

05: Fibonacci延迟器

许传奇 PB16021546

1 题目

用16807产生器测试随机数序列中满足关系 $X_{n-1} < X_{n+1} < X_n$ 的比重。讨论Fibonacci延迟器中出现这种关系的比重。

2 原理与算法

2.1 原理

2.1.1 Lehmer线性同余法

Lehmer线性同余法是最简单的均匀随机数的产生法，具体步骤如下：

$$I_{n+1} = (aI_n + b) \bmod m \quad (1)$$

$$x_n = I_n / m \quad (2)$$

其中，整数 I_1, I_2, \dots 的取值是0至 $m-1$ 中的一个值，故实数 x_n 是严格小于1的，但偶尔会为0。 a 是乘子， b 是增量， m 是模数，如何选择它们决定了产生器的质量。

2.1.2 16807产生器

16807是上面提到的参数选择方案之一，被认为是“最低标准”的产生器，取值如下：

$$a = 7^5 = 16807, b = 0, m = 2^{31} - 1 = 2147483647 \quad (3)$$

即16807随机数产生器为：

$$I_{n+1} = 16807 I_n \bmod 2147483647 \quad (4)$$

$$x_n = I_n / m \quad (5)$$

16807产生器通过了许多理论测试和大量使用的考验，被认为是32位机上最有效的产生器。

2.1.3 Fibonacci延迟器

Fibonacci延迟器是用序列中的两个整数进行操作得到后续的整数，如下所示：

$$I_n = I_{n-p} \otimes I_{n-q} \bmod m \quad (6)$$

其中，操作符 \otimes 可以是：加、减、乘、XOR；整数对 $[p, q]$ 表示延迟。

Fibonacci延迟器较线性同余法的优势在于它的周期非常长，32位机上的最大周期为 $(2^p - 1) \times 2^{31}$, ($p > q$)。

2.2 算法

源程序用一个double型数组保存随机数产生器产生的随机数，用一个long long型数组保存Fibonacci延迟器运行中需要的整数序列。

函数部分包括三个主要的函数：16807随机数产生器函数、Fibonacci延迟器函数和比重计算函数：

1. 16807随机数产生器函数RNG_16807:

输入参数为：double型数组x、产生的随机数个数num与起始种子值start。

函数以start为起始值，根据Schrage方法与16807的参数生成num个伪随机数，保存数组x中。

2. Fibonacci延迟器函数RNG_Fibonacci:

输入参数为：long long型数组I、double型数组x、产生的随机数的个数num、起始种子值start、Fibonacci延迟器延迟p与q。

函数以start为起始值，先以16807随机数产生器的产生方式产生1到 $\max(p, q)$ 个初始值作为Fibonacci延迟器需要的起始值，保存在数组I与x中。然后根据Fibonacci延迟器的方法生成余下的随机数，直到数量达到num个。

3. 比重计算函数Count:

输入参数为：double型数组x和随机数个数num。

起始记数count为0。遍历double型数组前num个数，当满足关系 $X_{n-1} < X_{n+1} < X_n$ 时，记数+1。遍历完毕后，返回 $\text{count} / (\text{num} - 2)$ ，为其比重。

主程序则包括三个主要的部分：

1. 16807随机数产生器单个起始值的数据输出:

输入起始种子值start，程序将算出一系列随机数个数num下由16807产生器产生的随机数中满足关系 $X_{n-1} < X_{n+1} < X_n$ 的比重。

用来研究16807随机数产生器给定种子值的比重情况。

2. 16807随机数产生器多个起始值的数据输出:

输出一系列随机数个数num下由16807产生器产生的随机数中满足关系 $X_{n-1} < X_{n+1} < X_n$ 的比重，其中每个num值有一系列start作为起始值，start是随机生成的随机数。

用来研究16807随机数产生器不同起始种子值与随机数个数下的比重情况。

3. Fibonacci延迟器多个起始值的数据输出：

输入Fibonacci延迟器的p、q值(或者由随机数随机产生)。

输出一系列随机数个数num下由Fibonacci延迟器产生的随机数中满足关系 $X_{n-1} < X_{n+1} < X_n$ 的比重，其中每个num值有一系列start作为起始值，start是随机生成的随机数。

用来研究Fibonacci延迟器不同起始种子值与随机数个数下的比重情况。

3 源文件使用说明

编译并运行05Fibonacci.cpp文件，弹出控制台，输入起始值与Fibonacci延迟器延迟p、q。

随后计算机进行计算，依次输出：

16807随机数产生器单个起始值的数据输出、16807随机数产生器多个起始值的数据输出、Fibonacci延迟器多个起始值的数据输出。

并将各个步骤中的数据保存到文件“16807,start=输入的num.txt”、“16807,start=0.txt”、“Fibonacci,输入的p,输入的q.txt”中。

编译并运行plot.py，可以绘出相应的曲线。

4 计算结果及具体分析

4.1 16807随机数产生器中所占比重

输入起始值为1，我们得到以下数据：

16807随机数产生器中所占比重	
N = 100	Count = 0.153061
N = 200	Count = 0.176768
N = 400	Count = 0.168342
N = 800	Count = 0.165414
N = 1600	Count = 0.165832
N = 3200	Count = 0.165729
N = 6400	Count = 0.163489
N = 12800	Count = 0.164557
N = 25600	Count = 0.164388
N = 51200	Count = 0.165221
N = 102400	Count = 0.165423
N = 204800	Count = 0.166144
N = 409600	Count = 0.166402
N = 819200	Count = 0.166657
N = 1638400	Count = 0.166854
N = 3276800	Count = 0.166749
N = 6553600	Count = 0.166588
N = 13107200	Count = 0.166621
N = 26214400	Count = 0.166695
N = 52428800	Count = 0.166656
N = 104857600	Count = 0.166675
N = 209715200	Count = 0.166682

图 1: 16807随机数产生器比重，start=1

绘出图像，如图所示：

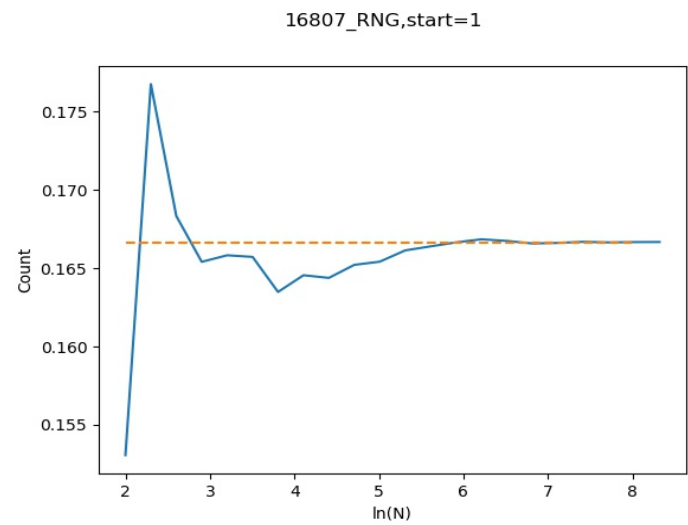


图 2: 16807随机数产生器比重，start=1

可以看出，随着随机数个数增多，比重逐渐趋近于1/6。
我们试验不同的起始值，观察这个结果是否与起始值有关。
利用随机数随机生成起始值，得到下图所示数据：

16807随机数产生器中所占比重										
Num	27816	12015	23243	19537	28893	20111	28518	19274	30679	32568
N = 100	0.1224	0.1633	0.1735	0.1735	0.1020	0.1837	0.1633	0.1020	0.1837	0.1837
N = 200	0.1566	0.1667	0.1515	0.1515	0.1364	0.1869	0.1869	0.1616	0.1515	0.1667
N = 400	0.1834	0.1608	0.1583	0.1683	0.1608	0.1859	0.1910	0.1608	0.1784	0.1683
N = 800	0.1792	0.1604	0.1692	0.1679	0.1617	0.1692	0.1729	0.1717	0.1754	0.1704
N = 1600	0.1696	0.1665	0.1640	0.1690	0.1577	0.1765	0.1721	0.1702	0.1702	0.1627
N = 3200	0.1676	0.1720	0.1592	0.1682	0.1542	0.1754	0.1698	0.1664	0.1707	0.1651
N = 6400	0.1676	0.1680	0.1611	0.1705	0.1654	0.1744	0.1697	0.1630	0.1677	0.1657
N = 12800	0.1678	0.1660	0.1621	0.1696	0.1644	0.1736	0.1671	0.1669	0.1674	0.1617
N = 25600	0.1683	0.1643	0.1646	0.1694	0.1658	0.1701	0.1676	0.1658	0.1668	0.1649
N = 51200	0.1682	0.1656	0.1675	0.1681	0.1667	0.1691	0.1665	0.1658	0.1666	0.1677
N = 102400	0.1678	0.1654	0.1672	0.1679	0.1669	0.1682	0.1670	0.1667	0.1667	0.1681
N = 204800	0.1669	0.1660	0.1672	0.1670	0.1673	0.1674	0.1675	0.1663	0.1667	0.1676
N = 409600	0.1670	0.1663	0.1667	0.1672	0.1671	0.1668	0.1673	0.1662	0.1667	0.1666
N = 819200	0.1670	0.1669	0.1671	0.1668	0.1669	0.1668	0.1671	0.1662	0.1670	0.1669
N = 1638400	0.1668	0.1668	0.1667	0.1666	0.1669	0.1665	0.1671	0.1664	0.1668	0.1668
N = 3276800	0.1665	0.1667	0.1666	0.1665	0.1669	0.1666	0.1669	0.1665	0.1668	0.1669
N = 6553600	0.1666	0.1666	0.1667	0.1666	0.1667	0.1667	0.1667	0.1666	0.1667	0.1669
N = 13107200	0.1666	0.1667	0.1667	0.1666	0.1666	0.1667	0.1666	0.1666	0.1667	0.1668
N = 26214400	0.1666	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1668	0.1666	0.1666	0.1667
N = 52428800	0.1666	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1666	0.1667
N = 104857600	0.1666	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667
N = 209715200	0.1666	0.1667	0.1667	0.1666	0.1667	0.1667	0.1667	0.1666	0.1667	0.1667

图 3: 16807随机数产生器比重，多随机起始值

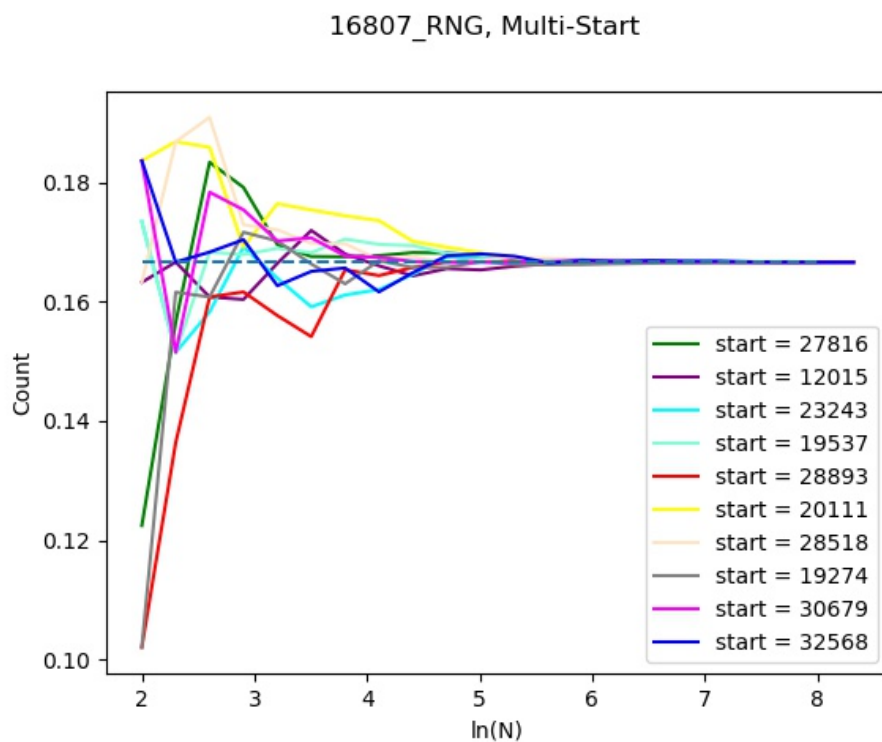


图 4: 16807随机数产生器比重, 多随机起始值

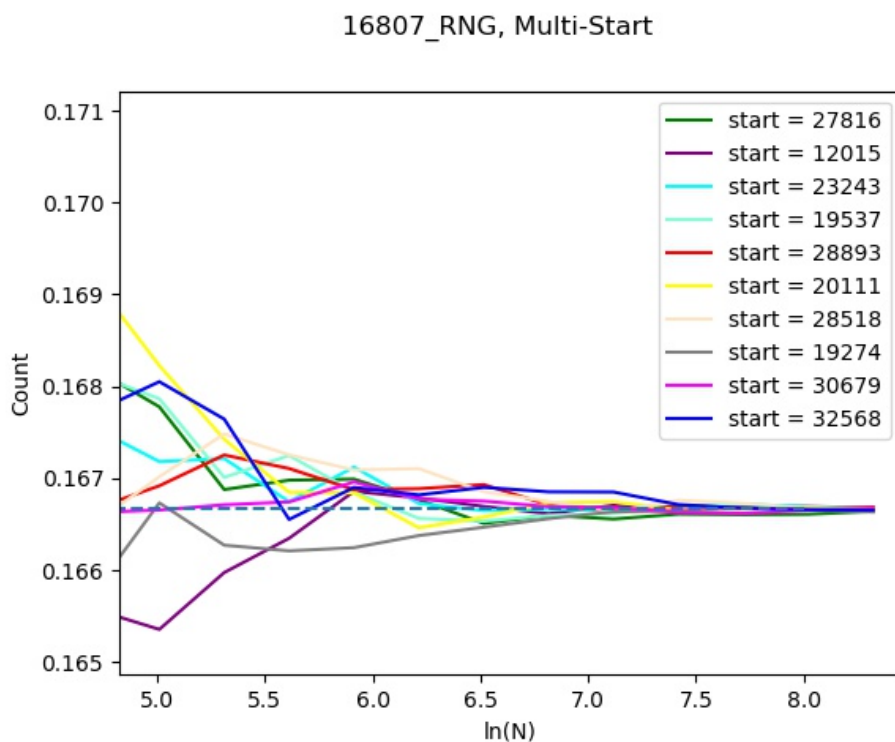


图 5: 16807随机数产生器比重, 多随机起始值 (尾端放大)

