

La croissance optimale

AES L3 AGE, AGT, CAI

2016-2017

Et la consommation dans le modèle de Solow ?

Jusqu'à présent nous nous sommes intéressé à la production par tête et au capital par tête. Mais en réalité, si l'on accumule du capital (si l'on accepte des usines dans notre paysage) c'est dans le but de produire des biens que l'on pourra consommer maintenant et dans le futur.

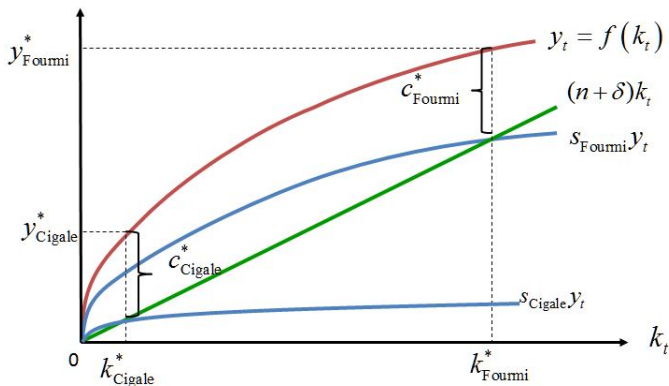
Dit autrement, on ne tire aucune satisfaction de l'accumulation capital en soit, mais par le fait que le capital accumulé permet de consommer.

La cigale et la fourmi

La fable de la cigale et de la fourmi nous apprend que la cigale consomme beaucoup dans le présent mais n'épargnant pas ou peu, elle se trouvera bien démunie dans le futur : **son taux d'épargne est faible.**

La fourmi, elle, ne consomme pas beaucoup mais épargne beaucoup. On imagine facilement qu'elle pourra consommer beaucoup dans le futur. **Son taux d'épargne est élevé.**

La consommation des cigales et des fourmis



Dans ce graphique, on constate que $c_{\text{Cigale}}^* = c_{\text{Fourmi}}^*$. Il ne permet pas de répondre directement à la question : faut-il beaucoup épargner ou non ?

La consommation d'état stationnaire

Dans le modèle de Solow, la consommation est une part constante du revenu (production) : $c_t = cy_t$. L'épargne par tête est donc :

$$\frac{S_t}{L_t} = y_t - cy_t = (1 - c)y_t = sy_t$$

On sait que la consommation peut s'écrire sous la forme :

$$c_t = y_t - sy_t$$

A l'état stationnaire on sait que : $sy_t = (n + \delta)k_t$ On peut réécrire la consommation par tête à l'état stationnaire :

$$c^* = y^* - (n + \delta)k^*$$

Le critère de Phelps ou règle d'or

Cherchons le capital d'état stationnaire qui maximise la croissance :

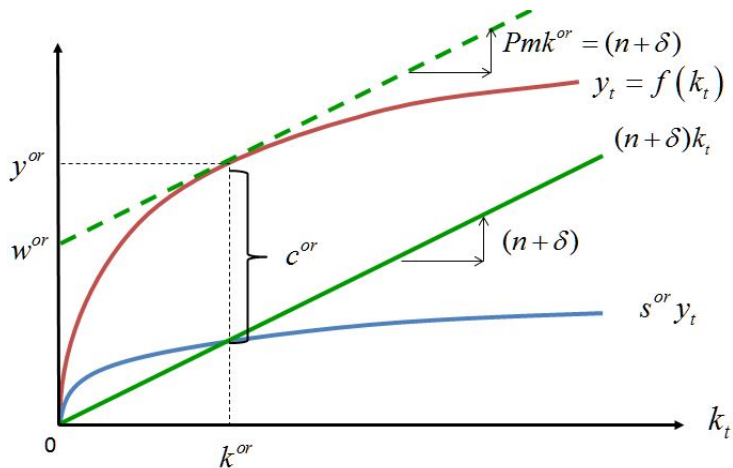
$$\frac{\partial c^*}{\partial k^*} = 0 \quad \Rightarrow \quad Pmk^* = (n + \delta)$$

Le capital qui maximise la consommation par tête à l'état stationnaire est tel que la Pmk égale $(n + \delta)$.

Dans l'idéal, les agents devraient adopter un taux d'épargne qui garanti que l'état stationnaire soit tel que la productivité marginale du capital égale $(n + \delta)$.

C'est le critère de Phelps appelé également règle d'or.

Construction graphique de la consommation maximale



Quel taux d'épargne permet d'avoir $Pmk^{or} = (n + \delta) ?$

Pour répondre à une telle question il est nécessaire de donner une forme à la fonction de production.

