Teoria de Juegos - Parcial 2

Augusto Rico
arico@unal.edu.co

29 de mayo de 2023

1. Primer grupo de ejercicios para el Parcial #2

1.1. Ejercicio 1

1.1.1. Punto a

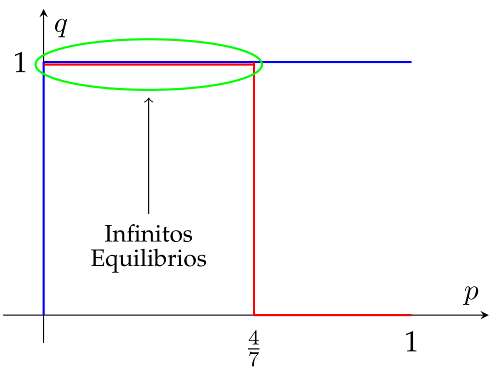
$$\begin{aligned}
U_1 &= p(q(2) + (1-q)(-1)) + (1-p)(q(2) + (1-q)(6)) \\
U_1 &= p(2q - 1 + q) + (1-p)(2q + 6 - 6q) \\
U_1 &= p(3q - 1) + (1-p)(-4q + 6) \\
U_1 &= 3pq - p + 6 - 4q + 4pq - 6p \\
U_1 &= 7pq - 7p - 4q + 6 \\
U_1 &= p(7q - 7) - 4q + 6 \\
\frac{\partial U_1}{\partial p} &= 7q - 7 = 0 \rightarrow q = 7/7 = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_2 &= q(p(-1) + (1-p)(5)) + (1-q)(p(2) + (1-p)(1)) \\
U_2 &= q(-p - 5p + 5) + (1-q)(2p - p + 1) \\
U_2 &= q(-6p + 5) + (1-q)(p + 1) \\
U_2 &= -6pq + 5q + p - pq - q + 1 \\
U_2 &= -7pq + 4q + p + 1 \\
U_2 &= q(-7p + 4) + p + 1 \\
\frac{\partial U_2}{\partial q} &= -7p + 4 = 0 \rightarrow p = 4/7
\end{aligned}$$

entonces tendremos que las correspondencias de mejor respuesta seran:

$$Mr_1(q) = \begin{cases} 0 & \text{si } q < 1 \\ x & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

$$Mr_2(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p > 4/7 \\ x & \text{si } p = 4/7 \\ 1 & \text{si } p < 4/7 \end{cases}$$



1.1.2. Punto b

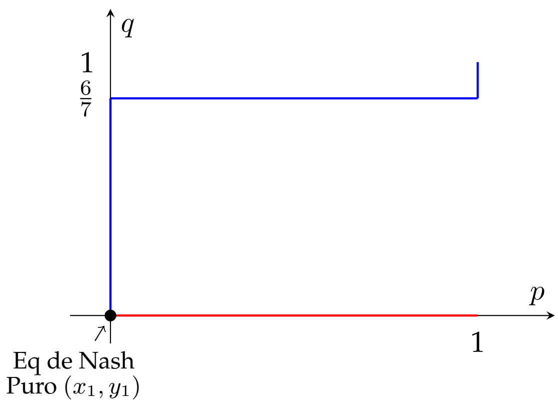
$$
\begin{aligned}
U_1 &= p(q(3) + (1-q)(4)) + (1-p)(q(2) + (1-q)(10)) \\
U_1 &= p(3q + 4 - 4q) + (1-p)(2q + 10 - 10q) \\
U_1 &= p(-q + 4) + (1-p)(-8q + 10) \\
U_1 &= -pq + 4p - 8q + 10 + 8pq - 10p \\
U_1 &= 7pq - 6p - 8q + 10 \\
U_1 &= p(7q - 6) - 8q + 10 \\
\frac{\partial U_1}{\partial p} &= 7q - 6 = 0 \to q = 6/7
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U_2 &= q(p(6) + (1-p)(11)) + (1-q)(p(4) + (1-p)(8)) \\
U_2 &= q(6p + 11 - 11p) + (1-q)(4p + 8 - 8p) \\
U_2 &= q(-5p + 11) + (1-q)(-4p + 8) \\
U_2 &= -5pq + 11q - 4p + 8 + 4pq - 8q \\
U_2 &= -pq + 3q - 4p + 8 \\
U_2 &= q(-p + 3) - 4p + 8 \\
\frac{\partial U_2}{\partial q} &= -p + 3 = 0 \to p = 3
\end{aligned}
$$

entonces tendremos que las correspondencias de mejor respuesta seran:

$$
Mr_1(q) = \begin{cases} 0 & \text{si } q < 6/7 \\ x & \text{si } q = 6/7 \\ 1 & \text{si } q > 6/7 \end{cases}
$$

$$
Mr_2(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \leq 1 \end{cases}
$$