可以看出, 随着随机数个数增多, 尽管一开始比重差别很大, 最后仍然逐渐趋近于 $1/6$ 。

因此，起始值对16807中满足关系 $X_{n-1} < X_{n+1} < X_n$ 的比重的影响在随机数个数很多的情况下几乎可以忽略不计。

4.2 Fibonacci延迟器中所占比重

首先讨论为Fibonacci延迟器中的操作符是加法时的结果：

4.2.1 延迟 $p \neq q$

输入 p 、 q 分别为1、2，得到如下结果：

Fibonacci延迟产生器中所占比重											
$p = 1, q=2$											
Num	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
N = 100	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
N = 200	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
N = 400	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
N = 800	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
N = 1600	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
N = 3200	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
N = 6400	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
N = 12800	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
N = 25600	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
N = 51200	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
N = 102400	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
N = 204800	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
N = 409600	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
N = 819200	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
N = 1638400	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
N = 3276800	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
N = 6553600	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
N = 13107200	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

图 6: Fibonacci延迟器比重， $p=1$ ， $q=2$ ，多随机起始值

可以看到比重都为0，出现此结果的原因将在结果讨论中解释。

改变 p 、 q 值，得到如下一系列的结果：

Fibonacci随机数产生器中所占比重										
p = 1, q = 3										
Num	9566	23685	17717	17510	12291	13008	5611	13505	8121	26771
N = 100	0.1429	0.1224	0.1224	0.2245	0.1531	0.1531	0.1837	0.1224	0.1633	0.1327
N = 200	0.1717	0.1061	0.1566	0.1970	0.1768	0.1414	0.1919	0.1515	0.1616	0.1465
N = 400	0.1859	0.1281	0.1533	0.1784	0.1683	0.1533	0.1859	0.1608	0.1709	0.1508
N = 800	0.1855	0.1391	0.1466	0.1679	0.1541	0.1541	0.1792	0.1729	0.1704	0.1692
N = 1600	0.1727	0.1558	0.1621	0.1627	0.1621	0.1665	0.1802	0.1633	0.1652	0.1671
N = 3200	0.1679	0.1588	0.1742	0.1701	0.1623	0.1629	0.1717	0.1654	0.1667	0.1620
N = 6400	0.1640	0.1627	0.1715	0.1711	0.1641	0.1638	0.1668	0.1622	0.1701	0.1610
N = 12800	0.1643	0.1630	0.1705	0.1690	0.1656	0.1652	0.1696	0.1614	0.1668	0.1635
N = 25600	0.1666	0.1641	0.1689	0.1681	0.1656	0.1676	0.1664	0.1667	0.1664	0.1640
N = 51200	0.1671	0.1660	0.1687	0.1682	0.1655	0.1677	0.1670	0.1668	0.1672	0.1639
N = 102400	0.1661	0.1663	0.1654	0.1673	0.1652	0.1670	0.1659	0.1664	0.1670	0.1653
N = 204800	0.1660	0.1660	0.1660	0.1675	0.1662	0.1669	0.1672	0.1657	0.1668	0.1659
N = 409600	0.1668	0.1662	0.1663	0.1675	0.1659	0.1666	0.1661	0.1660	0.1667	0.1667
N = 819200	0.1666	0.1669	0.1664	0.1667	0.1663	0.1663	0.1667	0.1665	0.1667	0.1666
N = 1638400	0.1663	0.1671	0.1666	0.1667	0.1666	0.1664	0.1668	0.1665	0.1667	0.1665
N = 3276800	0.1665	0.1667	0.1668	0.1669	0.1668	0.1667	0.1667	0.1666	0.1664	0.1666
N = 6553600	0.1666	0.1664	0.1666	0.1667	0.1666	0.1667	0.1667	0.1666	0.1666	0.1666
N = 13107200	0.1665	0.1665	0.1667	0.1668	0.1666	0.1666	0.1667	0.1666	0.1666	0.1666

图 7: Fibonacci延迟器比重, p=1, q=3, 多随机起始值

Fibonacci随机数产生器中所占比重										
p = 2, q = 3										
Num	9916	26885	28640	3612	1838	7184	10964	27967	5389	24287
N = 100	0.1633	0.1633	0.1633	0.1531	0.1429	0.1837	0.1735	0.1633	0.1837	0.1735
N = 200	0.1768	0.1667	0.1616	0.1515	0.1616	0.1717	0.1717	0.1566	0.1667	0.1768
N = 400	0.1734	0.1709	0.1583	0.1583	0.1683	0.1709	0.1809	0.1683	0.1608	0.1608
N = 800	0.1754	0.1692	0.1617	0.1591	0.1629	0.1617	0.1704	0.1679	0.1604	0.1642
N = 1600	0.1758	0.1633	0.1621	0.1652	0.1621	0.1640	0.1702	0.1652	0.1602	0.1665
N = 3200	0.1710	0.1654	0.1635	0.1632	0.1645	0.1660	0.1673	0.1698	0.1645	0.1651
N = 6400	0.1668	0.1654	0.1649	0.1640	0.1676	0.1658	0.1654	0.1691	0.1635	0.1652
N = 12800	0.1678	0.1660	0.1671	0.1649	0.1683	0.1653	0.1656	0.1665	0.1657	0.1666
N = 25600	0.1677	0.1663	0.1672	0.1645	0.1667	0.1661	0.1665	0.1673	0.1660	0.1676
N = 51200	0.1678	0.1670	0.1659	0.1656	0.1667	0.1667	0.1660	0.1671	0.1668	0.1675
N = 102400	0.1677	0.1671	0.1661	0.1660	0.1667	0.1674	0.1666	0.1665	0.1664	0.1674
N = 204800	0.1671	0.1667	0.1663	0.1660	0.1663	0.1670	0.1669	0.1667	0.1668	0.1670
N = 409600	0.1668	0.1668	0.1665	0.1661	0.1663	0.1669	0.1669	0.1667	0.1669	0.1669
N = 819200	0.1668	0.1666	0.1666	0.1664	0.1667	0.1667	0.1666	0.1665	0.1668	0.1668
N = 1638400	0.1667	0.1666	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1666	0.1669	0.1668
N = 3276800	0.1666	0.1666	0.1666	0.1667	0.1666	0.1667	0.1668	0.1667	0.1668	0.1668
N = 6553600	0.1666	0.1665	0.1667	0.1666	0.1666	0.1667	0.1667	0.1666	0.1668	0.1667
N = 13107200	0.1667	0.1666	0.1667	0.1666	0.1667	0.1667	0.1667	0.1666	0.1667	0.1667

图 8: Fibonacci延迟器比重, p=2, q=3, 多随机起始值

我们可以看到, 这些比重最终都趋向于 $1/6$, 与16807随机数产生的结果一致。

为了排除p、q的偶然性，同时为了验证p、q较大时的结果，我们随机产生p、q，得到以下结果：

Fibonacci随机数产生器中所占比重										
p = 2927, q = 28431										
Num	6801	19417	14281	25358	2222	879	27258	8416	9928	5809
N = 100	0.1939	0.1633	0.1429	0.1735	0.1531	0.1837	0.2041	0.1735	0.1224	0.1633
N = 200	0.1919	0.1566	0.1667	0.1616	0.1919	0.1616	0.1768	0.1869	0.1414	0.1616
N = 400	0.1809	0.1809	0.1633	0.1583	0.1809	0.1633	0.1633	0.1658	0.1382	0.1583
N = 800	0.1717	0.1692	0.1642	0.1479	0.1880	0.1566	0.1792	0.1617	0.1441	0.1679
N = 1600	0.1702	0.1715	0.1733	0.1571	0.1796	0.1683	0.1702	0.1633	0.1527	0.1777
N = 3200	0.1714	0.1676	0.1770	0.1639	0.1782	0.1689	0.1676	0.1632	0.1645	0.1707
N = 6400	0.1697	0.1663	0.1705	0.1663	0.1741	0.1655	0.1655	0.1647	0.1691	0.1693
N = 12800	0.1651	0.1648	0.1692	0.1658	0.1716	0.1671	0.1646	0.1657	0.1695	0.1686
N = 25600	0.1670	0.1634	0.1677	0.1657	0.1677	0.1666	0.1667	0.1657	0.1690	0.1684
N = 51200	0.1668	0.1640	0.1668	0.1652	0.1679	0.1666	0.1663	0.1670	0.1681	0.1671
N = 102400	0.1669	0.1658	0.1658	0.1670	0.1671	0.1667	0.1662	0.1671	0.1661	0.1668
N = 204800	0.1672	0.1656	0.1654	0.1667	0.1678	0.1666	0.1667	0.1671	0.1655	0.1664
N = 409600	0.1669	0.1662	0.1662	0.1664	0.1673	0.1670	0.1670	0.1673	0.1662	0.1667
N = 819200	0.1669	0.1664	0.1664	0.1664	0.1667	0.1666	0.1670	0.1669	0.1661	0.1664
N = 1638400	0.1666	0.1667	0.1663	0.1668	0.1666	0.1666	0.1667	0.1665	0.1666	0.1664
N = 3276800	0.1666	0.1667	0.1666	0.1667	0.1665	0.1665	0.1668	0.1666	0.1667	0.1665
N = 6553600	0.1667	0.1667	0.1667	0.1666	0.1666	0.1664	0.1667	0.1665	0.1666	0.1666
N = 13107200	0.1667	0.1668	0.1666	0.1666	0.1667	0.1666	0.1667	0.1666	0.1667	0.1667

图 9: Fibonacci延迟器比重, p=2927, q=28431, 多随机起始值

Fibonacci随机数产生器中所占比重										
p = 7800, q = 8734										
Num	19761	8153	2666	18567	25711	24297	21015	10539	18628	5991
N = 100	0.1939	0.1531	0.1837	0.2041	0.1327	0.1735	0.1633	0.1633	0.1735	0.1735
N = 200	0.1869	0.1566	0.1616	0.2020	0.1566	0.1717	0.1414	0.1515	0.1768	0.1768
N = 400	0.1633	0.1508	0.1608	0.1734	0.1482	0.1608	0.1457	0.1683	0.1709	0.1759
N = 800	0.1679	0.1679	0.1529	0.1729	0.1604	0.1504	0.1667	0.1754	0.1892	0.1830
N = 1600	0.1702	0.1589	0.1627	0.1758	0.1671	0.1646	0.1696	0.1733	0.1771	0.1765
N = 3200	0.1620	0.1642	0.1664	0.1745	0.1648	0.1642	0.1664	0.1723	0.1679	0.1676
N = 6400	0.1691	0.1655	0.1686	0.1741	0.1666	0.1663	0.1658	0.1694	0.1718	0.1682
N = 12800	0.1696	0.1653	0.1689	0.1692	0.1656	0.1682	0.1635	0.1689	0.1678	0.1683
N = 25600	0.1676	0.1649	0.1693	0.1690	0.1656	0.1688	0.1654	0.1653	0.1670	0.1678
N = 51200	0.1664	0.1651	0.1691	0.1679	0.1657	0.1665	0.1665	0.1651	0.1657	0.1676
N = 102400	0.1665	0.1658	0.1681	0.1674	0.1653	0.1674	0.1666	0.1655	0.1662	0.1666
N = 204800	0.1661	0.1666	0.1677	0.1660	0.1658	0.1674	0.1667	0.1668	0.1663	0.1676
N = 409600	0.1672	0.1671	0.1670	0.1659	0.1662	0.1666	0.1669	0.1664	0.1665	0.1672
N = 819200	0.1671	0.1671	0.1670	0.1662	0.1663	0.1665	0.1666	0.1665	0.1670	0.1669
N = 1638400	0.1670	0.1673	0.1670	0.1665	0.1663	0.1665	0.1666	0.1667	0.1671	0.1667
N = 3276800	0.1669	0.1669	0.1669	0.1666	0.1666	0.1665	0.1665	0.1667	0.1667	0.1666
N = 6553600	0.1667	0.1667	0.1667	0.1666	0.1667	0.1665	0.1666	0.1667	0.1665	0.1666
N = 13107200	0.1666	0.1666	0.1666	0.1666	0.1667	0.1665	0.1666	0.1667	0.1666	0.1667

