\mathring{C}) + \mu^*(\{a, b\})) = \mu^*(\mathring{C}) + 0$$

Queda ver que $v(C) = \mu^*(C)$ para llegar a la conclusión deseada. Sabemos que $\mu^*(C) \leq v(C)$ por el colorario 1.2.4, luego basta ver que $\mu^*(C) \geq v(C)$.

Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera pero fijo, por (1.2.4) existen $\{I_i : i \in \mathbb{N}\}$ intervalos abiertos tales que $C \subseteq \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} I_i$ y $\mu^*(C) + \varepsilon \geq \sum\limits_{i=1}^{\infty} v(I_i)$. Nótese que debido a esta última condición han de ser todos acotados.

Por ser C compacto, podemos fijar $n \in \mathbb{N}$ tal que $C \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} I_i$. Por ser acotados, cada I_k con $k \in \{1, \ldots, n\}$ va a ser de la forma (a_k, b_k). El conjunto de extremos de estos intervalos es finito, luego el siguiente conjunto también lo será:

$$\mathcal{A} := [a, b] \cap \left(\Big\{ a_k, b_k : k \in \{1, \ldots, n\} \Big\} \cup \{a, b\} \right)$$

Este conjunto contiene los extremos del intervalo C original, así como los extremos de los I_k que se encuentren dentro de C. Como $\mathcal{A}$ es finito, fijamos $m \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{card} \mathcal{A} = m + 1$. Podemos ordenar este conjunto; es decir, podemos renombrar sus elementos para que se cumpla:

$$\mathcal{A} = \Big\{ x_i : i \in \{0, 1, \ldots, m\} \Big\} \quad \text{donde } a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{m-1} < x_m = b$$

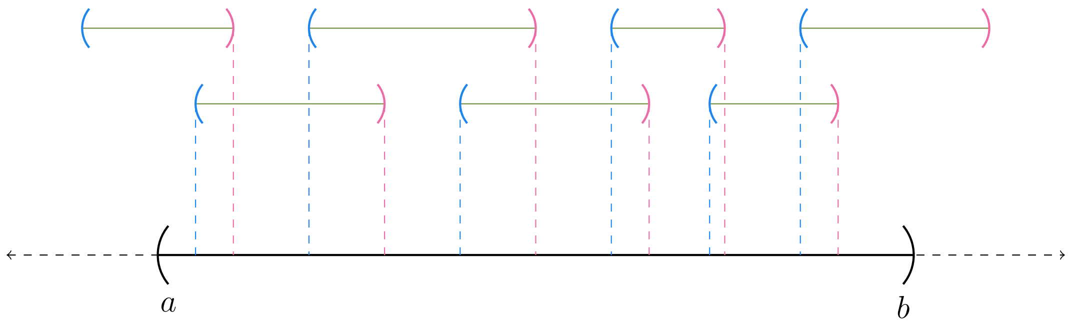
Sea $j \in \{1, \ldots, m\}$ cualquiera pero fijo, $x_j \in C \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} I_i$, luego $\exists k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x_j \in I_k$. Veamos que $(x_{j-1}, x_j) \subseteq I_k$.

Ambos conjuntos son conexos y abiertos, luego su intersección ha de serlo también:

$$(x_{j-1}, x_j) \cap I_k = (u, v) \qquad \text{donde} \quad u = \max\{x_{j-1}, a_k\},\ v = \min\{x_j, b_k\}$$

1. Como $x_j \in I_k = (a_k, b_k)$, tenemos necesariamente $v = x_j < b_k$.
2. Si $u = a_k$, se tiene que $x_{j-1} < a_k < x_j$ siendo los tres extremos de intervalos.

En vista del segundo punto, se tiene que hay un extremo de I_k en (x_{j-1}, x_j), lo que contradice la definición de $\mathcal{A}$. Por tanto, $x_{j-1}, x_j \in I_k \Rightarrow (x_{j-1}, x_j) \subseteq I_k$. Veamos una ilustración de cómo se obtienen los elementos de $\mathcal{A}$ a partir de los I_k:



Los elementos de $\mathcal{A}$ son los extremos izquierdos y derechos de los intervalos I_k que se encuentren dentro de $C = (a, b)$. Gráficamente, podemos obtenerlos "proyectando" como en la figura anterior.

De este modo, se cumple:

$$v(C) = v([a,b]) = \sum_{i=1}^{m} x_i - x_{i-1} \leq \sum_{k=1}^{n} v(I_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} v(I_k) \leq \mu^*(C) + \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \mu^*(C)$$

<u>Nota:</u> Esta demostración puede extenderse análogamente para cubos compactos de dimensión N finita arbitrariamente grande. Alternativamente, un resultado de la hoja de ejercicios permite extender esta proposición habiendo demostrado únicamente el caso $N = 1$.

1.2.8 Definición de conjunto medible Lebesgue

Diremos que $E \subseteq \mathbb{R}^N$ es un conjunto medible Lebesgue si para todo cubo abierto acotado C se cumple $V_N(C) = \mu_N^*(C \cap E) + \mu_N^*(C \cap E^c)$.

Como $v_N(C) = \mu_N^*(C) \leq \mu^*(C \cap E) + \mu^*(C \cap E^c)$ por la subaditividad, bastaría comprobar que $v_N(C) \geq \mu^*(C \cap E) + \mu^*(C \cap E^c)$.

A la colección de todos los conjuntos medibles de $\mathbb{R}^N$ la denotamos $\mathfrak{M}_N$.

1.2.9 Definición de semiespacio de $\mathbb{R}^N$

Diremos que $S = I_1 \times \ldots \times I_N \subseteq \mathbb{R}^N$ es un semiespacio si $\exists j \in \{1, \ldots, N\}$ tal que $k \neq j \Rightarrow I_k = \mathbb{R}$ y además I_j es de la forma $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, $[a, +\infty)$, o $(a, +\infty)$, para cierto $a \in \mathbb{R}$.

1.2.10 Conjuntos que pertenecen a $\mathfrak{M}_N$

i) $\mu_N^*(E) = 0 \Rightarrow E \in \mathfrak{M}_N$. En particular, $\varnothing \in \mathfrak{M}_N$.

ii) $E \in \mathfrak{M}_N \Rightarrow E^c \in \mathfrak{M}_N$

iii) Todo semiespacio abierto en $\mathbb{R}^N$ es medible Lebesgue.

Demostración:

i) Sea $E \subseteq \mathbb{R}^N$ con $\mu_N^*(E) = 0$, sea C un cubo abierto acotado de $\mathbb{R}^N$. Se tiene que $C \cap E \subseteq E$ luego este conjunto es también de medida exterior nula. Así, vemos que se cumple la definición aplicando la subaditividad:

$$\mu_N^*(C \cap E) + \mu_N^*(C \cap E^c) = \mu_N^*(C \cap E^C) \leq \mu_N^*(C) = v_N(C)$$

ii) Sea $E \in \mathfrak{M}_N$, sea C cubo abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$, se cumple:
$$v_N(C) \overset{E \in \mathfrak{M}_N}{=} \mu_N^*(C \cap E) + \mu_N^*\big(C \cap E^c\big) = \mu_N^*(C \cap E^c) + \mu_N^*(C \cap (E^c)^c)$$

Tenemos que $E^c \in \mathfrak{M}_N$ por definición.

iii) Sea $H = (a, +\infty) \times \mathbb{R} \times \overset{N-1}{\cdots} \times \mathbb{R}$ un semiespacio abierto de $\mathbb{R}^N$ (el resto de casos son análogos). Sea $C = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_N, b_N)$ un cubo abierto acotado cualquiera. Se tiene:

$$C \cap H = I_1 \times (a_2, b_2) \times (a_N, b_N) \qquad C \cap H^c = I_1 \times (a_2, b_2) \times (a_N, b_N)$$

$$\text{donde } I_1 = \begin{cases} (a_1, b_1) & \text{si } a \leq a_1 \\ (a, b_1) & \text{si } a_1 < a < b_1 \\ \varnothing & \text{si } a \geq b_1 \end{cases} \qquad \text{donde } J_1 = \begin{cases} \varnothing & \text{si } a \leq a_1 \\ (a_1, a] & \text{si } a_1 < a < b_1 \\ (a_1, b_1) & \text{si } a \geq b_1 \end{cases}$$

De los tres posibles casos, solo $a_1 < a < b_1$ es no trivial. En tal caso, $\mu_N^*(C \cap H) = v_N(C \cap H)$, $\mu_N^*(C \cap H^c) = v_N(C \cap H^c)$. Por tanto:

$$\begin{aligned} \mu_N^*(C \cap H) + \mu_N^*(C \cap H^c) = (b_2 - a_2) \cdot \ldots \cdot (b_N - a_N) \cdot (b_1 - a + a - a_1) = \\ = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \ldots \cdot (b_N - a_N) = v_N(C) \end{aligned}$$

Tenemos que $H \in \mathfrak{M}_N$ por definición.

1.2.11 Caracterización de $\mathfrak{M}_N$ por conjuntos cualesquiera

Dado $E \subseteq \mathbb{R}^N$, los siguientes enunciados son equivalentes:

i) $E \in \mathfrak{M}_N$

ii) $\forall A \subseteq \mathbb{R}^N$ se cumple $\mu_N^*(A) = \mu_N^*(A \cap E) + \mu_N^*(A \cap E^c)$

iii) $\forall A \subseteq \mathbb{R}^N$ se cumple $\mu_N^*(A) \geq \mu_N^*(A \cap E) + \mu_N^*(A \cap E^c)$

Demostración: Se tiene que (*ii*) y (*iii*) son equivalentes por la subaditividad.

$i \Rightarrow ii$ Si $\mu_N^*(A) = +\infty$ se cumple trivialmente. Veamos el caso finito.

Si $\mu_N^*(A) < +\infty$, dado $\varepsilon > 0$, existen $\{I_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ cubos abiertos tales que $A \subseteq \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} I_i$ y $\sum\limits_{i=1}^{\infty} v_N(I_i) < \mu_N^*(A) + \varepsilon$. Esta segunda condición garantiza que los I_i son todos acotados. Además, como $E \in \mathfrak{M}_N$, podemos reescribir la expresión como:

$$\mu_N^*(A) + \varepsilon \geq \sum_{i=1}^{\infty} v_N(I_i) \overset{E\in\mathfrak{M}_N}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_N^*(I_i \cap E) + \mu_N^*(I_i \cap E^c) \geq$$
$$\geq \mu_N^*\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}(I_i \cap E)\right) + \mu_N^*\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}(I_i \cap E^c)\right) = \mu_N^*\left((\bigcup_{i\in\mathbb{N}} I_i) \cap E\right) + \mu_N^*\left((\bigcup_{i\in\mathbb{N}} I_i) \cap E^c\right) \geq$$
$$\geq \mu_N^*(A \cap E) + \mu_N^*(A \cap E^c)$$

Hemos utilizado la subaditividad y la monotonía para deducir las desigualdades. Para ver el resultado basta tomar límite cuando $\varepsilon \to 0$.

$ii \Rightarrow i$ Se cumple trivialmente.

1.2.12 Propiedades de $\mathfrak{M}_N$

Sean $E, F \in \mathfrak{M}_N$, entonces se cumple:

$i) E \cup F \in \mathfrak{M}_N$ $\quad ii) E \cap F \in \mathfrak{M}_N$ $\quad iii) E \setminus F \in \mathfrak{M}_N$

Demostración:

i) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^N$ cualquiera, aplicaremos la caracterización anterior. Como $E \in \mathfrak{M}_N$ por hipótesis, $\mu_N^*(A) = \mu_N^*(A \cap E) + \mu_N^*(A \cap E^c)$. Como $F \in \mathfrak{M}_N$ también, aplicamos la caracterización en $A \cap E^c$ como sigue:

$$\begin{aligned}
\mu_N^*(A) &= \mu_N^*(A \cap E) + \mu_N^*\big(A \cap (E^c \cap F)\big) + \mu_N^*\big(A \cap (E^c \cap F^c)\big) = \\
&= \mu_N^*(A \cap E) + \mu_N^*\big(A \cap (F \setminus E)\big) + \mu_N^*\big(A \cap (E \cup F)^c\big) \geq \\
&\geq \mu_N^*\big(A \cap (E \cup F \setminus E)\big) + \mu_N^*\big(A \cap (E \cup F)^c\big) = \\
&= \mu_N^*\big(A \cap (E \cup F)\big) + \mu_N^*\big(A \cap (E \cup F)^c\big)
\end{aligned}$$

Las desigualdades se deducen de la subaditividad y la monotonía de la medida exterior.

$ii)$ Como sabemos que $\mathfrak{M}_N$ es cerrado respecto del complementario, se tiene $E \cap F \in \mathfrak{M}_N \iff (E \cap F)^c = E^c \cup F^c \in \mathfrak{M}_N$. Aplicando este mismo resultado, se tiene:

$$E \in \mathfrak{M}_N \Rightarrow E^c \in \mathfrak{M}_N \qquad\qquad F \in \mathfrak{M}_N \Rightarrow F^c \in \mathfrak{M}_N$$

Finalmente, aplicando el apartado anterior llegamos al resultado.

$iii)$ De manera similar, tenemos $E \setminus F = E \cap F^c$. Así, $F \in \mathfrak{M}_N \Rightarrow F^c \in \mathfrak{M}_N$. Aplicando el apartado inmediatamente anterior llegamos al resultado.

1.2.13 Aditividad finita de conjuntos en $\mathfrak{M}_N$ disjuntos

Sean $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{M}_N$ tales que $i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \varnothing$. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^N$ cualquiera. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple $\mu_N^*\big(A \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i)\big) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_N^*(A \cap E_i)$.

<u>**Demostración:**</u> Lo demostraremos por inducción. Para $n = 1$ es trivial.

Supongamos que se cumple para n y probemos que se cumple para $n+1$. Como $E_{n+1} \in \mathfrak{M}_N$ por hipótesis, se tiene que:

$$\mu_N^*\big(A \cap \bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\big) = \mu_N^*\big(A \cap \bigcup_{i=1}^{n+1} E_i \cap E_{n+1}\big) + \mu_N^*\big(A \cap \bigcup_{i=1}^{n+1} E_i \cap E_{n+1}^c\big)$$

Sabemos además que $i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \varnothing$ por hipótesis, luego se tiene que:

$$\begin{aligned}\mu_N^*\big(A \cap \bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\big) &= \mu_N^*(A \cap E_{n+1}) + \mu_N^*\Big(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big) = \\ &= \mu_N^*(A \cap E_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} \mu_N^*(A \cap E_i) = \sum_{i=1}^{n+1} \mu_N^*(A \cap E_i)\end{aligned}$$

La segunda igualdad se deduce de aplicar la hipótesis de inducción.

1.2.14 Teorema del espacio de medida de Lebesgue

Para $\mu_N := \mu^*_{N|\mathfrak{M}_N}$ se tiene que $(\mathbb{R}^N, \mathfrak{M}_N, \mu_N)$ es un espacio de medida completo. Además, $\tau_{\mathbb{R}^N} \subseteq \mathfrak{M}_N$ y $\mu_N(C) = v_N(C)$ para todo cubo abierto C.

Demostración:

En primer lugar, veamos que $\mathfrak{M}_N$ es una σ-álgebra. Sabemos que cumple $(S.1)$ y $(S.3)$ gracias al resultado 1.2.10, luego queda comprobar que cumple $(S.2)$. Sean $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{M}_N$, buscamos $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i \in \mathfrak{M}_N$.

Disjuntificamos: $F_1 := E_1$, $F_{n+1} := E_{n+1} \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$.

De este modo, se tiene que $\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i = \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$, luego $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} F_i$.

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^N$ cualquiera, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i \in \mathfrak{M}_N \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\mu^*_N(A) &= \mu^*_N(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i) + \mu^*_N\big(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} E_i)^c\big) \geq \\
&\geq \mu^*_N(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} F_i) + \mu^*_N\big(A \cap (\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i)^c\big) \overset{1.2.13}{=} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mu^*_N(A \cap F_i) + \mu^*_N\big(A \cap (\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i)^c\big) \xrightarrow{n\to\infty} \\
&\xrightarrow{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*_N(A \cap F_i) + \mu^*_N\big(A \cap (\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i)^c\big) \geq \\
&\geq \mu^*_N\big(A \cap \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i\big) + \mu^*_N\big(A \cap (\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i)^c\big) = \mu^*_N\big(A \cap \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\big) + \mu^*_N\big(A \cap (\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i)^c\big)
\end{aligned}$$

Llegamos a la conclusión deseada.

Hemos visto que $\mathfrak{M}_N$ es una σ-álgebra de $\mathbb{R}^N$. Veamos que μ_N es una medida. Sabemos que se cumple $(M.1)$ por el resultado 1.2.10, luego falta probar que cumple $(M.2)$. Sean $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{M}_N$ tales que $i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \varnothing$, buscamos $\mu_N(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu_N(E_i)$.

Aplicando el resultado anterior, sea $n \in \mathbb{N}$, se cumple:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_N(E_i) \overset{1.2.13}{=} \mu_N(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) \overset{\text{Monotonía}}{\leq} \mu_N(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i) \overset{\text{Subaditividad}}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_N(E_i)$$

Tomando límite cuando $n \to \infty$ podemos deducir que μ_N es, en efecto, una medida. Veamos que $(\mathbb{R}^N, \mathfrak{M}_N, \mu_N)$ es un espacio de medida completo. Sea $E \in \mathfrak{M}_N$ tal que $\mu_N(E) = 0$, sea $F \subseteq E$. Buscamos $F \in \mathfrak{M}_N$.

Por monotonía, $F \subseteq E \Rightarrow 0 \leq \mu_N^*(F) \leq \mu_N^*(E) = 0$.

Al ser un conjunto de medida exterior nula, sabemos que $F \in \mathfrak{M}_N$.

Hemos comprobado que es un espacio métrico completo. Veamos que pertenecen a él todos los conjuntos abiertos; es decir, $\tau_{\mathbb{R}^N} \subseteq \mathfrak{M}_N$.

Todo cubo abierto C es intersección finita de semiespacios abiertos de $\mathbb{R}^N$.

Como estos son medibles Lebesgue, $C \in \mathfrak{M}_N$.

Definimos $\mathcal{A} := \big\{(p_1, q_1) \times \ldots \times (p_N, q_N) : p_i, q_i \in \mathbb{Q} \ \forall i \in \{1, \ldots, N\}\big\}$.

Se tiene que $\mathcal{A}$ es una base numerable de $\tau_{\mathbb{R}^N}$.

Por tanto, todo abierto $O \in \tau_{\mathbb{R}^N}$ es unión numerable de elementos de $\mathcal{A}$.

Además $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{M}_N$ al estar formada por cubos abiertos.

Aplicando las propiedades de σ-álgebra, $\tau_{\mathbb{R}^N} \subseteq \mathfrak{M}_N$.

Queda únicamente por comprobar que la medida de todo cubo abierto C coincide con su volumen. Se cumple trivialmente, pues $\mu_N(C) = \mu_N^*(C) = v_N(C)$ por definición y por el resultado 1.2.7.

1.2.15 σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^N$

Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de todas las σ-álgebras de $\mathbb{R}^N$ que contienen a todos los abiertos de la topología usual; es decir,

$$\mathcal{S} := \{\Sigma : \tau_{\mathbb{R}^N} \subseteq \Sigma \text{ con } \Sigma \ \sigma\text{-álgebra de } \mathbb{R}^N\}$$

Definimos la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^N$ como $\mathfrak{B}_N := \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{S}} \Sigma$. Veamos que $\mathfrak{B}_N$ es la menor σ-álgebra de $\mathbb{R}^N$ que contiene a $\tau_{\mathbb{R}^N}$.

Demostración: Veamos en primer lugar que $\mathfrak{B}_N$ es una σ-álgebra de $\mathbb{R}^N$.

$(S.1)$ Buscamos ver que $\varnothing \in \mathfrak{B}_N$.

Para cada $\Sigma \in \mathcal{S}$, tenemos que $\varnothing \in \Sigma$ aplicando $(S.1)$ en Σ.

Por tanto, $\varnothing \in \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{S}} \Sigma = \mathfrak{B}_N$.

$(S.2)$ Sean $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{B}_N$, buscamos $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i \in \mathfrak{B}_N$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, $E_i \in \mathfrak{B}_N = \bigcap\limits_{\Sigma\in\mathcal{S}} \Sigma \Rightarrow E_i \in \Sigma \ \forall\, \Sigma \in \mathcal{S}$.

Sea $\Sigma \in \mathcal{S}$ cualquiera, aplicando $(S.2)$, $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \Sigma \Rightarrow \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i \in \Sigma$.

Por tanto, $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i \in \Sigma \ \forall\, \Sigma \in \mathcal{S} \Rightarrow \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i \in \mathfrak{B}_N$.

$(S.3)$ Sea $E \in \mathfrak{B}_N$, buscamos $E^c \in \mathfrak{B}_N$.

Para cualquier $\Sigma \in \mathcal{S}$ se tiene $E \in \Sigma \Rightarrow E^c \in \Sigma$ por $(S.3)$.

Así, $E^c \in \Sigma \ \forall\, \Sigma \in \mathcal{S} \Rightarrow E^c \in \mathfrak{B}_N$.

Hemos comprobado que $\mathfrak{B}_N$ es, en efecto, una σ-álgebra de $\mathbb{R}^N$. Queda comprobar que es la menor que contiene a $\tau_{\mathbb{R}^N}$. Sea $\mathcal{D}$ una σ-álgebra de $\mathbb{R}^N$ tal que $\tau_{\mathbb{R}^N} \subseteq \mathcal{D}$, veamos que $\mathfrak{B}_N \subseteq \mathcal{D}$. Para ello, basta notar que $\mathcal{D} \in \mathcal{S}$ por definición, luego $\mathfrak{B}_N \subseteq \mathcal{D}$ por definición.

1.2.16 Teorema de caracterización topológica de $\mathfrak{M}_N$

Sea $E \subseteq \mathbb{R}^N$, los siguientes enunciados son equivalentes:

i) $E \in \mathfrak{M}_N$

ii) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, O \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto tal que $E \subseteq O$ y $\mu_N^*(O \setminus E) < \varepsilon$.

iii) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, C \subseteq \mathbb{R}^N$ cerrado tal que $C \subseteq E$ y $\mu_N^*(E \setminus C) < \varepsilon$.

iv) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, O \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto $\exists\, C \subseteq \mathbb{R}^N$ cerrado, tales que $C \subseteq E \subseteq O$ y además $\mu_N(O \setminus C) < \varepsilon$.

Demostración:

$i \Rightarrow ii$ Sea $E \in \mathfrak{M}_N$, $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \{I_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ colección de cubos abiertos tales que

$$E \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} I_i \ \text{ y } \sum_{i=1}^{\infty} v_N(I_i) \leq \mu_N(E) + \varepsilon.$$

Definimos $O := \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} I_i$. Se tiene $E \subseteq O$ con $O \in \tau_{\mathbb{R}^N}$. Según el valor de $\mu_N(E)$ podemos distinguir dos casos.

• Si $\mu_N(E) < +\infty$, se cumple:

$$\mu_N(O \setminus E) = \mu_N(O) - \mu_N(E) \leq \mu_N(E) + \varepsilon - \mu_N(E) = \varepsilon$$

• Si $\mu_N(E) = +\infty$, consideramos los cubos $C_n := [-n, n]^N$ con $n \in \mathbb{N}$.
Definimos $D_1 := C_1$, $D_{n+1} = C_{n+1} \setminus C_n$, luego $\{D_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{M}_N$.
Además, se tiene $i \neq j \Rightarrow D_i \cap D_j = \varnothing$, y $\mu_N(D_i) < +\infty$ $\forall i \in \mathbb{N}$.
Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $E_n := E \cap D_n \in \mathfrak{M}_N$. Por tanto, verifican:

$$E = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i \qquad i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \varnothing \qquad \mu_N(E_i) < +\infty \ \forall \ \in \mathbb{N}$$

Fijado $\varepsilon > 0$ cualquiera, aplicando el caso anterior, tenemos que para cada E_n existe un abierto O_n tal que $E_n \subseteq O_n$ y $\mu_N(O_n \setminus E_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Sea $O := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} O_i$, se cumple $E \subseteq O$ y además:

$$\mu_N(O \setminus E) = \mu_N\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} O_i \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\Big) \leq \sum_{i=i}^{\infty} \mu_N(O_i \setminus E_i) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

$i \Rightarrow iii$ Sea $E \in \mathfrak{M}_N$, sea $\varepsilon > 0$, sabemos que $E^c \in \mathfrak{M}_N$ y que $(i \Rightarrow ii)$, luego

existe $O \in \tau_{\mathbb{R}^N}$ tal que $E^c \subseteq O$ y además $\mu_N(O \setminus E^c) < \varepsilon$.
Sea $C := O^c$ cerrado, se tiene $E^c \subseteq O \Rightarrow O^c = C \subseteq (E^c)^c = E$.
Finalmente, $\varepsilon > \mu_N(O \setminus E^c) = \mu_N\big(O \cap (E^c)^c\big) = \mu_N(E \cap C^c) = \mu_N(E \setminus C)$.

$i \Rightarrow iv$ Sea $E \in \mathfrak{M}_N$, sea $\varepsilon > 0$. Aplicando $(i \Rightarrow ii)$ y $(i \Rightarrow iii)$, se tiene:

$\exists\, O$ abierto, $\exists\, C$ cerrado tales que $C \subseteq E \subseteq O$ y $\mu_N(O \setminus E) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\mu(E \setminus C) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Así, $\mu_N(O \setminus C) \leq \mu_N\Big((O \setminus E) \cup (E \setminus C)\Big) \leq \mu_N(O \setminus E) + \mu_N(E \setminus C) < \varepsilon$.

$iv \Rightarrow \substack{ii \\ iii}$ Por hipótesis, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, O \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto, $\exists\, C \subseteq \mathbb{R}^N$ cerrado

con $C \subseteq E \subseteq O$ tales que $\mu_N(O \setminus C) < \varepsilon$.

Entonces, $E \subseteq O \Rightarrow (E \setminus C) \subseteq (O \subseteq C) \Rightarrow \mu_N(E \setminus C) \leq \mu_N(O \setminus C) < \varepsilon$.
Del mismo modo, $C \subseteq E \Rightarrow (O \setminus E) \subseteq (O \setminus C) \Rightarrow \mu_N(O \setminus E) \leq \mu_N(O \setminus C) < \varepsilon$.

$ii \Rightarrow i$ | Por hipótesis, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ existe O_n abierto con $E \subseteq O_n$ y $\mu_N^*(O_n \setminus E) < \frac{1}{n}$.

