Universidade de São Paulo

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

# Lista 02 - Cálculo Numérico

Aluno: Gabriel Penido de Oliveira
Número USP: 12558770
E-mail: gabrielpenido@usp.br

23 de junho de 2022

1. a) Seja

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 12 & -3 & 16 \\ -4 & 17 & -31 \end{pmatrix}.$$

Para calcular os autovalores de $A$, temos que resolver:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Ou seja,

$$\det\left(\begin{pmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 12 & -3 & 16 \\ -4 & 17 & -31 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 12 & -3 & 16 \\ -4 & 17 & -31 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -31-\lambda \end{pmatrix}\right) = 0$$

Agora, pelo método de Laplace, temos:

$$(4-\lambda) \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}\right) + (-3-\lambda) \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 0 & -31-\lambda \end{bmatrix}\right) +$$
$$+ (-31-\lambda) \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 0 & -3-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

Ou seja,

$$-\lambda^3 - 30\lambda^3 + 263\lambda + 12 = 0$$

Resolvendo:

$$\lambda_1 = -0,04; \;\; \lambda_2 = 7,12; \;\; \lambda_3 = -37,08.$$

Assim, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ são os autovalores de $A$.

b) A condição para que $A$ seja decomposto em LU, é que o determinante dos menores principais sejam maiores do que 0.

Assim, calculamos:

$$\det\left(\begin{bmatrix}4\end{bmatrix}\right) = 4$$
$$\det\left(\begin{bmatrix}4 & -2 \\ 12 & -3\end{bmatrix}\right) = 12$$

Portanto, $A$ satisfaz as condições da decomposição LU.

c) Sabemos que a decomposição LU é feita pelo método:

$$A = LU \implies \begin{pmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 12 & -3 & 16 \\ -4 & 17 & -31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & e & f \\ 0 & g & g \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

Resolvendo a multiplicação de matrizes:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}; \quad U = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Sabemos que:

$$\det(A) = \Pi_{i=1}^{n} u_{ii} = 4 \cdot 3 \cdot 1 = 12$$

e)

$$Ax = b \implies (LU)x = b \implies L(\overbrace{Ux}^{y}) = b$$

Faremos da seguinte forma:

$$Ux = y \tag{1}$$

$$Ly = b \tag{2}$$

Por 1:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 12 & -3 & 16 \\ -4 & 17 & -31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x - 2y + 7z \\ 3y - 5z \\ z \end{pmatrix}$$

Por 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4x - 2y + 7z \\ 3y - 5z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 54 \\ -63 \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{cases} 4x - 2y + 7z = 21 \\ 12x - 3y + 16z = 54 \\ -4x + 17y - 31z = -63 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, achamos:

$$x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3$$

2. a) Precisamos ver se é simétrica, todos os autovalores são maiores que 0 e, por fim, todos os menores principais são maiores do que zero.

A matriz $A$ é simétrica.

Ao calcular os autovalores de $A$, achamos:

$$\lambda_1 = 9, \lambda_2 = -3\sqrt{5} + 7, \lambda_3 = 3\sqrt{5} + 7$$

Temos, também:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}\right) = 4$$
$$\det\left(\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 12 & -3 \end{bmatrix}\right) = 36$$
$$\det\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{bmatrix}\right) = 36$$

Portanto, $A$ satisfaz as condições de Choleski.

b) Sabemos que a decomposição de Choleski é feita pelo método:

$$A = HH^\intercal \implies \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & d \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

Resolvendo a multiplicação de matrizes:

$$H = \begin{pmatrix} \pm 2 & 0 & 0 \\ \pm 1 & \pm 3 & 0 \\ \mp 2 & \pm 2 & \pm 1 \end{pmatrix};$$

c) Sabemos que:

$$\det(A) = (\det(H))^2 = (2 \cdot 3 \cdot 1)^2 = 6$$

d)

$$Ax = b \implies (HH_{\mathsf{T}})x = b \implies H(\overbrace{H^{\mathsf{T}}x}^{y}) = b$$

Faremos da seguinte forma:

$$H^{\mathsf{T}}x = y \tag{1}$$

$$Hy = b \tag{2}$$

Por 1:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y - 2z \\ 3y + 2z \\ z \end{pmatrix}$$

Por 2:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x + y - 2z \\ 3y + 2z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{cases} 4x + 2y - 4z = 0 \\ 2x + 10y + 4z = 6 \\ -4x + 4y + 5z = 15 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, achamos:

$$x = \frac{43}{3}, \quad y = \frac{-20}{3}, \quad z = 11$$

e) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{bmatrix}.$$

Para calcular os autovalores de $A$, temos que resolver:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Ou seja,

$$\det\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 10-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 9-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

Ou seja,

$$-\lambda^3 + 23\lambda^3 - 130\lambda + 36 = 0$$

Resolvendo:

$$\lambda_1 = 9;\ \lambda_2 = 7 - 3\sqrt{5};\ \lambda_3 = 7 + 3\sqrt{5}.$$

Assim, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ são os autovalores de $A$.

3. a

4. a

5. a

6. a

7. a

8. a