TOÁN 2

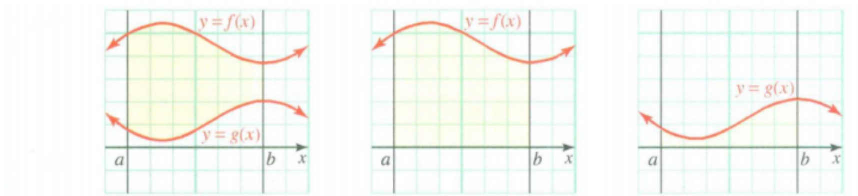
Giảng viên: MAI VĂN DUY

Chương 6: CÁC ỨNG DỤNG KHÁC CỦA TÍCH PHÂN

1. Diện tích giữa hai đường
2. Thể tích
3. Dạng cực- Diện tích trong tọa độ cực
4. Độ dài cung- Diện tích mặt
5. Ứng dụng trong vật lý

6.1 Diện tích giữa 2 đường

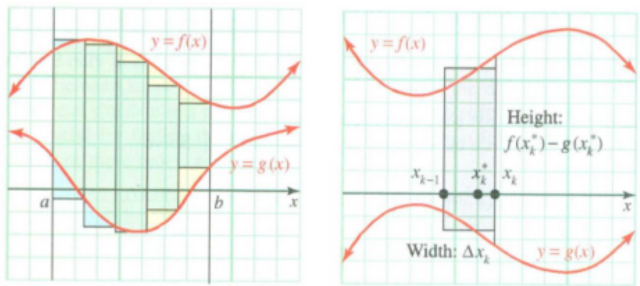
Bài toán tìm diện tích miền giới hạn bởi các đường cong:



[Area between $y = f(x)$ and $y = g(x)$] = [Area under $y = f(x)$] − [Area under $y = g(x)$]

6.1 Diện tích giữa 2 đường

Phương pháp tích phân tìm diện tích miền giới hạn bởi các đường cong:



a. Approximating rectangles **b.** A typical vertical strip

Công thức tính diện tích giữa 2 đường

Bằng định nghĩa tích phân, diện tích phần giới hạn giữa 2 đường cong $y = f(x), y = g(x)$ trong đoạn từ $x = a$ đến $x = b$ tính bởi

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x$$

Ví dụ: Tính diện tích phần giới hạn bởi $y = x^2, y = -1$ trong đoạn từ $x = -1$ đến $x = 1$.

Chú ý:

- Dấu giá trị tuyệt đối trong công thức tính diện tích trên có thể được bỏ đi sau quá trình xét dấu biểu thức $f(x) - g(x)$. Trường hợp ta vẽ được 2 đường cong này thì

$$S = \int_a^b (\text{Đường phía trên- Đường phía dưới })\mathrm{d}x$$

- Dấu của biểu thức $f(x) - g(x)$ có thể được xét bằng cách tìm tất cả các nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ rồi thử giá tại một giá trị trong mỗi khoảng nghiệm

- Hai giá trị a, b có thể được tìm như là nghiệm nhỏ nhất, lớn nhất của phương trình hoành độ giao điểm của $y = f(x), y = g(x)$
- Nếu phần diện tích cần tính có sự đối xứng, chỉ cần tính một phần rồi nhân lên.

Ví dụ: Tìm diện tích phần giới hạn bởi 2 đường cong

1. $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1, y = 1$
2. $y = x^4 - 4x^2 + 1, y = 1$

Diện tích theo dải nằm ngang

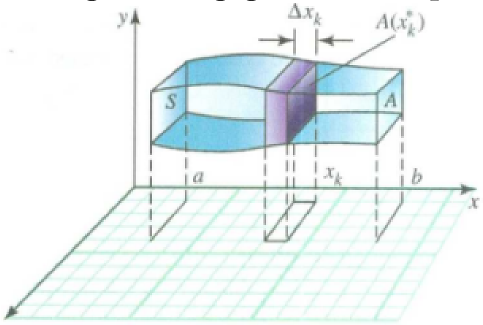
Nếu 2 đường cong được cho ở dạng hàm của biến $x = f(y)$, $x = g(y)$ trong đoạn $y = a$ đến $y = b$ thì công thức diện tích có thể được viết

$$S = \int_a^b |f(y) - g(y)| \mathrm{d}y$$

Ví dụ: Tìm diện tích phần giới hạn bởi 2 đường cong $y^2 - y = x + 1, x = -1$.

6.2 Thể tích

Xét vật thể đặc, đặt trục tọa độ sao cho vật giới hạn trong khoảng giữa 2 mặt phẳng $x = a, x = b$:



6.2 Thể tích

Phương pháp mặt cắt

Xét vật thể đặc, đặt trục tọa độ sao cho vật giới hạn trong khoảng giữa 2 mặt phẳng $x = a, x = b$. Tại mỗi điểm $x \in [a, b]$, thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng qua x và vuông góc Ox có diện tích là $A(x)$. Khi đó, thể tích vật thể:

$$V = \int_a^b A(x)\mathrm{d}x$$

Ví dụ: Tìm thể tích khối chóp tứ giác đều có cạnh a và chiều cao h.

6.2 Thể tích

Phương pháp đĩa và vòng đệm

Giả sử D giới hạn bởi $y = f(x), y = 0, x = a, x = b$. Khi đó, thể tích vật thể (tròn xoay) tạo thành khi quay D quanh Ox là:

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2\mathrm{d}x$$

Nếu miền D tạo bởi $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$ với $f(x) \geq g(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$ thì

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 - \pi[g(x)]^2\mathrm{d}x$$

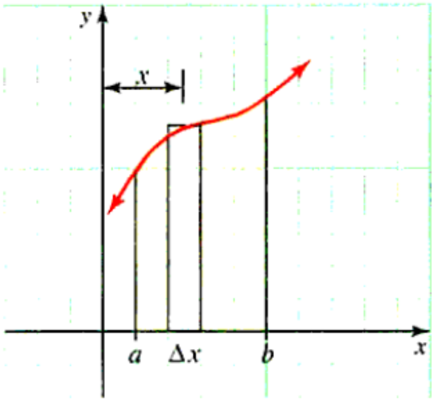
6.2 Thể tích

Ví dụ:

1. Tìm thể tích khối trụ bán kính đáy r, chiều cao h
2. Tìm thể tích khối nón bán kính đáy r, chiều cao h
3. Tìm thể tích khối cầu bán kính r
4. Tìm thể tích cái phao với bán kính vòng trong r và bán kính vòng ngoài R.

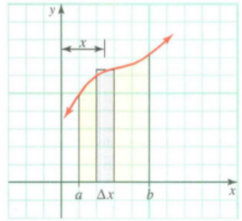
6.2 Thể tích

Xét vật thể tạo thành khi quay miền
$D : y = f(x), y = 0, x = a, x = b$
$(0 \leq a \leq b, f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b])$ quanh Oy:

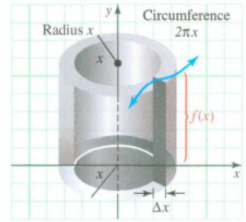


6.2 Thể tích

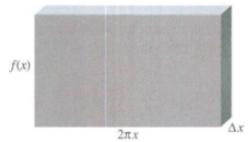
Phương pháp tích phân để tính thể tích D:



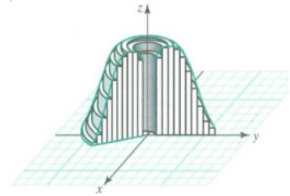
a. Vertical strip



b. When the strip (part a) is revolved about the y-axis, a shell is generated



c. The "unwrapped" flattened shell has volume $\Delta V = 2\pi x f(x)\Delta x$



d. Approximating a solid of revolution using cylindrical shells

6.2 Thể tích

Phương pháp ống trụ

Thể tích vật thể tạo thành khi quay miền
$D : y = f(x), y = 0, x = a, x = b$
$(0 \leq a \leq b, f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b])$ quanh Oy:

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) \mathrm{d}x$$

Ví dụ: Tính thể tích khối sinh ra khi quay miền giới hạn bởi $y = x^{-2}, y = 0, x = 1, x = 2$ quanh Oy.