图 10: Fibonacci延迟器比重, p=7800, q=8734, 多随机起始值

这些比重最终仍然都趋向于 $1/6$ 。

因此，我们可以近似得到一个假设：

当随机数的个数无限大时，有以下结论：

1. 当 $p = 1, q = 2$ 时：比重为0；
2. 当 $p \neq q$ 且 p, q 不为(1,2)这个组合时：比重为 $1/6$ ，与16807随机数产生器的比重一样。

4.2.2 延迟 $p = q$

与 $p \neq q$ 情况不同， $p = q$ 的情况非常特殊。

Fibonacci延迟产生器中所占比重											
$p = 1, q=1$											
Num	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
N = 100	0.000	0.000	0.031	0.000	0.000	0.031	0.031	0.000	0.000	0.000	0.061
N = 200	0.000	0.000	0.030	0.000	0.000	0.030	0.030	0.000	0.000	0.000	0.061
N = 400	0.000	0.000	0.030	0.000	0.000	0.030	0.030	0.000	0.000	0.000	0.060
N = 800	0.000	0.000	0.031	0.000	0.000	0.031	0.031	0.000	0.000	0.000	0.063
N = 1600	0.000	0.000	0.032	0.000	0.000	0.032	0.032	0.000	0.000	0.000	0.064
N = 3200	0.000	0.000	0.032	0.000	0.000	0.032	0.032	0.000	0.000	0.000	0.064
N = 6400	0.000	0.000	0.032	0.000	0.000	0.032	0.032	0.000	0.000	0.000	0.064
N = 12800	0.000	0.000	0.032	0.000	0.000	0.032	0.032	0.000	0.000	0.000	0.064
N = 25600	0.000	0.000	0.032	0.000	0.000	0.032	0.032	0.000	0.000	0.000	0.064
N = 51200	0.000	0.000	0.032	0.000	0.000	0.032	0.032	0.000	0.000	0.000	0.064
N = 102400	0.000	0.000	0.032	0.000	0.000	0.032	0.032	0.000	0.000	0.000	0.065
N = 204800	0.000	0.000	0.032	0.000	0.000	0.032	0.032	0.000	0.000	0.000	0.065
N = 409600	0.000	0.000	0.032	0.000	0.000	0.032	0.032	0.000	0.000	0.000	0.065
N = 819200	0.000	0.000	0.032	0.000	0.000	0.032	0.032	0.000	0.000	0.000	0.065
N = 1638400	0.000	0.000	0.032	0.000	0.000	0.032	0.032	0.000	0.000	0.000	0.065
N = 3276800	0.000	0.000	0.032	0.000	0.000	0.032	0.032	0.000	0.000	0.000	0.065
N = 6553600	0.000	0.000	0.032	0.000	0.000	0.032	0.032	0.000	0.000	0.000	0.065
N = 13107200	0.000	0.000	0.032	0.000	0.000	0.032	0.032	0.000	0.000	0.000	0.065

图 11: Fibonacci延迟器比重， $p=1, q=1$ ，多随机起始值

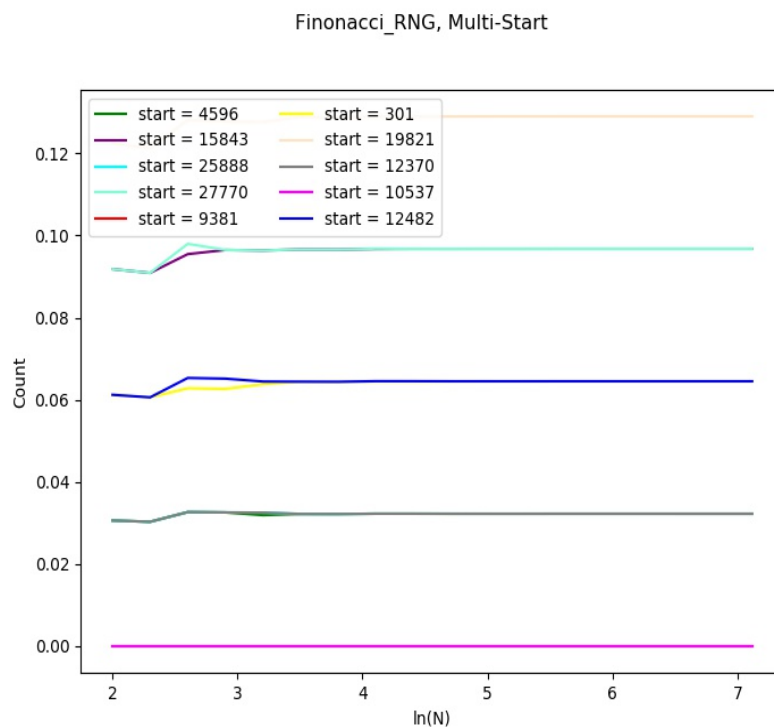
当起始值为某些值的时候，结果为0，当为另外的一些值的时候，结果不为0。而且，当结果不为0的时候，结果仿佛是一个倍数关系，如 $start=11$ 是，比重的结果0.065几乎是0.032的两倍。当我们提高输出精度的时候，这个两倍的关系更加满足。

为了防止偶然性，我们随机生成起始值，观察结果，如下图所示：

Fibonacci随机数产生器中所占比重

$p = 1, q = 1$

Num	4596	15843	25888	27770	9381	301	19821	12370	10537	12482
N = 100	0.0306	0.0918	0.0306	0.0918	0.0000	0.0612	0.1224	0.0306	0.0000	0.0612
N = 200	0.0303	0.0909	0.0303	0.0909	0.0000	0.0606	0.1212	0.0303	0.0000	0.0606
N = 400	0.0327	0.0955	0.0327	0.0980	0.0000	0.0628	0.1281	0.0327	0.0000	0.0653
N = 800	0.0326	0.0965	0.0326	0.0965	0.0000	0.0627	0.1278	0.0326	0.0000	0.0652
N = 1600	0.0319	0.0964	0.0325	0.0964	0.0000	0.0638	0.1277	0.0325	0.0000	0.0645
N = 3200	0.0322	0.0966	0.0322	0.0966	0.0000	0.0644	0.1288	0.0322	0.0000	0.0644
N = 6400	0.0322	0.0966	0.0322	0.0966	0.0000	0.0644	0.1288	0.0322	0.0000	0.0644
N = 12800	0.0323	0.0967	0.0323	0.0968	0.0000	0.0645	0.1290	0.0323	0.0000	0.0645
N = 25600	0.0323	0.0968	0.0323	0.0968	0.0000	0.0645	0.1290	0.0323	0.0000	0.0645
N = 51200	0.0322	0.0968	0.0323	0.0968	0.0000	0.0645	0.1290	0.0323	0.0000	0.0645
N = 102400	0.0323	0.0968	0.0323	0.0968	0.0000	0.0645	0.1290	0.0323	0.0000	0.0645
N = 204800	0.0323	0.0968	0.0323	0.0968	0.0000	0.0645	0.1290	0.0323	0.0000	0.0645
N = 409600	0.0323	0.0968	0.0323	0.0968	0.0000	0.0645	0.1290	0.0323	0.0000	0.0645
N = 819200	0.0323	0.0968	0.0323	0.0968	0.0000	0.0645	0.1290	0.0323	0.0000	0.0645
N = 1638400	0.0323	0.0968	0.0323	0.0968	0.0000	0.0645	0.1290	0.0323	0.0000	0.0645
N = 3276800	0.0323	0.0968	0.0323	0.0968	0.0000	0.0645	0.1290	0.0323	0.0000	0.0645
N = 6553600	0.0323	0.0968	0.0323	0.0968	0.0000	0.0645	0.1290	0.0323	0.0000	0.0645
N = 13107200	0.0323	0.0968	0.0323	0.0968	0.0000	0.0645	0.1290	0.0323	0.0000	0.0645

图 12: Fibonacci延迟器比重, $p=1, q=1$, 多随机起始值图 13: Fibonacci延迟器比重, $p=1, q=1$, 多随机起始值

这个数据很神奇！可以发现我们随机生成的数据，居然满足某种特定的间隔，仿佛是量子力学中

的氢原子光谱！

这个倍数关系与我们前面所提到的倍数关系一致，说明start取不同值的时候，比重仿佛只有规定的一系列值！

我们继续测试p、q不同的时候的情况，如下图所示：

p = 2, q = 2										
Num	7411	7625	23844	28203	20416	10039	15778	12195	22216	21263
N = 100	0.3878	0.3980	0.4082	0.2551	0.4388	0.3878	0.3469	0.3878	0.3980	0.4082
N = 200	0.3333	0.3636	0.3939	0.2576	0.4242	0.3485	0.3182	0.3485	0.3939	0.3788
N = 400	0.3342	0.3643	0.3945	0.2487	0.4246	0.3492	0.3191	0.3492	0.3945	0.3794
N = 800	0.3258	0.3559	0.3872	0.2444	0.4185	0.3396	0.3058	0.3421	0.3872	0.3734
N = 1600	0.3242	0.3554	0.3874	0.2434	0.4193	0.3398	0.3066	0.3404	0.3874	0.3717
N = 3200	0.3246	0.3562	0.3877	0.2423	0.4199	0.3402	0.3077	0.3402	0.3874	0.3721
N = 6400	0.3229	0.3551	0.3873	0.2424	0.4195	0.3390	0.3068	0.3390	0.3873	0.3712
N = 12800	0.3229	0.3551	0.3873	0.2421	0.4195	0.3390	0.3068	0.3390	0.3873	0.3712
N = 25600	0.3227	0.3549	0.3871	0.2420	0.4193	0.3387	0.3064	0.3388	0.3871	0.3710
N = 51200	0.3226	0.3549	0.3871	0.2420	0.4194	0.3387	0.3065	0.3388	0.3871	0.3710
N = 102400	0.3226	0.3549	0.3871	0.2419	0.4194	0.3388	0.3065	0.3388	0.3871	0.3710
N = 204800	0.3226	0.3548	0.3871	0.2420	0.4194	0.3387	0.3065	0.3387	0.3871	0.3710
N = 409600	0.3226	0.3548	0.3871	0.2419	0.4194	0.3387	0.3065	0.3387	0.3871	0.3710
N = 819200	0.3226	0.3548	0.3871	0.2419	0.4194	0.3387	0.3065	0.3387	0.3871	0.3710
N = 1638400	0.3226	0.3548	0.3871	0.2419	0.4194	0.3387	0.3065	0.3387	0.3871	0.3710
N = 3276800	0.3226	0.3548	0.3871	0.2419	0.4194	0.3387	0.3065	0.3387	0.3871	0.3710
N = 6553600	0.3226	0.3548	0.3871	0.2419	0.4194	0.3387	0.3065	0.3387	0.3871	0.3710
N = 13107200	0.3226	0.3548	0.3871	0.2419	0.4194	0.3387	0.3065	0.3387	0.3871	0.3710