Dans ce cas, il est donc possible de déterminer un niveau de capital par tête vérifiant cette propriété et à partir de l'équation dynamique fondamentale du capital par tête on peut retrouver le taux d'épargne menant à cet état stationnaire.

Calcul du taux d'épargne optimal

Supposons une fonction de production Cobb-Douglas :

$$y_t = Ak_t^\alpha \quad \Rightarrow \quad Pmk_t = \alpha Ak_t^{\alpha-1}$$

On cherche le capital par tête vérifiant $Pmk^{or} = n + \delta$:

$$k^{or} = \left(\frac{\alpha A}{n + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

De l'équation dynamique fondamentale à l'état stationnaire on tire : $sA(k^*)^\alpha = (n + \delta)k^*$. En remplaçant k^* par l'expression de k^{or} on obtient facilement :

$$s^{or} = \alpha$$

Le taux d'épargne optimale, qui maximise la consommation par tête d'état régulier doit être égal à la part du revenu du capital dans l'économie.

Remarques sur la règle d'or

- ▶ La Pmk est le rendement brut du capital (avant dépréciation). Le rendement net du capital appelé le taux d'intérêt et il est égal à la Pmk net du taux de dépréciation du capital. A la règle d'or on a :

$$r^{or} = Pmk^{or} - \delta = n$$

Le taux d'intérêt doit être égal au taux de croissance de l'économie (taux de croissance de Y_t).

- ▶ S'il y avait du progrès technique on aurait à la règle d'or :

$$r^{or} = n + x$$

La notion d'inefficience dynamique

Un pays qui aurait un taux d'épargne supérieur à s^{or} pourrait consommer plus dans le présent et dans le futur en épargnant moins. **On parle d'inefficience dynamique.** Ce pays épargne trop. On parle également de sur-accumulation.

Lorsque $k^* > k^{or}$ l'économie se trouve en inefficience dynamique.

En adoptant taux d'épargne plus faible s^{or} la génération présente pourrait consommer plus et permettrait aux générations suivantes d'avoir une consommation maximum. C'est une amélioration au sens de Pareto.

Amélioration au sens de Pareto si $\bar{s} < s^{or}$

Si l'économie se trouve à l'ES déterminé par k^* à cause d'un taux d'épargne $\bar{s} > s^{or}$, le fait de baisser en $t = 0$ le taux d'épargne à s^{or} permet de consommer plus pour toutes les générations.

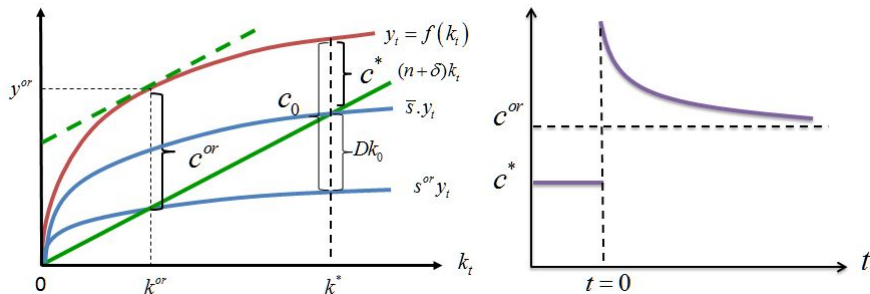


FIGURE – Baisse du taux d'épargne

Pas d'amélioration au sens de Pareto si $\bar{s} < s^{or}$

En revanche si $\bar{s} < s^{or}$ ce n'est pas une amélioration parétienne d'augmenter le taux d'épargne (les générations présentes y perdent).

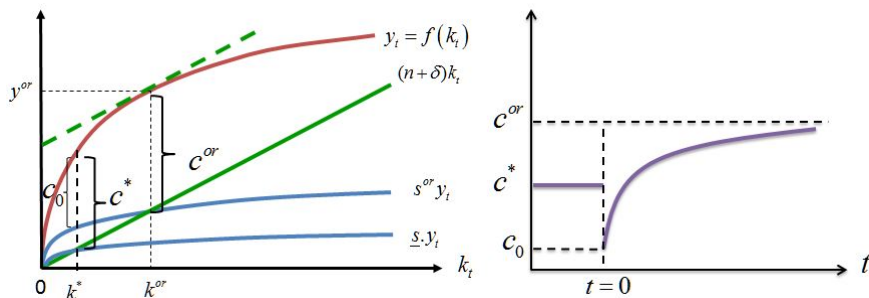


FIGURE – Hausse du taux d'épargne

Énoncé de la règle d'or ou critère de Phelps

La règle d'or peut s'énoncer de la façon suivante :

