

MÉTODOS NUMÉRICOS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Problemas de Valor Inicial

Autores:

Bruno da Freiria Mischiati Borges (12557682)

Gabriel Penido de Oliveira (12558770)

brunofborges@usp.br

gabrielpenido@usp.br

2023 – 1º Semestre

Sumário

1	Objetivo	2
2	Discretização do Problema do Pêndulo e Métodos Implementados	2
2.1	Discretização do Problema	2
2.2	Métodos Implementados	2
3	Gráficos de posição angular e velocidade angular	3
4	Gráficos de Ordem de Convergência Temporal	7
5	Gráficos de Fase	9
6	Tempo computacional	12
7	Limite de estabilidade absoluta	13
8	Conclusão	16

1 Objetivo

O objetivo deste relatório é resolver e analisar o problema do pêndulo, conforme descrito nas especificações fornecidas. Para isso, serão implementados diversos métodos numéricos para a resolução de sistemas de equações diferenciais ordinárias (EDO's). Os métodos a serem implementados são: Euler explícito, Taylor de ordem 2, Adams-Bashforth de 2-passos, Euler implícito e um método preditor-corretor (Euler explícito como preditor e Trapézio como corretor). Para cada método, serão feitos gráficos de convergência do erro de aproximação, gráficos da posição e da velocidade angular, gráficos de fase e análise do tempo de execução de cada método.

2 Discretização do Problema do Pêndulo e Métodos Implementados

2.1 Discretização do Problema

Seja $u(t)$ uma função tal que $u'(t) = f(u(t), t)$, com $u(t)$ dada por:

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q(t) \\ p(t) \end{bmatrix}; \quad u^0 = \begin{bmatrix} q^0 \\ p^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi/4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$f(u(t), t) = \begin{bmatrix} u_2(t) \\ -\text{sen}(u_1(t)) \end{bmatrix} \quad (2)$$

Neste caso, $q(t)$ e $p(t)$ correspondem, respectivamente, a posição angular e a velocidade angular, ambas em função do tempo. Para o problema, foi dado que $q(0) = \pi/4$ e $p(0) = 0$. Seja $\{U^n\}_{n=0 \dots N}$ o conjunto de valores que aproximam os valores da solução exata $u(t_0), u(t_1) \dots u(t_N)$. Considere $[t_0, t_N]$ o intervalo de tempo discretizado da forma $t_n = t_0 + nh$, sendo h o passo da solução.

2.2 Métodos Implementados

Os métodos implementados para aproximar o problema do pêndulo foram os seguintes:

- Euler Explícito: $U^{n+1} = U^n + hf(U^n, t_n)$;
- Taylor de Ordem 2: $U^{n+1} = U^n + hf(U^n, t_n) + \frac{h^2}{2}(\frac{\partial f}{\partial u}f + \frac{\partial f}{\partial t})$
- Euler Implícito: $U^{n+1} = U^n + hf(U^{n+1}, t_{n+1})$
- Método Preditor Corretor:

$$\begin{cases} U^{[n+1],[s+1]} = U^n + \phi_C(U^{n+1,[s]}, U^n, t_n, h) \\ U^{[n+1],[0]} = U^n + \phi_P f(U^n, t_n, h) \end{cases} \quad (3)$$

Sendo ϕ_P o método preditor (Euler Explícito) e ϕ_C o método corretor (Método dos Trapézios).

- Método dos Trapézios: $U^{n+1} = U^n + \frac{h}{2}(f(U^{n+1}, t_{n+1}) + f(U^n, t_n))$;
- Método de Adams-Bashforth de 2-passos: $U^{n+2} - U^{n+1} = \frac{h}{2}(-f(U^n, t_n) + 3f(U^{n+1}, t_{n+1}))$.

3 Gráficos de posição angular e velocidade angular

A partir dos vetores da solução aproximada U^n obtidos em cada método, é possível plotar os gráficos da posição ($u_1(t) = q(t)$) e da velocidade ($u_2(t) = p(t)$) em função do tempo no problema do pêndulo. Os gráficos obtidos para cada método (com valor de $h = 0,1$) e para a solução de referência foram os seguintes:

