Đại học Quốc Gia Thành Phố Hồ Chí Minh
Trường Đại học Khoa học Tự Nhiên
Khoa Toán - Tin học

*****

Báo cáo cuối kì

GIÁ TRỊ CHỊU RỦI RO VÀ PHƯƠNG PHÁP BACKTESTING

Nhóm báo cáo: HCMUS

Môn học: Mô hình toán tài chính

Giảng viên: Thầy Nguyễn Đăng Minh

Thành phố Hồ Chí Minh, ngày 02 tháng 06 năm 2024

DANH SÁCH THÀNH VIÊN NHÓM "HCMUS"

STT	Họ và tên	MSSV
1	Nguyễn Thị Trúc Ngân	20110248
2	Khương Công Hoàng	21110085
3	Trần Thành Nhân	21110136
4	Lê Hồng Cát	21110249
5	Phạm Gia Hy	21110311
6	Trịnh Quang Trung	21110426

Mục lục

1 Mở đầu

- ***Value – at – risk*** hay còn được gọi là **"giá trị chịu rủi ro"** hay **"rủi ro theo giá trị"** là một công cụ thống kê đo lường được biết đến nhiều nhất để định lượng và kiểm soát mức độ rủi ro của một danh mục đầu tư. Việc thiết lập VaR có ý nghĩa trọng tâm đối với một tổ chức tín dụng, vì nó là cơ sở cho kỹ thuật thông báo (một kỹ thuật được sử dụng để thông báo và báo cáo tuân thủ các quy định pháp lý rủi ro tài chính mà các tổ chức tài chính phải tuân thủ theo các quy định của cơ quan quản lý) theo quy định và cho các khoản đầu tư vốn cần thiết.

- Một ví dụ cho ***Value – at – risk*** đó chính là:

  "Anh/chị đầu tư một khoản tiền lớn vào một danh mục cổ phiếu Châu Âu và tháng vừa rồi giá trị danh mục đầu tư này đã giảm xuống $50,000$€. Sau khi khảo sát những nguyên nhân dẫn đến sụt giảm lợi nhuận, anh/chị muốn biết mức tổn thất tối đa vào cuối tháng này. Câu trả lời ngay lập tức là anh/chị có thể mất hết khoản tiền đầu tư, nhưng câu trả lời này không phù hợp với thực tế vì ai cũng biết trường hợp thiệt hại lớn này hiếm khi xảy ra. Câu trả lời thích hợp là : "nếu không tồn tại sự kiện đặc biệt, thì tổn thất tối đa trong 95% các trường hợp sẽ không vượt quá 4000€ vào cuối tháng này". Đó là khái niệm của VaR.

- Mô tả rủi ro được thực hiện với sự giúp đỡ của một **"mô hình nội bộ" (internal model)**, nhiệm vụ của nó là phản ánh rủi ro tương tự theo thời gian. Điều này thường xảy ra thông qua việc chọn danh mục phù hợp với yếu tố rủi ro cụ thể, tức là thông qua phân tích thành phần chính. Với các tùy chọn cho giao dịch, thường áp dụng biến đổi tuyến tính "Greeks".

- Trong quản trị rủi ro tài chính, VaR là một giá trị sử dụng rộng rãi đo độ rủi ro mức độ tổn thất trên một danh mục tài sản tài chính nhất định. Cho một danh mục, xác suất và khoảng thời gian không đổi, VaR được định nghĩa như một giá trị ngưỡng sao cho xác suất để tổn thất danh mục trong khoảng thời gian nhất định không vượt quá giá trị này là một số α cho trước.

- Tham số mục tiêu trong mô hình là dự báo xác suất thay đổi danh mục đầu tư trong một khoảng thời gian nhất định. Cần kiểm tra rằng mô hình có áp dụng đúng các khía cạnh cốt lõi của rủi ro hay không. Quy trình **Backtesting** phục vụ để đánh giá chất lượng dự báo của mô hình rủi ro chính là: so sánh kết quả thực tế với những kết quả được tạo ra từ mô hình VaR. Để làm điều này, các ước tính VaR hàng ngày được so sánh với các kết quả từ giao dịch giả định được giữ từ cuối ngày hôm nay đến cuối ngày tiếp theo, gọi là **"clean backtesting"**. Khái niệm **"clean backtesting"** được phân biệt với phân tích "đánh giá thị trường" (lợi nhuận $\&$ thua lỗ - "dirty $P\&L$"). Khi đánh giá chất lượng dự báo của mô hình rủi ro, nên tập trung vào **clean backtesting**.

- Kể từ năm 1997 (sửa đổi của văn bản rủi ro thị trường Basel) các tổ chức được phép sao chép các những rủi ro cụ thể là những rủi ro liên quan đến diễn biến giá cả hàng ngày *("rủi ro tồn dư" – residual risks)* và những rủi ro khác phát sinh từ những sự việc hiếm gặp *("event risks" – rating changes)*. Mô hình chỉ xem xét **"residual risk"** được gọi là **"surcharge models"**. Và mô hình chỉ xem xét **"event risks"** được gọi là **"non – surcharge models"**.

- Để tính toán vốn đầu tư, ta cần sử dụng công thức sau:

$$EMU_t = max\left(VaR_{t-1} + d.SR_{t-1}; M.\frac{1}{60}\sum_{i=1}^{60} VaR_{t-i} + d.\frac{1}{60}\sum_{i=1}^{60} SR_{t-i}\right) \tag{16.1}$$

Trong đó:

- EMU_t = Vốn đầu tư cho giá trị rủi ro được xác định bởi mô hình rủi ro vào ngày t.
- VaR_{t-i} = Ước tính VaR tại ngày $t - i$ cho tổng thể và cụ thể rủi ro về giá trị.
- d = Biến chỉ báo với $d = 1$ cho **"surcharge models"** và $d = 0$ cho **"non – surcharge models"** và cho các mô hình chỉ mô phỏng rủi ro nói chung (tức là **không** nói cụ thể *non – surcharge* hay *surcharge models*).
- M = Hệ số nhân với $M = 3 + ZBT + ZQM$.
- ZBT = Hệ số phụ phí cho **backtesting** theo điều §$37IIGI(0 \leq ZBT \leq 1)$
- ZQM = Hệ số phụ phí cho các thiếu sót định tính $(0 \leq ZQM \leq 1)$
- SR_{t-i} = Phụ phí cho việc không mô phỏng **"event risk"** trong mô hình **"surcharge models"** vào ngày $t - i$

Ví dụ:

Exceedances	Increase of M	Zone
0 bis 4	0	green
5	0.4	yellow
6	0.5	yellow
7	0.65	yellow
8	0.75	yellow
9	0.85	yellow
More than 9	1	red

Table 16.1: Traffic light as a factor of the exceeding amount

- Hệ số M trong (16.1) chứa hệ số phụ phí **backtesting** được tính toán từ cái gọi là **"traffic light"**. Theo **"traffic light"**, giá trị M tăng theo số lần giá trị VaR vượt quá tổn thất thực tế. Bảng 16.1 giải thích các vùng *"traffic light"*.

2 Mô hình dự đoán và Mô hình VaR

- ***VaR Models*** được sử dụng rất nhiều trong các ứng dụng tài chính. Mục tiêu của mô hình chính là định lượng lợi nhuận hoặc lỗ của danh mục đầu tư có thể xảy ra trong một thời gian gần. Sự không chắc chắn về sự phát triển của danh mục đầu tư được thể hiện bằng ***"phân phối dự báo"*** P_{t+1} cho giai đoạn $t+1$.

$$P_{t+1} = \mathfrak{L}(L_{t+1}|\mathcal{F}_t) \qquad (1)$$

- Phân phối (1) là một phân phối có điều kiện của biến ngẫu nhiên L_{t+1}, đại diện cho lợi nhuận hoặc thua lỗ có thể xảy ra của một danh mục đầu tư trong các kỳ tới thời điểm $t+1$ và $\mathcal{F}_t$ biểu thị thông tin trong các dữ liệu lịch sử có sẵn cho đến thời điểm t. Một ước lượng cho phân phối này được đưa ra bởi mô hình dự báo. Do đó các phân phối có điều kiện của L_{t+1} có thể đến từ một lớp tham số $P_{t+1} = \left\{P_{t+1}^{\theta(t)}|\theta(t) \in \Theta\right\}$. Tham số hữu hạn chiều $\theta(t)$ thường được ước lượng từ $n = 250$ quan trắc lịch sử tại thời điểm t, tương đương với số ngày giao dịch trong một năm. Ký hiệu $\hat{\theta}(t)$ là ước lượng của tham số này thì $\mathfrak{L}(L_{t+1}|\mathcal{F}_t)$ có thể xấp xỉ bằng $P_{t+1}^{\hat{\theta}(t)}$.