Consideramos los abiertos $G_n := \bigcap\limits_{i=1}^{n} O_i$, luego $G_{n+1} \subseteq G_n$ y $E \subseteq G_n \;\forall\, n \in \mathbb{N}$.
Además, $\mu_N^*(G_n \setminus E) \leq \mu_N^*(O_n \setminus E) < \frac{1}{n}$.
Sea $G := \bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} G_i$, se tiene que $G \in \mathfrak{M}_N$ y $E \subseteq G$. Veamos que $G \setminus E \in \mathfrak{M}_N$.
$\mu_N^*(G \setminus E) \leq \mu_N^*(G_n \setminus E) < \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Así, $G \setminus E \in \mathfrak{M}_N$ al tener medida nula.
De este modo, $E = G \setminus (G \setminus E) \in \mathfrak{M}_N$ por ser diferencia de conjuntos de $\mathfrak{M}_N$.

$iii \Rightarrow i$ | Por hipótesis, $\forall\, n \in \mathbb{N}\; \exists\, C_n$ cerrado con $C_n \subseteq E$ tal que $\mu_N^*(E \setminus C) < \frac{1}{n}$.

Definimos $D_n := \bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i$, luego $D_n \subseteq D_{n+1} \subseteq E$ y $\mu_N(E \setminus D_n) < \frac{1}{n} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$.
Consideramos $D := \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} D_i$ luego $D \subseteq E$ y $D \in \mathfrak{M}_N$ al estar $C_n \in \mathfrak{M}_N \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$.
Se cumple $\mu_N^*(E \setminus D) \leq \mu_N^*(E \setminus D_n) < \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, luego $E \setminus D \in \mathfrak{M}_N$.
Finalmente, $E = D \cup (E \setminus D) \in \mathfrak{M}_N$ al ser unión de conjuntos de $\mathfrak{M}_N$.

1.2.17 Observación sobre cómo expresar conjuntos de $\mathfrak{M}_N$

En vista de la demostración anterior, sabemos que es posible expresar todo $E \in \mathfrak{M}_N$ de las siguientes formas:

$$E = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \right) \setminus N \qquad\qquad E = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \right) \cup M$$

Donde $N := G \setminus E$ y $M := E \setminus D$ según la notación de la demostración anterior (ambos con medida exterior nula).

Nótese que $(G_n)_n$ es una sucesión de abiertos decreciente y que su intersección numerable es un boreliano. Análogamente, $(D_n)_n$ es una sucesión creciente de cerrados cuya unión numerable es un conjunto boreliano.

1.2.18 Relación por compleción entre $\mathfrak{B}_N$ y $\mathfrak{M}_N$

Considerando la misma medida (la medida de Lebesgue), se tiene que el espacio de medida de Lebesgue es la compleción del espacio de medida boreliano; es decir,

$$\left(\mathbb{R}^N, \mathfrak{M}_N, \mu_N\right) = \left(\mathbb{R}^N, \widetilde{\mathfrak{B}}_N, \widetilde{\mu_{N|\mathfrak{B}_N}}\right)$$

Demostración: Basta comprobar que $\mathfrak{M}_N = \widetilde{\mathfrak{B}}_N$ por doble contenido.

Recordando la notación del resultado 1.1.9 para este caso, consideramos:

$$\mathcal{N} := \left\{M \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) : \exists\, B \in \mathfrak{B}_N \text{ tal que } M \subseteq B \text{ y } \mu_{N|\mathfrak{B}_N}(B) = 0\right\}$$

$\supseteq$ Sea $E \in \widetilde{\mathfrak{B}}_N$ cualquiera, podemos expresarlo como $E = A \cup M$ para ciertos $A \in \mathfrak{B}_N$, $M \in \mathcal{N}$ (se comprobó en el resultado 1.1.9).

Al tener medida nula, $M \in \mathfrak{M}_N$. Además, $A \in \mathfrak{B}_N \subseteq \mathfrak{M}_N$ por la definición de $\mathfrak{B}_N$ pues $\tau_{\mathbb{R}^N} \subseteq \mathfrak{M}_N$. De este modo, $E = A \cup M \in \mathfrak{M}_N$.

$\subseteq$ Sea $E \in \mathfrak{M}_N$, por la observación anterior, podemos expresarlo como $E = D \cup M$, para ciertos $D \in \mathfrak{B}_N$ y $\mu_N(M) = 0$.

Como $\mu_N(M) = 0$, existe una secuencia de abiertos $\{O_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tales que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ se cumple $M \subseteq O_{n+1} \subseteq O_n$ y $\mu_N(O_n) = \frac{1}{n}$. Al ser abiertos, $O_n \in \mathfrak{B}_N \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Por tanto, el siguiente conjunto a definir es boreliano también: $G := \bigcap_{i\in\mathbb{N}} O_i \in \mathfrak{M}_N$ y cumple $M \subseteq G$. Dado $n \in \mathbb{N}$ cualquiera, se tiene:

$$G \subseteq O_n \Rightarrow \mu_N(G) \leq \mu_N(O_n) = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

De este modo, $M \subseteq G$ con $G \in \mathfrak{B}_N$ tal que $\mu_N(G) = 0$ luego $M \in \mathcal{N}$ por definición. Al estar trabajando con la compleción, $\mathcal{N} \subseteq \widetilde{\mathfrak{B}}_N$. Por todo lo anterior,

$$E = \underbrace{D}_{\in\mathfrak{B}_N} \cup \underbrace{M}_{\in\mathcal{N}} \in \widetilde{\mathfrak{B}}_N$$

§3. Funciones medibles

1.3.1 Definición de función medible

Dado un espacio de medida (X, Σ, μ) y una función $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Diremos que f es medible si cumple cualquiera de las siguientes afirmaciones (son equivalentes):

i) $\forall\, \alpha \in \mathbb{R} : \{x \in X : f(x) < \alpha\} \in \Sigma$

ii) $\forall\, \alpha \in \mathbb{R} : \{x \in X : f(x) \leq \alpha\} \in \Sigma$

iii) $\forall\, \alpha \in \mathbb{R} : \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \Sigma$

iv) $\forall\, \alpha \in \mathbb{R} : \{x \in X : f(x) \geq \alpha\} \in \Sigma$

i') $\forall\, \beta \in \overline{\mathbb{R}} : \{x \in X : f(x) < \beta\} \in \Sigma$

ii') $\forall\, \beta \in \overline{\mathbb{R}} : \{x \in X : f(x) \leq \beta\} \in \Sigma$

iii') $\forall\, \beta \in \overline{\mathbb{R}} : \{x \in X : f(x) > \beta\} \in \Sigma$

iv') $\forall\, \beta \in \overline{\mathbb{R}} : \{x \in X : f(x) \geq \beta\} \in \Sigma$

Demostración: Sean $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$ fijos.

$i \Rightarrow ii$ $\quad$ $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{x \in X : f(x) < \alpha + \frac{1}{n}\right\} \in \Sigma$

$ii \Rightarrow iii$ $\quad$ $\{x \in X : f(x) > \alpha\} = \Big(\{x \in X : f(X) \leq \alpha\}\Big)^c \in \Sigma$

$iii \Rightarrow iv$ $\quad$ $\{x \in X : f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{x \in X : f(x) > \alpha - \frac{1}{n}\right\} \in \Sigma$

$iv \Rightarrow i$ $\quad$ $\{x \in X : f(x) < \alpha\} = \Big(\{x \in X : f(X) \geq \alpha\}\Big)^c \in \Sigma$

Como $R \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, basta considerar $\beta \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R} = \{+\infty, -\infty\}$ para los siguientes casos.

$i \Rightarrow i'$ $\quad$ $\{x \in X : f(x) < +\infty\} = \underset{n \in \mathbb{N}}{\cup} \{x \in X : f(x) < n\} \in \Sigma$

$\{x \in X : f(x) < -\infty\} = \varnothing \in \Sigma$

$i' \Rightarrow ii'$ $\{x \in X : f(x) \leq \infty\} = X \in \Sigma$

$$\{x \in X : f(x) \leq -\infty\} = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup}\{x \in X : f(x) < -n\} \in \Sigma$$

$ii' \Rightarrow iii'$ $\{x \in X : f(x) > \beta\} = \Big(\{x \in X : f(x) \leq \beta\}\Big)^c \in \Sigma$

$iii' \Rightarrow iv'$ $\{x \in X : f(x) \geq \infty\} = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup}\{x \in X : f(x) > n\} \in \Sigma$

$$\{x \in X : f(x) \geq -\infty\} = X \in \Sigma$$

$iv' \Rightarrow i'$ $\{x \in X : f(x) < \beta\} = \Big(\{x \in X : f(x) \geq \beta\}\Big)^c \in \Sigma$

1.3.2 Ejemplos de funciones medibles

i) Toda función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible en $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$.

ii) Toda función continua $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible en $(\mathbb{R}^N, \mathfrak{M}_N, \mu_N)$ y en $(\mathbb{R}^N, \mathfrak{B}_N, \mu_{N|\mathfrak{B}_N})$.

iii) Si $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es medible en (X, Σ, μ); entonces, $f_{|A}$ es medible en $(A, \Sigma(A), \mu_{|\Sigma(A)})$ para $A \in \Sigma$ cualquiera.

<u>Demostración:</u>

i) Se cumple trivialmente por ser la σ-álgebra $\mathcal{P}(X)$.

ii) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ cualquiera, por continuidad de f sabemos que

$$f^{-1}\Big((-\infty, \alpha)\Big) = \{x \in \mathbb{R}^N : f(x) < \alpha\} \in \tau_{\mathbb{R}^N} \subseteq \mathfrak{B}_N \subseteq \mathfrak{M}_N$$

Tenemos que f es medible en ambos espacios de medida por definición.

iii) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ cualquiera, sabemos que $\{x \in X : f(x) < \alpha\} \in \Sigma$ al ser f medible en (X, Σ, μ). Sea $A \in \Sigma$ cualquiera, se tiene:

$$f_{|A}^{-1}\Big((-\infty, \alpha)\Big) = \{a \in A : f_{|A}(a) < \alpha\} = \underbrace{\{x \in X : f(x) < \alpha\}}_{\in \Sigma} \cap A \in \Sigma(A)$$

El conjunto está en la σ-álgebra inducida por definición.

1.3.3 Medibilidad por imagen inversa de abiertos

Dado un espacio de medida (X, Σ, μ). Dada una función $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) f es medible

ii) Para todo $O \in \tau_{\overline{\mathbb{R}}}$ se cumple $f^{-1}(O) \in \Sigma$

Demostración:

$ii \Rightarrow i$ Trivial, basta tomar $O = [-\infty, \alpha)$ abierto de $\overline{\mathbb{R}}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

$i \Rightarrow ii$ Sea O un abierto cualquiera de $\overline{\mathbb{R}}$, sabemos que es unión de sus

componentes conexas, habiendo un número a lo sumo numerable (pues hay una base numerable y son abiertas) de ellas. Así, tenemos $O = \bigcup_{i \in I} J_i$ con $I \subseteq \mathbb{N}$. Además, $i \neq j \Rightarrow J_i \cap J_j = \varnothing$ por ser disjuntas las componentes conexas. En $\overline{R}$, los conjuntos conexos son precisamente los intervalos, luego $\forall\, i \in I$ J_i ha de ser de una de las siguientes formas:

$$J_i = \overline{\mathbb{R}} \qquad J_i = [-\infty, \beta_i) \qquad J_i = (\alpha_i, \infty] \qquad J_i = (\alpha_i, \beta_i) = [-\infty, \beta_i) \cap (\alpha_i, \infty]$$

Donde $-\infty \leq \alpha_i < \beta_i \leq \infty$. En cualquier caso, se tiene $f^{-1}(J_i) \in \Sigma$ por ser f medible por definición de medible.

Por tanto, $f^{-1}(O) = f^{-1}\Big(\bigcup_{i \in I} J_i\Big) = \bigcup_{i \in I} \underbrace{f^{-1}(J_i)}_{\in \Sigma} \in \Sigma$.

1.3.4 Medibilidad de máximo, mínimo, supremo e ínfimo

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sea $\{f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles en él. Entonces, se cumple:

i) $\max\{f_1, \ldots, f_n\}$ es medible $\;\forall\, n \in \mathbb{N}$.

ii) $\min\{f_1, \ldots, f_n\}$ es medible $\;\forall\, n \in \mathbb{N}$.

iii) $\sup\{f_i : i \in \mathbb{N}\}$ es medible.

iv) $\inf\{f_i : i \in \mathbb{N}\}$ es medible.

v) $\underline{\lim}_n\{f_n : n \in \mathbb{N}\} := \liminf_n\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es medible.

vi) $\overline{\lim}_n\{f_n : n \in \mathbb{N}\} := \limsup_n\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es medible.

vii) Si $\exists \lim_n f_n(x) \;\forall\, x \in X$; entonces, $\lim_n f_n$ es medible.

<u>**Demostración:**</u> Fijamos $\alpha \in \mathbb{R}$ cualquiera.

i) Sea $n \in \mathbb{N}$ cualquiera, podemos expresar la preimagen como:

$$\Big\{x \in X : \max\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\} < \alpha\Big\} = \bigcap_{i=1}^{n} \underbrace{\{x \in X : f_i(x) < \alpha\}}_{\in\Sigma} \in \Sigma$$

ii) Del mismo modo, sea $n \in \mathbb{N}$ cualquiera,

$$\Big\{x \in X : \min\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\} > \alpha\Big\} = \bigcap_{i=1}^{n} \underbrace{\{x \in X : f_i(x) > \alpha\}}_{\in\Sigma} \in \Sigma$$

iii) Utilizando desigualdades no estrictas (importante), te tiene:

$$\Big\{x \in X : \sup\{f_i(x) : i \in \mathbb{N}\} \leq \alpha\Big\} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \underbrace{\{x \in X : f_i(x) \leq \alpha\}}_{\in\Sigma} \in \Sigma$$

iv) Análogamente,

$$\Big\{x \in X : \inf\{f_i(x) : i \in \mathbb{N}\} \geq \alpha\Big\} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \underbrace{\{x \in X : f_i(x) \geq \alpha\}}_{\in\Sigma} \in \Sigma$$

$v)$ Por definición, $\underline{\lim}_n f_n(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} f_k(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n(x)$ para $g_n(x) = \inf_{k\geq n} f_k(x)$, que es medible por el apartado anterior. Aplicando el apartado (iv) respecto de las g_n llegamos al resultado.

$vi)$ Análogamente, $\overline{\lim}_n f_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} f_k(x)$.

$vii)$ Si existe, el límite coincide con los límites superior e inferior, que son funciones medibles.

1.3.5 Suma, producto por escalares y cuadrado de funciones medibles

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida, sean $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ funciones medibles en él. Se cumplen los siguientes enunciados:

i) $f + g$ es medible (si está bien definida para todo $x \in X$).

ii) $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda f$ es medible (si está bien definida).

iii) f^2 es medible (siempre está bien definida).

Demostración: Fijamos $\alpha \in \mathbb{R}$ cualquiera.

$i)$ Se cumple (importante utilizar desigualdad estricta):

$$\begin{aligned}
\{x \in X : (f+g)(x) < \alpha\} &= \{x \in X : f(x) < \alpha - g(x)\} = && \mathbb{Q} \text{ es denso en } \mathbb{R} \\
&= \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \{x \in X : f(x) < q < \alpha - g(x)\} = \\
&= \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \Big(\{x \in X : f(x) < q\} \cap \{x \in X : q < \alpha - g(x)\} \Big) \in \Sigma && \mathbb{Q} \text{ numerable}
\end{aligned}$$

$ii)$ Si $\lambda = 0$, $\lambda f \equiv 0$ es medible trivialmente.

- Si $\lambda > 0$, $\{x \in X : \lambda f(x) < \alpha\} = \{x \in X : f(x) < \frac{\alpha}{\lambda}\} \in \Sigma$.
- Si $\lambda < 0$, $\{x \in X : \lambda f(x) < \alpha\} = \{x \in X : f(x) > \frac{\alpha}{\lambda}\} \in \Sigma$.

iii) Distinguimos dos casos:

•Si $\alpha \leq 0$, $\{x \in X : f^2(x) < \alpha\} = \varnothing \in \Sigma$.

• Si $\alpha > 0$, entonces se cumple:

$$\{x \in X : f^2(X) < \alpha\} = \underbrace{\{x \in X : f(x) < \sqrt{\alpha}\}}_{\in\Sigma} \cap \underbrace{\{x \in X : f(x) > -\sqrt{\alpha}\}}_{\in\Sigma} \in \Sigma$$

1.3.6 Medibilidad del límite cuando no existe

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida, sea $\{f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles en él. Definimos $A := \{x \in X : \nexists \lim\limits_n f_n(x)\}$. Se tiene que A es medible.

<u>**Demostración:**</u>

Por el resultado 1.3.4, sabemos que $\underline{\lim}_n f_n$ y que $\overline{\lim}_n f_n$ son funciones medibles. Así, aplicando el resultado anterior, tenemos que $g := \underline{\lim}_n f_n - \overline{\lim}_m f_m$ es también medible.

Para ver $A \in \Sigma$ basta ver $A^c \in \Sigma$. El límite existe si y solo si los límites superior e inferior coinciden. Por tanto, se cumple:

$$A^c = g^{-1}(\{0\}) = \underbrace{\{x \in X : g(x) \leq 0\}}_{\in\Sigma} \cap \underbrace{\{x \in X : g(x) \geq 0\}}_{\in\Sigma} \in \Sigma$$

1.3.7 Composición de funciones medibles

En general, no siempre tiene sentido hablar de medibilidad respecto de funciones compuestas. No obstante, existen casos donde sí lo tiene. Por ejemplo, existen funciones medibles en $(\mathbb{R}^N, \mathfrak{M}_N, \mu_N)$ cuya composición no es medible en este espacio, aunque en ocasiones la composición sí puede respetar la medibilidad.

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sea $f : X \longrightarrow A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ una función medible. Sea $g : A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ continua. Entonces, $(g \circ f)$ es medible.

Demostración: Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ cualquiera; entonces,

$$(g \circ f)^{-1}\Big([-\infty, \alpha)\Big) = f^{-1}\Bigg(\underbrace{g^{-1}\Big([-\infty, \alpha)\Big)}_{\in\, \tau_{\overline{\mathbb{R}}}}\Bigg) \in \Sigma$$

Por continuidad de g, la preimagen del abierto $[-\infty, \alpha)$ de $\overline{\mathbb{R}}$ es también un abierto. Aplicando ahora el resultado 1.3.3., por ser f medible, tenemos que la preimagen de este abierto por f pertenece a Σ.

1.3.8 Operaciones en $\overline{\mathbb{R}}$

Sea $k \in \mathbb{R}$, se cumple, $+\infty + k = +\infty$, $-\infty + k = -\infty$. Además,

$$+\infty \cdot k = +\infty \text{ si } k \in (0, +\infty] \qquad +\infty \cdot k = -\infty \text{ si } k \in [-\infty, 0)$$
$$-\infty \cdot k = -\infty \text{ si } k \in (0, +\infty] \qquad -\infty \cdot k = +\infty \text{ si } k \in [-\infty, 0)$$

Las operaciones $0 \cdot +\infty$ y $0 \cdot -\infty$ no están definidas. Nótese que $\overline{\mathbb{R}}$ no es un cuerpo.

1.3.9 Cociente de una función medible

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sea $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$ medible. Entonces, $\frac{1}{f}$ es también medible.

Demostración: Consecuencia directa del resultado 1.3.7. Se tiene $\frac{1}{f} = g \circ f$ con $g : \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ continua.

1.3.10 Composición de funciones medibles en $\mathfrak{B}_1$

Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ medibles en $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_1, \mu_1)$. Entonces, $g \circ f$ es también medible en este espacio de medida.

Demostración: Definimos el siguiente conjunto $\mathcal{A}$. Veamos que $\tau_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{A}$.

$$\mathcal{A} := \{B \in \mathfrak{B}_1 : f^{-1}(B) \in \mathfrak{B}_1\}$$

Sea $O \in \tau_{\mathbb{R}}$; por ser f medible sabemos $f^{-1}(O) \in \mathfrak{B}_1$, luego $O \in \mathcal{A}$ por definición. Veamos que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra:

$(S.1)$ $\varnothing = f^{-1}(\varnothing)$ con $\varnothing \in \mathfrak{B}_1$, luego $\varnothing \in \mathcal{A}$.

$(S.2)$ Sean $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$, $f^{-1}\Big(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i\Big) = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} \underbrace{f^{-1}(E_i)}_{\in\mathfrak{B}_1} \in \mathfrak{B}_1$.

$(S.3)$ Sea $E \in \mathcal{A}$, $f^{-1}(E^c) = \big(f^{-1}(E)\big)^c \in \mathfrak{B}_1$.

Por tanto, tenemos que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra de $\mathbb{R}$ con $\tau_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{A}$. Por definición de $\mathfrak{B}_1$, se cumple $\mathfrak{B}_1 \subseteq \mathcal{A}$. Por definición de $\mathcal{A}$, se tiene además $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{B}_1$ luego se cumple la igualdad. Por tanto, sea $O \in \tau_{\mathbb{R}}$ cualquiera, sea cumple:

$$(g \circ f)^{-1}(O) = f^{-1}\Big(\underbrace{g^{-1}(O)}_{\in\mathfrak{B}_1}\Big) \in \mathfrak{B}_N$$

Nota: Esta caracterización de medibilidad funciona para $\mathfrak{B}_1$, pero no para $\mathfrak{M}_N$.

1.3.11 Definición de función característica

Dado un conjunto cualquiera X, sea $A \subseteq X$ cualquiera. Llamaremos "función característica de A en X" (o "indicadora") a la siguiente función (se denota por 1_A o X_A):

$$1_A, X_A : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \qquad x \longmapsto 1_A(x) = X_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

1.3.12 Medibilidad según función característica

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida, sea $A \subseteq X$. Se cumple:

$$\mathcal{X}_A \text{ es medible} \iff A \in \Sigma$$

<u>**Demostración:**</u>

$$\mathcal{X}_A^{-1}\Big([\alpha, \infty]\Big) = \begin{cases} X & \text{si } \alpha \leq 0 \quad \text{siempre en } \Sigma \\ A & \text{si } \alpha \in (0, 1] \\ \varnothing & \text{si } \alpha > 1 \quad \text{siempre en } \Sigma \end{cases}$$

Tenemos que $\mathcal{X}_A$ es medible si y solo si $\mathcal{X}_A^{-1}\Big([\alpha, \infty]\Big) \in \Sigma \ \forall\, \alpha \in (0, 1]$, lo que a su vez equivale a exigir $A \in \Sigma$.

1.3.13 Definición de función simple

Llamamos "función simple" $s : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ a cualquier función cuya imagen es un conjunto finito.

Denotando $s(X) = \{\lambda_1 < \ldots < \lambda_n\}$ con $n \in \mathbb{N}$ fijo, llamaremos "expresión canónica" de s a la siguiente expresión:

$$s = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \mathcal{X}_{A_i} \qquad \qquad \text{donde } A_i = s^{-1}\Big(\{\lambda_i\}\Big) \ \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$$

Nótese que $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ y que $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$.

1.3.14 Medibilidad de funciones simples

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sea $s : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función simple tal que $s(X) = \{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$ con $\lambda_1 < \ldots < \lambda_n$. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:

i) s es medible

ii) $A_i := s^{-1}(\{\lambda_i\}) \in \Sigma \ \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$

Demostración:

$\boxed{ii \Rightarrow i}$ Como los A_i son medibles por hipótesis, aplicando el resultado 1.3.12, tenemos que las funciones características X_{A_i} son medibles. Aplicando ahora el resultado 1.3.5, concluimos que:

$$s = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot X_{A_i} \quad \text{es medible}$$

$\boxed{\neg ii \Rightarrow \neg i}$ Por hipótesis, $\exists\, j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $A_j \notin \Sigma$.

Veamos que s no es medible. En caso de serlo, se cumpliría:

$$\underbrace{s^{-1}\Big([-\infty, \lambda_j]\Big)}_{\in\Sigma} \cap \underbrace{s^{-1}\Big([\lambda_j, +\infty]\Big)}_{\in\Sigma} \in \Sigma$$

Como la preimagen respeta la intersección, se tiene:

$$s^{-1}\Big([-\infty, \lambda_j]\Big) \cap s^{-1}\Big([\lambda_j, +\infty]\Big) = s^{-1}\Big([-\infty, \lambda_j] \cap [\lambda_j, +\infty]\Big) = s^{-1}(\{\lambda_j\}) = A_j \in \Sigma$$

Hemos llegado a una contradicción. Por tanto, s no puede ser medible.

1.3.15 Producto de funciones medibles

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sean $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medibles. Si $f \cdot g$ está bien definida para todo $x \in X$; entonces, es medible.

Demostración: Hemos de considerar varios casos.

Si $f + g$ está bien definida, se cumple: $f \cdot g = \frac{1}{2}\Big((f+g)^2 - f^2 - g^2\Big)$. En esta región, a la que denotaremos A_0, $f \cdot g$ es medible como consecuencia del resultado 1.3.5. La expresión anterior no está definida para los x pertenecientes a los siguientes conjuntos:

$$
\begin{aligned}
A_1 &:= f^{-1}\big(\{+\infty\}\big) \cap g^{-1}\Big([-\infty,0)\Big) & A_5 &:= g^{-1}\big(\{+\infty\}\big) \cap f^{-1}\Big((-\infty,0)\Big)\\
A_2 &:= f^{-1}\big(\{+\infty\}\big) \cap g^{-1}\Big((0,+\infty]\Big) & A_6 &:= g^{-1}\big(\{+\infty\}\big) \cap f^{-1}\Big((0,+\infty)\Big)\\
A_3 &:= f^{-1}\big(\{-\infty\}\big) \cap g^{-1}\Big([-\infty,0)\Big) & A_7 &:= g^{-1}\big(\{-\infty\}\big) \cap f^{-1}\Big((-\infty,0)\Big)\\
A_4 &:= f^{-1}\big(\{-\infty\}\big) \cap g^{-1}\Big((0,+\infty]\Big) & A_8 &:= g^{-1}\big(\{-\infty\}\big) \cap f^{-1}\Big((0,+\infty)\Big)
\end{aligned}
$$

Es evidente que $(f \cdot g)_{|A_i} \equiv +\infty$ y que $(f \cdot g)_{|A_j} \equiv -\infty$ para $i \in \{2,3,6,7\}$, y para $j \in \{1,4,5,8\}$. Así, al ser constantes, las restricciones son medibles en $(A_k, \Sigma(A_k), \mu_{|\Sigma(A_k)})$ con $k \in \{1,\dots,8\}$.

Por tanto, para cada $i \in \{0,1,\dots,8\}$ tenemos que $(f \cdot g)_{|A_i}$ es medible en $(A_i, \Sigma(A_i), \mu_{|\Sigma(A_i)})$. Esto equivale a que $f \cdot g \cdot X_{A_i}$ es medible en (X,Σ,μ). Finalmente, se cumple:

$$f \cdot g = \sum_{k=0}^{8} f \cdot g \cdot X_{A_k} \quad \text{es medible}$$

Al ser disjuntos los A_i, la función está bien definida. Además, es medible en (X,Σ,μ) al ser suma de funciones medibles en este espacio.

