

# Análisis Matemático III

Javier Ortín Rodenas

Hoja de ejercicios

# Contenidos

<b>I Teoría de la medida e Integral de Lebesgue</b>	<b>3</b>
1. Medida exterior en $\mathbb{R}^N$ . . . . .	3
1.1.1 Ejercicio 5 . . . . .	3
1.1.2 Ejercicio 6 . . . . .	5
2. Conjuntos medibles . . . . .	6
1.2.1 Ejercicio 2 . . . . .	6
1.2.2 Ejercicio 3 . . . . .	7
1.2.3 Ejercicio 5 . . . . .	8
3. Aplicaciones del lenguaje de la Teoría de la Medida . . . . .	10
1.3.1 Ejercicio 3 . . . . .	10
1.3.2 Ejercicio 5 . . . . .	12
4. Funciones medibles . . . . .	13
1.4.1 Ejercicio 1 . . . . .	13
1.4.2 Ejercicio 4 . . . . .	14
<b>II Series de Fourier</b>	<b>16</b>
1. Sistemas ortogonales . . . . .	16
2.1.1 Ejercicio 1 . . . . .	16
2.1.2 Ejercicio 2 . . . . .	16
2.1.3 Ejercicio 3 . . . . .	18
2.1.4 Ejercicio 4 . . . . .	19
2. Funciones de variación acotada . . . . .	22
2.2.1 Ejercicio 1 . . . . .	22
2.2.2 Ejercicio 2 . . . . .	23
2.2.3 Ejercicio 3 . . . . .	24
2.2.4 Ejercicio 4 . . . . .	24
3. Fallos en las condiciones de Dini o de Jordan . . . . .	26
2.3.1 Ejercicio 1 . . . . .	26
2.3.2 Ejercicio 2 . . . . .	27
2.3.3 Ejercicio 3 . . . . .	28

# I Teoría de la medida e Integral de Lebesgue

## §1. Medida exterior en $\mathbb{R}^N$

### 1.1.1 Ejercicio 5

a) Sea  $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ , demuestra que todo cubrimiento finito de  $A$  formado por intervalos abiertos tiene longitud total mayor o igual a 1.

Demostración: Sea  $\{I_i\}_{i=1}^n$  un recubrimiento por intervalos abiertos de  $A$ , con cada  $I_i = (a_i, b_i)$  con  $a_i < b_i$ . Definimos el siguiente conjunto auxiliar:

$$\mathcal{A} := \{0, 1\} \cup \left( [0, 1] \cap \{a_i, b_i : i \in \{1, \dots, n\}\} \right)$$

Este conjunto contiene a los extremos de los  $I_i$  que se encuentren entre 0 y 1. Al haber un número finito de intervalos, tenemos que  $\mathcal{A}$  es finito, pudiendo ordenarlo como sigue:

$$\mathcal{A} = \{x_j\}_{j=0}^m \quad x_0 = a < x_1 < \dots < x_m = b \quad \text{para cierto } m \in \mathbb{N}$$

Al estar en un caso finito, la unión de las clausuras es la clausura de las uniones. Por contención de las clausuras, se tiene:

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i \Rightarrow \overline{A} = [0, 1] \cap \overline{\mathbb{Q}} = [0, 1] \subseteq \overline{\bigcup_{i=1}^n I_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{I_i}$$

Sea  $j \in \{1, \dots, m\}$  cualquiera, tenemos que  $x_j \in [0, 1] \subseteq \bigcup_{i=1}^n \overline{I_i}$  luego  $\exists k \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $x_j \in [a_k, b_k]$ . Veamos que  $[x_{j-1}, x_j] \subseteq [a_k, b_k]$  también. Ambos conjuntos son cerrados y conexos con intersección no vacía. Por tanto, su intersección ha de ser conexa, cerrada y no vacía (es decir, un intervalo cerrado). Será de la forma  $[u, x_j]$  con  $u = \min\{a_k, x_{j-1}\}$ . De tenerse  $u \neq x_{j-1}$ , se cumpliría  $x_{j-1} < a_k < x_j$ , lo que contradice la ordenación establecida para  $\mathcal{A}$ .

De este modo, como  $v_1(I_i) = v_1(\bar{I}_i)$   $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ , se cumple:

$$1 = v_1([0, 1]) = \sum_{j=1}^m v_1(x_{j-1}, x_j) \leq \sum_{i=1}^n v_1(\bar{I}_i) = \sum_{i=1}^n v_1(I_i)$$

b) Dede del apartado anterior que  $A$  no es compacto.

**Demostración:** Veamos que hay un recubrimiento de  $A$  del que no se puede extraer un subrecubrimiento finito. Para ello basta dar un recubrimiento de  $A$  por intervalos abiertos tales que la suma de sus medidas sea menor a 1. Como  $\mathbb{Q}$  es numerable,  $A$  también lo es. Sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una enumeración cualquiera de  $A$ , definimos los siguientes intervalos:

$$I_n = (a_n - \frac{1}{2^{n+2}}, a_n + \frac{1}{2^{n+2}}) \quad \text{luego } A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i \text{ con } \sum_{i=1}^{\infty} v_1(I_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

c) Demuestra que la siguiente aplicación  $m$  definida sobre  $\mathfrak{B}_N$  no es una medida:

$$m(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n v_1(I_i) : \bigcup_{i=1}^n I_i \supseteq A \text{ con cada } I_i \text{ cubo abierto en } \mathbb{R}^N \right\}$$

**Demostración:**

En caso de serlo, para  $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{B}_N$  con  $i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \emptyset$  se cumpliría:

$$m \left( \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(E_i)$$

Todo conjunto unipuntual  $a$  con  $a \in \mathbb{R}^N$  está en  $\mathfrak{B}_N$  pues se puede expresar como un intervalo cerrado degenerado. Por tanto, todo conjunto numerable está también en  $\mathfrak{B}_N$ . Consideramos el conjunto  $A^N \subseteq [0, 1]^N \in \mathfrak{B}_N$ . Razonando como en el apartado anterior, todo cubrimiento finito de  $A^N$  por cubos ha de tener suma de volúmenes mayor o igual a 1, luego  $m(A^N) = 1$ . No obstante, podemos expresar  $A^N$  como unión numerable de conjuntos unipuntuales disjuntos, teniendo cada uno de ellos  $m(\{b_n\}) = 0$  para  $(b_n)_n$  una enumeración de  $A^N$ .