- Một ví dụ quan trọng của $\mathcal{P}_{t+1}$ là mô hình ***Delta – Normal***, RiskMetrics(1996). Trong mô hình này chúng ta sẽ giả định rằng danh mục đầu tư được cấu thành từ d yếu tố tuyến tính (hoặc tuyến tính hóa) với giá trị thị trường $X_{k,\,t},\ k = 1, \ldots,\ d$ và phân phối kết hợp có điều kiện của hàm log lợi nhuận:

$$Y_{t+1} \in \mathbb{R}^d, Y_{k,t+1} = \log(X_{k,t+1}) - \log(X_{k,t}), k = 1, \ldots, d.$$

  với thông tin tính đến thời điểm t là một phân phối chuẩn đa biến, tức là:

$$\mathfrak{L}(Y_{t+1}|\mathcal{F}_t) = \mathcal{N}_d\left(0, \Sigma_t\right) \qquad (16.2)$$

  Trong đó $\sum_t$ là một ma trận hiệp phương sai (có điều kiện) của Vector ngẫu nhiên Y_{t+1}. Chúng ta xem xét trước tiên tại một vị trí đơn $(d = 1)$, được tạo thành bởi λ_t cổ phiếu của một chứng khoán có giá trị thị trường thực tế $X_t = x$. Với $\omega_t = \lambda_t x$, chúng ta biểu thị *exposure (giá trị chịu rủi ro)* của vị trí này tại thời điểm t, tức là giá trị của nó được cho là $X_t = x$. Phân phối có điều kiện các thay đổi về giá trị chứng khoán của $L_{t+1} = \lambda_t\left(X_{t+1} - X_t\right)$ là:

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(L_{t+1}|\mathcal{F}_t) &= \mathfrak{L}(\lambda_t(X_{t+1} - x)|\mathcal{F}_t) = \mathfrak{L}\left(\omega_t\left(\frac{X_{t+1} - x}{x}\right)\middle|\mathcal{F}_t\right)\\ &\approx \mathfrak{L}(\omega_t Y_{t+1}|\mathcal{F}_t) = \mathcal{N}(0, \omega_t^2\sigma_t^2) \qquad (16.3)\end{aligned}$$

  Với $\sigma_t^2 = Var(Y_{t+1}|\mathcal{F}_t)$. Chúng ta đã sử dụng phép xấp xỉ Taylor tại đây:

$$\log(X_{t+1}) - \log(x) = \frac{X_{t+1} - x}{x} + \mathcal{O}(X_{t+1} - x) \qquad (16.4)$$

  Tổng quát hóa cho một danh mục đầu tư gồm $\left\{\lambda_t^1 x_t^1,\ \ldots,\ \lambda_t^d x_t^d\right\}$ cổ phần của d yếu tố tuyến tính khá rõ ràng. Đặt ω_t là vector giá trị chịu rủi ro có d chiều tại thời điểm t.

$$\omega_t = (\omega_t^1, \ldots, \omega_t^d)^T = (\lambda_t^1 x^1, \ldots, \lambda_t^d x^d)^T \qquad (16.5)$$

$$L_{t+1} = \sum_{k=1}^{d} \lambda_t^k (X_{k,t+1} - X_{k,t}) \qquad (2)$$

  (2) là sự thay đổi trong giá trị của danh mục đầu tư. Đối với một vị trí đơn, phân phối có điều kiện của L_{t+1} được cho bởi $\mathcal{F}_t$ sẽ xấp xỉ với phân phối có điều kiện của:

$$\omega_t^T Y_{t+1} = \sum_{k+1}^{d} \omega_t^k Y_{k,t+1}$$

Trong khuôn khổ của mô hình ***Delta – Normal*** thì phân phối trên thuộc về:

$$\mathcal{P}_{t+1} = \{N(0, \sigma_t^2) : \sigma_t^2 \in [0, \infty)\} \qquad (16.6)$$

Với $\sigma_t^2 = \omega_t^T \Sigma_t \omega_t$. Mục tiêu của việc phân tích VaR là để xấp xỉ ước lượng tham số $\theta(t) = \sigma_t$ và dựa vào đó xấp xỉ phân phối dự đoán của P_{t+1}.
Bây giờ chúng ta xem xét vấn đề ước lượng phân phối dự đoán từ quan điểm giả định của mô hình sau. Sự thay đổi trong giá trị của danh mục đầu tư được giả định là có dạng sau:

$$L_{t+1} = \sigma_t Z_{t+1} \qquad (16.7)$$
$$\sigma_t^2 = \omega_t^T \Sigma_t \omega_t \qquad (16.8)$$

Với Z_t là biến ngẫu nhiên i.i.d $N(0,1)$, với ω_t là vector giá trị chịu rủi ro có d chiều tại thời điểm t và Σ_t là ma trận hiệp phương sai (có điều kiện) của vector Y_{t+1} của hàm log lợi nhuận. Chúng ta kết hợp n quan trắc cuối cùng của $Y_t = y_t, \ldots, Y_{t-n+1} = y_{t-n+1}$ từ vector log lợi nhuận với a ma trận $(n \times d)$, $\mathcal{Y}_t = \left(y_i^T\right)_{i=t-n+1,\ldots,t}$. Từ những quan sát trên chúng ta sẽ tính toán 2 ước lượng từ Σ_t; đầu tiên là ***RMA*** đơn giản, tức là trung bình đường di chuyển hình chữ nhật:

$$\hat{\Sigma}_t = \frac{1}{n} \mathcal{Y}_t^T \mathcal{Y}_t \qquad (16.9)$$

Theo như mô hình ***Delta – Normal***, giá trị kỳ vọng của vector lợi nhuân Y_t là bằng 0. Điều này chính xác là ma trận hiệp phương sai thực nghiệm. Ước lượng thứ hai là ***EMA*** - *exponentially moving average*, tức là trung bình đường di chuyển theo lũy thừa, ước lượng này dựa trên một ý tưởng của Taylor (1986) và sử dụng sơ đồ trọng số theo hàm số mũ. Gọi là γ với $0 < \gamma < 1$.

$$\tilde{y}_{t-k} = \gamma^k y_{t-k}, k = 0, \ldots, n-1, \tilde{\mathcal{Y}}_t = (\tilde{y}_t^T)_{i=t-n+1,\ldots,t}$$

Một vector log lợi nhuận được trọng số theo hàm số mũ theo thời gian và một ma trận $(n \times d)$ được xây dựng từ đó, do đó Σ_t được ước lượng với:

$$\hat{\Sigma}_t = (1-\gamma)^{-1} \tilde{\mathcal{Y}}_t^T \tilde{\mathcal{Y}}_t \qquad (16.10)$$

Điều này có ý nghĩa rằng: bởi vì tổng $\sum_{i=1}^n \gamma^{i-1} = \frac{1-\gamma^n}{1-\gamma}$ với $\gamma \to 1$ sẽ hội tụ về n. Do đó, ước lượng ***RMA*** là *trường hợp biên* của ước lượng ***EMA***. Cả hai ước lượng có thể được thay thế trong (16.7) và (16.8), và chúng ta thu được:

$$\hat{P}_{t+1} = \mathcal{N}(0, \hat{\sigma}_t^2), \qquad \hat{\sigma}_t^2 = \omega_t^T \hat{\Sigma}_t \omega_t$$

Là một xấp xỉ của phân phối dự báo, tức là phân phối có điều kiện của L_{t+1}.
Giá trị rủi ro *VaR* được xác định cho một mức độ nhất định α bởi

$$VaR_t = F_{t+1}^{-1}(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{x; F_{t+1}(x) \geq \alpha\} \qquad (16.11)$$

và được ước lượng với:

$$\widehat{VaR}_t = \hat{F}_{t+1}^{-1}(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\left\{x; \hat{F}_{t+1}(x) \geq \alpha\right\} \qquad (16.12)$$

Tức là: VaR ước lượng tại thời điểm t bằng F mũ trừ một của $t+1$ của α, định nghĩa bằng inf của x sao cho F ước lượng của $t+1$ của x lớn hơn hoặc bằng α.
Ở đây, F_{t+1} và $\hat{F}_{t+1}$ đại diện cho hàm phân phối của P_{t+1}, $\hat{P}_{t+1}$. Chất lượng của dự báo đặc biệt quan trọng khi sử dụng kỹ thuật ***VaR***. Nó có thể được kiểm tra thực nghiệm bằng cách sử dụng các giá trị thực tế $\left(\hat{P}_t, L_t\right),\ t = 1, \ldots, N$. Trong trường hợp các giả định của mô hình, ví dụ (16.7) và (16.8), là đúng với dạng phân phối dự báo, thì mẫu $U_t = F_t\left(L_t\right),\ t = 1, \ldots, N$ nên có các giá trị ngẫu nhiên độc lập có phân phối đều trên khoảng $[0, 1]$ và ước lượng $\hat{U}_t = \hat{F}_t\left(L_t\right),\ t = 1, \ldots, N$, xấp xỉ các giá trị ngẫu nhiên độc lập có phân phối đều. Do đó, khả năng của phân phối dự báo phù hợp với dữ liệu được thỏa mãn.