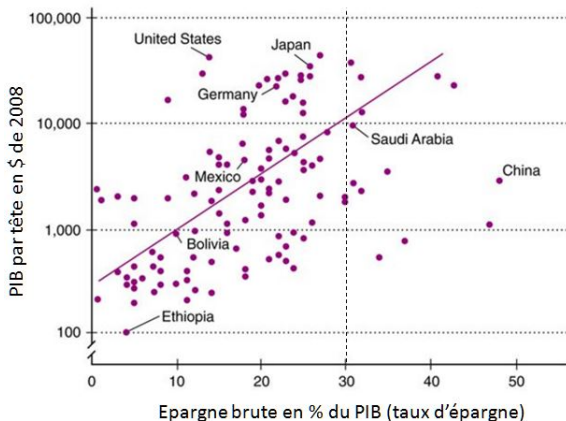
"Ne fais pas à autrui ce que tu n'aimerais pas que l'on te fasse."

Remarque : cette règle fonctionne bien dès lors que l'on compare des états stationnaires. En revanche, elle ne dit pas grand chose si une économie n'est pas à l'état stationnaire.

En réalité cette règle d'or ne dit rien sur le comportement optimale pour chaque génération afin de maximiser la consommation inter-temporelle.

Portée empirique du critère de Phelps

Sous les hypothèses selon lesquelles la fonction de production est une Cobb-Douglas et que $\alpha = 0,3$ alors tous les pays ayant un taux d'épargne supérieur à 30% seraient en inefficience dynamique.



Doit-on conclure que la Chine épargne trop et que les USA épargnent trop peu ?

Le modèle de Phelps nous assure d'une seule chose, c'est qu'il ne faut pas trop épargner.

- ▶ La Chine épargne-t-elle trop ? Difficile de répondre à une telle question avec le modèle de Solow. Elle n'est pas à l'état régulier. Le fait est que si son taux d'épargne est de l'ordre de 50%, la chine se dirige tout droit vers un état régulier d'inefficience dynamique.
- ▶ Si les USA sont proche de l'État régulier avec un taux d'épargne de 16% ils sont très largement en dessous de la règle d'or ! Pourquoi les américains n'ont pas un taux d'épargne "optimal" ?

La construction d'un nouveau modèle théorique

On aimerait connaître le taux d'épargne optimal en dynamique transitoire. Peut être est-il optimal pour la Chine d'avoir un taux d'épargne élevé (qui se réduirait en se rapprochant de l'état régulier).

Par ailleurs les économistes considèrent que le taux d'épargne de la règle d'or est un peu trop élevé.

Pour répondre à ces interrogations, il faut abandonner l'idée d'un taux d'épargne constant en fonction du revenu. Il faut construire un modèle pour lequel un agent est supposé vivre éternellement (la société) et qui cherche à maximiser une utilité inter-temporelle.

L'endogénéisation de la demande

Dans le modèle de Solow, les agents avaient un taux d'épargne fixe et on jugeait les états stationnaires (ou réguliers) au regard du critère de Pareto (critère d'efficacité).

Si l'on introduit un comportement de demande dans le temps, il faut également changer de critère de justice et passer au critère utilitariste "Le plus grand bonheur du plus grand nombre".

Mais il faut tenir compte du fait que nous avons une préférence pour le présent et donc que l'on n'est pas toujours prêt à renoncer à la consommation présente ou avoir de la consommation future.

Utilisation du critère utilitariste

Supposons que vous vivez éternellement. Vous aurez donc une chronique de consommation du type :

$$c_1; c_2; c_3; \dots; c_{+\infty}$$

Si vous cherchez à l'aide du critère utilitariste à maximiser la somme de vos consommations vous risquez d'être confronté au problème suivant. Si le taux d'intérêt est positif, vous avez tout intérêt à épargner tout à chaque période pour pouvoir consommer beaucoup plus tard. Donc la chronique serait de la forme :

$$c_1 = 0; c_2 = 0; c_3 = 0; \dots; c_{+\infty} = +\infty$$

Exemple

Par exemple supposons 2 périodes : Vous avez un revenu de 100 à chaque période.

- ▶ Si vous consommez tout à chaque période la somme de vos consommations est $100 + 100 = 200$
- ▶ Si le taux d'intérêt est positif, supposons 5% vous avez intérêt à ne rien consommer à la première période, placer votre revenu et consommer à la seconde période
 $105 + 100 = 205$
- ▶ Si le taux d'intérêt est négatif vous avez intérêt à consommer beaucoup aujourd'hui et le moins possible demain.

Ce comportement n'est pas cohérent parce qu'en réalité on ne cherche pas à maximiser la somme des consommations.

