I Espacios métricos

En próximas secciones estudiaremos sistemas de distancia que generalizan la distancia habitual en la recta real y en los espacios euclídeos. Un espacio métrico es un conjunto junto con una función que mide la distancia entre pares de puntos y satisface ciertas propiedades básicas (positividad, simetría y desigualdad triangular). A partir de una métrica se define una estructura topológica mediante las bolas abiertas, y se estudian conceptos de convergencia, continuidad, completitud, etc.

1. Primeras definiciones

Definición 1.1 (Métrica). *Sea X un conjunto. Una aplicación $d : X \times X \to \mathbb{R}$ se llama* métrica *en X si para todo $x, y, z \in X$ se cumplen:*

(D.1) $d(x, y) \geq 0$ *(positividad).*

(D.2) $d(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$.

(D.3) $d(x, y) = d(y, x)$ *(simetría).*

(D.4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(desigualdad triangular).*

El par (X, d) se llama espacio métrico.

Definición 1.2. *Si (X, d) es un espacio métrico y $Y \subset X$ es un subconjunto, al restringir d a $Y \times Y$ obtenemos una métrica en Y, llamada la métrica inducida o submétrica.*

Definición 1.3. *Ejemplos de métricas:*

1. *En $\mathbb{R}$, la métrica usual $d(x, y) = |x - y|$.*
2. *En $\mathbb{R}^n$, la métrica euclídea $d(x, y) = \|x - y\|_2$.*
3. *Métrica discreta: $d(x, y) = 0$ si $x = y$, $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$.*
4. *Métricas derivadas de normas en espacios vectoriales (p. ej. ℓ^p-normas y sus métricas asociadas).*

1.1. Bolas, abiertos y cerrados

Definición 1.4. *Sea (X, d) un espacio métrico. Para $x \in X$ y $r > 0$ se define la* bola abierta *de centro x y radio r como*

$$B(x, r) = \{y \in X : \ d(x, y) < r\},$$

y la bola cerrada

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in X : \ d(x, y) \leq r\}.$$

Definición 1.5. *Un conjunto $U \subset X$ es* abierto *si para todo $x \in U$ existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset U$. Un conjunto $F \subset X$ es* cerrado *si su complemento $X \setminus F$ es abierto.*

Proposición 1.6. *En un espacio métrico (X, d):*

1. *Toda bola abierta $B(x, r)$ es un conjunto abierto.*
2. *Una unión arbitraria de conjuntos abiertos es abierta.*
3. *Una intersección finita de conjuntos abiertos es abierta.*

Observación 1.7. *A partir de las bolas abiertas se obtiene una* topología *en X, denominada la topología inducida por la métrica d. Denotaremos por τ_d la colección de conjuntos abiertos respecto a d.*

Definición 1.8. *Dado $A \subset X$, la* clausura *de A (denotada $\overline{A}$) es la intersección de todos los cerrados que contienen A. El* interior *de A (denotado $\operatorname{int} A$) es la unión de todos los abiertos contenidos en A. El* frontera *o límite ∂A se define como $\partial A = \overline{A} \setminus \operatorname{int} A$.*

2. Estructura topológica de un espacio métrico

Definición 2.1. *La topología τ_d inducida por la métrica d es*

$$\tau_d = \{U \subset X : \ \forall x \in U \ \exists r > 0 \ \text{tal que } B(x, r) \subset U\}.$$

Proposición 2.2. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces:*

1. *(X, τ_d) es un espacio topológico.*
2. *(X, τ_d) es Hausdorff: dados $x \neq y$ existen bolas disjuntas que los separan.*
3. *(X, τ_d) es de primera numerabilidad: para cada $x \in X$ la colección $\{B(x, 1/n) : n \in \mathbb{N}\}$ es una base local numerable en x.*

Observación 2.3. *La unicidad del límite de sucesiones es consecuencia de la propiedad Hausdorff: si $x_n \to x$ y $x_n \to y$ entonces $x = y$.*

3. Convergencia, continuidad y Cauchy

Definición 3.1. *Una sucesión $(x_n) \subset X$ converge a $x \in X$ si $d(x_n, x) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Denotamos $x_n \to x$.*

Definición 3.2. *Una función $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ entre espacios métricos es* continua *en $x \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d_X(x, y) < \delta$ implica $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Equivalente: la preimagen de todo abierto es abierto.*

Definición 3.3 (Sucesión de Cauchy y completitud). *Una sucesión (x_n) en (X, d) es de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que $m, n \geq N$ implica $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. El espacio métrico X es* completo *si toda sucesión de Cauchy converge en X.*

Proposición 3.4. *En un espacio métrico, toda sucesión convergente es de Cauchy. La recíproca no siempre es cierta; cuando sí lo es decimos que el espacio es completo.*

Proposición 3.5. *Sea Y un subespacio de X. Si X es completo y Y es cerrado en X, entonces Y es completo con la métrica inducida. Reversamente, todo subespacio completo de X es cerrado en X.*

4. Equivalencias de métricas

Definición 4.1. *Se dice que dos métricas d y d' en el mismo conjunto X son* topológicamente equivalentes *si inducen la misma topología, es decir $\tau_d = \tau_{d'}$.*

Definición 4.2. *Las métricas d y d' son* fuertemente equivalentes *(o* bi-Lipschitz equivalentes*) si existen constantes positivas $a, b > 0$ tales que para todo $x, y \in X$*

$$a\, d(x, y) \leq d'(x, y) \leq b\, d(x, y).$$

En tal caso inducen la misma topología y conservan propiedades métricas más rígidas.

5. Espacios métricos acotados y normalizaciones

Definición 5.1. *Un espacio métrico (X, d) es* acotado *si existe $M > 0$ tal que $d(x, y) \leq M$ para todo $x, y \in X$. Dada una métrica d, se puede definir una métrica equivalente acotada por ejemplo*

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)},$$

que induce la misma topología que d.

6. Observaciones finales

Las nociones básicas introducidas: bolas, abiertos, clausuras, convergencia, continuidad, completitud y equivalencia de métricas conforman la base del estudio de espacios métricos. A partir de aquí se desarrollan conceptos más avanzados como compacidad, completación, espacios de funciones con métricas inducidas por normas, y aplicaciones en análisis y geometría.