3 Backtesting with Expected Shortfall

- ***Expected shortfall*** hay còn gọi là ***Conditional Value at Risk*** (***CVaR***). Có nghĩa là *mức tổn thất kỳ vọng* hay *giá trị chịu rủi ro có điều kiện*. Ở phần này, chúng ta sẽ xem xét mức tổn thất kỳ vọng từ biến lời lỗ L_{t+1} như một phương án thay thế *VaR* và phát triển *phương pháp Backtesting* để đo lường giá trị rủi ro này. *Mức tổn thất kỳ vọng* còn được gọi là ***Tail – VaR***.

- Trong mô hình ***Delta – Normal***, tức là theo giả định từ *(16.7)* và *(16.8)*, ***Tail – VaR*** được định nghĩa bởi:

$$\begin{aligned} E\left(L_{t+1}|L_{t+1} > VaR_t\right) &= E\left(L_{t+1}|L_{t+1} > z_\alpha \sigma_t\right) \\ &= \sigma_t E\left(L_{t+1}/\sigma_t|L_{t+1}/\sigma_t > z_\alpha\right) \qquad (16.13) \end{aligned}$$

- Tại $z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$ biểu diễn cho phần tử thứ α của phân phối chuẩn, tại vị trí mà Φ là hàm phân phối chuẩn tắc.

- Do đó, ta có (16.7) và (16.8) $Z_{t+1} = L_{t+1}/\sigma_t$ có phân phối chuẩn tắc. Cho giá trị ngưỡng u cho trước, ta có:

$$\vartheta = E\left(Z_{t+1}|Z_{t+1} > u\right) = \frac{\varphi(u)}{1-\Phi(u)} \qquad (16.14)$$

$$\varsigma^2 = Var\left(Z_{t+1}|Z_{t+1} > u\right) = 1 + u.\vartheta - \vartheta^2 \qquad (16.15)$$

Với φ là hàm mật độ xác suất của phân phối chuẩn. Với các quan sát từ phân phối dự báo và giá trị thực $\left(\hat{F}_{t+1}(\cdot/\hat{\sigma}_t), L_{t+1}/\hat{\sigma}_t\right)$ chúng ta sẽ xem tham số ϑ ở (16.14). Thay thế giá trị kỳ vọng với trung bình mẫu và Z_{t+1} không quan sát được với:

$$\hat{Z}_{t+1} = \frac{L_{t+1}}{\hat{\sigma}_t} \qquad (16.16)$$

Với σ_t trong (16.8) được ước lượng với (16.9) hoặc (16.10). Chúng ta thu được một ước lượng cho ϑ.

$$\hat{\vartheta} = \frac{1}{N(u)} \sum_{t=0}^{n} \hat{Z}_{t+1} 1\left(\hat{Z}_{t+1} > u\right) \qquad (16.17)$$

Ở đây, $N(u)$ là số lần ngẫu nhiên mà giá trị ngưỡng u bị vượt qua:

$$N(u) = \sum_{t=1}^{n} 1\left(\hat{Z}_{t+1} > u\right)$$

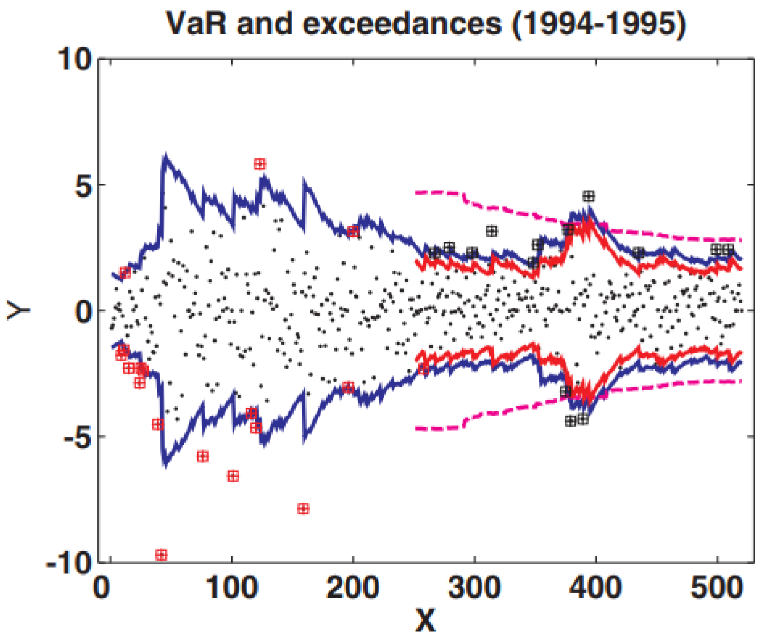
Suy luận dựa trên mức tổn thất kỳ vọng, tức là dựa trên sự sai số của $\hat{\vartheta} - \vartheta$. Chúng ta thu được kết quả tiềm cận sau:

$$\sqrt{N(u)}\left(\frac{\hat{\vartheta}-\vartheta}{\hat{\varsigma}}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1) \qquad (16.18)$$

Kết quả (16.18) được sử dụng để kiểm tra độ thích hợp của mô hình ***Delta – Normal***.

4 Phương pháp Backtesting trong thực tế

- Để thực hiện backtesting, ta xem xét dữ liệu về **Trái phiếu** ở Đức từ năm 1994 đến năm 1995.
- Dữ liệu ở đây là 1 dữ liệu **chuỗi thời gian.** Như đã biết, ta áp dụng model liên quan đến VaR này để dự đoán giá của 1 **instrument** (công cụ tài chính) nhất định **trong 1 khoảng thời gian nhất định.**
- Ví dụ : Một instrument được xét trong phạm vi của chương này có thể là một Cổ phiếu (stocks), Trái phiếu (bonds) hoặc 1 quỹ đầu tư nào đó trên sàn chứng khoán, … miễn sao giá trị của nó thay đổi theo thời gian.
- Trong giai đoạn 1994-1995 ở Đức, có xảy ra **khủng hoảng kinh tế,** do đó dữ liệu này có **tính biến động lớn.** ⇒ Đòi hỏi ta phải tìm một mô hình sao cho nó thích nghi được với sự biến động đó.



Hình 1: Figure 16.1

- Trong biểu đồ này:
  - Dấu chấm tròn màu đen đại diện cho data (dữ liệu thực).
  - Đường nét đứt màu đỏ là dự đoán của VaR model dựa trên phương pháp RMA.
  - Đường nét liền màu đỏ cũng là dự đoán của VaR model nhưng dựa trên EMA.
  - Đường nét liền màu xanh là dự đoán của Delta-Normal model.
- Nghiên cứu chỉ ra rằng nếu model phù hợp với dữ liệu, thì có khoảng 1% dữ liệu sẽ nằm dưới 1% và trên 99% của đường dự đoán của VaR.

- Trong giáo trình có đề cập đến các điểm cắt giữa dự đoán (bằng EMA hoặc RMA) so với dữ liệu thực, nhưng để nói cho dễ hiểu, thì EMA đưa ra dự đoán sát với dữ liệu thực hơn.

  ⇒ Do đó ta tạm thời kết luận được rằng EMA có **độ thích nghi với biến động lớn** cao hơn so với RMA.

- Để lý giải cho việc tại sao RMA với EMA có sự khác biệt như vậy, ta xét các công thức:

  EMA : $\text{EMA}(t) = \alpha \cdot X_t + (1-\alpha) \cdot \text{EMA}(t-1); \quad \alpha = 1 - \left(\frac{2}{N+1}\right),$ N là số ngày cần xét

  RMA : $\text{RMA}(t) = (1-\alpha) \cdot \text{RMA}(t-1) + \alpha \cdot X_t; \quad \alpha = 1 - \left(\frac{2}{N+1}\right),$ N là số ngày cần xét

- Trong đó, giá trị alpha (α) là độ làm trơn, ảnh hưởng trực tiếp đến trọng số của mô hình.

- Trọng số của EMA giảm dần rất nhanh (theo cấp số mũ) đối với những giá trị càng tiến về quá khứ, nhờ vậy mà nó thích nghi với các giá trị ở hiện tại nhanh hơn, vì nó quên đi quá khứ rất nhanh.

  ⇒ Dễ thấy, trong RMA, ta thấy nó dự đoán lúc thì giá trị VaR (rủi ro) quá cao, còn khi dữ liệu đang có chiều hướng đi theo hướng ngược lại thì nó lại dự đoán rủi ro quá thấp.