1.2. Punto 2

1.2.1. Punto a

$$
\begin{aligned}
p(4) + q(9) &= p(6) + q(5) \to p = 2q \\
p(4) + q(9) &= p(7) + q(1) \to p = 8q/3
\end{aligned}
$$

dado estos resultados sabemos que este sistema de ecuaciones no va a tener ecuaciones, por lo que como solucion debemos probar si asumiendo alguna de las estrategias $\{L, M, R\}$ con probabilidad 0 podemos obtener un equilibrio realista.

Caso 1: $L = 0$

$$
\begin{aligned}
q(5) + (1-q)(8) &= q(6) + (1-q)(5) \\
5q + 8 - 8q &= 6q + 5 - 5q \\
-3q + 8 &= q + 5 \\
-4q &= -3 \\
q &= 3/4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p(6) + (1-p)(5) &= p(7) + (1-p)(1) \\
6p + 5 - 5p &= 7p + 1 - p \\
p + 5 &= 6p + 1 \\
-5p &= -4 \\
p &= 4/5
\end{aligned}
$$

como estamos asumiendo que $L = 0$ debemos obtener tambien que $E_M > E_L$ y $E_R > E_L$, caso contrario se debe desestimar este caso.

$$
\begin{aligned}
E_L &= (4/5)(4) + (1/5)(9) = 5 \\
E_M &= (4/5)(6) + (1/5)(5) = 5.8 \\
E_R &= (4/5)(7) + (1/5)(1) = 5.8
\end{aligned}
$$

como $E_M, E_R > E_L$ podemos decir que este es un equilibrio de Nash.

1.2.2. Punto b

$$
\begin{aligned}
E_T = E_B,\ \ E_T &= E_U \\
q_1(0) + q_2(5) + (1 - q1 - q2)(4) &= q_1(4) + q_2(0) + (1 - q1 - q2)(5) \\
q_1(0) + q_2(5) + (1 - q1 - q2)(4) &= q_1(5) + q_2(4) + (1 - q1 - q2)(0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
5q_2 + 4 - 4q_1 - 4q_2 &= 4q_1 + 5 - 5q_1 - 5q_2 \\
q_2 &= (3q_1 + 1)/6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
5q_2 + 4 - 4q_1 - 4q_2 &= 5q_1 + 4q_2 \\
-3q_2 &= 9q_1 - 4 \\
-3\left(\frac{3q_1 + 1}{6}\right) &= 9q_1 - 4 \\
-9q_1 - 3 &= 54q_1 - 24 \\
63q_1 &= 21
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_1 &= 21/63 = 1/3 \\
q_2 &= (3(1/3) + 1)/6 = 1/3 \\
q_3 &= 1 - 1/3 - 1/3 = 1/3
\end{aligned}
$$

por simetria sabemos que:

$$p_1 = q_1, p_2 = q_2, p_3 = q_3$$

por lo que el unico equilibrio de este juego es:

$$((1/3T, 1/3B, 1/3U),(1/3L, 1/3M, 1/3R))$$

1.3. Punto 3

para este ejemplo tendremos que los jugadores $1, 2, 3$ juegan con las probabilidades p, q, b respectivamente, y sabiendo que las estrategias y por ende estas probabilidades son independientes podemos hacer lo siguiente.

$$\begin{aligned}
E_{x_1} &= qb(0) + ((1-q)b)(6) + (q(1-b))(4) + ((1-q)(1-b))(0) \\
E_{y_1} &= qb(5) + ((1-q)b)(0) + (q(1-b))(0) + ((1-q)(1-b))(0) \\
E_{x_2} &= pb(0) + ((1-p)b)(4) + (p(1-b))(6) + ((1-p)(1-b))(0) \\
E_{y_2} &= pb(5) + ((1-p)b)(0) + (p(1-b))(0) + ((1-p)(1-b))(0) \\
E_{x_3} &= pq(0) + ((1-p)q)(6) + (p(1-q))(4) + ((1-p)(1-q))(0) \\
E_{y_3} &= pq(5) + ((1-p)q)(0) + (p(1-q))(0) + ((1-p)(1-q))(0)
\end{aligned}$$