### 1.1.2 Ejercicio 6

Demuestra que existe un conjunto abierto  $O$  en  $\mathbb{R}$  y un  $\varepsilon > 0$  tal que para cualquier recubrimiento finito de  $O$  formado por intervalos abiertos,  $\{J_i\}_{i=1}^m$  se cumple  $\mu(\bigcup_{i=1}^n J_i \setminus O) > \varepsilon$ .

#### Demostración:

Para cada  $n \in \mathbb{N}$  tomamos  $I_n = (n - \frac{1}{3}, n + \frac{1}{3})$ . Consideramos el abierto  $O = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i$ . Sea  $\{J_i\}_{i=1}^m$  un recubrimiento finito de  $O$  por intervalos abiertos. Al ser  $O$  no acotado, tiene que haber cierto  $k \in \{1, \dots, m\}$  tal que  $J_k$  contiene a infinitos intervalos  $I_n$ . Dados dos de estos intervalos consecutivos, la distancia entre el extremo derecho del primero y el extremo izquierdo del segundo viene dada por:

$$\left(n + 1 - \frac{1}{3}\right) - \left(n + \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Por tanto,  $J_k \setminus O$  ha de contener infinitos intervalos disjuntos de longitud  $\frac{1}{3}$  luego tiene medida infinita. Se cumple el resultado para  $\varepsilon > 0$  cualquiera.

## §2. Conjuntos medibles

### 1.2.1 Ejercicio 2

Sea  $A \in \mathfrak{M}_N$  con  $\mu(A) < \infty$ . Sea  $\varepsilon > 0$ , demuestra que existe  $K \subseteq A$  conjunto compacto tal que  $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$ . ¿Se cumple también si  $\mu(A) = \infty$ ?

#### Demostración:

Sea  $A_n = A \cap [-n, n]$ , tenemos que  $(A_n)_n$  es una sucesión creciente de conjuntos medible que tiene como unión el conjunto  $A$ . Por tanto, se tiene

$$\infty > \mu(A) = \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \lim_n \mu(A_n)$$

Por tanto, existe cierto  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\mu(A) - \mu(A_{n_0}) = \mu(A \setminus A_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Hemos podido despejar sin indeterminaciones al estar en un caso de medida finita.

Como  $A_{n_0}$  es medible, sabemos que existe un conjunto cerrado  $C \subseteq A_{n_0}$  tal que  $\mu(A_{n_0} \setminus C) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Al ser  $A_{n_0}$  acotado y estar  $C$  contenido en él, tenemos que  $C$  es compacto. Por todo lo anterior:

$$\mu(A \setminus C) = \mu(A) - \mu(C) = \mu(A) - \mu(A_{n_0}) + \mu(A_{n_0}) - \mu(C) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

En cambio, para el caso infinito, no tiene por qué cumplirse. Sea  $A = \mathbb{R}^N$ , en la topología usual, los conjuntos compactos son aquellos cerrados y acotados. En espacios métricos, un conjunto es acotado si existe una bola de radio finito que lo contiene. Por el Teorema de Hausdorff, podemos considerar la norma  $\|\cdot\|_1$ , que tiene como bolas a los cubos. Por tanto, todo compacto  $K$  va a estar contenido en una bola de radio finito; es decir, en un cubo de volumen (medida) finito. Despejando:

$$\mu(\mathbb{R}^N \setminus K) = \mu(\mathbb{R}^N) - \mu(K) = \infty - \mu(K) = \infty > \varepsilon \quad \forall \varepsilon \in (0, +\infty)$$

### 1.2.2 Ejercicio 3

Sea  $A \in \mathfrak{M}_N$ , ¿son ciertas las siguientes implicaciones?

- i)  $\text{A}^{\circ} \neq \emptyset \Rightarrow \mu(A) = 0$ .
- ii)  $\text{A}^{\circ} = \emptyset \Rightarrow \mu(A) = 0$ .
- iii)  $A$  abierto  $\Rightarrow \mu(\text{Fr. } A) = 0$ .
- iv)  $A$  no numerables  $\Rightarrow \mu(A) > 0$ .

#### Demostración:

- i) Falso: basta considerar  $\mathbb{R}^N$ .
- ii) Falso: basta considerar  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  (o cualquier variante  $N$ -dimensional).
- iii) Utilizaremos una variación del conjunto de Cantor. En cada iteración “eliminamos” la parte central de longitud  $\frac{1}{4^n}$  de cada intervalo. Veamos ejemplos de algunas iteraciones:

$$[0, 1]$$

$$\left[0, \frac{3}{8}\right] \quad \left[\frac{5}{8}, 1\right]$$

$$\left[0, \frac{1}{8}\right] \quad \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right] \quad \left[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right] \quad \left[\frac{7}{8}, 1\right]$$

En la  $n$ -ésima iteración eliminamos  $2^{n-1}$  intervalos cada uno de longitud  $\frac{1}{4^n}$ . Como los intervalos quitados son disjuntos, podemos calcular su medida total como la suma de las longitudes quitadas. Sea  $L_n$  la longitud quitada en la  $n$ -ésima iteración,

$$L_n = 2^{n-1} \cdot \frac{1}{4^n} = \frac{1}{2^n + 1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} L_n = \frac{1}{2}$$

Considerando  $O = (0, 1) \setminus C$  para  $C$  la intersección de todas las iteraciones, tenemos que la frontera de  $O$  es  $C$ , que tiene como medida  $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ .

iv) Falso: basta considerar  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

### 1.2.3 Ejercicio 5

Demuestra que para cada  $A \in \mathfrak{M}_1$  con  $\mu(A) < \infty$  y cada  $\varepsilon > 0$  existe una colección finita de intervalos disjuntos y abiertos  $\{I_i\}_{i=1}^m$  tales que:

$$\mu \left( A \Delta \bigcup_{i=1}^m I_i \right) < \varepsilon \quad \text{con } A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

#### Demostración:

Por ser  $A$  un conjunto medible, es de la forma  $A = (\bigcap_{i \in \mathbb{N}} G_i) \setminus M$  para  $(G_i)_{i \in \mathbb{N}}$  una sucesión decreciente de abiertos de  $\mathbb{R}^N$  y  $M$  un conjunto de medida nula.

