

# Análisis Matemático III

Javier Ortín Rodenas

Hoja de ejercicios

# Contenidos

<b>I Teoría de la medida e Integral de Lebesgue</b>	<b>3</b>
1. Medida exterior en $\mathbb{R}^N$ . . . . .	3
1.1.1 Ejercicio 5 . . . . .	3
1.1.2 Ejercicio 6 . . . . .	5
2. Conjuntos medibles . . . . .	6
1.2.1 Ejercicio 2 . . . . .	6
1.2.2 Ejercicio 3 . . . . .	7
1.2.3 Ejercicio 5 . . . . .	8
3. Funciones medibles . . . . .	10
1.3.1 Ejercicio 5 . . . . .	10
<b>II Series de Fourier</b>	<b>12</b>
1. Sistemas ortogonales . . . . .	12
2.1.1 Ejercicio 1 . . . . .	12
2.1.2 Ejercicio 2 . . . . .	12

# I Teoría de la medida e Integral de Lebesgue

## §1. Medida exterior en $\mathbb{R}^N$

### 1.1.1 Ejercicio 5

a) Sea  $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ , demuestra que todo cubrimiento finito de  $A$  formado por intervalos abiertos tiene longitud total mayor o igual a 1.

Demostración: Sea  $\{I_i\}_{i=1}^n$  un recubrimiento por intervalos abiertos de  $A$ , con cada  $I_i = (a_i, b_i)$  con  $a_i < b_i$ . Definimos el siguiente conjunto auxiliar:

$$\mathcal{A} := \{0, 1\} \cup \left( [0, 1] \cap \{a_i, b_i : i \in \{1, \dots, n\}\} \right)$$

Este conjunto contiene a los extremos de los  $I_i$  que se encuentren entre 0 y 1. Al haber un número finito de intervalos, tenemos que  $\mathcal{A}$  es finito, pudiendo ordenarlo como sigue:

$$\mathcal{A} = \{x_j\}_{j=0}^m \quad x_0 = a < x_1 < \dots < x_m = b \quad \text{para cierto } m \in \mathbb{N}$$

Al estar en un caso finito, la unión de las clausuras es la clausura de las uniones. Por contención de las clausuras, se tiene:

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i \Rightarrow \overline{A} = [0, 1] \cap \overline{\mathbb{Q}} = [0, 1] \subseteq \overline{\bigcup_{i=1}^n I_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{I_i}$$

Sea  $j \in \{1, \dots, m\}$  cualquiera, tenemos que  $x_j \in [0, 1] \subseteq \bigcup_{i=1}^n \overline{I_i}$  luego  $\exists k \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $x_j \in [a_k, b_k]$ . Veamos que  $[x_{j-1}, x_j] \subseteq [a_k, b_k]$  también. Ambos conjuntos son cerrados y conexos con intersección no vacía. Por tanto, su intersección ha de ser conexa, cerrada y no vacía (es decir, un intervalo cerrado). Será de la forma  $[u, x_j]$  con  $u = \min\{a_k, x_{j-1}\}$ . De tenerse  $u \neq x_{j-1}$ , se cumpliría  $x_{j-1} < a_k < x_j$ , lo que contradice la ordenación establecida para  $\mathcal{A}$ .

De este modo, como  $v_1(I_i) = v_1(\bar{I}_i)$   $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ , se cumple:

$$1 = v_1([0, 1]) = \sum_{j=1}^m v_1(x_{j-1}, x_j) \leq \sum_{i=1}^n v_1(\bar{I}_i) = \sum_{i=1}^n v_1(I_i)$$

b) Dede del apartado anterior que  $A$  no es compacto.

