Análisis Matemático III

Javier Ortín Rodenas

Hoja de ejercicios

Contenidos

I Teoría de la medida e Integral de Lebesgue

§1. Medida exterior en $\mathbb{R}^N$

1.1.1 Ejercicio 5

a) Sea $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$, demuestra que todo cubrimiento finito de A formado por intervalos abiertos tiene longitud total mayor o igual a 1.

Demostración: Sea $\{I_i\}_{i=1}^n$ un recubrimiento por intervalos abiertos de A, con cada $I_i = (a_i, b_i)$ con $a_i < b_i$. Definimos el siguiente conjunto auxiliar:

$$\mathcal{A} := \{0,1\} \cup \Big([0,1] \cap \big\{a_i, b_i : i \in \{1,\dots,n\}\big\}\Big)$$

Este conjunto contiene a los extremos de los I_i que se encuentren entre 0 y 1. Al haber un número finito de intervalos, tenemos que $\mathcal{A}$ es finito, pudiendo ordenarlo como sigue:

$$\mathcal{A} = \{x_j\}_{j=0}^m \qquad x_0 = a < x_1 < \ldots < x_m = b \qquad \text{para cierto } m \in \mathbb{N}$$

Al estar en un caso finito, la unión de las clausuras es la clausura de las uniones. Por contención de las clausuras, se tiene:

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i \Rightarrow \overline{A} = [0,1] \cap \overline{\mathbb{Q}} = [0,1] \subseteq \overline{\bigcup_{i=1}^n I_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{I_i}$$

Sea $j \in \{1,\dots,m\}$ cualquiera, tenemos que $x_j \in [0,1] \subseteq \bigcup_{i=1}^n \overline{I_i}$ luego $\exists k \in \{1,\dots,n\}$ tal que $x_j \in [a_k, b_k]$. Veamos que $[x_{j-1}, x_j] \subseteq [a_k, b_k]$ también. Ambos conjuntos son cerrados y conexos con intersección no vacía. Por tanto, su intersección ha de ser conexa, cerrada y no vacía (es decir, un intervalo cerrado). Será de la forma $[u, x_j]$ con $u = \min\{a_k, x_{j-1}\}$. De tenerse $u \neq x_{j-1}$, se cumpliría $x_{j-1} < a_k < x_j$, lo que contradice la ordenación establecida para $\mathcal{A}$.

De este modo, como $v_1(I_i) = v_1(\overline{I_i})\ \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$, se cumple:

$$1 = v_1([0,1]) = \sum_{j=1}^{m} v_1(x_{j-1}, x_j) \leq \sum_{i=1}^{n} v_1(\overline{I_i}) = \sum_{i=1}^{n} v_1(I_i)$$

b) Deduce del apartado anterior que A no es compacto.

<u>Demostración:</u> Veamos que hay un recubrimiento de A del que no se puede extraer un subrecubrimiento finito. Para ello basta dar un recubrimiento de A por intervalos abiertos tales que la suma de sus medidas sea menor a 1. Como $\mathbb{Q}$ es numerable, A también lo es. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una enumeración cualquiera de A, definimos los siguientes intervalos:

$$I_n = (a_n - \frac{1}{2^{n+2}}, a_n + \frac{1}{2^{n+2}}) \quad \text{luego } A \subseteq \underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} I_i \text{ con } \sum_{i=1}^{\infty} v_1(I_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

c) Demuestra que la siguiente aplicación m definida sobre $\mathfrak{B}_N$ no es una medida:

$$m(A) = \inf \left\{ \sum i = 1^n v(I_i) : \overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} I_i \supseteq A \text{ con cada } I_i \text{ cubo abierto en} \mathbb{R}^N \right\}$$

<u>Demostración:</u>
En caso de serlo, para $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{B}_N$ con $i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \varnothing$ se cumpliría:

$$m\left(\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} E_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(E_i)$$

Todo conjunto unipuntual a con $a \in \mathbb{R}^N$ está en $\mathfrak{B}_N$ pues se puede expresar como un intervalo cerrado degenerado. Por tando, todo conjunto numerable está también en $\mathfrak{B}_N$. Consideramos el conjunto $A^N \subseteq [0,1]^N \in \mathfrak{B}_N$. Razonando como en el apartado anterior, todo cubrimiento finito de A^N por cubos ha de tener suma de volúmenes mayor o igual a 1, luego $m(A^N) = 1$. No obstante, podemos expresar A^N como unión numerable de conjuntos unipuntuales disjuntos, teniendo cada uno de ellos $m(\{b_n\}) = 0$ para $(b_n)_n$ una enumeración de A^N.

1.1.2 Ejercicio 6

Demuestra que existe un conjunto abierto O en $\mathbb{R}$ y un $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier recubrimiento finito de O formado por intervalos abiertos, $\{J_i\}_{i=1}^m$ se cumple $\mu(\bigcup\limits_{i=1}^{n} J_i \setminus O) > \varepsilon$.