Como  $M$  no interfiere en la medida, tenemos que  $\mu(A) = \lim_n \mu(G_n) < \infty$ . Por definición de límite,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\mu(G_{n_0} \setminus A) = \mu(G_{n_0}) - \mu(A) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Hemos podido pasar a la medida de la diferencia de conjuntos al estar en el caso de medida finita. Por simplicidad, denotaremos  $G = G_{n_0}$ .

Al ser  $G$  abierto, podemos expresarlo como unión numerable de bolas abiertas  $\{J_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$  tomamos  $O_n = \bigcup_{i=1}^n J_i$ . Tenemos que  $(O_n)_n$  es una sucesión de conjuntos crecientes cuya unión es igual a  $G$ . Razonando como en el caso anterior:

$$\mu(G) = \mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} O_i) = \lim_n \mu(O_n) \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N} : \mu(G \setminus O_{n_1}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Tomamos como  $\{I_i\}_{i=1}^n$  las componentes conexas de  $O_{n_1}$ , que son disjuntas e intervalos (en  $\mathbb{R}$  los conjuntos conexos son precisamente los intervalos). Además, hay un número finito de ellas (en el peor de los casos, cada  $J_i$  con  $1 \leq i \leq n_1$  sería

una componente conexa). De este modo, aplicando la monotonía de la medida:

$$\mu \left( A \setminus \bigcup_{i=1}^n I_i \right) \leq \mu \left( G \setminus \bigcup_{i=1}^n I_i \right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\mu \left( \bigcup_{i=1}^n I_i \setminus A \right) \leq \mu (G \setminus A) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sumando se llega al resultado.

## §3. Aplicaciones del lenguaje de la Teoría de la Medida

### 1.3.1 Ejercicio 3

Teorema de Egorov. Sea  $E \in \mathcal{M}$  tal que  $\mu(E) < \infty$  y  $(f_n)$  una sucesión de funciones medibles  $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$  que convergen puntualmente a la función  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Demuestra que para todo  $\varepsilon > 0$  existe un conjunto medible  $D \subset E$  tal que  $\mu(E \setminus D) < \varepsilon$  tal que la sucesión  $(f_n|_D)$  converge uniformemente a  $f|_D$ .

Para probar el anterior teorema, sigue los pasos siguientes:

1. para cada par de números naturales  $i, j$ , considera el conjunto

$$E_{ij} := \{x \in E : |f(x) - f_k(x)| < 1/i \ \forall k \geq j\}.$$

Demuestra que  $E_{ij}$  es medible;

2. para cada  $k$ , determina  $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_{kj}$ ;
3. para cada  $k$ , encuentra  $i_k \in \mathbb{N}$  verificando  $\mu(E \setminus E_{ki_k}) < 2^{-k}\varepsilon$ ;
4. estudia el conjunto

$$D := \bigcap_{k=1}^{\infty} E_{ki_k}.$$

#### Demostración:

- 1) Por ser límite de funciones medibles,  $f$  es medible. Así, para cada  $n \in \mathbb{N}$  tenemos  $f - f_n$  medible, luego  $|f - f_n|$  medible al componerse con una función continua. En vista de la definición de función medible, los  $E_{i,j}$  son conjuntos medibles.
- 2) Sea  $k \in \mathbb{N}$  fijo, veamos  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_{k,j} = E$ . Sea  $x \in E$ , sabemos por hipótesis que

$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$  luego para  $\delta = \frac{1}{k}$  tenemos que existe  $n_x \in \mathbb{N}$  tal que:

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{k} \quad \forall n \geq n_x$$

De este modo,  $x \in E_{k,n_x} \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_{k,j}$ .

**3)** Sea  $k \in \mathbb{N}$  fijo, por definición de los  $E_{i,j}$  se tiene que  $E_{k,n} \subseteq E_{k,n+1}$ . Así, tenemos que  $(E_{k,n})_{n \in \mathbb{N}}$  es una colección creciente de conjuntos medibles cuya unión es el propio  $E$ . Como  $\mu(E) < \infty$  por hipótesis, podemos despejar adecuadamente:

$$\mu(E \setminus E_{k,n}) = \mu(E) - \mu(E_{k,n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Por definición de límite, podemos tomar  $i_k \in \mathbb{N}$  tal que  $\mu(E \setminus E_{k,i_k}) < 2^{-k}\varepsilon$ .

**4)** Tenemos que  $D$  es medible por ser intersección numerable de conjuntos medibles. Además, su medida queda acotada por:

$$\mu(E \setminus D) = \mu(E \setminus (\bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_{k,i_k})) = \mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (E \setminus E_{k,i_k})) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E \setminus E_{k,i_k}) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

Veamos que  $f_n$  converge uniformemente en  $D$ . Sea  $\delta > 0$ , existe  $n_\delta \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{n} < \delta$ . Así, sea  $x \in D \subseteq E_{n_\delta, i_{n_\delta}}$ , se cumple  $|f_n(x) - f(x)| < \delta$  para cualquier  $n \geq i_{n_\delta}$ , independientemente de  $x$ .

### 1.3.2 Ejercicio 5

Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable Riemann tal que  $f(x) > 0 \forall x \in [a, b]$ . Demuestra que  $\int_a^b f(x) dx > 0$ .

#### Demostración:

Sabemos que toda función integrable Riemann en un intervalo compacto está acotada. Por tanto, aplicando el resultado 2.3.1 de los apuntes de teoría, sabemos que  $\mu(A) = 0$  para el siguiente conjunto:

$$A := \{x \in [a, b] : f \text{ no es continua en } x\}$$

Además, al ser  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ , la integral de Riemann coincide con la de Lebesgue, luego:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_A f d\mu + \int_{[a,b] \setminus A} f d\mu$$

Por ser  $[a, b] \setminus A$  un conjunto medible de medida finita positiva, sabemos que contiene a un compacto  $K$  con  $\mu(K) > 0$  (ejercicio 2 de conjuntos medibles). De este modo,  $f$  es continua en  $K$ , luego alcanza un mínimo  $m$ . Como  $f > 0$  en  $K$ ,  $m > 0$ . Definimos la función simple  $s := \frac{m}{2} \cdot X_K$  luego  $0 \leq s \leq f$  con  $s$  función medible simple. Así,

$$\int_{[a,b]} s d\mu = \frac{m}{2} \cdot \mu(K) > 0$$

Así, por definición de Integral de Lebesgue,  $\int_{[a,b]} f d\mu \geq \int_{[a,b]} s d\mu > 0$ .