- Tiếp theo, quá trình backtesting diễn ra như sau:

  Nhắc lại: Công thức 16.7 và 16.8:

$$L_{t+1} = \sigma_t \cdot Z_{t+1} \tag{1}$$

$$\sigma_t^2 = w_t^T \cdot \Sigma_t \cdot w_t \tag{2}$$

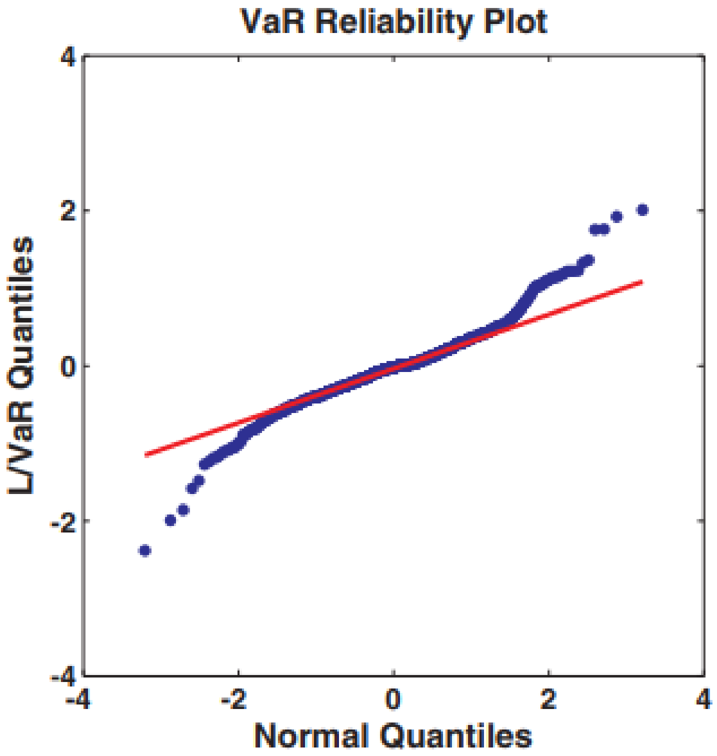
  - Trong đó:
    * L_{t+1} là giá trị của danh mục đầu tư, nó thay đổi từ thời điểm t đến $t+1$.
    * σ_t là độ lệch chuẩn của danh mục đầu tư tại thời điểm t.
    * Z_{t+1} là biến ngẫu nhiên được phân phối chuẩn với giá trị kỳ vọng bằng 0 và độ lệch chuẩn bằng 1 (standard normal distribution), tức là $Z_{t+1} \sim N(0,1)$.
    * σ_t^2 là phương sai của lợi nhuận danh mục đầu tư tại thời điểm t.
    * w_t là giá trị exposure tại thời điểm t, đại diện cho số lượng của từng tài sản trong danh mục đầu tư nhân với giá hiện tại của các tài sản đó.
    * Σ_t là ma trận hiệp phương sai (covariance matrix) của các **log returns** của các tài sản trong danh mục đầu tư tại thời điểm t.

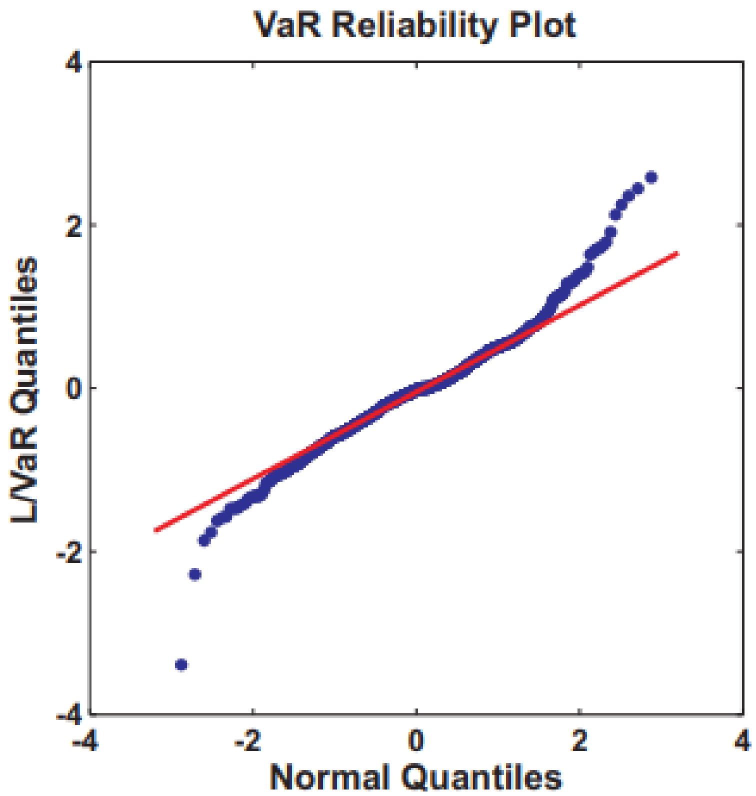
- Giả định hai công thức trên là đúng, vậy thì công thức 16.19: $\frac{L_{t+1}}{VaR_t} = \frac{L_{t+1}}{2.33 \cdot \sigma_t}$

  (2.33 là giá trị được lấy từ bảng phân phối chuẩn với độ tin cậy bằng 99%) có độ lệch chuẩn là 0.41. Mà độ lệch chuẩn của dữ liệu là 0.62, do đó $S_0 = \frac{0.62 - 0.41}{0.41} \approx 0.5$

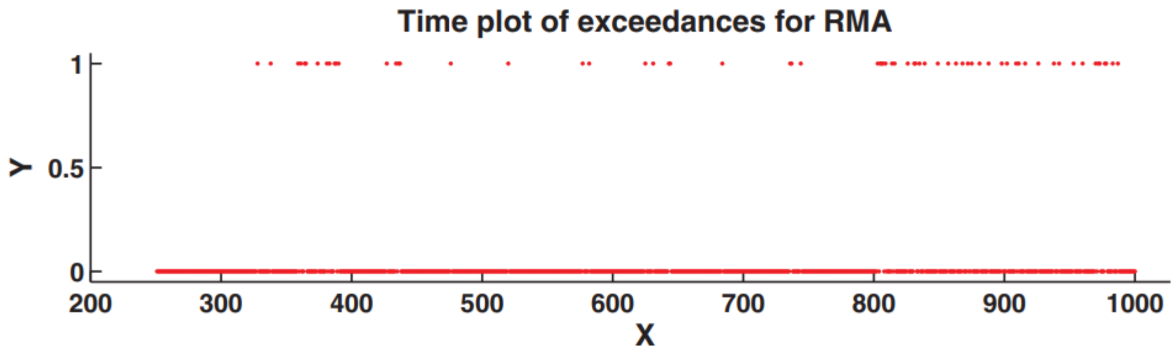
  đối với trường hợp của RMA. Do đó độ chênh lệch về mặt đánh giá của mô hình là 50%, trong khi đối với EMA thì độ lệch chuẩn là 0.5, nên giá trị S_0 là 0.25, thấp hơn so với RMA (thấp hơn nghĩa là tốt hơn). (Những con số trong công thức trên được tính toán từ dataset)

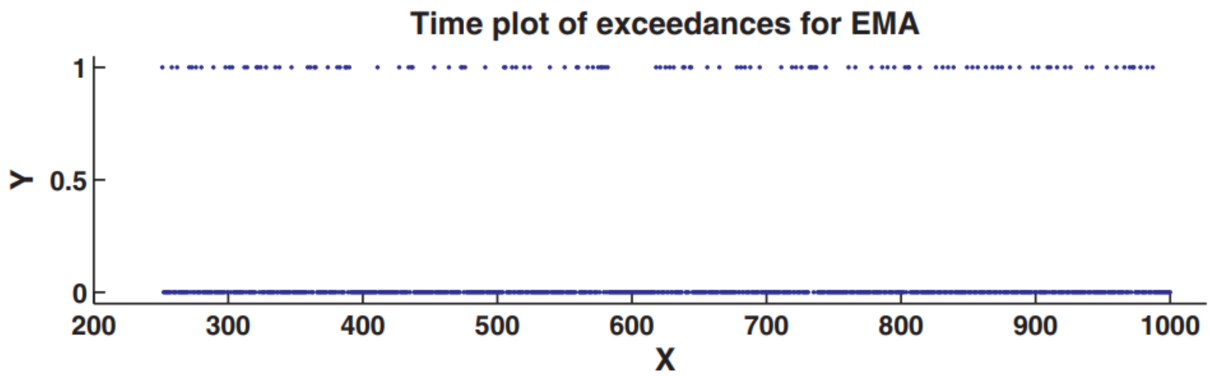
- Công thức 16.19 dùng để vẽ Quantile-Quantile Plot, cho 2 phân phối xem nó có giống nhau hay không.


VaR Reliability Plot
L/VaR Quantiles
Normal Quantiles
4
2
0
-2
-4
-4
-2
0
2
4


VaR Reliability Plot
L/VaR Quantiles
Normal Quantiles
4
2
0
-2
-4
-4
-2
0
2
4

- Có thể thấy EMA có thể phủ được dữ liệu tốt hơn RMA dựa trên 2 plot trên.
- Tiếp theo, ta xét





- Đây là biểu đồ thể hiện các outliers (giá trị ngoại lai) trong 750 ngày, được sử dụng để kiểm tra tính độc lập của Z_t. Phân phối không đều theo thời gian của các giá trị ngoại lai rõ ràng hơn khi sử dụng phương pháp RMA so với EMA.
- Để phân tích và thử nghiệm, người ta sử dụng phần dư mẫu $(\hat{Z})_{t+1}$ trong công thức 16.16.

$$\hat{Z}_{t+1} = \frac{L_{t+1}}{\hat{\sigma}_t}$$

- Đặt ngưỡng giá trị $u = 0.8416$, tương ứng với khoảng 80% phân phối $L_{t+1} = \sigma_t \cdot Z_{t+1}$.

