

MÉTODOS NUMÉRICOS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Equações Elípticas - Equação de Helmholtz

Autores:

Bruno da Freiria Mischiati Borges (12557682)

Gabriel Penido de Oliveira (12558770)

brunofborges@usp.br

gabrielpenido@usp.br

2023 – 1º Semestre

Sumário

1	Objetivo	2
2	Aproximações por diferenças finitas	2
3	Superfícies	5
4	Análise de convergência	7
5	Conclusão	8

1 Objetivo

Neste relatório iremos apresentar uma aproximação por diferenças finitas (de segunda ordem) da seguinte equação de Helmholtz:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0 \quad (1)$$

definida no quadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$, com $k^2 = 10$ e condições de fronteira dadas por:

- $u = 0$ para $y = 1$ e $-1 \leq x \leq 1$,
- $u = \sin(x)$ para $y = -1$ e $-1 \leq x \leq 1$,
- $\nabla u \cdot \mathbf{n} = -0.5u$ para $x = 1$ e $-1 \leq y \leq 1$,
- $\nabla u \cdot \mathbf{n} = -0.5u$ para $x = -1$ e $-1 \leq y \leq 1$,

Iremos discretizar o problema acima utilizando malhas uniformes de diferentes espaçamentos. Para cada malha, iremos encontrar aproximações para os valores da função $u(x, y)$ nos pontos discretizados. Como não possuímos uma solução exata para a equação de Helmholtz, iremos considerar as aproximações em uma malha mais refinada (com menor espaçamento dentre todos os espaçamentos escolhidos) como solução exata (solução de referência).

Além disso, iremos apresentar uma análise de convergência do erro de aproximação (por diferenças finitas) da equação de Helmholtz, conforme utilizamos malhas de diferentes espaçamentos.

Como resultado, iremos apresentar a matriz de coeficientes dos sistema gerado pelas aproximações por diferenças finitas da equação de Helmholtz, as diferentes superfícies geradas pelas malhas criadas e o gráfico de convergência do erro de aproximação.

2 Aproximações por diferenças finitas

Seja $R = [-1, 1] \times [-1, 1]$ a região na qual a equação (1) está definida. Iremos cobrir R por uma malha de espaçamento h formada por $(N + 1)^2$ pontos denotados por (x_i, y_i) . Seja $u_{i,j}$ o valor da solução no ponto (x_i, y_j) e $U_{i,j}$ a solução da equação de diferenças finitas. As aproximações por diferenças finitas de ordem 2 das derivadas de segunda ordem presentes na equação (1) foram as seguintes:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{h^2} \quad (3)$$

Dessa forma, a equação de Helmholtz pode ser aproximada por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u \approx \frac{U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j}[h^2 k^2 - 4] + U_{i,j+1} + U_{i,j-1}}{h^2} \quad (4)$$

Note que a equação (1) possui condições de fronteira de Dirichlet e de Newmann. Nas condições de fronteira de Dirichlet temos os valores exatos de $U_{i,j}$:

- $U_{i,j} = 0$ para $j = N - 1$ e $0 \leq i \leq N - 1$,
- $U_{i,j} = \sin(x)$ para $j = 0$ e $0 \leq i \leq N - 1$

Nas condições de fronteira de Newmann temos que:

- $\nabla u \cdot \mathbf{n} = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) \cdot (1, 0) = \frac{\partial u}{\partial x} = -0,5u$, para $i = N - 1$ e $1 \leq j \leq N - 2$
- $\nabla u \cdot \mathbf{n} = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) \cdot (-1, 0) = -\frac{\partial u}{\partial x} = -0,5u$, para $i = 0$ e $1 \leq j \leq N - 2$

Utilizando uma aproximação de segunda ordem para $\frac{\partial u}{\partial x}$ temos:

- $\frac{\partial u}{\partial x} = -0,5 \Rightarrow \frac{U_{i+1,j} + U_{i-1,j}}{2h} = -0,5 \Rightarrow U_{i+1,j} = U_{i-1,j} - hU_{i,j}$, para $i = N - 1$ e $1 \leq j \leq N - 2$,
- $-\frac{\partial u}{\partial x} = -0,5 \Rightarrow -(\frac{U_{i+1,j} + U_{i-1,j}}{2h}) = -0,5 \Rightarrow U_{i-1,j} = U_{i+1,j} - hU_{i,j}$, para $i = 0$ e $1 \leq j \leq N - 2$

Assim, nas condições em que $i = N - 1$ e $1 \leq j \leq N - 2$ substituímos a equação $U_{i+1,j} = U_{i-1,j} - hU_{i,j}$ na equação (4). Nas condições em que $i = 0$ e $1 \leq j \leq N - 2$ substituímos a equação $U_{i-1,j} = U_{i+1,j} - hU_{i,j}$ na equação (4). Dessa forma, temos diferentes aproximações por diferenças finitas para diferentes pontos da malha:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j}[h^2k^2 - 4] + U_{i,j+1} + U_{i,j-1}}{h^2} = 0, & 1 \leq i \leq N - 2, 1 \leq j \leq N - 2 \\ U_{i,j} = 0, & \text{para } j = N - 1 \text{ e } 0 \leq i \leq N - 1 \\ U_{i,j} = \sin(x), & \text{para } j = 0 \text{ e } 0 \leq i \leq N - 1 \\ \frac{2U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1} + U_{i,j}[h^2k^2 - h - 4]}{h^2} = 0, & \text{para } i = N - 1 \text{ e } 1 \leq j \leq N - 2 \\ \frac{2U_{i+1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1} + U_{i,j}[h^2k^2 - h - 4]}{h^2} = 0, & \text{para } i = 0 \text{ e } 1 \leq j \leq N - 2 \end{array} \right. \quad (5)$$

A equação matricial que representa o sistema (5) é dada por:

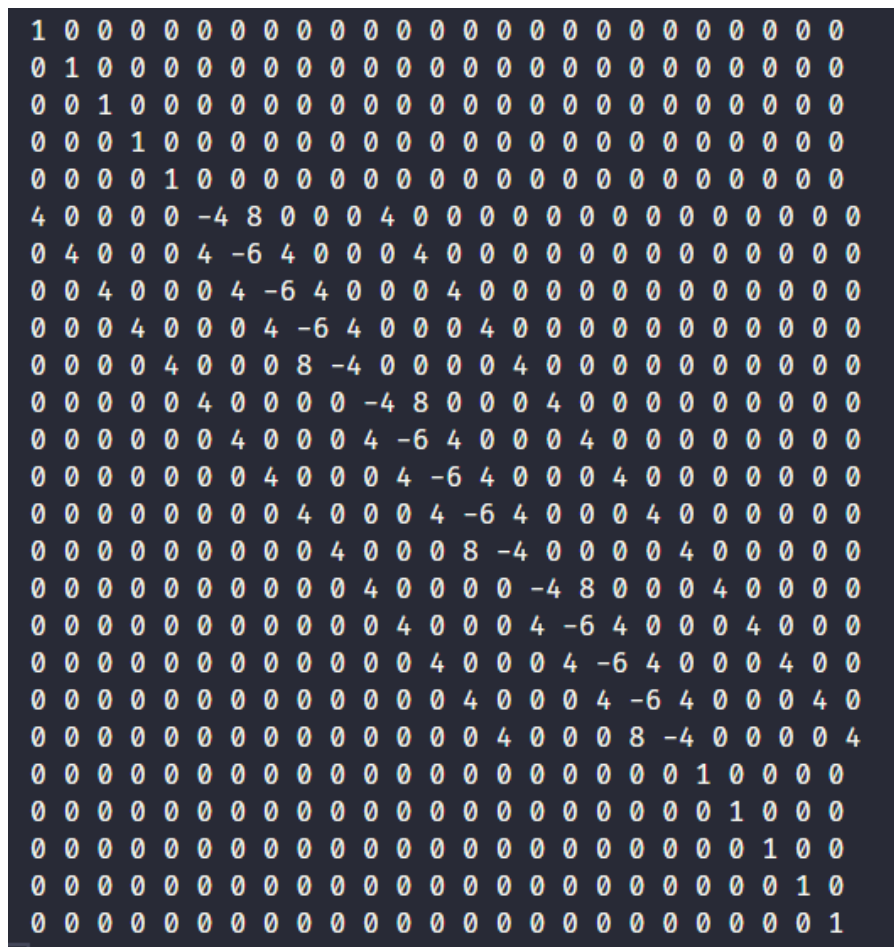
$$AB = F \quad (6)$$

para,

$$B = [U_{0,0}, U_{0,1}, \dots, U_{N-1,N-1}]^T \quad (7)$$

$$F = [\sin(x_0), \sin(x_1), \dots, \sin(x_{N-1}), 0, 0, \dots, 0]^T \quad (8)$$

A matriz A corresponde a matriz dos coeficientes do sistema de equações (6). A título de exemplificação, para o caso em que $h = 1/2$, teremos uma malha 5x5 com 25 pontos. Neste caso, a matriz A é dada por:



3 Superfícies

A partir das aproximações feitas para a equação de Helmholtz e da equação matricial (7) feita na seção 2, foi possível obter os valores dos pontos $U_{i,j}$. Evidentemente, para cada valor de espaçamento h das malhas utilizadas para cobrir a região R , obtivemos diferentes valores para os pontos $U_{i,j}$ e, conseqüentemente, diferentes superfícies que representam a solução aproximada da equação de Helmholtz. Como não possuímos uma solução exata para a equação (1), consideramos uma malha mais refinada, com espaçamento $h = 1/512$, como solução exata (solução de referência). A comparação entre as superfícies obtidas para diferentes valores de h é feita a seguir:

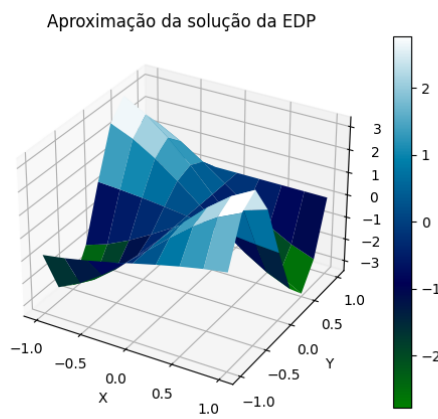


Figura 2: Superfície gerada por uma malha de espaçamento $h = 1/4$

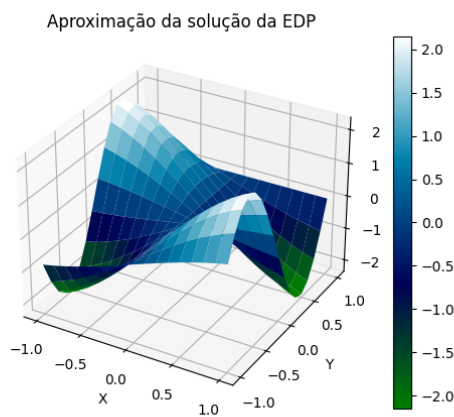


Figura 3: Superfície gerada por uma malha de espaçamento $h = 1/8$

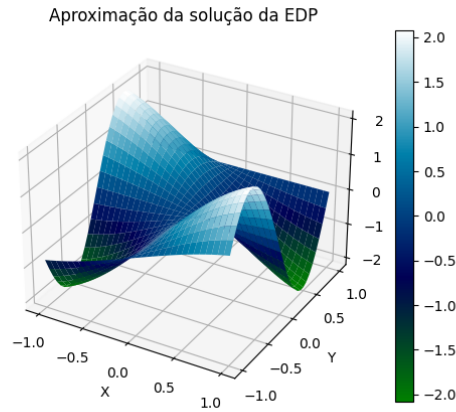


Figura 4: Superfície gerada por uma malha de espaçamento $h = 1/16$

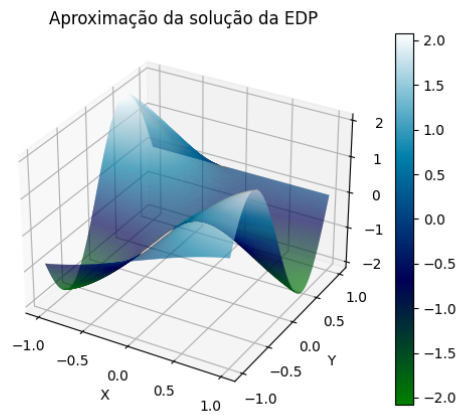


Figura 5: Superfície gerada por uma malha de espaçamento $h = 1/512$. Esta é a superfície de referência, uma vez que as aproximações obtidas para a solução da equação de Helmholtz com uma malha de espaçamento $h = 1/512$ foram consideradas as soluções de referência).

4 Análise de convergência

Para calcular o erro de aproximação entre as soluções encontradas para a equação de Helmholtz e a solução de referência, utilizamos a interpolação cúbica, na região R , da solução de referência e das soluções obtidas para cada valor de espaçamento h . Dessa forma, seja $\hat{U}_{i,j}$ o valor da solução de referência e $U_{i,j}(h)$ o valor da solução aproximada (para um certo valor de h) calculados no ponto (x_i, y_j) - note que, como fizemos a interpolação cúbica, é possível calcular U e \hat{U} em um mesmo ponto. O erro relativo $E_{relativo}(h)$ de aproximação entre as duas soluções foi calculado da seguinte forma:

$$E_{relativo}(h) = \frac{\|\hat{U}_{i,j} - U_{i,j}(h)\|_{\infty}}{\|\hat{U}_{i,j}\|_{\infty}} \quad (9)$$

Sendo $\|\cdot\|_{\infty}$ a norma do máximo.

Dessa forma, para diferentes valores de h obtemos diferentes valores para o erro de aproximação das soluções. O gráfico na escala $\log x \log$ que apresenta o erro relativo em função dos valores de h é apresentado a seguir:

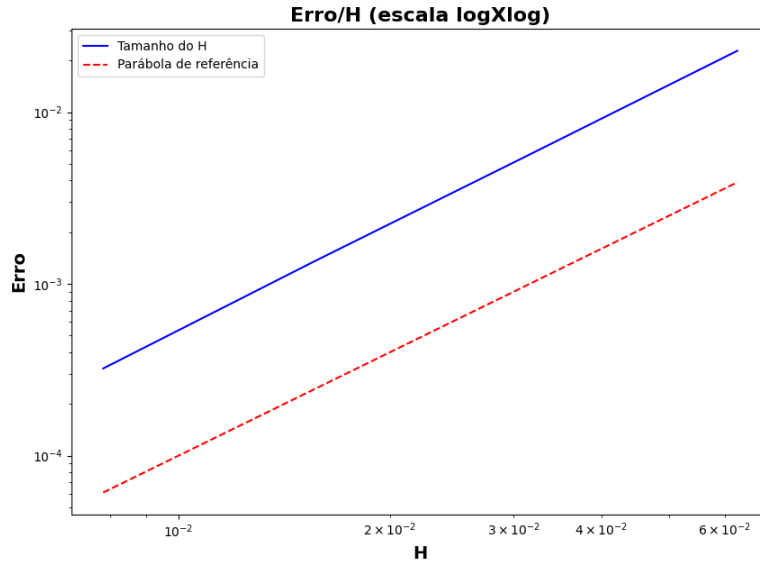


Figura 6: Gráfico do erro em função dos valores de h . Em vermelho (tracejado), está representado uma parábola de referência

5 Conclusão

A partir do gráfico de convergência do erro apresentado, nota-se que a aproximação por diferenças finitas de segunda ordem da equação de Helmholtz converge quadraticamente para a solução de referência - ou pelo menos se aproxima de uma convergência quadrática.

Referências

- [1] José A. Culminato. Messias M. Junior. *Discretização de Equações Diferenciais Parciais*. SBM, 2013.

[1]