## §4. Funciones medibles

### 1.4.1 Ejercicio 1

Sea  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  uniformemente continua y acotada, demuestra que la siguiente función es medible:

$$\varphi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \quad t \mapsto \varphi(t) = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f(x + t) - f(x)|$$

#### Demostración:

Por ser  $f$  acotada, tenemos que  $\exists M \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq M \forall x \in \mathbb{R}^N$ . De este modo, sean  $x, y \in \mathbb{R}^N$ , tenemos:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| \leq M + M = 2M$$

Por tanto, concluimos que  $\varphi$  es también acotada. Veamos que es medible por la definición.

Sea  $K := \sup_{t \in \mathbb{R}^N} \varphi(t)$ , como  $\varphi$  solo toma valores no negativos tenemos que:

$$\varphi^{-1}((-∞, 0]) = \emptyset \in \mathfrak{M}_N \quad \varphi^{-1}((-∞, K]) = \mathbb{R}^N \in \mathfrak{M}_N$$

Fijando ahora  $ε ∈ (0, K)$  cualquiera, veamos que  $\varphi((−∞, ε])$  es medible. Al ser  $f$  uniformemente continua por hipótesis, tenemos que para el  $ε$  fijado existe un  $δ > 0$  tal que:

$$||x - y|| < δ \Rightarrow |f(x) - f(y)| < ε \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$$

Podemos reescribir  $y = x + t$  para  $t = y - x \in \mathbb{R}^N$ . De este modo; sea  $t \in \mathbb{R}^N$ , se tiene:

$$||t|| < δ \Rightarrow |f(x + t) - f(x)| < ε$$

Se cumple la condición para todo  $x$  de  $\mathbb{R}^N$ . Al tomar supremos, la desigualdad

pasa a ser no estricta, y el término mayorado por  $\varepsilon$  se corresponde con  $\varphi(t)$  por definición:

$$||t|| < \delta \Rightarrow \varphi(t) = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f(x + t) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Así, sea  $(t_n)_n$  una sucesión que tiende al origen, ha de "atravesar" todos las bolas de radio  $\delta$  asociado a valores de  $\varepsilon$  arbitrariamente pequeños. Por tanto, podemos concluir que  $\phi$  es continua en el origen.

Sean  $s, t \in \mathbb{R}^N$  cualesquiera, se cumple:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f(x + t) - f(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f(x + t) - f(x + s)| + |f(x + s) - f(x)| \leq \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f(x + t) - f(x + s)| + \sup_{y \in \mathbb{R}^N} |f(y + s) - f(y)| \stackrel{z=x+s}{=} \sup_{z \in \mathbb{R}^N} |f(z + (t - s)) - f(z)| + \varphi(s) \end{aligned}$$

Despejando, obtenemos  $0 \leq \varphi(t) - \varphi(s) \leq \varphi(t - s) \xrightarrow{s \rightarrow t} \varphi(0) = 0$ .

Por todo lo anterior, concluimos que  $\varphi$  es continua y acotada, luego es medible en  $\mathfrak{B}_N$  y en  $\mathfrak{M}_N$

### 1.4.2 Ejercicio 4

Dada una función con dominio  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  y llegada  $\overline{\mathbb{R}}$ , demuestra que si es continua en  $x_0 \in A$ ; entonces,  $f^+$  y  $f^-$  también son continuas en  $x_0$ .

#### Demostración:

Supongamos en primer lugar que  $f(x_0) \in (0, \infty)$ . De ser así, para  $\varepsilon = \frac{|f(x_0)|}{2}$  existe cierto  $\delta > 0$  tal que  $||x - x_0|| < \delta \Rightarrow f(x) \in \left(\frac{f(x_0)}{2}, \frac{3f(x_0)}{2}\right) \subseteq (0, +\infty)$ .

De este modo, en  $B_{||\cdot||}(x_0, \delta) \subseteq A$ , tenemos que  $f^+ = f$ ,  $f^- \equiv 0$ , ambas continuas. En el caso  $f(x) = \infty$  tendríamos  $f(x) > K$  para cierto  $K > 0$  fijo en lugar de trabajar con un error de  $\varepsilon$ . Este razonamiento también funciona para tal escenario. El caso  $f(x) \in [-\infty, 0)$  se resuelve análogamente.

Si  $f(x_0) = 0$ , para  $\varepsilon > 0$  cualquiera existe  $\delta > 0$  tal que:

$$||x - x_0|| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$$

Como  $|f| = f^+ + f^-$  siendo ambos sumandos no negativos, esto implica que  $f^+$  y  $f^-$  son continuas al cumplir (para  $x \in B_{||\cdot||}(x_0, \delta)$ ):

$$|f^+(x) - f^+(x_0)| = f^+(x) \leq |f(x)| < \varepsilon$$

$$|f^-(x) - f^-(x_0)| = f^-(x) \leq |f(x)| < \varepsilon$$

# II Series de Fourier

## §1. Sistemas ortogonales

### 2.1.1 Ejercicio 1

Una colección finita de funciones  $(\varphi_k)_{k=0}^n$  (todas con dominio  $I$ ) se dice *linealmente independiente* si

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k \varphi_k \equiv 0 \iff \lambda_k = 0 \text{ para todo } 0 \leq k \leq n.$$

Una colección de funciones  $(\varphi_k)_{k=0}^\infty$  se dice *linealmente independiente* si todo subconjunto finito suyo es linealmente independiente. Prueba que todo sistema ortonormal sobre  $I$  es linealmente independiente.

#### Demostración:

Sea  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un sistema ortonormal con dominio  $I$ . Sea  $A := \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{N}$  finito. Supongamos que se cumple  $\sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_{a_k} \equiv 0$ .