1.3.16 Definición de parte positiva y negativa

Dada una función $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, llamaremos "parte positiva de f" y "parte negativa de f", respectivamente, a las siguientes funciones:

$$f^+(x) = \max\{0, f(x)\} \text{ con } x \in X \qquad f^-(x) = \max\{0, -f(x)\} \text{ con } x \in X$$

De este modo, $f = f^+ - f^-$ y $|f| = f^+ + f^-$. Además, para cada $x_0 \in X$, al menos un valor $f^+(x_0)$ ó $f^-(x_0)$ ha de ser nulo. Si f es medible, entonces lo son también f^+ y f^-.

$$(f^+)^{-1}\Big([-\infty,\alpha)\Big) = \begin{cases} \varnothing & \text{si } \alpha \le 0 \\ f^{-1}\Big([-\infty,\alpha) \cap [-\infty,0]\Big) & \text{si } \alpha > 0 \end{cases}$$

En cualquier caso, el resultado pertenece a Σ al ser f medible. Análogo para f^-.

1.3.17 Funciones medibles como límite de simples

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sea $f : X \longrightarrow [0, \infty]$ una función medible en él. Entonces existe una sucesión de funciones simples medibles $s_n : X \longrightarrow [0, +\infty)$ tales que para todo $x \in X$ se cumple:

i) $\forall\ n \in \mathbb{N} : s_n(x) \leq s_{n+1}(x)\ \ \forall\, x \in X$

ii) $\exists \lim\limits_n s_n(x) = f(x)$

<u>Nota:</u> Este teorema afirma la existencia de una sucesión creciente de funciones (primer apartado) pero las funciones de la sucesión no tienen por qué ser crecientes.

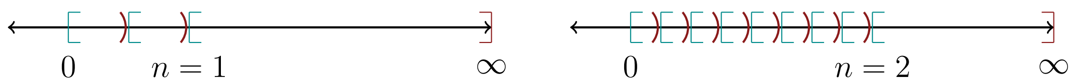
<u>Demostración:</u> Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos los siguientes conjuntos:

$$E_n := f^{-1}\Big([n, +\infty]\Big) \in \Sigma$$
$$E_{n,i} := f^{-1}\left(\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right)\right) \in \Sigma \quad \text{con } i \in \{1, \ldots, n \cdot 2^n\}$$

Así, para n fijo, $i \neq j \Rightarrow E_{n,i} \cap E_{n,j} = \varnothing$. Además, definiremos la siguiente función:

$$s_n(x) = n \cdot X_{E_n}(x) + \sum_{i=1}^{n \cdot 2^n} \left(\frac{i-1}{2^n} \cdot X_{E_{n,i}}(x)\right)$$

Esta función asigna a cada $x \in X$ el mínimo del conjunto E_n ó $E_{n,i}$ donde se encuentra x. Al tomar un conjunto finito de valores, es una función simple. Además, al ser medibles las preimágenes de sus valores, tenemos que s_n es también medible.



Conjuntos inducidos para los casos $n = 1$ y $n = 2$.

Sea $x_0 \in X$ cualquiera, dependiendo del valor de $f(x_0)$ pueden darse dos casos:

• Si $f(x_0) = +\infty$, $f(x_0) \in [n, +\infty]\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, luego $s_n(x_0) = n \xrightarrow{n \to \infty} \infty = f(x_0)$ de manera creciente.

• Si $f(x_0) \in (0, +\infty)$, podemos tomar $m := \min\{n \in \mathbb{N} : n > f(x_0)\}$. Así, se cumple $s_1(x_0) = 1 < s_2(x_0) = 2 < \ldots < s_{m-1}(x_0) = m - 1 < s_m(x_0) < m$.

Para $n \geq m$, tenemos que $\exists! i_n \in \{1, \ldots, n \cdot 2^n\}$ que verifica:

$$f(x_0) \in \left[\frac{i_n - 1}{2^n}, \frac{i_n}{2^n}\right) = \left[\frac{2i_n - 2}{2^{n+1}}, \frac{2i_n - 1}{2^{n+1}}\right) \cup \left[\frac{2i_n - 1}{2^{n+1}}, \frac{2i_n}{2^{n+1}}\right)$$

De este modo, $s_n(x_0) = \frac{i_n - 1}{2^n}$ y además $s_{n+1}(x_0) \in \left\{\frac{2i_n-2}{2^{n+1}}, \frac{2i_n-1}{2^{n+1}}\right\}$ luego ha de cumplirse necesariamente $s_n(x_0) \leq s_{n+1}(x_0)$. Al ser una sucesión no decreciente y acotada, podemos afirmar que $\exists\, l := \lim_n s_n(x_0) \in (0, +\infty)$. Veamos que $l = f(x_0)$. Dado $n \geq m$, se cumple:

$$s_n(x) = \frac{i_n - 1}{2^n} \leq f(x_0) < \frac{i_n}{2^n} = \frac{i_n - 1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = s_n(x_0) + \frac{1}{2^n}$$

Tomando límites cuando $n \to \infty$, concluimos que $l \leq f(x_0) \leq l$.

1.3.18 Convergencia uniforme para funciones acotadas

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sea $f : X \longrightarrow [0, +\infty)$ una función medible y acotada. Entonces existe una sucesión de funciones simples $s_n : X \longrightarrow [0, \infty)$ tales que:

i) $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, x \in X : s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$

ii) $s_n \xrightarrow{u} f$

Nota: Podemos suponer que f está estrictamente acotada por 1. En caso contrario, estará estrictamente acotada por cierto $K \in (0, +\infty)$. Podemos aplicar el resultado a $\frac{f}{K}$, que estará acotada por 1, y multiplicar las funciones simples por K con el fin de que se cumpla para la f original.

Demostración:

En vista del resultado anterior, queda comprobar que la convergencia es uniforme. Siguiendo la notación de la demostración anterior,

$$s_n = n \cdot X_{E_n} + \sum_{i=1}^{n \cdot 2^n} \left(\frac{i-1}{2^n} \cdot X_{E_{n,i}} \right)$$

Al suponer que f está estrictamente acotada por 1, el primer sumando es siempre nulo. Por tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $E_n = f^{-1}\Big([n, +\infty]\Big) = \varnothing$, $\forall\, x \in X$: $f(x) \in \Big[\frac{i_{n,x}-1}{2^n}, \frac{i_{n,x}}{2^n}\Big)$ para cierto $i_{n,x} \in \{1, \ldots, n \cdot 2^n\}$. De este modo,

$$|s_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \to \infty} 0 \quad \text{uniformemente para cualquier } x \in X$$

II Integral de Lebesgue

§1. Integral de Lebesgue para funciones no negativas

2.1.1 Convenio $0 \cdot \infty$

Consideramos $0 \cdot \infty = 0$ siempre y cuando al menos uno de los dos factores represente la medida de algún conjunto.

2.1.2 Definición de integral de funciones simples

Dado un espacio de medida (X, Σ, μ) y una función simple medible

$$s : X \longrightarrow [0, +\infty) \qquad \text{con expresión canónica } s = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_{A_i}$$

Definimos la integral de Lebesgue de s sobre X como el número:

$$\int_X s \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \mu(A_i)$$

<u>**Nota:**</u> Implícitamente, ya está definida la integral de s sobre $\Sigma(E)$ $\forall\, E \in \Sigma$:

$$\int_E s \, d\mu = \int_X s_{|E} \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \mu(E \cap A_i)$$

2.1.3 Linealidad del integrando

Dado un espacio de medida (X, Σ, μ). Sea $s : X \longrightarrow [0, \infty)$ una función simple y medible. Sean $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \Sigma$ con $i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \varnothing$. Entonces, se cumple:

$$\int_{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i} s\,d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} s\,d\mu$$

Demostración: Sea $s = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot X_{A_i}$ la expresión canónica de s. Entonces,

$$\int_{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i} s\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \mu\big(A_i \cap \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_i \cap E_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_i \cdot \mu(A_i \cap E_j) \right) = \sum_{j=i}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \mu(A_i \cap E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} s\,d\mu$$

2.1.4 Linealidad parcial

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sean $s, t : X \longrightarrow [0, \infty)$ funciones simples y medibles. Entonces, se cumple:

$$\int_X s + t\,d\mu = \int_X s\,d\mu + \int_X t\,d\mu$$

Demostración: Sean sus expresiones canónicas las siguientes:

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot X_{A_i} \qquad\qquad t = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \cdot X_{B_j}$$

Entonces, como $\{A_i\}_{i=1}^n$ y $\{B_j\}_{j=1}^m$ son recubrimientos disjuntos de X, se tiene:

$$\int_X s\,d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^m \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}} \alpha_i \cdot \mu(A_i \cap B_j)$$

$$\int_X t\,d\mu = \sum_{j=1}^m \beta_j \sum_{i=1}^n \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}} \beta_j \cdot \mu(A_i \cap B_j)$$

Sumando ambas expresiones obtenemos:

$$\int_X s\,d\mu + \int_X t\,d\mu = \sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}} (\alpha_i + \beta_j) \cdot \mu(A_i \cap B_j) =$$

$$= \sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}} \int_{A_i \cap B_j} s + t\,d\mu = \int_X s + t\,d\mu$$

La última igualdad se deduce de la linealidad del integrando.

2.1.5 Monotonía de la integral simple

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sean $s, t : X \longrightarrow [0, \infty)$ funciones medibles simples tales que $s(x) \leq t(x)\ \ \forall x \in X$. Entonces, se cumple:

$$\int_X s\,d\mu \leq \int_X t\,d\mu$$

Demostración: Sean sus expresiones canónicas: $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot X_{A_i}$ $\;\; t = \sum_{j=1}^m \beta_j \cdot X_{B_j}$.

$$\int_X s\,d\mu = \sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) \qquad \int_X t\,d\mu = \sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}} \beta_j \mu(A_i \cap B_j)$$

Por hipótesis, tenemos que $s(x) \leq t(x)$ para todo $x \in X$. De este modo; sean

$i \in \{1, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, m\}$ cualesquiera, tenemos que o bien $\alpha_i \leq \beta_j$ o bien $A_i \cap B_j = \varnothing \Rightarrow \mu(A_i \cap B_j) = 0$. Por tanto, cada sumando del sumatorio de la izquierda va a ser menor o igual que el término de mismos índices del sumatorio de la derecha, hemos demostrado el resultado.

2.1.6 Linealidad de la integral simple por constantes

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sea $s = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot X_{A_i}$ una función simple, medible y no negativa. Entonces:

$$\int_X c \cdot s \, d\mu = c \cdot \int_X s \, d\mu \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

__Demostración:__ Distinguimos dos casos:

- Si $c = 0$, entonces $s \cdot c \equiv 0$ y se cumple:

$$\int_X c \cdot s \, d\mu = \int_X 0 \, d\mu = 0 \cdot \mu(X) = 0 = 0 \cdot \int_X s \, d\mu$$

- Si $c \neq 0$, entonces:

$$\int_X c \cdot s \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} c \cdot \lambda_i \cdot \mu(A_i) = c \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \mu(A_i) = c \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \mu(A_i) = c \cdot \int_X s \, d\mu$$

2.1.7 Integral de funciones medibles no negativas

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sea $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ medible. Se define la integral de Lebesgue de f sobre X como:

$$\int_X f\,d\mu = \sup \left\{ \int_X s\,d\mu \quad \text{con } 0 \leq s \leq f,\ s \underset{s<\infty}{\text{función simple medible}} \right\} = \sup \mathcal{S}_X(f)$$

Nótese que el conjunto anterior no es vacío, pues $s \equiv 0$ está en él. Además, se puede extender la definición anterior a cualquier subconjunto medible de X.

2.1.8 Ejemplos de integrales

i) Función de Dirichlet: $X_{\mathbb{Q}}$.
Consideramos el espacio de medida $\big([0,1], \mathfrak{M}_1([0,1]), \mu_1\big)$. Esta función no es integrable en el sentido de Riemann, pues las sumas inferiores son siempre nulas y las superiores toman valor 1 (se debe a la densidad de los racionales y los irracionales). Veamos que $X_{\mathbb{Q}}$ sí es integrable en el sentido de Lebesgue.

Tenemos que $X_{\mathbb{Q}}$ es una función simple, pues toma el valor 1 en $[0,1] \cap \mathbb{Q}$, que es numerable, y el valor 0 en $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$, que es medible al ser el complementario del conjunto anterior en este espacio de medida. Su integral viene dada por:

$$\int_{[0,1]} X_{\mathbb{Q}}\,d\mu = 1 \cdot \mu([0,1] \cap \mathbb{Q}) + 0 \cdot \mu([0,1] \setminus \mathbb{Q}) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

ii) Consideramos el mismo espacio de medida que en el caso anterior. Veamos que la función de Thomae es integrable. Se define como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \cup \{0\} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ para } p, q \text{ naturales primos entre sí} \end{cases}$$

Sabemos por Análisis Matemático II que esta función es integrable-Riemann en $[0,1]$ con valor de su integral igual a 0. Veamos que ocurre lo mismo con la integral de Lebesgue. Sea s una función simple medible tal que $0 \leq s \leq f$. Se cumple $M := \max s([0,1]) \leq 1$. Los puntos donde s toma valores positivos son a lo sumo numerables, pues se cumple:

$$f^{-1}\big((0,+\infty)\big) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{i=1}^{n} \frac{i}{n}$$

Los puntos donde s toma valores positivos han de estar contenidos en el conjunto anterior, que es numerable y tiene por tanto medida nula. De este modo, tenemos:

$$0 \leq \int_{[0,1]} s\, d\mu = 0 \cdot \mu\big(s^{-1}(\{0\})\big) + M \cdot \mu\Big(s^{-1}\big((0,M]\big)\Big) = 0$$

2.1.9 Propiedades básicas

Sea (X,Σ,μ) un espacio de medida. Sean $f,g : X \to [0,\infty]$ funciones medibles. Sean $E,F \in \Sigma$. Sea $c \in [0,+\infty)$. Se cumplen los siguientes enunciados:

i) $0 \leq f \leq g \Rightarrow \int_X f\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu$

ii) $\int_X c \cdot f\, d\mu = c \cdot \int_X f\, d\mu$

iii) $f \equiv 0 \Rightarrow \int_X f\, d\mu = 0$

iv) $\mu(E) = 0 \Rightarrow \int_E f\, d\mu = 0$

v) Si $E \subseteq F$; entonces, $\int_E f\, d\mu = \int_F f \cdot X_E\, d\mu$ y $\int_E f\, d\mu \leq \int_F f\, d\mu$

Demostración:

i) Sea $s : X \longrightarrow [0,+\infty)$ una función simple medible tal que $s \leq f$. Entonces se cumple $s \leq g$. Por tanto, siguiendo la notación del resultado 2.1.7, tenemos que

$\mathcal{S}_X(f) \subseteq \mathcal{S}_X(g)$ luego ha de cumplirse:

$$\int_X f \, d\mu = \sup \mathcal{S}_X(f) \leq \sup \mathcal{S}_X(g) = \int_X g \, d\mu$$

ii) Distinguimos dos casos: En primer lugar, si $c = 0$ se tiene:

$$\int_X c \cdot f \, d\mu = \int_X 0 \, d\mu = 0 = 0 \cdot \int_X f \, d\mu$$

Si $c \in (0, +\infty)$; entonces, tenemos:

$$c \cdot \int_X f \, d\mu = c \cdot \sup \left\{ \int_X s \, d\mu : \ 0 \leq s \leq f \quad \text{con } s \text{ función medible simple} \right\} = c \cdot \sup \mathcal{S}_X(f)$$

$$\int_X c \cdot f \, d\mu \sup \left\{ \int_X t \, d\mu : \ 0 \leq t \leq c \cdot f \quad \text{con } t \text{ función medible simple} \right\} = \sup \mathcal{S}_X(c \cdot f)$$

Al cumplirse $c \in (0, +\infty)$, tenemos que $0 \leq f \leq s \iff 0 \leq c \cdot s \leq c \cdot f$ luego las integrales han de coincidir.

iii iv) Trivial.

v) Comencemos por ver la primera parte. Sea una función simple y medible $s : F \longrightarrow [0, +\infty)$ tal que $s \leq f \cdot X_E$. Entonces se tiene $s_{|E}$ es simple también. Además, se cumple:

$$\int_F s \, d\mu = \int_E s_{|E} \, d\mu + \int_{F \setminus E} 0 \, d\mu = \int_E s_{|E} \, d\mu$$

De manera similar, sea $t : E \longrightarrow [0, +\infty)$ simple tal que $t \leq f$, podemos extender t a F al considerar $\hat{t}(x) = t(x)$ si $x \in E$ ó 0 si $x \in F \setminus E$. La función resultante $\hat{t}$

es simple, medible y cumple $\hat{t} \leq f \cdot X_E$. De este modo,

$$\int_F \hat{t}\, d\mu = \int_{F\setminus E} 0\, d\mu + \int_E \hat{t}\, d\mu = \int_E t\, d\mu$$

Por tanto, se cumple $\mathcal{S}_E(f) = \mathcal{S}_F(f \cdot X_E)$ luego las integrales coinciden.

Este razonamiento de extender t a $\hat{t}$ demuestra también que $\mathcal{S}_E(f) \subseteq \mathcal{S}_F(f)$ luego por definición de supremo, se tiene:

$$\int_E f\, d\mu = \sup \mathcal{S}_E(f) \leq \sup \mathcal{S}_F(f) = \int_F f\, d\mu$$

Se cumple también la segunda parte.

2.1.10 Teorema de la convergencia monótona

Dado un espacio de medida (X, Σ, μ). Sea $\{f_n : X \longrightarrow [0, +\infty]\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles tales que:

$$\forall\, x \in X \;\; \forall n \in \mathbb{N} : f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \qquad\qquad f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$$

Entonces, existe el límite de las integrales y coincide con la integral de la función límite:

$$\lim_n \int_X f_n\, d\mu = \int_X \lim_n f_n\, d\mu = \int_X f\, d\mu$$

Demostración:

Como $f_n \leq f_{n+1}$ por hipótesis para todo $n \in \mathbb{N}$. Aplicando la monotonía de la integral, tenemos:

$$\int_X f_n\, d\mu \leq \int_X f_{n+1}\, d\mu \Rightarrow \exists \lim_n \int_X f_n\, d\mu = \alpha \in [0, +\infty]$$

Al ser una sucesión monótona, o bien converge o diverge. Es por ello que podemos garantizar la existencia del límite, α.

Como $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$ de manera creciente para todo $x \in X$, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos $f_n \leq f \Rightarrow \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu \Rightarrow \alpha \leq \int_X f \, d\mu$. Queda demostrar $\int_X f \, d\mu \leq \alpha$. Para ello, sea $s : X \longrightarrow [0, +\infty]$ una función simple y medible con $s \leq f$, basta ver que $\int_X s \, d\mu \leq \alpha$.

Sea $c \in [0, 1)$. Para cada $x \in X$ existe $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $c \cdot s(x) \leq f_n(x) \leq f(x) \ \forall n \geq n_x$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $s(x) < \infty$ para aquellos x con $f(x) = \infty$ par que se cumpla el razonamiento anterior. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos el siguiente conjunto:

$$E_n := \{x \in X : c \cdot s(x) \leq f_k(x) \leq f(x) \ \forall k \geq n\} \quad \in \Sigma$$

Al ser s, f_n, f medibles, podemos garantizar que E_n es medible. Por definición, es claro que $E_n \subseteq E_{n+1}$ Además, se tiene $x \in X \Rightarrow x \in E_{n_x} \Rightarrow X = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$.

Sea $s = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot X_{A_i}$ la expresión canónica de s, se cumple:

$$\int_{E_n} c \cdot s \, d\mu \leq \int_{E_n} f_n \, d\mu \leq \int_{E_n} f \, d\mu$$

Pero por definición de integral simple, se cumple:

$$\int_{E_n} c \cdot s \, d\mu = c \cdot \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \mu(E_n \cap A_i) \xrightarrow{n\to\infty} c \cdot \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \mu(A_i) = c \cdot \int_X s \, d\mu$$

De este modo, tomando límites en la desigualdad anterior, $c \cdot \int_X s \, d\mu \leq \alpha$. Tomando $\lim\limits_{c\to 1^-}$ concluimos que $\int_X s \, d\mu \leq \alpha$.

2.1.11 Integral de la suma

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sean $f, g : X \longrightarrow [0, +\infty]$ funciones medibles. Entonces, se cumple:

$$\int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu = \int_X f + g\, d\mu$$

Demostración:

Podemos afirmar que existe una colección de funciones simples y medibles $\{s_n, t_n : X \longrightarrow [0, +\infty]\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que para todo $x \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumpla:

$$s_n(x) \leq s_{n+1}(x) \leq f \quad t_n(x) \leq t_{n+1}(x) \leq g \quad s_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x) \quad t_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} g(x)$$

Entonces, tenemos que $s_n + t_n \leq s_{n+1} + t_{n+1}$ y además $(s_n + t_n)(x) \xrightarrow{n\to\infty} (f + g)(x)$. Aplicando el Teorema de la Convergencia Monótona, tenemos:

$$\int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu = \lim_n \int_X s_n\, d\mu + \lim_n \int_X t_n\, d\mu = \lim \int_X s_n + t_n\, d\mu = \int_X f + g\, d\mu$$

2.1.12 Integrales en conjuntos disjuntos

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sea $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ una función medible. Sean $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \Sigma$ con $i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \varnothing$. Entonces, se cumple:

$$\int_{\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i} f\, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f\, d\mu$$

Demostración:

$$\int_{\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i} f\, d\mu = \int_X f \cdot X_{\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i}\, d\mu = \int_X \sum_{i=1}^{n} f \cdot X_{E_i}\, d\mu \overset{2.1.11}{=} \sum_{i=1}^{n} \int_X f \cdot X_{E_i}\, d\mu$$

Tomando límites llegamos al resultado:

$$\int_{\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i} f\,d\mu = \int_X \sum_{i=1}^{\infty} f\cdot X_{E_i}\,d\mu = \sum_{i=1}^{\infty}\int_X f\cdot X_{E_i}\,d\mu = \sum_{i=1}^{\infty}\int_{E_i} f\,d\mu$$

2.1.13 Lema de Fatou

Sea (X,Σ,μ) un espacio de medida. Sea una sucesión de funciones medibles $\{f_n : X \longrightarrow [0,+\infty]\}_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces, se cumple:

$$\int_X \underline{\lim}_n f_n\,d\mu \leq \underline{\lim}_n \int_X f_n\,d\mu$$

Demostración:

Por definición, $\underline{\lim}_n f_n = \lim_n \inf_{k\geq n} f_k(x) = \lim_n g_n(x)$ Para g_n medible. Además, $g_n \leq g_{n+1}$. De este modo, estamos en condiciones de aplicar el Teorema de la Convergencia Monótona:

$$\int_X \underline{\lim}_n f_n\,d\mu = \int_X \lim_n g_n\,d\mu = \lim_n \int_X g_n\,d\mu \overset{(*)}{\leq} \underline{\lim}_n \int_X f_n\,d\mu$$

(*) Como $g_n \leq f_n$, tenemos que $g_{k_n} \leq f_{k_n}$ (y por tanto $\int_X g_{k_n}\,d\mu \leq \int_X f_{k_n}\,d\mu$) para cualquier subsucesión; en particular, para la sucesión que tiene como límite el límite inferior.

Nota: En general, la igualdad no tiene por qué cumplirse:

$$f_n = X_{[n,+\infty)} \qquad \int_{\mathbb{R}} \lim_n f_n\,d\mu_1 = \int_{\mathbb{R}} 0\,d\mu_1 = 0 \qquad \int_{\mathbb{R}} f_n\,d\mu_1 = \infty \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

2.1.14 Definición de igualdad en casi todo punto

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sean dos funciones $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Se dice que f y g "son iguales en casi todo punto" si $\exists B \in \Sigma$ con $\mu(B) = 0$ tal que:

$$\{x \in X : f(x) \neq g(x)\} \subseteq B$$

En tal caso, se denotará como $f \overset{\mu-a.e.}{=} g$ ó $f = g \ \mu - a.e.$, las letras "a.e." vienen del término inglés "*almost everywhere*".

2.1.15 Medibilidad de funciones iguales en casi todo punto

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida completo. Sean $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ funciones tales que $f \overset{\mu-a.e.}{=} g$. Si f es medible; entonces, g es medible también.
Demostración:

Sea $A := \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$. Por hipótesis, $f \overset{\mu-a.e.}{=} g$ luego $\exists\, B \in \Sigma$ con $\mu(B) = 0$ tal que $A \subseteq B$. Al ser (X, Σ, μ) completo por hipótesis, tenemos que $A \in \Sigma$ también. De este modo, sea $\alpha \in \mathbb{R}$ cualquiera,

$$\{x \in X : g(x) < \alpha\} = \underbrace{\{x \in X : f(x) < \alpha\} \cap (X \setminus A)}_{\in \Sigma} \cup \underbrace{\{x \in X : g(x) < \alpha\} \cap A}_{\in \Sigma} \in \Sigma$$

El primer subconjunto es medible al ser f medible por hipótesis. El segundo conjunto es medible al tener también medida nula por ser un subconjunto de A.

2.1.16 Integral de funciones iguales en casi todo punto

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sean $f, g : X \longrightarrow [0, +\infty]$ funciones medibles. Entonces, se cumple:

$$f \overset{\mu-a.e.}{=} g \Rightarrow \int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu$$

Demostración: Por ser f, g medibles, $A := \{x \in X : f(x) \neq g(x)\} \in \Sigma$. Además, $f \overset{\mu-a.e.}{=} g$ luego $\mu(A) = 0$. De este modo,

$$\int_X f\,d\mu = \int_{X\setminus A} f\,d\mu + \int_A f\,d\mu = \int_{X\setminus A} f\,d\mu + 0 =$$
$$= \int_{X\setminus A} g\,d\mu + 0 = \int_{X\setminus A} g\,d\mu + \int_A g\,d\mu = \int_X g\,d\mu$$

Nota: Este resultado será también válido para funciones de signo variable.

2.1.17 Integral de funciones nulas en casi todo punto

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sea $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ una función medible. Entonces,

$$f \overset{\mu-a.e.}{=} 0 \iff \int_X f\,d\mu = 0$$

Demostración:

$\Rightarrow$ Se tiene como aplicación directa del resultado anterior.

$\Leftarrow$ Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos $E_n := \{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{n}\} \overset{f \text{ medible}}{\in} \Sigma$.