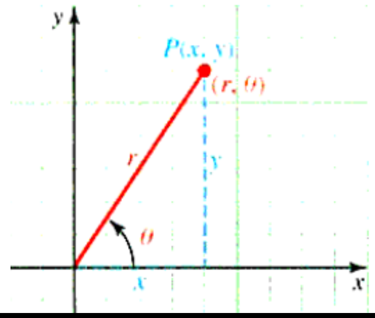
6.2 Thể tích

Ví dụ:

- Tính thể tích khối sinh ra khi quay miền giới hạn bởi $y = x^2, y = 0, x = 0, x = 1$ quanh Oy
- Một khối cầu bán kính R bị khoan một lỗ hình trụ bán kính $r < R$. Tính thể tích phần còn lại.

Hệ tọa độ cực

Trong mặt phẳng, xác định tia Ox, mỗi điểm P được xác định bởi cặp thứ tự (r, θ) với r là độ dài (đại số) từ O đến P và θ là góc định hướng giữa tia Ox và tia OP.



Chú ý:

- Số r gọi là bán kính và θ là góc cực
- Điểm O có tọa độ cực $(0, \theta)$ với θ tùy ý
- Số r không nhất thiết dương, điểm (r, θ) sẽ trùng với điểm $(-r, \theta + \pi)$

Đổi tọa độ

- Chuyển từ tọa độ cực sang dạng vuông góc:

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

- Chuyển từ dạng vuông góc sang cực:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \cos\theta = \frac{x}{r}, \sin\theta = \frac{y}{r}(r \neq 0)$$

Ví dụ:

1. Điểm $(-2, \pi/3)$ trong tọa độ cực khi chuyển sang tọa độ Đề-các là điểm $(-2\cos\pi/3, -2\sin\pi/3) = (-1, -\sqrt{3})$.
2. Điểm $(3, -3)$ trong tọa độ Đề-các khi chuyển sang tọa độ cực: $r = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}, \theta = -\pi/4$.

6.3 Dạng cực và diện tích

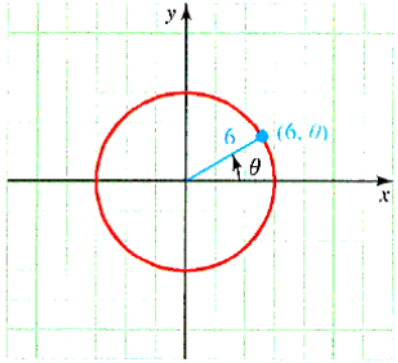
Đồ thị trong tọa độ cực

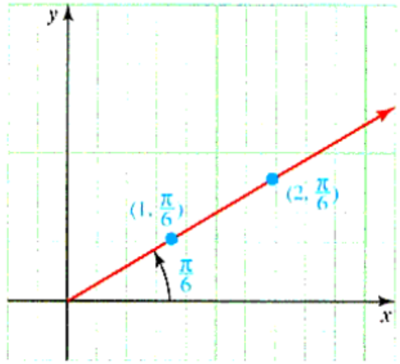
Đồ thị của đường cong $F(r, \theta) = 0$ là tập tất cả các điểm trong tọa độ cực thỏa mãn phương trình đã cho:

- Có thể chuyển sang dạng vuông góc để vẽ đồ thị (dạng tham số)
- Nếu đường cong tuần hoàn thì chỉ vẽ trên một chu kì. Chú ý đến tính đối xứng.

Ví dụ: Vẽ $r = 2; \theta = \dfrac{\pi}{3}; r = \cos\theta; r = \theta$

6.3 Dạng cực và diện tích



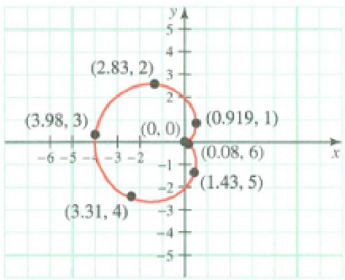


Đường tròn $r = 6$ (bên trái) và tia $\theta = \pi/6, r \geq 0$ (bên phải)

6.3 Dạng cực và diện tích

Vẽ đồ thị của $r = 2(1 - \cos\theta)$.

Đáp số



Vẽ đồ thị trong tọa độ cực bằng cách lập bảng giá trị và vẽ.

6.3 Dạng cực và diện tích

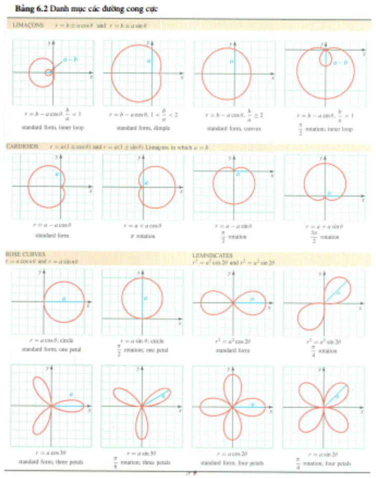
Vẽ đồ thị $r = 2\cos\theta$ trong tọa độ cực bằng cách đưa về Đề-các:

$$
\begin{aligned}
& x = r\cos\theta, y = r\sin\theta \\
\Leftrightarrow & x = 2\cos^2\theta, y = 2\cos\theta\sin\theta \\
\Leftrightarrow & x = 1 + \cos 2\theta, y = \sin 2\theta \\
\Leftrightarrow & (x-1)^2 + y^2 = 1
\end{aligned}
$$

Đồ thị là đường tròn tâm tại $(1, 0)$ và bán kính bằng 1.

6.3 Dạng cực và diện tích

Bảng một số đường cong trong tọa độ cực:



6.3 Dạng cực và diện tích

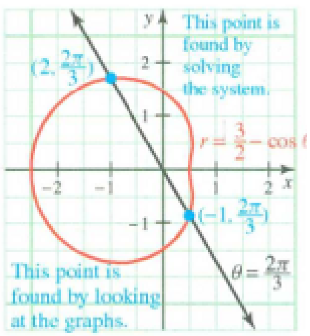
Giao các đường cong cực

Vì ta không còn sự tương ứng 1-1 giữa điểm và tọa độ nên khi tìm giao của các đường cong cực cần:

1. Tìm tất cả nghiệm chung
2. Xét tại $r = 0$
3. Vẽ các đường cong để tìm các giao điểm khác

Ví dụ: Tìm giao điểm $r = 3/2 - \cos\theta, \theta = 2\pi/3$.

6.3 Dạng cực và diện tích



Đáp số: $(2, \frac{2\pi}{3})$, $(1, \frac{5\pi}{3})$.

Tìm giao điểm bằng cách giải hệ, thay $\theta = 2\pi/3$ vào tìm được $r = 2$. Vẽ hình ta tìm được giao điểm khác là $(1, 5\pi/3)$.

6.3 Dạng cực và diện tích

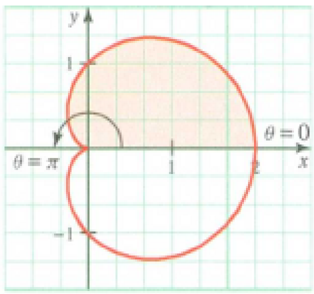
Diện tích trong dạng cực

Diện tích giới hạn bởi $r = f(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta$ (f liên tục, $f(\theta) \geq 0, 0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$). Khi đó, miền tạo thành bởi $r = f(\theta), \theta = \alpha, \theta = \beta$ có diện tích:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta$$

Ví dụ: Tính diện tích nửa trên của $r = 1 + \cos\theta, 0 \leq \theta \leq \pi$.

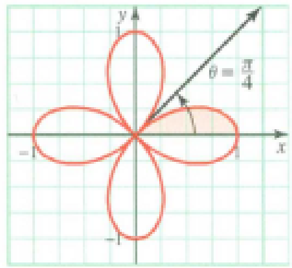
6.3 Dạng cực và diện tích



Tìm diện tích nửa trên của cardioid $r = 1 + \cos\theta$. Nửa trên ứng với $0 \leq \theta \leq \pi$. Áp dụng công thức:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2 d\theta$$
$$= 3\pi/4.$$

6.3 Dạng cực và diện tích

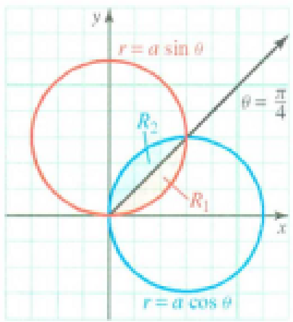


Đáp số: $\frac{\pi}{2}$.

Tìm diện tích hoa hồng 4 cánh $r = \cos 2\theta$. Do tính đối xứng, ta tính diện tích nửa cánh hoa $(0 \leq \theta \leq \pi/4)$ rồi nhân 8.

$$S = 8.\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(\cos 2\theta)^2 d\theta$$
$$= \pi/2.$$

6.3 Dạng cực và diện tích



Đáp số: $\frac{1}{8}a^2(\pi - 2)$.

