Semaine 8 – Équivalences logiques et lois de Boole

Objectifs pédagogiques

- Comprendre les lois de l'algèbre de Boole.
- Reconnaître et démontrer des équivalences logiques à l'aide de tables de vérité.
- Simplifier des expressions logiques.
- Appliquer ces simplifications pour optimiser des conditions dans des scripts ou filtres.

Contexte pour l'analyse de données

En analyse de données, les expressions logiques sont souvent utilisées pour :

- **Filtrer des jeux de données** avec des conditions complexes.
- **Optimiser des requêtes** en évitant la redondance ou les calculs inutiles.
- **Tester des cas** dans des boucles ou des décisions conditionnelles.

Contenu du cours

1. Équivalences logiques

Deux expressions sont équivalentes si elles ont la même table de vérité.

Exemples courants :

- Double négation : $\neg(\neg A) \equiv A$
- Idempotence: $A \lor A \equiv A$, $A \land A \equiv A$
- Domination : $A \lor \text{Vrai} \equiv \text{Vrai}$, $A \land \text{Faux} \equiv \text{Faux}$
- Loi de De Morgan :
  - $\neg(A \land B) \equiv \neg A \lor \neg B$
  - $\neg(A \lor B) \equiv \neg A \land \neg B$

2. Loi de l'algèbre de Boole

Nom	Expression	Équivalence	Interprétation / Signification
Identité	$A \wedge \text{Vrai} \equiv A$; $A \vee \text{Faux} \equiv A$	A reste inchangé	Combiner A avec Vrai (en ET) ou Faux (en OU) ne change pas sa valeur.
Domination	$A \wedge \text{Faux} \equiv \text{Faux}$ $A \vee \text{Vrai} \equiv \text{Vrai}$	Résultat imposé	Le Faux impose le résultat dans un ET ; le Vrai impose le résultat dans un OU.
Idempotence	$A \vee A \equiv A$ $A \wedge A \equiv A$	Pas de duplication	Répéter la même variable n'a aucun effet.
Inverse (complémentaire)	$A \vee \neg A \equiv \text{Vrai}$ $A \wedge \neg A \equiv \text{Faux}$	Contradiction totale	Une variable et son contraire couvrent tout (toujours vrai) ou s'annulent (toujours faux).
Double négation	$\neg(\neg A) \equiv A$	Retour à l'original	Nier deux fois revient à la valeur initiale.
Commutativité	$A \vee B \equiv B \vee A$ $A \wedge B \equiv B \wedge A$	Ordre sans importance	L'ordre des variables n'influence pas le résultat.
Associativité	$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$	Regroupement libre	On peut regrouper les opérations sans changer le résultat.
Distributivité	$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Développement	Fonctionne comme la distributivité en arithmétique.
De Morgan	$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$	Inversion OU/ET	La négation inverse le type de liaison (OU devient ET, et inversement).

3. Méthode de démonstration d'équivalence

- Construire les **tables de vérité** des deux expressions.
- Vérifier qu'elles produisent exactement les **mêmes valeurs** pour toutes les combinaisons de A, B, (et C s'il y en a).

Exemple :

Comparer (¬A ∨ B) et (A ⇒ B)

A	B	¬A	¬A ∨ B	A ⇒ B
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

Exemple en langage naturel
Énoncé logique : S'il pleut (A), alors la route est mouillée (B).
C'est une **implication** : $A \Rightarrow B$

Voyons les cas possibles :

Il pleut (A)	***La route est mouillée (B)***	***"Si il pleut, alors la route est mouillée"***	***¬A ∨B***
Faux (0)	*Faux (0)*	✅ *Vrai (car il ne pleut pas, donc la promesse n'est pas violée)*	✅
Faux (0)	*Vrai (1)*	✅ *Vrai (il ne pleut pas, mais la route est quand même mouillée)*	✅
Vrai (1)	*Faux (0)*	❌ *Faux (il pleut, mais la route n'est* ***pas*** *mouillée — contradiction)*	❌
Vrai (1)	*Vrai (1)*	✅ *Vrai (il pleut et la route est bien mouillée)*	✅

Les deux colonnes sont identiques ⇒ expressions équivalentes.

Travaux dirigés

Exercice 1 : Tables de vérité

Vérifier si les expressions suivantes sont équivalentes :

1. $\neg (A \land B) \equiv \neg A \lor \neg B$
2. $A \land (A \lor B) \equiv A$
3. $A \land (B \lor C) \equiv (A \land B) \lor (A \land C)$
4. $(A \land B) \lor (A \land \neg B) \equiv A$
5. $\neg (A \lor B) \equiv \neg A \land \neg B$
6. $\neg (A \Rightarrow B) \equiv A \land \neg B$

Exercice 2 – Utilisation de De Morgan

Simplifie :

a) $\neg(A \lor B)$
b) $\neg(A \land B)$
c) $\neg(\neg A \lor \neg B)$
Indice : Applique les lois de De Morgan et de double négation.

Exercice 3 – Absorption

Simplifie :

a) $A \lor (A \land B)$
b) $A \land (A \lor B)$
c) $A \lor (B \land A) \lor (A \land C)$
Indice : Utilise la loi d'absorption pour réduire les répétitions inutiles.

Exercice 4 – Distributivité

Simplifie :

a) $A \land (B \lor C)$
b) $(A \lor B) \land (A \lor C)$
c) $(A \land B) \lor (A \land \neg B)$
Indice : Utilise la **distributivité** puis les **lois de complément et d'identité**.

Exercice 5 – Combinaison de plusieurs lois

Simplifie au maximum :

a) $\neg(A \wedge \neg B)$
b) $(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$
c) $(\neg A \vee B) \wedge (A \vee B)$
d) $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B)$
Indice : Combine **De Morgan**, **distributivité**, **absorption**, et **idempotence**.

Exercice 6 – Expressions avec implication

Simplifie :

a) $A \Rightarrow B$
b) $\neg(A \Rightarrow B)$
c) $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$
d) $(A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow \neg B)$

Indice : Rappelle-toi que $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$.

Exercice 7 – Équivalences complexes

Simplifie :

a) $\neg(\neg A \vee \neg B) \vee (A \wedge B)$
b) $(\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)$
c) $(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B)$

Indice : Observe les répétitions et cherche à factoriser avec **distributivité**.