Universidade de São Paulo

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Lista 02 - Cálculo Numérico

Aluno: Gabriel Penido de Oliveira
Número USP: 12558770
E-mail: gabrielpenido@usp.br

24 de junho de 2022

1. a) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 12 & -3 & 16 \\ -4 & 17 & -31 \end{bmatrix}.$$

Para calcular os autovalores de A, temos que resolver:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Ou seja,

$$\det\left(\begin{bmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 12 & -3 & 16 \\ -4 & 17 & -31 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 12 & -3 & 16 \\ -4 & 17 & -31 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -31-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

Agora, pelo método de Laplace, temos:

$$(4-\lambda) \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}\right) + (-3-\lambda) \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 0 & -31-\lambda \end{bmatrix}\right) +$$
$$+ (-31-\lambda) \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 0 & -3-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

Ou seja,

$$-\lambda^3 - 30\lambda^3 + 263\lambda + 12 = 0$$

Resolvendo:

$$\lambda_1 = -0,04; \;\; \lambda_2 = 7,12; \;\; \lambda_3 = -37,08.$$

Assim, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ são os autovalores de A.

b) A condição para que A seja decomposto em LU, é que o determinante dos menores principais sejam maiores do que 0.

Assim, calculamos:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}\right) = 4$$
$$\det\left(\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 12 & -3 \end{bmatrix}\right) = 12$$

Portanto, A satisfaz as condições da decomposição LU.

c) Sabemos que a decomposição LU é feita pelo método:

$$A = LU \implies \begin{bmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 12 & -3 & 16 \\ -4 & 17 & -31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & e & f \\ 0 & g & g \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}$$

Resolvendo a multiplicação de matrizes:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}; \quad U = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d) Sabemos que:

$$\det(A) = \Pi_{i=1}^{n} u_{ii} = 4 \cdot 3 \cdot 1 = 12$$

e)

$$Ax = b \implies (LU)x = b \implies L(\overbrace{Ux}^{y}) = b$$

Faremos da seguinte forma:

$$Ux = y \tag{1}$$

$$Ly = b \tag{2}$$

Por 1:

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 12 & -3 & 16 \\ -4 & 17 & -31 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x - 2y + 7z \\ 3y - 5z \\ z \end{bmatrix}$$

Por 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4x - 2y + 7z \\ 3y - 5z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 54 \\ -63 \end{bmatrix}$$

$$\implies \begin{cases} 4x - 2y + 7z = 21 \\ 12x - 3y + 16z = 54 \\ -4x + 17y - 31z = -63 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, achamos:

$$x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3$$

2. a) Precisamos ver se é simétrica, todos os autovalores são maiores que 0 e, por fim, todos os menores principais são maiores do que zero.

A matriz A é simétrica.

Ao calcular os autovalores de A, achamos:

$$\lambda_1 = 9, \lambda_2 = -3\sqrt{5} + 7, \lambda_3 = 3\sqrt{5} + 7$$

Temos, também:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}\right) = 4$$
$$\det\left(\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 12 & -3 \end{bmatrix}\right) = 36$$
$$\det\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{bmatrix}\right) = 36$$

Portanto, A satisfaz as condições de Choleski.

b) Sabemos que a decomposição de Choleski é feita pelo método:

$$A = HH^\intercal \implies \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & d \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

Resolvendo a multiplicação de matrizes:

$$H = \begin{bmatrix} \pm 2 & 0 & 0 \\ \pm 1 & \pm 3 & 0 \\ \mp 2 & \pm 2 & \pm 1 \end{bmatrix};$$

c) Sabemos que:

$$\det(A) = (\det(H))^2 = (2 \cdot 3 \cdot 1)^2 = 6$$

d)

$$Ax = b \implies (HH^{\intercal})x = b \implies H(\overbrace{H^{\intercal}x}^{y}) = b$$

Faremos da seguinte forma:

$$H^{\intercal}x = y \tag{1}$$

$$Hy = b \tag{2}$$

Por 1:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + y - 2z \\ 3y + 2z \\ z \end{bmatrix}$$

Por 2:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x + y - 2z \\ 3y + 2z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\implies \begin{cases} 4x + 2y - 4z = 0 \\ 2x + 10y + 4z = 6 \\ -4x + 4y + 5z = 15 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, achamos:

$$x = \frac{43}{3}, \quad y = \frac{-20}{3}, \quad z = 11$$

e) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{bmatrix}.$$

Para calcular os autovalores de A, temos que resolver:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Ou seja,

$$\det\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 10-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 9-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

Ou seja,

$$-\lambda^3 + 23\lambda^3 - 130\lambda + 36 = 0$$

Resolvendo:

$$\lambda_1 = 9;\ \lambda_2 = 7 - 3\sqrt{5};\ \lambda_3 = 7 + 3\sqrt{5}.$$

Assim, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ são os autovalores de A.