Tìm diện tích miền giới hạn bởi $r = a\cos\theta$ và $r = a\sin\theta$. Phương trình giao điểm, ta chỉ cần xét trên $[0, 2\pi]$:

$$a\cos\theta = a\sin\theta$$
$$\Leftrightarrow \theta = \pi/4 + k\pi.$$

Thay vào tìm r và kết hợp hình vẽ ta có:

6.3 Dạng cực và diện tích

$$S = R_1 + R_2$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi/4} a^2\sin^2\theta d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} a^2\cos^2\theta d\theta\right)$$
$$= \frac{a^2}{8}(\pi - 2).$$

6.3 Dạng cực và diện tích

Ví dụ:

1. Tính diện tích phần giới hạn bởi $r = \cos 2\theta$
2. Tính diện tích phần giới hạn bởi $r = \sin\theta, r = \cos\theta$
3. Tính diện tích phần giới hạn bởi $r = 5\cos\theta, r = 2 + \cos\theta$

6.4 Độ dài cung và diện tích mặt

Độ dài cung

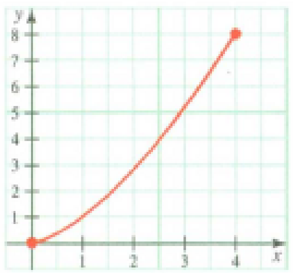
Cho hàm số $y = f(x), x \in [a, b]$ khả vi. Độ dài cung s của đồ thị này trên đoạn $[a, b]$:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\mathrm{d}x$$

Tương tự với hàm $x = g(y), y \in [c, d]$:

$$s = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\mathrm{d}y$$

6.4 Độ dài cung và diện tích mặt



Đáp số: $\frac{8}{27}[10^{3/2} - 1] \approx 9.07$.

Tìm độ dài cung $y = x^{3/2}$ trên $[0, 4]$.

Tính $f'(x) = \dfrac{3}{2}x^{1/2}$

và thay vào công thức:

$$s = \int_0^4 \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$
$$= \frac{8}{27}(10^{3/2} - 1).$$

6.4 Độ dài cung và diện tích mặt

Độ dài cung trong tọa độ cực

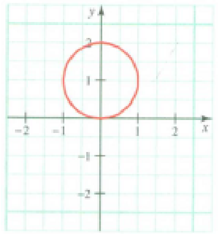
Cho đường cong $r = r(\theta), \theta \in [\alpha, \beta]$ khả vi. Độ dài đường cong này cho bởi:

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}\mathrm{d}\theta$$

Ví dụ: Tính độ dài cung $r = 2\sin\theta, \theta \in [0, \pi]$

6.4 Độ dài cung và diện tích mặt

Tìm độ dài của đường tròn $r = 2\sin\theta$.



Đáp số: 2π.

Tính $r' = 2\cos\theta$ và kết hợp hình vẽ thay vào công thức:

$$s = \int_0^{\pi} \sqrt{4\sin^2\theta + 4\cos^2\theta d\theta} = 2\pi.$$

6.4 Độ dài cung và diện tích mặt

Diện tích mặt

Cho hàm số $y = f(x), x \in [a, b]$ khả vi. Diện tích mặt cong tạo thành khi quay đường cong $y = f(x) \geq 0, x \in [a, b]$ quanh Ox cho bởi:
$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\mathrm{d}x$.
Tổng quát, nếu trục quay cách đường cong $y = f(x)$ một khoảng $R(x)$ thì:
$S = 2\pi \int_a^b R(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\mathrm{d}x$

6.4 Độ dài cung và diện tích mặt

Diện tích mặt tròn xoay trong tọa độ cực

Cho đường cong $r = r(\theta), \theta \in [\alpha, \beta]$ quay quanh Ox ta được mặt tròn xoay có diện tích cho bởi:

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta r\sin\theta\sqrt{r^2 + (r')^2}\mathrm{d}\theta$$

Ví dụ: Tính diện tích mặt tròn xoay sinh ra khi cho cung $r = 2\sin\theta, \theta \in [0, \pi]$ quay quanh trục Ox.

6.5 Các ứng dụng trong vật lý

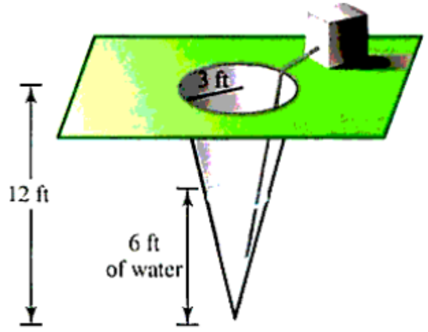
Công sinh ra bởi một lực biến đổi

Cho lực $F = F(x)$ làm cho vật di chuyển trên trục Ox từ a đến b thì công do lực sinh ra là:

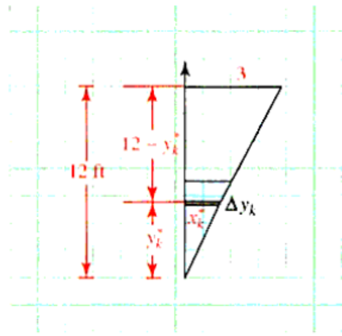
$$W = \int_a^b F(x)\mathrm{d}x$$

Ví dụ: Một con lắc lò xo dao động điều hòa với biên độ A. Lò xo có độ cứng k. Tính công do lực đàn hồi sinh ra khi con lắc chuyển động từ vị trí cân bằng ra tới biên lần đầu tiên.

Ví dụ: Một thùng đựng nước hình phễu cao 12 ft, bán kính mặt phễu 3 ft được đổ đầy nước ($\rho g = 62.4 lb/ft^3$). Tính công để bơm toàn bộ nước ra khỏi phễu theo đường ngang mặt phễu?



a. A conical water tank



b. A disk of water is $12 - y_k^*$ units from the top

Chọn trục tọa độ thẳng đứng, gốc tại đáy phễu. Phân hoạch miền chứa nước $(0 \le y \le 6)$ thành các khoảng nhỏ thứ k độ dài Δy_k và y_k^* bất kì trong khoảng thứ k và x_k^* là bán kính tương ứng. Dùng tam giác đồng dạng ta được:

$$\frac{y_k^*}{12} = \frac{x_k^*}{3} \Leftrightarrow x_k^* = \frac{y_k^*}{4}$$

Thể tích xấp xỉ tại khoảng thứ k:

$$V_k = \pi(x_k^*)^2.\Delta y_k = \pi(y_k^*/4)^2.\Delta y_k$$

Công để đưa khối nước này lên bề mặt:

$$W_k = 62.4\pi(y_k^*/4)^2.\Delta y_k.(12 - y_k^*)$$

Công tổng cộng:

$$W = \int_0^6 62.4\pi(y/4)^2(12 - y)dy = 2106\pi.$$

Lực chất lỏng

Nếu một mặt phẳng diện tích A được nhúng nằm ngang trong một chất lỏng trọng lượng riêng δ đến độ sâu h thì nó chịu một lực ép là:

$$F = \delta h A$$

Lực này cũng gọi là là lực thủy tĩnh.