L'introduction de la préférence pour le présent

- ▶ Que préférez vous 100 euros maintenant ou 100 euros dans 10 ans ? La réponse comme nous l'avons vu dépend du taux d'intérêt.
- ▶ Que préférez vous un billet de spectacle aujourd'hui ou un même billet de spectacle dans 10 ans ? On n'a pas besoin du concept de taux d'intérêt pour répondre que l'on préfère le billet tout de suite !

Pourquoi ? C'est par ce que l'on a une préférence pour le présent ! On a tendance à diminuer le poids que l'on accorde à la consommation future par rapport à la consommation présente.

Il faut introduire des poids...

On maximise une somme des consommation pondérée du type :

$$p_0c_0 + p_1c_1 + p_2c_2 + \dots p_tc_t + \dots$$

Les poids p_i sont d'autant plus faible qu'il sont associé à des unités de consommation lointaines. Mais pas n'importe quels poids !

Le problème de l'incohérence temporelle

Je désire manger une plaquette de chocolat pendant 3 jours. Je décide d'attribuer les poids p_0 à la consommation d'aujourd'hui, p_1 à la consommation de demain et p_2 à la consommation d'après demain.

La maximisation du mon utilité inter-temporelle me fait consommer : c_0^* , c_1^* et c_2^*

Le lendemain, à la date 1, je décide de refaire un programme d'optimisation pour manger le restant de la tablette $(1 - c_0^*)$. j'utilise donc les poids p_0 (poids attribué à aujourd'hui) et p_1 (poids attribué à demain).

Ce programme d'optimisation me dit de consommer \hat{c}_0 et \hat{c}_1

L'incohérence temporelle suite...

$$\begin{array}{c} \overline{c_0^* \quad c_1^* \quad c_2^*} \quad \sum_{i=0}^2 c_i^* = 1 \\ \quad \overline{\hat{c}_0 \quad \hat{c}_1} \quad \sum_{i=0}^1 \hat{c}_i = 1 - c_0^* \end{array}$$

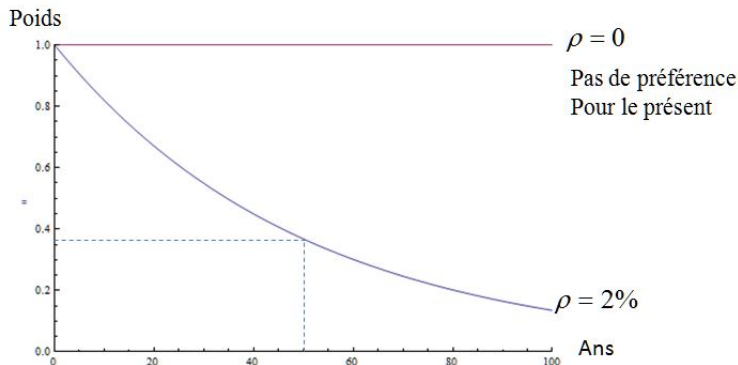
La cohérence temporelle fait que je devrais avoir $c_1^* = \hat{c}_0$ et $c_2^* = \hat{c}_1$.

Si ce n'est pas le cas, mes choix sont incohérents d'un point de vue temporel. Les poids doivent donc avoir une forme particulière.

$$p_t = e^{-\rho t} \quad \text{en temps continu}$$

où ρ représente la préférence pour le présent.

Représentation graphique



Une même consommation c se voit attribuer le poids 1 lorsqu'on la consomme aujourd'hui et le poids $e^{-0,002 \times 50} \approx 0,36$ si on la consomme dans 50 ans.

L'introduction d'une préférence pour le présent n'est pas suffisante !

En effet, si le taux d'intérêt est supérieur à la préférence pour le présent, on a intérêt malgré tout à tout épargner pour consommer beaucoup plus tard.

Inversement, si le taux d'intérêt est plus faible que la préférence pour le présent alors on a intérêt à emprunter pour beaucoup consommer maintenant et "rien" plus tard !

En réalité les agents ont plutôt tendance à vouloir lisser leur consommation. Pour preuve, même si le taux d'intérêt est faible et en l'absence de retraite on va tout de même épargner pour pouvoir consommer à la retraite.

Comment introduire cette volonté de lisser la consommation dans le temps ?

L'idée première est de construire une fonction d'utilité qui dépend de la consommation : On va choisir la fonction d'utilité suivante :

$$u(c_t) = \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} \quad \text{avec} \quad \sigma > 0 \quad \text{et} \quad u(c_t) = \ln(c_t) \quad \text{si} \quad \sigma = 1$$

Cette fonction d'utilité a bien une utilité marginale positive et décroissance.

