BÀI TẬP CHƯƠNG 4

Câu 1. Với mỗi ma trận A cho dưới đây hãy tìm số chiều và một cơ sở của $\mathrm{Col}\,A, \mathrm{Row}\,A, \mathrm{Nul}\,A$.

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & -9 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

b. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -4 & 9 \\ 6 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

c. $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & -10 & -5 & 2 & -2 \\ 3 & -15 & -4 & 3 & -17 \end{bmatrix}$

d. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & 1 & 0 & -6 & -4 \\ 5 & 10 & -3 & 1 & 15 & 13 \\ -3 & -6 & 4 & -2 & -6 & -15 \end{bmatrix}$.

Câu 2. Trong $\mathbb{R}^3$ cho không gian con $W = \left\{(2a - b, a, b) \middle| a, b \in \mathbb{R}\right\}$. Chứng minh rằng W là một không gian con của $\mathbb{R}^3$.

Câu 3. Giả sử V là một không gian véctơ, $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ và $S = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3\}$ là các cơ sở của V sao cho ma trận **đổi tọa độ từ *B* sang *S*** là $T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

1. Tìm tọa độ của véctơ **v** theo cơ sở S biết $\mathbf{v} = 3\mathbf{b}_1 - 5\mathbf{b}_2 + 4\mathbf{b}_3$.
2. Tìm tọa độ của véctơ **u** theo cơ sở B biết $\mathbf{u} = -2\mathbf{s}_1 + 2\mathbf{s}_2 + 5\mathbf{s}_3$.

Câu 4. Cho $\mathcal{B} = \{p_1 = 2 + 2x - x^2, p_2 = 2 + x - 2x^2, p_3 = 1 + x - x^2\}$ là một cơ sở của không gian véctơ $\mathbb{P}_2 = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ (các đa thức hệ số thực có bậc cao nhất là 2), và tập con $S \subset \mathbb{P}_2$ cho bởi:

$$S = \{s_1 = p_1 + p_2 + p_3, s_2 = p_1 - p_2, s_3 = p_1 + 2p_2 + p_3\}.$$

1. Chứng minh rằng S cũng là một cơ sở của $\mathbb{P}_2$.
2. Tìm ma trận đổi tọa độ từ B sang S và ma trận đổi tọa độ từ S sang B.
3. Giả sử $p(x) = p_1 - 3p_2 + 4p_3$, tìm tọa độ của véctơ này theo cơ sở S.
4. Giả sử $q(x) = 2s_1 + 5s_2 - 3s_3$, tìm tọa độ của véctơ này theo cơ sở B.