6.5 Các ứng dụng trong vật lý

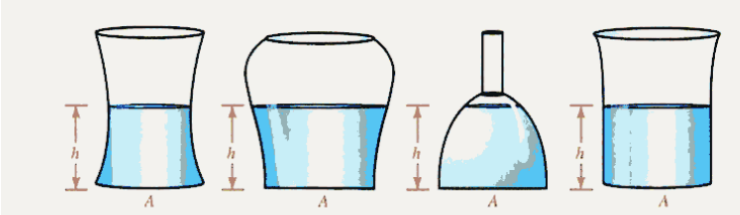


Figure 6.63 The fluid force $F = \delta h A$ does not depend on the shape or size of the container

Chú ý: Lực thủy tĩnh tác dụng vào một mặt luôn có phương vuông góc với mặt đó. Nếu mặt nằm ngang thì nó không phụ thuộc hình dạng bình chứa (phụ thuộc diện tích mặt và độ sâu)

6.5 Các ứng dụng trong vật lý

Lực chất lỏng

Nếu một mặt phẳng (một đĩa) được nhúng xuống một chất lỏng theo trục Ox với độ sâu $a \leq h \leq b$ thì nó chịu một lực thủy tĩnh tổng cộng là:

$F = \int_a^b \delta h L(h) \mathrm{d}h$

Trong đó

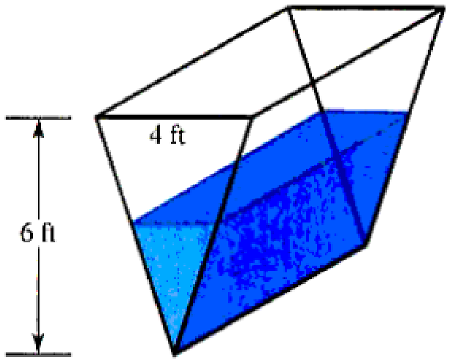
F: lực thủy tĩnh hay lực chất lỏng tác dụng lên đĩa

δ : trọng lượng riêng của chất lỏng

$L(h)$: độ dài tương ứng tại độ sâu h của dải xấp xỉ ngang

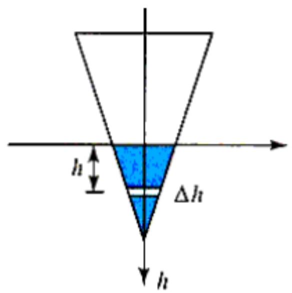
6.5 Các ứng dụng trong vật lý

Ví dụ: Một máng nước có mặt cắt là một tam giác cân ngược. Chiều cao $6ft$, chiều rộng $4ft$ và chứa nước đến độ sâu $3ft$. Tính tổng lực thủy tĩnh tác dụng lên một đầu của máng nước.



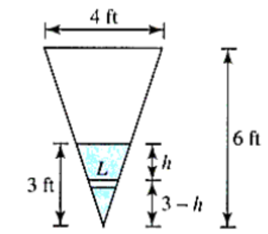
a. A trough with half-filled

6.5 Các ứng dụng trong vật lý



b. Side view of trough

Chọn hệ trục tọa độ thẳng đứng hướng xuống, gốc tại mặt nước như hình. Phân hoạch thành các đoạn nhỏ có độ dài Δh.



c. Use similar triangles to find $\frac{L}{4} = \frac{3-h}{6}$

Độ dài dải xấp xỉ ngang thứ k tương ứng là L. Dùng tam giác đồng dạng tính được:

$$L_k = \frac{2}{3}(3-h)$$

Thay vào công thức với chú ý $\delta = 62.4$ ta tính được:

$$F = \int_0^3 \delta h \frac{2}{3}(3-h)dh = 62.4\int_0^3 \frac{2}{3}h(3-h)dh = 187.2$$

Tọa độ trọng tâm

Cho 2 hàm số $f(x), g(x), x \in [a,b]$ với $f(x) \geq g(x)$ và xét đĩa mỏng đều định bởi các đường này. Khi đó, khối lượng m và tọa độ trong tâm (x_0, y_0) của đĩa cho bởi:

- Khối lượng:$m = \rho\displaystyle\int_a^b (f(x) - g(x)\mathrm{d}x$ với ρ là hằng số(khối lượng trên một đơn vị diện tích)
- $x_0 = \dfrac{M_y}{m}$ với $M_y = \rho\int_a^b x(f(x) - g(x))\mathrm{d}x$
- $y_0 = \dfrac{M_x}{m}$ với $M_x = \dfrac{\rho}{2}\int_a^b (f^2(x) - g^2(x))\mathrm{d}x$

Ví dụ: Tìm khối lượng và trọng tâm của một đĩa mỏng đều có hằng số khối lượng $\rho = 1$ và giới hạn bởi $y = x^2, y = x$.

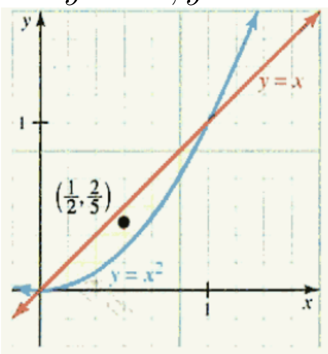


Figure 6.68 The centroid of a planar region

Giải phương trình giao điểm $(x^2 = x)$ tìm được $0 \leq x, y \leq 1$.
Khối lượng: $m = \int_0^1 x - x^2dx = 1/6$
Moment theo trục Oy:
$M_y = \int_0^1 x(x - x^2)dx = 1/12$
Moment theo trục Ox:
$M_x = \dfrac{1}{2}\int_0^1 x^2 - x^4dx = 1/15$
Trọng tâm:

$$\bar{x} = M_y/m = 1/2; \bar{y} = M_x/m = 2/5.$$

Chương 7: CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

1. Phép đổi biến
2. Tích phân từng phần
3. Tích phân hàm hữu tỉ
4. Phương pháp lượng giác
5. Phương trình vi phân bậc nhất
6. Tích phân suy rộng
7. Các hàm hyperbolic và hàm ngược của chúng

7.1 Phép đổi biến

Công thức đổi biến

Cho tích phân dạng $I = \int_a^b f[u(x)]u'(x)\mathrm{d}x$

Đặt $u = u(x), \mathrm{d}u = u'(x)\mathrm{d}x$

Đổi cận:

x	a	b
u	u(a)	u(b)

Khi đó

$I = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\mathrm{d}u$

7.1 Phép đổi biến

Công thức đổi biến

Đặc biệt, nếu F là nguyên hàm của f thì

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

7.1 Phép đổi biến

Ví dụ:(Đổi biến dạng căn) Tính tích phân

$$I = \int_1^{64} \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

(HD: Đặt $u = \sqrt[6]{x}$)

7.1 Phép đổi biến

Ví dụ:(Đổi biến dạng logarit) Tính tích phân

$$I = \int_1^e \frac{\ln^2 x + \ln x}{x} \mathrm{d}x$$

(HD: Đặt $u = \ln x$)

7.1 Phép đổi biến

Ví dụ:(Đổi biến dạng mũ) Tính tích phân

$$I = \int_0^1 \frac{e^x}{1 + \sqrt{e^x}} \mathrm{d}x$$

(HD: Đặt $u = 1 + \sqrt{e^x}$)

7.1 Phép đổi biến

Ví dụ: Tính tích phân

$$I = \int_0^\pi \sin^4 x \cos^3 x \mathrm{d}x$$

7.1 Phép đổi biến

Ví dụ: Tính tích phân

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \mathrm{d}x$$

7.1 Phép đổi biến

Ví dụ: Tính tích phân

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \mathrm{d}x$$

7.1 Phép đổi biến

Ví dụ: Tính tích phân

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x \mathrm{d}x$$

7.2 Tích phân từng phần

Công thức tích phân từng phần

Cho tích phân dạng: $I = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx$

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = g(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\mathrm{d}x \\ v = G(x) \end{cases}$

$$\Rightarrow I = f(x)G(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b G(x)f'(x)\mathrm{d}x$$

Chú ý: Ta thường đặt dv theo thứ tự ưu tiên hàm mũ, hàm lượng giác và hàm đa thức.

7.2 Tích phân từng phần

Ví dụ: Tính tích phân

$$I = \int_1^e \ln x \mathrm{d}x$$

7.2 Tích phân từng phần

Ví dụ: Tính tích phân

$$I = \int_1^e \ln^2 x \mathrm{d}x$$

7.2 Tích phân từng phần

Ví dụ: Tính tích phân

$$I = \int_0^1 e^x \sin x \mathrm{d}x$$

Bảng một số công thức tính tích phân

Một số tích phân có thể được tính sẵn và ta có thể sử dụng. Tuy nhiên, việc biến đổi tích phân để sử dụng các công thức này vẫn có một khối lượng công việc đáng kể. Bảng được giới thiệu trong giáo trình (tiếng Anh) từ trang 1174 đến trang 1183.

7.3 Tích phân hàm hữu tỉ

Phân thức đơn giản

Là phân thức có dạng $\dfrac{A}{(x-a)^n}$ hoặc $\dfrac{Ax+B}{(x-a)^2+b^2}$.

Nhận xét: Ta tính được nguyên hàm của các phân thức đơn giản dễ dàng bằng bảng công thức tích phân.

Phân tích một phân thức hữu tỉ

Mọi phân thức hữu tỉ đều phân tích được thành tổng các đa thức và các phân thức đơn giản.

Cách phân tích một phân thức hữu tỉ

B1. Nếu bậc tử thức lớn hơn hoặc bằng bậc mẫu thức thì chia tử thức cho mẫu thức

B2. Ta dùng phương pháp đồng nhất thức.