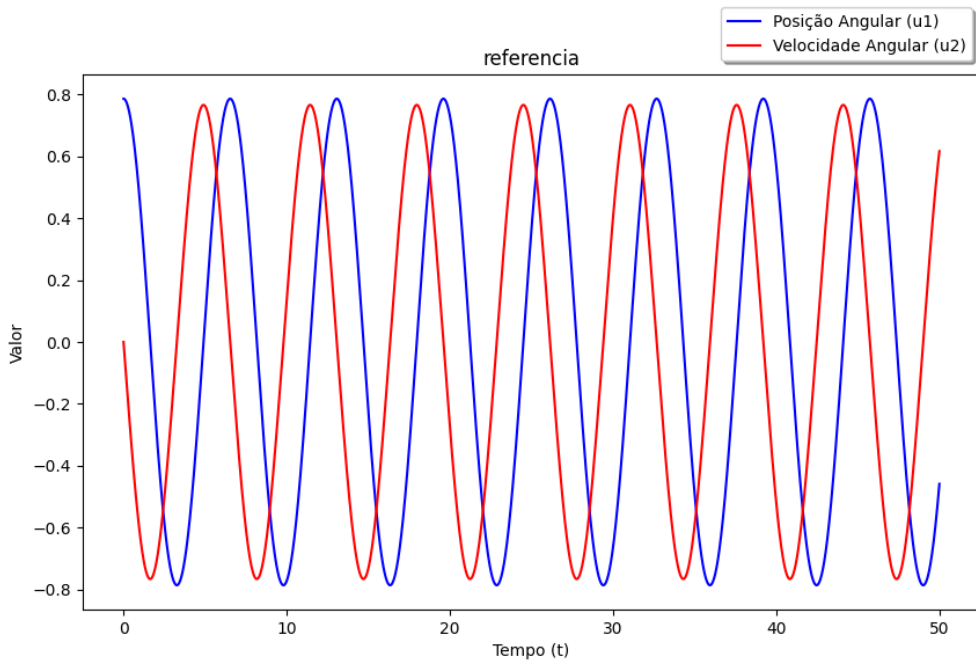


Figura 1: Solução de Referência

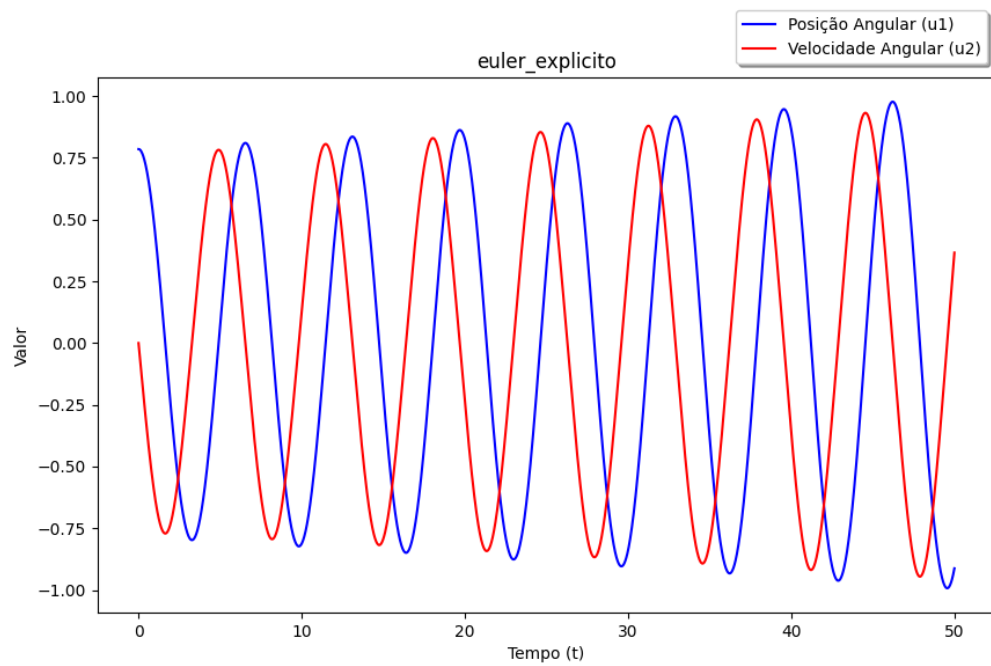


Figura 2: Euler Explícito

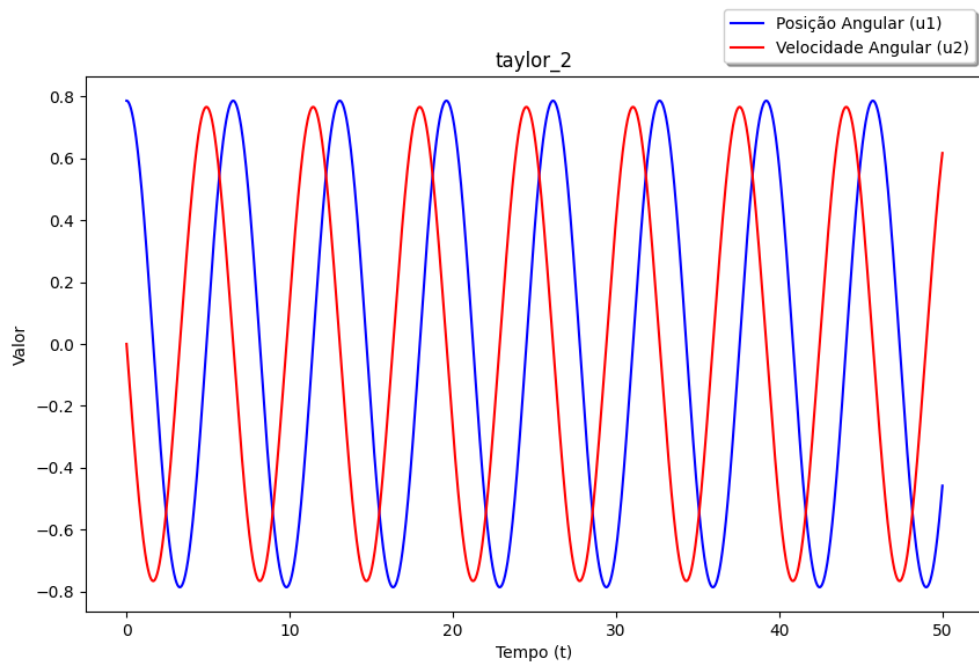


Figura 3: Taylor de Ordem 2

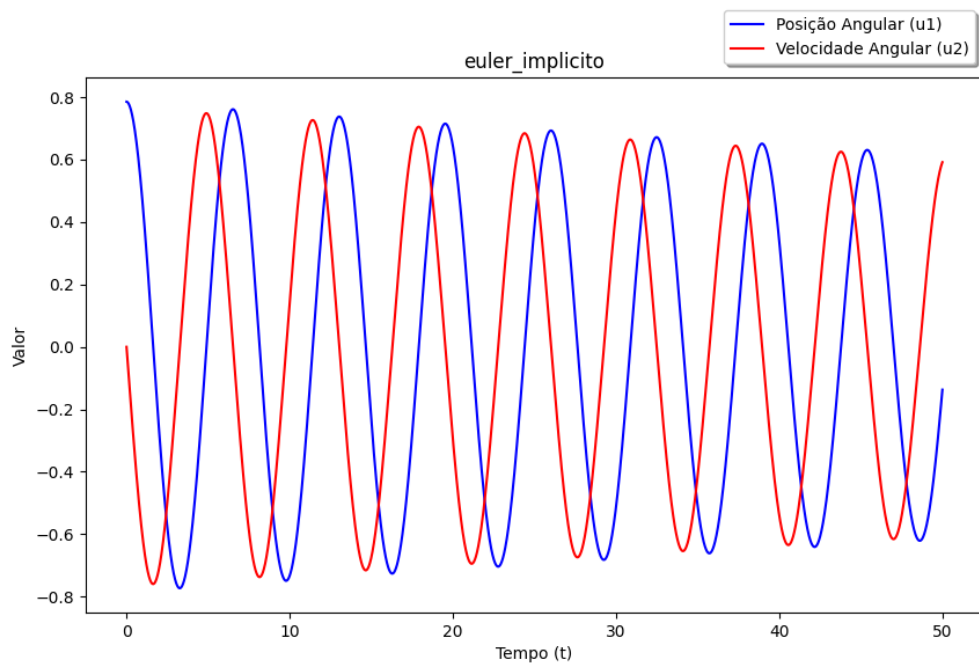


Figura 4: Euler Implícito

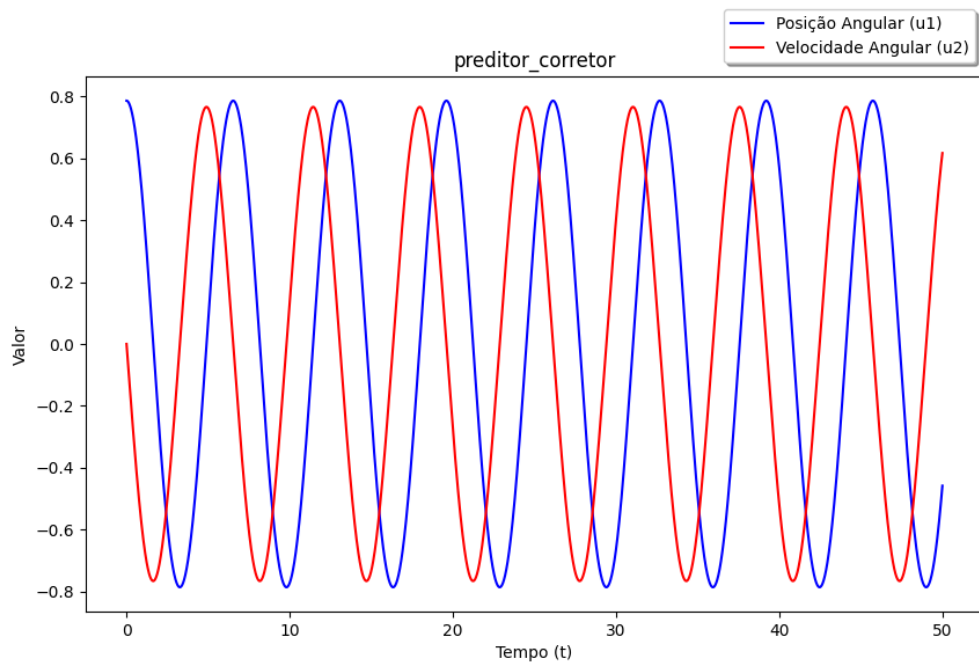


Figura 5: Preditor-Corretor

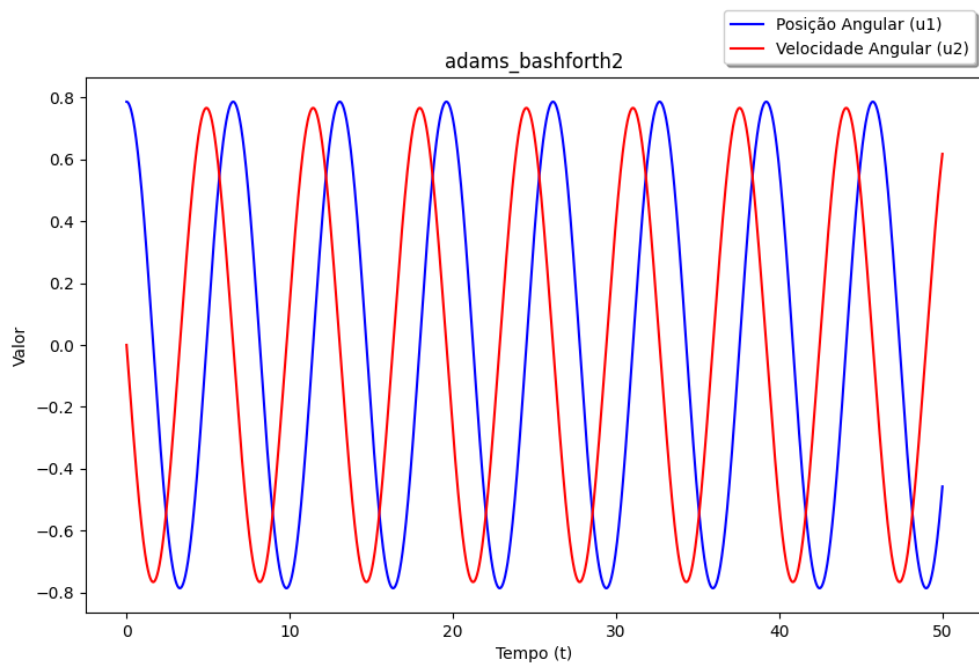
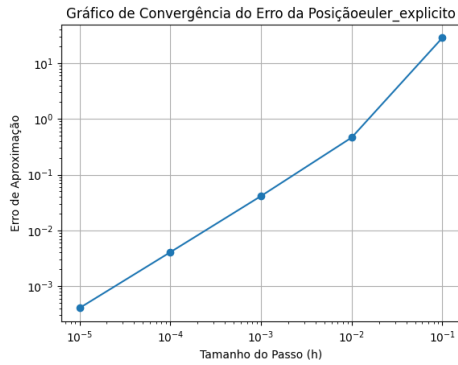


