Análisis Matemático III

Javier Ortín Rodenas

Curso 2025-2026

Contenidos

IV Series de Fourier

Recordamos que $L_2(X,K) \equiv \frac{\mathcal{L}_2(X,K)}{\sim}$ es un espacio de Hilbert; donde X es un $K-$espacio vectorial, y $f \sim g \iff f \overset{\mu-a.e.}{=} g$. El producto interior y su norma asociada se definen como:

$$\langle f, g\rangle = \int_X \bar{f} \cdot g \qquad\qquad ||f||_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}$$

Nótese que cuando trabajamos con $\mathbb{C}$ como cuerpo el producto interno tiene linealidad directa en una componente, mientras que tiene linealidad por el conjugado en la otra. Asimismo, el producto interno da lugar a escalares del propio cuerpo sobre el que se define, luego podría dar lugar a valores complejos. Además, el producto interno no conmuta (en general) en $\mathbb{C}$.

La idea de esta unidad es "aproximar" una función $f \in L_2(X,K)$ como "suma" de funciones más elementales. En particular, a partir de ahora, consideraremos $X = I = [0, 2\pi]$, con $K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Además, extenderemos las funciones en este conjunto con periodicidad 2π en $\mathbb{R}$.

§1. Primeros conceptos

4.1.1 Definición de sistema ortonormal

Dado un espacio de Hilbert V, un sistema ortonormal en V es un conjunto $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ que verifica:

$$\langle \varphi_n, \varphi_m\rangle = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

4.1.2 Ejemplos de sistemas ortonormales

i) $K = \mathbb{R}$, $V = L_2([0, 2\pi], \mathbb{R})$. Consideramos el siguiente sistema:

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \qquad \varphi_{2n-1}(t) = \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}} \qquad \varphi_{2n}(t) = \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}}$$

Veamos que es ortonormal:

$$\int_0^{2\pi} \varphi_0^2(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\,dt = 1$$

$$\int_0^{2\pi} \varphi_{2n+1}^2(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(nt)}{\pi}\,dt \overset{u=nt}{=} \frac{1}{n\pi}\int_0^{2n\pi} \frac{1+\cos(2u)}{2} du \overset{v=2u}{=}$$
$$= \frac{1}{4n\pi}\int_0^{4n\pi} 1 + cos(v) = \frac{4n\pi}{4n\pi} + 0 = 1$$

$$\int_0^{2\pi} \varphi_{2n}^2(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(nt)}{\pi}\,dt \overset{u=nt}{=} \frac{1}{n\pi}\int_0^{2n\pi} \frac{1-\cos(2u)}{2} du \overset{v=2u}{=}$$
$$= \frac{1}{4n\pi}\int_0^{4n\pi} 1 - (v) = \frac{4n\pi}{4n\pi} + 0 = 1$$

Por ser funciones con periodo 2π, para $n \in \mathbb{N}$ cualquiera, se cumple:

$$\int_0^{2\pi} \varphi_{2n+1}(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \varphi_{2n}(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \varphi_{2n+1}(t) \cdot \varphi_{2n}(t)\,dt = 0$$

Hemos demostrado que el sistem

ii) Para $K = \mathbb{C}$, $V = L_2([0, 2\pi], \mathbb{C})$, el siguiente sistema es ortonormal:

$$\left\{ \varphi_n(t) = \frac{e^{i\cdot n\cdot t}}{\sqrt{\pi}} \right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

4.1.3 Teorema de óptima aproximación

Sea V un K-espacio pre-Hilbert. Sea $\{\varphi_0, \ldots, \varphi_n\} \subseteq V$ un sistema ortonormal finito en V. Sea $f \in V$. Si W es la clausura $K\langle\varphi_0, \ldots, \varphi_n\rangle$. Entonces, el elemento de W que mejor aproxima f (en cuanto a minimizar la norma de su diferencia) es

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\langle f, \varphi_k \rangle >}_{c_k} \varphi_k$$

Es decir, dado $t_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot \varphi_k \in W$ cualquiera (formado a partir de escalares cualesquiera), se cumple $||f - s_n|| \leq ||f - t_n||$.