<u>**Demostración:**</u>

Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos $I_n = (n - \frac{1}{3}, n + \frac{1}{3})$. Consideramos el abierto $O = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} I_i$. Sea $\{J_i\}_{i=1}^m$ un recubrimiento finito de O por intervalos abiertos. Al ser O no acotado, tiene que haber cierto $k \in \{1, \dots, m\}$ tal que J_k contiene a infinitos intervalos I_n. Dados dos de estos intervalos consecutivos, la distancia entre el extremo derecho del primero y el extremo izquierdo del segundo viene dada por:

$$\left(n + 1 - \frac{1}{3}\right) - \left(n + \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Por tanto, $J_k \setminus O$ ha de contener infinitos intervalos disjuntos de longitud $\frac{1}{3}$ luego tiene medida infinita. Se cumple el resultado para $\varepsilon > 0$ cualquiera.

§2. Conjuntos medibles

1.2.1 Ejercicio 2

Sea $A \in \mathfrak{M}_N$ con $\mu(A) < \infty$. Sea $\varepsilon > 0$, demuestra que existe $K \subseteq A$ conjunto compacto tal que $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$. ¿Se cumple también si $\mu(A) = \infty$?
<u>**Demostración:**</u>

Sea $A_n = A \cap [-n, n]$, tenemos que $(A_n)_n$ es una sucesión creciente de conjuntos medible que tiene como unión el conjunto A. Por tanto, se tiene

$$\infty > \mu(A)\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \lim_n \mu(A_n)$$

Por tanto, existe cierto $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(A) - \mu(A_{n_0}) = \mu(A \setminus A_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Hemos podido despejar sin indeterminaciones al estar en un caso de medida finita.

Como A_{n_0} es medible, sabemos que existe un conjunto cerrado $C \subseteq A_{n_0}$ tal que $\mu(A_{n_0} \setminus C) < \frac{\varepsilon}{2}$. Al ser A_{n_0} acotado y estar C contenido en él, tenemos que C es compacto. Por todo lo anterior:

$$\mu(A \setminus C) = \mu(A) - \mu(C) = \mu(A) - \mu(A_{n_0}) + \mu(A_{n_0}) - \mu(C) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

En cambio, para el caso infinito, no tiene por qué cumplirse. Sea $A = R^N$, en la topología usual, los conjuntos compactos son aquellos cerrados y acotados. En espacios métricos, un conjunto es acotado sii existe una bola de radio finito que lo contiene. Por el Teorema de Hausdorff, podemos considerar la norma $|| \cdot ||_1$, que tiene como bolas a los cubos. Por tanto, todo compacto K va a estar contenido en una bola de radio finito; es decir, en un cubo de volumen (medida) finito. Despejando:

$$\mu(\mathbb{R}^N \setminus K) = \mu(\mathbb{R}^N) - \mu(K) = \infty - \mu(K) = \infty > \varepsilon \ \ \forall \varepsilon \in (0, +\infty)$$

1.2.2 Ejercicio 3

Sea $A \in \mathfrak{M}_N$, ¿son ciertas las siguientes implicaciones?

i) $\mathring{A} \neq \varnothing \Rightarrow \mu(A) = 0$.

ii) $\mathring{A} = \varnothing \Rightarrow \mu(A) = 0$.

iii) A abierto $\Rightarrow \mu(Fr.\, A) = 0$.

iv) A no numerables $\Rightarrow \mu(A) > 0$.

Demostración:
i) Falso: basta considerar $\mathbb{R}^N$.

ii) Falso: basta considerar $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (o cualquier variante N-dimensional).

iii) Utilizaremos una variación del conjunto de Cantor. En cada iteración "eliminamos" la parte central de longitud $\frac{1}{4^n}$ de cada intervalo. Veamos ejemplos de algunas iteraciones:

$$\left[0, 1\right]$$

$$\left[0, \frac{3}{8}\right] \qquad \left[\frac{5}{8}, 1\right]$$

$$\left[0, \frac{1}{8}\right] \qquad \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right] \qquad \left[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right] \qquad \left[\frac{7}{8}, 1\right]$$

En la n-ésima iteración eliminamos 2^{n-1} intervalos cada uno de longitud $\frac{1}{4^n}$. Como los intervalos quitados son disjuntos, podemos calcular su medida total como la suma de las longitudes quitadas. Sea L_n la longitud quitada en la n-ésima iteración,

$$L_n = 2^{n-1} \cdot \frac{1}{4^n} = \frac{1}{2^n + 1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} L_n = \frac{1}{2}$$

Considerando $O = (0,1)\backslash C$ para C la intersección de todas las iteraciones, tenemos que la frontera de O es C, que tiene como medida $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

iv) Falso: basta considerar $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1.2.3 Ejercicio 5

Demuestra que para cada $A \in \mathfrak{M}_1$ con $\mu(A) < \infty$ y cada $\varepsilon > 0$ existe una colección finita de intervalos disjuntos y abiertos $\{I_i\}_{i=1}^m$ tales que:

$$\mu\left(A \Delta \bigcup_{i=1}^{m} I_i\right) < \varepsilon \qquad \text{con } A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Demostración:

Por ser A un conjunto medible, es de la forma $A = (\bigcap_{i\in\mathbb{N}} G_i) \cup M$ para $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de abiertos de $\mathbb{R}^N$ y M un conjunto de medida nula.