Ví dụ: Phân tích các phân thức sau thành dạng đơn giản:

1. $P(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + 2x + 1}{x^2 - 3x + 2}$
2. $Q(x) = \dfrac{x^5 + 3x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 5}$
3. $R(x) = \dfrac{x^5 + 3x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2}$

Tích phân phân thức hữu tỉ

Để tính tích phân dạng này, ta phân tích phân thức thành dạng phân thức đơn giản rồi dùng bảng tích phân để tính.

Ví dụ: Tính các tích phân $\displaystyle\int_1^2 P(x)dx$ với:

1. $P(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + 2x + 1}{x^2 + 3x + 2}$
2. $P(x) = \dfrac{x^5 + 3x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 5}$
3. $P(x) = \dfrac{x^5 + 3x^2 - 2x + 1}{x^3 + x^2}$

7.3 Tích phân hàm hữu tỉ

Đổi biến Weirstrass

Đối với các hàm phân thức hữu tỉ chỉ chứa $\sin x$ và $\cos x$ thì phép đổi biến $t = \tan \frac{x}{2}$ sẽ đưa tích phân này về tích phân hàm hữu tỉ bình thường.

Ví dụ: Tính tích phân

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{2 + \cos x} \mathrm{d}x$$

7.4 Phương pháp lượng giác

Đổi biến lượng giác

Một số tích phân có thể đổi biến đưa về lượng giác:

- Hàm có chứa $\sqrt{a^2 - x^2}$ thì đặt $x = a \sin t, t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- Hàm có chứa $\sqrt{a^2 + x^2}$ thì đặt $x = a \tan t, t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
- Hàm có chứa $\sqrt{x^2 - a^2}$ thì đặt $x = a / \cos t, t \in [0, \frac{\pi}{2})$ hoặc $t \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$

7.4 Phương pháp lượng giác

Đổi biến lượng giác

- Sử dụng công thức $(\sec x)' = \sec x \tan x$ kết hợp với đổi biến số và tích phân từng phần để tính.

7.4 Phương pháp lượng giác

Ví dụ: Tính các tích phân $\int_a^b f(x) \mathrm{d}x$ với:

1. $f(x) = \sqrt{16x - 2x^2 - 23}$ với $a = 2.5, b = 5.5$
2. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{9 + x^2}}$ với $a = 0, b = 3$
3. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ với $a = \sqrt{2}, b = 2$

Tổng hợp phương pháp tính tích phân

B1. Đơn giản hóa biểu thức tích phân và dùng các nguyên hàm cơ bản (nếu có)

B2. Tìm cách đổi biến số hoặc tích phân từng phần. Các dạng chính gồm (trang 541, tài liệu tiếng Anh):

- Tích phân hữu tỉ
- Đổi biến với sin và cos
- Đổi biến với tan và sec
- Đổi biến lượng giác

7.5 Phương trình vi phân bậc nhất

Phương trình vi phân tuyến tính bậc nhất

Phương trình vi phân tuyến tính bậc nhất là phương trình có dạng:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Ví dụ:

1. $y' + xy = x^2$
2. $xy' + 2y = 1$
3. $\dfrac{2x\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - xy - 2 = 0$

7.5 Phương trình vi phân bậc nhất

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính bậc nhất

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính bậc nhất có dạng:

$$y = \frac{1}{I(x)}\left(\int I(x)Q(x)\mathrm{d}x + C\right)$$

Trong đó, $I(x) = e^{\int P(x)\mathrm{d}x}$ gọi là thừa số tích phân và C là hằng số bất kì.

7.5 Phương trình vi phân bậc nhất

Ví dụ: Giải các phương trình vi phân tuyến tính bậc nhất sau:

a. $y' + \dfrac{3y}{x} = x$
b. $x^4\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2x^3y = 5$

7.5 Phương trình vi phân bậc nhất

Ví dụ: (Mô hình Logistic) Tốc độ mà một dịch bệnh bùng phát trong một cộng đồng tỉ lệ với tích số cư dân bị nhiễm bệnh và số cư dân chưa bị bệnh. Tìm số cư dân bị nhiễm như là hàm theo thời gian.

7.5 Phương trình vi phân bậc nhất

Ví dụ: (Mô hình hòa tan) Một thùng chứa 20 lb muối được hòa tan vào 50 gal nước. Giả sử rằng mỗi phút có 3 gal nước muối với nồng độ 2 lb/gal được chảy vào thùng và nước trong thùng chảy ra với tốc độ 2 gal/phút. Giả thiết rằng nước muối trong thùng luôn được khuấy đều. Tìm lượng muối trong thùng tại thời điểm t bất kì và sau 1 giờ?

7.5 Phương trình vi phân bậc nhất

Ví dụ: (Mô hình mạch RL) Một mạch điện gồm nguồn suất điện động E, mắc nối tiếp với điện trở R và cuộn cảm có độ tự cảm L. Khi đóng nguồn điện, dòng điện trong mạch tuân theo định luật thứ 2 của Kirchhoff. Ta thiết lập được phương trình:

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI = E$$

Cho $I = 0$ khi $t = 0$. Giải I theo t.

7.6 Tích phân suy rộng

Khái niệm

Tích phân suy rộng là tích phân mà cận lấy tích phân là vô hạn (loại 1) hoặc hàm dưới dấu tích phân không bị chặn tại hữu hạn điểm trong miền lấy tích phân (loại 2). Tích phân suy rộng có giá trị hữu hạn gọi là hội tụ.

Ví dụ:

1. $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$
2. $I = \displaystyle\int_1^{3} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 1}$

Tích phân suy rộng loại 1

Cho $I = \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$. Ta tính

$$I = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\mathrm{d}x$$

Ví dụ:

$I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$, $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$

Tích phân suy rộng chứa cận $-\infty$ được phân tích tương tự. Tích phân chứa cả $+\infty$ và $-\infty$ cần được tách thành 2 tích phân và chỉ hội tụ khi cả 2 tích phân thành phần đều hội tụ.

Ví dụ:

1. $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$
2. $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\mathrm{d}x}{x^2+1}$

Tích phân suy rộng loại 2

Cho

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Trong đó, $f(x)$ không bị chặn tại a(ta gọi a là điểm kì dị). Ta tính

$$I = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\mathrm{d}x$$

Ví dụ:

1. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$
2. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x}$

Tích phân suy rộng loại 2 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ với điểm kì dị tại b được tính:

$$I = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\mathrm{d}x$$

Tích phân kì dị tại cả 2 đầu thì ta tách thành 2 tích phân và nó chỉ hội tụ khi cả 2 tích phân thành phần đều hội tụ.

Ví dụ:

1. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-1}}$
2. $I = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$

Tiêu chuẩn so sánh cho tích phân suy rộng

Cho 2 tích phân suy rộng $I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ và $J = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$. Nếu $0 \le f(x) \le g(x), \forall x \in (a, b)$ thì

i. Nếu J hội tụ thì I hội tụ
ii. Nếu I phân kì thì J phân kì

Ví dụ:Xét sự hội tụ các tích phân sau

1. $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{d}x}{x^4+x+1}$
2. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^8}}$

7.7 Các hàm hyperbolic và hàm ngược của chúng

Định nghĩa

Ta định nghĩa các hàm hyperbolic:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \forall x \in \mathbb{R}$$

7.7 Các hàm hyperbolic và hàm ngược của chúng

Một số hàm hyperbolic khác

$$\mathrm{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

$$\mathrm{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$$

$$\coth x = \frac{1}{\tanh x}$$

7.7 Các hàm hyperbolic và hàm ngược của chúng

Tính chất

1. $\sinh(-x) = -\sinh x$
2. $\cosh(-x) = \cosh x$
3. $\tanh(-x) = -\tanh x$
4. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
5. $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$
6. $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

7.7 Các hàm hyperbolic và hàm ngược của chúng

Đạo hàm các hàm hyperbolic

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sinh(x) = \cosh x$
2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cosh(x) = \sinh x$
3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tanh(x) = \mathrm{sech}^2 x$
4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \coth(x) = -\mathrm{csch}^2 x$

7.7 Các hàm hyperbolic và hàm ngược của chúng

Các hàm hyperbolic ngược

Các hàm hyperbolic ngược được kí hiệu:

1. $y = \sinh^{-1} x \Leftrightarrow x = \sinh y, \forall x \in \mathbb{R}$
2. $y = \cosh^{-1} x \Leftrightarrow x = \cosh y, \forall x \geq 1$
3. $y = \tanh^{-1} x \Leftrightarrow x = \tanh y, \forall |x| < 1$
4. $y = \coth^{-1} x \Leftrightarrow x = \coth y, \forall |x| > 1$

7.7 Các hàm hyperbolic và hàm ngược của chúng

Đạo hàm các hàm hyperbolic ngược

1. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sinh^{-1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
2. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cosh^{-1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
3. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tanh^{-1}(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$
4. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \coth^{-1}(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

Chương 8: Chuỗi

1. Dãy số và giới hạn dãy số
2. Chuỗi- Chuỗi cấp số nhân
3. Tiêu chuẩn tích phân và p-chuỗi
4. Các tiêu chuẩn so sánh
5. Tiêu chuẩn tỉ số và tiêu chuẩn căn thức
6. Chuỗi đan dấu- Hội tụ tuyệt đối và hội tụ có điều kiện
7. Chuỗi lũy thừa
8. Chuỗi Taylor- Chuỗi Maclaurent

8.1 Dãy số và giới hạn của dãy số

Sinh viên ôn lại các kiến thức về giới hạn dãy số.