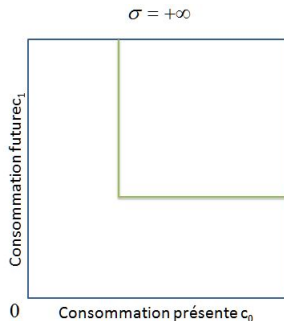
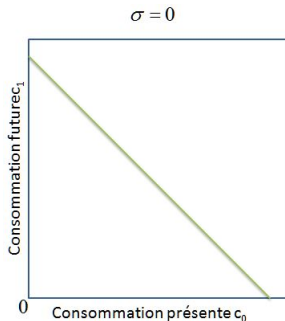
$$u'(c_t) = c_t^{-\sigma} \qquad u''(c_t) = -\sigma c_t^{-\sigma-1}$$

Le paramètre de "lissage" sera σ

Supposons la fonction d'utilité sur deux périodes (sans préférence pour le présent) :

$$u = \frac{c_0^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} + \frac{c_1^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma}$$

Traçons les courbes d'indifférence dans le plan (c_0, c_1) , (consommation présente c_0 et consommation future c_1) selon la valeur de σ .



Interprétation de σ

Lorsque $\sigma \rightarrow 0$ la consommation future et présente sont parfaitement substituables. On en déduit que si σ est faible alors les agents ne cherchent pas à "lisser" leur consommation.

En revanche lorsque $\sigma \rightarrow \infty$ la consommation future et présente sont plutôt complémentaires. Ainsi, si σ est élevé les agents cherchent à "lisser" leur consommation.

Le paramètre $\sigma > 0$ est *l'inverse de l'élasticité de substitution inter-temporelle*. Mais pas de panique... On a vu que l'interprétation était assez simple.

Le modèle de Ramsey

Nous allons développer un modèle pour lequel le taux d'épargne n'est plus exogène. Le côté demande de consommation n'est plus "bêtement" une part constante du revenu, mais va tenir compte d'un processus d'optimisation inter-temporelle de la consommation.

En revanche le côté offre reste identique au modèle de Solow bien qu'on utilise une fonction de production Cobb-Douglas pour résoudre le modèle.

Le côté demande de biens de consommation

Muni de ρ et de σ nous pouvons construire le côté demande du modèle. On suppose un agent vivant éternellement qui va choisir à dès la date $t = 0$ une chronique de consommation qui va maximiser son utilité inter-temporelle :

$$\max_{c_t} \int_{t=0}^{+\infty} e^{-\rho t} \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} L_t dt$$

On remarquera :

- ▶ On retrouve bien la présence d'une préférence pour le présent avec le terme $e^{-\rho t}$.
- ▶ On a une fonction d'utilité qui introduit la notion de lissage (la fonction d'utilité instantanée dépend de σ).
- ▶ C'est une fonction d'utilité utilitariste dans le sens où l'on tient compte de la croissance de la population (L_t).

Le côté offre

L'offre de bien est déterminé par la fonction de production Cobb-Douglas :

$$Y_t = AK_t^\alpha L_t^{1-\alpha}$$

L'offre part tête est donc :

$$y_t = Ak_t^\alpha$$

L'égalité emplois-ressources et l'accumulation du stock de capital

L'égalité emplois-ressources en économie fermée et sans État est donnée par :

$$Y_t = C_t + I_t$$

Enfin l'équation donnant l'accumulation du stock global de capital est :

$$DK_t = I_t - \delta K_t$$

En introduisant l'égalité emplois-ressources on obtient :

$$DK_t = Y_t - C_t - \delta K_t$$

Cette dernière équation peut s'écrire par tête :

$$Dk_t = y_t - c_t - (n + \delta)K_t$$

Le problème à résoudre

Le problème qu'il faut résoudre est compliqué. Nous ne le ferons pas et nous irons directement aux résultats.

$$\max_{c_t} \int_{t=0}^{+\infty} e^{-\rho t} \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} L_t dt$$

Sous la contrainte :

$$Dk_t = y_t - c_t - (n + \delta)k_t$$

Résultats

On montrerait que le modèle est régi par les deux équations suivantes :