Fijado  $j \in \{q, \dots, n\}$  cualquiera, tenemos:

$$\langle \varphi_{a_j}, 0 \rangle = 0 = \left\langle \varphi_{a_j}, \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_{a_k} \right\rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle \varphi_{a_j}, \varphi_{a_k} \rangle = \lambda_j$$

La última igualdad se deduce como aplicación directa de la ortonormalidad. Como el  $j$  escogido fue arbitrario, concluimos que el sistema es linealmente independiente.

### 2.1.2 Ejercicio 2

Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt. Sea  $(f_n)_{n=0}^\infty$  un sistema de funciones linealmente independientes en  $L^2(I)$ . Sea la sucesión de funciones dada

recursivamente por

$$g_0 := f_0, \quad g_{n+1} := f_{n+1} - \sum_{k=0}^n \frac{\langle f_{n+1}, g_k \rangle}{\langle g_k, g_k \rangle} g_k.$$

Demuestra que  $(g_n)_{n=0}^\infty$  es un sistema ortogonal y que

$$\text{span}\{f_k\}_{k=0}^n = \text{span}\{g_k\}_{k=0}^n$$

para todo  $n$ .

**Demostración:** Aplicaremos inducción.

En primer lugar, probaremos que  $\{g_k\}_{k=0}^n$  es ortogonal para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Comprobemos el caso base:

$$g_1 = f_1 - \frac{\langle f_1, g_0 \rangle}{\langle g_0, g_0 \rangle} g_0 = f_1 - \frac{\langle f_1, f_0 \rangle}{\langle f_0, f_0 \rangle} f_0$$

Aplicando la linealidad del producto interno,

$$\langle g_1, g_0 \rangle = \langle f_1, f_0 \rangle - \frac{\langle f_1, f_0 \rangle}{\langle f_0, f_0 \rangle} \cdot \langle f_0, f_0 \rangle = 0$$

Supongamos que la hipótesis es cierta para  $n$  y comprobemos que se cumple para  $n + 1$ . Sea  $j \in \{1, \dots, n\}$ , aplicando de nuevo la linealidad,

$$\begin{aligned} g_{n+1} &= f_{n+1} - \sum_{k=0}^n \frac{\langle f_{n+1}, g_k \rangle}{\langle g_k, g_k \rangle} g_k \Rightarrow \langle g_{n+1}, g_j \rangle = \langle f_{n+1}, g_j \rangle - \sum_{k=0}^n \frac{\langle f_{n+1}, g_k \rangle}{\langle g_k, g_k \rangle} \cdot \langle g_k, g_j \rangle = \\ &= \langle f_{n+1}, g_j \rangle - \frac{\langle f_{n+1}, g_j \rangle}{\langle g_j, g_j \rangle} \cdot \langle g_j, g_j \rangle = 0 \end{aligned}$$

Tenemos la ortogonalidad. Queda ver que se respetan las clausuras.

Puesto que  $f_0 = g_0$ , tenemos el caso base. Supongamos que se cumple para  $n$

y veamos que es cierto para  $n + 1$ .

$$g_{n+1} = f_{n+1} - \sum_{k=0}^n \frac{\langle f_{n+1}, g_k \rangle}{\langle g_k, g_k \rangle} g_k \in K\langle g_0, \dots, g_n, f_{n+1} \rangle = K\langle f_0, \dots, f_n, f_{n+1} \rangle$$

$$f_{n+1} = g_{n+1} + \sum_{k=0}^n \frac{\langle f_{n+1}, g_k \rangle}{\langle g_k, g_k \rangle} g_k \in K\langle g_0, \dots, g_n, g_{n+1} \rangle$$

Tenemos que  $K\langle g_0, \dots, g_n, g_{n+1} \rangle = K\langle f_0, \dots, f_n, f_{n+1} \rangle$  por doble contenido.

### 2.1.3 Ejercicio 3

Demuestra que el sistema de polinomios  $(x^n)_{n=0}^\infty$  es linealmente independiente. Calcula las cuatro primeras funciones que se obtienen al aplicar el proceso de ortonormalización de Gram–Schmidt sobre el intervalo  $[-1, 1]$  (De este procedimiento pueden obtenerse los llamados *polinomios de Legendre*).

#### Demostración:

Todo polinomio no nulo puede tener a lo sumo un número de raíces igual a su grado. Por tanto, sea  $n \in \mathbb{N}$  cualquiera,

$$\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n \equiv 0 \iff \alpha_i = 0 \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}$$

El sistema es linealmente independiente por definición. Apliquemos ahora el proceso de Gram–Schmidt.

$$\int_{-1}^1 x \cdot 1 \, dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 = 0 \Rightarrow p_1 = x - \frac{\langle x, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = x$$

$$\int_{-1}^1 x \cdot x^2 \, dx = \left[ \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^1 = 0 \quad \int_{-1}^1 x^2 \cdot 1 \, dx = \frac{2}{3} \quad p_2 = x^2 - \frac{2}{3\langle 1, 1 \rangle} 1 - \frac{0}{\langle x, x \rangle} x = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$\int_{-1}^1 x^3 \left( x^2 - \frac{1}{3} \right) dx = 0 = \int_{-1}^1 x^3 \cdot 1 dx$$

$$\int_{-1}^1 x^3 \cdot x dx = \frac{2}{5}$$

$$p_3 = x^3 - \frac{2}{5\langle x, x \rangle} x = x^3 - \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{2} x = x^3 - \frac{3}{5} x$$

El proceso de Gram-Schmidt no garantiza la ortonormalidad, sino únicamente la ortogonalidad. Tras normalizar, se obtienen los siguientes vectores.