Figura 6: Adams-Bashforth de 2-passos

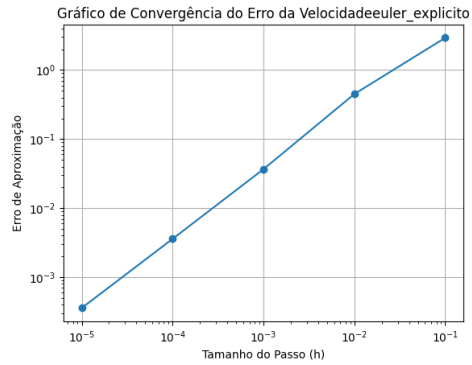
Visualmente, os métodos de Taylor de Ordem 2, Preditor-Corretor e Adams-Bashforth de 2 passos apresentam maior similaridade com a solução de referência. O método de Euler Explícito, por sua vez, apresenta crescimento desordenado conforme o tempo aumenta, se distanciando da solução exata. Por fim, o método de Euler Implícito apresenta crescimento do valor da solução no começo do intervalo de tempo discretizado, porém, com o passar do tempo, o método se aproxima da solução exata.

4 Gráficos de Ordem de Convergência Temporal

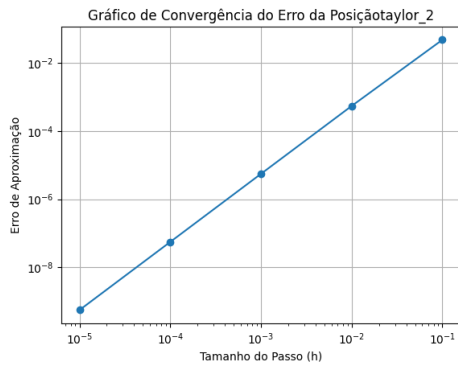
Os gráficos de convergência do erro de aproximação de cada método para a posição e para a velocidade foram os seguintes:



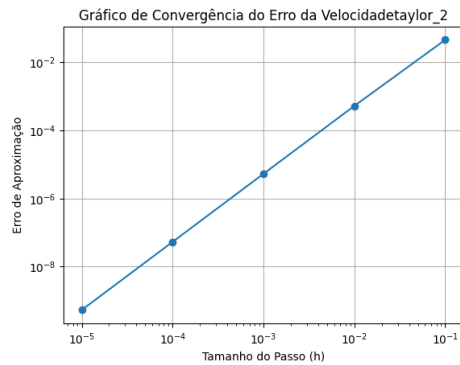
(a) Convergência do método de Euler Explícito para a posição ($O(h)$).