  Theo công thức 16.14,

$$\vartheta = E\left(Z_{t+1} | Z_{t+1} > u\right) = \frac{\varphi(u)}{1 - \Phi(u)}$$

  Ta tìm được $v = 1.4$, ta tiến hành kiểm định giả thuyết H_0 với $v \leq 1.4$.

  Và sau đó cũng kiểm H_0 với $v \leq 1.47$, đại khái là vì sau quá trình kiểm định ban đầu với $v \leq 1.4$ thì ta thu được một kết quả như sau: $\hat{v}$ khác v khoảng 5% và độ lệch chuẩn tương ứng cũng khác 18%. Do đó ta ước lượng một giá trị khác (là 1.47) để đánh giá độ chính xác của mô hình bằng cách loại bỏ các giá trị ngoại lai.

Method	$\vartheta = 1.4$	$\varsigma = 0.46$	$\sqrt{N(u)}\frac{\hat{\vartheta}-\vartheta}{\hat{\varsigma}}$	significance	$N(u)$
EMA	$\hat{\vartheta} = 1.72$	$\hat{\varsigma} = 1.01$	2.44	0.75%	61
RMA	$\hat{\vartheta} = 1.94$	$\hat{\varsigma} = 1.3$	3.42	0.03%	68

Table 16.2: $H_0 : \vartheta \overset{(<)}{=} 1.4$

Method	$\vartheta = 1.47$	$\varsigma = 0.546$	$\sqrt{N(u)}\frac{\hat{\vartheta}-\vartheta}{\hat{\varsigma}}$	significance	$N(u)$
EMA	$\hat{\vartheta} = 1.72$	$\hat{\varsigma} = 1.01$	2.01	2.3%	61
RMA	$\hat{\vartheta} = 1.94$	$\hat{\varsigma} = 1.3$	3.04	0.14%	68

Table 16.3: $H_0 : \vartheta \overset{(<)}{=} 1.47$

Method	$\vartheta = 1.4$	$\varsigma = 0.46$	$\sqrt{N(u)}\frac{\hat{\vartheta}-\vartheta}{\hat{\varsigma}}$	significance	$N(u)$
EMA	$\hat{\vartheta} = 1.645$	$\hat{\varsigma} = 0.82$	2.31	1%	60
RMA	$\hat{\vartheta} = 1.83$	$\hat{\varsigma} = 0.93$	3.78	0.00%	67

Table 16.4: $H_0 : \vartheta \overset{(<)}{=} 1.4$ largest outlier excluded

Method	$\vartheta = 1.47$	$\varsigma = 0.46$	$\sqrt{N(u)}\frac{\hat{\vartheta}-\vartheta}{\hat{\varsigma}}$	significance	$N(u)$
EMA	$\hat{\vartheta} = 1.645$	$\hat{\varsigma} = 0.82$	1.65	5%	60
RMA	$\hat{\vartheta} = 1.83$	$\hat{\varsigma} = 0.93$	3.1	0.15%	67

Table 16.5: $H_0 : \vartheta \overset{(<)}{=} 1.4$ largest outlier excluded

- Mục đích của việc kiểm định này là để đảm bảo các kết quả không bị ảnh hưởng quá mức bởi các dữ liệu ngoại lai.

5 Tài liệu tham khảo

(1) RiskMetrics Group. (1996). RiskMetricsTM - Technical Document.

(2) Leadbetter, M. R., Lindgren, G., & Rootzén, H. (1983). Extremes and related properties of random sequences and processes (Vol. 3). Springer.

(3) Embrechts, P., Klüppelberg, C., & Mikosch, T. (1997). Modelling extremal events for insurance and finance. Springer Science & Business Media.

(4) McAllister, P. H., & Mingo, J. J. (1996). RAROC: Lợi ích của phương trình (16.13) trong thiết lập RAROC. Tạp chí về Rủi ro và Bảo hiểm, 63(4), 739-774.

(5) Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M., & Heath, D. (1997). Coherent measures of risk. Toán tài chính, 9(3), 203-228

(6) Jaschke, S., & Küchler, U. (1999). A note on the value-at-risk and expected shortfall. Journal of Banking & Finance, 23(7), 975-987.

(7) Jorion, P. (2000). Value at risk: The new benchmark for managing financial risk. McGraw-Hill.

(8) Taleb, N. N. (2001). Fooled by randomness: The hidden role of chance in life and in the markets. Random House.

(9) Franke, J., Härdle, W., & Stahl, G. (2000). Statistics of financial markets: An introduction. Springer.

(10) Overbeck, L. (2000). Calculation of value-at-risk based on extreme value theory. Finance and Stochastics, 4(1), 83-107.

(11) Lehrbass, F. (2000). Assessing country risk in the context of value-at-risk calculations.

(12) Cơ quan giám sát tài chính liên bang. Luật pháp của Đức về tài chính. Truy cập ngày 26/05/2024. Từ: http://www.bafin.de/

6 Bài tập

1. Discuss the standard methodologies for calculating VaR and explain how they work. Are there advantages and disadvantages of the presented methods?'

Lời giải

Chúng ta có ba phương pháp chuẩn để tính toán *Giá trị rủi ro (VaR)*:

- ***Historical Simulation:*** Hay còn gọi là Mô phỏng lịch sử. Cách hoạt động của phương pháp này dựa trên sử dụng dữ liệu thị trường ở quá khứ để mô phỏng các khoản lỗ tiềm năng trong tương lai của một danh mục đầu tư. Nó sắp xếp các lợi nhuận lịch sử và sử dụng các khoản lỗ tệ nhất để ước tính *VaR*.
  Ưu điểm:
  - Đơn giản và dễ thực hiện.
  - Không giả định một phân phối cụ thể cho lợi nhuận.

  Nhược điểm:
  - Phụ thuộc nhiều vào dữ liệu lịch sử có thể không phản ánh đúng rủi ro tương lai.
  - Có thể không bắt kịp các sự kiện cực đoan nếu chúng không có trong dữ liệu.
- ***Variance – Covariance (Delta – Normal) Method:*** Phương pháp này giả định rằng lợi nhuận có phân phối chuẩn. Nó sử dụng trung bình và độ lệch chuẩn của lợi nhuận danh mục đầu tư cùng với ma trận hiệp phương sai của danh mục để tính toán *VaR*.
  Ưu điểm:
  - Hiệu quả tính toán và dễ thực hiện đối với các danh mục đầu tư tuyến tính.
  - Cung cấp các giải pháp phân tích cho *VaR*.

  Nhược điểm:
  - Giả định lợi nhuận có phân phối chuẩn, điều này có thể không đúng với tất cả các danh mục đầu tư.
  - Có thể đánh giá thấp rủi ro trong sự hiện diện của độ lệch chuẩn và độ nhọn trong phân phối lợi nhuận.
- ***Monte – Carlo simulation:*** *Mô phỏng Monte – Carlo* tạo ra một số lượng lớn các giả định tương lai có thể xảy ra cho giá thị trường và tính toán khoản lỗ danh mục đầu tư cho mỗi giả định. *VaR* sau đó được ước tính từ phân phối các khoản lỗ này.
  Ưu điểm:
  - Rất linh hoạt và có thể mô hình hóa các danh mục đầu tư phức tạp và các công cụ phi tuyến tính.
  - Không phụ thuộc vào dữ liệu lịch sử hay giả định phân phối cụ thể.

  Nhược điểm:
  - Tốn nhiều tài nguyên tính toán và thời gian.
  - Yêu cầu kiến thức chuyên môn về mô hình hóa và quản lý rủi ro.

2. Name and discuss a few important problems in the implementation of *VaR*.

Lời giải

- ***Rủi ro Mô hình:*** Rủi ro rằng mô hình được chọn để tính toán *VaR* có thể không phản ánh đúng rủi ro của danh mục đầu tư. Các mô hình khác nhau có thể đưa ra các ước tính *VaR* khác nhau.
- ***Rủi ro Giả định:*** Nhiều mô hình *VaR* giả định rằng lợi nhuận có phân phối chuẩn, điều này có thể không đúng trong thực tế. Điều này có thể dẫn đến các ước tính rủi ro không chính xác, đặc biệt là trong sự hiện diện của độ lệch và độ nhọn.
- ***Chất lượng Dữ liệu:*** Độ chính xác của *VaR* phụ thuộc vào chất lượng và độ hoàn chỉnh của dữ liệu lịch sử được sử dụng. Dữ liệu thiếu, lỗi thời hoặc không chính xác có thể dẫn đến đánh giá rủi ro không đúng.
- ***Ước lượng Thông số:*** Việc ước lượng các thông số như độ biến động và tương quan có thể gặp khó khăn và có thể dẫn tới lỗi trong tính toán *VaR*.
- ***Stress Testing và Backtesting:*** *Stress Testing* bao gồm việc đánh giá tác động của các dự đoán cực đoan nhưng khả thi lên *VaR*. *Backtesting* là so sánh *VaR* dự đoán với các khoản lỗ thực tế. Cả hai đều cần thiết để xác nhận hiệu quả của mô hình *VaR*, nhưng có thể tốn nhiều tài nguyên.