Como M no interfiere en la medida, tenemos que $\mu(A) = \lim_n \mu(G_n) < \infty$. Por definición de límite, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(G_{n_0} \setminus A) = \mu(G_{n_0}) - \mu(A) < \frac{\varepsilon}{2}$. Hemos podido pasar a la medida de la diferencia de conjuntos al estar en el caso de medida finita. Por simplicidad, denotaremos $G = G_{n_0}$.

Al ser G abierto, podemos expresarlo como unión numerable de bolas abiertas $\{J_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos $O_n = \bigcup_{i=1}^{n} J_i$. Tenemos que $(O_n)_n$ es una sucesión de conjuntos crecientes cuya unión es igual a G. Razonando como en el caso anterior:

$$\mu(G) = \mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} O_i) = \lim_n \mu(O_n) \Rightarrow \exists\, n_1 \in \mathbb{N} : \mu(G \setminus O_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Tomamos como $\{I_i\}_{i=1}^n$ las componentes conexas de $\{J_i\}_{i=1}^{n_1}$, que son disjuntas e intervalos (en $\mathbb{R}$ los conjuntos conexos son precisamente los intervalos). Además, hay un número finito de ellas (en el peor de los casos, cada J_i sería una componente conexa). De este modo, aplicando la monotonía de la medida:

$$\mu\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} I_i\right) \leq \mu\left(G \setminus \bigcup_{i=1}^{n} I_i\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} I_i \setminus A\right) \leq \mu\left(G \setminus A\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sumando se llega al resultado.

§3. Funciones medibles

1.3.1 Ejercicio 5

Sea $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ uniformemente continua y acotada, demuestra que la siguiente función es medible:

$$\varphi : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad t \longmapsto \varphi(t) = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |f(x+t) - f(x)|$$

<u>**Demostración:**</u>

Por ser f acotada, tenemos que $\exists\, M \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq M \forall x \in \mathbb{R}^N$. De este modo, sean $x, y \in \mathbb{R}^N$, tenemos:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| \leq M + M = 2M$$

Por tanto, concluimos que φ es también acotada. Veamos que es medible por la definición.

Sea $K := \sup_{t\in\mathbb{R}^N} \varphi(t)$, como φ solo toma valores no negativos tenemos que:

$$\varphi^-1\Big((-\infty, 0]\Big) = \varnothing \in \mathfrak{M}_N \qquad\qquad \varphi^-1\Big((-\infty, K]\Big) = \mathbb{R}^N \in \mathfrak{M}_N$$

Fijando ahora $\varepsilon \in (0, K)$ cualquiera, veamos que $\varphi\Big((-\infty, \varepsilon]\Big)$ es medible. Al ser f uniformemente continua por hipótesis, tenemos que para el ε fijado existe un $\delta > 0$ tal que:

$$||x - y|| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$$

Podemos reescribir $y = x + t$ para $t = y - x \in \mathbb{R}^N$. De este modo; sea $t \in \mathbb{R}^N$, se tiene:

$$||t|| < \delta \Rightarrow |f(x+t) - f(x)| < \varepsilon$$

Se cumple la condición para todo x de $\mathbb{R}^N$. Al tomar supremos, la desigualdad pasa a ser no estricta, y el término mayorado por ε se corresponde con $\varphi(t)$ por definición:

$$||t|| < \delta \Rightarrow \varphi(t) = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |f(x+t) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Así, sea $(t_n)_n$ una sucesión que tiende al origen, ha de "atravesar" todos las bolas de radio δ asociado a valores de ε arbitrariamente pequeños. Por tanto, podemos concluir que ϕ es continua en el origen.

Sean $s, t \in \mathbb{R}^N$ cualesquiera, se cumple:

$$\begin{aligned}\varphi(t) = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |f(x+t) - f(x)| &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |f(x+t) - f(x+s)| + |f(x+s) - f(x)| \leq \\ \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |f(x+t) - f(x+s)| + \sup_{y\in\mathbb{R}^N} |f(y+s) - f(y)| &\overset{z=x+s}{=} \sup_{z\in\mathbb{R}^N} |f\big(z + (t-s)\big) - f(z)| + \varphi(s)\end{aligned}$$

Despejando, obtenemos $0 \leq \varphi(t) - \varphi(s) \leq \varphi(t-s) \xrightarrow{s\to t} \varphi(0) = 0$.

