Les fonctions logarithmiques

Exercice 1

1. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln^4(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt[5]{x^2}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$
   $\lim\limits_{x\to 0^+} x^3\ln^2(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)\ln(x+2)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)$
2. Montrer que $(\forall x>0)$ $x\ln(x) \geqslant x-1$
3. Soit (S_n) la suite définie par $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{n+k}$.
   (a) Montrer que $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$ $\dfrac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln(k) < \dfrac{1}{k}$.
   (b) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $\ln(2 - \dfrac{1}{n+1}) < S_n < \ln(2)$.
   (c) Montrer que (S_n) est convergente et calculer sa limite .

Exercice 2

Soit n un entier naturel non nul . On considère la fonction f_n définie sur $]0,+\infty[$ par :
$f_n(x) = \ln(x) - \dfrac{n}{x}$. (C_n) est sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. (a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.
   (b) Étudier les branches infinies de (C_n).
   (c) Calculer $f_n'(x)$ pour tout $x>0$, et dresser le tableau de variations de f_n .
2. Construire (C_2) .
3. (a) Montrer que l´équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution a_n dans $]0,+\infty[$
   (b) Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ sur $]0,+\infty[$.
   (c) En déduire la monotonie de (a_n).
4. (a) Montrer que $(\forall x>0)$ $\ln(x) < x$
   (b) Montrer que $\lim a_n = +\infty$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) & \text{si } x>0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

(C_f) est sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. (a) Étudier la continuité de f en 0^+.
   (b) Étudier la dérivabilité de f en 0^+.
   (c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2. (a) Montrer que $(\forall a>0)$ $\ln(\dfrac{a+1}{a}) > \dfrac{1}{a+1}$
   (b) Étudier les variations de f .
3. Construire (C_f)
4. (a) Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ vers un intervalle à déterminer .
   (b) Résoudre dans $[0,+\infty[$ l´équation $f(x) = f^{-1}(x)$

Exercice 5

Partie I : Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{2x^2}{1+x^2}-\ln(1+x^2)$.

1. Étudier les variations de g .
2. Montrer que l´équation $g(x)=0$ admet une solution α telle que $\dfrac{7}{4}<\alpha<2$.
3. Déduire le signe de $g(x)$ sur $[0,+\infty[$.

Partie II : Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln(1+x^2)}{x} & \text{si} \quad x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

(C_f) est sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. (a) Étudier la parité de f .
   (b) Étudier la dérivabilité de f en 0^+.
2. Étudier les variations de f .
3. (a) Montrer que $(\forall x\in[0,+\infty[) \quad \ln(1+x)\leqslant x$.
   (b) Donner une équation cartésienne de la droite (Δ) tangente à (C_f) au point O .
   (c) Étudier la position relative de (C_f) et (Δ).
4. Construire (C_f).

Exercice 6

Partie I : Soit g la fonction définie par $g(x)=\ln|x-2|-\dfrac{x-1}{x-2}$.

1. Déterminer D_g et calculer les limites de $g(x)$ à ses bornes .
2. Calculer $g'(x)$ pour tout x de D_g et dresser le T.V de g.
3. Montrer que l´équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans $]2,+\infty[$
   et que $4<\alpha<6$.
4. Déduire le signe de $g(x)$ sur $[0,+\infty[$.

Partie II : Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x-1}{\ln|x-2|} & \text{si} \quad x\neq \text{ et } x\neq 2 \\ f(1)=-1 \quad , \quad f(2)=0 \end{cases}$.

(C_f) est sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. Déterminer D_g et étudier la continuité de f en 1 et en 2 .
2. (a) Montrer que $(\forall t>0) \quad t-\dfrac{t^2}{2}\leqslant \ln(1+t)\leqslant t-\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{3}$
   (b) Étudier la dérivabilité de f en 1^+.
3. Étudier la dérivabilité de f en 2 .Interpréter graphiquement le résultat.
4. Calculer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$ et dresser le T.V de f.
5. (a) Étudier les branches infinies de (C_f).
   (b) Montrer que $f(\alpha)=\alpha-2$
6. Construire (C_f).(On prend $\alpha=5,6$ et on admet que $f'_g(1)=\dfrac{1}{2}$)