3. Let Z be a $N(0,1)$ rv, prove that $\vartheta = E[Z|Z>u] = \dfrac{\Phi(u)}{1-\Phi(u)}$

Lời giải

$$\begin{aligned}
\vartheta = E[Z|Z>u] &= \int_u^\infty x\varphi(x)\{1-\Phi(u)\}^{-1}dx \\
&= \{1-\Phi(u)\}^{-1}\int_u^\infty x\varphi(x)dx \\
&= \{1-\Phi(u)\}^{-1}\int_u^\infty x(2\pi)^{\frac{-1}{2}}.e^{\frac{-x^2}{2}}dx \\
&= \{1-\Phi(u)\}^{-1}.(2\pi)^{\frac{-1}{2}}\int_u^\infty x.e^{\frac{-x^2}{2}}dx \\
&= \{1-\Phi(u)\}^{-1}.(2\pi)^{\frac{-1}{2}}.\left(-e^{\frac{-x^2}{2}}\right)\Bigg|_u^\infty \\
&= \{1-\Phi(u)\}^{-1}.(2\pi)^{\frac{-1}{2}}.\left[0-\left(-e^{\frac{-u^2}{2}}\right)\right] \\
&= \{1-\Phi(u)\}^{-1}.(2\pi)^{\frac{-1}{2}}.e^{\frac{-u^2}{2}} \\
&= \{1-\Phi(u)\}^{-1}.\varphi(u)
\end{aligned}$$

4. Recall the definitions of $Z$and ϑ for given exceedance level u from *Exercise 3*. Prove that $\varsigma^2 = Var(Z|Z>u) = 1 + u.\vartheta - \vartheta^2$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}
VaR(Z|Z>u) &= E(Z^2|Z>u) - E^2(Z|Z>u) \\
&= \{1-\Phi(u)\}^{-1}\int_u^\infty x^2(2\pi)^{\frac{-1}{2}}.e^{\frac{-x^2}{2}}dx - \vartheta^2 \\
&= \{1-\Phi(u)\}^{-1}.(2\pi)^{\frac{-1}{2}}.\int_u^\infty x^2.e^{\frac{-x^2}{2}}dx - \vartheta^2 \\
&= \{1-\Phi(u)\}^{-1}.(2\pi)^{\frac{-1}{2}}.\int_u^\infty x.d\left(-e^{\frac{-x^2}{2}}\right) - \vartheta^2
\end{aligned}$$

Theo tích phân từng phần, ta có:

$$\begin{aligned}
Var(Z|Z>u) &= \{1-\Phi(u)\}^{-1}.(2\pi)^{\frac{-1}{2}}.\left[\left(-xe^{\frac{-x^2}{2}}\right)\Big|_u^{\infty} - \int_u^{\infty} -e^{\frac{-x^2}{2}}dx\right] - \vartheta^2 \\
&= \{1-\Phi(u)\}^{-1}.(2\pi)^{\frac{-1}{2}}.\left[u.e^{\frac{-u^2}{2}} + \int_u^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2}}dx\right] - \vartheta^2 \\
&= \{1-\Phi(u)\}^{-1}.(2\pi)^{\frac{-1}{2}}.\left[u.e^{\frac{-u^2}{2}} + \{1-\Phi(u)\}^{-1}.\{1-\Phi(u)\}\right] - \vartheta^2 \\
&= u.\varphi(u).\{1-\Phi(u)\}^{-1} + \{1-\Phi(u)\}^{-1}.\{1-\Phi(u)\} - \vartheta^2 \\
&= u.\vartheta + 1 - \vartheta^2
\end{aligned}$$

5. Consider a portfolio with 2 stocks. The portfolio has 2000 EUR invested in $S1$ and 4000 EUR in S2.Given the following variance covariance matrix of the returns $R1$ and $R2$:

$$\sum = \begin{pmatrix} 0,1^2 & 0 \\ 0 & 0,06^2 \end{pmatrix}$$

Calculate the VaR (at 95%) for each stock and VaR of the portfolio using *the Delta-Normal Model*.

Lời giải

Ta có: $\omega = \begin{pmatrix} 2000 \\ 4000 \end{pmatrix}$

Ta có thể tính độ lệch chuẩn như sau:

$$\sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} 2000 & 4000 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0,1^2 & 0 \\ 0 & 0,06^2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2000 \\ 4000 \end{pmatrix}} = \sqrt{97600} = 312,41$$

Ta có độ tin cậy là $95\% \to 95\%$ phân vị của phân phối chuẩn là $1,65$ nên VaR của một danh mục đầu tư được tính như sau:

$$VaR = 1,65.312,41 = 515,48$$

VaR cho mỗi cổ phiếu:

$$VaR_1 = 1,65.0,1.2000 = 330$$
$$VaR_2 = 1,65.0,06.4000 = 396$$

6. Component $VaR, CVaR$, is the partition of the portfolio VaR that indicates how much the portfolio VaR wwould change approximately if the given component was deleted. It can be calculated with $CVaR_i = w_i \Delta VaR_i$ where ΔVaR_i is the incremental VaR of the position i, i.e. how much the VaR of the portfolio increases if we increase the position i by 1. This value can be calculated directly by revaluating the portfolio or be approximated using the marginal VaR. Calculate both incremental and marginal VaR in the case of *Exercise 5* (change by 1 for each position) and compare them. Calculate the approximated $CVaR_i$. What do you discover?

Lời giải

VaR gia tăng cho S_1

$$\sigma'^2 = \begin{pmatrix} 2001 & 4000 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0,1^2 & 0 \\ 0 & 0,06^2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2001 \\ 4000 \end{pmatrix} = 97640$$
$$\sigma' = \sqrt{97640} = 312,474$$
$$VaR' = 1,65.312,474 = 515,5821$$

Mức tăng là $515,5821 - 515,48 = 0,1021$
Với S_2:

$$\sigma"^2 = \begin{pmatrix} 2000 & 4001 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0,1^2 & 0 \\ 0 & 0,06^2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2000 \\ 4001 \end{pmatrix} = 97629$$
$$\sigma" = \sqrt{97629} = 312,4561$$
$$VaR" = 1,65.312,4561 = 515,5525$$

Mức tăng là $515,5525 - 515,48 = 0,0725$.
VaR biên được định nghĩa:

$$\frac{\partial VaR}{\partial w_i} = \alpha \frac{\partial \sigma}{\partial w_i}$$

Với N cổ phiếu không tương quan, chúng ta thu được:

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial w_i} = 2w_i\sigma_i^2 + 2\sum_{j=1, j\neq i}^{N} w_j\sigma_{ij} = 2w_i\sigma_i^2.$$

Dùng $\frac{\partial \sigma^2}{\partial w_i} = 2\sigma\frac{\partial \sigma}{\partial w_i}$, ta được:

$$\frac{\partial VaR}{\partial w_{t,i}} = \alpha \frac{\partial \sigma}{\partial w_i} = \alpha \frac{w_i\sigma_i^2}{\sigma}$$
$$\frac{\partial VaR}{\partial w_1} = 1,65.\frac{2000.0,1^2}{312,41} = 0,1056$$
$$\frac{\partial VaR}{\partial w_2} = 1,65.\frac{4000.0,06^2}{312,41} = 0,0761$$

Các giá trị rất gần với các giá trị gia tăng, tính gần đúng là tốt vì sự thay đổi vị trí là rất nhỏ.

$$CVaR_1 = w_1.\frac{\partial VaR}{\partial w_1} = 211,2608$$
$$CVaR_2 = w_2.\frac{\partial VaR}{\partial w_2} = 304,3156$$

Ta được: $CVaR_1 + CVaR_2 = 515,48 = VaR$.

7. Suppose a portfolio manager manages a portfolio which con- sists of a single asset. The natural logarithm of the portfolio value is normally distributed with an annual mean of 10% and annual standard deviation of 30%. The value of the portfolio today is 100 million EUR. Taking VaR as a quantile, answer the following:

(a) What is the probability of a loss of more than 20 million EUR by year end (i.e., what is the probability that the end-of-year value is less than 80 million EUR)?

(b) With 1% probability, what is the maximum loss at the end of the year? This is the VaR at 1%.

(c) Calculate the daily, weekly and monthly VaRs at 1%.