3. a) Seja o sistema:

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 6 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 3 \\ -3x_1 + x_2 + 7x_3 = 11 \end{cases}$$

Podemos montar a matriz:

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & -5 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 7 & 11 \end{bmatrix}$$

Fazemos: $L_2 = L_2 + \frac{1}{4}L_1$

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & \frac{-9}{2} & \frac{9}{4} & \frac{9}{2} \\ -3 & 1 & 7 & 11 \end{bmatrix}$$

Fazemos: $L_3 = L_3 - \frac{3}{4}L_1$

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & \frac{-9}{2} & \frac{9}{4} & \frac{9}{2} \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{13}{4} & \frac{13}{2} \end{bmatrix}$$

Fazemos: $L_3 = L_3 - \frac{1}{9}L_2$

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & \frac{-9}{2} & \frac{9}{4} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Assim, temos o sistema:

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 6 \\ \dfrac{-9}{2}x_2 + \dfrac{9}{4}x_3 = \dfrac{9}{2} \\ 3x_3 = 6 \end{cases}$$

Resolvendo, obtemos:

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 2$$

b) Podemos resolver da seguinte forma:

$$A = L \cdot U \implies \begin{bmatrix} -4 & 2 & 5 \\ 1 & -5 & 1 \\ -3 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 2 & 5 \\ 0 & \frac{-9}{2} & \frac{9}{4} \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Visto que achamos o U na letra a). Resolvendo, achamos:

$$a = \frac{-1}{4}; \quad b = \frac{3}{4}; \quad c = \frac{1}{5}$$

Portanto:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix}; \quad U = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 5 \\ 0 & \frac{-9}{2} & \frac{9}{4} \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

4. a) Seja o sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$$

Podemos montar a matriz:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Fazemos: $L_2 = L_2 - \frac{2}{3}L_1$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & \frac{-5}{3} & \frac{-5}{3} \\ 1 & -1 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Fazemos: $L_3 = L_3 - \frac{1}{3}L_1$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & \frac{-5}{3} & \frac{-5}{3} \\ 0 & -2 & \frac{14}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

Fazemos: $L_3 = L_2$ e $L_2 = L_3$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & \frac{14}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & \frac{-5}{3} & \frac{-5}{3} \end{bmatrix}$$

Assim, temos o sistema:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 7 \\ \quad -2x_2 + \dfrac{14}{3}x_3 = \dfrac{8}{3} \\ \qquad\qquad \dfrac{-5}{3}x_3 = \dfrac{-5}{3} \end{cases}$$

Resolvendo, obtemos:

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = 1$$

5. Temos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

De início,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fazemos: $L_2 = L_1$ e $L_1 = L_2$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fazemos: $L_3 = L_3 - 2L_1$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 7 & 3 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fazemos: $L_3 = L_3 - \frac{7}{4}L_2$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & \frac{-15}{2} \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{7}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

Então, $PA = LU \implies$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{7}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & \frac{-15}{2} \end{bmatrix}$$

6. a) São diagonalizáveis as matrizes: B, C, como veremos no item b).

b) A :

$$\det\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0 \implies \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Então,

$$(3-\lambda)^2 = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 3$$

B :

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0 \implies \begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 \\ 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Então,

$$\lambda^2 - 26 = 0 \implies \lambda_1 = -\sqrt{26} \quad \lambda_2 = \sqrt{26}$$

C :

$$\det\left(\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0 \implies \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Então,

$$\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0 \implies \lambda_1 = -\sqrt{2} - 1, \quad \lambda_2 = \sqrt{2} - 1$$

7.
$$\det\left(\begin{bmatrix} 11 & -8 & 4 \\ -8 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0 \implies$$
$$\begin{vmatrix} 11-\lambda & -8 & 4 \\ -8 & -1-\lambda & -2 \\ 4 & -2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \implies$$
$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 + 135\lambda + 400 = 0$$

Resolvendo,

$$\lambda_1 = 16, \quad \lambda_2 = -5$$

Assim, a matriz J não é diagonalizável.