Định nghĩa chuỗi

Cho dãy số vô hạn a_n. Tổng tất cả các số hạng của dãy

$$S = \sum_{1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

gọi là một chuỗi số. Nếu S tồn tại hữu hạn thì ta nói chuỗi hội tụ về S. Ngược lại, ta nói chuỗi số phân kì.

Hội tụ theo tổng riêng

Cho dãy số vô hạn a_n. Dãy các S_n (gọi là tổng riêng thứ n) với $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ gọi là dãy các tổng riêng. Khi đó, chuỗi $\sum\limits_{1}^{+\infty} a_n$ hội tụ khi và chỉ khi dãy (S_n) hội tụ và $\sum\limits_{1}^{+\infty} a_n = \lim S_n$

Chú ý: Khi điểm bắt đầu của chuỗi là không quan trọng, ta có thể viết $\sum a_n$ thay vì $\sum\limits_{1}^{+\infty} a_n$.

Ví dụ: Tính các chuỗi sau

1. $\sum\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{1}{3^n}$
2. $\sum\limits_{1}^{+\infty} (-1)^n$
3. $\sum\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$

Tính chất

Cho k,h là các hằng số và N là số tự nhiên. Khi đó,

1. Nếu $\sum a_n, \sum b_n$ hội tụ thì $\sum (ka_n + hb_n) = k \sum a_n + h \sum b_n$
2. Nếu $\sum a_n$ hội tụ và $\sum c_n$ phân kì $\sum (ka_n + hc_n)$ phân kì
3. $\sum\limits_{N}^{+\infty}$ hội tụ khi và chỉ khi $\sum\limits_{1}^{+\infty}$ hội tụ

8.2 Chuỗi số- Chuỗi cấp số nhân

Ví dụ: Tính

1. $\sum(2^{-n} + \dfrac{3}{k(k+2)})$
2. $\sum(2^{-n} + (-2)^n)$

8.2 Chuỗi số- Chuỗi cấp số nhân

Chuỗi cấp số nhân

Nếu (a_n) là cấp số nhân thì $\sum a_n$ gọi là chuỗi cấp số nhân.

Ví dụ:

1. $\sum(3.5^{-n})$
2. $\sum(2^n)$

8.2 Chuỗi số- Chuỗi cấp số nhân

Tính chất chuỗi cấp số nhân

Chuỗi cấp số nhân $\sum a_n$ hội tụ nếu dãy (a_n) có công bội $|q| < 1$ và phân kì nếu $|q| \geq 1$. Hơn nữa, nếu chuỗi hội tụ thì

$$\sum_{1}^{+\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q}$$

Ví dụ:Viết các số sau dưới dạng phân số

1. 0.(3)
2. 1.1(23)

8.2 Chuỗi số- Chuỗi cấp số nhân

Ví dụ:Một bệnh nhân được tiêm 10 đơn vị thuốc mỗi 24 giờ. Lượng thuốc còn lại trong bệnh nhân sau t ngày tuân theo hàm mũ $f(t) = e^{-0.2t}$. Hỏi nếu bệnh nhân điều trị rất dài ngày thì lượng thuốc còn lại trong bệnh nhân xấp xỉ bao nhiêu?

Điều kiện cần hội tụ

Nếu $\sum a_n$ hội tụ thì $\lim a_n = 0$. Hay $\lim a_n \neq 0$ thì chuỗi phân kì.

Ví dụ:Xét sự hội tụ

1. $\sum \dfrac{n}{n+1}$
2. $\sum (1+\frac{1}{n})^n$

Chuỗi không âm

Chuỗi $\sum a_n$ với $a_n \geq 0, \forall n$ gọi là chuỗi không âm.

Tiêu chuẩn theo tổng riêng

Chuỗi không âm $\sum a_n$ hội tụ nếu dãy tổng riêng S_n bị chặn trên.

Tiêu chuẩn tích phân

Nếu $a_n = f(n), \forall n$. Trong đó, f là hàm số liên tục, dương, và giảm trên $[1, +\infty)$ thì $\sum_{1}^{\infty} a_n$ và $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.

Ví dụ: Xét sự hội tụ các chuỗi sau

1. $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (chuỗi điều hòa)
2. $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$
3. $\sum_{1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

p-chuỗi

Một p-chuỗi là chuỗi có dạng $\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$. Ta có:

1. Nếu $p \leq 1$ thì p-chuỗi phân kì
2. Nếu $p > 1$ thì p-chuỗi hội tụ

Tiêu chuẩn so sánh trực tiếp

Cho các chuỗi $\sum a_n$ và $\sum b_n$ với $0 \leq a_n \leq b_n, \forall n$. Khi đó,

1. Nếu $\sum a_n$ phân kì thì $\sum b_n$ phân kì
2. Nếu $\sum b_n$ hội tụ thì $\sum a_n$ hội tụ

Ví dụ: Xét sự hội tụ

1. $\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{3^n + 10}$
2. $\sum_{1}^{+\infty} \frac{1 + \sin n}{n^2}$

Tiêu chuẩn so sánh giới hạn

Cho các chuỗi dương $\sum a_n$ và $\sum b_n$ với $\lim \frac{a_n}{b_n} = L, (0 < L < +\infty)$. Khi đó, 2 chuỗi $\sum a_n$ và $\sum b_n$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.

Ví dụ: Xét sự hội tụ

1. $\sum_{1}^{+\infty} \frac{n^2 + n + 1}{\sqrt[5]{n^{17} + 1}}$
2. $\sum_{1}^{+\infty} \frac{2^n}{3^n + 1}$

8.4 Các tiêu chuẩn so sánh

Tiêu chuẩn so sánh giới hạn zero-vô cùng

Cho các chuỗi dương $\sum a_n$ và $\sum b_n$. Khi đó,

1. Nếu $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$ và $\sum b_n$ hội tụ thì $\sum a_n$ hội tụ
2. Nếu $\lim \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ và $\sum b_n$ phân kì thì $\sum a_n$ phân kì

8.5 Tiêu chuẩn tỉ số và tiêu chuẩn căn thức

Tiêu chuẩn tỉ số

Cho chuỗi dương $\sum a_n$ và $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$. Khi đó,

1. Nếu $L < 1$ thì $\sum a_n$ hội tụ
2. Nếu $L > 1$ thì $\sum a_n$ phân kì
3. Nếu $L = 1$ thì không có kết luận gì.

Chú ý:Tiêu chuẩn này dùng cho các chuỗi có giai thừa hoặc dạng tích phức tạp.

8.5 Tiêu chuẩn tỉ số và tiêu chuẩn căn thức

Ví dụ: Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{1}^{+\infty} a_n$ với

1. $a_n = \frac{3^n}{n!}$
2. $a_n = \frac{1.3.5....(2n-1)}{n^9}$

8.5 Tiêu chuẩn tỉ số và tiêu chuẩn căn thức

Tiêu chuẩn căn thức

Cho chuỗi dương $\sum a_n$ và $\lim \sqrt[n]{a_n} = L$. Khi đó,

1. Nếu $L < 1$ thì $\sum a_n$ hội tụ
2. Nếu $L > 1$ thì $\sum a_n$ phân kì
3. Nếu $L = 1$ thì không có kết luận gì.

Chú ý:Tiêu chuẩn này dùng cho các chuỗi có hàm mũ phức tạp.