Une première équation qui donne le taux de croissance de la consommation en fonction de la productivité du capital (Pmk), du paramètre de préférence pour le présent et du paramètre de lissage :

$$\frac{Dc_t}{c_t} = \frac{1}{\sigma} (Pmk_t - (\rho + \delta))$$

Une seconde équation qui est issue simplement de la contrainte d'accumulation du capital par tête :

$$\frac{Dk_t}{k_t} = \frac{y_t}{k_t} - \frac{c_t}{k_t} - (n + \delta)$$

Interprétation du taux de croissance de la consommation

$$\frac{Dc_t}{c_t} = \frac{1}{\sigma} (Pmk_t - (\rho + \delta))$$

- ▶ Le taux de croissance de la consommation est positif tant que la Pmk est supérieur à $\rho + \delta$ (taux de l'investissement requis).
- ▶ La croissance de la consommation est d'autant plus faible que σ est élevé. Si les agents désirent lisser leur consommation, cela freine la croissance. En revanche s'ils accepte de consommer moins aujourd'hui et plus dans le futur la croissance sera plus élevé (σ faible).
- ▶ Sachant que le taux d'intérêt (rendement net du capital, noté $r_t = Pmk_t - \delta$, on peut réécrire Dc_t/c_t sous la forme :

$$\frac{Dc_t}{c_t} = \frac{1}{\sigma} (r_t - \rho)$$

C'est la règle de Ramsey-Keynes.

L'état stationnaire

A l'état stationnaire sans progrès technique, il n'y a plus de croissance par tête. On doit donc résoudre le système :

$$\frac{Dc_t}{c_t} = \frac{1}{\sigma} (Pmk_t - (\rho + \delta)) = 0 \quad \Rightarrow \quad Pmk_t = \rho + \delta$$

$$\frac{Dk_t}{k_t} = \frac{y_t}{k_t} - \frac{c_t}{k_t} - (n + \delta) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_t = y_t - (n + \delta)k_t$$

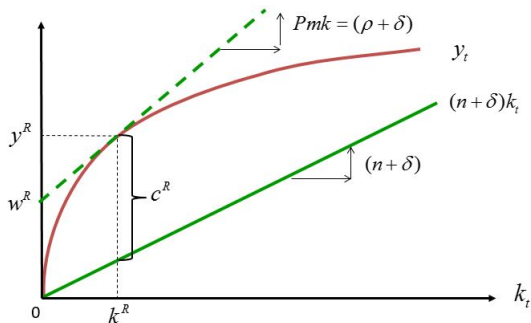
Représentation graphique

Il est important de comprendre que de $Pmk_t = \rho + \delta$ il existe une et une seule valeur pour le capital respectant cette égalité.

On note cette valeur k^R (Ramsey).

De $c_t = y_t - (n + \delta)k_t$ on déduit simplement la valeur de la consommation à l'état stationnaire, notée c^R (Ramsey).

On peut représenter ce résultat dans un graphique identique au modèle de Solow.



Comparaison avec la règle d'or

L'état stationnaire se situera à gauche de la règle d'or si $\rho > n$ et à droite si $\rho < n$. Mais ce dernier cas est impossible.

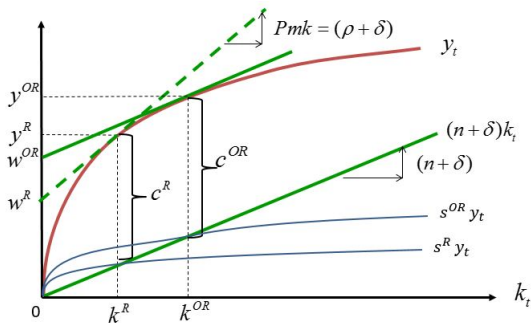
En effet, la préférence pour le présent doit nécessairement être supérieure au taux de croissance de la population sinon, cela reviendrait à donner plus de poids aux générations futures. Pour comprendre ce point il suffit de réécrire la fonction d'utilité.

$$u = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-\rho t} \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} L_t dt$$

Comme $\frac{DL_t}{L_t} = n$ on déduit que $L_t = L_0 e^{nt}$, ainsi :

$$u = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-(\rho-n)t} \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} dt$$

Comparaison graphique

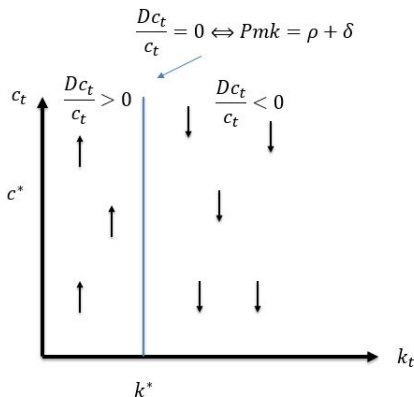


A l'état stationnaire le taux d'épargne du modèle de Ramsey est plus faible que le taux d'épargne de la règle d'or. L'inefficiency dynamique n'est pas possible, les agents "rationnellement" ne peuvent pas épargner trop.