Por todo lo anterior, concluimos que φ es continua y acotada, luego es medible en $\mathfrak{B}_N$ y en $\mathfrak{M}_N$

II Series de Fourier

§1. Sistemas ortogonales

2.1.1 Ejercicio 1

Una colección finita de funciones $(\varphi_k)_{k=0}^n$ (todas con dominio I) se dice *linealmente independiente* si

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \varphi_k \equiv 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda_k = 0 \text{ para todo } 0 \leq k \leq n.$$

Una colección de funciones $(\varphi_k)_{k=0}^\infty$ se dice *linealmente independiente* si todo subconjunto finito suyo es linealmente independiente. Prueba que todo sistema ortonormal sobre I es linealmente independiente.

<u>**Demostración:**</u>

Sea $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema ortonormal con dominio I. Sea $A := \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq \mathbb{N}$ finito. Supongamos que se cumple $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_{a_k} \equiv 0$.

Fijado $j \in \{q, \ldots, n\}$ cualquiera, tenemos:

$$\langle \varphi_{a_j}, 0 \rangle = 0 = \left\langle \varphi_{a_j}, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_{a_k} \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle \varphi_{a_j}, \varphi_{a_k} \rangle = \lambda_j$$

La última igualdad se deduce como aplicación directa de la ortonormalidad. Como el j escogido fue arbitrario, concluimos que el sistema es linealmente independiente.

2.1.2 Ejercicio 2

Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt. Sea $(f_n)_{n=0}^\infty$ un sistema de funciones linealmente independientes en $L^2(I)$. Sea la sucesión de funciones dada recursivamente por

$$g_0 := f_0, \qquad g_{n+1} := f_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f_{n+1}, g_k \rangle}{\langle g_k, g_k \rangle} g_k.$$

Demuestra que $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ es un sistema ortogonal y que

$$\operatorname{span}\{f_k\}_{k=0}^{n} = \operatorname{span}\{g_k\}_{k=0}^{n}$$

para todo n.

Demostración: Aplicaremos inducción.

En primer lugar, probaremos que $\{g_k\}_{k=0}^{n}$ es ortogonal para todo $n \in \mathbb{N}$. Comprobemos el caso base:

$$g_1 = f_1 - \frac{\langle f_1, g_0 \rangle}{\langle g_0, g_0 \rangle} g_0 = f_1 - \frac{\langle f_1, f_0 \rangle}{\langle f_0, f_0 \rangle} f_0$$

Aplicando la linealidad del producto interno,

$$\langle g_1, g_0 \rangle = \langle f_1, f_0 \rangle - \frac{\langle f_1, f_0 \rangle}{\langle f_0, f_0 \rangle} \cdot \langle f_0, f_0 \rangle = 0$$

Supongamos que la hipótesis es cierta para n y comprobemos que se cumple para $n+1$. Sea $j \in \{1, \ldots, n\}$, aplicando de nuevo la linealidad,

$$g_{n+1} = f_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f_{n+1}, g_k \rangle}{\langle g_k, g_k \rangle} g_k \Rightarrow \langle g_{n+1}, g_j \rangle = \langle f_{n+1}, g_j \rangle - \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f_{n+1}, g_k \rangle}{\langle g_k, g_k \rangle} \cdot \langle g_k, g_j \rangle =$$
$$= \langle f_{n+1}, g_j \rangle - \frac{\langle f_{n+1}, g_j \rangle}{\langle g_j, g_j \rangle} \cdot \langle g_j, g_j \rangle = 0$$

Tenemos la ortogonalidad. Queda ver que se respetan las clausuras.

Puesto que $f_0 = g_0$, tenemos el caso base. Supongamos que se cumple para n

y veamos que es cierto para $n+1$.

$$g_{n+1} = f_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f_{n+1}, g_k \rangle}{\langle g_k, g_k \rangle} g_k \in K\langle g_0, \ldots, g_n, f_{n+1} \rangle = K\langle f_0, \ldots, f_n, f_{n+1} \rangle$$

$$f_{n+1} = g_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f_{n+1}, g_k \rangle}{\langle g_k, g_k \rangle} g_k \in K\langle g_0, \ldots, g_n, g_{n+1} \rangle$$

Tenemos que $K\langle g_0, \ldots, g_n, g_{n+1} \rangle = K\langle f_0, \ldots, f_n, f_{n+1} \rangle$ por doble contenido.

2.1.3 Ejercicio 3

Demuestra que el sistema de polinomios $(x^n)_{n=0}^{\infty}$ es linealmente independiente. Calcula las cuatro primeras funciones que se obtienen al aplicar el proceso de ortonormalización de Gram–Schmidt sobre el intervalo $[-1, 1]$ (De este procedimiento pueden obtenerse los llamados *polinomios de Legendre*).