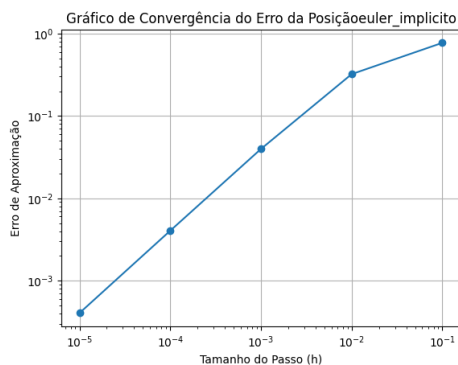
(b) Convergência do método de Euler Explícito para a velocidade ($O(h)$).



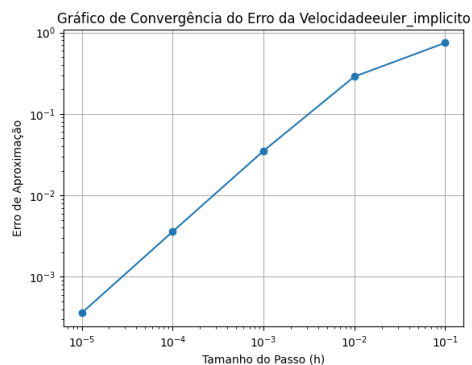
(a) Convergência do método de Taylor de Ordem 2 para a posição ($O(h^2)$).



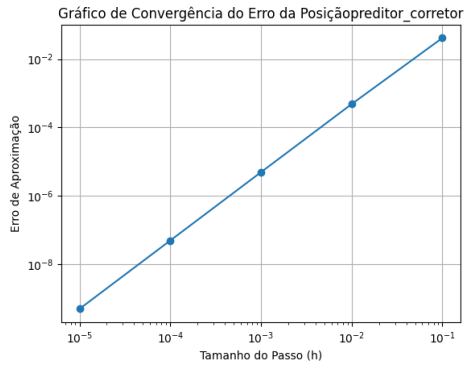
(b) Convergência do método de Taylor de Ordem 2 para a velocidade ($O(h^2)$).



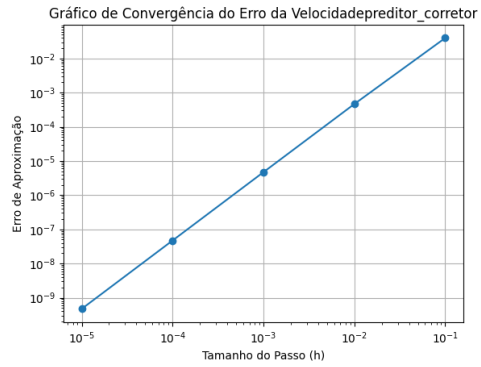
(a) Convergência do método de Euler Implícito para a posição ($O(h)$).



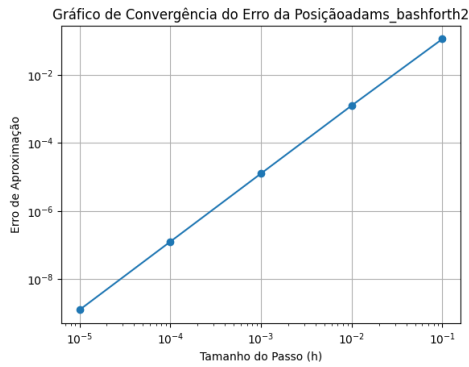
(b) Convergência do método de Euler Implícito para a velocidade ($O(h)$).



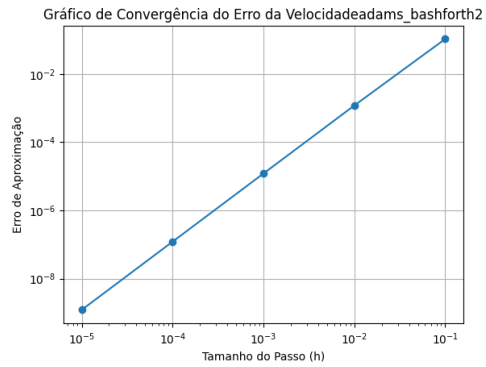
(a) Convergência do método Predictor-Corretor para a posição ($O(h^2)$).



(b) Convergência do método Predictor-Corretor para a velocidade ($O(h^2)$).



(a) Convergência do método de Adams-Bashforth (2-passos) para a posição ($O(h^2)$).



(b) Convergência do método de Adams-Bashforth (2-passos) para a velocidade ($O(h^2)$).

Conforme identificado na legenda de cada gráfico, nota-se que a ordem de convergência de todos os métodos apresentados é condizente com a ordem de convergência esperada.