Demostración:

Al ser un espacio Pre-Hilbert por hipótesis, tenemos que :

$$||f - t_n||^2 = \langle f - t_n, f - t_n \rangle = \langle f, f \rangle - \langle f, t_n \rangle - \langle t_n, f \rangle + \langle t_n, t_n \rangle =$$

$$= ||f||^2 - \left\langle f, \sum_{k=0}^{n} b_k \varphi_k \right\rangle - \left\langle \sum_{k=0}^{n} b_k \varphi_k, f \right\rangle + \left\langle \sum_{k=0}^{n} b_k \varphi_k, \sum_{k=0}^{n} b_k \varphi_k \right\rangle \underset{\text{ortonormalidad}}{\overset{\text{linealidad}}{=}}$$

$$= ||f||^2 - \sum_{k=0}^{n} b_k \langle f, \varphi_k \rangle - \sum_{k=0}^{n} \bar{b}_k \langle f, \varphi_k \rangle + \sum_{k=0}^{n} \bar{b}_k \cdot b_k = \text{definición de } c_k$$

$$= ||f||^2 + \sum_{k=0}^{n} \left[-b_k c_k - \bar{b}_k c_k + |b_k|^2 \right] = (*)$$

Comparamos ahora con la siguiente expresión:

$$|b_k - c_k|^2 = (b_k - c_k)(\bar{b}_k - \bar{c}_k) = b_k \bar{b_k} - b_k \bar{c}_k - \bar{b}_k c_k + c_k \bar{c}_k = |b_k|^2 + |c_k|^2 - b_k \bar{c}_k - \bar{b}_k c_k$$

Sustituyendo en la igualdad anterior,

$$(*) = ||f||^2 + \sum_{k=0}^{n} |b_k - c_k|^2 - |c_k|^2$$

En particular, para $b_k = c_k$ tenemos $||f - s_n||^2 \leq ||f - t_n||^2$.

Motivados por este resultado, buscamos aproximar f por una "combinación lineal infinita" de funciones de un sistema ortonormal.

4.1.4 Definición de coeficientes de Fourier

Dad una función $f \in L_2([0, 2\pi])$, y un sistema ortonormal $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Se denomina "coeficiente n-ésimo de Fourier de f respecto de $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$" al escalar:

$$c_n := \langle f, \varphi_n \rangle = \int_0^{2\pi} \hat{f}(t) \cdot \varphi_n(t)\, dt$$

Definimos la suma parcial n-ésima de Fourier de f respecto de $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ como:

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot \varphi_k(x)$$

Análogamente, la serie de Fourier de f respecto de $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ viene dada po:

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \varphi_k(x)$$

4.1.5 Unicidad de las Series de Fourier

Sea $f \in L_2(I, K)$. Sea $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema ortonormal. La serie de Fourier de f respecto de $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está bien definida, pues existe un único elemento $s \in L_2(I, K)$ que verifica:

$$||s - s_n|| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Demostración:

Sean p, q in $\mathbb{N}$ cualesquiera. Supongamos sin pérdida de generalidad que $q > p$. Entonces,

$$||s_p - s_q||^2 = \left|\left| \sum_{k=p+1}^{q} s_k \right|\right|^2 = \left\langle \sum_{k=p+1}^{q} \langle f, \varphi_k\rangle\varphi_k, \sum_{k=p+1}^{q} \langle f, \varphi_k\rangle\varphi_k \right\rangle \overset{\text{ortonormalidad}}{=}$$

$$= \sum_{k=p+1}^{q} |\langle f, \varphi_k\rangle|^2 = |a_p - a_q|^2 \qquad \text{donde } a_n = \sum_{k=0}^{n} |\langle f, \varphi_k\rangle|^2$$

Por el Teorema de óptima aproximación, para $n \in \mathbb{N}$ cualquiera tenemos que:

$$||f - s_n||^2 = ||f||^2 - \underbrace{\sum_{k=0}^{n} |\langle f, \varphi_k\rangle|^2}_{a_n} = ||f||^2 - a_n$$

Esto implica que $||f||^2 \geq a_n$. Así, tomando límites en n tenemos que:

$$a := \sum_{k=0}^{\infty} |\langle f, \varphi_k\rangle|^2 \leq ||f||^2$$

Esta es la conocida como Desigualdad de Bessel.

Por tanto, tenemos que $(a_n)_n$ es de Cauchy, luego $(s_n)_n$ ha de serlo también. Al estar además en un espacio de Banach, podemos asegurarnos de que $(s_n)_n$ es convergente a s.

Nota:

Este resultado garantiza la convergencia en norma de las sumas parciales de Fourier a su límite. No tiene por qué darse $f(x) = s(x)$. Cabe preguntarse si esto es a su vez equivalente a $||f - s_n|| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Pasaremos a estudiar escenarios donde puede ocurrir.