16 逾渗模型的重整化群求解

许传奇 PB16021546

1　题目

推导三角格子点阵上座逾渗的重整化群变换表达式$p' = R(p)$，其中端-端连接的条件是3个格点中2个是占据态，求临界点p_c与临界指数ν，与正确值（表1.6.1.3-1）相比较。

2　原理

2.1　临界点概率p_c

重整化时，对应的标度因子计算公式为：

$$b = N^{1/d} \tag{1}$$

其中 N 为重整化变换时，一个元胞中所包含的初始格点数，d 代表维数。

对于给定的b，假设重整化后的逾渗概率为p'，则有：

$$p' = R(p|b) \tag{2}$$

$R(p|b)$是在标度因子为b时，重整化后是占据态的所有初始组态出现的概率。

显然，对于临界点$p^\star$，满足方程：

$$p^\star = R(p^\star|b) \tag{3}$$

因此，求解上述方程，除了得到两个平凡解$p^\star = 0, p^\star = 1$外，还有其他的不动点，就是临界状态的概率。

2.2　临界指数ν

因为重整化的格子点阵中所有的长度量应比原来格子点阵中的长度量缩小b倍，这样才能保持系统在标度变换下是不变的，即关联长度的变换是$\xi' = \xi/b$。由于在$p \sim p_c$处，$\xi(p) \propto |p - p_c|^{-\nu}$，故得：

$$|p' - p^\star|^{-\nu} = b^{-1}|p - p^\star|^{-\nu} \tag{4}$$

在$p^\star$附近作Taylor展开，取一级近似项后，有：

$$p' - p^\star = R(p) - R(p^\star) \approx \lambda(p - p^\star) \Rightarrow |p' - p^\star|^{-\nu} = \lambda^{-\nu}|p - p^\star|^{-\nu} \tag{5}$$

代入式（4）中，解得：

$$\nu = \frac{\ln b}{\ln \lambda} = \frac{\ln b}{\ln\,(dp'/dp)^\star_p} \tag{6}$$

其中，$\lambda = (dp'/dp)_{p=p^\star} = dR(p^\star)/dp$

3 题目解答

3.1 临界点概率p_c

对于三角格子点阵，其重整化示意图如下：

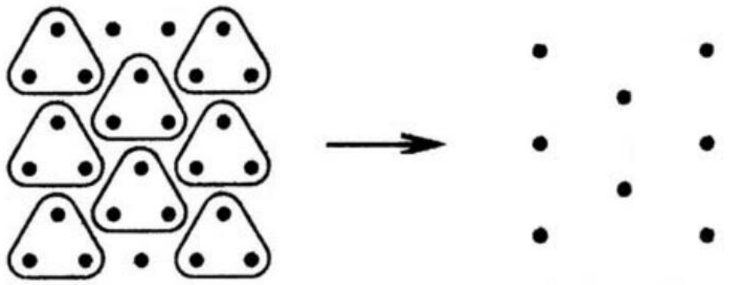

图 1: 三角格子点阵重整化示意图

其标度因子为：

$$b = N^{\frac{1}{d}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \tag{7}$$

由于端-端连接的条件是3个格点中有2个是占据态，因此有如下所示的四种可能的初始状态重整化后是占据态：

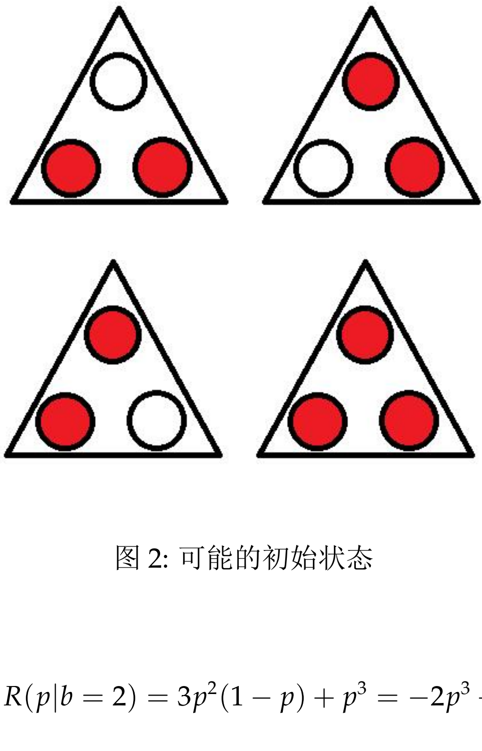

图 2: 可能的初始状态

因此，逾渗概率为：

$$p' = R(p|b=2) = 3p^2(1-p) + p^3 = -2p^3 + 3p^2 \tag{8}$$

临界点$p^\star$满足的方程为：

$$p^\star = R(p^\star|b=2) \Leftrightarrow 2p^{\star 3} - 3p^{\star 2} + p^\star = 0 \tag{9}$$

解得的非平凡解为：

$$p^\star = \frac{1}{2} \tag{10}$$

3.2 临界指数ν

先计算Taylor展开的系数：

$$\lambda = \frac{dR(p^\star)}{dp} = \frac{d(-2p^3+3p^2)}{dp}\bigg|_{p=p^\star} = -6p^2+6p\big|_{p=\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \tag{11}$$

因此，计算得到的临界指数ν为：

$$\nu = \frac{\ln b}{\ln \lambda} = \frac{\ln \sqrt{3}}{\ln \frac{3}{2}} \approx 1.354756 \tag{12}$$

3.3 与正确值的比较

临界点与临界指数的正确值为：

$$p^\star = 0.500000,\ \nu = \frac{4}{3} \approx 1.333333 \tag{13}$$

重整化做法下的解与正确值的相对误差为：

$$\eta_1 = \frac{|0.500000-0.500000|}{|0.5000000|} \times 100\% = 0 \tag{14}$$

$$\eta_2 = \frac{|\frac{4}{3}-1.354756|}{|1.354756|} \times 100\% \approx 1.607\% \tag{15}$$

可见，重整化方法下计算得到的临界值与正确值的相差非常小，因此重整化方法确实在求解临界状态的问题有有较大应用。

对于与正确值偏差的原因，在讲义中也写到：

由于假设各个元胞的占据态与其他元胞无关，可能两个元胞之间存在连接路径，但在重整化群变换后，认为两个元胞之间不存在路径，这样就会带来误差。但该边界效应对于大的元胞尺度来说影响要小，因此取大的b值可以改善计算结果。