Sea $E := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \Sigma$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple:

$$0 \leq \frac{1}{n} \cdot \mu(E_n) = \int_X \frac{1}{n} \cdot \mathcal{X}_{E_n}\,d\mu \leq \int_{E_n} f\,d\mu \leq \int_X f\,d\mu = 0$$

Por tanto, $\mu(E_n) = 0$ luego $\mu(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = 0 \Rightarrow f \overset{\mu-a.e.}{=} 0$.

Nota:

$\Rightarrow$ La implicación es válida para $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

$\Leftarrow$ Es necesario exigir $f \geq 0$. Por ejemplo, $\int_{[0,2\pi]} \sin(x)\,d\mu(x) = 0$.

§2. Integral de Lebesgue para funciones $f : x \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$

2.2.1 Funciones integrables y sumables

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sea $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible. Diremos que "f es integrable sobre X" si cumple cualquiera de las siguientes dos condiciones:

$$\int_X f^+ \, d\mu < \infty \qquad\qquad \int_X f^- \, d\mu < \infty$$

Si f cumple simultáneamente ambas condiciones, diremos que "f es sumable" (toda función sumable es integrable). En cualquier caso, podemos definir la integral de f sobre X como:

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu$$

Nótese que como consecuencia inmediata de las definiciones anteriores, los siguientes enunciados son equivalentes:

i) f sumable

ii) f^+ y f^- sumables

iii) $|f|$ sumable

iv) $\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu \in \mathbb{R}$

v) $\int_{\mathbb{R}} |f| \, d\mu \in \mathbb{R}$

2.2.2 Desigualdad triangular

Dado un espacio de medida (X, Σ, μ). Sea $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrable. Se cumple:

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| \leq \int_X |f| \, d\mu$$

Demostración: Basta aplicar la desigualdad triangular de los números reales

$$\left|\int_X f\,d\mu\right| = \left|\int_X f^+\,d\mu - \int_X f^-\,d\mu\right| \leq \left|\int_X f^+\,d\mu\right| + \left|\int_X f^-\,d\mu\right| =$$
$$= \int_X f^+\,d\mu + \int_X f^-\,d\mu = \int_X |f|\,d\mu$$

2.2.3 Definición de conjunto de funciones sumables

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Denotaremos al conjunto de funciones sumables $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ como $\mathcal{L}_1$ o como $\mathcal{L}_1(X, \Sigma, \mu)$. Sea $E \in \Sigma$, utilizaremos la siguiente notación abreviada: $\mathcal{L}_1(E) = \mathcal{L}_1\big(E, \Sigma(E), \mu_{|\Sigma(E)}\big)$.

2.2.4 Teorema de estructura de $\mathcal{L}_1$

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida, se cumple:

i) $\mathcal{L}_1$ es un espacio vectorial.

ii) $\int_X : \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathbb{R} \quad f \longmapsto \int_X f\,d\mu$ es una aplicación lineal.

<u>Demostración:</u>

i) Sean $f, g \in \mathcal{L}_1$. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Veamos que $\alpha \cdot f + \beta \cdot g \in \mathcal{L}_1$.

$$\left|\int_X \alpha \cdot f + \beta \cdot g\,d\mu\right| \leq \int_X |\alpha \cdot f + \beta \cdot g|\,d\mu = |\alpha| \int_X |f|\,d\mu + |\beta| \int_X |g|\,d\mu \in \mathbb{R}$$

ii) Sean $\lambda \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{L}_1$. Veamos que $\int_X \lambda \cdot f\,d\mu = \lambda \cdot \int_X f\,d\mu$. Distinguiremos tres casos:

- Si $\lambda = 0$, $\int_X \lambda \cdot f\,d\mu = \int_X 0\,d\mu = 0 = 0 \cdot \int_X f\,d\mu$.

- Si $\lambda > 0$, entonces $(\lambda f)^+ = \lambda \cdot f^+$ y $(\lambda f)^- = \lambda \cdot f^-$. Por tanto,

$$\int_X \lambda f \, d\mu = \int_X (\lambda f)^+ \, d\mu - \int_X (\lambda f)^- \, d\mu = \lambda \int_X f^+ \, d\mu - \lambda \int_X f^- \, d\mu =$$
$$= \lambda \left(\int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu \right) = \lambda \int_X f \, d\mu$$

- Si $\lambda < 0$, entonces $(\lambda f)^+ = -\lambda \cdot f^-$ y $(\lambda f)^- = -\lambda \cdot f^+$. Por tanto,

$$\int_X \lambda f \, d\mu = \int_X (\lambda f)^+ \, d\mu - \int_X (\lambda f)^- \, d\mu = -\lambda \int_X f^- d\mu + \lambda \int_X f^+ \, d\mu =$$
$$= \lambda \left(\int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu \right) = \lambda \int_X f \, d\mu$$

Sean $f, g \in \mathcal{L}_1$, veamos que $\int_X f + g \, d\mu = \int_X f \, d\mu \int_X g \, d\mu$.
Despejamos para reescribir las partes positiva y negativa de $f + g$ según las de f y las de g:

$$(f{+}g)^+ - (f{+}g)^- = f{+}g = f^+ - f^- + g^+ - g^- \Rightarrow (f{+}g)^+ + f^- + g^- = (f{+}g)^- + f^+ + g^+$$

De este modo, se cumple:

$$\int_X (f + g)^+ \, d\mu + \int_X f^- \, d\mu + \int_X g^- \, d\mu = \int_X (f + g)^- \, d\mu + \int_X f^+ \, d\mu + \int_X g^- \, d\mu \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_X (f + g)^+ \, d\mu - \int_X (f + g)^- \, d\mu}_{\int_X f+g \, d\mu} = \underbrace{\int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu}_{\int_X f \, d\mu} + \underbrace{\int_X g^+ \, d\mu - \int_X g^- \, d\mu}_{\int_X g \, d\mu}$$

Hemos tenido que estructurar esta última parte de la demostración de esta manera al tener que aplicar la linealidad de la integral para funciones no negativas.

2.2.5 Integral de funciones sumables en conjuntos disjuntos

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sea $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \Sigma$ tal que $i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \varnothing$. Sea $f \in \mathcal{L}_1$. Entonces, se cumple:

$$\int\limits_{\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i} f\, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f\, d\mu$$

Demostración: Consecuencia del resultado 2.1.12 y de la definición de $\mathcal{L}_1$.

$$\int\limits_{\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i} f\, d\mu = \int\limits_{\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i} f^+\, d\mu - \int\limits_{\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i} f^-\, d\mu = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f^+\, d\mu\right) + \left(\sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f^-\, d\mu\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_{E_i} f^+\, d\mu - \int_{E_i} f^-\, d\mu\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f\, d\mu$$

Hemos necesitado la hipótesis de f sumable para poder agrupar los dos sumatorios en uno solo.

2.2.6 Funciones μ-a.e. a sumables en $\mathcal{L}_1$

Dado un espacio de medida (X, Σ, μ). Sea $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ con f sumable. Entonces existe una función $g \in \mathcal{L}_1$ tal que $f \overset{\mu-a.e.}{=} g$.

Demostración: Comencemos por aclarar la diferencia entre sumable y $\mathcal{L}_1$.

Toda función $\mathcal{L}_1$ es sumable, pero no al revés. No podemos garantizar que f sea $\mathcal{L}_1$, pues su codominio es $\overline{\mathbb{R}}$ y no $\mathbb{R}$. Por tanto, buscamos una función $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ sumable tal que $f \overset{\mu-a.e.}{=} g$.

Por ser f sumable, los dos siguientes conjuntos tienen medida nula (de no ser así tendríamos que $\int_A f^+\, d\mu = \infty$ ó $\int_B f^-\, d\mu = -\infty$):

$$A = \{x \in X : f(x) = +\infty\} \qquad B := \{x \in X : f(x) = -\infty\}$$

Por ser f medible, ambos conjuntos son medibles. Basta definir g como sigue:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X \setminus (A \cup B) \\ 0 & \text{si } x \in A \cup B \end{cases} \Rightarrow g = f \cdot \mathcal{X}_{X \setminus (A \cup B)} \text{ medible}$$

De este modo, $f \overset{\mu-a.e.}{=} g$ y aplicando el resultado 2.1.16 tenemos que g es sumable luego $g \in \mathcal{L}_1$.

2.2.7 Teorema de Convergencia Dominada

Dado un espacio de medida (X, Σ, μ). Sea una colección de funciones medibles $\{f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$ para todo $x \in X$ para cierta función f. Si existe $g \in \mathcal{L}_1$ tal que $|f_n| \leq g \;\; \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces, se cumple:

i) $f \in \mathcal{L}_1$

ii) $\left(\int_X |f_n - f| \, d\mu\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

iii) $\int_X f_n \, d\mu \xrightarrow{n\to\infty} \int_X f \, d\mu$

<u>**Demostración:**</u>

i) $\forall n \in \mathbb{N} \;\; \forall x \in X : |f_n(x)| \leq g(x) \Rightarrow |f(x)| \leq g(x) \Rightarrow \int_X |f| \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu < \infty$.

ii) $\forall n \in \mathbb{N} \quad : |f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g$ Luego $f_n + f \in \mathcal{L}_1$. Despejando, $2g - |fn - f| \geq 0$. Por tanto, estamos en condiciones de aplicar el Lema de Fatou,

$$\int_X \underline{\lim}_n \, 2g - |f_n - f| \, d\mu \leq \underline{\lim}_n \int_X 2g - |f_n - f| \, d\mu$$

Por hipótesis, sabemos que existe $\lim\limits_n 2g - |f_n - f| = 2g$ luego podemos pasar del límite inferior al límite en el primer miembro de la desigualdad. Desglosando la integral de la resta como resta de integrales y aplicando las definiciones de límite inferior y superior:

$$\int_X 2g \, d\mu \leq \underline{\lim}_n \left(\int_X 2g \, d\mu - \int_X |f_n - f| \, d\mu \right) = \int_X 2g \, d\mu - \overline{\lim}_n \int_X |f_n - f| \, d\mu$$

Restando $\int_X 2g\, d\mu$ en ambos lados:

$$0 \leq -\overline{\lim_n} \int_X |f_n - f|\, d\mu \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\, d\mu = 0$$

iii) Por el apartado anterior, sabemos que $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n \geq n_0$ se cumple:

$$\left| \int_X f_n\, d\mu - \int_X f\, d\mu \right| \overset{(*)}{=} \left| \int_X f - f_n\, d\mu \right| \overset{2.2.2}{\leq} \int_X |f_n - f|\, d\mu < \varepsilon$$

(*) Hemos aplicado la linealidad de la integral en $\mathcal{L}_1$ pues $f, f_n \in \mathcal{L}_1$.

§3. Cálculo de la integral de Lebesgue en $\mathbb{R}$

2.3.1 Equivalencia de las integrales de Riemann y Lebesgue

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:

i) $\mu_1\Big(\{x \in [a, b] : f \text{ es discontinua en } x\}\Big) = 0$.

ii) f es integrable Riemann; es decir, $f \in \mathcal{R}\big([a, b]\big)$.

Además, si $f \in \mathcal{R}\big([a, b]\big)$; entonces, $\int_{[a,b]} f \, d\mu = \int_a^b f$.

Demostración:

Al estar acotada, $\exists\, M \in [0, +\infty)$ tal que $|f(x)| \leq M \;\forall\, x \in [a, b]$. Consideramos una sucesión de particiones de $[a, b]$,

$$P_n = \{x_0^n = a < x_1^n < \ldots < x_{k_n}^n = b\}$$

de modo que para cada $n \in \mathbb{N}$ P_n verifica simultáneamente las siguientes condiciones:

$$x_i^n - x_{i-1}^n < \frac{1}{n} \qquad\qquad P_n \subseteq P_{n+1}$$

Sea $n \in \mathbb{N}$, sea $i \in \{1, \ldots, k_n\}$. Introducimos la siguiente notación:

$$M_i^n := \sup\Big\{f(x) : x \in [x_{i-1}^n, x_i^n]\Big\} \qquad m_i^n := \inf\Big\{f(x) : x \in [x_{i-1}^n, x_i^n]\Big\}$$

De este modo, $-M \leq m_i^n \leq M_i^n \leq M$. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$ las dos siguientes funciones son simples y μ_1-medibles:

$$s_n := \sum_{i=1}^{k_n} M_i^n \cdot X_{[x_{i-1}^n, x_i^n]} \qquad\qquad t_n := \sum_{i=1}^{k_n} m_i^n \cdot X_{[x_{i-1}^n, x_i^n]}$$

Por definición de integral de funciones simples, tenemos que las integrales de s_n y

t_n son las sumas superior e inferior de Darboux de P_n, respectivamente. Es decir,

$$\int_{[a,b]} s_n \, d\mu = \sum_{i=1}^{k_n} M_i^n \cdot \mu([x_{i-1}^n, x_i^n]) = \sum_{i=1}^{k_n} M_i^n \cdot (x_i^n - x_{i-1}^n) = \overline{S}(f, P_n) < \sum_{i=1}^{k_n} M_i^n \cdot \frac{1}{n}$$

$$\int_{[a,b]} t_n \, d\mu = \sum_{i=1}^{k_n} m_i^n \cdot \mu([x_{i-1}^n, x_i^n]) = \sum_{i=1}^{k_n} m_i^n \cdot (x_i^n - x_{i-1}^n) = \underline{S}(f, P_n) < \sum_{i=1}^{k_n} m_i^n \cdot \frac{1}{n}$$

El conjunto de vértices de todas las particiones P_n es numerable:

$$V := \Big\{ x_i^n : n \in \mathbb{N}, i \in \{1, \ldots, k_n\} \Big\}$$

Además, sea $n \in \mathbb{N}$, por hipótesis, tenemos $P_n \subseteq P_{n+1}$. Sea $x \in [a,b]$, tenemos $s_n(x) \geq s_{n+1}(x)$ y $t_n(x) \leq t_{n+1}(x)$. Al ser funciones monótonas y acotadas, podemos asegurar que existe su límite. Sean s y t los límites de s_n y t_n, respectivamente. Sea $x_0 \in [a,b] \setminus V$. Veamos que f es continua en x_0 si y solo si $s(x_0) = t(x_0)$.

$\Rightarrow$ Por hipótesis, $\forall \, \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Elegimos $n \in \mathbb{N}$ tal que si $j \in \mathbb{N}$ es tal que $x_0 \in (x_{j-1}^n, x_j^n)$ entonces $(x_{j-1}^n; x_j^n) \subseteq (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Así, para cualquier $x \in (x_{j-1}^n, x_j^n)$ se cumple:

$$f(x_0) - \varepsilon \leq m_j^n \leq f(x) \leq M_j^n \leq f(x_0) + \varepsilon$$

Por tanto, $0 \leq s(x_0) - t(x_0) \leq s_n(x_0) - t_n(x_0) \leq 2\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$.

$\Leftarrow$ Supongamos $s(x_0) = f(x_0) = t(x_0)$ para ver f continua en x_0.

$$\lim_n s_n(x_0) = s(x_0) = f(x_0) = t(x_0) = \lim_n t_n(x_0)$$

Así, sea $\varepsilon > 0 \; \exists \, n \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq s_n(x_0) - t_n(x_0) < \varepsilon$. Fijamos este n. Sea $j \in \{1, \ldots, k_n\}$ el único tal que $x_0 \in (x_{j-1}^n, x_j^n)$. Tomamos $\delta > 0$ suficientemente pequeño como para que $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (x_{j-1}^n, x_j^n)$. De este modo, para $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, se cumple:

$$f(x_0) - \varepsilon < t_n(x_0) = m_j^n \leq f(x) \leq M_j^n = s_n(x_0) < f(x_0) + \varepsilon$$

Tenemos que f es continua en x_0 por definición.
Volvamos al problema principal.

$\Rightarrow$ Supongamos $\mu\Big(\{x \in X : f \text{ es discontinua en } x\}\Big) = 0.$

Denotando D al conjunto anterior, tenemos que $\mu(D) = 0 \Rightarrow \mu(D \cup V) = 0$ para V el conjunto de vértices de las particiones P_n. De este modo, $s \overset{\mu-a.e.}{=} t \Rightarrow s - t \overset{\mu-a.e.}{=} 0$. Por tanto, aplicando el resultado 2.1.16,

$$0 = \int_{[a,b]} s - t \, d\mu = \int_{[a,b]} \lim_n s_n - t_n \, d\mu \overset{TCD}{=} \lim_n \int_{[a,b]} s_n - t_n \, d\mu = \lim_n \overline{S}(f, P_n) - \underline{S}(f, P_n)$$

Según el criterio de Cauchy de integración Riemann, tenemos que $f \in \mathcal{R}([a,b])$.

$\Rightarrow$ Por el criterio de Cauchy de integración Riemann, podemos

suponer que existe $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de particiones de $[a,b]$ tales que $\overline{S}(f, P_n) - \underline{S}(f, P_n) < \frac{1}{n}$. Entonces:

$$0 \leq \int_{[a,b]} s - t \, d\mu = \int_{[a,b]} \lim_n s_n - t_n \, d\mu = \lim_n \int_{[a,b]} s_n - t_n \, d\mu = \lim_n \overline{S}(f, P_n) - \underline{S}(f, P_n) = 0$$

De este modo, $s \overset{\mu-a.e.}{=} f \overset{\mu-a.e.}{=} t$ luego al estar en un espacio de medida completo tenemos que f es medible. Por tanto,

$$\underline{S}(f, P_n) \xrightarrow{n\to\infty} \int_a^b f$$
$$\lim_n \underline{S}(f, P_n) = \lim_n \int_{[a,b]} t_n \, d\mu \overset{TCD}{=} \int_{[a,b]} t \, d\mu = \int_{[a,b]} f \, d\mu$$

2.3.2 Definición de función localmente integrable

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Diremos que "$f$ es localmente integrable en A" si $f \in \mathcal{R}([a,b])$ para todo $[a,b] \subseteq A$. En tal caso, lo denotaremos como $f \in \mathcal{R}^l(A)$.

Sean $-\infty < a < b < +\infty$, hay cuatro casos básicos:

$$f \in \mathcal{R}^l\big([a, +\infty)\big) \qquad f \in \mathcal{R}^l\big((-\infty, b]\big) \qquad f \in \mathcal{R}^l\big([a, b)\big) \qquad f \in \mathcal{R}^l\big((a, b]\big)$$

Por ejemplo, para el primer caso, diremos que $\int_a^\infty f$ es...

i) Convergente, si $\exists \lim\limits_{x\to\infty} \displaystyle\int_a^x f = l \in \mathbb{R}$.

ii) Divergente, si $\exists \lim\limits_{x\to\infty} \displaystyle\int_a^x f \in \{+\infty, -\infty\}$.

iii) Oscilante, si Convergente, si $\nexists \lim\limits_{x\to\infty} \displaystyle\int_a^x f$.

Podemos extender estas definiciones para el resto de casos de manera análoga.

2.3.3 Medibilidad de funciones localmente integrables

Sea $f \in \mathcal{R}^l\big([a, +\infty)\big)$ (o cualquier caso anterior); entonces, f es μ_1-medible.

Demostración:

Por hipótesis, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ tenemos que $f \in \mathcal{R}\big([a, a+n]\big)$. Aplicando el resultado 2.3.1, tenemos que f es medible en $\Big([a, a+n], \mathfrak{M}_1([a, +n]), \mu_{1|\mathfrak{M}_1([a,a+n])}\Big)$. Esto a su vez equivale a $f \cdot X_{[a,a+n]}$ medible en $(\mathbb{R}, \mathfrak{M}_1, \mu_1)$. Finalmente, como el límite puntual respeta la medibilidad, basta ver que:

$$f \cdot X_{[a,a+n]} \xrightarrow{n\to\infty} f \cdot X_{[a,+\infty)}$$

2.3.4 Integral de Lebesgue e integral impropia de Riemann

En las siguientes condiciones, la integral de Lebesgue es equivalente a la integral impropia de Riemann:

i) $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^\infty f = \int_{[a,+\infty)} f \, d\mu_1$.

ii) $\int_a^\infty |f| < \infty \Rightarrow \int_a^\infty f = \int_{[a,+\infty)} f\, d\mu_1$.

<u>**Demostración:**</u>

i) Al ser $f \geq 0$, podemos garantizar $\exists \lim\limits_{x\to\infty} \displaystyle\int_a^x f \in [0, +\infty]$ pues no puede oscilar. Aplicando la caracterización sucesional del límite, tenemos:

$$\int_a^\infty f = \lim_n \int_a^n f = \lim_n \int_a^{a+n} f \overset{2.3.1}{=} \lim_n \int\limits_{[a,a+n]} f\, d\mu_1 = \lim_n \int\limits_{[a,+\infty)} f \cdot X_{[a,a+n]}\, d\mu_1 \overset{TCM}{=}$$

$$= \int_{[a,+\infty)} \lim_n f \cdot X_{[a,a+n]}\, d\mu_1 = \int_{[a,+\infty)} f\, d\mu_1$$

ii) Supongamos que $\exists \int_a^\infty |f| < \infty \Rightarrow \exists \int_a^\infty f < \infty$. Aplicando el apartado

anterior,

$$\exists \int_{[a,+\infty]} |f|\, d\mu_1 = \int_a^\infty |f| < \infty \Rightarrow |f|, f \in \mathcal{L}_1\big([a, +\infty)\big)$$

Por definición de $\mathcal{L}_1\big([a, +\infty)\big)$, $\exists \int_{[a,\infty)} f\, d\mu_1 \in \mathbb{R}$. Ahora, aplicando la caracterización sucesional del límite y el Teorema de la Convergencia Dominada:

$$\int_a^\infty f = \lim_{x\to\infty} \int_a^x f = \lim_{n\to\infty} \int_a^{a+n} f \overset{2.3.1}{=} \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[a,a+n]} f\, d\mu_1 = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,+\infty)} f \cdot X_{[a,a+n]}\, d\mu_1 \overset{TCD}{=}$$

$$= \int_{[a,+\infty)} \lim_{n\to\infty} f \cdot X_{[a,a+n]}\, d\mu_1 = \int_{[a,+\infty)} f\, d\mu_1$$

2.3.5 Ejemplo de no equivalencia

Veamos que no siempre se da la equivalencia. Por ejemplo, para la siguiente función f:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} \cdot X_{[n-1,n)}(x)$$

Veamos que f no cumple ninguna de las hipótesis del resultado anterior:

$$\int_0^\infty f = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n} < \infty \qquad\qquad \int_0^\infty |f| = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} = \infty$$

Tenemos que f no es no negativa, y que $|f| \notin \mathcal{L}_1$. Veamos que f no es integrable Lebesgue a pesar de sí ser integrable Riemann (impropiamente):

$$\int_0^\infty f^+ = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2n-1} = \infty \qquad\qquad \int_0^\infty f^- = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2n} = \infty$$

2.3.6 Definición de integral impropia de Lebesgue

Si $f : [a, +\infty) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ cumple $f \notin \mathcal{L}_1\big((a, +\infty)\big)$ pero $f \in \mathcal{L}_1\big([a, x]\big)\ \forall\, x \in (a, \infty)$. Entonces, f es medible en $[a, \infty)$. Se dice que f es impropiamente integrable en el sentido de Lebesgue sobre $[a, \infty)$ si:

$$\exists \lim_{x\to\infty} \int_{[a,x]} f\, d\mu_1 = l \in \overline{\mathbb{R}} \qquad \text{en tal caso, se denota } \int_{[a,+\infty)} f\, d\mu_1 = l$$

En el ejemplo anterior, f no es integrable en el sentido usual, pero sí lo es en el impropio (ver $\int_0^\infty f$ pues $\int_0^x f = \int_{[0,x]} f\, d\mu$; basta tomar límites).

2.3.7 Derivación bajo el signo integral

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sea $E \in \Sigma$. Sea $f : E \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función con $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo tal que $\forall\, t \in I\ f(\cdot, t) \in \mathcal{L}_1(E)$ para:

$$f(\cdot, t) : E \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad x \longmapsto f(\cdot, t)(x) = f(x, t)$$

Si existe $\frac{\partial f}{\partial t} : E \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ y además existe también $\varphi \in \mathcal{L}_1(E)$ tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq \varphi(x)\ \ \forall\, (x, t) \in (E, I)$$

Entonces, sea $t_0 \in I$, se cumple:

$$\exists \frac{d}{dt} \int_E f(\cdot, t_0)(x)\, d\mu(x) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)\, d\mu(x)$$

Notación: Cuando operemos con una función que tenga como argumento más de una variable, integrando una de ellas y dejando las demás constantes, usaremos $d\mu(x)$ para referirnos a la variable sobre la que integramos. Por ejemplo, en $\int_E g(x,t)\, d\nu(x)$ se integra solo sobre x, dejando t fija.

Demostración:

Fijamos $t_0 \in I$ cualquiera. Por definición de derivada, sea $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq I \setminus \{t_0\}$ con $t_n \xrightarrow{n\to\infty} t_0$, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_E f(x,t_n)\, d\mu(x) - \int_E f(x,t_0)\, d\mu(x)}{t_n - t_0} = \lim_{n\to\infty} \int_E \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0} = (*)$$

Aplicamos el Teorema del Valor Medio de derivación a I_{t_n,t_0} (intervalo de extremos t_n y t_0). Como consecuencia, $\exists\, \xi_n \in I_{t_n,t_0} \subseteq I$ tal que:

$$(*) = \lim_{n\to\infty} \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x, \xi_n)\, d\mu$$

Por hipótesis, sabemos que:

$$\forall\, x \in E : \left| \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, \xi_n) \right| \leq \varphi(x)$$

Luego estamos en condiciones de aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada:

$$(*) = \lim_{n\to\infty} \int_E \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0}\, d\mu(x) = \int\limits_E \lim_{n\to\infty} \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0}\, d\mu = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)\, d\mu(x)$$

2.3.8 Integrales de funciones de componentes en $\mathbb{R}^2$

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un abierto. Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo no degenerado. Sean $a, b : I \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables en I tales que $\forall\, t \in I$ se cumplen las dos siguientes condiciones:

$$a(t) \leq b(t) \qquad\qquad \{t\} \times \big[a(t), b(t)\big] \subseteq \Omega$$

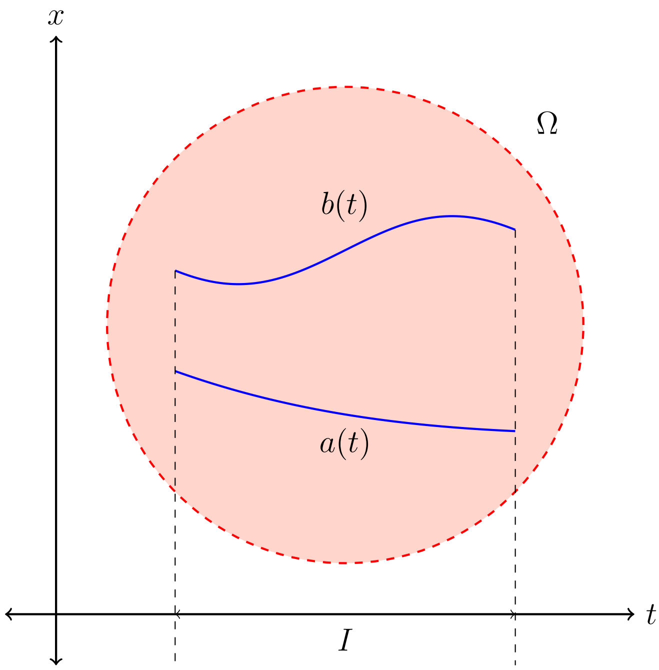
Definimos la siguiente función:

$$F : I \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \qquad\qquad t \longmapsto F(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(t,x)dx$$

Entonces, para todo $t \in I$ se cumple:

$$\exists F'(t) = f\big(t, b(t)\big) \cdot b'(t) - f\big(t, a(t)\big) \cdot a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)dx$$

<u>**Demostración:**</u> Comencemos ilustrando lo que estamos haciendo:



Fijamos $t_0 \in I$ cualquiera. La función $F(t_0)$ "recorre" la variable x integrando f entre $a(t_0)$ y $b(t_0)$. Comencemos con la demostración.