Demostración:

Todo polinomio no nulo puede tener a lo sumo un número de raíces igual a su grado. Por tanto, sea $n \in \mathbb{N}$ cualquiera,

$$\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n \equiv 0 \iff \alpha_i = 0 \ \forall i \in \{0, \ldots, n\}$$

El sistema es linealmente independiente por definición. Apliquemos ahora el proceso de Gram-Schmidt.

$$\int_{-1}^{1} x \cdot 1 \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{1} = 0 \Rightarrow p_1 = x - \frac{\langle x, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = x$$

$$\int_{-1}^{1} x \cdot x^2 \, dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-1}^{1} = 0 \qquad \int_{-1}^{1} x^2 \cdot 1 \, dx = \frac{2}{3} \qquad p_2 = x^2 - \frac{2}{3\langle 1, 1 \rangle} 1 - \frac{0}{\langle x, x \rangle} x = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$\int_{-1}^{1} x^3\left(x^2-\frac{1}{3}\right)\,dx = 0 = \int_{-1}^{1} x^3\cdot 1\,dx$$

$$\int_{-1}^{1} x^3\cdot x\,dx = \frac{2}{5}$$

$$p_3 = x^3 - \frac{2}{5\langle x,x\rangle}x = x^3 - \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{2}x = x^3 - \frac{3}{5}x$$

El proceso de Gram-Schmidt no garantiza la ortonormalidad, sino únicamente la ortogonalidad. Tras normalizar, se obtienen los siguientes vectores.

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sqrt{\frac{3}{2}}x,\ \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2-\frac{1}{3}\right),\ \sqrt{\frac{175}{8}}\left(x^3-\frac{3}{5}x\right)\right\}$$

2.1.4 Ejercicio 4

Sea $I := [0, 2\pi]$ y sea $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$ un sistema ortonormal en $\mathcal{L}_2(I)$. Demuestra los siguientes apartados:

(1) los siguientes enunciados son equivalentes:

   (a) dadas f y g en $\mathcal{L}_2(I)$, $\langle f,\varphi_n\rangle = \langle g,\varphi_n\rangle$ para todo n implica $f \overset{\mu-a.e.}{=} g$.

   (b) dada $f \in \mathcal{L}_2(I)$, $\langle f,\varphi_n\rangle = 0$ para todo n implica $f \overset{\mu-a.e.}{=} 0$.

   (c) Si T es un sistema ortonormal que contiene a $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$, entonces $T = (\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$ (en cuyo caso se dice que $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$ es un sistema ortonormal maximal).

(2) Supón que $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$ satisface el enunciado (c). Demuestra que toda $f \in \mathcal{L}_2(I)$ verifica

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n}\langle f,\varphi_k\rangle\varphi_k \right\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

¿Es $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$ una base (algebraica, también llamada de Hämel) del espacio vectorial $\mathcal{L}_2(I)$?

(3) Demuestra que los sistemas

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots\right)$$

y $\left(e^{inx}/\sqrt{2\pi}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ son sistemas ortonormales maximales.

<u>**Demostración:**</u>

(1) Veamos que se cumplen todas las implicaciones:

$a \Rightarrow b$ Se tiene al considerar $g = 0$.

$b \Rightarrow c$ Supongamos que existe $f \in T \setminus \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

Al ser, T ortonormal, $\{f\} \cup \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ha de serlo también. De este modo, $\langle f, \varphi_n\rangle = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Aplicando la hipótesis, tenemos que $f \overset{\mu-a.e.}{=} 0$. Sabemos por el primer ejercicio de esta sección que todo sistema ortonormal es linealmente independiente, lo que entra en contradicción con $f \overset{\mu-a.e.}{=} 0$.

$c \Rightarrow a$ Supongamos $f, g \in \mathcal{L}_2([0, 2\pi])$ tales que $\langle f, \varphi_n\rangle = \langle g, \varphi_n\rangle\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Supongamos además que f y g no son iguales en casi todo punto; es decir, $f - g \neq 0$ en $L_2([0, 2\pi])$.

Sea $T = \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Aplicando la hipótesis, para $n \in \mathbb{N}$ cualquiera,

$$\langle f - g, \varphi_n\rangle = \langle f, \varphi_n\rangle - \langle g, \varphi_n\rangle = 0$$

De este modo, $f - g$ es un vector no nulo ortogonal a todos los de T. Por tanto, normalizando, $\left\{\frac{f-g}{||f-g||}\right\} \cup T$ es un sistema ortonormal. Aplicando la hipótesis de maximalidad, ha de cumplirse $\frac{f-g}{||f-g||} \overset{\mu-a.e.}{=} \varphi_j$ para cierto $j \in \mathbb{N}$.

Como T es ortonormal, tenemos que:

$$||f - g|| \cdot ||\varphi_j||^2 = \langle f - g, \varphi_j\rangle = \langle f, \varphi_j\rangle - \langle g, \varphi_j\rangle \neq 0$$

Hemos llegado a una contradicción.

(2) Como hemos demostrado la caracterización en el apartado anterior, suponer que el sistema ortonormal T verifica (c) es equivalente a suponer que verifica (a).