Lời giải

(a) Biểu thị giá trị của danh mục đầu tư bằng ϑ thì logarit của giá trị danh mục đầu tư tại thời điểm T , ϑ_T tuân theo phân phối chuẩn:

$$\log(\vartheta_T) \xrightarrow{\mathcal{L}} N\left\{\log(\vartheta) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma^2 T^2\right\}$$

Số hạng $\sigma^2 T/2$ xuất hiện nhờ bổ đề Itô's Lemma. Trong bài này thì $\vartheta = 100$, $\mu = 10\%$, $\sigma = 30\%$. Do đó, nhật ký cuối năm của giá trị danh mục đầu tư tuân theo phân phối sau:

$$\log(\vartheta_T) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(4.66017, 0.3^2)$$

Điều này có nghĩa là xác suất giá trị cuối năm của danh mục đầu tư nhỏ hơn 80 được cho bởi cdf của phân phối này. Để làm cho phép tính đơn giản hơn, trước tiên chúng ta biến đổi phân bố trên $N(4,66017, 0, 3^2)$ vào phân phối chuẩn chuẩn $N(0,1)$ và thu được xác suất về khoản lỗ hơn 20 triệu euro vào cuối năm.

$$\Phi\left(\left[\log(80) - \{\log(100) + 0.1 - 0.3^2/2\}\right]/0.3\right) = 0.17692.$$

(b) Vì phân vị 1% của phân phối chuẩn tắc là -2.32635 (tức là, $\Phi(-2.32635) = 0.01$), trước tiên chúng ta tìm giá trị quan trọng của danh mục đầu tư tại Ngưỡng 1%. Như vậy,

$$\frac{\log(V) - 4.66017}{0.3} = -2.32635$$

Dẫn đến $V = 52.5763$ triệu EUR là giá trị quan trọng của danh mục đầu tư ở mức 1%. Do đó mức lỗ tối đa cuối năm (VAR hàng năm) ở mức 1% là $100 - 52.5763 = 47.4237$ triệu EUR.

(c) Các giá trị hàng ngày, hàng tuần và hàng tháng của T tương ứng là $1/250$, $5/250$ và $21/250$. Các phân phối tương ứng cho hàng ngày, hàng tuần và giá trị danh mục nhật ký hàng tháng lần lượt là $N(4.60539, 0.00122)$, $N(4.60627, 0.0062)$ và $N(4.60979, 0.02522)$. Vì vậy, theo cùng một quy trình như trong (b), chúng ta thu được các giá trị VaR sau ở mức 1%:

$$\textit{DailyVaR} = 0.2568\text{triệu EUR.}$$
$$\textit{WeeklyVaR} = 1.2776\text{triệu EUR.}$$
$$\textit{MonthlyVaR} = 5.2572\text{triệu EUR.}$$

8. Calculate the daily VaR in a delta normal framework for the following portfolio with the given correlation coefficients. Do the same calculation for the cases of complete diversification and perfect correlation.

Assets	Estimated daily $VaR(EUR)$	$\rho_{S,FX}$	$\rho_{B,FX}$	$\rho_{S,B}$
Stocks (S)	400000.00	-0.10	0.25	0.80
Bonds (B)	300000.00			
Foreign Exchange (FX)	200000.00			

Lời giải

Trong khuôn khổ *chuẩn delta*, $VaR = z_\alpha \cdot \sigma$. Do đó, VaR hàng ngày của danh mục đầu tư, trong trường hợp này có ba tài sản S, B và FX, có thể được tính bằng:

$$\begin{aligned} VaR^2 =& VaR_S^2 + VaR_B^2 + VaR_{FX}^2 \\ &+ 2\rho_{S,FX}VaR_SVaR_{FX} + 2\rho_{B,FX}VaR_BVaR_{FX} + 2\rho_{S,B}VaR_SVaR_B \end{aligned}$$

Nếu $\rho_{S,FX} = -0.10, \rho_{B,FX} = 0.25, \rho_{S,B} = 0.8$ thì ta được $VaR = 704273EUR$.
Nếu đa dạng hóa hoàn toàn (tức là $\rho_{S,FX} = \rho_{B,FX} = \rho_{S,B} = 0$) thì $VaR = 538516EUR$.
Nếu tương quan hoàn hảo (tức là $\rho_{S,FX} = \rho_{B,FX} = \rho_{S,B} = 1$), thì

$$VaR = VaR_S + VaR_B + VaR_{FX} = 900000EUR.$$

9. A derivatives portfolio has a current market value of 250 million EUR. Marking this derivatives position, to obtain the market value that would have been obtained on the previous 201 trading days, yields the following worst cases for the daily fall in its value (in million EUR):

-152	-132	-109	-88	-85	-76	-61	-55	-45	-39
-37	-32	-30	-26	-22	-21	-18	-15	-14	-12

Using the above data, what is the daily VaR on this portfolio at the 1% threshold? At the 5% threshold? Comment on the relative accuracy of these two calculations.

Lời giải

Việc tính toán VaR hàng ngày trên cơ sở lịch sử rất đơn giản. Giao dịch 201 ngày, tức là có 200 quan sát về sự giảm giá trị. Vì vậy ngưỡng 1% là kết quả xấu thứ 2, tức là -132; ngưỡng 5% là kết quả xấu thứ 10, tức là -39.

Phép tính 5% chính xác hơn phép tính 1% . Điều này là do kết quả xung quanh khu vực 5% tương đối gần nhau $(-45, -39, -37)$.

Phân bố thực nghiệm mang lại đủ quan sát để đưa ra kết quả khá chính xác ước lượng. Khoảng 1% kết quả cách xa nhau $(-152, -132, -109)$, vì vậy trong trường hợp này phân phối thực nghiệm không mang lại ước tính chính xác.

10. A risk measure ρ is subadditive when the risk of the total position is less than, or equal to, the sum of the risk of individual portfolios. Intuitively, subadditivity requires that risk measures should consider risk reduction by portfolio diversification effects. Subadditivity can be defined as follows: Let X and Y be random variables denoting the losses of two individual positions. A risk measure ρ is subadditive if the following equation is satisfied.

$$\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$$

Using the above definition, show that the VaR based on the Delta-Normal Model is subadditive.

Lời giải

Chúng ta biết rằng $VaR = z_\alpha \sigma$ trong **Mô hình Delta-Normal**. Vì vậy chúng ta cần chỉ ra rằng $z_\alpha \sigma_{X+Y} \leq z_\alpha(\sigma_X + \sigma_Y)$. Nếu hai biến ngẫu nhiên có chuẩn hữu hạn độ lệch chuẩn, độ lệch chuẩn được thể hiện dưới dạng cộng phụ như sau. Cho phép σ_X và σ_Y là độ lệch chuẩn của các biến ngẫu nhiên X và Y, và gọi σ_{XY} là hiệp phương sai của X và Y . Vì $\sigma_{XY} \leq \sigma_X \sigma_Y$, độ lệch chuẩn σ_{X+Y} của biến ngẫu nhiên X + Y thỏa mãn tính cộng phụ như sau:

$$\sigma_{X+Y} = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + \sigma_{XY}} \leq \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\sigma_X\sigma_Y} = \sigma_X + \sigma_Y$$

$\sigma_{XY} \leq \sigma_X \sigma_Y$ có thể được chứng minh như sau. Đặt $Z = (Y - \mu_Y) - t(X - \mu_X)$ với a giá trị thực t, trong đó μ_X và μ_Y lần lượt là kỳ vọng của X và Y. Sau đó,

$$\begin{aligned} E[Z^2] &= t^2 E[(X-\mu_X)^2] - 2tE[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] + E[(Y-\mu_Y)^2] \\ &= \sigma_X^2 t^2 - 2\sigma_{XY} t + \sigma_Y^2 \end{aligned}$$

Tại $t = \dfrac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}$:

$$E[Z^2] = \frac{\sigma_X^2 \sigma_Y^2 - \sigma_{XY}^2}{\sigma_X^2}$$

Vì $E[Z^2] \geq 0$ nên $\sigma_{XY} \leq \sigma_X\sigma_Y$.

11. The digital option (also called the binary option) is the right to earn a fixed amount of payment conditional on whether the underlying asset price goes above (digital call option) or below (digital put option) the strike price. Consider the following two digital options on a stock, with the same exercise date T. The first option denoted by A (initial premium u) pays 1,000 if the value of the stock at time T is more than a given U, and nothing otherwise. The second option denoted by B (initial premium l) pays 1,000 if the value of the stock at time T is less than L (with $L < U$), and nothing otherwise. Suppose L and U are chosen such that $P(S_T < L) = P(S_T > U) = 0.008$, where S_T is the stock price at time T. Consider two traders, trader A and trader B, writing one unit of option A and option B, respectively.

a) **Calculate the VaR at the 99% confidence level for each trader.**

b) **Calculate the VaR at the 99% confidence level for the combined position on options A and B.**

c) **Is the VaR for this exercise subadditive?**

Lời giải

a) VaR ở mức tin cậy 99% của nhà giao dịch A là $-u$, vì xác suất $ST > U$ là $0,008$, vượt quá mức độ tin cậy.
Tương tự, VaR ở mức tin cậy 99% của nhà giao dịch B là $-l$. Đây là một ví dụ rõ ràng về rủi ro đuôi. VaR bỏ qua việc mất đi các lựa chọn A và B, vì xác suất thua lỗ nhỏ hơn một trừ đi độ tin cậy mức độ.

b) VaR ở mức độ tin cậy 99% của vị thế kết hợp này (tùy chọn A cộng với phương án B) là $1.000 - u - l$, vì xác suất $ST > U$ hoặc $ST < L$ là $0,016$, lớn hơn một trừ đi độ tin cậy mức $(0,01)$.

c) Vì tổng VaR của từng vị thế (lựa chọn A và B) là $-u - l$, rõ ràng là VaR không có tính cộng phụ cho bài tập này.

