TG II

Javier Ortín Rodenas
Bruno Martín Rivera
Jorge Gota Ortín
Alejandra Sánchez Mayo

1 Enunciado:

Un toro es la superficie de revolución generada por una circunferencia al girar alrededor de un eje situado en su mismo plano y que no la corta.
Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $0 < a < b$.
Consideremos el toro cuya curva generatriz es la circunferencia de centro en el punto $(a, 0, 0)$ y radio b situada en el plano $y = 0$. Dicha circunferencia gira alrededor del eje z.

(i) Usando como parámetros $u \in (0, 2\pi)$, ángulo de giro del punto inicial respecto del eje x, y $v \in (0, 2\pi)$, ángulo de giro de dicho punto respecto del eje z, obtener una parametrización del toro, como superficie de revolución, de la forma

$$\begin{aligned} X : U = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

(ii) Con ayuda de dicha parametrización, obtener una ecuación cartesiana de la superficie generada, es decir, de modo que el toro se pueda expresar en la forma

$$\mathbb{T} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0 \right\}$$

donde F es una función que hay que determinar.

(iii) Determinar si X es una carta del toro de clase $C^k (k \geq 1)$.

(iv) Determinar el plano tangente al toro y el vector unitario normal en cada punto regular $p = X(q),\ q \in U$ del soporte $X(U)$

2 Solución

2.1 Primer apartado

Para parametrizar el toro, podemos centrarnos primero en parametrizar la curva generatriz para posteriormente modelar el proceso de revolución. En este caso, la curva generatriz es una circunferencia de centro $(a, 0, 0)$ y radio b contenida en el plano $y = 0$.