图 14: Fibonacci延迟器比重，p=2，q=2，多随机起始值

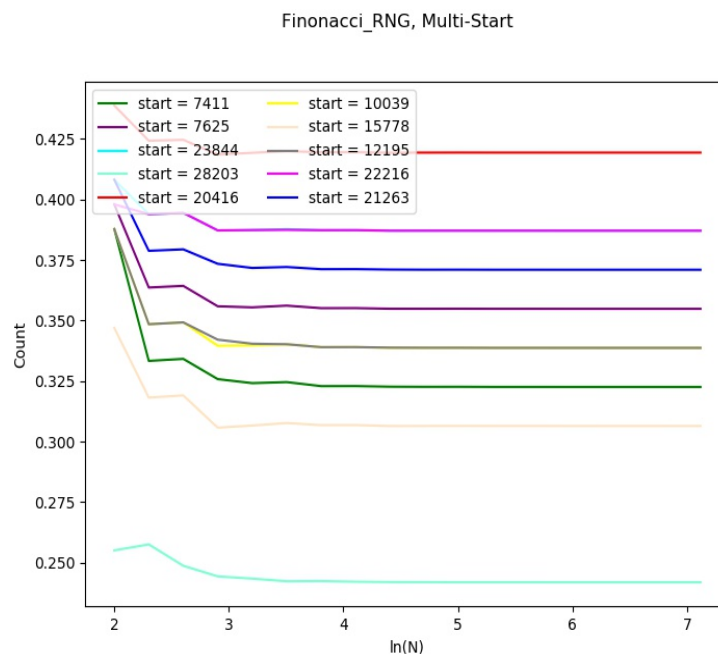
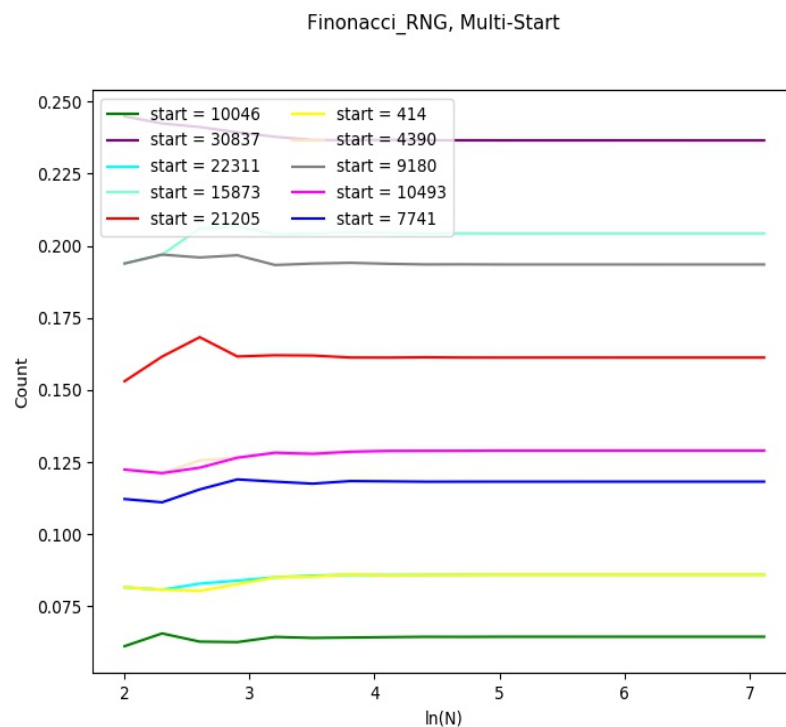
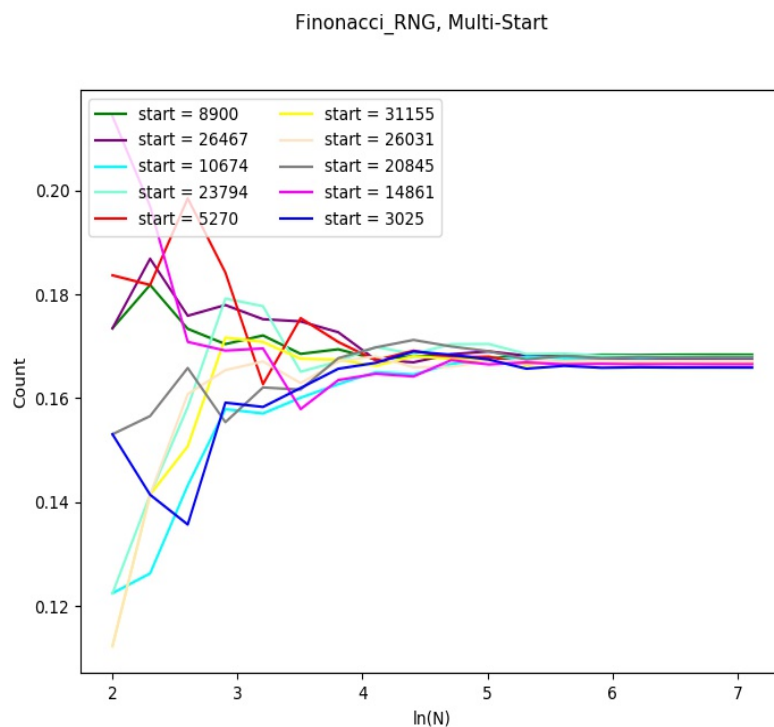


图 15: Fibonacci延迟器比重，p=2，q=2，多随机起始值

Fibonacci随机数产生器中所占比重										
$p = 3, q = 3$										
Num	10046	30837	22311	15873	21205	414	4390	9180	10493	7741
N = 100	0.0612	0.2449	0.0816	0.1939	0.1531	0.0816	0.1224	0.1939	0.1224	0.1122
N = 200	0.0657	0.2424	0.0808	0.1970	0.1616	0.0808	0.1212	0.1970	0.1212	0.1111
N = 400	0.0628	0.2412	0.0829	0.2060	0.1683	0.0804	0.1256	0.1960	0.1231	0.1156
N = 800	0.0627	0.2393	0.0840	0.2068	0.1617	0.0827	0.1266	0.1967	0.1266	0.1190
N = 1600	0.0645	0.2378	0.0851	0.2040	0.1621	0.0851	0.1283	0.1934	0.1283	0.1183
N = 3200	0.0641	0.2367	0.0857	0.2042	0.1620	0.0854	0.1282	0.1939	0.1279	0.1176
N = 6400	0.0642	0.2366	0.0860	0.2048	0.1613	0.0861	0.1288	0.1941	0.1286	0.1185
N = 12800	0.0644	0.2368	0.0859	0.2045	0.1613	0.0858	0.1288	0.1938	0.1289	0.1184
N = 25600	0.0645	0.2366	0.0859	0.2043	0.1614	0.0859	0.1290	0.1936	0.1290	0.1183
N = 51200	0.0645	0.2366	0.0860	0.2043	0.1613	0.0860	0.1290	0.1936	0.1290	0.1183
N = 102400	0.0645	0.2366	0.0860	0.2043	0.1613	0.0860	0.1290	0.1935	0.1290	0.1183
N = 204800	0.0645	0.2366	0.0860	0.2043	0.1613	0.0860	0.1290	0.1936	0.1290	0.1183
N = 409600	0.0645	0.2366	0.0860	0.2043	0.1613	0.0860	0.1290	0.1936	0.1290	0.1183
N = 819200	0.0645	0.2366	0.0860	0.2043	0.1613	0.0860	0.1290	0.1936	0.1290	0.1183
N = 1638400	0.0645	0.2366	0.0860	0.2043	0.1613	0.0860	0.1290	0.1935	0.1290	0.1183
N = 3276800	0.0645	0.2366	0.0860	0.2043	0.1613	0.0860	0.1290	0.1935	0.1290	0.1183
N = 6553600	0.0645	0.2366	0.0860	0.2043	0.1613	0.0860	0.1290	0.1935	0.1290	0.1183
N = 13107200	0.0645	0.2366	0.0860	0.2043	0.1613	0.0860	0.1290	0.1935	0.1290	0.1183

图 16: Fibonacci延迟器比重, $p=3$, $q=3$, 多随机起始值图 17: Fibonacci延迟器比重, $p=3$, $q=3$, 多随机起始值

Fibonacci随机数产生器中所占比重										
$p = 10000, q = 10000$										
Num	8900	26467	10674	23794	5270	31155	26031	20845	14861	3025
N = 100	0.1735	0.1735	0.1224	0.1224	0.1837	0.1122	0.1122	0.1531	0.2143	0.1531
N = 200	0.1818	0.1869	0.1263	0.1414	0.1818	0.1414	0.1414	0.1566	0.1970	0.1414
N = 400	0.1734	0.1759	0.1432	0.1583	0.1985	0.1508	0.1608	0.1658	0.1709	0.1357
N = 800	0.1704	0.1779	0.1579	0.1792	0.1842	0.1717	0.1654	0.1554	0.1692	0.1591
N = 1600	0.1721	0.1752	0.1571	0.1777	0.1627	0.1708	0.1671	0.1621	0.1696	0.1583
N = 3200	0.1685	0.1748	0.1601	0.1651	0.1754	0.1676	0.1629	0.1617	0.1579	0.1620
N = 6400	0.1694	0.1727	0.1627	0.1671	0.1708	0.1674	0.1671	0.1677	0.1635	0.1657
N = 12800	0.1675	0.1674	0.1650	0.1699	0.1673	0.1663	0.1681	0.1698	0.1647	0.1668
N = 25600	0.1681	0.1669	0.1646	0.1685	0.1692	0.1681	0.1660	0.1712	0.1642	0.1690
N = 51200	0.1681	0.1685	0.1666	0.1704	0.1679	0.1676	0.1661	0.1700	0.1673	0.1684
N = 102400	0.1677	0.1690	0.1674	0.1704	0.1680	0.1673	0.1672	0.1690	0.1665	0.1675
N = 204800	0.1682	0.1682	0.1679	0.1685	0.1666	0.1665	0.1671	0.1675	0.1669	0.1657
N = 409600	0.1682	0.1679	0.1677	0.1686	0.1672	0.1670	0.1671	0.1682	0.1665	0.1662
N = 819200	0.1684	0.1677	0.1678	0.1682	0.1668	0.1668	0.1671	0.1677	0.1666	0.1659
N = 1638400	0.1683	0.1676	0.1678	0.1682	0.1669	0.1670	0.1671	0.1680	0.1665	0.1660
N = 3276800	0.1684	0.1676	0.1678	0.1681	0.1668	0.1669	0.1671	0.1679	0.1666	0.1659
N = 6553600	0.1684	0.1675	0.1678	0.1680	0.1668	0.1670	0.1671	0.1679	0.1665	0.1659
N = 13107200	0.1684	0.1675	0.1678	0.1680	0.1668	0.1669	0.1671	0.1679	0.1665	0.1659

图 18: Fibonacci延迟器比重, $p=10000$, $q=10000$, 多随机起始值图 19: Fibonacci延迟器比重, $p=10000$, $q=10000$, 多随机起始值

当 $p=10000$, $q=10000$ 时, 最后结果好像也是趋近于 $1/6$, 当有着本质区别!

我们放大尾部，可以看到仍然是分立的，不同的起始值之间有间隔！而不是像 $p \neq q$ 时的结果那样，不同的起始值都趋近于 $1/6$ 。

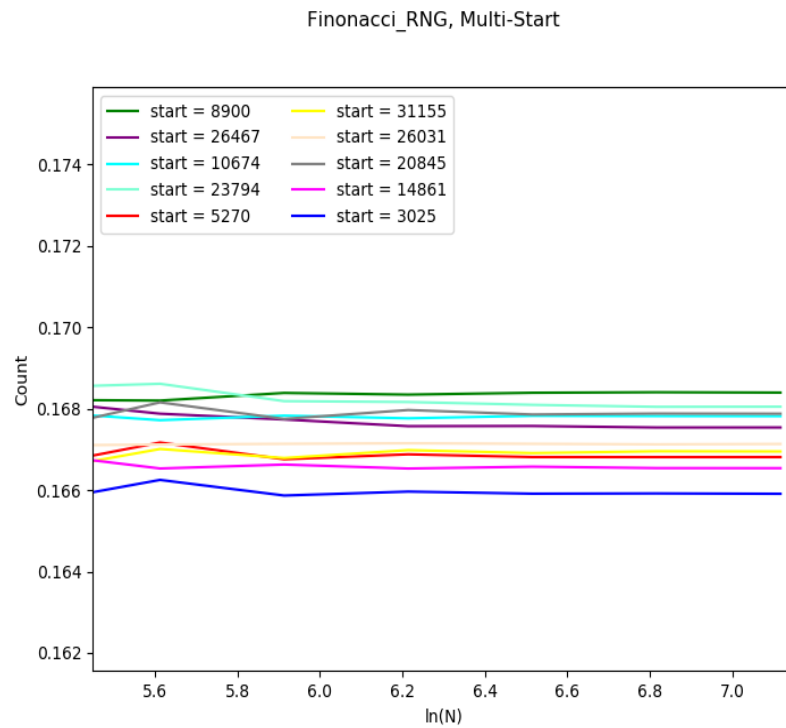


图 20: Fibonacci延迟器比重, $p=10000$, $q=10000$, 多随机起始值（尾部放大）

4.2.3 Fibonacci延迟器其他操作符

1. 操作符为减号:

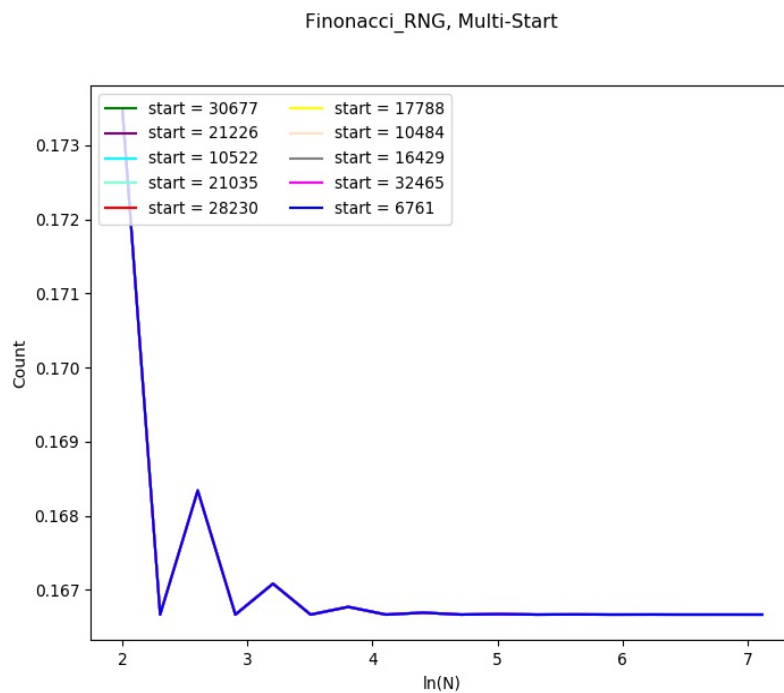
当延迟 $p = q$ 时，显然有比重为0，因为Fibonacci延迟器开始产生随机数时的序列都为0，这是很平凡的结论。