**Demostración:** Veamos que hay un recubrimiento de  $A$  del que no se puede extraer un subrecubrimiento finito. Para ello basta dar un recubrimiento de  $A$  por intervalos abiertos tales que la suma de sus medidas sea menor a 1. Como  $\mathbb{Q}$  es numerable,  $A$  también lo es. Sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una enumeración cualquiera de  $A$ , definimos los siguientes intervalos:

$$I_n = (a_n - \frac{1}{2^{n+2}}, a_n + \frac{1}{2^{n+2}}) \quad \text{luego } A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i \text{ con } \sum_{i=1}^{\infty} v_1(I_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

c) Demuestra que la siguiente aplicación  $m$  definida sobre  $\mathfrak{B}_N$  no es una medida:

$$m(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n v_1(I_i) : \bigcup_{i=1}^n I_i \supseteq A \text{ con cada } I_i \text{ cubo abierto en } \mathbb{R}^N \right\}$$

**Demostración:**

En caso de serlo, para  $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{B}_N$  con  $i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \emptyset$  se cumpliría:

$$m \left( \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(E_i)$$

Todo conjunto unipuntual  $a$  con  $a \in \mathbb{R}^N$  está en  $\mathfrak{B}_N$  pues se puede expresar como un intervalo cerrado degenerado. Por tanto, todo conjunto numerable está también en  $\mathfrak{B}_N$ . Consideramos el conjunto  $A^N \subseteq [0, 1]^N \in \mathfrak{B}_N$ . Razonando como en el apartado anterior, todo cubrimiento finito de  $A^N$  por cubos ha de tener suma de volúmenes mayor o igual a 1, luego  $m(A^N) = 1$ . No obstante, podemos expresar  $A^N$  como unión numerable de conjuntos unipuntuales disjuntos, teniendo cada uno de ellos  $m(\{b_n\}) = 0$  para  $(b_n)_n$  una enumeración de  $A^N$ .

### 1.1.2 Ejercicio 6

Demuestra que existe un conjunto abierto  $O$  en  $\mathbb{R}$  y un  $\varepsilon > 0$  tal que para cualquier recubrimiento finito de  $O$  formado por intervalos abiertos,  $\{J_i\}_{i=1}^m$  se cumple  $\mu(\bigcup_{i=1}^n J_i \setminus O) > \varepsilon$ .

#### Demostración:

Para cada  $n \in \mathbb{N}$  tomamos  $I_n = (n - \frac{1}{3}, n + \frac{1}{3})$ . Consideramos el abierto  $O = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i$ . Sea  $\{J_i\}_{i=1}^m$  un recubrimiento finito de  $O$  por intervalos abiertos. Al ser  $O$  no acotado, tiene que haber cierto  $k \in \{1, \dots, m\}$  tal que  $J_k$  contiene a infinitos intervalos  $I_n$ . Dados dos de estos intervalos consecutivos, la distancia entre el extremo derecho del primero y el extremo izquierdo del segundo viene dada por:

$$\left(n + 1 - \frac{1}{3}\right) - \left(n + \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Por tanto,  $J_k \setminus O$  ha de contener infinitos intervalos disjuntos de longitud  $\frac{1}{3}$  luego tiene medida infinita. Se cumple el resultado para  $\varepsilon > 0$  cualquiera.

## §2. Conjuntos medibles

### 1.2.1 Ejercicio 2

Sea  $A \in \mathfrak{M}_N$  con  $\mu(A) < \infty$ . Sea  $\varepsilon > 0$ , demuestra que existe  $K \subseteq A$  conjunto compacto tal que  $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$ . ¿Se cumple también si  $\mu(A) = \infty$ ?

#### Demostración:

Sea  $A_n = A \cap [-n, n]$ , tenemos que  $(A_n)_n$  es una sucesión creciente de conjuntos medible que tiene como unión el conjunto  $A$ . Por tanto, se tiene

$$\infty > \mu(A)\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \lim_n \mu(A_n)$$

Por tanto, existe cierto  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\mu(A) - \mu(A_{n_0}) = \mu(A \setminus A_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Hemos podido despejar sin indeterminaciones al estar en un caso de medida finita.