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{45}{8}} \left( x^2 - \frac{1}{3} \right), \sqrt{\frac{175}{8}} \left( x^3 - \frac{3}{5}x \right) \right\}$$

#### 2.1.4 Ejercicio 4

Sea  $I := [0, 2\pi]$  y sea  $(\varphi_n)_{n=0}^\infty$  un sistema ortonormal en  $\mathcal{L}_2(I)$ . Demuestra los siguientes apartados:

(1) los siguientes enunciados son equivalentes:

- (a) dadas  $f$  y  $g$  en  $\mathcal{L}_2(I)$ ,  $\langle f, \varphi_n \rangle = \langle g, \varphi_n \rangle$  para todo  $n$  implica  $f \stackrel{\mu-a.e.}{=} g$ .
- (b) dada  $f \in \mathcal{L}_2(I)$ ,  $\langle f, \varphi_n \rangle = 0$  para todo  $n$  implica  $f \stackrel{\mu-a.e.}{=} 0$ .
- (c) Si  $T$  es un sistema ortonormal que contiene a  $(\varphi_n)_{n=0}^\infty$ , entonces  $T = (\varphi_n)_{n=0}^\infty$  (en cuyo caso se dice que  $(\varphi_n)_{n=0}^\infty$  es un sistema ortonormal maximal).

(2) Supón que  $(\varphi_n)_{n=0}^\infty$  satisface el enunciado (c). Demuestra que toda  $f \in \mathcal{L}_2(I)$  verifica

$$\left\| f - \sum_{k=0}^n \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\|_2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

¿Es  $(\varphi_n)_{n=0}^\infty$  una base (algebraica, también llamada de Hämäl) del espacio vectorial  $\mathcal{L}_2(I)$ ?

(3) Demuestra que los sistemas

$$\left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots \right)$$

y  $(e^{inx}/\sqrt{2\pi})_{n \in \mathbb{Z}}$  son sistemas ortonormales maximales.

**Demostración:**

(1) Veamos que se cumplen todas las implicaciones:

$a \Rightarrow b$  Se tiene al considerar  $g = 0$ .

$b \Rightarrow c$  Supongamos que existe  $f \in T \setminus \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

Al ser,  $T$  ortonormal,  $\{f\} \cup \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ha de serlo también. De este modo,  $\langle f, \varphi_n \rangle = 0 \forall n \in \mathbb{N}$ . Aplicando la hipótesis, tenemos que  $f \stackrel{\mu-a.e.}{=} 0$ . Sabemos por el primer ejercicio de esta sección que todo sistema ortonormal es linealmente independiente, lo que entra en contradicción con  $f \stackrel{\mu-a.e.}{=} 0$ .

$c \Rightarrow a$  Supongamos  $f, g \in \mathcal{L}_2([0, 2\pi])$  tales que  $\langle f, \varphi_n \rangle = \langle g, \varphi_n \rangle \forall n \in \mathbb{N}$ .

Supongamos además que  $f$  y  $g$  no son iguales en casi todo punto; es decir,  $f - g \neq 0$  en  $L_2([0, 2\pi])$ .

Sea  $T = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  Aplicando la hipótesis, para  $n \in \mathbb{N}$  cualquiera,

$$\langle f - g, \varphi_n \rangle = \langle f, \varphi_n \rangle - \langle g, \varphi_n \rangle = 0$$

De este modo,  $f - g$  es un vector no nulo ortogonal a todos los de  $T$ . Por tanto, normalizando,  $\left\{ \frac{f-g}{\|f-g\|} \right\} \cup T$  es un sistema ortonormal. Aplicando la hipótesis de maximalidad, ha de cumplirse  $\frac{f-g}{\|f-g\|} \stackrel{\mu-a.e.}{=} \varphi_j$  para cierto  $j \in \mathbb{N}$ .

Como  $T$  es ortonormal, tenemos que:

$$\|f - g\| \cdot \|\varphi_j\|^2 = \langle f - g, \varphi_j \rangle = \langle f, \varphi_j \rangle - \langle g, \varphi_j \rangle \neq 0$$

Hemos llegado a una contradicción.

(2) Como hemos demostrado la caracterización en el apartado anterior, suponer que el sistema ortonormal  $T$  verifica (c) es equivalente a suponer que verifica (a).

Por el resultado 4.1.5 de los apuntes de Teoría, sabemos que  $s := \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k$  converge y está bien definida. Sea  $j \in \mathbb{N}$  cualquiera,

$$\langle s, \varphi_j \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k, \varphi_j \right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \cdot \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle = \langle f, \varphi_j \rangle$$

Por tanto, en vista de la afirmación (a), es claro que  $f \xrightarrow{\mu-a.e.} s$ . Por Análisis Matemático I, sabemos que la norma es una aplicación continua. De este modo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{k=0}^n \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\| = \left\| f - \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\| = 0$$

La convergencia se da en norma, pero no tiene por qué ocurrir que  $f = s$ . Por tanto, sí sería una base de  $L_2(I)$ , pero no de  $\mathcal{L}_2(I)$  al no ser este último un espacio de Banach.

## §2. Funciones de variación acotada

Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función definida sobre un intervalo compacto no degenerado y sea  $P := \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b\}$  una partición finita de  $[a, b]$ . Llamamos variación de  $f$ , semi-variación positiva de  $f$  y semi-variación negativa de  $f$  respecto de  $P$  a los valores respectivos

$$V(f, P) := \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|,$$

$$V^+(f, P) := \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1}))^+,$$

$$V^-(f, P) := \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1}))^-,$$

donde, para  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x^+ := \max\{x, 0\}$  y  $x^- := \max\{-x, 0\}$ .

Como de costumbre, denotaremos por  $\mathcal{P}([a, b])$  al conjunto de todas las particiones finitas de  $[a, b]$ . Se llama variación de  $f$  al valor

$$V(f) := \sup\{V(f, P) : P \in \mathcal{P}([a, b])\}.$$

Si  $V(f) < \infty$ , se dice que  $f$  es de variación acotada. Las semi-variaciones positiva y negativa de  $f$  se definen como

$$V^+(f) := \sup\{V^+(f, P) : P \in \mathcal{P}([a, b])\}, \quad V^-(f) := \sup\{V^-(f, P) : P \in \mathcal{P}([a, b])\}.$$

### 2.2.1 Ejercicio 1

Demuestra que una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es de variación acotada si y sólo si sus semi-variaciones positiva y negativa son ambas finitas.

### Demostración:

Sea  $P := \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b\} \in \mathcal{P}([a, b])$  cualquiera, tenemos:

$$V(f, P) := \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1}))^+ + (f(t_i) - f(t_{i-1}))^- = V^+(f, P) + V^-(f, P)$$

Tomando supremos, llegamos a que  $V(f) \leq V^+(f) + V^-(f)$ . Por tanto, si las semi-variaciones positiva y negativa son finitas, también tendrá que serlo  $V(F)$ .

