Trabalho #3 - Equações Parabólicas

1. Um pouco de história

A aproximação da solução de problemas pelo método das diferenças finitas é uma estratégia antiga para estimar valores de derivadas e até mesmo resolver equações diferenciais parciais. Tal método já era conhecido por L. Euler (1707-1783), por volta de 1768 podendo ser aplicado em problemas unidimensionais e, provavelmente, foi extendido para duas dimensões por volta de 1908 por C. Runge (1856-1927) [3]. Aplicações mais robustas das técnicas de diferenças finitas em aplicações numéricas foram intensificadas em meados do século XX e seu desenvolvimento foi estimulado pelo surgimento de computadores que ofereciam uma estrutura conveniente para lidar com problemas complexos de ciência e tecnologia. Resultados teóricos foram obtidos durante as últimas décadas relacionados à precisão, estabilidade e convergência do método de diferenças finitas para equações diferenciais parciais.

Diversos modelos matemáticos obtidos a partir da modelagem de problemas reais constumam envolver taxas de variação com relação a duas ou mais variáveis independentes, uma delas geralmente representando o tempo. Esta construção, muitas vezes leva a uma equação diferencial parcial conhecida como parabólica ou a um sistema dessas equações. Uma das equações mais simples deste grupo é a equação de difusão, também conhecida como equação do calor [2]. A equação do calor desempenha um papel fundamental muitas áreas de aplicações práticas, a exemplo da mecânica dos fluidos.

Mesmo nos dias atuais, uma quantidade limitada de tipos especiais de equações parabólicas foi resolvido analiticamente e a utilidade dessas soluções é ainda mais restrita, pois dependem de formas para as quais as condições de contorno devem ser satisfeitas. Neste contexto, o uso de métodos numéricos se credenciam como uma boa alternativa dentre os poucos meios de solução. O método Crank Nicolson é um bom exemplo de método numérico estável bastante utilizado para resolver equações diferenciais parciais parabólicas. Trata-se de um método prático desenvolvido por John Crank e Phyllis Nicolson em meados do século XX, para avaliação numérica de equações diferenciais parciais do tipo condução de calor [1]. Uma formulação mais instrutiva deste método pode ser acessada em [2]. Existem outros métodos conhecidos na literatura tais como os métodos de Euler implícito e explícito. Esses três métodos, em particular, estão intimamente relacionados, mas diferem em estabilidade, precisão e velocidade de execução.

Referências

[1] J. Crank and P. Nicolson. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type. *Adv Comput Math*, 6:207–226, 1996.

[2] Randall J. LeVeque. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*. SIAM, Philadelphia, 2007.

[3] S. Sathyapriya, G. Hamsavarthini, M. Meenakshi, and E. Tanushree. A study on crank nicolson method for solving parabolic partial differential equations. *International Journal for Research Trends and Innovation*, 2021.

2. Especificações sobre o trabalho

2.1 Descrição do problema

Seja a equação

$$u_t - u_{xx} = f(t), \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

com condições de fronteira $u(0,t) = u(1,t) = 0$, para $t > 0$ e com condição inicial:

$$u(x,0) = \sin(\pi x) + x(1-x),$$

cuja solução exata para $f(t) = 2$ é:

$$u(x,t) = e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x) + x(1-x).$$

2.2 O que deve ser feito

Para os itens (i)-(vi), considere $f(t) = 2$.

(i) Construa um código para resolver esse problema usando o *Método Explícito* com espaçamento espacial $h = 0.05$ e espaçamento temporal k dado por

  (a) $k = \dfrac{5}{11}h^2$,

  (b) $k = \dfrac{5}{9}h^2$.

(ii) Faça um gráfico da solução numérica e da solução exata para cada um dos casos acima, plotando essas soluções com relação a x para vários valores de t (por exemplo, $t = 0.05,\ 0.1,\ 0.15, \ldots,\ 0.5$). Observe e comente o comportamento dos dois gráficos;

(iii) Resolva o mesmo problema usando o método de *Crank-Nicolson* e reproduza o mesmo gráfico. Como explicar as diferenças nas soluções?