Como  $A_{n_0}$  es medible, sabemos que existe un conjunto cerrado  $C \subseteq A_{n_0}$  tal que  $\mu(A_{n_0} \setminus C) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Al ser  $A_{n_0}$  acotado y estar  $C$  contenido en él, tenemos que  $C$  es compacto. Por todo lo anterior:

$$\mu(A \setminus C) = \mu(A) - \mu(C) = \mu(A) - \mu(A_{n_0}) + \mu(A_{n_0}) - \mu(C) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

En cambio, para el caso infinito, no tiene por qué cumplirse. Sea  $A = \mathbb{R}^N$ , en la topología usual, los conjuntos compactos son aquellos cerrados y acotados. En espacios métricos, un conjunto es acotado si existe una bola de radio finito que lo contiene. Por el Teorema de Hausdorff, podemos considerar la norma  $\|\cdot\|_1$ , que tiene como bolas a los cubos. Por tanto, todo compacto  $K$  va a estar contenido en una bola de radio finito; es decir, en un cubo de volumen (medida) finito. Despejando:

$$\mu(\mathbb{R}^N \setminus K) = \mu(\mathbb{R}^N) - \mu(K) = \infty - \mu(K) = \infty > \varepsilon \quad \forall \varepsilon \in (0, +\infty)$$

### 1.2.2 Ejercicio 3

Sea  $A \in \mathfrak{M}_N$ , ¿son ciertas las siguientes implicaciones?

- i)  $\text{A}^{\circ} \neq \emptyset \Rightarrow \mu(A) = 0$ .
- ii)  $\text{A}^{\circ} = \emptyset \Rightarrow \mu(A) = 0$ .
- iii)  $A$  abierto  $\Rightarrow \mu(\text{Fr. } A) = 0$ .
- iv)  $A$  no numerables  $\Rightarrow \mu(A) > 0$ .

#### Demostración:

- i) Falso: basta considerar  $\mathbb{R}^N$ .
- ii) Falso: basta considerar  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  (o cualquier variante  $N$ -dimensional).
- iii) Utilizaremos una variación del conjunto de Cantor. En cada iteración “eliminamos” la parte central de longitud  $\frac{1}{4^n}$  de cada intervalo. Veamos ejemplos de algunas iteraciones:

$$[0, 1]$$

$$\left[0, \frac{3}{8}\right] \quad \left[\frac{5}{8}, 1\right]$$

$$\left[0, \frac{1}{8}\right] \quad \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right] \quad \left[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right] \quad \left[\frac{7}{8}, 1\right]$$

En la  $n$ -ésima iteración eliminamos  $2^{n-1}$  intervalos cada uno de longitud  $\frac{1}{4^n}$ . Como los intervalos quitados son disjuntos, podemos calcular su medida total como la suma de las longitudes quitadas. Sea  $L_n$  la longitud quitada en la  $n$ -ésima iteración,

$$L_n = 2^{n-1} \cdot \frac{1}{4^n} = \frac{1}{2^n + 1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} L_n = \frac{1}{2}$$

Considerando  $O = (0, 1) \setminus C$  para  $C$  la intersección de todas las iteraciones, tenemos que la frontera de  $O$  es  $C$ , que tiene como medida  $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ .

iv) Falso: basta considerar  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

### 1.2.3 Ejercicio 5

Demuestra que para cada  $A \in \mathfrak{M}_1$  con  $\mu(A) < \infty$  y cada  $\varepsilon > 0$  existe una colección finita de intervalos disjuntos y abiertos  $\{I_i\}_{i=1}^m$  tales que:

$$\mu \left( A \Delta \bigcup_{i=1}^m I_i \right) < \varepsilon \quad \text{con } A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

#### Demostración:

Por ser  $A$  un conjunto medible, es de la forma  $A = (\bigcap_{i \in \mathbb{N}} G_i) \cup M$  para  $(G_i)_{i \in \mathbb{N}}$  una sucesión decreciente de abiertos de  $\mathbb{R}^N$  y  $M$  un conjunto de medida nula.

Como  $M$  no interfiere en la medida, tenemos que  $\mu(A) = \lim_n \mu(G_n) < \infty$ . Por definición de límite,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\mu(G_{n_0} \setminus A) = \mu(G_{n_0}) - \mu(A) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Hemos podido pasar a la medida de la diferencia de conjuntos al estar en el caso de medida finita. Por simplicidad, denotaremos  $G = G_{n_0}$ .