Por el resultado 4.1.5 de los apuntes de Teoría, sabemos que $s := \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k$ converge y está bien definida. Sea $j \in \mathbb{N}$ cualquiera,

$$\langle s, \varphi_j \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k, \varphi_j \right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \cdot \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle = \langle f, \varphi_j \rangle$$

Por tanto, en vista de la afirmación (a), es claro que $f \overset{\mu-a.e.}{=} s$. Por Análisis Matemático I, sabemos que la norma es una aplicación continua. De este modo,

$$\lim_{n \to \infty} \left\| f - \sum_{k=0}^{n} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\| = \left\| f - \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\| = 0$$

La convergencia se da en norma, pero no tiene por qué ocurrir que $f = s$. Por tanto, sí sería una base de $L_2(I)$, pero no de $\mathcal{L}_2(I)$ al no ser este último un espacio de Banach.

§2. Funciones de variación acotada

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida sobre un intervalo compacto no degenerado y sea $P := \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b\}$ una partición finita de $[a,b]$. Llamamos variación de f, semi-variación positiva de f y semi-variación negativa de f respecto de P a los valores respectivos

$$V(f,P) := \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|,$$

$$V^+(f,P) := \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - f(t_{i-1}))^+,$$

$$V^-(f,P) := \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - f(t_{i-1}))^-,$$

donde, para $x \in \mathbb{R}$, $x^+ := \max\{x, 0\}$ y $x^- := \max\{-x, 0\}$.

Como de costumbre, denotaremos por $\mathcal{P}([a,b])$ al conjunto de todas las particiones finitas de $[a,b]$. Se llama variación de f al valor

$$V(f) := \sup\{V(f,P) : P \in \mathcal{P}([a,b])\}.$$

Si $V(f) < \infty$, se dice que f es de variación acotada. Las semi-variaciones positiva y negativa de f se definen como

$$V^+(f) := \sup\{V^+(f,P) : P \in \mathcal{P}([a,b])\}, \qquad V^-(f) := \sup\{V^-(f,P) : P \in \mathcal{P}([a,b])\}.$$

2.2.1 Ejercicio 1

Demuestra que una función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es de variación acotada si y sólo si sus semi-variaciones positiva y negativa son ambas finitas.

Demostración:

Sea $P := \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b\} \in \mathcal{P}([a,b])$ cualquiera, tenemos:

$$V(f,P) := \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} \Big(f(t_i) - f(t_{i-1})\Big)^+ + \Big(f(t_i) - f(t_{i-1})\Big)^- = V^+(f,P) + V^-(f,P)$$

Tomando supremos, llegamos a que $V(f) \leq V^+(f) + V^-(f)$. Por tanto, si las semi-variaciones positiva y negativa son finitas, también tendrá que serlo $V(F)$.

En cuanto a la otra implicación, supongamos ahora que $V(f)^+ = \infty$ para ver que $V(f) = \infty$ (el caso $V^-(f) = \infty$ es análogo). Sea $K \in \mathbb{R}$; por hipótesis, existe $P \in \mathcal{P}([a,b])$ tal que $V^+(f,P) > K$. Por tanto,

$$V(f,P) = V^+(f,P) + V^-(f,P) \geq V^+(f,P) > K$$

2.2.2 Ejercicio 2

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función de variación acotada tal que $f(a) = 0$. Demuestra que $f = g - h$, donde

$$g(x) = V^+\big(f; [a,x]\big), \qquad h(x) = V^-\big(f; [a,x]\big)$$

Demostración:

Fijamos $x \in [a,b]$ cualquiera. Sea $P = \{a = t_0 < \ldots < t_n = x\} \in \mathcal{P}([a,x])$ cualquiera, se cumple:

$$V^+(f_{|[a,x]}, P) - V^-(f_{|[a,x]}, P) = \sum_{i=1}^{n} \Big(f(t_i) - f(t_{i-1})\Big)^+ - \Big(f(t_i) - f(t_{i-1})\Big)^- =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(t_i) - f(t_{i-1}) = f(x) - f(a) = f(x)$$

Se tiene por ser telescópica la suma. Tomando supremos (podemos hacerlo adecuadamente al ser de variación acotada) se llega al resultado.

2.2.3 Ejercicio 3

Demuestra que toda función de variación acotada f sobre un intervalo compacto $[a, b]$ puede descomponerse como $f = g_1 - g_2$, donde g_1 y g_2 son dos funciones crecientes y acotadas en $[a, b]$.

<u>**Demostración:**</u>

Por el ejercicio anterior, sabemos que para las siguientes funciones,

$$g_1(x) = V^+(f_{|[a,x]}) + f(a) \qquad\qquad g_2(x) = V^-(f_{|[a,x]})$$

se cumple que $f(x) = g_1(x) - g_2(x)$. Veamos que g_2 es monótona (el caso g_1 es análogo).