La dynamique transitoire du modèle de Ramsey 1/3

Pour comprendre la dynamique transitoire du modèle de Ramsey, il faut travailler graphiquement dans le plan (k_t, c_t) .

Pour cela on va remarquer que Dc_t/c_t est positif si $Pmk_t > \rho + \delta$ et négatif dans le cas inverse et que $Dc_t/c_t = 0$ pour $k_t = k^R$.

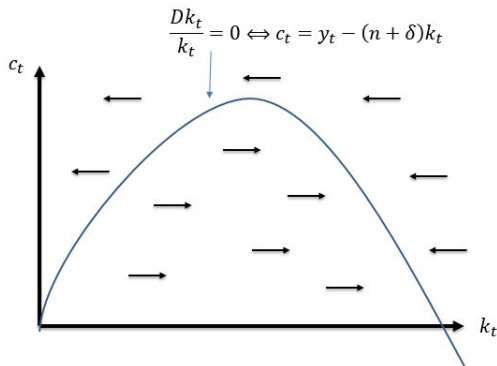


La dynamique transitoire du modèle de Ramsey 2/3

De l'équation de $Dk_t/k_t = 0$ on peut tracer la courbe

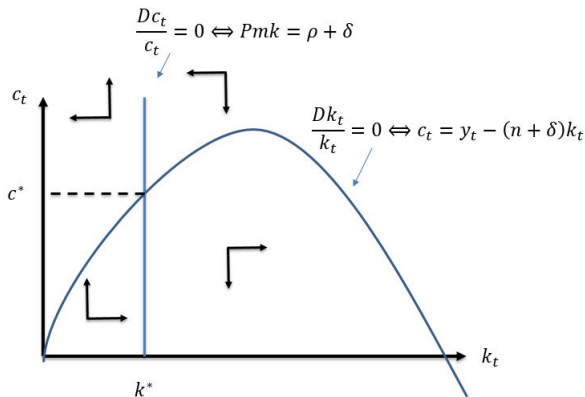
$$c_t = y_t - (n + \delta)k_t$$

- ▶ Si $c_t > y_t - (n + \delta)k_t$ le capital par tête diminue.
- ▶ Si $c_t < y_t - (n + \delta)k_t$ le capital par tête augmente.



La dynamique transitoire du modèle de Ramsey 3/3

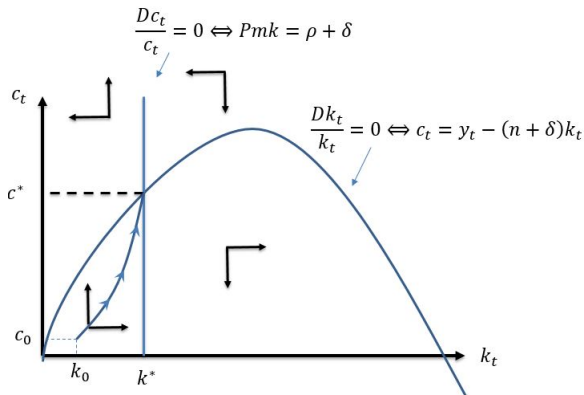
Si maintenant on superpose les deux graphiques précédents on peut déterminer la dynamique du modèle.



On constate que l'état stationnaire se trouve au point (c^*, k^*) puisque $Dc_t/c_t = 0$ et $Dk_t/k_t = 0$.

Le théorème de l'autoroute

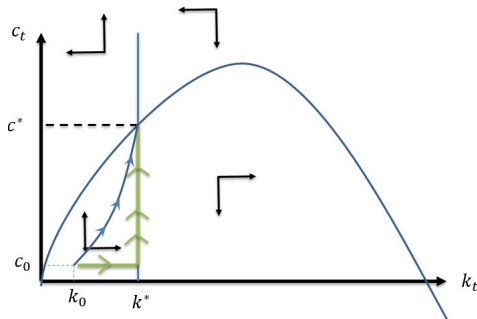
la dynamique transitoire qui résulte du modèle de Ramsey est celle qui fait converger l'économie vers l'état stationnaire. Le comportement optimal des agents est de choisir un niveau de consommation qui se trouve sur ce sentier. Tout autre sentier ne maximise plus l'utilité inter-temporelle.



Bien comprendre le théorème de l'autoroute

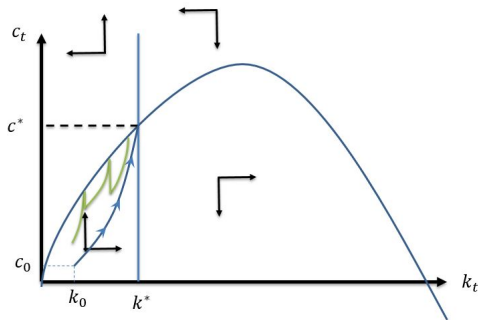
Imaginons le jeu vidéo suivant : vous avez une manette qui est la consommation et l'évolution du capital résulte de votre comportement de consommation.