12. In the traffic light approach the backtesting surcharge factor increases with the number of exceptions evaluated on 250 historical returns. Consider a correct 1% VaR model and assume the independence of the returns. It would mean that the appearance exceptions on 250 days follows a binomial distribution with parameter n = 250 and p = 0.01. Calculate the probability that there are more than 4 exceptions.

Lời giải

Gọi k là một số trường hợp ngoại lệ $k \in \{0, 1, ..., 250\}$.

$$P(k > 4) = 1 - P(k \leq 4) = 1 - \sum_{k=0}^{4} \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} \approx 0.1019$$

Ví dụ này cho thấy mô hình đúng sẽ mang lại phụ phí cho việc kiểm tra lại với xác suất là $0,1019$.

13. Similarly to *Exercise 12* consider an incorrect 1% VaR model which has the true probability of exception p = 0.025. Calculate the probability that there are less than 5 exceptions.

Lời giải

Gọi k là một số trường hợp ngoại lệ $k \in \{0, 1, ..., 250\}$.

$$P(k < 5) = \sum_{k=0}^{4} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx 0.25$$

Mô hình không chính xác sẽ nằm trong vùng màu xanh lá cây với xác suất $0, 25$. **14.**

a) Consider a portfolio which consists of 20 stocks of type A. The price of the stock today is 10 EUR. What is the 95% one year Value-at-Risk (VaR) of this portfolio if the one year return arithmetic of the stock RA is normally distributed $N(0, 0.04)$?

b) Consider again a portfolio of 10 stocks of type A and 20 stocks of type B. The prices of the stocks today are 10 EUR and 5 EUR respectively. The joint distribution of the yearly arithmetic returns follows a 2-dimensional normal distribution $N(\mu, \sum)$, where $\mu = (0, 0)^T$ and the covariance matrix of the returns R_A and R_B is given by:

$$\sum = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.02 \\ 0.02 & 0.08 \end{pmatrix}$$

What is the yearly 95% VaR of the portfolio in this case?

Lời giải

a) Đặt $R_A \sim N(0, 0, 04)$. Giá trị của danh mục đầu tư V trong một năm bằng

$$V = 20 \cdot 10 \cdot R_A$$

Chúng ta có thể tính lợi nhuận kỳ vọng và phương sai của danh mục đầu tư:

$$E(V) = E(20 \cdot 10 \cdot R_A) = 200E(R_A) = 200 \cdot 0 = 0$$
$$Var(V) = Var(20 \cdot 10 \cdot R_A) = 200^2 Var(R_A) = 200^2 \cdot 0.04 = 1600$$

Vì $V \sim N(0, 1600)$ và lượng tử 95% của phân phối chuẩn chuẩn là $\Phi^{-1}(0.95) = 1.65$ thì VaR của danh mục được tính như sau:

$$VaR = 1.65 \cdot \sqrt{1600} = 66$$

b) Đặt $R = (R_A, R_B)^\top \sim N(\mu, \sum)$. Giá trị của danh mục đầu tư V sau một năm là:

$$V = 10 \cdot 10R_A + 20 \cdot 5R_B = 100(R_A + R_B)$$

Lợi nhuận kỳ vọng và phương sai của danh mục đầu tư là:

$$E(V) = E100(R_A + R_B) = 100E(R_A + R_B) = 100 \cdot 0 = 0$$
$$Var(V) = Var100(R_A + R_B) = 1002(0.04 + 0.08 + 2 \cdot 0, 02) = 1600$$

Vì $V \sim N(0, 1660)$ và $\Phi^{-1}(0.95) = 1.65$ thì VaR của danh mục đầu tư bằng:

$$VaR = 1.65 \cdot \sqrt{1600} = 66$$

15. Let $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ be a random variable, c is a constant, please calculate $E\left[max(X - c, 0)\right]$.

Lời giải

Giả sử $Z \sim N(0,1)$ là biến ngẫu nhiên tuân theo phân phối chuẩn tắc, khi đó với $\varphi'(z) = -z\varphi(z)$ thì:

$$\begin{aligned}
E\left[max(X-c,0)\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} max(z\sigma+\mu-c,0)\varphi(z)dz = \int_{\frac{c-\mu}{\sigma}}^{\infty}(\mu-c+\sigma z)\varphi(z)dz \\
&= (\mu-c)\int_{\frac{c-\mu}{\sigma}}^{\infty}\varphi(z)dz + \sigma\int_{\frac{c-\mu}{\sigma}}^{\infty} z\varphi(z)dz \\
&= (\mu-c)\int_{\frac{c-\mu}{\sigma}}^{\infty}\varphi(z)dz - \sigma\int_{\frac{c-\mu}{\sigma}}^{\infty} z\varphi'(z)dz \\
&= (\mu-c)\left[1-\Phi\left\{\frac{c-\mu}{\sigma}\right\}\right] - \sigma\int_{\frac{c-\mu}{\sigma}}^{\infty} z\varphi'(z)dz
\end{aligned}$$

Hơn nữa, ta có $\Phi(z)+\Phi(-z)=1$ và $\int_{\frac{c-\mu}{\sigma}}^{\infty} z\varphi'(z)dz = \varphi\left\{\frac{c-\mu}{\sigma}\right\}$, ta được:

$$\begin{aligned}
&(\mu-c)\left[\Phi\left\{\frac{\mu-c}{\sigma}\right\}\right] + \sigma\varphi\left\{-\frac{\mu-c}{\sigma}\right\} \\
&= \sigma\left\{\frac{\mu-c}{\sigma}\right\}\Phi\left\{\frac{\mu-c}{\sigma}\right\} + \sigma\varphi\left\{-\frac{\mu-c}{\sigma}\right\}
\end{aligned}$$

Đặt $Y = \frac{\mu-c}{\sigma}$, ta được:

$$\begin{aligned}
&= \sigma(Y)\Phi(Y) + \sigma\{\varphi(-Y)\} \\
&= \sigma\{Y\Phi(Y) + \varphi(-Y)\} \\
&= \sigma\{Y\Phi(Y) + \varphi(Y)\}
\end{aligned}$$

Với $\Psi(Y) = Y\Phi(Y) + \varphi(Y)$, ta thu được:

$$E\left[max(X-c,0)\right] = \sigma\Psi\left\{\frac{\mu-c}{\sigma}\right\}.$$

16. Calculate the expected shortfall for $X \sim N(\mu,\sigma^2)$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
E\left[x|x>VaR\right] &= \int_{VaR}^{\infty} xf\left(x|x>VaR\right)dx \\
&= \int_{VaR}^{\infty}\frac{f(x)}{f(x)>VaR}dx \\
&= \int_{VaR}^{\infty}\frac{xf(x)}{1-\alpha}dx \\
&= \int_{VaR=\mu+\sigma z_q}\frac{x\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)dx}{1-\alpha} \qquad (*)
\end{aligned}$$

Xác suất xảy ra tổn thất L thấp hơn VaR bằng α, tức là $P(L<VaR)=\alpha$. Vì thế,

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{L-\mu}{\sigma}<VaR\right) &= \alpha \\
\Phi\left(\frac{VaR-\mu}{\sigma}\right) &= \alpha \\
\frac{VaR-\mu}{\sigma} &= \Phi^{-1}(\alpha) = z_\alpha \\
VaR &= z_\alpha\sigma+\mu
\end{aligned}$$

Và với X có phân phối chuẩn thì pdf có thể được viết là $f(x) = \dfrac{1}{\sigma}\varphi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$ đặt $t = \dfrac{x-\mu}{\sigma} \Leftrightarrow x = \sigma t + \mu$ và suy ra được $dt = \dfrac{dx}{\sigma}$, thế vào phương trình (*), ta có:

$$\begin{aligned}
&= \int_{z_\alpha}^{\infty} \frac{(\sigma t + \mu)\varphi(t)dt}{1-\alpha} \\
&= \frac{\sigma}{1-\alpha}\int_{z_\alpha}^{\infty} t\varphi(t) + \frac{\mu}{1-\alpha}\int_{z_\alpha}^{\infty} \varphi(t)dt \\
&= \frac{\sigma}{1-\alpha}\left(-\varphi(t)\Big|_{z_\alpha}^{\infty}\right) + \mu \\
&= \frac{\sigma}{1-\alpha}\varphi(z_\alpha) + \mu
\end{aligned}$$

Bởi vì $\displaystyle\int x \exp\left(-x^2/2\right)dx = -\exp\left(-x^2/2\right)$ và $\displaystyle\int_{z_\alpha}^{\infty} \exp(t)dt = 1-\alpha$.

Nên nếu $x \sim N(0,1)$ thì sự thiếu hụt dự kiến $E\left[x|x > VaR\right] = \dfrac{\varphi(z_\alpha)}{1-\Phi(z_\alpha)}$.