5 Gráficos de Fase

Os gráficos de fase (velocidade x posição) das soluções obtidas para cada método (com valor de $h = 0,1$) e da solução de referência foram os seguintes:

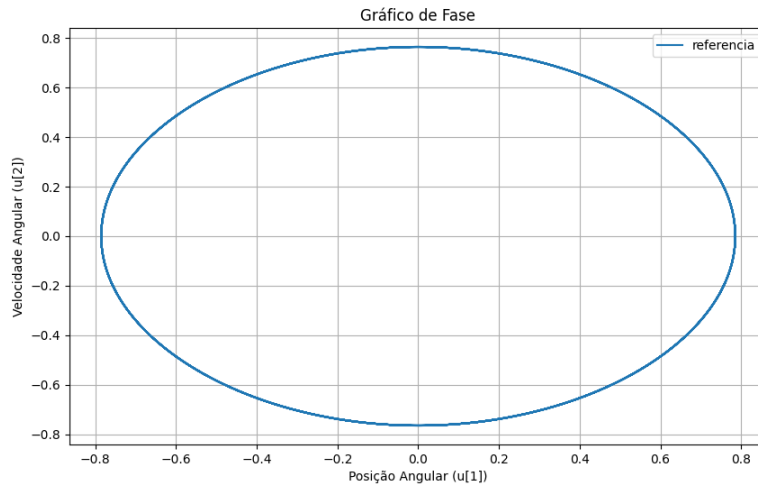


Figura 12: Gráfico de fase: Solução de Referência

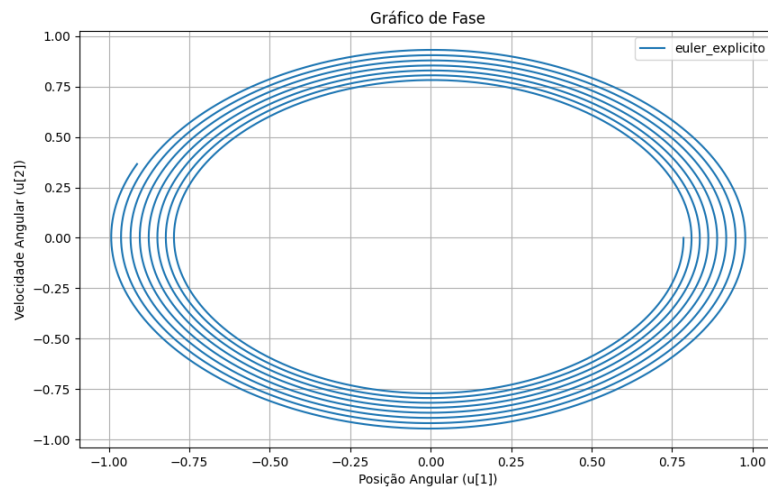


Figura 13: Gráfico de fase: Euler Explícito

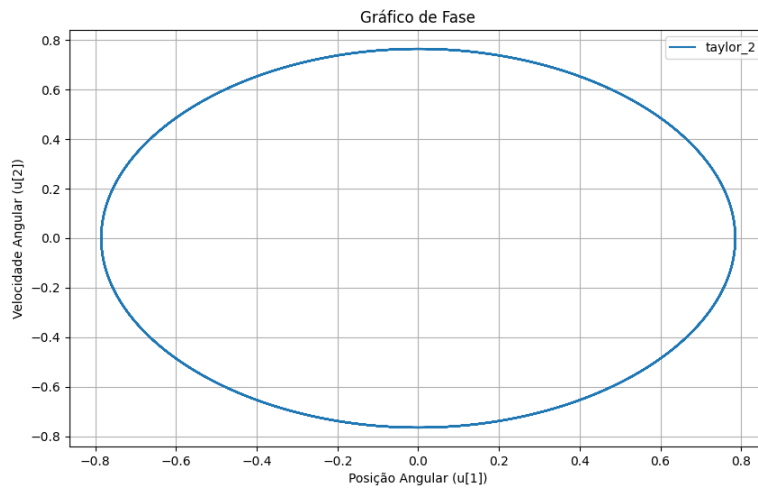


Figura 14: Gráfico de fase: Taylor de Ordem 2

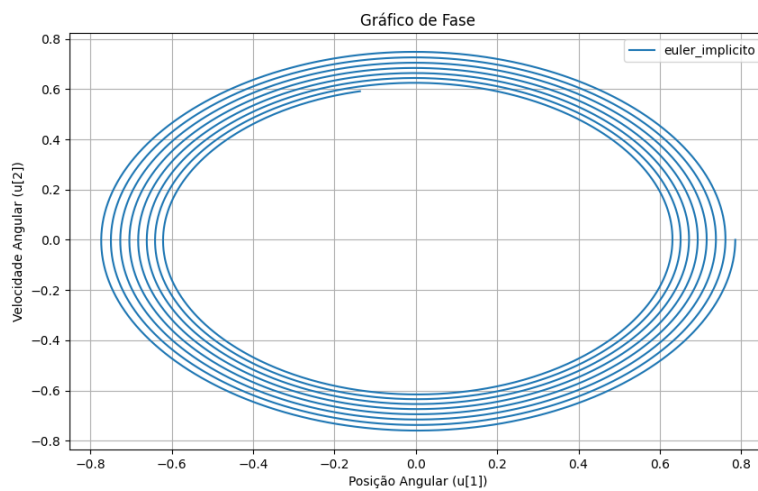


Figura 15: Gráfico de fase: Euler Implícito

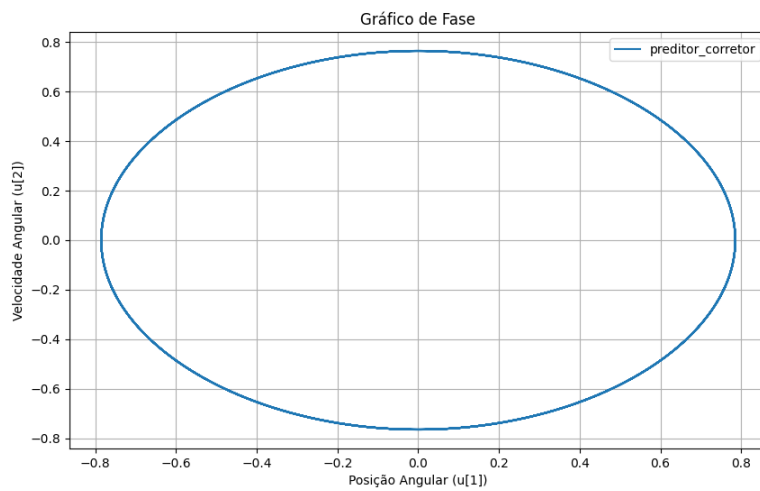


Figura 16: Gráfico de fase: Predito-Corretor

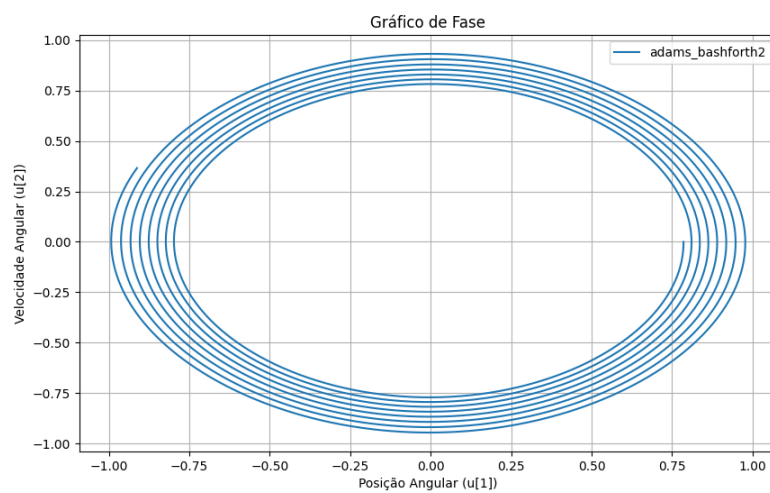


