Métodos Numéricos em Equações Diferenciais

Problemas Parabólicos

Autores:

Bruno da Freiria Mischiati Borges (12557682) brunofborges@usp.br
Gabriel Penido de Oliveira (12558770) gabrielpenido@usp.br

2023 – 1º Semestre

Sumário

1 Objetivo

Este relatório tem como objetivo apresentar a resolução numérica de um problema que envolve a equação do calor unidimensional. A equação governante é dada por:

$$u_t - u_{xx} = f(t); 0 < x < 1 \tag{1}$$

com condições de fronteira $u(0,t) = u(1,t) = 0$, para $t > 0$, e uma condição inicial específica:

$$u(x,0) = sin(\pi x) + x(1-x) \tag{2}$$

A solução exata para este problema é conhecida e é dada por:

$$u(x,t) = e^{-\pi^2 t} sin(\pi x) + x(1-x). \tag{3}$$

Neste relatório, utilizaremos dois métodos numéricos para resolver a equação do calor: o Método Explícito e o Método de Crank-Nicolson. Faremos uma comparação entre as soluções numéricas obtidas e a solução exata para diferentes valores de tempo e posição.

Além disso, analisaremos o comportamento das soluções, traçando gráficos que mostram a evolução temporal da solução numérica e da solução exata. Também calcularemos os erros relativos das aproximações em relação à solução exata.

Será realizada uma verificação da ordem de convergência para ambos os métodos, analisando a dependência do erro em relação aos espaçamentos espaciais e temporais. Comentaremos os resultados obtidos e faremos observações sobre a eficiência e precisão de cada método.

2 Discretização dos métodos

Seja U_j^n o valor aproximado de $u(x_j, t_n)$ no ponto $(x_j = jh,\, t_n = nk)$, sendo k o espaçamento de discretização do tempo e h o espaçamento de discretização do espaço (que é igual a $0,05$ para o problema tratado). Agora, considere a equação do calor $u_t = u_{xx} + f(t)$, sua discretização pelo método explícito é dada por:

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \frac{k}{h^2}(U_{j-1}^n - 2U_j^n + U_{j+1}^n) + f(t) \tag{4}$$

e sua discretização pelo método de Crank-Nicolson é a seguinte:

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \frac{k}{2h^2}(U_{j-1}^n - 2U_j^n + U_{j+1}^n + U_{j-1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j+1}^{n+1}) + f(t) \tag{5}$$

As condições de contorno e a condição inicial fornecem:

$$U_0^n = U_m^n = 0 \tag{6}$$

$$U_j^0 = sin(\pi j) + j(1-j) \tag{7}$$

para j no intervalo $(0, m)$ e m dado por $m = \frac{1}{h} - 1$.

3 Gráficos da solução exata e das soluções numéricas

O gráfico obtido para a solução exata $u(x,t) = e^{-\pi^2 t} sin(\pi x) + x(1-x)$ no domínio $(0,1)X[0,2]$ é dado por:

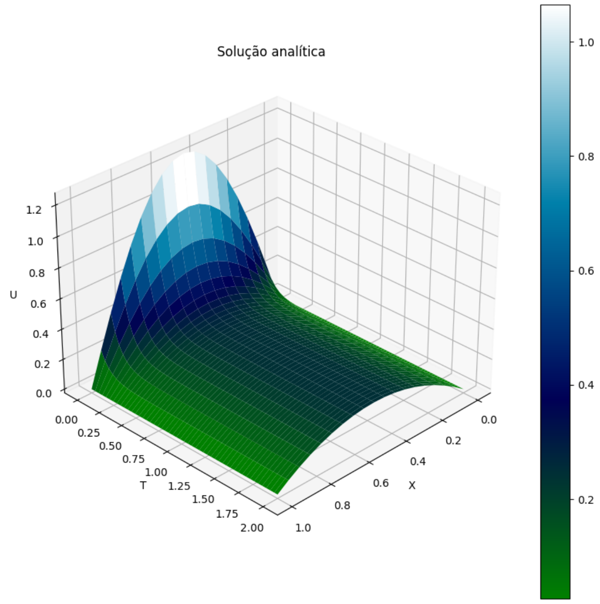

Figura 1: Gráfico da solução de referência

Para as soluções numéricas, foram determinados dois tipo de solução para cada método de discretização. O primeiro tipo corresponde as soluções numéricas obtidas com valor de k igual a $\frac{5}{11}h^2$. O segundo tipo corresponde ao valor de k igual a $\frac{5}{9}h^2$.