Al ser  $G$  abierto, podemos expresarlo como unión numerable de bolas abiertas  $\{J_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$  tomamos  $O_n = \bigcup_{i=1}^n J_i$ . Tenemos que  $(O_n)_n$  es una sucesión de conjuntos crecientes cuya unión es igual a  $G$ . Razonando como en el caso anterior:

$$\mu(G) = \mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} O_i) = \lim_n \mu(O_n) \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N} : \mu(G \setminus O_{n_1}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Tomamos como  $\{I_i\}_{i=1}^{n_1}$  las componentes conexas de  $\{J_i\}_{i=1}^{n_1}$ , que son disjuntas e intervalos (en  $\mathbb{R}$  los conjuntos conexos son precisamente los intervalos). Además, hay un número finito de ellas (en el peor de los casos, cada  $J_i$  sería una componente

conexa). De este modo, aplicando la monotonía de la medida:

$$\mu \left( A \setminus \bigcup_{i=1}^n I_i \right) \leq \mu \left( G \setminus \bigcup_{i=1}^n I_i \right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\mu \left( \bigcup_{i=1}^n I_i \setminus A \right) \leq \mu (G \setminus A) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sumando se llega al resultado.

## §3. Funciones medibles

### 1.3.1 Ejercicio 5

Sea  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  uniformemente continua y acotada, demuestra que la siguiente función es medible:

$$\varphi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \quad t \mapsto \varphi(t) = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f(x + t) - f(x)|$$

#### Demostración:

Por ser  $f$  acotada, tenemos que  $\exists M \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq M \forall x \in \mathbb{R}^N$ . De este modo, sean  $x, y \in \mathbb{R}^N$ , tenemos:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| \leq M + M = 2M$$

Por tanto, concluimos que  $\varphi$  es también acotada. Veamos que es medible por la definición.

Sea  $K := \sup_{t \in \mathbb{R}^N} \varphi(t)$ , como  $\varphi$  solo toma valores no negativos tenemos que:

$$\varphi^{-1}((-\infty, 0]) = \emptyset \in \mathfrak{M}_N \quad \varphi^{-1}((-\infty, K]) = \mathbb{R}^N \in \mathfrak{M}_N$$

Fijando ahora  $\varepsilon \in (0, K)$  cualquiera, veamos que  $\varphi((-\infty, \varepsilon])$  es medible. Al ser  $f$  uniformemente continua por hipótesis, tenemos que para el  $\varepsilon$  fijado existe un  $\delta > 0$  tal que:

$$||x - y|| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$$

Podemos reescribir  $y = x + t$  para  $t = y - x \in \mathbb{R}^N$ . De este modo; sea  $t \in \mathbb{R}^N$ , se tiene:

$$||t|| < \delta \Rightarrow |f(x + t) - f(x)| < \varepsilon$$

Se cumple la condición para todo  $x$  de  $\mathbb{R}^N$ . Al tomar supremos, la desigualdad

pasa a ser no estricta, y el término mayorado por  $\varepsilon$  se corresponde con  $\varphi(t)$  por definición:

$$||t|| < \delta \Rightarrow \varphi(t) = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f(x + t) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Así, sea  $(t_n)_n$  una sucesión que tiende al origen, ha de "atravesar" todos las bolas de radio  $\delta$  asociado a valores de  $\varepsilon$  arbitrariamente pequeños. Por tanto, podemos concluir que  $\varphi$  es continua en el origen.

Sean  $s, t \in \mathbb{R}^N$  cualesquiera, se cumple:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f(x + t) - f(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f(x + t) - f(x + s)| + |f(x + s) - f(x)| \leq \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f(x + t) - f(x + s)| + \sup_{y \in \mathbb{R}^N} |f(y + s) - f(y)| \stackrel{z=x+s}{=} \sup_{z \in \mathbb{R}^N} |f(z + (t - s)) - f(z)| + \varphi(s) \end{aligned}$$

Despejando, obtenemos  $0 \leq \varphi(t) - \varphi(s) \leq \varphi(t - s) \xrightarrow{s \rightarrow t} \varphi(0) = 0$ .