Figura 17: Gráfico de fase: Adams-Bashforth (2-passos)

6 Tempo computacional

O tempo computacional utilizado na execução de cada método é ilustrado na seguinte imagem:

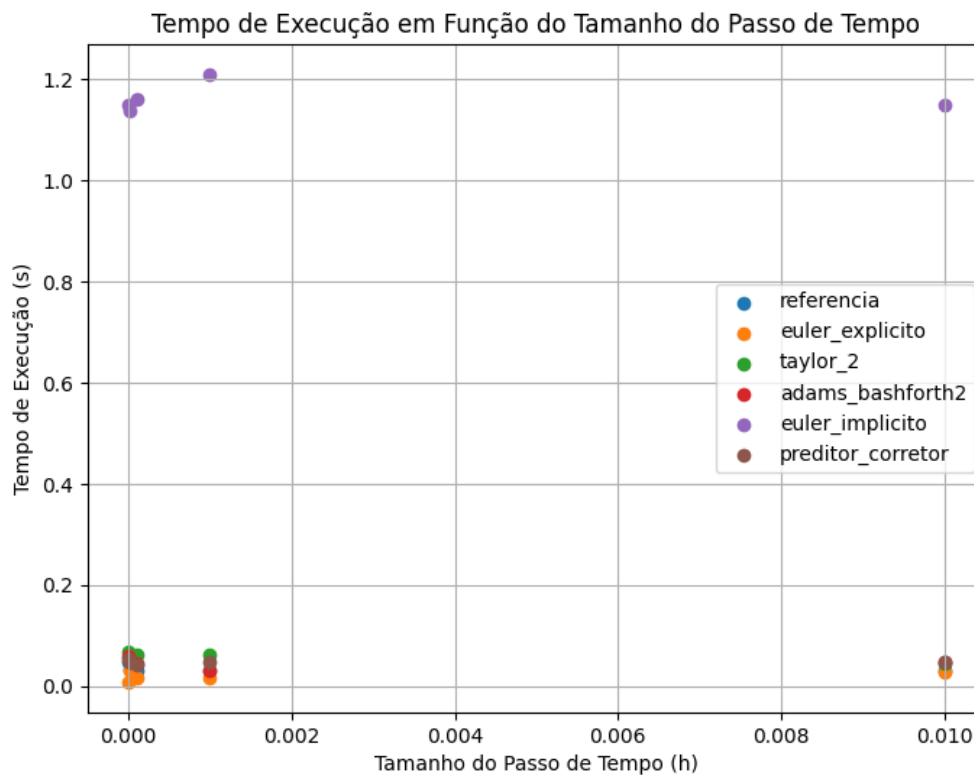


Figura 18: Tempo de Execução em função do tamanho do passo de tempo

No geral, o método que apresentou maior tempo de execução foi o método de Euler Implícito, para todos os tamanhos de passo utilizados. Por outro lado, o método que apresentou menor tempo de execução foi o método de Euler explícito. Os métodos de Taylor de Ordem 2, Preditor-Corretor e Adams-Bashforth de 2 passos apresentaram tempos de execução similares.