Sean $x, y \in [a, b]$ con $x < y$, veamos que $g_2(x) \leq g_2(y)$.
Sea $P = \{a = t_0 < \ldots < t_n = x\} \in \mathcal{P}([a, x])$, consideramos $\hat{P} := P \cup \{y\} \in \mathcal{P}([a, y])$. Así,

$$V^-(f_{|[a,x]}, P) = \sum_{i=1}^{n} \Big(f(t_i) - f(t_{i-1})\Big)^- \leq \Big(f(y) - f(x)\Big)^- + \sum_{i=1}^{n} \Big(f(t_i) - f(t_{i-1})\Big)^- =$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \Big(f(t_i) - f(t_{i-1})\Big)^- = V^-(f_{|[a,y]}, \hat{P})$$

En vista del primer ejercicio de esta sección, al ser f de variación acotada, también lo son g_1 y g_2 (luego son acotadas). Tomando supremos podemos ver que son crecientes.

2.2.4 Ejercicio 4

Demuestra que si una función f es de variación acotada, entonces todas sus discontinuidades son de salto finito o evitables.

<u>**Demostración:**</u>

Por el ejercicio anterior, sabemos que es posible descomponer f como $f = g_1 - g_2$

con g_1, g_2 funciones crecientes acotadas. Basta ver que las discontinuidades de una función g creciente son se salto finito. Para ello, veamos que existen siempre los límites laterales de g.

Fijado x cualquiera, consideramos el siguiente conjunto:
$\mathcal{A} := \{g(t) : t < x\}.$, que está acotado superiormente por ser g creciente. De este modo, podemos considerar $A := \sup \mathcal{A}$.

Por definición de supremo, para $\varepsilon > 0$ cualquiera, existe $\delta > 0$ tal que:

$$g(x-\delta) > A - \varepsilon$$

Al ser g creciente, para cada $t \in (x-\delta, x)$, se cumple:

$$A - \varepsilon < g(x-\delta) \leq g(t) \leq A \qquad\qquad -A \leq -A < \varepsilon - A$$

De este modo, sumando, $-\varepsilon < g(t) - A < \varepsilon$. Tenemos que existe el límite izquierdo. Análogamente, podemos comprobar la existencia del derecho.

Volviendo al problema original, tenemos $f = g_1 - g_2$ con g_1 y g_2 monótonas y acotadas. Por tanto, todas sus discontinuidades han de ser de salto finito. Al pasar a la resta, podrían producirse además discontinuidades evitables. Por ejemplo,

$$g_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad g_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Toda discontinuidad de f ha de corresponderse con una discontinuidad de g_1 o de g_2 (o de ambas a la vez), luego han de ser de salto finito o evitables.

§3. Fallos en las condiciones de Dini o de Jordan

2.3.1 Ejercicio 1

Consideremos la siguiente función:

$$f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad x \longmapsto f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

extendida por periodicidad 2π en $\mathbb{R}$. Demuestra que f es continua en $\mathbb{R}$, y que en $x = 0$ no se verifica la condición de Jordan, pero sí la de Dini.

<u>**Demostración:**</u>

Para $x = 0$, $\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{t \to 0} t \sin\left(\frac{1}{t}\right) = 0 = f(x)$: producto de un infinitésimo por una función acotada.

En el resto de $[-\pi, \pi]$, f es claramente continua al ser producto de funciones continuas. Finalmente, por ser una función con simetría par, es continua en la frontera de las expansiones por periodicidad:

$$\lim_{x \to \pi^-} f(x) = f(\pi) = \pi \sin\left(\frac{1}{\pi}\right) = -\pi \sin\left(-\frac{1}{\pi}\right) = f(-\pi) = \lim_{x \to -\pi^+} f(x)$$

Para ver que no se cumple la condición de Jordan, hemos de comprobar que f no es de variación acotada en $[-\varepsilon, \varepsilon]$ para ningún $\varepsilon > 0$. Es decir,

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \forall\, K \in \mathbb{R} \quad \exists\, P \in \mathcal{P}([-\varepsilon, \varepsilon]) : \quad V(f, P) > K$$

Consideramos la siguiente sucesión: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{2}{n\pi}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Sea $\varepsilon > 0$, sea $K \in \mathbb{R}$. Por la propiedad arquimediana, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ para todo $n \geq n_0$. Dado $n \geq n_0$, evaluamos f en un término de la sucesión:

$$f(a_n) = \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \cdot b_n \qquad \text{con } b_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \bmod{}_2(n) = 0 \\ 1 & \text{si} \quad \bmod{}_4(n) = 1 \\ -1 & \text{si} \quad \bmod{}_4(n) = 3 \end{cases}$$

Comparando con la expresión de la variación de f en una partición, tenemos que:

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |f(a_k) - f(a_{k-1})| \geq \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{k-1} > \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{k-1} = \infty$$

Por tanto, podemos tomar un subconjunto finito de la sucesión contenido en $[-\varepsilon, \varepsilon]$ tal que la variación que induzca cualquier partición que lo contenga sea mayor que K. Hemos comprobado que no se cumple la condición de Jordan.

