

I Teoría de la medida e Integral de Lebesgue

§1. Medida exterior en \mathbb{R}^N

1.1.1 Ejercicio 5

a) Sea $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, demuestra que todo cubrimiento finito de A formado por intervalos abiertos tiene longitud total mayor o igual a 1.

Demostración: Sea $\{I_i\}_{i=1}^n$ un recubrimiento por intervalos abiertos de A , con cada $I_i = (a_i, b_i)$ con $a_i < b_i$. Definimos el siguiente conjunto auxiliar:

$$\mathcal{A} := \{0, 1\} \cup \left([0, 1] \cap \{a_i, b_i : i \in \{1, \dots, n\}\} \right)$$

Este conjunto contiene a los extremos de los I_i que se encuentren entre 0 y 1. Al haber un número finito de intervalos, tenemos que \mathcal{A} es finito, pudiendo ordenarlo como sigue:

$$\mathcal{A} = \{x_j\}_{j=0}^m \quad x_0 = a < x_1 < \dots < x_m = b \quad \text{para cierto } m \in \mathbb{N}$$

Al estar en un caso finito, la unión de las clausuras es la clausura de las uniones. Por contención de las clausuras, se tiene:

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i \Rightarrow \overline{A} = [0, 1] \cap \overline{\mathbb{Q}} = [0, 1] \subseteq \overline{\bigcup_{i=1}^n I_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{I_i}$$

Sea $j \in \{1, \dots, m\}$ cualquiera, tenemos que $x_j \in [0, 1] \subseteq \bigcup_{i=1}^n \overline{I_i}$ luego $\exists k \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x_j \in [a_k, b_k]$. Veamos que $[x_{j-1}, x_j] \subseteq [a_k, b_k]$ también. Ambos conjuntos son cerrados y conexos con intersección no vacía. Por tanto, su intersección ha de ser conexa, cerrada y no vacía (es decir, un intervalo cerrado). Será de la forma $[u, x_j]$ con $u = \min\{a_k, x_{j-1}\}$. De tenerse $u \neq x_{j-1}$, se cumpliría $x_{j-1} < a_k < x_j$, lo que contradice la ordenación establecida para \mathcal{A} .

De este modo, como $v_1(I_i) = v_1(\overline{I_i}) \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$, se cumple:

$$1 = v_1([0, 1]) = \sum_{j=1}^m v_1(x_{j-1}, x_j) \leq \sum_{i=1}^n v_1(\overline{I_i}) = \sum_{i=1}^n v_1(I_i)$$