O gráfico obtido para o método explícito com valor de k igual a $\frac{5}{11}h^2$ foi o seguinte:

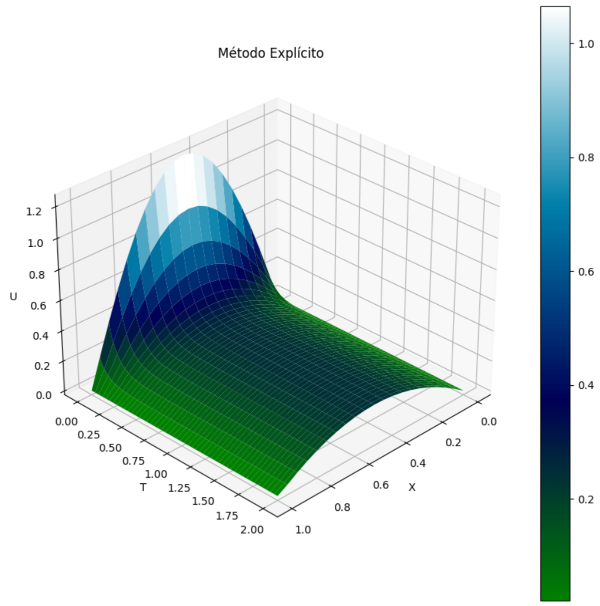

Figura 2: Gráfico do método explícito (caso A)

As soluções numéricas com relação a x para vários valores de t (0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3) foram:

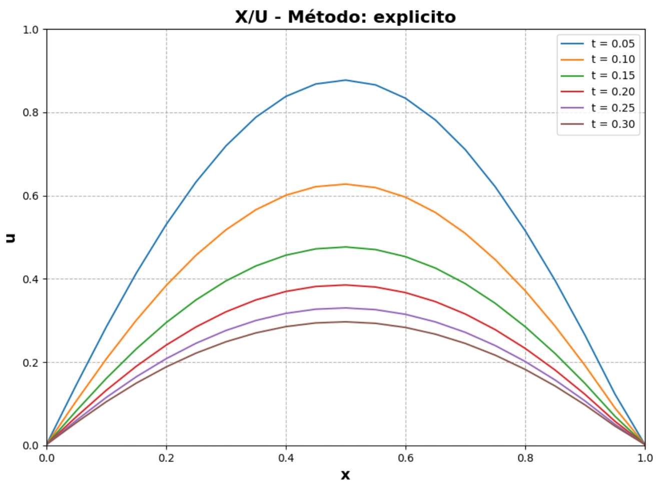

Figura 3: Gráfico de comparação do método explícito (caso A)

Por outro lado, o gráfico obtido para o método de Crank-Nicolson com valor de k igual a

$\dfrac{5}{11}h^2$ foi o seguinte:

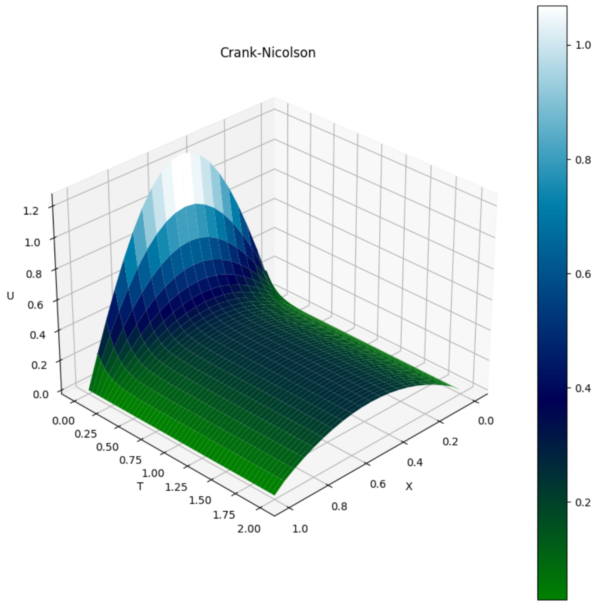

Figura 4: Gráfico do método de Crank-Nicolson (caso A)