En cuanto a la otra implicación, supongamos ahora que  $V(f)^+ = \infty$  para ver que  $V(f) = \infty$  (el caso  $V^-(f) = \infty$  es análogo). Sea  $K \in \mathbb{R}$ ; por hipótesis, existe  $P \in \mathcal{P}([a, b])$  tal que  $V^+(f, P) > K$ . Por tanto,

$$V(f, P) = V^+(f, P) + V^-(f, P) \geq V^+(f, P) > K$$

### 2.2.2 Ejercicio 2

Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función de variación acotada tal que  $f(a) = 0$ . Demuestra que  $f = g - h$ , donde

$$g(x) = V^+(f; [a, x]), \quad h(x) = V^-(f; [a, x])$$

### Demostración:

Fijamos  $x \in [a, b]$  cualquiera. Sea  $P = \{a = t_0 < \dots < t_n = x\} \in \mathcal{P}([a, x])$  cualquiera, se cumple:

$$\begin{aligned} V^+(f|_{[a,x]}, P) - V^-(f|_{[a,x]}, P) &= \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1}))^+ - (f(t_i) - f(t_{i-1}))^- = \\ &= \sum_{i=1}^n f(t_i) - f(t_{i-1}) = f(x) - f(a) = f(x) \end{aligned}$$

Se tiene por ser telescopica la suma. Tomando supremos (podemos hacerlo adecuadamente al ser de variación acotada) se llega al resultado.

### 2.2.3 Ejercicio 3

Demuestra que toda función de variación acotada  $f$  sobre un intervalo compacto  $[a, b]$  puede descomponerse como  $f = g_1 - g_2$ , donde  $g_1$  y  $g_2$  son dos funciones crecientes y acotadas en  $[a, b]$ .

#### Demostración:

Por el ejercicio anterior, sabemos que para las siguientes funciones,

$$g_1(x) = V^+(f|_{[a,x]}) + f(a) \quad g_2(x) = V^-(f|_{[a,x]})$$

se cumple que  $f(x) = g_1(x) - g_2(x)$ . Veamos que  $g_2$  es monótona (el caso  $g_1$  es análogo).

Sean  $x, y \in [a, b]$  con  $x < y$ , veamos que  $g_2(x) \leq g_2(y)$ .

Sea  $P = \{a = t_0 < \dots < t_n = x\} \in \mathcal{P}([a, x])$ , consideramos  $\hat{P} := P \cup \{y\} \in \mathcal{P}([a, y])$ . Así,

$$\begin{aligned} V^-(f|_{[a,x]}, P) &= \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1}))^- \leq (f(y) - f(x))^- + \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1}))^- = \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} (f(t_i) - f(t_{i-1}))^- = V^-(f|_{[a,y]}, \hat{P}) \end{aligned}$$

En vista del primer ejercicio de esta sección, al ser  $f$  de variación acotada, también lo son  $g_1$  y  $g_2$  (luego son acotadas). Tomando supremos podemos ver que son crecientes.

### 2.2.4 Ejercicio 4

Demuestra que si una función  $f$  es de variación acotada, entonces todas sus discontinuidades son de salto finito o evitables.

#### Demostración:

Por el ejercicio anterior, sabemos que es posible descomponer  $f$  como  $f = g_1 - g_2$

con  $g_1, g_2$  funciones crecientes acotadas. Basta ver que las discontinuidades de una función  $g$  creciente son de salto finito. Para ello, veamos que existen siempre los límites laterales de  $g$ .

Fijado  $x$  cualquiera, consideramos el siguiente conjunto:

$\mathcal{A} := \{g(t) : t < x\}$ , que está acotado superiormente por ser  $g$  creciente. De este modo, podemos considerar  $A := \sup \mathcal{A}$ .

Por definición de supremo, para  $\varepsilon > 0$  cualquiera, existe  $\delta > 0$  tal que:

$$g(x - \delta) > A - \varepsilon$$

Al ser  $g$  creciente, para cada  $t \in (x - \delta, x)$ , se cumple:

$$A - \varepsilon < g(x - \delta) \leq g(t) \leq A \quad -A \leq -A < \varepsilon - A$$

De este modo, sumando,  $-\varepsilon < g(t) - A < \varepsilon$ . Tenemos que existe el límite izquierdo. Análogamente, podemos comprobar la existencia del derecho.

Volviendo al problema original, tenemos  $f = g_1 - g_2$  con  $g_1$  y  $g_2$  monótonas y acotadas. Por tanto, todas sus discontinuidades han de ser de salto finito. Al pasar a la resta, podrían producirse además discontinuidades evitables. Por ejemplo,

$$g_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad g_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Toda discontinuidad de  $f$  ha de corresponderse con una discontinuidad de  $g_1$  o de  $g_2$  (o de ambas a la vez), luego han de ser de salto finito o evitables.

### §3. Fallos en las condiciones de Dini o de Jordan

#### 2.3.1 Ejercicio 1

Consideremos la siguiente función:

$$f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longmapsto f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

extendida por periodicidad  $2\pi$  en  $\mathbb{R}$ . Demuestra que  $f$  es continua en  $\mathbb{R}$ , y que en  $x = 0$  no se verifica la condición de Jordan, pero sí la de Dini.

#### Demostración:

Para  $x = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0} t \sin\left(\frac{1}{t}\right) = 0 = f(0)$ : producto de un infinitésimo por una función acotada.