Simplificamos y resolvemos antes de igualar

$$\begin{aligned}
E_{x_1} &= 4q + 6b - 10qb \\
E_{y_1} &= 5qb \\
E_{x_2} &= 6p + 4b - 10pb \\
E_{y_2} &= 5pb \\
E_{x_3} &= 4p + 6q - 10pq \\
E_{y_3} &= 5pq
\end{aligned}$$

Igualamos

$$\begin{aligned}
4q + 6b - 10qb &= 5qb \\
6p + 4b - 10pb &= 5pb \\
4p + 6q - 10pq &= 5pq
\end{aligned}$$

Despejamos la primera ecuacion

$$6b - 15qb = -4q \rightarrow b = -\frac{4q}{6-15q}$$

Sustituimos en la segunda ecuacion

$$\begin{aligned}
6p + 4\left(-\frac{4q}{6-15q}\right) - 10p\left(-\frac{4q}{6-15q}\right) &= 5p\left(-\frac{4q}{6-15q}\right) \\
6p + \frac{20pq}{2-5q} &= \frac{16q}{6-15q} \\
p = \frac{\frac{16q}{6-15q}}{6+\frac{20q}{2-5q}} &= \frac{8q}{18-15q}
\end{aligned}$$

Sustituimos en la tercera ecuacion

$$
\begin{aligned}
4\left(\frac{8q}{18-15q}\right)+6q-10\left(\frac{8q}{18-15q}\right)q &= 5\left(\frac{8q}{18-15q}\right)q \\
\frac{32q}{18-15q}+6q-\frac{80q^2}{18-15q} &= \frac{40q^2}{18-15q} \\
32q+6q(18-15q)-80q^2 &= 40q^2 \\
140q-210q^2 &= 0 \\
q(140-210q) = 0 \rightarrow q_1 &= 0 \\
q(140-210q) = 0 \rightarrow q_2 &= \frac{140}{210} = 2/3
\end{aligned}
$$

remplazamos ambas opciones en las ecuaciones anteriores

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \frac{8(0)}{18-15(0)} = 0 \\
p_2 &= \frac{8(2/3)}{18-15(2/3)} = 2/3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_1 &= -\frac{4(0)}{6-15(0)} = 0 \\
b_2 &= -\frac{4(2/3)}{6-15(2/3)} = 2/3
\end{aligned}
$$

con esto obtenemos dos equilibrios, no obstante $(0,0,0)$ es un equilibrio puro, que corresponde a las estrategias puras (x_1, x_2, x_3), por lo que al ser una estrategia degenerada, no se va a considerar como una estrategia mixta, por lo que el unico equilibrio mixto sera $(2/3, 2/3, 2/3)$, que junto con los tres equilibrios puros $((y_1, x_2, x_3), (x_1, y_2, x_3), (x_1, x_2, y_3))$ nos da un total de 4 equilibrios de nash en el juego, una cantidad par.

1.4. Punto 4

Para esta demostracion se realizara una prueba por contradiccion, asumiendo entonces que $\exists \sigma^w | \sigma^w \in \Gamma^w \wedge \sigma^w \notin \Gamma$ donde $\Gamma \rightarrow_w \Gamma^w$ si esto es cierto, entonces debe cumplirse que:

$$
\varphi := \left\{\sigma_i' \in \Gamma | u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) > u_i(\sigma^w, \sigma_{-i})\right\} \neq \emptyset
$$

pero en esta definicion nace un gran problema, y es que al ser la dominancia debil un orden parcial estrictico, por lo que es una relacion irreflesiva y transitiva, y φ ser un conjunto finito, implica que la strategia σ_i' no va a ser debilmente dominada en Γ por ninguna otra estrategia en φ, no obstante $\forall \sigma_i' \in \varphi$ es eliminada en la reduccion $\Gamma \rightarrow_w \Gamma^w$, donde tenemos que σ^w es un equilibrio de Γ^w. por lo que debe entonces existir una estrategia $\sigma_i^* \in \Gamma$ que domina debilmente a σ_i' en Γ, lo que nos lleva entonces a que:

$$
u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}) \geq u_i(\sigma_i', \sigma_{-i})
$$

lo que implica entonces que $\sigma_i^* \in \varphi$, lo que es una contradiccion en la eleccion de σ_i', lo que nos confirma entonces que $\varphi = \emptyset$, y por lo tanto $\sigma^w \in \Gamma$.

2. Segundo grupo de ejercicios para el Parcial #2

3. Dispersión de precios

4. NASH EQUILIBRIUM AND THE HISTORY OF ECONOMIC THEORY - Roger B. Myerson

Referencias