当延迟 $p \neq q$ 时，如下图所示：

Fibonacci随机数产生器中所占比重

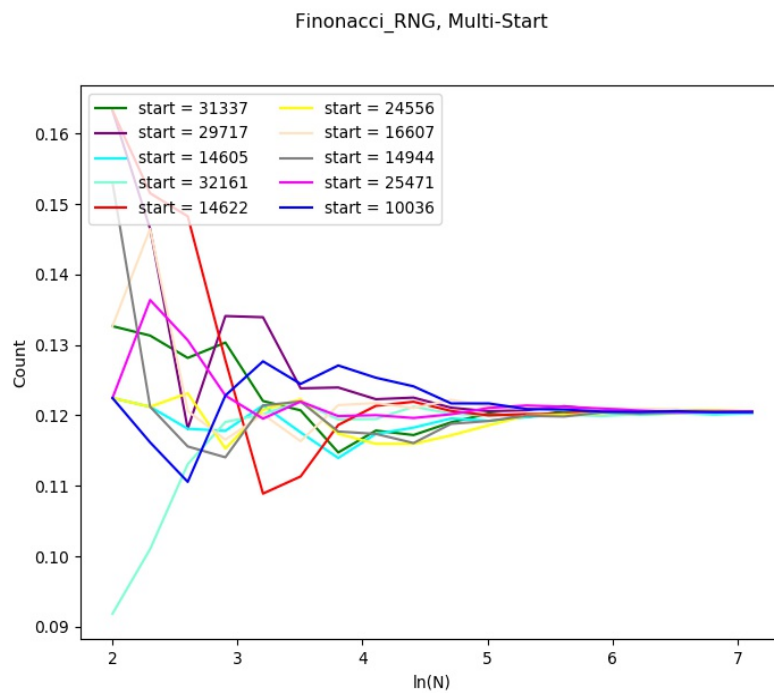
$p = 1, q = 2$

Num	30677	21226	10522	21035	28230	17788	10484	16429	32465	6761
N = 100	0.1735	0.1735	0.1735	0.1735	0.1735	0.1735	0.1735	0.1735	0.1735	0.1735
N = 200	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667
N = 400	0.1683	0.1683	0.1683	0.1683	0.1683	0.1683	0.1683	0.1683	0.1683	0.1683
N = 800	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667
N = 1600	0.1671	0.1671	0.1671	0.1671	0.1671	0.1671	0.1671	0.1671	0.1671	0.1671
N = 3200	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667
N = 6400	0.1668	0.1668	0.1668	0.1668	0.1668	0.1668	0.1668	0.1668	0.1668	0.1668
N = 12800	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667
N = 25600	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667
N = 51200	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667
N = 102400	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667
N = 204800	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667
N = 409600	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667
N = 819200	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667
N = 1638400	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667
N = 3276800	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667
N = 6553600	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667
N = 13107200	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667

图 21: Fibonacci延迟器比重, $p=1, q=2$, 操作符为减号图 22: Fibonacci延迟器比重, $p=1, q=2$, 操作符为减号

可以看见, 不管起始点是多少, 最后都是同样的比重。

Fibonacci随机数产生器中所占比重										
$p = 1, q = 3$										
Num	31337	29717	14605	32161	14622	24556	16607	14944	25471	10036
N = 100	0.1327	0.1633	0.1224	0.0918	0.1633	0.1224	0.1327	0.1531	0.1224	0.1224
N = 200	0.1313	0.1465	0.1212	0.1010	0.1515	0.1212	0.1465	0.1212	0.1364	0.1162
N = 400	0.1281	0.1181	0.1181	0.1131	0.1482	0.1231	0.1206	0.1156	0.1307	0.1106
N = 800	0.1303	0.1341	0.1178	0.1190	0.1278	0.1153	0.1165	0.1140	0.1228	0.1228
N = 1600	0.1220	0.1339	0.1214	0.1202	0.1089	0.1208	0.1202	0.1214	0.1195	0.1277
N = 3200	0.1207	0.1238	0.1176	0.1220	0.1113	0.1223	0.1163	0.1220	0.1220	0.1245
N = 6400	0.1147	0.1239	0.1139	0.1194	0.1186	0.1174	0.1214	0.1177	0.1199	0.1271
N = 12800	0.1178	0.1223	0.1174	0.1195	0.1213	0.1160	0.1217	0.1174	0.1200	0.1253
N = 25600	0.1172	0.1225	0.1183	0.1212	0.1219	0.1159	0.1210	0.1161	0.1196	0.1241
N = 51200	0.1190	0.1211	0.1196	0.1202	0.1206	0.1172	0.1222	0.1188	0.1201	0.1217
N = 102400	0.1203	0.1206	0.1192	0.1199	0.1200	0.1186	0.1213	0.1192	0.1210	0.1217
N = 204800	0.1198	0.1207	0.1197	0.1201	0.1202	0.1199	0.1209	0.1199	0.1214	0.1209
N = 409600	0.1206	0.1213	0.1202	0.1201	0.1202	0.1201	0.1207	0.1198	0.1212	0.1208
N = 819200	0.1205	0.1208	0.1204	0.1199	0.1209	0.1203	0.1208	0.1204	0.1210	0.1205
N = 1638400	0.1205	0.1204	0.1201	0.1202	0.1208	0.1207	0.1209	0.1203	0.1207	0.1205
N = 3276800	0.1206	0.1204	0.1203	0.1202	0.1208	0.1207	0.1207	0.1204	0.1204	0.1206
N = 6553600	0.1206	0.1203	0.1201	0.1203	0.1206	0.1207	0.1205	0.1205	0.1205	0.1205
N = 13107200	0.1205	0.1204	0.1203	0.1203	0.1205	0.1206	0.1205	0.1205	0.1205	0.1205

图 23: Fibonacci延迟器比重, $p=1, q=3$, 操作符为减号图 24: Fibonacci延迟器比重, $p=1, q=3$, 操作符为减号

这次不同起始值会影响比重, 但最后都会趋于同一个值, 不过与16807随机数生成器的比重不同。

我们再随机生成 p 、 q ，得到以下结果，这次反而又没有趋向同一个值。

Fibonacci随机数产生器中所占比重										
$p = 32006, q = 4916$										
Num	6744	17172	31958	10335	32068	4676	2475	27634	26781	20808
N = 100	0.1837	0.1837	0.2143	0.1633	0.1837	0.1735	0.1429	0.1735	0.1531	0.1429
N = 200	0.1465	0.1616	0.1970	0.1667	0.1667	0.1465	0.1364	0.1717	0.1667	0.1414
N = 400	0.1583	0.1683	0.1583	0.1633	0.1583	0.1608	0.1608	0.1583	0.1809	0.1558
N = 800	0.1591	0.1579	0.1604	0.1654	0.1504	0.1679	0.1604	0.1579	0.1642	0.1591
N = 1600	0.1646	0.1602	0.1602	0.1665	0.1546	0.1608	0.1621	0.1721	0.1652	0.1658
N = 3200	0.1623	0.1614	0.1617	0.1617	0.1623	0.1626	0.1610	0.1754	0.1598	0.1673
N = 6400	0.1660	0.1616	0.1651	0.1661	0.1619	0.1651	0.1624	0.1722	0.1630	0.1704
N = 12800	0.1638	0.1624	0.1653	0.1617	0.1632	0.1669	0.1646	0.1718	0.1674	0.1682
N = 25600	0.1629	0.1654	0.1672	0.1658	0.1638	0.1669	0.1656	0.1685	0.1676	0.1662
N = 51200	0.1655	0.1655	0.1657	0.1678	0.1657	0.1653	0.1673	0.1688	0.1693	0.1679
N = 102400	0.1652	0.1662	0.1652	0.1671	0.1658	0.1660	0.1669	0.1678	0.1692	0.1673
N = 204800	0.1656	0.1664	0.1656	0.1665	0.1666	0.1661	0.1656	0.1673	0.1679	0.1668
N = 409600	0.1653	0.1664	0.1656	0.1665	0.1667	0.1658	0.1653	0.1671	0.1669	0.1671
N = 819200	0.1660	0.1662	0.1654	0.1665	0.1676	0.1655	0.1653	0.1673	0.1673	0.1672
N = 1638400	0.1666	0.1660	0.1655	0.1668	0.1682	0.1654	0.1659	0.1674	0.1668	0.1671
N = 3276800	0.1671	0.1655	0.1653	0.1664	0.1678	0.1657	0.1659	0.1674	0.1664	0.1670
N = 6553600	0.1677	0.1655	0.1655	0.1661	0.1677	0.1662	0.1653	0.1676	0.1659	0.1671
N = 13107200	0.1691	0.1655	0.1661	0.1660	0.1669	0.1668	0.1648	0.1671	0.1648	0.1668

图 25: Fibonacci延迟器比重, $p=32006$, $q=4916$, 操作符为减号

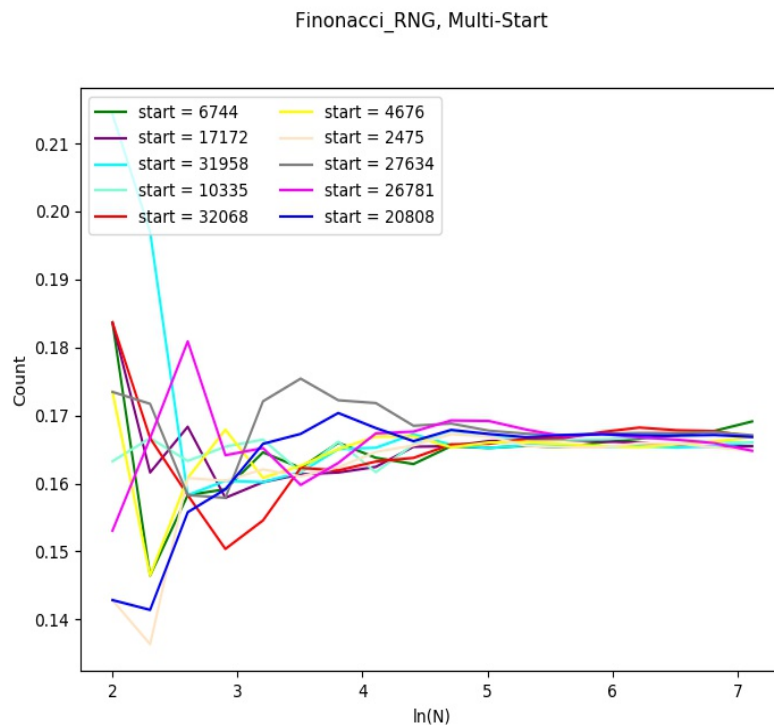


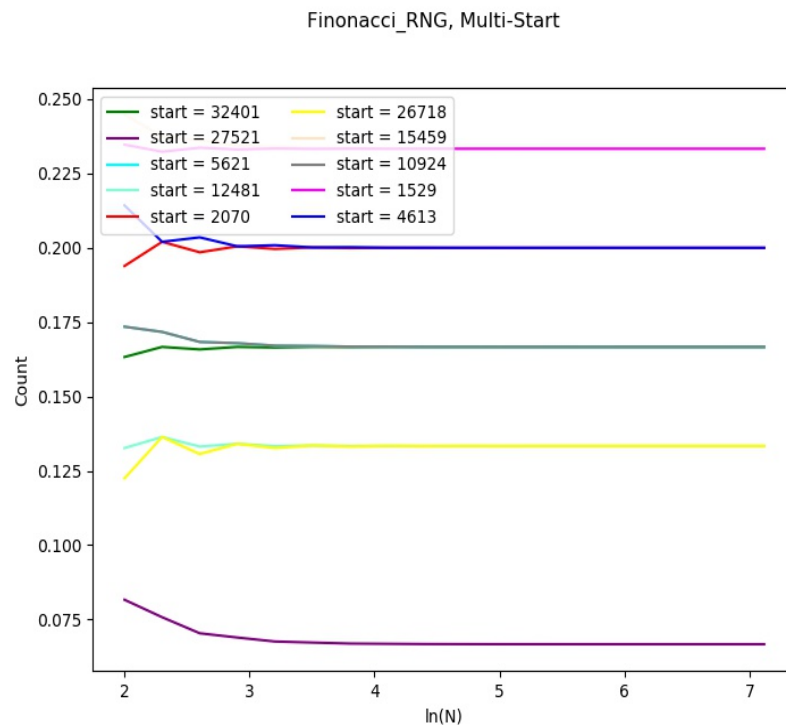
图 26: Fibonacci延迟器比重, $p=32006$, $q=4916$, 操作符为减号

2. 操作符为乘号:

Fibonacci随机数产生器中所占比重

$p = 1, q = 1$

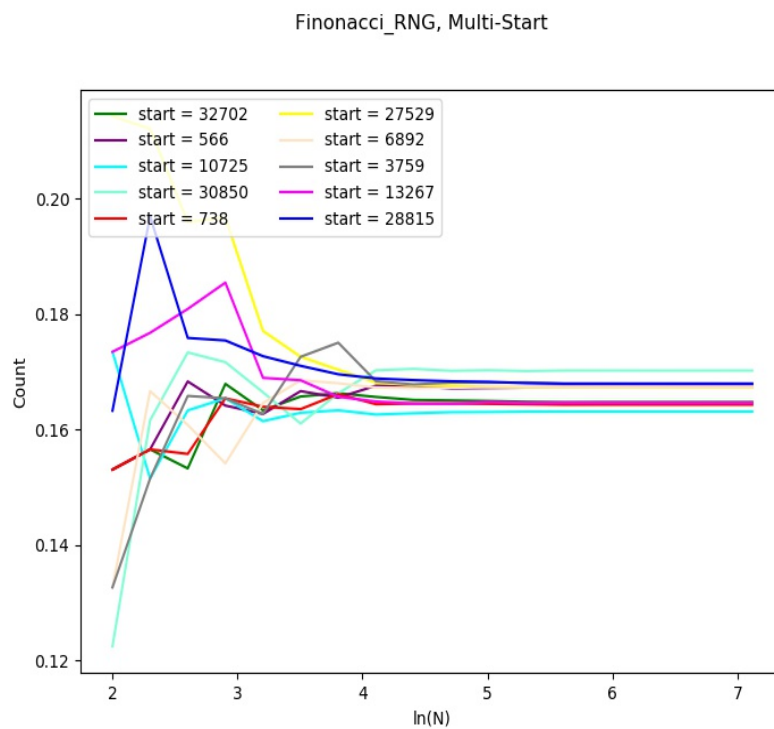
Num	32401	27521	5621	12481	2070	26718	15459	10924	1529	4613
N = 100	0.1633	0.0816	0.1735	0.1327	0.1939	0.1224	0.2449	0.1735	0.2347	0.2143
N = 200	0.1667	0.0758	0.1717	0.1364	0.2020	0.1364	0.2374	0.1717	0.2323	0.2020
N = 400	0.1658	0.0704	0.1683	0.1332	0.1985	0.1307	0.2362	0.1683	0.2337	0.2035
N = 800	0.1667	0.0689	0.1679	0.1341	0.2005	0.1341	0.2343	0.1679	0.2331	0.2005
N = 1600	0.1665	0.0676	0.1671	0.1333	0.1996	0.1327	0.2340	0.1671	0.2334	0.2009
N = 3200	0.1667	0.0672	0.1670	0.1335	0.2001	0.1335	0.2336	0.1670	0.2333	0.2001
N = 6400	0.1666	0.0669	0.1668	0.1333	0.1999	0.1332	0.2335	0.1668	0.2334	0.2002
N = 12800	0.1667	0.0668	0.1667	0.1334	0.2000	0.1334	0.2334	0.1667	0.2333	0.2000
N = 25600	0.1667	0.0667	0.1667	0.1333	0.2000	0.1333	0.2334	0.1667	0.2333	0.2001
N = 51200	0.1667	0.0667	0.1667	0.1333	0.2000	0.1333	0.2333	0.1667	0.2333	0.2000
N = 102400	0.1667	0.0667	0.1667	0.1333	0.2000	0.1333	0.2333	0.1667	0.2333	0.2000
N = 204800	0.1667	0.0667	0.1667	0.1333	0.2000	0.1333	0.2333	0.1667	0.2333	0.2000
N = 409600	0.1667	0.0667	0.1667	0.1333	0.2000	0.1333	0.2333	0.1667	0.2333	0.2000
N = 819200	0.1667	0.0667	0.1667	0.1333	0.2000	0.1333	0.2333	0.1667	0.2333	0.2000
N = 1638400	0.1667	0.0667	0.1667	0.1333	0.2000	0.1333	0.2333	0.1667	0.2333	0.2000
N = 3276800	0.1667	0.0667	0.1667	0.1333	0.2000	0.1333	0.2333	0.1667	0.2333	0.2000
N = 6553600	0.1667	0.0667	0.1667	0.1333	0.2000	0.1333	0.2333	0.1667	0.2333	0.2000
N = 13107200	0.1667	0.0667	0.1667	0.1333	0.2000	0.1333	0.2333	0.1667	0.2333	0.2000

图 27: Fibonacci延迟器比重, $p=1$, $q=1$, 操作符为乘号图 28: Fibonacci延迟器比重, $p=1$, $q=1$, 操作符为乘号

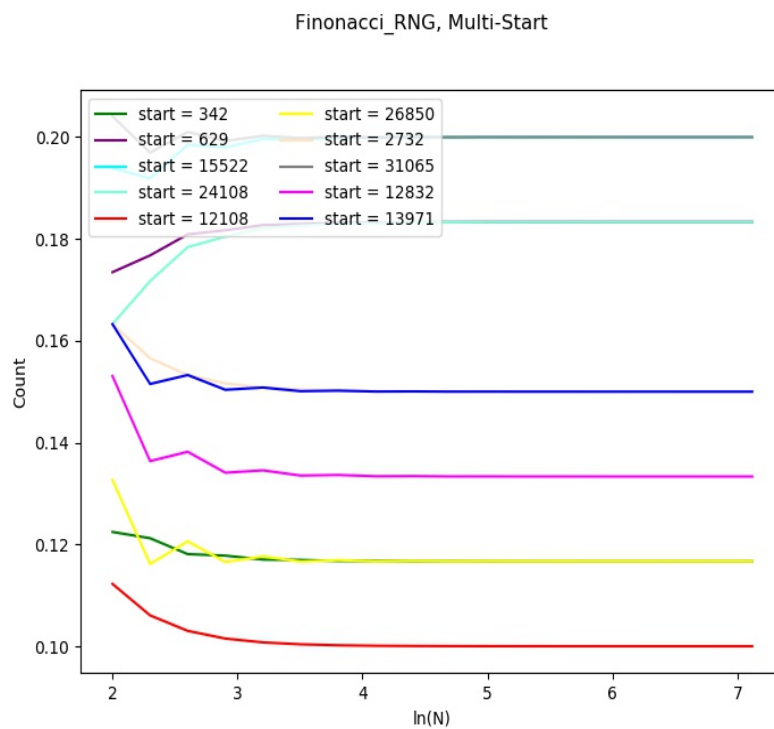
Fibonacci随机数产生器中所占比重

$p = 1, q = 2$

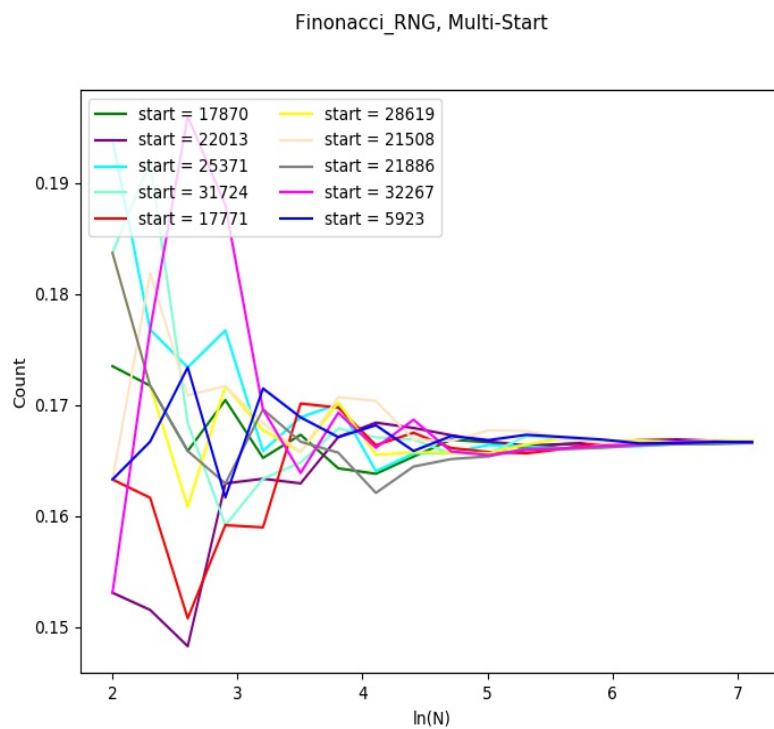
Num	32702	566	10725	30850	738	27529	6892	3759	13267	28815
N = 100	0.1531	0.1531	0.1735	0.1224	0.1531	0.2143	0.1327	0.1327	0.1735	0.1633
N = 200	0.1566	0.1566	0.1515	0.1616	0.1566	0.2121	0.1667	0.1515	0.1768	0.1970
N = 400	0.1533	0.1683	0.1633	0.1734	0.1558	0.1960	0.1608	0.1658	0.1809	0.1759
N = 800	0.1679	0.1642	0.1654	0.1717	0.1654	0.1967	0.1541	0.1654	0.1855	0.1754
N = 1600	0.1633	0.1627	0.1615	0.1665	0.1640	0.1771	0.1646	0.1627	0.1690	0.1727
N = 3200	0.1657	0.1667	0.1629	0.1610	0.1635	0.1726	0.1685	0.1726	0.1685	0.1710
N = 6400	0.1663	0.1655	0.1633	0.1663	0.1661	0.1704	0.1680	0.1751	0.1657	0.1696
N = 12800	0.1657	0.1676	0.1626	0.1703	0.1644	0.1682	0.1673	0.1684	0.1649	0.1689
N = 25600	0.1651	0.1676	0.1628	0.1705	0.1645	0.1677	0.1672	0.1678	0.1645	0.1686
N = 51200	0.1650	0.1671	0.1630	0.1702	0.1645	0.1677	0.1673	0.1682	0.1645	0.1684
N = 102400	0.1650	0.1672	0.1630	0.1703	0.1645	0.1674	0.1674	0.1681	0.1647	0.1683
N = 204800	0.1648	0.1673	0.1631	0.1701	0.1644	0.1673	0.1674	0.1682	0.1646	0.1680
N = 409600	0.1648	0.1673	0.1631	0.1702	0.1643	0.1673	0.1673	0.1680	0.1646	0.1680
N = 819200	0.1648	0.1673	0.1631	0.1702	0.1643	0.1673	0.1673	0.1680	0.1646	0.1680
N = 1638400	0.1648	0.1673	0.1631	0.1702	0.1643	0.1673	0.1673	0.1679	0.1646	0.1680
N = 3276800	0.1648	0.1673	0.1631	0.1702	0.1643	0.1673	0.1673	0.1680	0.1646	0.1680
N = 6553600	0.1648	0.1673	0.1631	0.1702	0.1643	0.1673	0.1673	0.1680	0.1646	0.1680
N = 13107200	0.1648	0.1673	0.1631	0.1702	0.1643	0.1673	0.1673	0.1680	0.1646	0.1680

图 29: Fibonacci延迟器比重, $p=1, q=2$, 操作符为乘号图 30: Fibonacci延迟器比重, $p=1, q=2$, 操作符为乘号

Fibonacci随机数产生器中所占比重										
$p = 2, q = 2$										
Num	342	629	15522	24108	12108	26850	2732	31065	12832	13971
N = 100	0.1224	0.1735	0.1939	0.1633	0.1122	0.1327	0.1633	0.2041	0.1531	0.1633
N = 200	0.1212	0.1768	0.1919	0.1717	0.1061	0.1162	0.1566	0.1970	0.1364	0.1515
N = 400	0.1181	0.1809	0.1985	0.1784	0.1030	0.1206	0.1533	0.2010	0.1382	0.1533
N = 800	0.1178	0.1817	0.1980	0.1805	0.1015	0.1165	0.1516	0.1992	0.1341	0.1504
N = 1600	0.1170	0.1827	0.1996	0.1821	0.1008	0.1176	0.1508	0.2003	0.1345	0.1508
N = 3200	0.1169	0.1829	0.1995	0.1826	0.1004	0.1166	0.1504	0.1998	0.1335	0.1501
N = 6400	0.1168	0.1832	0.1999	0.1830	0.1002	0.1169	0.1502	0.2001	0.1336	0.1502
N = 12800	0.1167	0.1832	0.1999	0.1832	0.1001	0.1167	0.1501	0.2000	0.1334	0.1500
N = 25600	0.1167	0.1833	0.2000	0.1833	0.1000	0.1167	0.1501	0.2000	0.1334	0.1501
N = 51200	0.1167	0.1833	0.2000	0.1833	0.1000	0.1167	0.1500	0.2000	0.1333	0.1500
N = 102400	0.1167	0.1833	0.2000	0.1833	0.1000	0.1167	0.1500	0.2000	0.1334	0.1500
N = 204800	0.1167	0.1833	0.2000	0.1833	0.1000	0.1167	0.1500	0.2000	0.1333	0.1500
N = 409600	0.1167	0.1833	0.2000	0.1833	0.1000	0.1167	0.1500	0.2000	0.1333	0.1500
N = 819200	0.1167	0.1833	0.2000	0.1833	0.1000	0.1167	0.1500	0.2000	0.1333	0.1500
N = 1638400	0.1167	0.1833	0.2000	0.1833	0.1000	0.1167	0.1500	0.2000	0.1333	0.1500
N = 3276800	0.1167	0.1833	0.2000	0.1833	0.1000	0.1167	0.1500	0.2000	0.1333	0.1500
N = 6553600	0.1167	0.1833	0.2000	0.1833	0.1000	0.1167	0.1500	0.2000	0.1333	0.1500
N = 13107200	0.1167	0.1833	0.2000	0.1833	0.1000	0.1167	0.1500	0.2000	0.1333	0.1500

图 31: Fibonacci延迟器比重, $p=2$, $q=2$, 操作符为乘号图 32: Fibonacci延迟器比重, $p=2$, $q=2$, 操作符为乘号

