Trabalho #1 - Equações Elípticas

1. Informações Preliminares

A equação de Helmholtz é uma equação diferencial parcial linear presente na modelagem de diversas situações da Física e da Engenharia, dentre as quais se incluem sismologia, óptica, acústica, eletrostática, estudo de erupções vulcânicas e mecânica das ondas. Diante disso, para fins motivacionais, nesta seção será apresentada um estudo particular modelado de forma simplicada pela equação de Helmholtz, bem como outras aplicações que envolvem modelos semelhantes que podem ser gerados como extensão ou simplificação desta equação.

1.1 Mecânica das Ondas: o problema das vibrações livres

O problema de propagação de ondas em meios contínuos consiste da análise de uma equação que, frequentemente, pode ser representada na forma:

$$\nabla^2 u(\mathbf{x},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(\mathbf{x},t)}{\partial t^2} = f(\mathbf{x},t), \tag{1}$$

onde c caracteriza o meio no qual a onda se propaga e ∇^2 é o operador laplaciano.

Neste contexto, o estudo das vibrações livres viabiliza a identificação das frequências naturais de vibrações e dos respectivos modos de vibração. Na tentativa de encontrar as frequências naturais de vibração, as forças externas aplicadas à estrutura em estudo devem ser nulas. Portanto, a equação (1) se reduz à:

$$\nabla^2 u(\mathbf{x},t) - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u(\mathbf{x},t)}{\partial t^2} = 0. \tag{2}$$

Ao considerar que o campo de deslocamento $u(\mathbf{x},t)$ seja um movimento harmônico do tipo

$$u(\mathbf{x},t) = v(\mathbf{x})e^{-i\omega t},$$

onde ω é uma frequência natural de vibração, a derivada temporal na equação (2) pode ser simplificada de modo que resulte em:

$$\nabla^2 u(\mathbf{x},t) + \frac{1}{c^2}\omega^2 u(\mathbf{x},t) = 0.$$

Por simplicidade de notação, considere $u(\mathbf{x},t) = u$, e defina $k = \frac{\omega}{c}$. Dessa forma, obtém-se a equação conhecida como **equação de Helmholtz** que pode ser expressa na forma:

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0, \tag{3}$$

na qual k é o número de onda.

Conforme visto, a equação de onda dá origem à equação de Helmholtz em situações específicas dependentes apenas das variáveis espaciais. Algumas aplicações nas quais é possível observar tal equação incluem membranas vibrantes (a exemplo de tambores), lasers, propagações de ondas sonoras, sísmica, ondas eletromagnéticas e reatores nucleares.

Alguns modelos parecidos com a equação de Helmholtz podem ser resolvidos através da aplicação técnicas numéricas similares. A equação de Schrödinger e a equação de Laplace estão entre estes modelos.

1.2 Mecânica quântica: equação de Schrödinger

Neste caso, há a inclusão da derivada temporal da função $u(\mathbf{x},t)$, além de outros fatores mais específicos oriundos do campo de aplicação na equação (3):

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\mathbf{x},t)+V(\mathbf{x},t)\Psi(\mathbf{x},t)=i\hbar\frac{\partial\Psi(\mathbf{x},t)}{\partial t}. \tag{4}$$

A equação (4) é uma equação fundamental e, como tal, não há uma demonstração matemática para ela. Esta função define o comportamento da função da onda dado um potencial de interação.

Através da equação de Schrödinger é possível estudar diversas propriedades da função da onda e os resultados destes estudos geram implicações em diversos fenômenos da mecânica quântica, inclusive na constituição da matéria.

Além das aplicações resumidamente mencionadas nesta introdução, a equação de Helmholtz surge em modelagens fundamentais de muitos campos da Física e da Engenharia, se mostrando bastante versátil.

2. Especificações sobre o trabalho

2.1 O que deve ser feito

Considere a equação de Helmholtz em um domínio bidimensional:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0 \tag{5}$$

definida no quadrado $[-1,1] \times [-1,1]$ com condições de fronteiras dadas por:

- $u = 0$ para $y = 1$ e $-1 \leq x \leq 1$,
- $u = \sin(x)$ para $y = -1$ e $-1 \leq x \leq 1$,
- $\nabla u \cdot \mathbf{n} = -0.5u$ para $x = 1$ e $-1 \leq y \leq 1$,
- $\nabla u \cdot \mathbf{n} = -0.5u$ para $x = -1$ e $-1 \leq y \leq 1$.

1. Discretize o problema acima utilizando malha uniforme com espaçamento genérico h, utilizando somente diferenças finitas de ordem 2. Implemente este problema usando MATLAB/OCTAVE ou Python e produza uma superfície que representa a solução obtida para um valor $h \leq 0.1$. Na implementação, considere $k^2 = 10$.

   Sugestão de comandos para plotar superfície: Funções meshgrid e surf (em Matlab/Octave); Funções meshgrid e plot_surface (bibliotecas numpy e matplotlib.pyplot em python). Informações como sintaxe das funções e complementos ficam como exercício.

2. Realize um estudo numérico de convergência, comparando com uma solução de referência, e plote um gráfico deste resultado em escala logarítmica. Utilize pelo menos 5 malhas diferentes para capturar o comportamento assintótico do erro, e verificar se ele está tendendo a zero com a ordem esperada.

3. Redija um documento em PDF que contenha: as representações gráficas solicitadas; uma descrição resumida de como a construção da matriz dos coeficientes foi realizada; indicação (em uma sentença) da solução de referência utilizada. Inclua também, neste PDF, comentários que julgar necessários.

2.2 O que deve ser entregue

1. Documento em pdf elaborado;
2. Códigos utilizados.