Vous pouvez décider de très peu consommer, le capital va augmenter vite. Lorsqu'il va atteindre k^* vous augmentez la consommation à c^* . Vous êtes à l'état stationnaire mais vous n'avez pas maximisé l'utilité inter-temporelle (score du jeu vidéo).



Bien comprendre le théorème de l'autoroute

Vous pouvez décider de consommer beaucoup maintenant, le capital par tête va augmenter lentement et risque même de diminuer. Il faudra baisser la consommation. Vous pouvez arriver à l'état stationnaire mais vous n'avez pas maximisé l'utilité inter-temporelle (score du jeu vidéo).

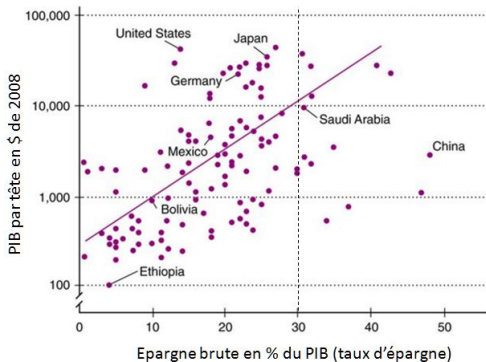


Le taux d'épargne est variable

Il est extrêmement difficile de montrer simplement comment le taux d'épargne varie au cours de la dynamique transitoire. On peut cependant retenir ces résultats :

- ▶ Pour des valeurs raisonnables de $\sigma \approx 2$ le taux d'épargne est d'autant plus élevé que l'économie est pauvre puis diminue vers sa valeur d'état stationnaire au cours du développement.
- ▶ Pour obtenir une taux d'épargne faible lorsqu'on est pauvre puis élevé lorsqu'on est riche il faut un paramètre σ très élevé ($\sigma > 17$ pour des valeurs raisonnables des autres paramètres).

Il faudrait donc que le lissage de la chronique de consommation soit très fort pour expliquer que l'épargne croît avec le revenu.



Le taux d'épargne d'état stationnaire

On peut montrer que le taux d'épargne d'état stationnaire du modèle de Ramsey est :

$$s^R = \alpha \frac{n + \delta}{\rho + \delta}$$

Avec des valeurs raisonnables :

$\alpha = 0,3, n = 1\%, \delta = 5\%, \rho = 4\%$, on obtient un taux d'épargne optimal à l'état stationnaire de $s^R = 22\%$.

$$s^R = \frac{I^R}{Y^R} = \frac{DK^R + \delta K^R}{Y^R} = \frac{\frac{DK^R}{K^R} + \delta}{\frac{Y^R}{K^R}} = \alpha \frac{n + \delta}{\rho + \delta}$$

Car :

A l'état stationnaire $\frac{DK^R}{K^R} = n$

Avec la Cobb-Douglas et à l'état stationnaire $Y^R/K^R = \frac{Pmk^R}{\alpha}$

Conclusion

Le modèle de Ramsey a le mérite de rendre compte de la situation pour laquelle les agents cherchent à optimiser une chronique de consommation.

Sur le fond cela ne change pas grand chose au modèle de Solow mais on apprend que :

- ▶ A l'état stationnaire on sait que le taux d'épargne optimal est inférieur à celui de la règle d'or de Phelps.
- ▶ Il ne peut pas y avoir d'inefficience dynamique (pas de sur-accumulation du capital).
- ▶ Le taux d'épargne est variable au cours de la dynamique transitoire.

Compléments

Si l'on introduisait du progrès technique on obtiendrait :

$$\frac{D\hat{c}_t}{\hat{c}_t} = \frac{1}{\sigma} (Pmk_t - (\rho + \sigma x + \delta)) = 0 \quad \Rightarrow \quad Pmk_t = \rho + \sigma x + \delta$$

$$\frac{D\hat{k}_t}{\hat{k}_t} = \frac{\hat{y}_t}{\hat{k}_t} - \frac{\hat{c}_t}{\hat{k}_t} - (n + x + \delta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{c}_t = \hat{y}_t - (n + x + \delta)k_t$$

$$\text{avec } \hat{y}_t = \frac{Y_t}{A_t L_t}, \hat{k}_t = \frac{K_t}{A_t L_t}, \hat{c}_t = \frac{C_t}{A_t L_t}.$$