As soluções numéricas com relação a x para vários valores de t (0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3) foram:

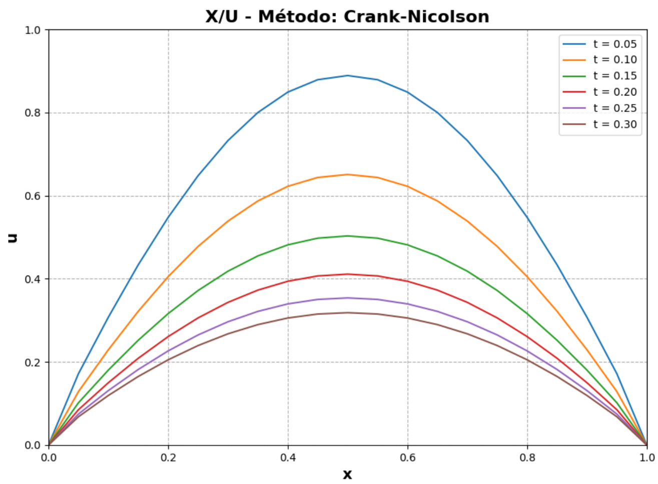

Figura 5: Gráfico de comparação do método de Crank-Nicolson (caso A)

O gráfico obtido para o método explícito com valor de k igual a $\frac{5}{9}h^2$ foi o seguinte:

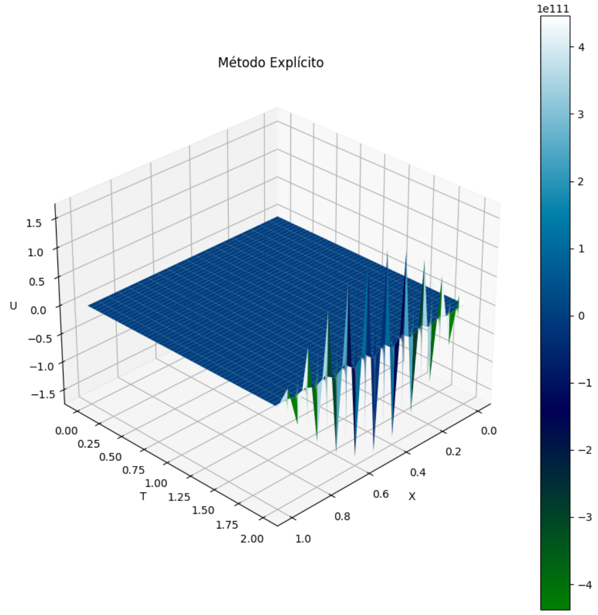

Figura 6: Gráfico do método explícito (caso B)

As soluções numéricas com relação a x para vários valores de t (0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3) foram:

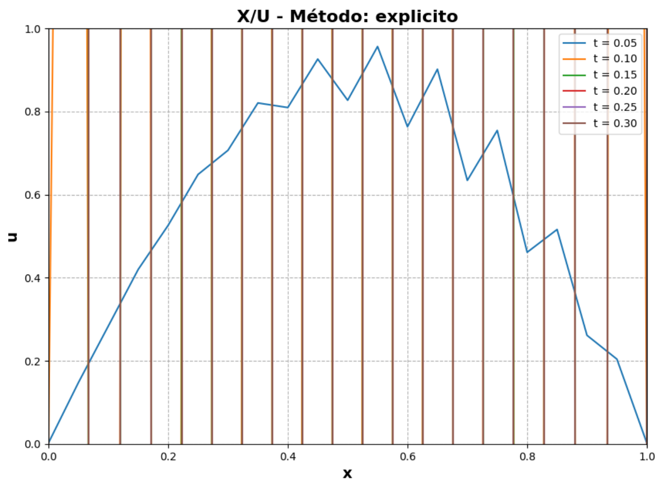

Figura 7: Gráfico de comparação do método explícito (caso B)

Por outro lado, o gráfico obtido para o método de Crank-Nicolson com valor de k igual a $\frac{5}{9}h^2$ foi o seguinte:

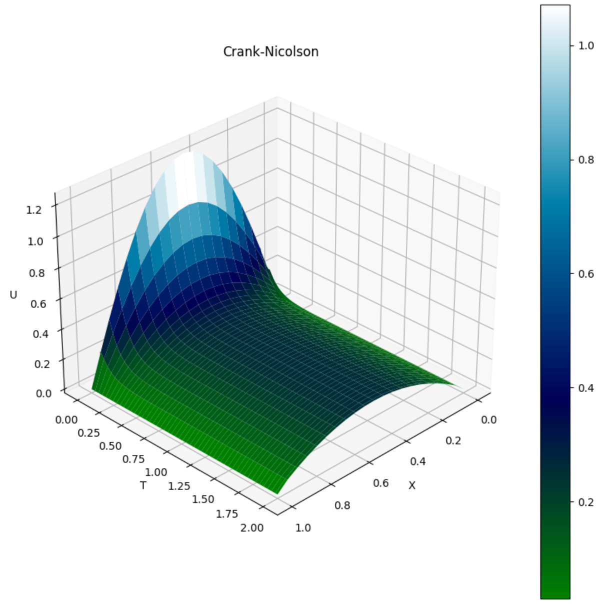

Figura 8: Gráfico do método de Crank-Nicolson (caso B)

As soluções numéricas com relação a x para vários valores de t (0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3) foram:

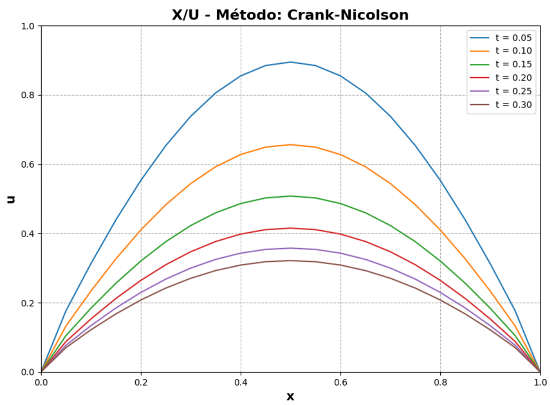

Figura 9: Gráfico de comparação do método de Crank-Nicolson (caso B)

Nota-se que o método de Crank-Nicolson aproxima muito bem a solução analítica, tanto para o caso A quanto para o caso B. Isso ocorre porque o método em questão é incondicionalmente estável. Por outro lado, o método explícito aproxima muito bem a solução analítica para o caso A, mas isso não ocorre para o caso B. Isso ocorre porque o método explícito é condicionalmente estável (ele deve cumprir a condição $\frac{k}{h^2} \geq \frac{1}{2}$ - que não ocorre para o caso B).

4 Gráficos de Ordem de Convergência Temporal

4.1 Gráficos do caso A

Os gráficos de convergência do erro de aproximação de cada método com relação aos valores de k e h, para o caso A, foram os seguintes:

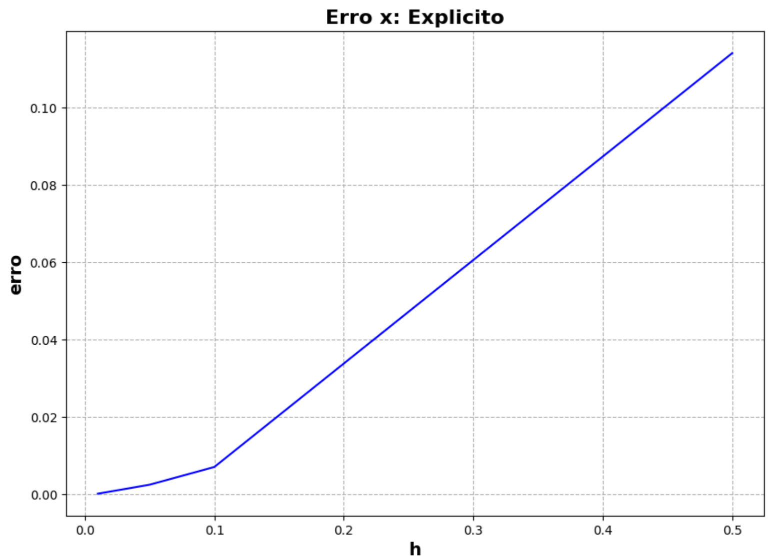

Figura 10: Método Explícito: gráfico de convergência do erro para os valores de h (caso A)