Sea $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq I \setminus \{t_0\}$ con $t_n \xrightarrow{n\to\infty} t_0$. Escribiremos la expresión de $F'(t_0)$ sin llegar todavía a tomar límites:

$$\frac{F(t_n)-F(t_0)}{t_n-t_0} = \frac{1}{t_n-t_0}\left(\int_{a(t_n)}^{b(t_n)} f(t_n,x)dx - \int_{a(t_0)}^{b(t_0)} f(t_0,x)dx\right) =$$

$$= \frac{1}{t_n-t_0}\left(\int_{a(t_n)}^{b(t_n)} f(t_n,x)dx - \int_{a(t_n)}^{b(t_0)} f(t_n,x)dx + \int_{a(t_n)}^{b(t_0)} f(t_n,x)dx - \right.$$

$$\left. - \int_{a(t_0)}^{b(t_0)} f(t_n,x)dx + \int_{a(t_0)}^{b(t_0)} f(t_n,x)dx - \int_{a(t_0)}^{b(t_0)} f(t_0,x)dx\right) =$$

$$= \frac{1}{t_n-t_0}\left(\int_{b(t_0)}^{b(t_n)} f(t_n,x)\,dx - \int_{a(t_0)}^{a(t_n)} f(t_n,x)\,dx - \int_{a(t_0)}^{b(t_0)} f(t_n,x)-f(t_0,x)\,dx\right) = (*)$$

Aplicando el Teorema del Valor Medio de Integración, existen $\xi_n \in I_{b(t_n),b(t_0)}$ y $\zeta_n \in I_{a(t_n),a(t_0)}$ tales que:

$$(*) = f(t_n,\xi_n)\cdot\frac{b(t_n)-b(t_0)}{t_n-t_0} - f(t_n,\zeta_n)\cdot\frac{a(t_n)-a(t_0)}{t_n-t_0} + \int_{a(t_0)}^{b(t_0)} \frac{f(t_n,x)-f(t_0,x)}{t_n-t_0}\,dx$$

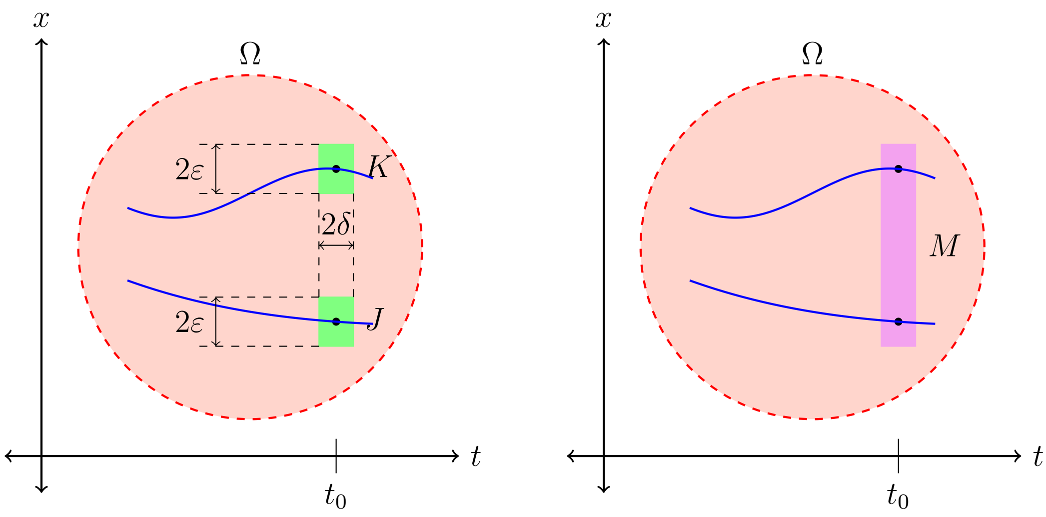
Por ser a y b derivables, tomando límites en los dos primeros sumandos:

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n,\xi_n)\cdot\frac{b(t_n)-b(t_0)}{t_n-t_0} - f(t_n,\zeta_n)\cdot\frac{a(t_n)-a(t_0)}{t_n-t_0} = f\big(t_0,b(t_0)\big)\cdot b'(t_0) - f\big(t_0,a(t_0)\big)\cdot a'(t_0)$$

Por el Teorema del Valor Medio de Derivación, sabemos que existe $\theta_n \in I_{t_n,t_0}$ tal que $\frac{f(t_n,x)-f(t_0,x)}{t_n-t_0} = \frac{\partial f}{\partial t}(\theta_n,x)$. Además, por ser Ω un abierto con f continua en él, podemos afirmar que existen $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ tales que:

$$J := [t_0-\delta, t_0+\delta] \times [a(t_0)-\varepsilon, a(t_0)+\varepsilon] \subseteq \Omega$$
$$K := [t_0-\delta, t_0+\delta] \times [b(t_0)-\varepsilon, b(t_0)+\varepsilon] \subseteq \Omega$$

Así, sea $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, tenemos que $a(t) \in [a(t_0) - \varepsilon, a(t_0) + \varepsilon]$ y $b(t) \in [b(t_0) - \varepsilon, b(t_0) + \varepsilon]$. Definimos $M := [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times [a(t_0) - \varepsilon, b_(t_0) + \varepsilon]$. Veamos qué papel juegan estos conjuntos en nuestro esquema anterior:



Tenemos que M es compacto por definición. Además, como $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ por hipótesis, podemos garantizar que:

$$\exists\, m := \max\left\{\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| : (x,t) \in M\right\}$$

De este modo, estamos en condiciones de aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada. Por todo lo anterior,

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n, \xi_n) \cdot \frac{b(t_n) - b(t_0)}{t_n - t_0} - f(t_n, \zeta_n) \cdot \frac{a(t_n) - a(t_0)}{t_n - t_0} + \int_{a(t_0)}^{b(t_0)} \frac{f(t_n, x) - f(t_0, x)}{t_n - t_0}\, dx =$$

$$= f\big(t_0, b(t_0)\big) \cdot b'(t_0) - f\big(t_0, a(t_0)\big) \cdot a'(t_0) + \int_{a(t_0)}^{b(t_0)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)\, dx$$

§4. Cálculo de la integral de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$

2.4.1 Notación y conceptos iniciales

$\mathbb{R}^{p+q} = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ con $p, q \in \mathbb{N}$. Así, si $x \in \mathbb{R}^p$ con $y \in \mathbb{R}^q$; entonces, $(x, y) \in \mathbb{R}^{p+q}$.

Sea $E \subseteq \mathbb{R}^{p+q}$, sea $x \in \mathbb{R}^p$. Definimos la sección de E por x como el conjunto:

$$E_x = \Big\{ y \in \mathbb{R}^q : (x, y) \in E \Big\}$$

De manera similar, sea $y \in \mathbb{R}^q$, definimos la sección de E por y como:

$$E_y = \Big\{ x \in \mathbb{R}^p : (x, y) \in E \Big\}$$

Sea $f : \mathbb{R}^{p+q} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \quad (x, y) \longmapsto f(x, y)$. Definimos la sección de f por $x \in \mathbb{R}^p$ y la sección de f por $y \in \mathbb{R}^q$ (respectivamente) como las dos siguientes funciones:

$$\begin{aligned} f_x :& \mathbb{R}^q \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ & y \longmapsto f(x, y) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} f_y :& \mathbb{R}^p \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ & x \longmapsto f(x, y) \end{aligned}$$

2.4.2 Propiedades de las secciones

Sea $f : \mathbb{R}p + q \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Sean $\{E\} \cup \{E^i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^{p+q}$. Sean $x \in \mathbb{R}^p, y \in \mathbb{R}^q$. Entonces, se cumplen los siguientes enunciados:

i) $(f^+)_x = (f_x)^+$

i') $(f^+)_y = (f_y)^+$

ii) $(f^-)_x = (f_x)^-$

ii') $(f^-)_y = (f_y)^-$

iii) $(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E^i)_x = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E^i_x$

iii') $(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E^i)_y = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E^i_y$

iv) $(\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} E^i)_x = \bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} E^i_x$

iv') $(\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} E^i)_y = \bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} E^i_y$

v) $(\mathbb{R}^{p+q} \setminus E)_x = \mathbb{R}^q \setminus E_x$.

v') $(\mathbb{R}^{p+q} \setminus E)_y = \mathbb{R}^p \setminus E_y$.

Demostración: Las demostraciones $(*')$ son análogas al resto.

i) $(f_x)^+(y) = \max\{f_x(y), 0\} = \max\{f(x, y), 0\} = f^+(x, y) = (f^+)_x(y)$.

$ii)$ $(f_x)^-(y) = \max\{-f_x(y), 0\} = \max\{-f(x,y), 0\} = f^-(x,y) = (f^-)_x(y)$.

$iii)$ Veamos que $(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E^i)_y = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E^i_y$ por doble contenido:

$\subseteq$ Si $y \in (\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E^i)_x$, tenemos $(x,y) \in \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E^n$ luego $\exists\, j \in \mathbb{N}$ tal que $(x,y) \in E_j$.

Por tanto, $y \in E^j_x \subseteq \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E^i_x$.

$\supseteq$ Si $y \in \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E^i_x$, tenemos $\exists\, j \in \mathbb{N}$ tal que $y \in E^j_x$. Así, $(x,y) \in E^j \subseteq \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E^i$.

Por tanto, $y \in (\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E^i)_x$.

$iv)$ Lo veremos por la definición del conjunto. Como y es un punto fijo de $\mathbb{R}^q$ (dado por el enunciado), usaremos z como variable genérica de $\mathbb{R}^q$.

$$(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} E^i)_x = \left\{z \in \mathbb{R}^q : (x,z) \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} E^i\right\} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \left\{z \in \mathbb{R}^q : (x,z) \in E^i\right\} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} E^i_x$$

$v)$ Veamos que $(\mathbb{R}^{p+q} \setminus E)_x = \mathbb{R}^q \setminus E_x$ por doble contenido:

$\subseteq$ Si $y \in (\mathbb{R}^{p+q} \setminus E)_x$, tenemos $(x,y) \in \mathbb{R}^{p+q} \setminus E$ luego $(x,y) \notin E$.

Por tanto, $y \notin \{z \in \mathbb{R}^q : (x,z) \in E\} = E_x$ luego $y \in \mathbb{R}^q \setminus E_x$.

$\subseteq$ Si $y \in \mathbb{R}^q \setminus E_x$, tenemos $y \notin \{z \in \mathbb{R}^q : (x,y) \in E\} = E_x$.

Por tanto, $(x,y) \notin E$ luego $(x,y) \in \mathbb{R}^{p+q} \setminus E$ y por tanto $y \in (\mathbb{R}^{p+q} \setminus E)_x$.

Nota: A partir de los apartados (iii), (iv), (iii') y (iv') se deducen los siguientes para $E, F \in \mathbb{R}^{p+q}$ cualesquiera:

$v)$ $(E \setminus F)_x = E_x \setminus F_x$ $\qquad$ $v')$ $(E \setminus F)_y = E_y \setminus F_y$

2.4.3 Teorema de anomalías de conjuntos medibles

Sea $E \in \mathfrak{M}_{p+q}$. Se cumplen los siguientes enunciados:

a) $\exists\, A \in \mathfrak{M}_p$ con $\mu_p(A) = 0$ que verifica:
$$\forall\, x \in \mathbb{R}^p \setminus A : E_x \in \mathfrak{M}_q$$

a') $\exists\, B \in \mathfrak{M}_q$ con $\mu_p(A) = 0$ que verifica:
$$\forall\, y \in \mathbb{R}^q \setminus B : E_y \in \mathfrak{M}_p$$

b) La siguiente función es μ_p-medible:
$$\varphi : \mathbb{R}^p \setminus A \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \varphi(x) = \mu_q(E_x)$$

b') La siguiente función es μ_q-medible:
$$\psi : \mathbb{R}^q \setminus B \to \mathbb{R} \quad y \mapsto \psi(y) = \mu_p(E_y)$$

c) Medida por secciones en x:
$$\int_{\mathbb{R}^p \setminus A} \varphi(x)\, d\mu_p(x) = \mu_{p+q}(E)$$

c') Medida por secciones en y:
$$\int_{\mathbb{R}^q \setminus B} \psi(y)\, d\mu_q(y) = \mu_{p+q}(E)$$

<u>**Demostración:**</u> Veremos solo los tres primeros apartados (los apartados' son análogos). Iremos estructurando la demostración por casos de complejidad incremental.

i) Para E un cubo acotado. Podemos expresar $E = I \times J$ con I, J cubos acotados de $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$, respectivamente.

a) Sea $x \in \mathbb{R}^p, E_x = \begin{cases} J & \text{si } x \in I \\ \varnothing & \text{si } x \notin I \end{cases}$ En cualquier caso, $E_x \in \mathfrak{M}_q$

b) $\varphi(x) = \left\{\begin{matrix} \mu_q(J) & \text{si } x \in I \\ \mu_q(\varnothing) & \text{si } x \notin I \end{matrix}\right\} = \mu_q(J) \cdot X_I(x)$ que es μ_p-medible.

c) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^p} \varphi(x)\, d\mu_p(x) = \mu_q(J) \cdot \int_{\mathbb{R}^p} X_I(x)\, d\mu_p(x) = \mu_p(I) \cdot \mu_q(J) = \mu_{p+q}(E)$

ii) Para E un abierto acotado. Sabemos que podemos expresar $E = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} I^n$ donde los I_n son cubos diádicos disjuntos. Aplicando el apartado anterior a cada uno de ellos, sabemos que para $x \in \mathbb{R}^p$ cualquiera, se tiene:

$$I_x^n \in \mathfrak{M}_q \qquad \varphi_n(x) = \mu_q(I_x^n) \ \ \mu_p\text{-medible} \qquad \int_{\mathbb{R}^p} \varphi_n(x)\, d\mu_p(x) = \mu_{p+q}(I^n)$$

Veamos cómo demostrar el apartado (*ii*) en base a esta información:

a) $E_x = (\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} I^n)_x \overset{2.4.2}{=} \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} I_x^n \in \mathfrak{M}_q \qquad$ Consideramos $A = \varnothing$.

b) $\varphi(x) = \mu_q(E_x) = \mu_q\big(\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} I_x^n\big) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mu_q(I_x^n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) \quad \mu_q$-medible.

c) $$\int_{\mathbb{R}^p} \varphi(x)\, d\mu_p(x) = \int_{\mathbb{R}^p} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)\, d\mu_p(x) \overset{TCM}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^p} \varphi_n\, d\mu_p(x) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{p+q}(I^n) = \mu_{p+q}\big(\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} I^n\big) = \mu_{p+q}(E)$$

iii) Para $E = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} O^n$ intersección de abiertos decrecientes acotados. Aplicando el apartado anterior, sabemos que para $x \in \mathbb{R}^p$ cualquiera se cumple:

$$O_x^n \in \mathfrak{M}_q \qquad \varphi_n(x) = \mu_q(O_x^n) \ \ \mu_p\text{-medible} \qquad \int_{\mathbb{R}^p} \varphi_n(x)\, d\mu_p(x) = \mu_{p+q}(O^n)$$

Demostraremos el apartado (*iii*) con esta información:

a) $E_x = (\underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} O^n)_x \overset{2.4.2}{=} \underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} O_x^n \in \mathfrak{M}_q \qquad$ Consideramos $A = \varnothing$.

b) $\varphi(x) = \mu_q(E_x) = \mu_q\big(\underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} O_x^n\big) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \mu_q(O_x^n) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) \quad \mu_q$-medible

c) $$\int_{\mathbb{R}^p} \varphi(x)\, d\mu_p(x) = \int_{\mathbb{R}^p} \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)\, d\mu_p(x) \overset{TCD\ \varphi_1}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^p} \varphi_n\, d\mu_p(x) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \mu_{p+q}(O^n) = \mu_{p+q}(E)$$

iv) $E \in \mathfrak{M}_{p+q}$ con $\mu_{p+q}(E) = 0$ acotado. Por la caracterización topológica de los conjuntos medibles, sabemos que existen $\{O^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \tau_{\mathbb{R}^{p+q}}$ con $E \subseteq O^{n+1} \subseteq O^n$ y tales que $\mu_{p+q}(O^n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. De este modo, tenemos $E \subseteq N := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O^n \in \mathfrak{M}_{p+q}$. Aplicando el apartado anterior a N, tenemos que para $x \in \mathbb{R}^p$ se cumple:

$$N_x \in \mathfrak{M}_q \qquad \varphi_1(x) = \mu_q(N_x) \;\; \mu_p\text{-medible} \qquad \int_{\mathbb{R}^p} \varphi_1(x)\, d\mu_p(x) = \mu_{p+q}(N) = 0$$

Al ser φ_1 no negativa con integral nula, sabemos que $\varphi_1 \overset{\mu-a.e.}{=} 0$ luego $\exists\, A \in \mathfrak{M}_p$ con $\mu_p(A) = 0$ tal que $\{x \in \mathbb{R}^p : \varphi_1(x) \neq 0\} \subseteq A$. Sea este el conjunto de anomalías para este apartado, dado $x \in \mathbb{R}^p \setminus A$, se cumple:

a) $E_x \subseteq N_x$ con $\mu_q^+(E_x) \leq \mu_q(N_x) = \varphi_1(x) = 0$ luego $E_x \in \mathfrak{M}_q$.

b) $\varphi(x) = \mu_q(E_x) = 0 \quad \mu_q$-medible trivialmente.

c) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^p\setminus A} \varphi(x)\, d\mu_p(x) = \int_{\mathbb{R}^p\setminus A} 0\, d\mu_p(x) = 0 = \mu_{p+q}(E)$

v) Para $E \in \mathfrak{M}_{p+q}$ acotado. Por ser medible, $E = G \setminus N$, donde G es una intersección de abiertos decrecientes y N es un conjunto de medida nula. Al ser E acotado, también ha de serlo G, luego estamos en condiciones de aplicarle el apartado (iii). Así, para $x \in \mathbb{R}^p$ se cumple:

$$G_x \in \mathfrak{M}_q \qquad \varphi_1(x) = \mu_q(G_x) \;\; \mu_p\text{-medible} \qquad \int_{\mathbb{R}^p} \varphi_1(x)\, d\mu_p(x) = \mu_{p+q}(G)$$

Aplicando ahora el apartado (iv) a N, para $x \in \mathbb{R}^p \setminus A$ se tiene:

$$N_x \in \mathfrak{M}_q \qquad \varphi_2(x) = \mu_q(N_x) \;\; \mu_p\text{-medible} \qquad \int_{\mathbb{R}^p\setminus A} \varphi_2(x)\, d\mu_p(x) = \mu_{p+q}(N)$$

Consideramos este conjunto A. Así, dado $x \in \mathbb{R}^p \setminus A$, tenemos:

a) $E_x = G_x \setminus N_x \in \mathfrak{M}_q$ por ser $G_x, N_x \in \mathfrak{M}_q$

b) $\varphi(x) = \mu_q(E_x) = \mu_q(G_x) - \mu_q(N_x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x) \quad \mu_q$-medible.

c) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^p\setminus A} \varphi(x)\, d\mu_p(x) = \int_{\mathbb{R}^p\setminus A} 0\, d\mu_p(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x) = \mu_{p+q}(G) - 0 = \mu_{p+q}(E)$

$vi)$ $E \in \mathfrak{M}_{p+q}$ (caso general). Definimos $E^n = E \cap [-n,n]^N$. De este modo, es claro que $E = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} E^n$ y que todos los E^n son acotados. Aplicando el apartado (v) a cada uno de ellos, tenemos que para $x \in \mathbb{R}^p \setminus A^n$ se cumple:

$$E_x^n \in \mathfrak{M}_q \qquad \varphi_n(x) = \mu_q(E_x^n)\ \ \mu_p\text{-medible} \qquad \int_{\mathbb{R}^p\setminus A^n} \varphi_n(x)\, d\mu_p(x) = \mu_{p+q}(E^n)$$

Consideramos el conjunto de anomalías $A := \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} A^n$ aplicando la subaditividad de la medida, es claro que $\mu_{p+q}(A) = 0$. Sea $x \in R^p \setminus A$, se cumple:

a) $E_x = \underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} \underbrace{E_x^n}_{\in\mathfrak{M}_q} \in \mathfrak{M}_q$

b) $\varphi(x) = \mu_q(E_x) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_q(E_x^n) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) \quad \mu_q$-medible.

c) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^p\setminus A} \varphi(x)\, d\mu_p(x) = \int_{\mathbb{R}^p\setminus A} \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)\, d\mu_p(x) \overset{TCM}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{R^p\setminus A} \varphi_n(x)\, d\mu =$

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty} \mu_{p+q}(E^n) = \mu_{p+q}(E)$

2.4.4 Teorema de Tonelli

Sea $f : \mathbb{R}^{p+q} \longrightarrow [0,+\infty]$ una función μ_{p+q}-medible. Tenemos:

a) $\exists A \in \mathfrak{M}_q$ con $\mu_p(A) = 0$ que verifica:

$\forall\, x \in \mathbb{R}^p \setminus A$ f_x es μ_q-medible

b) La siguiente función $\varphi : \mathbb{R}^p \setminus A \to [0,+\infty]$

$\displaystyle x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} f_x(y)\, d\mu_q(y)$ es μ_q-medible

c) Integración por secciones:

$$\int_{\mathbb{R}^p\setminus A} \varphi(x)\, d\mu_p(x) = \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f(x,y)\, d\mu_{p+q}(x,y)$$

a') $\exists B \in \mathfrak{M}_p$ con $\mu_p(B) = 0$ que verifica:

$\forall\, y \in \mathbb{R}^q \setminus B$ f_y es μ_p-medible

b') La siguiente función $\psi : \mathbb{R}^q \setminus B \to [0,+\infty]$

$\displaystyle y \mapsto \int_{\mathbb{R}^p} f_y(x)\, d\mu_p(x)$ es μ_p-medible

c') Integración por secciones:

$$\int_{\mathbb{R}^q\setminus B} \varphi(y)\, d\mu_q(y) = \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f(x,y)\, d\mu_{p+q}(x,y)$$

Por tanto, ha de cumplirse:

$$\int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,d\mu_q(y)\right)d\mu_p(x)=\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f(x,y)\,d\mu_{p+q}(x,y)=\int_{\mathbb{R}^q}\left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,d\mu_p(x)\right)d\mu_q(y)$$

<u>**Demostración:**</u> Al igual que con el caso anterior; dividiremos la demostración en casos, y no se demostrarán los apartados' al ser análogos.

i) Consideramos $f = X_E$ para cierto $E \in \mathfrak{M}_{p+q}$. Se corresponde con el teorema anterior. Así, para el correspondiente conjunto de anomalías $A \in \mathfrak{M}_{p+q}$ con $\mu_{p+q}(A) = 0$ fijado, tenemos:

a) $f_x = (X_E)_x = X_{E_x} \mu_q$-medible al ser $E_x \in \mathfrak{M}_q$

b) $\varphi(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^q} X_{E_x}(y)\,d\mu_q(y) = \mu_q(E_x)$ medible por el teorema anterior

c) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^p\setminus A} \varphi(x)\,d\mu_p(x) = \mu_{p+q}(E) = \int_{\mathbb{R}^{p+q}} \underbrace{X_E(x,y)}_{f(x,y)}\,d\mu_{p+q}(x,y)$

ii) Sea $f = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot X_{E^i}$ función simple y medible dada por su expresión canónica. Aplicando el apartado anterior a cada E^i, tenemos que $\exists\, A_i \in \mathfrak{M}_{p+q}$ con $\mu_{p+q}(A_i) = 0$ tal que $\forall\, x \in \mathbb{R}^p \setminus A_i$ se cumple:

$(X_{E^i})_x$ μ_q-medible $\qquad \varphi_i(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^q} X_{E^i_x}(y)\,d\mu_q(y)$ es μ_q-medible

$$\int_{\mathbb{R}^p\setminus A_i} \varphi_i(x)\,d\mu_p(x) = \int_{\mathbb{R}^{p+q}} X_{E^i}(x,y)\,d\mu_{p+q}(x,y)$$

Consideramos $A = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathfrak{M}_p$, que cumple $\mu_p(A) = 0$ por subaditividad. Así, dado $x \in \mathbb{R}^p \setminus A$, se cumple:

a) $f_x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \underbrace{\chi_{E^i_x}}_{\mu_q\text{-medible}} \quad \mu_q$-medible

b) $\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^q} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \chi_{E^i_x}(y)\, d\mu_q(y) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^q} \chi_{E^i_x}(y)\, d\mu_q(y) \right) =$

$$= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \underbrace{\varphi_i(x)}_{\mu_p\text{-medible}} \quad \mu_p\text{-medible}$$

c) $\int_{\mathbb{R}^p \setminus A} \varphi(x)\, d\mu_p(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \int_{\mathbb{R}^p \setminus A} \varphi_i(x)\, d\mu_p(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \int_{\mathbb{R}^p \setminus A_i} \varphi_i(x)\, d\mu_p(x) =$

$$= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \mu_{p+q}(E^i) = \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f(x,y)\, d\mu_{p+q}(x,y)$$

iii) $f\, \mu_{p+q}$-medible (caso general). Sabemos que existe una sucesión de funciones medibles y simples $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $0 \le s_n \le s_{n+1} \le f$ que converge puntualmente a f. Aplicando el apartado anterior a cada s_n, tenemos que $\exists A_n \in \mathfrak{M}_p$ con $\mu_p(A_n) = 0$ tal que para cualquier $x \in \mathbb{R}^p \setminus A_n$ se cumple:

$$(s_n)_x \ \mu_q\text{-medible} \qquad \varphi_n(x) = \int_{\mathbb{R}^q} s_{n_x}(y)\, d\mu_q(y) \text{ es } \mu_q\text{-medible}$$

$$\int_{\mathbb{R}^p \setminus A_n} \varphi_n(x)\, d\mu_p(x) = \int_{\mathbb{R}^{p+q}} s_n(x,y)\, d\mu_{p+q}(x,y)$$

Consideramos $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{M}_p$, que cumple $\mu_p(A) = 0$ por subaditividad. Así, dado $x \in \mathbb{R}^p \setminus A$, se cumple:

a) $f_x = \lim_{n\to\infty} \underbrace{s_{n_x}}_{\mu_q\text{-medible}} \quad \mu_q$-medible

b) $\varphi(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^q} \lim_{n\to\infty} s_{n_x}(y)\, d\mu_q(y) \overset{TCM}{=} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^q} s_{n_x}(y)\, d\mu_q(y)}_{\varphi_n(x)\ \mu_p\text{-medible}}$ μ_p-medible

c) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^p\setminus A} \varphi(x)\, d\mu_p(x) = \int_{\mathbb{R}^p\setminus A} \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)\, d\mu_p(x) \overset{TCM}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^p\setminus A} \varphi_n(x)\, d\mu_p(x) =$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^p\setminus A_n} \varphi_n(x)\, d\mu_p(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{p+q}} s_n(x,y)\, d\mu_{p+q}(x,y) \overset{TCM}{=}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{p+q}} \lim_{n\to\infty} s_n(x,y)\, d\mu_{p+q}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f(x,y)\, d\mu_{p+q}(x,y)$$

2.4.5 Teorema de Fubini

Dada cualquier función $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^{p+q})$, se cumplen los siguientes enunciados:

a) $\exists\, A \in \mathfrak{M}_p$ con $\mu_p(A) = 0$ que verifica $\forall\, x \in \mathbb{R}^p \setminus A : f_x \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^q)$

b) La siguiente función $\varphi : \mathbb{R}^p\setminus A \to [0,+\infty]$ $x \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}^q} f_x(y)\, d\mu_q(y)$ es μ_p-sumable

c) Integración por secciones:
$$\int_{\mathbb{R}^p\setminus A} \varphi(x)\, d\mu_p(x) = \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f(x,y)\, d\mu_{p+q}(x,y)$$

a') $\exists\, B \in \mathfrak{M}_q$ con $\mu_q(B) = 0$ que verifica $\forall\, y \in \mathbb{R}^q \setminus B : f_y \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^p)$

b') La siguiente función $\psi : \mathbb{R}^q\setminus B \to [0,+\infty]$ $y \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}^p} f_y(x)\, d\mu_p(x)$ es μ_q-sumable

c') Integración por secciones:
$$\int_{\mathbb{R}^q\setminus B} \varphi(y)\, d\mu_q(y) = \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f(x,y)\, d\mu_{p+q}(x,y)$$

Por tanto, ha de cumplirse:

$$\int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\, d\mu_q(y) \right) d\mu_p(x) = \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f(x,y)\, d\mu_{p+q}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\, d\mu_p(x) \right) d\mu_q(y)$$

Demostración: Los apartados' son análogos.