Fibonacci随机数产生器中所占比重										
$p = 564, q = 10625$										
Num	17870	22013	25371	31724	17771	28619	21508	21886	32267	5923
N = 100	0.1735	0.1531	0.1939	0.1837	0.1633	0.1837	0.1633	0.1837	0.1531	0.1633
N = 200	0.1717	0.1515	0.1768	0.1919	0.1616	0.1717	0.1818	0.1717	0.1768	0.1667
N = 400	0.1658	0.1482	0.1734	0.1683	0.1508	0.1608	0.1709	0.1658	0.1960	0.1734
N = 800	0.1704	0.1629	0.1767	0.1591	0.1591	0.1717	0.1717	0.1629	0.1880	0.1617
N = 1600	0.1652	0.1633	0.1658	0.1633	0.1589	0.1677	0.1683	0.1696	0.1696	0.1715
N = 3200	0.1673	0.1629	0.1689	0.1648	0.1701	0.1657	0.1657	0.1667	0.1639	0.1689
N = 6400	0.1643	0.1671	0.1701	0.1679	0.1697	0.1702	0.1707	0.1657	0.1693	0.1671
N = 12800	0.1638	0.1684	0.1640	0.1671	0.1664	0.1655	0.1703	0.1621	0.1661	0.1682
N = 25600	0.1653	0.1679	0.1656	0.1668	0.1675	0.1657	0.1668	0.1644	0.1686	0.1658
N = 51200	0.1668	0.1673	0.1657	0.1656	0.1661	0.1657	0.1667	0.1651	0.1658	0.1672
N = 102400	0.1666	0.1667	0.1664	0.1656	0.1657	0.1656	0.1677	0.1653	0.1655	0.1668
N = 204800	0.1661	0.1663	0.1663	0.1672	0.1656	0.1664	0.1676	0.1661	0.1659	0.1673
N = 409600	0.1664	0.1665	0.1660	0.1669	0.1660	0.1670	0.1669	0.1660	0.1661	0.1671
N = 819200	0.1666	0.1666	0.1662	0.1666	0.1666	0.1667	0.1666	0.1661	0.1663	0.1669
N = 1638400	0.1667	0.1668	0.1663	0.1664	0.1665	0.1668	0.1665	0.1663	0.1664	0.1665
N = 3276800	0.1666	0.1669	0.1665	0.1665	0.1666	0.1666	0.1666	0.1664	0.1666	0.1665
N = 6553600	0.1666	0.1667	0.1665	0.1666	0.1666	0.1668	0.1667	0.1665	0.1667	0.1666
N = 13107200	0.1667	0.1666	0.1665	0.1667	0.1667	0.1668	0.1667	0.1666	0.1666	0.1666

图 33: Fibonacci延迟器比重, $p=564$, $q=10625$, 操作符为乘号图 34: Fibonacci延迟器比重, $p=564$, $q=10625$, 操作符为乘号

可见乘法也有周期性，且与16807随机数产生器得到的比重不同，这个周期性并不局限于 $p = q$ 时的情况。但对于 $p = q$ 时，周期之间的间隔更大；而 $p \neq q$ 时，周期之间的间隔要小得多。

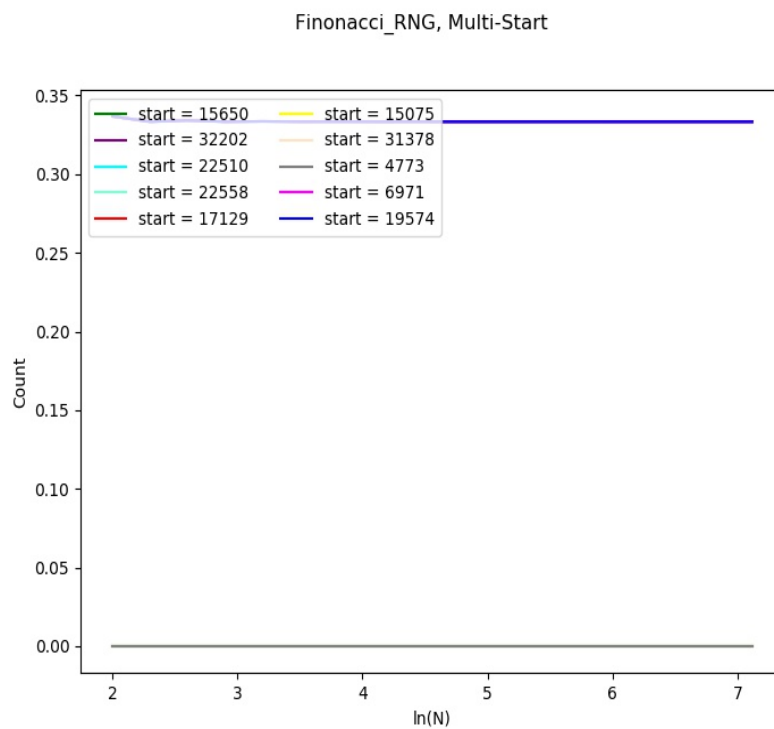
3. 操作符为异或：

Fibonacci随机数产生器中所占比重										
$p = 1, q = 1$										
Num	15503	7275	5054	21053	11726	2212	22389	5428	17614	1325
N = 100	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
N = 200	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
N = 400	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
N = 800	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
N = 1600	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
N = 3200	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
N = 6400	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
N = 12800	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
N = 25600	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
N = 51200	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
N = 102400	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
N = 204800	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
N = 409600	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
N = 819200	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
N = 1638400	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
N = 3276800	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
N = 6553600	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
N = 13107200	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

图 35: Fibonacci延迟器比重， $p=1$ ， $q=1$ ，操作符为异或

这是很平凡的结论，因为操作符为异或切两者相等的时候，对应的结果是0。

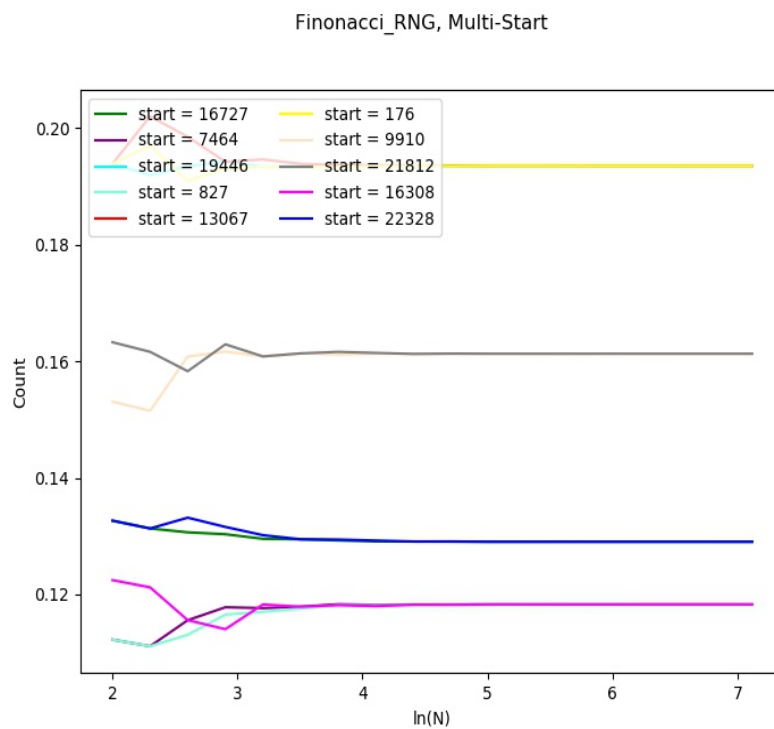
Fibonacci随机数产生器中所占比重										
$p = 1, q = 2$										
Num	15650	32202	22510	22558	17129	15075	31378	4773	6971	19574
$N = 100$	0.0000	0.3367	0.3367	0.0000	0.3367	0.0000	0.0000	0.0000	0.3367	0.3367
$N = 200$	0.0000	0.3333	0.3333	0.0000	0.3333	0.0000	0.0000	0.0000	0.3333	0.3333
$N = 400$	0.0000	0.3342	0.3342	0.0000	0.3342	0.0000	0.0000	0.0000	0.3342	0.3342
$N = 800$	0.0000	0.3333	0.3333	0.0000	0.3333	0.0000	0.0000	0.0000	0.3333	0.3333
$N = 1600$	0.0000	0.3335	0.3335	0.0000	0.3335	0.0000	0.0000	0.0000	0.3335	0.3335
$N = 3200$	0.0000	0.3333	0.3333	0.0000	0.3333	0.0000	0.0000	0.0000	0.3333	0.3333
$N = 6400$	0.0000	0.3334	0.3334	0.0000	0.3334	0.0000	0.0000	0.0000	0.3334	0.3334
$N = 12800$	0.0000	0.3333	0.3333	0.0000	0.3333	0.0000	0.0000	0.0000	0.3333	0.3333
$N = 25600$	0.0000	0.3333	0.3333	0.0000	0.3333	0.0000	0.0000	0.0000	0.3333	0.3333
$N = 51200$	0.0000	0.3333	0.3333	0.0000	0.3333	0.0000	0.0000	0.0000	0.3333	0.3333
$N = 102400$	0.0000	0.3333	0.3333	0.0000	0.3333	0.0000	0.0000	0.0000	0.3333	0.3333
$N = 204800$	0.0000	0.3333	0.3333	0.0000	0.3333	0.0000	0.0000	0.0000	0.3333	0.3333
$N = 409600$	0.0000	0.3333	0.3333	0.0000	0.3333	0.0000	0.0000	0.0000	0.3333	0.3333
$N = 819200$	0.0000	0.3333	0.3333	0.0000	0.3333	0.0000	0.0000	0.0000	0.3333	0.3333
$N = 1638400$	0.0000	0.3333	0.3333	0.0000	0.3333	0.0000	0.0000	0.0000	0.3333	0.3333
$N = 3276800$	0.0000	0.3333	0.3333	0.0000	0.3333	0.0000	0.0000	0.0000	0.3333	0.3333
$N = 6553600$	0.0000	0.3333	0.3333	0.0000	0.3333	0.0000	0.0000	0.0000	0.3333	0.3333
$N = 13107200$	0.0000	0.3333	0.3333	0.0000	0.3333	0.0000	0.0000	0.0000	0.3333	0.3333

图 36: Fibonacci延迟器比重, $p=1$, $q=2$, 操作符为异或图 37: Fibonacci延迟器比重, $p=1$, $q=2$, 操作符为异或

Fibonacci随机数产生器中所占比重

$p = 5, q = 7$

Num	16727	7464	19446	827	13067	176	9910	21812	16308	22328
N = 100	0.1327	0.1122	0.1939	0.1122	0.1939	0.1939	0.1531	0.1633	0.1224	0.1327
N = 200	0.1313	0.1111	0.1919	0.1111	0.2020	0.1970	0.1515	0.1616	0.1212	0.1313
N = 400	0.1307	0.1156	0.1935	0.1131	0.1985	0.1910	0.1608	0.1583	0.1156	0.1332
N = 800	0.1303	0.1178	0.1942	0.1165	0.1942	0.1930	0.1617	0.1629	0.1140	0.1316
N = 1600	0.1295	0.1176	0.1934	0.1170	0.1946	0.1934	0.1608	0.1608	0.1183	0.1302
N = 3200	0.1295	0.1179	0.1936	0.1176	0.1939	0.1932	0.1614	0.1614	0.1179	0.1295
N = 6400	0.1293	0.1183	0.1937	0.1182	0.1937	0.1933	0.1611	0.1616	0.1182	0.1294
N = 12800	0.1291	0.1182	0.1935	0.1181	0.1936	0.1935	0.1613	0.1614	0.1180	0.1292
N = 25600	0.1291	0.1183	0.1935	0.1182	0.1936	0.1935	0.1613	0.1613	0.1183	0.1291
N = 51200	0.1290	0.1183	0.1935	0.1182	0.1936	0.1935	0.1613	0.1613	0.1182	0.1291
N = 102400	0.1290	0.1183	0.1935	0.1183	0.1935	0.1935	0.1613	0.1613	0.1183	0.1290
N = 204800	0.1290	0.1183	0.1935	0.1183	0.1936	0.1936	0.1613	0.1613	0.1183	0.1290
N = 409600	0.1290	0.1183	0.1935	0.1183	0.1936	0.1935	0.1613	0.1613	0.1183	0.1290
N = 819200	0.1290	0.1183	0.1935	0.1183	0.1935	0.1935	0.1613	0.1613	0.1183	0.1290
N = 1638400	0.1290	0.1183	0.1935	0.1183	0.1935	0.1935	0.1613	0.1613	0.1183	0.1290
N = 3276800	0.1290	0.1183	0.1935	0.1183	0.1935	0.1935	0.1613	0.1613	0.1183	0.1290
N = 6553600	0.1290	0.1183	0.1935	0.1183	0.1935	0.1935	0.1613	0.1613	0.1183	0.1290
N = 13107200	0.1290	0.1183	0.1935	0.1183	0.1935	0.1935	0.1613	0.1613	0.1183	0.1290