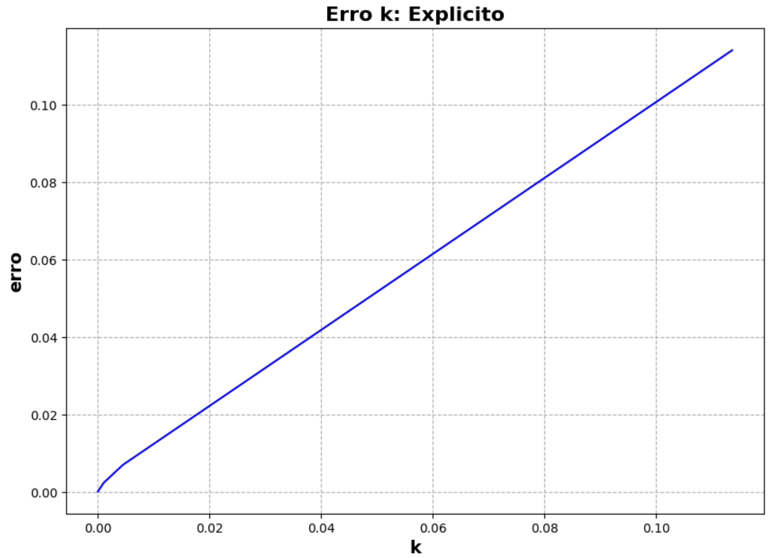

Figura 11: Método Explícito: gráfico de convergência do erro para os valores de k (caso A)

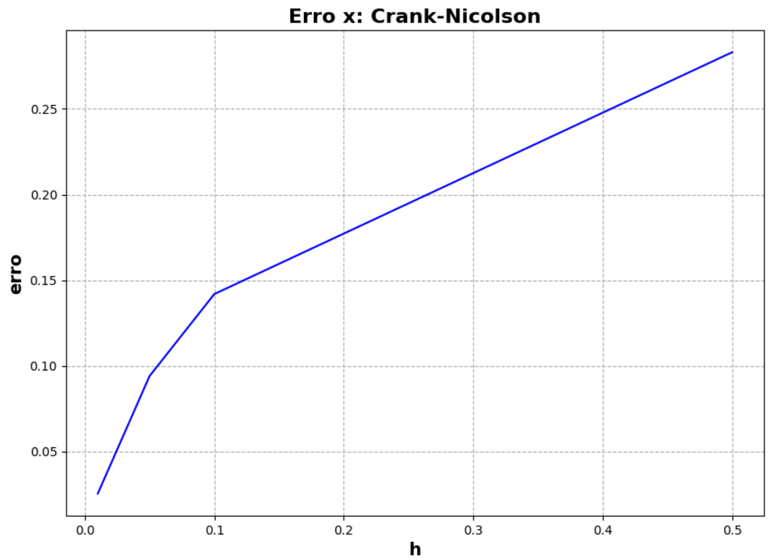

Figura 12: Método de Crank-Nicolson: gráfico de convergência do erro para os valores de h (caso A)

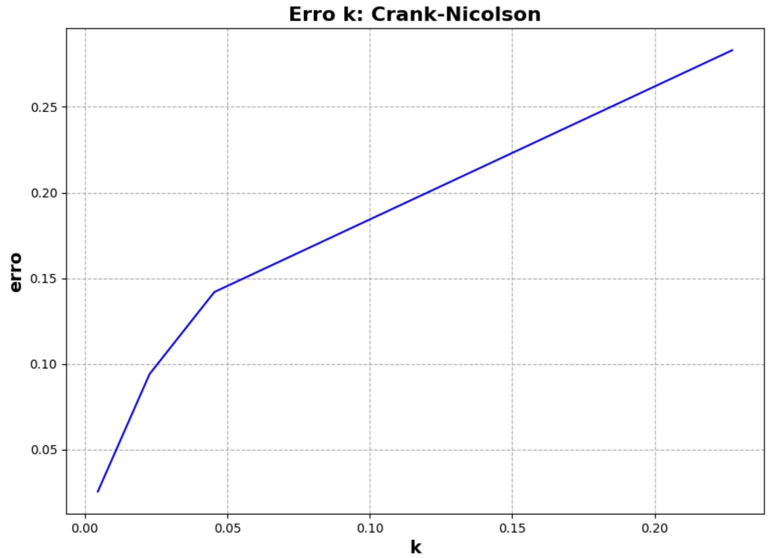

Figura 13: Método de Crank-Nicolson: gráfico de convergência do erro para os valores de k (caso A)