En primer lugar, nótese que para $x \in \mathbb{R}^p$ cualquiera se cumple:

$$f_x = (f_x)^+ - (f_x)^- = (f^+)_x - (f^-)_x \overset{\text{notación}}{=} f_x^+ - f_x^-$$

Aplicando el Teorema de Tonelli a f^+, obtenemos:

$\exists A_1 \in \mathfrak{M}_p$ con $\mu_p(A_1) = 0$ tal que $\forall x \in \mathbb{R}^p \setminus A_1$, f_x^+ es μ_q-medible.

$\varphi_1 : \mathbb{R}^p \setminus A_1 \to [0, +\infty]$ dada por $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} f_x^+(y)\, d\mu_q(y)$ es μ_p-medible.

$\int_{\mathbb{R}^p \setminus A_1} \varphi_1(x)\, d\mu_p(x) = \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f^+(x,y)\, d\mu_{p+q}$.

Aplicamos ahora el Teorema de Tonelli a f^- y obtenemos:

$\exists A_2 \in \mathfrak{M}_p$ con $\mu_p(A_2) = 0$ tal que $\forall x \in \mathbb{R}^p \setminus A_2$, f_x^- es μ_q-medible.

$\varphi_2 : \mathbb{R}^p \setminus A_2 \to [0, +\infty]$ dada por $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} f_x^-(y)\, d\mu_q(y)$ es μ_p-medible.

$\int_{\mathbb{R}^p \setminus A_2} \varphi_2(x)\, d\mu_p(x) = \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f^-(x,y)\, d\mu_{p+q}$.

Por hipótesis, $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^{p+q})$, luego $f^+, f^- \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^{p+q})$ también. Por tanto, los siguientes conjuntos han de ser de medida nula:

$$A_3 := \{x \in \mathbb{R}^p \setminus A_1 : \varphi_1(x) = +\infty\} \qquad A_4 := \{x \in \mathbb{R}^p \setminus A_2 : \varphi_2(x) = +\infty\}$$

Veamos cómo demostrar el teorema a partir de esta información:

a) Definimos $A := A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \in \mathfrak{M}_p$ con $\mu_p(A) = 0$.
Así, sea $x \in \mathbb{R}^p \setminus A$, se cumple $\varphi_1(x) < \infty$.
Por definición, $\varphi_1(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f_x^+(y)\, d\mu_q(y) < \infty$. Así, $f_x^+ \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^q)$ por definición.
Del mismo modo, $\infty > \varphi_2(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f_x^-(y)\, d\mu_q(y)$ luego $f_x^- \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^q)$.
Al ser $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^q)$ un espacio vectorial, tenemos que $f_x = f_x^+ - f_x^- \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^q)$.

b) Sea $x \in \mathbb{R}^p \setminus A$, tenemos que

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \int_{\mathbb{R}^q} f_x(y)\, d\mu_q(y) = \int_{\mathbb{R}^q} f_x^+(y)\, d\mu_q(y) - \int_{\mathbb{R}^q} f_x^-(y)\, d\mu_q(y) = \\ &= \underbrace{\varphi_1(x)}_{\in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^p \setminus A)} - \underbrace{\varphi_2(x)}_{\in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^p \setminus A)} \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^p \setminus A)\end{aligned}$$

c) $$\int_{\mathbb{R}^p \setminus A} \varphi(x)\, d\mu_p(x) = \int_{\mathbb{R}^p \setminus A} \varphi_1(x)\, d\mu_p(x) - \int_{\mathbb{R}^p \setminus A} \varphi_2(x)\, d\mu_p(x) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f^+(x,y)\, d\mu_{p+q}(x,y) + \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f^-(x,y)\, d\mu_{p+q}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f(x,y)\, d\mu_{p+q}(x,y)$$

2.4.6 Teorema de Cambio de Variable

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^N$. Sea $T : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^1(\Omega)$. Sea $f \in \mathcal{L}_1\big(T(\Omega)\big)$ (alternativamente, $f : T(\Omega) \longrightarrow [0, \infty]$ medible, pudiendo darse ambas). Entonces, se cumple:

$$\int_{T(\Omega)} f(y)\, d\mu_N(y) = \int_{\Omega} (f \circ T)(x) \cdot |\det J_T(x)|\, d\mu_N(x)$$

Con $(f \circ T) \cdot |\det J_T| \in \mathcal{L}_1(\Omega)$ (alternativamente, no negativa y medible).

__Idea:__ No se verá la demostración formal al ser demasiado larga.

Por ser $T : \Omega \longrightarrow [0, +\infty]$ un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^1(\Omega)$ con Ω abierto, las derivadas parciales de orden 1 de T son continuas. Además, T es inyectiva, y para todo $x \in \Omega$ se cumple $\det J_T(x) \neq 0$. De este modo, estamos en condiciones de aplicar el Teorema de la Función Inversa. Así,

$$T(\Omega) \text{ abierto de } \mathbb{R}^N \qquad T^{-1} : T(\Omega) \longrightarrow \Omega \text{ difeomorfismo } \mathcal{C}^1\big(T(\Omega)\big)$$

Consideraremos la siguiente notación:

$$\Omega \xrightarrow{T} T(\Omega) \qquad x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \xmapsto{T} Tx = T(x) = (y_1, y_2, \dots, y_N)$$

$$Tx = \big(y_1(x), \dots, y_N(x)\big) \quad y_k = y_k(x_1, \dots, x_N) = \Pi_k(T(x)) \text{ k-ésima componente}$$

Como regla mnemotécnica, podemos considerar esta ilustración (no es para nada formal, simplemente es una práctica sugerida) para recordar de qué transformación es el jacobiano y sobre qué variables se debe integrar:

$$\int_{T(\Omega)} f(y_1, \dots, y_N)\, d\mu_N(y_1, \dots, y_N) =$$

$$\int_\Omega \big(f \circ \underbrace{T\big)(x_1, \ldots, x_N)}_{y_1,\ldots,y_N} \cdot \left| \frac{d(x_1, \ldots, x_N)}{\underbrace{d(y_1, \ldots, y_N)}_{\frac{\partial y_k}{\partial x_j}}} \right| d\mu_N(x_1, \ldots, x_N)$$

Buscamos que los diferenciales “se simplifiquen”.

III Espacios L_p con $1 \leq p \leq \infty$

A lo largo de esta unidad, consideraremos (X, Σ, μ) como un espacio de medida genérico.

§1. Primeras definiciones

3.1.1 Definición de $\mathcal{L}_p$

Para $1 \leq p < \infty$, denotaremos como $\mathcal{L}_p(X)$ o como $\mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)$ al conjunto de funciones medibles $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ para las que se cumple

$$\int_X |f|^p \, d\mu < \infty$$

Asociada a cada $f \in \mathcal{L}_p(X)$, tenemos la siguiente cantidad numérica:

$$||f||_p := \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Nótese que para el caso $p = 1$ se corresponde con la definición ya estudiada.

3.1.2 Definición de $\mathcal{L}_\infty$

Para $p = \infty$, $\mathcal{L}_\infty(X) = \mathcal{L}_\infty(X, \Sigma, \mu)$ denota el conjunto de todas las funciones medibles $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ para las que existe $\alpha \in [0, +\infty)$ que verifica:

$$\mu\Big(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\} \Big) = 0$$

Esta condición equivale a su vez a las dos siguientes:

$$\mu\Big(X \setminus \{x \in X : |f(x)| \leq \alpha\} \Big) = 0 \qquad \{x \in X : |f(x)| \leq \alpha\} \overset{\mu-a.e.}{=} X$$

3.1.3 Funciones sumables y funciones de $\mathcal{L}_p(X)$

Si $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es medible, y $\int_X |f|^p \, d\mu < \infty$ (para $p < \infty$). Entonces, existe una función $g \in \mathcal{L}_p(X)$ tal que $f \overset{\mu-a.e.}{=} g$. Como consecuencia, si $p < \infty$,

$$\left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = ||g||_p$$

Demostración: Extendemos lo visto en el resultado 2.2.6.

Definimos los siguientes conjuntos auxiliares:

$$A = \{x \in X : f(x) = +\infty\} \qquad B = \{x \in X : f(x) = -\infty\}$$

Ambos conjuntos han de ser de medida nula, o de lo contrario $\int_X |f|^p \, d\mu = \infty$. Así, basta considerar la siguiente función:

$$g(x) = f(x) \cdot \mathcal{X}_{X \setminus (A \cup B)}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \notin A \cup B \\ 0 & \text{si } x \in A \cup B \end{cases}$$

Como $\mu(A) = \mu(B) = 0$, tenemos que $f \overset{\mu-a.e.}{=} g$.

3.1.4 Definición de supremo esencial

Para cada $f \in \mathcal{L}_\infty(X)$ definimos el siguiente conjunto:

$$A_f := \Big\{\alpha \in [0, \infty) : \mu\big(\{x \in X : f(x) > \alpha\}\big) = 0\Big\}$$

A partir de él, definimos $||f||_\infty := \inf A_f$. Esta cantidad recibe el nombre de "supremo esencial".

3.1.5 Mínimo esencial

El supremo esencial es en realidad un mínimo. Es decir; sea $f \in \mathcal{L}_\infty(X)$, se cumple:

$$||f||_\infty \in \Big\{f(x) : x \in X\Big\} \text{ o equivalentemente } ||f||_\infty = \min A_f$$

Demostración:
Denotemos $\beta := \inf A_f$. Consideramos $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A_f$ sucesión decreciente que verifica $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \beta$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos el siguiente conjunto auxiliar:

$$B_n := \Big\{x \in X : |f(x)| \leq \beta_n\Big\}$$

De este modo, $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} \subseteq B_n$ y $B_n \in \Sigma$. Además, por ser $f \in \mathcal{L}_\infty(X)$ por hipótesis, tenemos que $B_n = X \setminus M_n$ con $M_n \in \Sigma$ tal que $\mu(M_n) = 0$. Por tanto, se cumple:

$$\{x \in X : |f(x)| \leq \beta\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus M_n) = X \setminus (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n)$$

Por subaditividad, $\mu\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n\big) = 0$, luego $\beta \in A_f$ por definición.

§2. Estructura de los $\mathcal{L}_p$

3.2.1 Concepto de convexidad

Una combinación convexa de puntos de un espacio afín es aquella combinación lineal de los mismos cuyos pesos sean no negativos y sumen 1. Para el caso de dos puntos, a y b, podemos expresar su combinación convexa como:

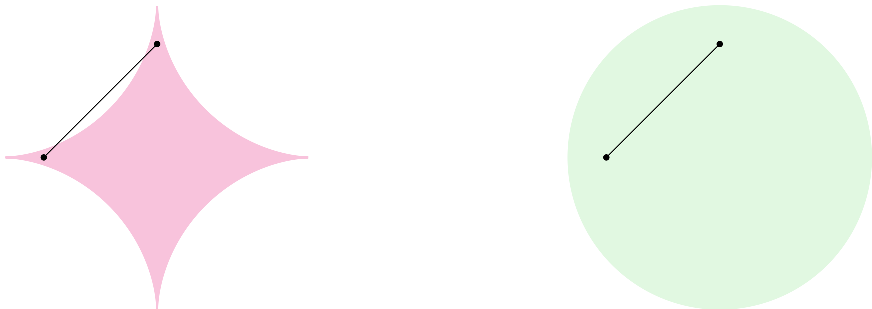
$$\lambda a + (1-\lambda)b \qquad\qquad \text{con } \lambda \in [0,1]$$

Nótese que conforme λ va aumentando, se recorre el segmento en línea recta desde a hasta b.

Sea A un conjunto de un espacio afín, diremos que es convexo si dados $a, b \in A$, tenemos que cualquier combinación conexa de ambos está también en A. Es decir,

$$A \text{ es convexo} \iff \forall\, a, b \in A,\ \ \forall\, \lambda \in [0,1] : \lambda a + (1-\lambda)b \in A$$

Intuitivamente, se corresponde con que todo segmento que une dos puntos de A está contenido al completo en A.



Conjunto no convexo — Conjunto convexo

Veamos ahora cómo se traduce este concepto a funciones.

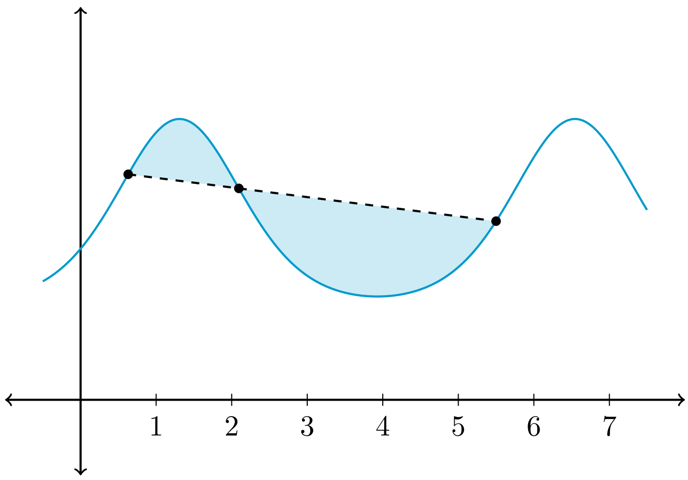
Diremos que una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es convexa en un intervalo I si el segmento que une dos puntos cualesquiera de su grafo en I queda por encima del propio grafo. Es decir, si verifica:

$$\forall x_1, x_2 \in I : f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \qquad \forall \lambda \in [0,1]$$

Esto a su vez equivale a exigir que el siguiente conjunto (epigrafo de f) sea convexo:

$$\{(x,y) : x \in I, y > f(x)\}$$

Podemos extender la definición de convexidad de funciones al estudiar conjuntos convexos más generales y no solo intervalos.



La función no es convexa en $[0,6]$, pero sí en $[2,6]$.

Podemos considerar definiciones distintas de convexidad según exijamos o no que la desigualdad sea estricta.

3.2.2 Los $\mathcal{L}_p(X)$ son espacios vectoriales

Para $1 \leq p \leq \infty$, $\mathcal{L}_p(X)$ es un espacio vectorial.

<u>**Demostración:**</u> Distinguiremos varios casos:

- Caso $p = 1$: ya se ha demostrado.
- Caso $p = \infty$:

Sea $f \in \mathcal{L}_\infty(X)$, sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Veamos $\lambda f \in \mathcal{L}_\infty(X)$.

Si $\lambda = 0$, $\lambda f \equiv 0 \in \mathcal{L}_\infty(X)$.

Sea $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Como $f \in \mathcal{L}_\infty(X)$, $\exists\, M \in \Sigma$ con $\mu(M) = 0$ tal que:

$$X \setminus M = \{x \in X : |f(x)| \leq ||f||_\infty\} = \{x \in X : |\lambda f(x)| \leq |\lambda| \cdot ||f||_\infty\}$$

Tenemos que $\lambda f \in \mathcal{L}_\infty(X)$ por definición.

Sean $f, g \in \mathcal{L}_\infty(X)$, veamos que $f + g \in \mathcal{L}_\infty(X)$:

Por definición, $\exists\, M, N \in \Sigma$ con $\mu(M) = \mu(N) = 0$ tales que:

$$X \setminus M = \{x \in X : |f(x)| \leq ||f||_\infty\} \quad X \setminus N = \{x \in X : |g(x)| \leq ||g||_\infty\}$$

Entonces, dado $x \in X \setminus (M \cup N)$ cualquiera, se cumple:

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty < \infty$$

Como $\mu(M \cup N) = 0$, tenemos $f + g \in \mathcal{L}_\infty(X)$ por definición.

- Caso $1 < p < \infty$:

Sean $\lambda \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{L}_p(X)$. Veamos que $\lambda f \in \mathcal{L}_\infty(X)$.

$$\int_X |\lambda f(x)|^p \, d\mu(x) = |\lambda|^p \cdot \int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) = |\lambda|^p \cdot ||f||_p^p < \infty$$

Se cumple por definición.

Sean $f, g \in \mathcal{L}_p(X)$. Veamos que $f + g \in \mathcal{L}_p(X)$:

$$\int_X |f(x) + g(x)| \, d\mu(x) = \int_X \Big| \underbrace{\frac{1}{2}}_{\lambda} \cdot 2f(x) + \underbrace{\frac{1}{2}}_{1-\lambda} \cdot 2g(x) \Big|^p \, d\mu(x) = (*)$$

La función $h(t) = |t|^p$ es convexa en $[0, +\infty]$ para $p > 1$. Por tanto,

$$(*) \leq \int_X \frac{1}{2}\,|2f(x)|^p + \frac{1}{2}|2g(x)|^p \, d\mu(x) = 2^{p-1} \cdot \int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) + 2^{p-1} \cdot \int_X |g(x)|^p \, d\mu(x) =$$
$$= 2^{p-1} \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) + \int_X |g(x)|^p \, d\mu \right) = 2^{p-1} \big(||f||_p^p + ||g||_p^p \big) < \infty$$

Se cumple por definición.

3.2.3 Conjugado p^*

Para cada $p \in [1, +\infty]$, denotaremos como p^* al único número en $\overline{\mathbb{R}}$ que verifica:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$$

Solo hay un único número en todo $\overline{\mathbb{R}}$ que verifica esto, pero ha de estar necesariamente en $(1, \infty)$:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1 \Rightarrow p^* = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1} \overset{p \in [1,\infty]}{\in} (1, \infty)$$

Estas son algunas de las propiedades de este conjugado (claras por la definición):

$$(p^*)^* = p \qquad p + p^* = p \cdot p^* = \frac{p^2}{p-1} \qquad p^* = \frac{p}{p-1} \qquad p^*(p-1) = p$$

3.2.4 Desigualdad de Hölder

Sean $f \in \mathcal{L}_p(X)$, $g \in \mathcal{L}_{p^*}(X)$. Entonces, se cumple:

$$f \cdot g \in \mathcal{L}_1(X) \qquad\qquad ||f \cdot g||_1 \leq ||f||_p \cdot ||g||_{p^*}$$

Demostración:

- Caso $p = 1, p^* = \infty$:

  Como $g \in \mathcal{L}_\infty(X)$, $\exists\ M \in \Sigma$ con $\mu(M) = 0$ tal que

  $$X \setminus M = \{x \in X : |g(x)| \leq ||g||_\infty\}$$

  Por tanto, ha de cumplirse:

  $$\int_X = |f \cdot g|\, d\mu = \int_{X \setminus M} |f(x)| \cdot |g(x)|\, d\mu(x) \leq \int_{X \setminus M} |f(x)| \cdot ||g||_\infty\, d\mu =$$
  $$= ||g||_\infty \cdot \int_{X \setminus M} |f(x)|\, d\mu(x) = ||g||_\infty \cdot ||f||_1 < \infty$$

  Se cumple por definición.

- Caso $1 < p < \infty$. Hay que estudiar dos posibles escenarios:

  a) Si $||f||_p = 0$ ó $||g||_{p^*} = 0$ (pudiendo darse ambas). Supongamos sin pérdida de generalidad que $||f||_p = 0$:

$||f||_p = 0 \Rightarrow = \int_X |f|^p \, d\mu(x) = 0 \overset{2.1.17}{\Rightarrow} |f|^p \overset{\mu-a.e.}{=} 0 \Rightarrow f \overset{\mu-a.e.}{=} 0.$

De este modo, $f \cdot g \overset{\mu-a.e.}{=} 0 \Rightarrow |f \cdot g| \overset{\mu-a.e.}{=} 0 \overset{2.1.17}{\Rightarrow} 0 = \int_X |f \cdot g| d\mu = ||f \cdot g||_1$.

b) Supongamos ahora que $||f||_p \neq 0 \neq ||g||_{p^*}$. Así,

Definimos los siguientes conjuntos auxiliares:

$$A := \{x \in X : f(x) = 0\} \in \Sigma \qquad B := \{x \in X : g(X) = 0\} \in \Sigma$$

Por cómo los hemos definido,

$$\int_X \frac{|f(x)|}{||f||_p} \cdot \frac{|g(x)|}{||g||_{p^*}} \, d\mu(x) = \int_{X \setminus (A \cup B)} \frac{|f(x)|}{||f||_p} \cdot \frac{|g(x)|}{||g||_{p^*}} \, d\mu(x) = (*_1)$$

Al tratarse de cantidades positivas, para cada $x \in X \setminus (A \cup B)$, existen $\xi_x, \zeta_x \in (0, \infty)$ tales que:

$$\frac{|f(x)|}{||f||_p} = e^{\frac{\xi_x}{p}} = \exp\left(\frac{\xi_x}{p}\right) \qquad \frac{|g(x)|}{||g||_{p^*}} = e^{\frac{\zeta_x}{p^*}} = \exp\left(\frac{\zeta_x}{p^*}\right)$$

Sustituyendo en la expresión anterior:

$$(*_1) = \int_{X \setminus (A \cup B)} \exp\left(\frac{\xi_x}{p}\right) \cdot \exp\left(\frac{\zeta_x}{p^*}\right) \, d\mu(x) = \int_{X \setminus (A \cup B)} \exp\left(\frac{1}{p}\xi_x + \frac{1}{p^*}\zeta_x\right) \, d\mu(x)$$

La función exponencial es convexa. Tomando $\lambda = \frac{1}{p}$, $1 - \lambda = \frac{1}{p^*}$, tenemos:

$$(*_1) \leq \int\limits_{X \setminus (A \cup B)} \frac{1}{p} \exp(\xi_x) + \frac{1}{p^*} \exp(\zeta_x) \, d\mu(x) = \frac{1}{p} \int\limits_{X \setminus (A \cup B)} \exp(\xi_x) \, d\mu(x) + \frac{1}{p^*} \int\limits_{X \setminus (A \cup B)} \exp(\zeta_x) \, d\mu(x) = (*_2)$$

Deshacemos el cambio de variable y comparamos con la definición de $|| \cdot ||_p$ y de $|| \cdot ||_{p^*}$,

$$\begin{aligned}(*_2) &= \frac{1}{p} \int\limits_{X \setminus (A \cup B)} \frac{|f(x)|^p}{||f||_p^p} \, d\mu(x) + \frac{1}{p^*} \int\limits_{X \setminus (A \cup B)} \frac{|g(x)|^{p^*}}{||g||_{p^*}^{p^*}} \, d\mu(x) = \\ &= \frac{1}{p \cdot ||f||_p^p} \cdot \int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) + \frac{1}{p^* \cdot ||g||_{p^*}^{p^*}} \cdot \int_X |g(x)|^{p^*} \, d\mu(x) = \\ &= \frac{1}{p \cdot ||f||_p^p} \cdot ||f||_p^p + \frac{1}{p^* \cdot ||g||_{p^*}^{p^*}} \cdot ||g||_{p^*}^{p^*} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1\end{aligned}$$

Sustituimos para resolver el problema inicial:

$$\int_X \frac{|f(x)|}{||f||_p} \cdot \frac{|g(x)|}{||g||_{p^*}} \, d\mu(x) \leq 1 \Rightarrow \int_X |f(x) \cdot g(x)| \, d\mu(x) \leq ||f||_p \cdot ||g||_{p^*} < \infty$$

3.2.5 Desigualdad de Minkowski

Sea $1 \leq p \leq \infty$. Sean $f, g \in \mathcal{L}_p(X)$. Entonces, $||f+g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$.

Demostración: Hemos de distinguir tres casos.