Veamos ahora que sí se verifica la condición de Dini. Como ya hemos comprobado antes, la función f tiene simetría par. Por tanto, para $t > 0$ se tiene:

$$g(t) := \frac{f(t) + f(-t)}{2} = \frac{2f(t)}{2} = f(t)$$

Tomando límites, $g(0^+) = \lim\limits_{t \to 0^+} g(t) = 0$, como ya estudiamos antes. De este modo, sea $\delta \in (0, \pi)$ cualquiera,

$$\frac{g(t) - g(0^+)}{t} = \frac{f(t)}{t} = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{t}\right) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases} \in L_1([0, \delta])$$

Es $L_1([0, \delta])$ en virtud del criterio de integración de Lebesgue, pues la función es acotada y tiene un conjunto de discontinuidades de medida nula. Hemos comprobado que se cumple la condición de Dini.

2.3.2 Ejercicio 2

Consideremos la siguiente función:

$$f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad x \longmapsto f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\log\left(\frac{1}{|x|}\right)} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

extendida por periodicidad 2π en $\mathbb{R}$. Demuestra que f es continua en $\mathbb{R}$, y que en $x = 0$ no se verifica la condición de Dini, pero sí la de Jordan.

Demostración:

En primer lugar, veamos que es continua. Como $\lim\limits_{x\to\infty} \log(x) = \infty$, tenemos que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Además, al tener f simetría par tenemos que:

$$\lim_{x\to\pi^-} f(x) = f(\pi) = f(-\pi) = \lim_{x\to-\pi^+}$$

Por tanto, f es continua en $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Veamos que f sí cumple la condición de Jordan. Sea $\varepsilon \in (0,\pi)$ cualquiera, tenemos que f es monótona en $[-\varepsilon, 0]$ y en $[0,\varepsilon]$, luego es de variación acotada. Como es continua en $\mathbb{R}$, es $L_1([0,2\pi])$. Por tener simetría par,

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)+f(-t)}{2} = \lim_{t\to 0^+} f(t) = f(0) = 0$$

Veamos ahora que no cumple la condición de Dini. Reutilizando lo explicado para la Condición de Jordan, fijamos $\delta > 0$ arbitrariamente pequeño. Se tiene:

$$g(t) = \frac{f(t)+f(-t)}{2} = f(t) \qquad \frac{g(t)-g(0^+)}{t} = \frac{g(t)}{t} = \frac{1}{t\cdot\log\left(\frac{1}{|t|}\right)}$$

Para $t > 0$ suficientemente pequeño, $\frac{1}{t} > e$, luego $\log\left(\frac{1}{t}\right) > 1$. De este modo,

$$\left|\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{\log\left(\frac{1}{t}\right)}\right| \geq \left|\frac{1}{t}\right| \notin L_1\left([0,\delta]\right)$$

Por tato, no se satisface la condición de Dini.

2.3.3 Ejercicio 3

Consideremos la función $h(x) = f(x)\cdot\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$, donde f es la función del ejercicio anterior. Si la extendemos por periodicidad en $\mathbb{R}$, ¿dónde es continua? ¿Satisface la condición de Jordan? ¿Y la de Dini?

$$h : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad x \longmapsto h(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{\log\left(\frac{1}{|x|}\right)} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

<u>**Demostración:**</u>

En primer lugar, tenemos que la función es continua en 0, pues $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0 = h(0)$ al ser f un infinitésimo y $\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$ una función acotada. Una vez más, la función tiene simetría par, luego:

$$\lim_{x\to\pi^-} h(x) = h(\pi) = h(-\pi) = \lim_{x\to-\pi^+} h(x)$$

Por tanto, tenemos que h es continua en $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Veamos que no verifica la condición de Jordan. Consideramos la siguiente sucesión: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{2}{n\pi}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Para $\varepsilon > 0$ cualquiera, la sucesión estará contenida en $[-\varepsilon, \varepsilon]$ a partir de cierto término n_0. Dado $n \geq n_0$, comparando con la variación de h,

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |f(a_k) - f(a_{k-1})| \geq \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{\log\left(\frac{\pi}{2} \cdot k\right)} = \infty$$

Como la serie diverge, podemos tomar sumas parciales arbitrariamente grandes. Así, para cada $K \in \mathbb{R}$ es posible tomar $P \in \mathcal{P}([-\varepsilon, \varepsilon])$ tal que $V(h, P) > K$. Concluimos que no cumple la condición de Jordan.

Veamos que no cumple la condición de Dini. Sea $\delta > 0$ cualquiera, sabemos que:

$$g(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} = f(t) \qquad \hat{g}(t) := \frac{g(t) - g(0^+)}{t} = \frac{g(t)}{t} = \frac{\sin^2\left(\frac{1}{t}\right)}{t \cdot \log\left(\frac{1}{|t|}\right)}$$

Como $\left|\sin^2\left(\frac{1}{t}\right)\right| \leq 1$ y para t suficientemente pequeño tenemos que $|f(t)| \leq 1$. Entonces, se cumple:

$$|\hat{g}(t)| \leq \frac{1}{t} \notin L_1([0, \delta])$$

Hemos comprobado que no cumple la condición de Dini.