(iv) Considerando o tempo $t = 0.2$ em $x = 0.5$, construa, no arquivo em pdf, uma tabela comparando pelo menos três valores de k, $\sigma = \dfrac{k}{h^2}$, as aproximações obtidas pelos métodos explícito e de Crank-Nicolson, no tempo e na posição considerada, e os erros relativos dessas aproximações com relação à solução exata;

(v) Apresente figuras com verificação numérica da ordem de convergência para ambos os métodos. O método explícito tem ordem esperada $O(k + h^2)$. Portanto, é mais conveniente reduzir ambos espaçamentos respeitando sempre a relação $k = Ch^2$, sendo C uma constante (que satisfaça o limite de estabilidade do método), para o cálculo dos erros com a solução exata. Já no caso do método de Crank-Nicolson, a ordem esperada é $O(k^2 + h^2)$, e portanto pode-se reduzir os espaçamentos de forma que k e h sejam proporcionais ($k = Ch$). Para verificar as ordens de convergência, faça gráficos separados de $Erro \times k$ e $Erro \times h$ para cada um dos métodos. Comente os resultados;

(vi) A solução do problema de valor inicial para a equação do calor pode considerar uma temperatura inicial descontínua no tempo $t_0 = 0$ em uma temperatura que é instantaneamente suave em $t > t_0$. Isso pode não ser fisicamente possível, pois haveria a propagação da informação em velocidade infinita, o que está em contradição com o princípio da causalidade. Portanto, esta é uma propriedade teórica da equação matemática. Este efeito de regularização da equação do calor é ilustrado na Figura 1 para a condição inicial $u_0(t_0) = \sin(\pi x) + \sin(5\pi x)$. Podemos facilmente observar o decrescimento instantâneo das oscilações em torno de $\sin(5\pi x)$, antes que o bloco principal comece a decrescer. Em outras palavras, as altas frequências são amortizadas primeiro, tendo assim o efeito positivo de remover instantaneamente todos os erros de inicialização. Esta interessante propriedade numérica encontra inúmeras aplicações em processamento de imagens, regularização de malhas, etc. Tente reproduzir comportamento similar ao ilustrado na Figura 1 considerando $f(t) = 0$ na equação (1) com um dos dois métodos implementados.

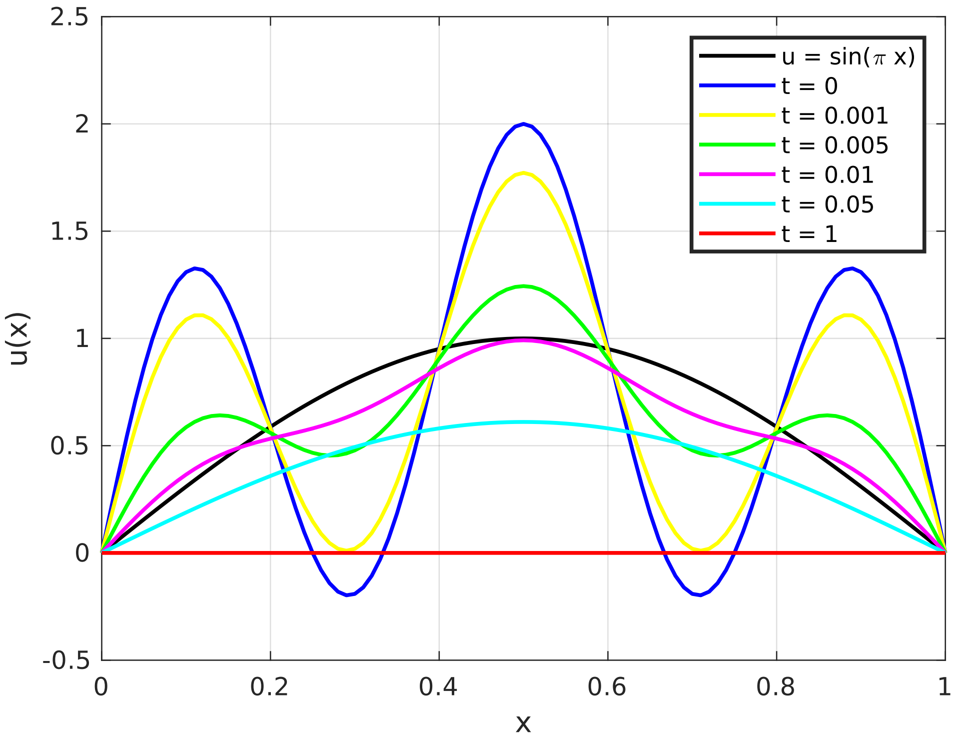

Figura 1: Efeito de regularização (suavização) quando resolvemos a equação do calor numericamente em vários passos do tempo.

(vii) Redigir um documento em PDF que contenha: breve relatório que inclua descrição de como o problema tratado para ser resolvido por cada método; os resultados solicitados com gráficos e comentários. Não se esqueça de se atentar à qualidade da escrita, à disposição do texto (justificado, com tipo e tamanho da fonte padronizados) e à legibilidade das imagens inseridas (lembre-se de incluir legendas caso haja mais de uma curva no mesmo plano). Inclua também, neste PDF, comentários que julgar necessários.

2.2 O que deve ser entregue

1. Documento em pdf elaborado;
2. Códigos utilizados.