8.5 Tiêu chuẩn tỉ số và tiêu chuẩn căn thức

Ví dụ: Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{1}^{+\infty} a_n$ với

1. $a_n = (1 + \frac{1}{n})^{n^2}$
2. $a_n = \dfrac{1}{(\ln n)^n}$

8.6 Chuỗi đan dấu- Hội tụ tuyệt đối và hội tụ có điều kiện

Chuỗi đan dấu

Chuỗi đan dấu là chuỗi có dạng:

$$\sum (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - .... + (-1)^n a_n + ...$$

Trong đó a_n là dãy số dương.

Chú ý: Chuỗi đan dấu có thể bắt đầu bằng số hạng âm hoặc dương.

Ví dụ: $\sum (-1)^{n+1} n^2$, $\sum \dfrac{\cos n\pi}{n}$

8.6 Chuỗi đan dấu- Hội tụ tuyệt đối và hội tụ có điều kiện

Tiêu chuẩn Leibniz

Chuỗi đan dấu $\sum (-1)^n a_n$ hội tụ nếu a_n là dãy giảm về 0.

Ví dụ:Xét sự hội tụ các chuỗi

1. $\sum_{1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\ln n + 1}$
2. $\sum_{1}^{\infty} \dfrac{\cos n\pi}{n}$

8.6 Chuỗi đan dấu- Hội tụ tuyệt đối và hội tụ có điều kiện

Xấp xỉ chuỗi đan dấu

Chuỗi đan dấu $\sum (-1)^n a_n$ hội tụ về S thì $|S - S_n| \leq a_{n+1}$

Ví dụ:Tính chuỗi sau với sai số không quá 10^{-3}

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n^5}$$

8.6 Chuỗi đan dấu- Hội tụ tuyệt đối và hội tụ có điều kiện

Tiêu chuẩn hội tụ tuyệt đối

Cho chuỗi $\sum a_n$. Nếu chuỗi $\sum |a_n|$ hội tụ thì $\sum a_n$ hội tụ. Khi đó, $\sum a_n$ gọi là hội tụ tuyệt đối.

Ví dụ:Xét sự hội tụ của chuỗi sau

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$$

8.6 Chuỗi đan dấu- Hội tụ tuyệt đối và hội tụ có điều kiện

Hội tụ có điều kiện

Cho chuỗi $\sum a_n$. Nếu chuỗi $\sum a_n$ hội tụ nhưng chuỗi $\sum |a_n|$ không hội tụ thì $\sum a_n$ gọi là hội tụ có điều kiện. Một chuỗi hội tụ thì hoặc là hội tụ có điều kiện hoặc là hội tụ tuyệt đối.

Ví dụ:Xét sự hội tụ của chuỗi sau và nếu nó hội tụ thì là hội tụ tuyệt đối hay hội tụ có điều kiện:

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\sqrt{n}}$$

8.6 Chuỗi đan dấu- Hội tụ tuyệt đối và hội tụ có điều kiện

Tiêu chuẩn tỉ số và căn thức tổng quát

Bằng cách áp dụng tiêu chuẩn tỉ số và căn thức cho chuỗi $\sum |a_n|$, ta có điều kiện cần và đủ cho sự hội tụ tuyệt đối của $\sum a_n$.

Ví dụ:Xét sự hội tụ của chuỗi sau

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}$$

8.7 Chuỗi lũy thừa

Định nghĩa chuỗi lũy thừa

Chuỗi lũy thừa là chuỗi có dạng

$$\sum_{0}^{+\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + \ldots + a_n(x-c)^n + \ldots$$

Trong đó, các $a_0, a_1, \ldots$ gọi là hệ số của chuỗi lũy thừa, c là hằng số cho trước và $x \in \mathbb{R}$.

Chú ý:Chuỗi lũy thừa được coi là một đa thức mở rộng theo x. Với $c = 0$, chuỗi lũy thừa gọi là chuỗi lũy thừa chuẩn.

Miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

Tập các giá trị của x làm cho chuỗi lũy thừa hội tụ gọi là miền hội tụ của chuỗi lũy thừa.

Định lý

Cho chuỗi lũy thừa $\sum a_n x^n$. Khi đó, một và chỉ một trong các điều sau xảy ra:

1. Chuỗi lũy thừa hội tụ với mọi x
2. Chuỗi lũy thừa hội tụ chỉ tại $x = 0$
3. Tồn tại $R > 0$ (gọi là bán kính hội tụ) để chuỗi lũy thừa hội tụ tại mọi $|x| < R$ và phân kì tại mọi $|x| > R$

Chú ý: Có thể tính R bằng các công thức:

$$\frac{1}{R} = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \text{ hoặc } \frac{1}{R} = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$$

Ví dụ:Tìm miền hội tụ của các chuỗi lũy thừa

$$\sum_{0}^{+\infty} \frac{nx^n}{n+1}$$

$$\sum_{0}^{+\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$$

$$\sum_{0}^{+\infty} \frac{2^n (x^2-1)n}{n+1}$$

Đạo hàm và tích phân của chuỗi lũy thừa

Cho hàm $f(x) = \sum_{0}^{\infty} a_n x^n$. Khi đó, f(x) có đạo hàm và nguyên hàm trên $(-R, R)$ và với mọi $x \in (-R, R)$ ta có:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + ... + n a_n x^{n-1} + ...$$

$$F(x) - F(0) = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + ... + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + ...$$

8.7 Chuỗi lũy thừa

Ví dụ:Chứng minh rằng

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$$

8.7 Chuỗi lũy thừa

Ví dụ:Tìm miền hội tụ và hàm biểu diễu các chuỗi sau

1. $\sum_{0}^{\infty} x^n$
2. $\sum_{0}^{\infty} (n+1)x^n$

8.7 Chuỗi lũy thừa

Ví dụ:Tìm chuỗi lũy thừa biểu diễu hàm

1. $f(x) = \ln(1-x), x \in (-1, 1)$
2. $f(x) = \tan^{-1} x, x \in \mathbb{R}$

8.8 Chuỗi Taylor và chuỗi Maclaurent

Đa thức Taylor

Đa thức Taylor $T(x)$ tại điểm $x = c$ của hàm $f(x)$ khả vi n cấp trên khoảng I là đa thức xấp xỉ $f(x)$ sao cho $T^{(k)}(x) = f^{(k)}(x), \forall x \in I, k \in \{0, 1, ..., n\}$. Ta có biểu diễn:

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-c)^k f^{(k)}(c)}{k!}$$

Chú ý: Với $c = 0$, đa thức Taylor gọi là đa thức Maclaurent.

Biểu diễn hàm f thành chuỗi lũy thừa-Chuỗi Taylor

Cho hàm f khả vi vô hạn lần trên khoảng I. Khi đó nó có dạng biểu diễn lũy thừa và ta gọi biểu diễn này là chuỗi Taylor của hàm f:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-c)^k f^{(k)}(c)}{k!}$$

Chú ý: Chuỗi lũy thừa của f nếu tồn tại, là duy nhất.

Hàm dư Taylor

Cho hàm f khả vi vô hạn lần trên khoảng I. Khi đó, sai số khi xấp xỉ f bằng đa thức Taylor gọi là hàm dư Taylor:

$$R(x) = f(x) - T(x)$$

Chú ý: Có nhiều công thức tính $R(x)$. Ở đây ta dùng công thức dạng Lagrange:
$R(x) = \dfrac{(x-c)^{n+1} f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}$
Trong đó z là điểm nào đó nằm giữa x và c và phụ thuộc vào x.

Ví dụ: Tìm chuỗi Maclaurent của hàm $f(x) = e^x$. Từ đó, tính e với sai số không quá 10^{-3}.

Ví dụ: Tìm chuỗi Maclaurent của hàm $f(x) = xe^{x^2+1}$. Từ đó, tính $f^{(100)}(0)$.

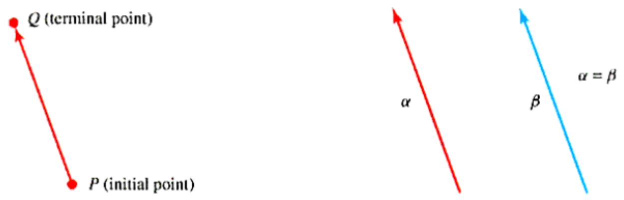
Chương 9: VECTOR

1. Vector trong mặt phẳng và trong không gian
2. Tích vô hướng
3. Tích có hướng
4. Đường trong không gian

9.1 Vector trong mặt phẳng và trong không gian

Vector

Vector là một đại lượng có hướng. Thường kí hiệu vector bởi: u, $\overrightarrow{AB}$.