4.2 Gráficos do caso B

Os gráficos de convergência do erro de aproximação de cada método com relação aos valores de k e h, para o caso B, foram os seguintes:

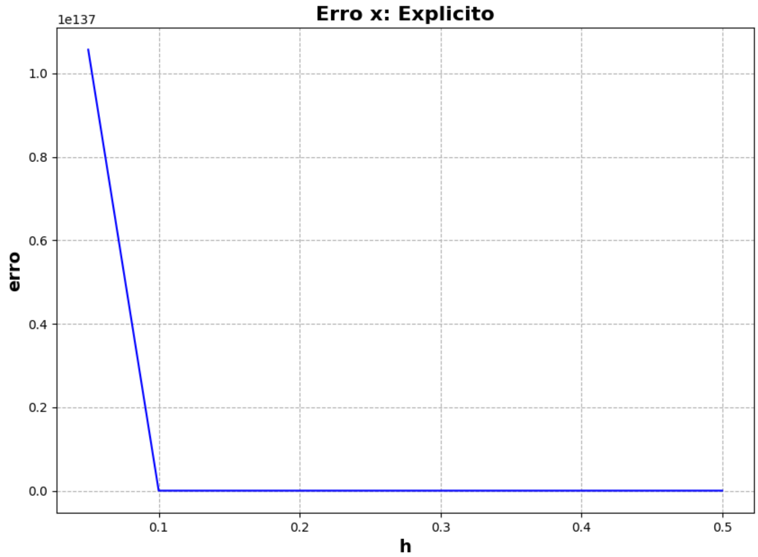

Figura 14: Método Explícito: gráfico de convergência do erro para os valores de h (caso B)

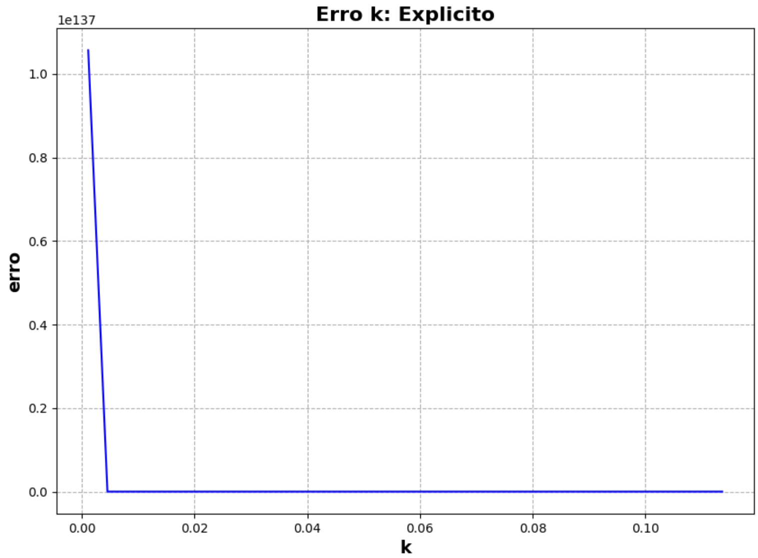

Figura 15: Método Explícito: gráfico de convergência do erro para os valores de k (caso B)