Por todo lo anterior, concluimos que  $\varphi$  es continua y acotada, luego es medible en  $\mathfrak{B}_N$  y en  $\mathfrak{M}_N$

# II Series de Fourier

## §1. Sistemas ortogonales

### 2.1.1 Ejercicio 1

Una colección finita de funciones  $(\varphi_k)_{k=0}^n$  (todas con dominio  $I$ ) se dice *linealmente independiente* si

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k \varphi_k \equiv 0 \iff \lambda_k = 0 \text{ para todo } 0 \leq k \leq n.$$

Una colección de funciones  $(\varphi_k)_{k=0}^\infty$  se dice *linealmente independiente* si todo subconjunto finito suyo es linealmente independiente. Prueba que todo sistema ortonormal sobre  $I$  es linealmente independiente.

#### Demostración:

Sea  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un sistema ortonormal con dominio  $I$ . Sea  $A := \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{N}$  finito. Supongamos que se cumple  $\sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_{a_k} \equiv 0$ .

Fijado  $j \in \{q, \dots, n\}$  cualquiera, tenemos:

$$\langle \varphi_{a_j}, 0 \rangle = 0 = \left\langle \varphi_{a_j}, \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_{a_k} \right\rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle \varphi_{a_j}, \varphi_{a_k} \rangle = \lambda_j$$

La última igualdad se deduce como aplicación directa de la ortonormalidad. Como el  $j$  escogido fue arbitrario, concluimos que el sistema es linealmente independiente.

### 2.1.2 Ejercicio 2

Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt. Sea  $(f_n)_{n=0}^\infty$  un sistema de funciones linealmente independientes en  $L^2(I)$ . Sea la sucesión de funciones dada

recursivamente por

$$g_0 := f_0, \quad g_{n+1} := f_{n+1} - \sum_{k=0}^n \frac{\langle f_{n+1}, f_k \rangle}{\langle g_k, g_k \rangle} g_k.$$

Demuestra que  $(g_n)_{n=0}^\infty$  es un sistema ortogonal y que

$$\text{span}\{f_k\}_{k=0}^n = \text{span}\{g_k\}_{k=0}^n$$

para todo  $n$ .

**Demostración:** Aplicaremos inducción.

En primer lugar, probaremos que  $\{g_k\}_{k=0}^n$  es ortogonal para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Comprobemos el caso base:

$$g_1 = f_1 - \frac{\langle f_1, f_0 \rangle}{\langle g_0, g_0 \rangle} g_0 = f_1 - \frac{\langle f_1, f_0 \rangle}{\langle f_0, f_0 \rangle} f_0$$

Aplicando la linealidad del producto interno,

$$\langle g_1, g_0 \rangle = \langle f_1, f_0 \rangle - \frac{\langle f_1, f_0 \rangle}{\langle f_0, f_0 \rangle} \cdot \langle f_0, f_0 \rangle = 0$$

Supongamos que la hipótesis es cierta para  $n$  y comprobemos que se cumple para  $n + 1$ . Sea  $j \in \{1, \dots, n\}$ , aplicando de nuevo la linealidad,

$$\begin{aligned} g_{n+1} &= f_{n+1} - \sum_{k=0}^n \frac{\langle f_{n+1}, g_k \rangle}{\langle g_k, g_k \rangle} g_k \Rightarrow \langle g_{n+1}, g_j \rangle = \langle f_{n+1}, g_j \rangle - \sum_{k=0}^n \frac{\langle f_{n+1}, g_k \rangle}{\langle g_k, g_k \rangle} \cdot \langle g_k, g_j \rangle = \\ &= \langle f_{n+1}, g_j \rangle - \frac{\langle f_{n+1}, g_j \rangle}{\langle g_j, g_j \rangle} \cdot \langle g_j, g_j \rangle = 0 \end{aligned}$$

Tenemos la ortogonalidad. Queda ver que se respetan las clausuras.