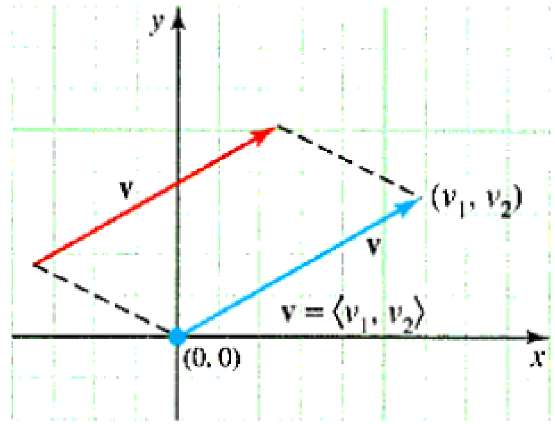
9.1 Vector trong mặt phẳng và trong không gian

Tọa độ vector

Mỗi vector trong mặt phẳng được xác định bởi tọa độ của nó(tọa độ điểm cuối):
$u = (x, y)$ hoặc $u = (x, y, z)$.

Chú ý: $u = (x, y, z) \Leftrightarrow u = x.\mathbf{i} + y.\mathbf{j} + z.\mathbf{k}$ với $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ lần lượt là các vector đơn vị (độ dài bằng 1) trên các trục tọa độ Ox,Oy,Oz.

9.1 Vector trong mặt phẳng và trong không gian



9.1 Vector trong mặt phẳng

Một số tính chất tự ôn tập

1. Độ dài vector
2. Phép cộng, trừ hai vector và phép nhân vector với một số
3. Tọa độ vector
4. Các phép toán vector và độ dài theo tọa độ.

9.2 Tích vô hướng

Tích vô hướng

Cho các vector $u = (a_1, b_1, c_1), v = (a_2, b_2, c_2)$. Tích vô hướng của u và v là số định bởi:

$$u \cdot v = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$$

Chú ý: Mỗi vector trong mặt phẳng xem như là một vector trong không gian với cao độ bằng 0. Do đó, với $u = (a_1, b_1), v = (a_2, b_2)$:

$$u \cdot v = a_1a_2 + b_1b_2.$$

9.2 Tích vô hướng

Một số tính chất tự ôn tập

1. Các tính chất của tích vô hướng đối với các phép toán vector
2. Góc giữa hai vector
3. Góc giữa hai đường thẳng.

9.2 Tích vô hướng

Hai vector trực giao

Hai vector u, v gọi là vuông góc (trực giao) với nhau nếu góc giữa chúng là $\frac{\pi}{2}$. Ta có đẳng thức tọa độ, với $u = (a_1, b_1, c_1), v = (a_2, b_2, c_2)$:

$$u \perp v \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

Góc định hướng

Cho vector $u = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Gọi $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi]$ là các góc định hướng tạo bởi các trục dương Ox, Oy, Oz với vector u. Khi đó,

$$\cos\alpha = \frac{a}{\|u\|}, \cos\beta = \frac{b}{\|u\|}, \cos\gamma = \frac{c}{\|u\|}$$
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$
$$u = \|u\|(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

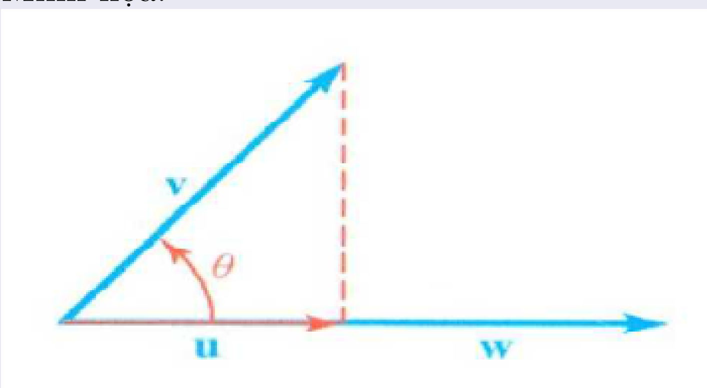
Hình chiếu

Cho các vector v, w.

1. Phép chiếu vector của v xuống w là vector :
$$u = \text{proj}_w v = \frac{v \cdot w}{w \cdot w} w$$
2. Phép chiếu vô hướng của v xuống w là số:
$$\|u\| = \text{comp}_w u = \frac{u \cdot w}{\|w\|}$$

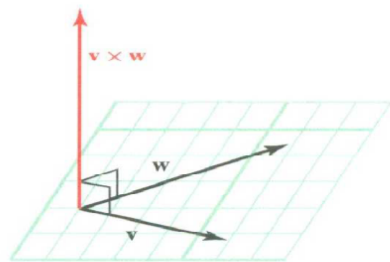
Phép chiếu

Minh họa:



Tích có hướng

Cho các vector $u = (a_1, b_1, c_1), w = (a_2, b_2, c_2)$ trong không gian. Tích có hướng của u và w là vector:
$u \times w = (b_1c_2 - b_2c_1, a_2c_1 - a_1c_2, a_1b_2 - a_2b_1)$



9.3 Tích có hướng

Tính chất của tích có hướng

Cho các vector u, v, w và các số thực s, t:

1. $(sv) \times (tw) = st.v \times w$,
2. $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$,
   $(u + v) \times w = u \times w + v \times w$,
3. $v \times w = -w \times v$,
4. $(v = tw$ hoặc $w = tv) \Leftrightarrow v \times w = 0$,
5. $v \times 0 = 0 \times v = 0$,
6. $\|v \times w\| = \|v\|^2\|w\|^2 - (v \cdot w)^2$,
7. $u \times (v \times w) = (w \cdot u)v - (v \cdot u)w$.

9.3 Tích có hướng

Ý nghĩa hình học của tích có hướng

Cho các vector u, w không cùng phương. Khi đó, tích $u \times w$ là vector vuông góc với cả u và w.

9.3 Tích có hướng

Ý nghĩa vật lý của tích có hướng

Cho lực $\overrightarrow{F}$ có điểm đặt tại Q. Khi đó, moment quay của lực này tạo ra quanh điểm P được tính:

$$\overrightarrow{T} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{F}$$

9.3 Tích có hướng

Độ dài của tích có hướng

Cho các vector u, w. Khi đó, với $\theta \in [0, \pi]$ là góc giữa u và w thì:

$$\|u \times w\| = \|u\|\|w\| \sin\theta$$

9.3 Tích có hướng

Ứng dụng vào hình học của độ dài tích có hướng

Cho các vector u, w. Khi đó $\|u \times w\|$ là diện tích hình bình hành có 2 cạnh kề là u và w. Do đó, diện tích tam giác ABC trong không gian:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|$$

Tích hỗn tạp

Cho các vector u, v, w. Khi đó $(u \times w) \cdot w$ gọi là tích hỗn tạp của 3 vector u, v, w. Nếu $u = (a_1, b_1, c_1), v = (a_2, b_2, c_2), w = (a_3, b_3, c_3)$ thì

$$(u \times w) \cdot w = \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix} \right\|$$

Ứng dụng của tích hỗn tạp

Cho các vector u, v, w. Khi đó $|(u \times w) \cdot w|$ là tích hỗn tạp này là thể tích của hình hộp được dựng trên 3 vector u, v, w.
Ngoài ra, tích hỗn tạp bằng 0 khi và chỉ khi 3 vector này cùng nằm trên một mặt phẳng (đồng phẳng).

9.4 Đường trong không gian

Một số kiến thức tự ôn tập

1. Phương trình tham số của đường thẳng
2. Phương trình chính tắc của đường thẳng.

Phương trình tham số của đường cong trong không gian

Cho $I \subset \mathbb{R}$. Tập hợp các điểm (x, y, z) thỏa phương trình $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$ $t \in I$ (với f, g, h là các hàm liên tục) gọi là một đường trong không gian và biểu thức trên gọi là phương trình tham số của đường cong.

Chú ý: Việc tìm phương trình tham số cho một đường cong gọi là tham số hóa đường cong đó.

9.4 Đường trong không gian

Một số ví dụ về tham số hóa một đường cong:

1. $y = x^2 + 2$
2. $2x^2 + 3y^2 = 4$
3. $r = \cos\varphi$ trong tọa độ cực.