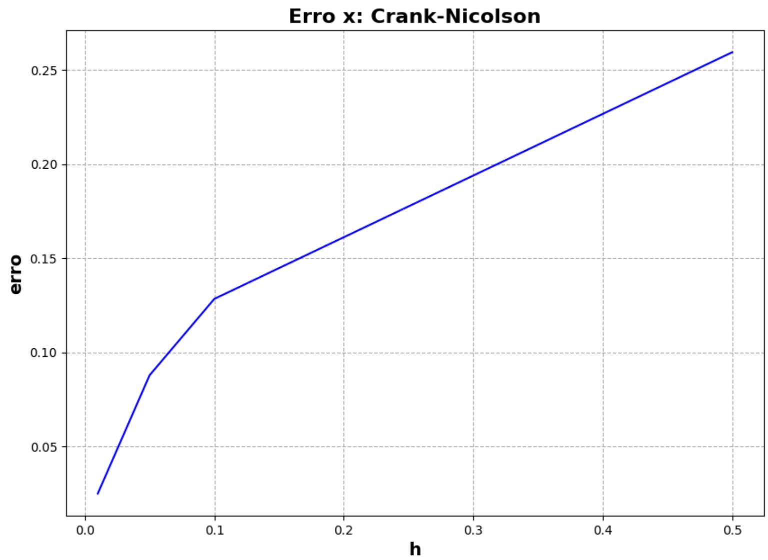

Figura 16: Método de Crank-Nicolson: gráfico de convergência do erro para os valores de h (caso B)

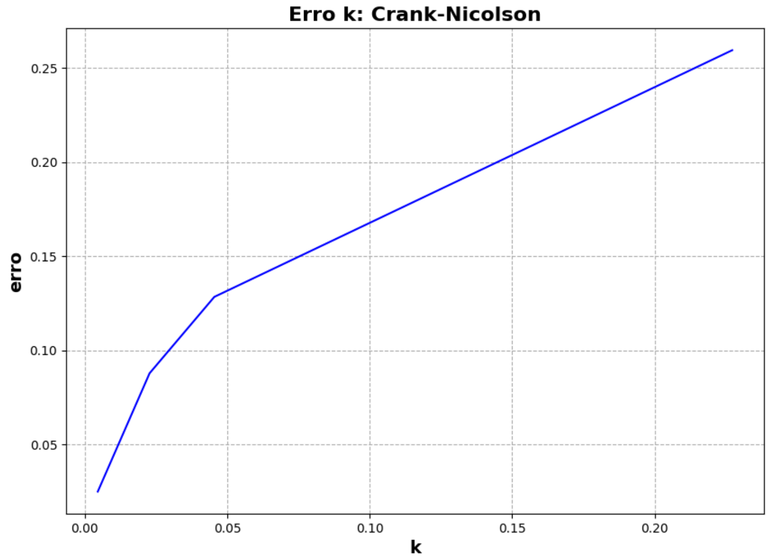

Figura 17: Método de Crank-Nicolson: gráfico de convergência do erro para os valores de k (caso B)

O método de Crank-Nicolson é incondicionalmente estável, consequentemente, seus gráficos de convergência do erro não variam do caso A para o caso B. Por outro lado, o método explícito é condicionalmente estável, o que é evidenciado pelas diferenças entre os gráficos de convergência do erro dos casos A e B.

5 Tabela Comparativa

Considerando três valores para k, $x = 0,5$ e $t = 0,2$ obtemos uma tabela comparativa dos valores das soluções obtidas para cada método implementado. Na tabela, também foram apontados os erros relativos de aproximação com relação a solução exata:

Tabela 1: Tabela Comparativa

k	Método Explícito	Erro de aproximação	Método de Crank-Nicolson	Erro de aproximação
0.1	0.250227	0.709207	0.837693	0.0265026
0.05	0.316353	0.632361	0.816889	0.0506788
0.025	0.354054	0.588547	0.813741	0.0543374

Pela tabela, notamos que o método de Crank-Nicolson apresenta menor erro de aproximação quando comparado com o método explícito, fato que se justifica pela estabilidade incondicional do método. Nota-se que, para todos os valores de k escolhidos a condição de estabilidade do método explícito não é garantida, acarretando piores aproximações. Um contra-exemplo, onde a condição de estabilidade é garantida, ocorre para o valor de k do caso A. Neste caso, o método explícito aproxima muito bem a solução analítica.

6 Conclusão

A partir dos resultados apresentados, notamos que o método de Crank-Nicolson é o que melhor se aproxima dos resultados da solução analítica. Isso pode ser justificado pelo fato do método ser incondicionalmente estável. Por outro lado, vale notar que o método explícito também se aproxima dos resultados da solução analítica, porém, as condição de estabilidade $\frac{k}{h^2} \geq \frac{1}{2}$ deve ser obedecida.

Referências

[1] José A. Culminato. Messias M. Junior. *Discretização de Equações Diferenciais Parciais*. SBM, 2013.

[1]