图 38: Fibonacci延迟器比重, $p=5, q=7$, 操作符为异或图 39: Fibonacci延迟器比重, $p=5, q=7$, 操作符为异或

Fibonacci随机数产生器中所占比重										
p = 15754, q = 15703										
Num	4339	6152	19516	9658	32672	9404	11054	19444	19710	24765
N = 100	0.1735	0.1633	0.2041	0.1633	0.1633	0.1939	0.1429	0.1735	0.1633	0.1633
N = 200	0.1768	0.1465	0.1818	0.1818	0.1566	0.1869	0.1465	0.1414	0.1616	0.1364
N = 400	0.1608	0.1658	0.1583	0.1759	0.1658	0.1683	0.1608	0.1256	0.1784	0.1533
N = 800	0.1629	0.1529	0.1554	0.1654	0.1617	0.1642	0.1855	0.1529	0.1830	0.1767
N = 1600	0.1602	0.1577	0.1615	0.1708	0.1640	0.1608	0.1777	0.1615	0.1752	0.1621
N = 3200	0.1620	0.1632	0.1604	0.1701	0.1682	0.1676	0.1726	0.1685	0.1707	0.1576
N = 6400	0.1611	0.1626	0.1622	0.1655	0.1696	0.1652	0.1733	0.1632	0.1721	0.1616
N = 12800	0.1637	0.1655	0.1627	0.1672	0.1678	0.1646	0.1681	0.1682	0.1696	0.1635
N = 25600	0.1660	0.1679	0.1644	0.1692	0.1658	0.1679	0.1685	0.1660	0.1697	0.1646
N = 51200	0.1672	0.1691	0.1647	0.1674	0.1675	0.1673	0.1673	0.1681	0.1679	0.1662
N = 102400	0.1664	0.1672	0.1658	0.1666	0.1673	0.1672	0.1677	0.1679	0.1678	0.1673
N = 204800	0.1663	0.1670	0.1662	0.1671	0.1663	0.1676	0.1666	0.1668	0.1672	0.1677
N = 409600	0.1661	0.1668	0.1665	0.1669	0.1665	0.1674	0.1669	0.1665	0.1668	0.1666
N = 819200	0.1667	0.1665	0.1662	0.1671	0.1666	0.1671	0.1670	0.1665	0.1667	0.1669
N = 1638400	0.1670	0.1667	0.1666	0.1670	0.1664	0.1671	0.1668	0.1667	0.1668	0.1666
N = 3276800	0.1668	0.1667	0.1668	0.1666	0.1665	0.1668	0.1667	0.1669	0.1668	0.1665
N = 6553600	0.1668	0.1667	0.1669	0.1666	0.1664	0.1668	0.1667	0.1668	0.1667	0.1666
N = 13107200	0.1667	0.1667	0.1667	0.1666	0.1666	0.1667	0.1667	0.1668	0.1667	0.1666

图 40: Fibonacci延迟器比重, p=15754, q=15703, 操作符为异或

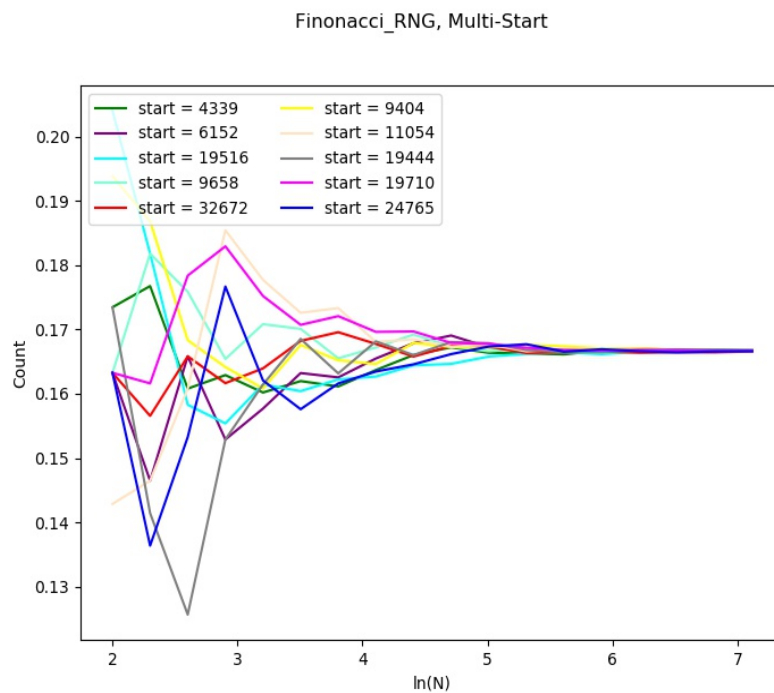


图 41: Fibonacci延迟器比重, p=15754, q=15703, 操作符为异或

可以看出异或与减号类似, 既有不同起始值都趋向于一个比重的情况, 也有分别趋向于不同比重的情况。

5 讨论

5.1 原理的讨论

本次实验的原理较简单, 直接按照对应的迭代公式进行循环即可用16807随机数生成器和Fibonacci延迟器产生随机数。对于比重的计算也是遍历整个保存随机数的数组, 满足所要求的关系 $X_{n-1} < X_{n+1} < X_n$ 时则计数加一, 然后返回比重即可。不过有一点要注意的就是返回的比重的分母应该是(num-2), 而不是num。因为这个关系只比较了(num-2)次, 因此计数最大也只能是(num-2), 这时候的比重应该是1。

5.2 算法的改进

由于本人的计算机知识并不是很丰富, 下面的讨论可能会欠妥, 源代码的编写也肯定会有很多需要改进的地方, 希望以后学习中能够不断完善。

1. 编程易错点:

与第四次作业类似, 程序中大部分有double型变量参加的运算都要先将其中的int型变量进行强制类型转换变成double型变量。例如求 $x_n = I_n/m$ 时, 需要将其中的一个变量转换成double型变量, 否则会因为int型变量的除法相当于进行除法并取整, 最后得到的随机数都是0。

设置一维数组时也需要设置在main函数外面, 否则会因为函数内部的栈的内存的限制对数组长度有很大的限制。

2. 数据结构的选取:

对于保存Fibonacci迭代过程中的整数 I_n 的数组我选用的是long long型的数组, 因为long long型变量占8个字节的空间, 因此数组最大长度比double型的数组最大长度要小很多, 因此随机数的最大数量也会因此减少。但这样做的好处就是可以比较方便地更改Fibonacci操作符, 在源程序中我也是用宏定义来简单修改。对于16807随机数产生器我们通过Schrage法让迭代过程中数字大于int类型上限时仍然可以取模。但Fibonacci操作符若可变的话, 这个防止超过int类型上限的程序就很复杂还要进行条件判断。因此我直接用long long型数组来保存, 这样即使操作符是乘号的时候也不会超过上限, 使操作更加方便。

3. 结果的改进:

与第四次作业类似, 可以设置更小的步长来获取更精确的结果, 也能绘制出更精确的数据图片。但图片已经比较清楚地展示了结果, 因此我并没有选择很短的步长。

5.3 结果的讨论

5.3.1 16807随机数产生器所占比重

经结果分析, 不管起始种子值为多少, 当数量很大时, 16807随机数产生器中满足关系 $X_{n-1} < X_{n+1} < X_n$ 的比重趋向于1/6, 与理论值一致。

理论上的1/6求法有两种, 如下:

1. 我们在实验四中已经证明了以16807随机数产生器产生的相邻的两个随机数为横、纵坐标的分布是 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上的均匀分布, 设该区域为 D_1 。因此 $X_{n-1} < X_n$ 对应的就是 $y > x$ 与 D_1 的交区域 D_2 。

我们在这个区域上选择点 $x_0 = X_{n-1}, y_0 = X_n$ 的一个很小的面积元 $dx_0 dy_0$ 。我们已经假设16807随机数生成器生成均匀的随机数，因此 $[y_0, y_0 + dy_0]$ 经过16807随机数生成器将映射到另一个 D_3 区域上 $[y_0, y_0 + dy_0] \times [0, 1]$ 。在该区域上，点的坐标对应关系为 $x_1 = X_n, y_1 = X_{n+1}$ 。当满足 $X_{n-1} < X_{n+1} < X_n$ 时，即 $x_0 < y_1 < x_1 = y_0$ ，即对应 $(y_0 - x_0)$ 的几率的区域满足 $X_{n-1} < X_{n+1} < X_n$ 。对 D_2 积分即为所占的比例：

$$\iint_{D_2} (y_0 - x_0) dx_0 dy_0 = \int_0^1 dy_0 \int_0^{y_0} (y_0 - x_0) dx_0 = \int_0^1 \frac{1}{2} y_0^2 dy_0 = \frac{1}{6}$$

2. 我们认为以16807随机数产生器产生的三个相邻的随机数为 x 、 y 、 z 坐标做出的随机数分布为立方体内的均匀分布，因此满足 $X_{n-1} < X_{n+1} < X_n$ 的点所占的比重为一个四面体的体积，该四面体的体积为：

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

实验中得到随机数非常大的时候比重趋向1/6，因此本实验的结果较为准确。

5.3.2 Fibonacci延迟器所占比重

不同的操作符对结果有很大的影响，我们根据实验中的结果依次讨论：

1. Fibonacci延迟器操作符为加号：

(a) $p \neq q$ ：

这个情况又可以分为两种情况：

i. $p=1, q=2$ ：

此时比重为0。该结果也符合理论值。该延迟下的Fibonacci延迟器有：

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n + X_{n-1}, & \text{if } X_n + X_{n-1} < m \\ X_n + X_{n-1} - m, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

由于 $X_n > 0$ ，因此当 $X_n + X_{n-1} < m$ 时，显然不可能有 $X_{n+1} < X_n$ 。

而当 $X_n + X_{n-1} > m$ 时，若有 $X_{n+1} > X_{n-1}$ ，即 $X_{n+1} = X_n + X_{n-1} - m > X_{n-1}$ ，即 $X_n > m$ 。与 $X_n < m$ 矛盾。

因此当 $p=1, q=2$ 时比重应该为0，可以说明实验中得到的结论是正确的。

ii. p, q 不为(1,2)的组合：

这个时候比重与16807随机数产生器结果一致，趋于1/6。

(b) $p = q$ ：

实验中可以看到这种情况下的不同的起始值比重不同，之间存在间距，且有一种类似的倍数关系。因为此时Fibonacci延迟器满足的关系为：

$$X_n = \begin{cases} 2X_{n-p}, & \text{if } 2X_{n-p} < m \\ 2X_{n-p} - m, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (8)$$

也可以将这种情况的Fibonacci延迟器看成Lehmer线性同余法的特例。

我们讨论 $p = q = 1$ 时，此时Fibonacci延迟器满足的关系为：

$$X_n = \begin{cases} 2X_{n-1}, & \text{if } 2X_{n-1} < m \\ 2X_{n-1} - m, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (9)$$

假设 $2X_{n-1} > m$ ，则当 $X_{n-1} < X_n$ 时，有 $X_{n-1} < 2X_{n-1} - m$ ，即 $X_{n-1} > m$ ，与 $X_{n-1} < m$ 矛盾。因此当 $X_{n-1} < X_n$ 成立时，不可能有 $X_n = 2X_{n-1} > m$ 。所以：

$$X_n = 2X_{n-1}$$

同时，若 $2X_n < m$ ，则 $X_n < X_{n+1}$ ，也不满足所需的关系，所以：

$$X_{n+1} = 2X_n - m = 4X_{n-1} - m$$

所以当 $X_{n-1} < X_{n+1} < X_n$ 时，有：

$$X_{n-1} < 4X_{n-1} - m < 2X_{n-1}$$

得到：

$$\frac{m}{3} < X_{n-1} < \frac{m}{2}$$

对于任意X的值，我们可以将X写成2的指数的形式，即：

$$X_n = A \times 2^B, \quad A \in [1, 2), B \in \mathbb{Z} \text{ and } B \in [0, 30)$$

因为 $m = 2^{31} - 1 \approx 2^{31}$ ，所以当 $X_{n-1} < X_{n+1} < X_n$ 时，由我们之前得到的结论，可以讲满足这个条件的X写成如下形式：

$$\frac{4}{3} \times 2^{29} < X < 2 \times 2^{29}$$

由于 $\log m \approx 31$ ，因此周期约为31，而这个周期中的31个点仅有1个点满足 $X_{n-1} < X_{n+1} < X_n$ ，所以占得比重约为：

$$\frac{1}{31} \approx 0.032258$$

这个结果正好是我们实验中除了比重为0的最小的结果！其他的结果也正好是这个值的整数倍，可以用Lehmer线性同余法中的结论理解。

k个连续随机数在k维空间画点，则处于k-1维平面上，因此 $X_{n-1} < X_{n+1} < X_n$ 的点对应3维空间中的一个四面体的内部的点。当这个四面体内部仅包含一个平面时，比重就是1/31，包含两个平面则是2/31，以此类推，不同的起始值最后趋向的比重都应该是1/31的整数倍，而不是一个任意值。

对于 $p = q$ 的其他情况也类似，我们不再讨论。

2. Fibonacci延迟器操作符为减号:

(a) $p = q$:

这时候延迟器产生的随机数都是0，这是很平凡的结论。

(b) $p \neq q$:

这个情况也分为两种情况:

i. $p=1, q=2$:

不同的起始值的比重一模一样，如图22所示，不同起始值画出的在不同随机数个数下的曲线绘制出来是一条曲线。最后趋向1/6。

ii. p, q 不为(1,2)的组合:

这时候的结果比较复杂，与16807随机数产生器的1/6的比重之间没有明显的联系。

同时，不同起始值可能最后趋向同一个比重，如图24所示；也可能并不趋向同一个比重，如图26所示。

3. Fibonacci延迟器操作符为乘号:

乘号下不管 p 、 q 是否满足 $p = q$ ，不同起始值下的比重一般不同，即不会趋于同一个比重。

但是否满足 $p = q$ 会有额外的小结论:

$p = q$ 情况下不同起始值的不同比重中相邻的两个比重之间的间距要比 $p \neq q$ 相邻的两个比重之间的间距要大。

4. Fibonacci延迟器操作符为异或:

(a) $p = q$:

这时候延迟器产生的随机数都是0，这是很平凡的结论。因为一个数异或其自身是0。

(b) $p \neq q$:

既可以出现不同起始值比重不同的情况，也可以出现不同起始值比重相同的情况。