En el resto de  $[-\pi, \pi]$ ,  $f$  es claramente continua al ser producto de funciones continuas. Finalmente, por ser una función con simetría par, es continua en la frontera de las expansiones por periodicidad:

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = f(\pi) = \pi \sin\left(\frac{1}{\pi}\right) = -\pi \sin\left(-\frac{1}{\pi}\right) = f(-\pi) = \lim_{x \rightarrow -\pi^+} f(x)$$

Para ver que no se cumple la condición de Jordan, hemos de comprobar que  $f$  no es de variación acotada en  $[-\varepsilon, \varepsilon]$  para ningún  $\varepsilon > 0$ . Es decir,

$$\forall \varepsilon > 0, \forall K \in \mathbb{R} \quad \exists P \in \mathcal{P}([-\varepsilon, \varepsilon]) : V(f, P) > K$$

Consideramos la siguiente sucesión:  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{2}{n\pi}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ . Sea  $\varepsilon > 0$ , sea  $K \in \mathbb{R}$ . Por la propiedad arquimediana, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $a_n \in [-\varepsilon, \varepsilon]$  para todo  $n \geq n_0$ . Dado  $n \geq n_0$ , evaluamos  $f$  en un término de la sucesión:

$$f(a_n) = \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \cdot b_n \quad \text{con } b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } \text{mod}_2(n) = 0 \\ 1 & \text{si } \text{mod}_4(n) = 1 \\ -1 & \text{si } \text{mod}_4(n) = 3 \end{cases}$$

Comparando con la expresión de la variación de  $f$  en una partición, tenemos que:

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |f(a_k) - f(a_{k-1})| \geq \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{k-1} > \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{k-1} = \infty$$

Por tanto, podemos tomar un subconjunto finito de la sucesión contenido en  $[-\varepsilon, \varepsilon]$  tal que la variación que induzca cualquier partición que lo contenga sea mayor que  $K$ . Hemos comprobado que no se cumple la condición de Jordan.

Veamos ahora que sí se verifica la condición de Dini. Como ya hemos comprobado antes, la función  $f$  tiene simetría par. Por tanto, para  $t > 0$  se tiene:

$$g(t) := \frac{f(t) + f(-t)}{2} = \frac{2f(t)}{2} = f(t)$$

Tomando límites,  $g(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = 0$ , como ya estudiamos antes. De este modo, sea  $\delta \in (0, \pi)$  cualquiera,

$$\frac{g(t) - g(0^+)}{t} = \frac{f(t)}{t} = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{t}\right) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases} \in L_1([0, \delta])$$

Es  $L_1([0, \delta])$  en virtud del criterio de integración de Lebesgue, pues la función es acotada y tiene un conjunto de discontinuidades de medida nula. Hemos comprobado que se cumple la condición de Dini.

### 2.3.2 Ejercicio 2

Consideremos la siguiente función:

$$f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longmapsto f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\log\left(\frac{1}{|x|}\right)} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

extendida por periodicidad  $2\pi$  en  $\mathbb{R}$ . Demuestra que  $f$  es continua en  $\mathbb{R}$ , y que en  $x = 0$  no se verifica la condición de Dini, pero sí la de Jordan.

### Demostración:

En primer lugar, veamos que es continua. Como  $\lim_{x \rightarrow \infty} \log(x) = \infty$ , tenemos que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$ . Además, al tener  $f$  simetría par tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = f(\pi) = f(-\pi) = \lim_{x \rightarrow -\pi^+}$$

Por tanto,  $f$  es continua en  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

Veamos que  $f$  sí cumple la condición de Jordan. Sea  $\varepsilon \in (0, \pi)$  cualquiera, tenemos que  $f$  es monótona en  $[-\varepsilon, 0]$  y en  $[0, \varepsilon]$ , luego es de variación acotada. Como es continua en  $\mathbb{R}$ , es  $L_1([0, 2\pi])$ . Por tener simetría par,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t) + f(-t)}{2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0) = 0$$

Veamos ahora que no cumple la condición de Dini. Reutilizando lo explicado para la Condición de Jordan, fijamos  $\delta > 0$  arbitrariamente pequeño. Se tiene:

$$g(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} = f(t) \quad \frac{g(t) - g(0^+)}{t} = \frac{g(t)}{t} = \frac{1}{t \cdot \log\left(\frac{1}{|t|}\right)}$$

$$\int_0^\delta \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\log\left(\frac{1}{t}\right)} dt \stackrel{u=\log\left(\frac{1}{t}\right)}{=} \int_{-\infty}^{\log\left(\frac{1}{\delta}\right)} -e^{-u} \frac{1}{e^{-u}} \cdot \frac{1}{u} du = \int_{\log\left(\frac{1}{\delta}\right)}^{\infty} \frac{1}{u} du = \infty$$

La integral diverge, luego no se cumple la condición de Dini.

### 2.3.3 Ejercicio 3

Consideremos la función  $h(x) = f(x) \cdot \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$ , donde  $f$  es la función del ejercicio anterior. Si la extendemos por periodicidad en  $\mathbb{R}$ , ¿dónde es continua? ¿Satisface

la condición de Jordan? ¿Y la de Dini?

$$h : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longmapsto h(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2(\frac{1}{x})}{\log(\frac{1}{|x|})} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

### Demostración:

En primer lugar, tenemos que la función es continua en 0, pues  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0 = h(0)$  al ser  $f$  un infinitésimo y  $\sin^2(\frac{1}{x})$  una función acotada. Una vez más, la función tiene simetría par, luego:

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} h(x) = h(\pi) = h(-\pi) = \lim_{x \rightarrow -\pi^+} h(x)$$

Por tanto, tenemos que  $h$  es continua en  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Veamos que no verifica la condición de Jordan. Consideramos la siguiente sucesión:  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\frac{2}{n\pi})_{n \in \mathbb{N}}$ . Para  $\varepsilon > 0$  cualquiera, la sucesión estará contenida en  $[-\varepsilon, \varepsilon]$  a partir de cierto término  $n_0$ . Dado  $n \geq n_0$ , comparando con la variación de  $h$ ,

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |f(a_k) - f(a_{k-1})| \geq \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{\log(\frac{\pi}{2} \cdot k)} = \infty$$

Como la serie diverge, podemos tomar sumas parciales arbitrariamente grandes. Así, para cada  $K \in \mathbb{R}$  es posible tomar  $P \in \mathcal{P}([-\varepsilon, \varepsilon])$  tal que  $V(h, P) > K$ . Concluimos que no cumple la condición de Jordan.

Veamos que no cumple la condición de Dini. Sea  $\delta > 0$  cualquiera, sabemos que:

$$g(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} = f(t) \quad \hat{g}(t) := \frac{g(t) - g(0^+)}{t} = \frac{g(t)}{t} = \frac{\sin^2(\frac{1}{t})}{t \cdot \log(\frac{1}{|t|})}$$