- Caso $p = 1$: ya ha sido probado.
- Caso $p = \infty$:

Por ser $f, g \in \mathcal{L}_\infty(X)$, sabemos $\exists\, M, N \in \Sigma$ con $\mu(M) = \mu(N) = 0$ tales que:

$$X \setminus M = \{x \in X : |f(x)| \leq ||f||_\infty\} \quad X \setminus N = \{x \in X : |g(x)| \leq ||g||_\infty\}$$

Entonces, dado $x \in X \setminus (M \cup N)$, se cumple:

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$$

Como $\mu(M \cup N) = 0$. Recordando la (notación 3.1.4), tenemos:

$$||f||_\infty + ||g||_\infty \in A_{f+g} \Rightarrow ||f+g||_\infty = \min A_{f+g} \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$$

- Caso $1 < p < \infty$:

$$||f+g||_p^p = \int_X |f+g|^p \, d\mu = \int_X |f+g| \cdot |f+g|^{p-1} \, d\mu \leq$$

$$= \int_X \underbrace{|f|}_{\mathcal{L}_p(X)} \cdot \underbrace{|f+g|^{p-1}}_{\mathcal{L}_{p^*}(X)} \, d\mu + \int_X \underbrace{|g|}_{\mathcal{L}_p(X)} \cdot \underbrace{|f+g|^{p-1}}_{\mathcal{L}_{p^*}(X)} \, d\mu = (*)$$

Por las propiedades de p^*, tenemos que:

$$\int_X \left(|f+g|^{p-1}\right)^{p^*} d\mu = \int_X |f+g|^{p^*(p-1)} \, d\mu = \int_X |f+g|^p \, d\mu = ||f+g||_p^p < \infty$$

Podemos aplicar la Desigualdad de Hölder a ambos sumandos:

$$(*) \leq ||f||_p \cdot \left|\left||f+g|^{p-1}\right|\right|_{p^*} + ||g||_p \cdot \left|\left||f+g|^{p-1}\right|\right|_{p^*} = (||f||_p + ||g||_p) \cdot \left|\left||f+g|^{p-1}\right|\right|_{p^*} =$$

$$= (||f||_p + ||g||_p) \cdot \left(\int_X |f+g|^{p^*(p-1)}\, d\mu\right)^{\frac{1}{p^*}} = (||f||_p + ||g||_p) \cdot \left(||f+g||_p^p\right)^{\frac{1}{p^*}} =$$

$$= (||f||_p + ||g||_p) \cdot ||f+g||_p^{p-1}$$

Así, $||f+g||_p^p \leq (*) \leq (||f||_p + ||g||_p) \cdot ||f+g||_p^{p-1}$. Despejando,

$$||f+g||_p^{p-(p-1)} = ||f+g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$$

3.2.6 Definición de espacio vectorial seminormado

Un K-espacio vectorial V se dice "seminormado" si existe una aplicación $||\cdot|| : V \longrightarrow [0, +\infty)$ (llamada "seminorma de V") que cumple las siguientes condiciones:

i) $||\lambda v|| = |\lambda| \cdot ||v|| \ \forall\, \lambda \in K \ \forall\, v \in V$.

ii) $||x+y|| \leq ||x|| + ||y|| \ \forall\, x, y \in V$.

Nótese que como consecuencia de (i) se cumple $||0_V|| = 0$.

En vista del resultado anterior, es claro que los $\mathcal{L}_p(X)$ son espacios vectoriales seminormados para $1 \leq p \leq \infty$.

§3. Paso a conjuntos cocientes L_p

3.3.1 Conjunto cociente dado por subespacio vectorial

Sea V un espacio vectorial. Sea $N \leq V$ un subespacio vectorial. Podemos definir una relación de equivalencia en V como sigue:

$$x \sim y \iff x - y \in N \quad \forall x, y \in V$$

Veamos que es en efecto una relación de equivalencia.

- Relfexividad:

  Por ser N un subespacio vectorial, tenemos $0_V = 0_N \in N$.

  De este modo, sea $x \in V$ cualquiera, $x - x = 0_V \in N$.

- Simetría:

  Sean $x, y \in V$ tales que $x \sim y$, veamos que $y \sim x$.

  Por definición, $x - y \in N \Rightarrow -(x - y) = y - x \in N$.

  Se tiene el ser N un espacio vectorial.

- Transitividad:

  Sean $x, y, < \in V$ tales que $x \sim y,\ y \sim z$. Veamos que $x \sim z$.

  Por definición, $x - y \in N,\ y - z \in N$.

  Así, $x - z = (x - y) - \underbrace{(z - y)}_{\in N} \in N$.

Es muy común denotar al espacio cociente resultante como V/N en lugar de $V/\sim$. De manera similar, sus elementos suelen denotarse como $v + N$ en lugar de $[v]_\sim$.

Además, respeta la estructura de espacio vectorial. Es decir, sean $x, y \in V$, $\alpha, \beta \in K$; se cumple:

$$(\alpha x + \beta y) + N = \alpha(x + N) + \beta(y + N)$$

Esto se debe a que $\forall\, z \in V$, $\forall \lambda \in K$,

$$||x - y|| = 0 \iff ||\lambda x - \lambda y|| = 0$$

$$||x - y|| = 0 \iff ||(x + z) - (y + z)|| = 0$$

3.3.2 Convertir un espacio seminormado en uno normado

Sea $(V, ||\cdot||)$ un K-espacio vectorial seminormado, veamos cómo obtener un espacio vectorial normado a partir de él. Veamos que el siguiente conjunto es un subespacio vectorial:

$$N = \{v \in V : ||v|| = 0\}$$

Sean $u, v \in N$, sean $\alpha, \beta \in K$, se cumple:

$$||\alpha u + \beta v|| \leq ||\alpha u|| + ||\beta v|| = |\alpha| \cdot ||u|| + |\beta| \cdot ||v|| = 0 + 0 = 0$$

Utilizaremos este subespacio para el paso a cocientes.

Proponemos la siguiente aplicación como candidata a norma:

$$||\cdot||' : V/N \to [0, \infty) \qquad\qquad v + N \mapsto ||v + N||' = ||v||$$

En primer lugar, veamos que está bien definida. Sean $u, v \in V$ tales que $u \sim v$, buscamos ver $||u|| = ||v||$:

$$||u|| = ||u + 0_v|| = ||(u - v) + v|| \leq ||u - v|| + ||v|| \Rightarrow ||u|| - ||v|| \leq ||u - v|| = 0$$

Análogamente, $||v|| - ||u|| \leq ||u - v|| = 0$. Queda ver que $||\cdot||'$ es una norma.

i) Sean $u \in V$, $\lambda \in K$,

$$||\lambda(u + N)||' = ||(\lambda u) + N||' = ||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||u|| = |\lambda| \cdot ||u + N||'$$

ii) Sean $u, v \in V$,

$$||(u+v)+N||' = ||(u+N)+(v+N)||' = ||u+v|| \leq ||u||+||v|| = ||u+N||'+||v+N||'$$

iii) Sea $u \in V$ tal que $||u + N||' = 0$,

$$||u + N||' = 0 \Rightarrow ||u|| = 0 \Rightarrow u \in N \Rightarrow u + N = N = 0_{V/N}$$

<u>**Nota:**</u> Habitualmente, solemos escribir $(V/N, ||\cdot||)$ en lugar de $(V/N, ||\cdot||')$.

3.3.3 Unicidad del conjunto N en los $\mathcal{L}_p(X)$

Sea $1 \leq p \leq \infty$, se cumple:

$$N_p := \{f \in \mathcal{L}_p(X) : ||f||_p = 0\} = N := \{f : X \to \mathbb{R} \text{ medible con } f \overset{\mu-a.e.}{=} 0\}$$

Demostración: Distinguiremos varios casos.

• Para $p = \infty$:

$$||f||_\infty = 0 \iff \{x \in X : |f(x)| \leq 0\} \overset{\mu-a.e.}{=} X \iff f \overset{\mu-a.e.}{=} 0$$

• Caso $1 \leq p < \infty$:

$$||f||_p = \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} = 0 \iff |f(x)|^p \overset{\mu-a.e.}{=} 0 \iff f \overset{\mu-a.e.}{=} 0$$

3.3.4 Definición de espacios L_p

Para cada $1 \leq p \leq \infty$, definimos siguiente espacio vectorial normado:

$$L_p(X, \Sigma, \mu) := \Big(\mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)/N, ||\cdot||_p\Big)$$

Cuando el contexto sea claro, escribiremos simplemente $L_p(X)$. Además, denotaremos $f \in L_p(X)$ en lugar de $f + N \in L_p(X)$ ó $[f]_\sim \in L_p(X)$.

Consideramos que $f = g$ en $L_p(X, \Sigma, \mu)$ significa $f(x) \overset{\mu-a.e.}{=} g(x)$ como funciones.

3.3.5 Espacios ℓ_p como espacios L_p

Estudiemos el caso particular $L_p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$ para m medida de contar.

Sea $s \in \mathcal{L}_p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$, tenemos que s es una función de la forma:

$$s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad n \mapsto s(n)$$

De modo que $s \equiv (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Por tanto,

$$||s||_p = \left(\int_{\mathbb{N}} |s(n)|^p \, dm(n)\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \overset{s\in\mathcal{L}_p}{<} \infty$$

Se corresponden con los espacios ℓ_p estudiados en Análisis Matemático 2. Además, en este caso, el conjunto N contiene únicamente a la sucesión nula $0_{\ell_p} \equiv 0$.

3.3.6 Teorema de Riesz-Fisher

Sea $1 \leq p \leq \infty$. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}_p(X)$ sucesión de Cauchy en $L_p(X)$. Entonces, existen $(k_n)_n \subseteq (n)_n$ sucesión creciente de naturales, y $f \in \mathcal{L}_p(X)$ que verifican:

i) $f_{k_n}(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$ en casi todo punto (μ-a.e.)

ii) $||f_n - f||_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$

iii) Para el caso $p = \infty$, podemos tomar $(k_n)_n = (n)_n$

Como consecuencia, $L_p(X, \Sigma, \mu)$ es un espacio de Banach.

Demostración: Veremos dos casos.

- Caso $1 \leq p < \infty$:

  Como $(f_n)_n$ es de Cauchy en $L_p(X)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos afirmar que existe cierto $k_n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$||f_k - f_{k_n}||_p < \frac{1}{2^n} \ \forall\, k \geq k_n$$

  En particular, $|f_{k_{n+1}} - f_{k_n}||_p < \frac{1}{2^n} \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

  Consideramos las siguientes funciones medibles:

$$g_n(x) := \sum_{m=1}^{n} |f_{k_{m+1}}(x) - f_{k_m}(x)| \qquad g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} |f_{k_{n+1}}(x) - f_{k_n}(x)|$$

  Veamos que g es sumable. Como es suma de términos no negativos, podemos aplicar el Teorema de Convergencia Monótona:

$$\int_X g(x)^p \, d\mu(x) \overset{TCM}{=} \lim_n \int_X g_n(x)^p \, d\mu(x) = \lim_n \left|\left| \sum_{m=1}^{n} |f_{k_{m+1}}(x) - f_{k_m}(x)| \right|\right|_p^p \overset{\text{continuidad}}{=}$$

$$= \left(\lim_n \left|\left| \sum_{m=1}^{n} |f_{k_{m+1}}(x) - f_{k_m}(x)| \right|\right|_p \right)^p \overset{D.T.}{\leq} \left(\lim_n \sum_{m=1}^{n} ||f_{k_{m+1}} - f_{k_m}||_p \right)^p \leq$$

$$\leq \left(\lim_n \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2^n}\right)^p < \infty$$

Tenemos que $g(x) < \infty$ μ-a.e. al ser sumable. Por tanto, para el siguiente conjunto,

$$A := \{x \in X : g(x) = \infty\} \in \Sigma$$

tenemos que $\mu(A) = 0$. Sea $x \in X \setminus A$, tenemos $g(x) < \infty$ luego ha de cumplirse:

$$\hat{g}(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_{k_{n+1}}(x) - f_{k_n}(x) < \infty$$

Al ser una serie telescópica, esto implica que $\exists \lim_n f_{k_n}(x) < \infty$.
Definimos la función candidata a límite:

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto f(x) := \begin{cases} \lim_n f_{k_n}(x) & \text{si } x \in X \setminus A \\ 0 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

Tenemos garantizado que $f_{k_n}(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$ en $X \setminus A$ con $\mu(A) = 0$ luego hemos demostrado ya el primer apartado. Queda ver que se cumple el segundo.

$$\int_X |f - f_{k_n}|^p \, d\mu = \int_{X\setminus A} \varliminf_m |f_{k_m} - f_{k_n}|^p \, d\mu \overset{Fatou}{\leq} \varliminf_m \int_{X\setminus A} |f_{k_m}(x) - f_{k_n}(x)| \, d\mu(x) =$$

$$= \left(\varliminf_m ||f_{k_m} - f_{k_n}||_p\right)^p \leq \left(\frac{1}{2^n}\right)^p$$

En particular, tomando $k_n = k_1$,

$$\int_X |f(x) - f_{k_1}(x)|^p \, d\mu(x) < \infty \Rightarrow f - f_{k_1} \in \mathcal{L}_p(X)$$

Como $f_{k_1} \in \mathcal{L}_p(X)$, al ser un espacio vectorial, $f \in \mathcal{L}_p(X)$.

Además, $||f - f_{k_n}||_p^p \leq \frac{1}{2^{np}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Es decir, $f_{k_n} \xrightarrow{n\to\infty} f$ en $L_p(X)$.

Como $(f_n)_n$ es de Cauchy en $L_p(X)$, $||f_n - f||_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

- Caso $p = \infty$:

 Por hipótesis, tenemos $(f_n)_n$ de Cauchy en $L_\infty(X)$ luego

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tal que } ||f_n - f_m||_\infty < \varepsilon \;\;\; \forall\, n, m \geq n_\varepsilon$$

 Para cada par $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ definimos el siguiente conjunto auxiliar:

$$A_{n,m} := \Big\{ x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \leq ||f_n - f_m||_\infty \Big\}$$

 Así, para $B_{n,m} := X \setminus A_{n,m} \in \Sigma$ tenemos $\mu(B_{n,m}) = 0$.

 Y por tanto, $B := \bigcup\limits_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} B_{n,m} \in \Sigma$ con $\mu(B) = 0$.

 Sea $\varepsilon > 0$. Tenemos:

$$\forall\, x \in X \setminus B, \;\; \forall\, n, m \geq n_\varepsilon : |f_n(x) - f_m(x)| \leq ||f_n - f_m||_\infty < \varepsilon$$

 Tenemos que para todo $x \in X \setminus B$ la sucesión $(f_n(x))_n$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$. Al ser un espacio métrico completo, converge en $\mathbb{R}$. Podemos definir:

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad x \longmapsto f(x) := \begin{cases} \lim\limits_n f_n(x) & \text{si } x \in X \setminus B \\ 0 & \text{si } x \in B \end{cases}$$

 Dados $x \in X \setminus B$, $m \geq n_\varepsilon$, se cumple:

$$|f(x) - f_m(x)| = \lim_n |f_n(x) - f_m(x)| \overset{n \geq n_\varepsilon}{\leq} \varepsilon$$

 Tenemos $f = (f - f_m) + f_m \in \mathcal{L}_\infty(X)$, luego $f \in \mathcal{L}_\infty(X)$ al ser un espacio vectorial .

 Además, $\forall\, m \geq n_\varepsilon, ||f - f_m||_\infty < \varepsilon$.

 Así, $f_m \xrightarrow{m\to\infty} f$ en $L_\infty(X)$.

IV Series de Fourier

Recordamos que $L_2(X,K) \equiv \frac{\mathcal{L}_2(X,K)}{\sim}$ es un espacio de Hilbert; donde X es un $K-$espacio vectorial, y $f \sim g \iff f \overset{\mu-a.e.}{=} g$. El producto interior y su norma asociada se definen como:

$$\langle f, g\rangle = \int_X \bar{f} \cdot g \qquad\qquad ||f||_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}$$

Nótese que cuando trabajamos con $\mathbb{C}$ como cuerpo, el producto interno tiene linealidad directa en una componente, mientras que tiene linealidad por el conjugado en la otra. Asimismo, el producto interno da lugar a escalares del propio cuerpo sobre el que se define, luego podría dar lugar a valores complejos. Además, el producto interno no conmuta (en general) en $\mathbb{C}$.

La idea de esta unidad es "aproximar" una función $f \in L_2(X,K)$ como "suma" de funciones más elementales. En particular, a partir de ahora, consideraremos $X = I = [0, 2\pi]$, con $K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Además, extenderemos las funciones en este conjunto con periodicidad 2π en $\mathbb{R}$.

§1. Primeros conceptos

4.1.1 Definición de sistema ortonormal

Dado un espacio de Hilbert V, un sistema ortonormal en V es un conjunto $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ que verifica:

$$\langle \varphi_n, \varphi_m\rangle = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

4.1.2 Ejemplos de sistemas ortonormales

i) $K = \mathbb{R}$, $V = L_2([0, 2\pi], \mathbb{R})$. Consideramos el siguiente sistema:

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \qquad \varphi_{2n-1}(t) = \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}} \qquad \varphi_{2n}(t) = \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}}$$

Veamos que es ortonormal:

$$\int_0^{2\pi} \varphi_0^2(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\,dt = 1$$

$$\int_0^{2\pi} \varphi_{2n+1}^2(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(nt)}{\pi}\,dt \overset{u=nt}{=} \frac{1}{n\pi}\int_0^{2n\pi} \frac{1+\cos(2u)}{2} du \overset{v=2u}{=}$$
$$= \frac{1}{4n\pi}\int_0^{4n\pi} 1 + cos(v) = \frac{4n\pi}{4n\pi} + 0 = 1$$

$$\int_0^{2\pi} \varphi_{2n}^2(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(nt)}{\pi}\,dt \overset{u=nt}{=} \frac{1}{n\pi}\int_0^{2n\pi} \frac{1-\cos(2u)}{2} du \overset{v=2u}{=}$$
$$= \frac{1}{4n\pi}\int_0^{4n\pi} 1 - (v) = \frac{4n\pi}{4n\pi} + 0 = 1$$

Para $n \in \mathbb{N}$ cualquiera, se cumple:

$$\int_0^{2\pi} \varphi_{2n+1}(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \varphi_{2n}(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \varphi_{2n+1}(t)\cdot\varphi_{2n}(t)\,dt = 0$$

Hemos demostrado que el sistema es ortonormal.

ii) Para $K = \mathbb{C}$, $V = L_2([0, 2\pi], \mathbb{C})$, el siguiente sistema es ortonormal:

$$\left\{ \varphi_n(t) = \frac{e^{i\cdot n\cdot t}}{\sqrt{\pi}} \right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

4.1.3 Teorema de óptima aproximación

Sea V un K-espacio pre-Hilbert. Sea $\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\} \subseteq V$ un sistema ortonormal finito en V. Sea $f \in V$. Si W es la clausura $K\langle\varphi_0, \dots, \varphi_n\rangle$. Entonces, el elemento de W que mejor aproxima f (en cuanto a minimizar la norma de su diferencia) es

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\langle f, \varphi_k\rangle}_{c_k} \varphi_k$$

Es decir, dado $t_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot \varphi_k \in W$ cualquiera (formado a partir de escalares cualesquiera), se cumple $||f - s_n|| \leq ||f - t_n||$.

Demostración:

Al ser un espacio Pre-Hilbert por hipótesis, tenemos que :

$||f-t_n||^2 = \langle f-t_n, f-t_n\rangle = \langle f,f\rangle - \langle f,t_n\rangle - \langle t_n,f\rangle + \langle t_n,t_n\rangle =$

$$= ||f||^2 - \left\langle f, \sum_{k=0}^{n} b_k\varphi_k \right\rangle - \left\langle \sum_{k=0}^{n} b_k\varphi_k, f \right\rangle + \left\langle \sum_{k=0}^{n} b_k\varphi_k, \sum_{k=0}^{n} b_k\varphi_k \right\rangle \underset{\text{ortonormalidad}}{\overset{\text{linealidad}}{=}}$$

$$= ||f||^2 - \sum_{k=0}^{n} b_k\langle f,\varphi_k\rangle - \sum_{k=0}^{n} \bar{b}_k\langle f,\varphi_k\rangle + \sum_{k=0}^{n} \bar{b}_k \cdot b_k = \text{definición de } c_k$$

$$= ||f||^2 + \sum_{k=0}^{n} \Big[-b_kc_k - \bar{b}_kc_k + |b_k|^2 \Big] = (*)$$

Comparamos ahora con la siguiente expresión:

$|b_k-c_k|^2 = (b_k-c_k)(\bar{b}_k-\bar{c}_k) = b_k\bar{b}_k - b_k\bar{c}_k - \bar{b}_kc_k + c_k\bar{c}_k = |b_k|^2 + |c_k|^2 - b_k\bar{c}_k - \bar{b}_kc_k$

Sustituyendo en la igualdad anterior,

$$(*) = ||f||^2 + \sum_{k=0}^{n} \Big[|b_k-c_k|^2 - |c_k|^2 \Big] = ||f||^2 + ||t_n-s_n||^2 - ||s_n||^2$$

En particular, para $b_k = c_k$ tenemos $||f-s_n||^2 \leq ||f-t_n||^2$.

Motivados por este resultado, buscamos aproximar f por una "combinación lineal infinita" de funciones de un sistema ortonormal.

4.1.4 Definición de coeficientes de Fourier

Dada una función $f \in L_2([0,2\pi])$, y un sistema ortonormal $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Se denomina "coeficiente n-ésimo de Fourier de f respecto de $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$" al escalar:

$$c_n := \langle f,\varphi_n\rangle = \int_0^{2\pi} \bar{f}(t)\cdot\varphi_n(t)\,dt$$

Definimos la suma parcial n-ésima de Fourier de f respecto de $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como:

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k\cdot\varphi_k(x)$$

Análogamente, la serie de Fourier de f respecto de $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ viene dada por:

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \varphi_k(x)$$

4.1.5 Unicidad de las Series de Fourier

Sea $f \in L_2(I, K)$. Sea $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema ortonormal. La serie de Fourier de f respecto de $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está bien definida, pues existe un único elemento $s \in L_2(I, K)$ que verifica:

$$||s - s_n|| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Demostración:

Sean $p, q \in \mathbb{N}$ cualesquiera. Supongamos sin pérdida de generalidad que $q > p$. Entonces,

$$||s_p - s_q||^2 = \left|\left|\sum_{k=p+1}^{q} s_k\right|\right|^2 = \left\langle \sum_{k=p+1}^{q} \langle f, \varphi_k\rangle \varphi_k, \sum_{k=p+1}^{q} \langle f, \varphi_k\rangle \varphi_k \right\rangle \overset{\text{ortonormalidad}}{=}$$

$$= \sum_{k=p+1}^{q} |\langle f, \varphi_k\rangle|^2 = |a_p - a_q|^2 \qquad \text{donde } a_n = \sum_{k=0}^{n} |\langle f, \varphi_k\rangle|^2$$

Por el Teorema de óptima aproximación, para $n \in \mathbb{N}$ cualquiera tenemos que:

$$||f - s_n||^2 = ||f||^2 - \underbrace{\sum_{k=0}^{n} |\langle f, \varphi_k\rangle|^2}_{a_n} = ||f||^2 - a_n$$

Esto implica que $||f||^2 \geq a_n$. Así, tomando límites en n tenemos que:

$$a := \sum_{k=0}^{\infty} |\langle f, \varphi_k\rangle|^2 \leq ||f||^2$$

Esta es la conocida como **Desigualdad de Bessel**.

Por tanto, tenemos que $(a_n)_n$ es de Cauchy, luego $(s_n)_n$ ha de serlo también. Al estar además en un espacio de Banach, podemos asegurarnos de que $(s_n)_n$ es convergente a s.

Nota:

Este resultado garantiza la convergencia en norma de las sumas parciales de Fourier a su límite. No tiene por qué darse $f(x) = s(x)$. Cabe preguntarse si esto es a su vez equivalente a $||f - s_n|| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Pasaremos a estudiar escenarios donde puede ocurrir.

4.1.6 Identidad de Parseval

Sea $f \in L_2(I, K)$. Sea $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L_2(I, K)$ un sistema ortonormal. Sea $c_n := \langle f, \varphi_n \rangle$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$||f - s_n|| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \iff \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = ||f||^2$$

Demostración:

Por el Teorema de óptima aproximación, sabemos que:

$$||f - s_n||^2 = ||f||^2 - \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2 \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Despejamos y tomamos límites:

$$\lim_n ||f - s_n||^2 = 0 \iff \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 = ||f||^2$$

4.1.7 Definición de sistema ortonormal completo

Sea H un espacio de Hilbert. Sea $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema ortonormal. Se dice "completo" si satisface la Identidad de Parseval para cualquier $f \in H$. Es decir,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle = ||f||^2 \;\; \forall\, f \in H$$

Nota:

Por la Desigualdad de Bessel, sabemos que $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \leq ||f||^2$. Exigir la igualdad equivale a decir que la norma se resume completamente por el sistema ortonormal: el sistema puede aportar información sobre todo el espacio H. Por tanto, toda componente de f queda recogida por cierto φ_n, luego ninguna función no nula f es ortogonal al sistema entero.

4.1.8 Ejemplo de sistema ortonormal completo

En $L_2(I, K)$, el siguiente sistema ortonormal es completo:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(t)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(t)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2t)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(2t)}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$$

La demostración es demasiado larga, luego no se verá.

Este es el sistema ortonormal más utilizado, y la serie de Fourier de una función f respecto de él, se denomina simplemente "serie de Fourier de f". Viene representada por:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \Big]$$

Donde "$\sim$" significa convergencia en media cuadrática. Podemos obtener los coeficientes a_n, b_n por identificación al aplicar la ortonormalidad. Por definición, la suma parcial k-ésima de Fourier de f viene dada por:

$$s_k(t) = \sum_{n=0}^{k} \langle f, \varphi_n \rangle \, \varphi_n(t) = \frac{c_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{k} \left[c_{2n-1} \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}} + c_{2n} \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}} \right]$$

De este modo, comparando:

$$a_n = \frac{c_{2n-1}}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle f, \varphi_{2n-1} \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}(t) \cdot \cos(nt) \, dt$$

$$b_n = \frac{c_{2n}}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle f, \varphi_{2n} \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}(t) \cdot \sin(nt) \, dt$$

4.1.9 Ejemplo de cálculo de serie de Fourier

Hallemos la serie de Fourier de la siguiente función f:

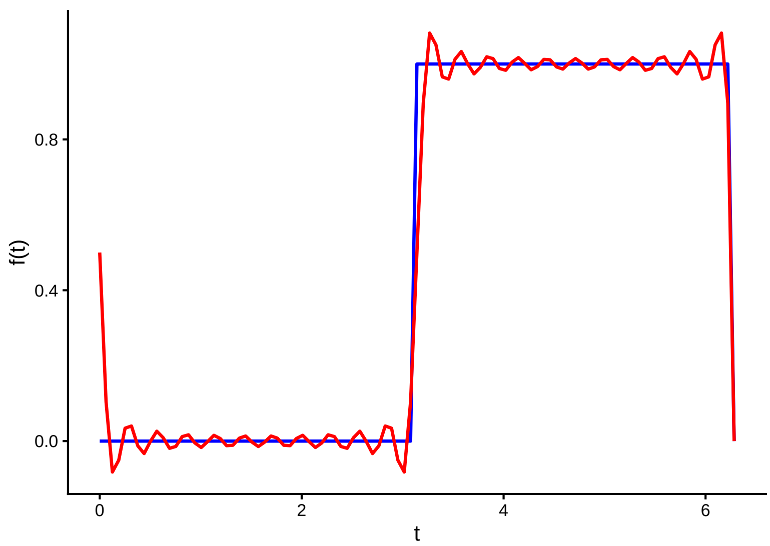
$$f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \pi) \cup \{2\pi\} \\ 1 & \text{si } x \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 0 \cdot \cos(nt)\, dt + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} 1 \cdot \cos(nt)\, dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_{t=\pi}^{t=2\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos(nt)\right]_{t=\pi}^{t=2\pi} = \frac{-1}{n\pi}\Big(\underbrace{\cos(2n\pi)}_{0} - \cos(n\pi)\Big) = \begin{cases} -\frac{2}{n\pi} & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Por tanto, tenemos que:

$$f(t) \sim \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\sin\big((2n+1)t\big)$$



Aproximación de f por su serie de Fourier

Para $t = \pi$, tenemos que $f(\pi) = 1$, pero $s(\pi) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} 0 = \frac{1}{2}$. ¿Por qué ocurre esto? ¿Cuándo se da la convergencia puntual? ¿En qué partes de la función? El siguiente apartado de esta unidad estudia estas preguntas.

§2. Estudio de la convergencia puntual

4.2.1 Teorema de Riesz-Fisher

Sea $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L_2(I,K)$ un sistema ortonormal. Sea $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ que verifica $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$. Entonces, existe una función f de $L_2(I.K)$ que cumple simultáneamente:

$$c_n = \langle f, \varphi_n \rangle \ \forall n \in \mathbb{N} \qquad\qquad \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = ||f||^2$$

<u>**Demostración:**</u>

Recordemos que la sucesión $(s_n)_n = (\sum\limits_{k=0}^{n} c_k\varphi_k)_n$ es de Cauchy, pues dados $p, q \in \mathbb{N}$ con $p < q$, se cumple:

$$||s_p - s_q||^2 = \left|\left|\sum_{k=p+1}^{q} s_k\right|\right|^2 = \sum_{k=p+1}^{q} |c_k|^2 \leq \sum_{k=p+1}^{\infty} |c_k|^2 \xrightarrow{p\to\infty} 0$$

Por hipótesis, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$ luego el término general tiende a cero. Así, la suma de términos generales también tenderá a cero al considerar un índice inicial cada vez más alto.

Al trabajar con un espacio de Hilbert, podemos asegurar que existe $f \in L_2(I,K)$ tal que $||s_n - f|| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Sea $k \in \mathbb{N}$ cualquiera, veamos que $c_k = \langle f, \varphi_k \rangle$:

$$|c_k - \langle f, \varphi_k \rangle| \overset{n\geq k}{=} |\langle s_n, \varphi_k \rangle - \langle f, \varphi_k \rangle| = |\langle s_n - f, \varphi_k \rangle|$$

Aplicando ahora la Desigualdad de Cauchy Schwartz,

$$|\langle s_n - f, \varphi_k \rangle| \leq ||s_n - f|| \cdot ||\varphi_k|| = ||s_n - f|| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Aplicando ahora el Teorema de óptima aproximación,

$$0 \xleftarrow{n\to\infty} ||s_n - f|| = ||f||^2 - \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2$$

Por tanto, tenemos que $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 = ||f||^2$.

4.2.2 Suma parcial como integral de semisumas

Sea $f \in L_2\big([0,2\pi],\mathbb{R}\big)$ extendida con periodo 2π a $\mathbb{R}$. Entonces, la suma parcial n-ésima de la serie de Fourier de f satisface:

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Big(f(x+t) + f(x-t)\Big) D_n(t)\,dt$$

$$\text{Donde } \; D_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 2\pi n \\ \frac{1}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \sin\Big((n+\frac{1}{2})\cdot t\Big) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

<u>**Demostración:**</u>

Por definición de la suma parcial,

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \langle f, \varphi_k\rangle\, \varphi_k(x) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(x)\cdot \int_0^{2\pi} f(t)\cdot\varphi_k(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\cos(kx)}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(kt)\cdot f(t)\,dt\right] + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\sin(kx)}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin(kt)\cdot f(t)\,dt\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kx)\cos(kt) + \sin(kx)\sin(kt)\right)\right] dt \underset{\substack{\text{identidad trigonométrica} \\ \text{coseno de la suma}}}{=}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kx-kt)\right)\right] dt$$

Sea $k \leq n$ cualquiera, para $A = \frac{1}{2}(x-t)$ y $B = k(x-t)$, usamos la siguiente identidad trigonométrica: $\sin(A+B) - \sin(B-A) = 2\sin(A)\cos(B)$. Por tanto, tenemos:

$$\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)(x-t)\right) - \sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)(x-t)\right) = 2\sin\left(\frac{x-t}{2}\right)\cos\Big(k(x-t)\Big)$$

Sumamos ahora en k hasta llegar a n. Al ser una suma telescópica,

$$\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-t)\right) - \sin\left(\frac{x-t}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{x-t}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}\cos(kx-kt)$$

Despejando,

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kx - kt) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-t)\right)}{2\sin\left(\frac{x-t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$$

Continuamos ahora en la igualdad de la integral inicial:

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cdot \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-t)\right)}{2\sin\left(\frac{x-t}{2}\right)}\,dt \underset{u=x-t}{=^{\text{cambio de variable}}}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_x^{x-2\pi} f(x-u)\cdot D_n(u)\,du = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x-u)\cdot D_n(u)\,du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} f(x-u)\cdot D_n(u)\,du + \int_{\pi}^{2\pi} f(x-u)\cdot D_n(u)\,du\right] \overset{v=2\pi-u}{=}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} f(x-u)\cdot D_n(u)\,du + \int_0^{\pi} f(x+v)\cdot D_n(v)\,dv\right]$$

Queda demostrada la igualdad. Expliquemos el último paso con algo más de detalle:

$$\int_{\pi}^{2\pi} f(x-u)\cdot D_n(u)\,du = -\int_{\pi}^{0} f\big(x-(2\pi-v)\big)\cdot D_n(2\pi-v)\,dv$$

Al ser tanto f como D_n funciones de periodo 2π, su producto también lo es. Por tanto, podemos simplificar esta expresión para que coincida con la del enunciado.

4.2.3 Lema de Riemann-Lebesgue

Sea $f \in L_1(J,\mathbb{R})$ con J un intervalo compacto real. Entonces, para $\beta \in \mathbb{R}$ cualquiera, se cumple:

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_J f(t)\cdot\sin(\alpha t+\beta)\,dt = 0$$

Demostración:

Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera, pero fijo. Veamos primero que el resultado es cierto para funciones características sobre un intervalo compacto $[c,d] \subseteq J$.

$$f : J \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [c,d] \\ 0 & \text{si } x \in J\setminus[c,d] \end{cases}$$

Entonces, para este caso,

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_J f(t)\sin(\alpha t+\beta)\,dt = \lim_{\alpha\to\infty}\int_c^d \sin(\alpha t+\beta)\,dt =$$

$$= \lim_{\alpha\to\infty}\left[\frac{-1}{\alpha}\cos(\alpha t+\beta)\right]_{t=c}^{t=d} = 0$$

El límite es nulo al tratarse de un infinitésimo por una función acotada. Hemos comprobado que se cumple para este tipo de funciones.

Aplicaremos ahora el siguiente resultado (no veremos su demostración):

Sean $f \in L_1([a,b],\mathbb{R})$ *cualquiera,* $\varepsilon > 0$ *cualquiera. Existen* $g \in L_1([a,b],\mathbb{R})$ *y* $s : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *combinación lineal de funciones características de intervalos compactos en* $[a,b]$ *tales que:*

$$f = s + g \qquad\qquad \int_a^b |g(t)|\,dt < \varepsilon$$

Así, para $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$, sabemos que existen $g \in L_1(J,\mathbb{R})$, $s : J \to \mathbb{R}$ combinación lineal de funciones características de intervalos compactos de J tales que:

$$f = s + g \qquad\qquad \int_J |g(x)|\,dx < \varepsilon_1$$

Como ya hemos demostrado el apartado anterior para funciones características, sabemos que para $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\alpha \geq M$ se cumple:

$$\left|\int_J s(t)\cdot\sin(\alpha t+\beta)\,dt\right| < \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$$

De este modo, dado $\alpha \geq M$, tenemos:

$$\left|\int_J f(t)\cdot\sin(\alpha t+\beta)\,dt\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_J \Big(\underbrace{f(t)-s(t)}_{g(t)}\Big)\sin(\alpha t+\beta)\,dt\right| + \left|\int_J s(t)\cdot\sin(\alpha t+\beta)\,dt\right| \leq$$

$$\leq \int_J \Big|g(t)\cdot\sin(\alpha t+\beta)\Big|\,dt + \varepsilon_2 \leq \int_J |g(t)|\,dt + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

4.2.4 Funciones de variación acotada

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Sea $\mathcal{P}([a, b])$ el conjunto de particiones del intervalo $[a, b]$. Consideraremos cada partición como:

$$p = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n_p} = b\} \in \mathcal{P}([a, b])$$

Definimos la variación de f en $[a, b]$ como:

$$V_f(a, b) = \sup_{p \in \mathcal{P}([a,b])} \sum_{i=1}^{n_p} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

Si $V_f(a, b) < \infty$, se dice que "f es de variación acotada en $[a, b]$".

4.2.5 Teorema de Localización de Riemann

Sea $f \in L_1([0, 2\pi], \mathbb{R})$ una función de periodo 2π en $\mathbb{R}$. Entonces, la serie de Fourier de f converge en x si y solo si $\exists\ \delta \in (0, \pi)$ tal que:

$$\exists \lim_{n \to \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{f(x + t) + f(x - t)}{2} \cdot \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})t\right)}{t}\, dt$$

En tal caso, converge al valor de dicho límite.

Demostración:

Dado $x \in \mathbb{R}$ cualquiera. Por el resultado 4.2.2, la serie de Fourier de f converge en x si y solo si:

$$\exists \lim_{n \to \infty} s_n(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \Big(f(x + t) + f(x - t)\Big) \cdot \frac{\sin\Big((n + \frac{1}{2})t\Big)}{2 \sin(\frac{t}{2})}\, dt$$

Consideramos el siguiente límite auxiliar:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2 \sin(\frac{t}{2})}\right) \cdot \Big(f(x + t) + f(x - t)\Big) \cdot \sin\left((n + \frac{1}{2})t\right)\, dt$$

Al ser $f \in L_1([0, 2\pi], \mathbb{R})$ con periodo 2π por hipótesis, $f(x-t)$ y $f(x+t)$ han de serlo también. Además, la función $\frac{1}{t} - \frac{1}{2\sin(\frac{t}{2})}$ es de variación acotada en $[0, \pi]$ (sin demostración), luego es $L_1([0, \pi], \mathbb{R})$. Aplicando el Lema de Riemann-Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2\sin(\frac{t}{2})}\right) \cdot \Big(f(x+t) + f(x-t)\Big) \cdot \sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)\, dt = 0$$

Por tanto, comparando con el límite original,

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \Big(f(x+t) + f(x-t)\Big) \cdot \frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})t\big)}{t}\, dt$$

Sea $\delta \in (0, \pi)$ cualquiera, podemos dividir la integral como sigue:

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \Big(f(x+t) + f(x-t)\Big) \cdot \frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})t\big)}{t}\, dt +$$
$$+ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} \Big(f(x+t) + f(x-t)\Big) \cdot \frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})t\big)}{t}\, dt$$

El segundo sumando es nulo por el Lema de Riemann-Lebesgue.

4.2.6 Teorema de Jordan

Si $g : [0, \delta] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de variación acotada. Entonces, se cumple:

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\delta} g(t) \cdot \frac{\sin(\alpha t)}{t}\, dt = \lim_{t\to 0^+} g(t) =: g(0^+)$$

Demostración: No se verá la demostración.

4.2.7 Condición de Jordan

Sea $f \in L_1([0, 2\pi], \mathbb{R})$ una función con periodo 2π que además es de variación acotada en $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ para ciertos $x \in [0, 2\pi]$, $\varepsilon > 0$. Entonces, la serie de Fourier de f converge en x si y solo si:

$$\exists \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2}$$

En tal caso, converge al límite anterior.

Demostración:

Fijado el x del enunciado, tenemos que $g_1(t) := f(x-t)$ y $g_2(t) := f(x+t)$ son de variación acotada en $[-\varepsilon, \varepsilon]$. En particular, son de variación acotada en $[0, \varepsilon]$. Aplicando el Teorema de Jordan,

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\varepsilon} g_1(t) \cdot \frac{\sin(\alpha t)}{t}\, dt = \lim_{t\to 0^+} g_1(t)$$

Del mismo modo,

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\varepsilon} g_2(t) \cdot \frac{\sin(\alpha t)}{t}\, dt = \lim_{t\to 0^+} g_2(t)$$

Aplicamos ahora el Teorema de Localización de Riemann para $\delta = \varepsilon$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\varepsilon} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} \cdot \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{t}\, dt =$$

$$= \lim_{\alpha\to\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\varepsilon} \frac{f(x+t)}{2} \cdot \frac{\sin(\alpha t)}{t}\, dt + \frac{2}{\pi} \int_0^{\varepsilon} \frac{f(x-t)}{2} \cdot \frac{\sin(\alpha t)}{t}\, dt =$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}$$

Como el Teorema de Localización de Riemann garantiza la convergencia al valor del límite, concluimos la demostración.

4.2.8 Teorema de Dini

Sea $g : [0, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\exists \lim_{t\to 0^+} g(t) =: g(0^+)$. Si existe $\delta \in (0, b)$ tal que

$$\frac{g(t)-g(0^+)}{t} \in L_1([0,\delta], \mathbb{R})$$

se verifica:

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\delta} g(t) \cdot \frac{\sin(\alpha t)}{t}\, dt = g(0^+)$$

Demostración:

Supongamos que existe tal $\delta \in (0, b)$. Así, podemos reescribir el límite del enunciado como:

$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\delta g(t) \cdot \frac{\sin(\alpha t)}{t} \, dt =$$

$$= \lim_{\alpha \to \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\delta \Big(g(t) - g(0^+) \Big) \cdot \frac{\sin(\alpha t)}{t} \, dt + \frac{2}{\pi} \int_0^\delta g(0^+) \cdot \frac{\sin(\alpha t)}{t} \, dt$$

Por hipótesis, $\frac{g(t) - g(0^+)}{t} \in L_1([0, \delta], \mathbb{R})$. Aplicando el Lema de Riemann-Lebesgue,

$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\delta \frac{g(t) - g(0^+)}{t} \cdot \sin(\alpha t) \, dt = 0$$

Volviendo a la igualdad anterior,

$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\delta g(t) \cdot \frac{\sin(\alpha t)}{t} \, dt = \lim_{\alpha \to \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\delta g(0^+) \cdot \frac{\sin(\alpha t)}{t} \, dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot g(0^+) \lim_{\alpha \to \infty} \int_0^\delta \frac{\sin(\alpha t)}{t} \, dt \overset{u=\alpha t}{=} \frac{2}{\pi} \cdot g(0^+) \int_0^\infty \frac{\sin(u)}{u} \, du = g(0^+)$$

El último paso se debe a ser la integral bien conocida.

4.2.9 Condición de Dini

Sea $f \in L_1([0, 2\pi], \mathbb{R})$ con periodo 2π. Fijado $x \in \mathbb{R}$ cualquiera, consideramos la función $g(t) := \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}$. Si existen $g(0^+) := \lim\limits_{t \to 0^+}$ y $\delta > 0$ tal que la función $\frac{g(t)-g(0^+)}{t} \in L_1([0, \delta], \mathbb{R})$. Entonces, la serie de Fourier de f converge en x y lo hace al valor:

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2}$$

Demostración: Análoga a la condición de Jordan.

Al ser f 2π-periódica por hipótesis, también ha de serlo g. Razonando como en la Condición de Jordan,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\delta \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} \cdot \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{t}\, dt =$$

$$= \lim_{\alpha\to\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\delta g(t) \cdot \frac{\sin(\alpha t)}{t}\, dt = g(0^+) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}$$

Aplicación directa del Teorema de Dini.Las hipótesis de este enunciado nos garantizan las condiciones para ello.

4.2.10 Teorema de Carleson

Si $f \in L_2([0,2\pi],\mathbb{R})$; entonces, la serie de Fourier de f converge y además converge a $f(x)$ en casi todo punto.

Demostración: Sin demostración.

La continuidad no basta para garantizar la convergencia puntual. ¿Que propiedades sí nos puede garantizar la continuidad?

4.2.11 Ejemplo sobre una función concreta

Consideramos la función $f(x) = x$ en $[0,2\pi]$ extendida periódicamente a $\mathbb{R}$. Veamos cómo calcular su serie de Fourier y estudiemos su convergencia puntual.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\Big]$$

Comencemos calculando los coeficientes:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t\, dt = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2^2\pi^2}{2} = 2\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \cos(nt)\, dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{t\sin(nt)}{n} - \frac{1}{n} \int \sin(nu)\, du\right]_{t=0}^{t=2\pi} =$$

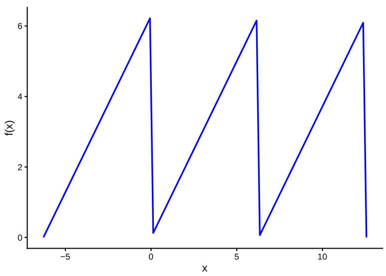
$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{t\sin(nt)}{n} + \frac{\cos(nt)}{n^2}\right]_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\cos(2n\pi)}{n^2} - \frac{\cos(0)}{n^2}\right) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cdot\sin(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-t\cos(nt)}{n} - \frac{1}{n}\int -\cos(nu)\,du\right]_{t=0}^{t=2\pi} =$$

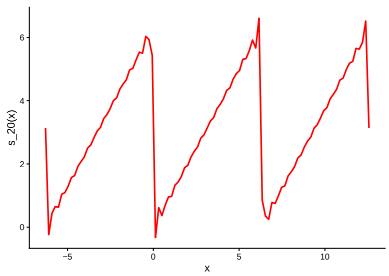
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-t\cos(nt)}{n} + \frac{\sin(nt)}{n^2}\right]_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{0\cdot\cos(0)}{n} - \frac{2\pi\cos(2n\pi)}{n}\right) = -\frac{2}{n}$$

De este modo,

$$f(x) \sim \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$$



Representación de f



Serie de Fourier de f con 20 términos

• Condición de Jordan: Si $x \in [0, 2\pi)$, f es monótona y por tanto este variación acotada en $(x-\delta, x+\delta)$ para cierto $\delta > 0$. Si $x = 0$ ó $x = 2\pi$, f es suma de funciones monótonas luego también es de variación acotada en $(x-\delta, x+\delta)$ para cierto $\delta > 0$. De este modo, la serie de Fourier de f converge $\forall\, x \in \mathbb{R}$, y lo hace al valor:

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}$$

Tenemos que para todo $x \in (0, 2\pi)$ converge a $f(x) = x$, y para $x \in \{0, 2\pi\}$ converge a $\frac{0+2\pi}{2} = \pi$. Estas convergencias pueden extenderse por periodicidad en $\mathbb{R}$.

Por tanto, $\forall\, x \in (0, 2\pi)$ se cumple:

$$x = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n} \overset{x=\frac{\pi}{2}}{\Rightarrow} \frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

• Condición de Dini: Para $x \in [0, 2\pi]$ fijo, consideramos la siguiente función auxiliar con periodo 2π:

$$g(t) := \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2}$$

Para el caso $x \in (0, 2\pi)$, tenemos que $g(t) = \frac{t-t}{2} = 0$. Además, existe $g(0^+) = 0$ y se cumple:

$$\frac{g(t) - g(0^+)}{t} = \frac{0}{t} = 0 \in L_1([0, \delta], \mathbb{R}) \text{ para cierto } \delta > 0$$

Por tanto, la serie de Fourier de f converge a $g(0^+) = x$ para cualquier $x \in (0, 2\pi)$.

Si $x \in \{0, 2\pi\}$, $g(t) = \frac{2\pi+t-t}{2} = \pi$ luego $g(0^+) = \pi$. De este modo,

$$\frac{g(t) - g(0^+)}{t} = \frac{\pi - \pi}{t} = 0 \in L_1([0, \delta], \mathbb{R}) \text{ para cierto } \delta > 0$$

En este caso, la serie de Fourier de f converge a $g(0^+) = \pi$.

Nota: La continuidad no basta para garantizar la convergencia puntual.

4.2.12 Definición de convergencia Cesàro

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Sea $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\sum\limits_{k=1}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ la correspondiente sucesión de sumas parciales. Se dice que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es sumable Cesàro si verifica:

$$\exists \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} s_k = \sigma \in \mathbb{R}$$

En tal caso, diremos que σ es la "suma Cesàro de la serie".

Nota: Sin demostración:

Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge a s; entonces, a_n es sumable Cesàro a $\sigma = s$.

4.2.13 Teorema de Fejèr

Dada una función $f \in L_1([0,2\pi],\mathbb{R})$ con periodo 2π en $\mathbb{R}$. Consideramos la siguiente función:

$$s(x) := \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} \quad \text{en } x \in A := \Big\{x \in [0,2\pi] : s(x) \text{ bien definida}\Big\}$$

Entonces, la serie de Fourier de f converge Cesàro a $s(x)$ $\forall\, x \in A$.

Además, si f es continua en $\mathbb{R}$, las sumas de Fejèr (σ_n) convergen de manera uniforme a $s = f$ en $A = \mathbb{R}$; es decir,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : |\sigma_n(x) - s(x)| < \varepsilon \ \ \forall x \in \mathbb{R} \ \ \forall n \geq n_0$$

Demostración: Sin demostración.

4.2.14 Propiedades de funciones continuas

Sea f una función continua en $\mathbb{R}$ con periodo 2π; entonces,

i) $||s_n - f|| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

ii) Se cumple la identidad de Parseval en $[0,2\pi]$:

$$||f||^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \pi \cdot a_n^2 + \pi \cdot b_n^2$$

iii) Si la serie de Fourier de f converge en x, converge a $f(x)$.

iv) La serie de Fourier es integrable término a término:

$$\int_0^x f(t)\,dt = \frac{a_0}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\,dt$$

Demostración:

i | Al ser f continua, es $L_2([0,2\pi],\mathbb{R})$. Basta aplicar el Teorema de Carleson.

ii | Se tiene al haber usado un sistema ortonormal completo.

iii Como f es continua en $\mathbb{R}$, es $L_1([0,2\pi],\mathbb{R})$. Aplicando el Teorema de Fèjer, las sumas σ_n convergen uniformemente a s, luego

$$\sigma_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} s(x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} = f(x)$$

iv Sea $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

Sea $g(x) = f(x) - \frac{a_0}{2} = f(x) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dt = f(x) - m$

Es claro que g es continua y 2π-periódica en $\mathbb{R}$ por serlo f. La serie de Fourier de g será:

$$g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$$

Donde los a_n, b_n coinciden con los coeficientes de Fourier de la serie de f.

La función $G(x) := \displaystyle\int_0^x g(t)\,dt$ es $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ y 2π-periódica

Su serie de Fourier viene dada por:

$$G(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(nx) + B_n\sin(nx)$$

Veamos la relación que hay entre A_n, B_n con a_n, b_n.

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} G(t)\cos(nt)\,dt = \qquad \text{Integración por partes: } {}^{u=G(t)}_{dv=\cos(nt)}$$

$$= \left[\frac{1}{n\pi}G(t)\sin(nt)\right]_{t=0}^{t=2\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\sin(nt)\,dt = -\frac{1}{n}b_n$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} G(t)\sin(nt)\,dt = \qquad {}^{u=G(t)}_{dv=\sin(nt)}$$

$$= \left[-\frac{1}{n\pi}G(t)\cos(nt)\right]_{t=0}^{t=2\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{n}a_n$$

Por tanto, comparando con F,

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x m\,dt + \int_0^x g(t)\,dt = mx + G(x)$$

Por el Teorema de Fejèr, como g es continua en $\mathbb{R}$ y con periodo 2π, tenemos que las $\sigma_n^g(t)$ convergen uniformemente a $g(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. De este modo, al tener convergencia uniforme podemos intercambiar el límite con la integral:

$$G(x) = \int_0^x g(t)\,dt = \int_0^x \lim_{n\to\infty} \sigma_n^g(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^x \sigma_n^g(t)\,dt$$

Sea $n \in \mathbb{N}$ cualquiera, $\sigma_n^g = \frac{1}{n}\Big(s_1^g + \ldots + s_n^g\Big)$. Por haber escogido g y no f, tenemos que todas las s_k^g tienen su término independiente nulo. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene:

$$\sigma_n^g(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k a_i \cos(ix) + b_i \sin(ix) = \sum_{k=1}^n \alpha_n^{(k)} \cos(kt) + \beta_n^{(k)} \sin(kt)$$

De este modo, para $n \geq k$, tenemos:

$$\alpha_n^{(k)} = \frac{n+1-k}{n} \cdot a_k \xrightarrow{n\to\infty} a_k \qquad \beta^{(k)} = \frac{n+1-k}{n} \cdot b_k \xrightarrow{n\to\infty} b_k$$

Volviendo a la integral de σ_n^g, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^x \sigma_n^g(t) = \sum_{k=1}^n \left[\frac{\alpha_n^{(k)}}{k} \sin(kt) - \frac{\beta_n^{(k)}}{k} \cos(kt)\right]_{t=0}^{t=x} = \sum_{k=1}^n \left[\frac{\alpha_n^{(k)}}{k} \sin(kx) - \frac{\beta_n^{(k)}}{k} \cos(kx) + \frac{b^{(k)}}{k}\right]$$

De este modo, tomando límites:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^x \sigma_n^g(t)\,dt = \sum_{k=1}^\infty \frac{a_k}{k} \sin(kx) - \frac{b_k}{k} \cos(kx) + \frac{b_k}{k}$$

Comparando la expresión de las integrales de f y g llegamos al resultado.

4.2.15 Convergencia ante diferenciabilidad

Sea $f \in L_2([0, 2\pi], \mathbb{R})$ una función con periodo 2π en $\mathbb{R}$. Si f es diferenciable en x_0; entonces, su serie de Fourier converge en x_0 a $f(x_0)$.

Demostración: Sin demostración.

4.2.16 Convergencia ante $\mathcal{C}^2$

Sea $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ una función con periodo 2π. Entonces, la serie de Fourier de f converge uniformemente a $f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Esto a su vez implica que la serie de Fourier es derivable término a término.

Demostración: Sin demostración.