7 Limite de estabilidade absoluta

Na prática, nota-se que para valores de h maiores que 0,1 alguns dos métodos implementados apresentam crescimento exponencial descontrolado. Entretanto, o método de Euler Implícito não apresenta este problema. Por se tratar de um método implícito, ele não cresce descontroladamente quando aumentamos o valor de h , uma vez que ele é absolutamente estável. Estes resultados são exemplificados para os gráficos de fase obtidos quando utilizamos o valor de h igual a 0,5.

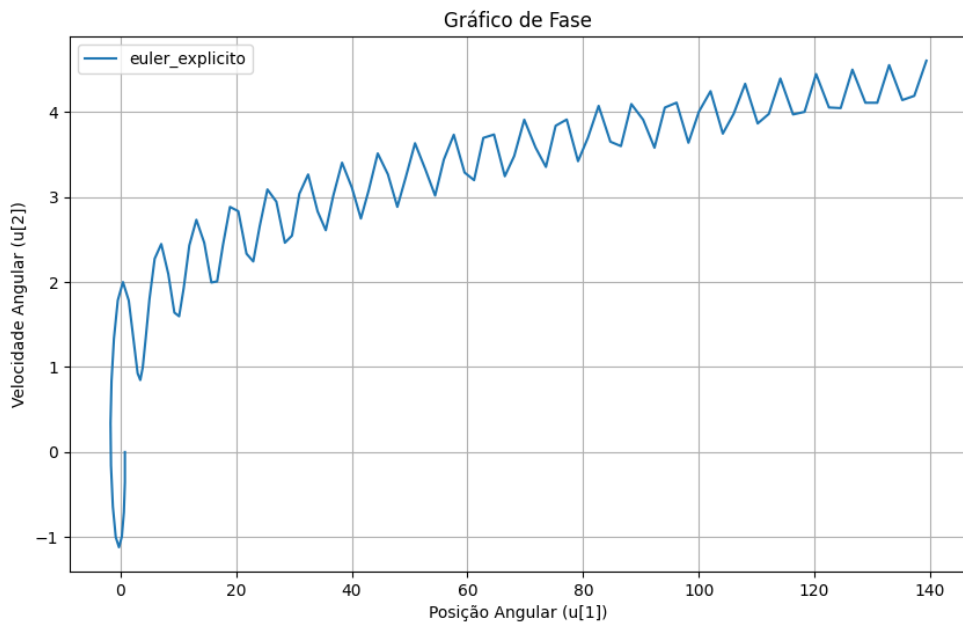


Figura 19: Limite de estabilidade para o método de Euler Explícito

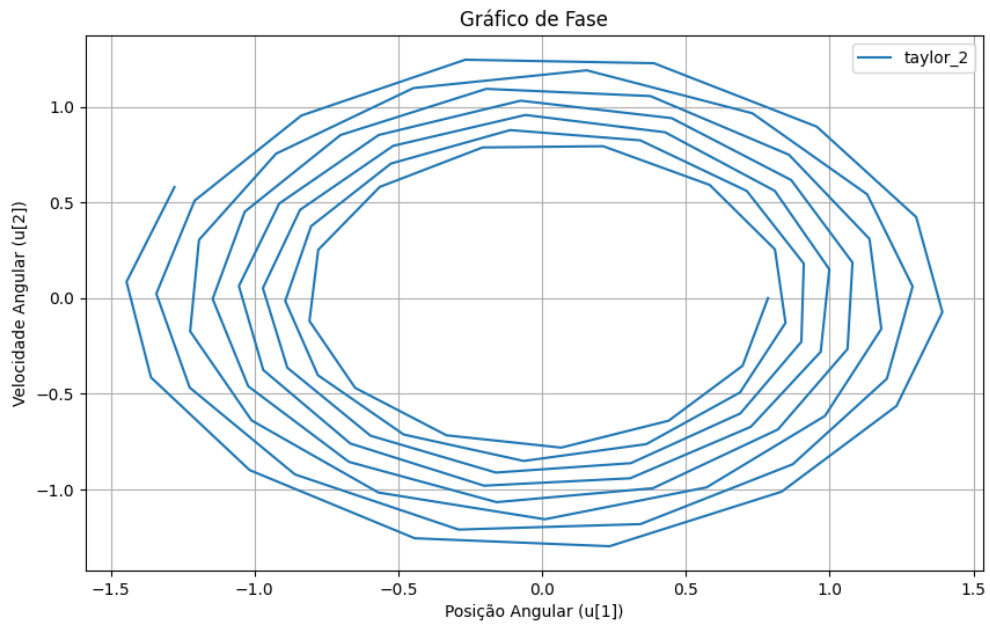


Figura 20: Limite de estabilidade para o método de Taylor de Ordem 2

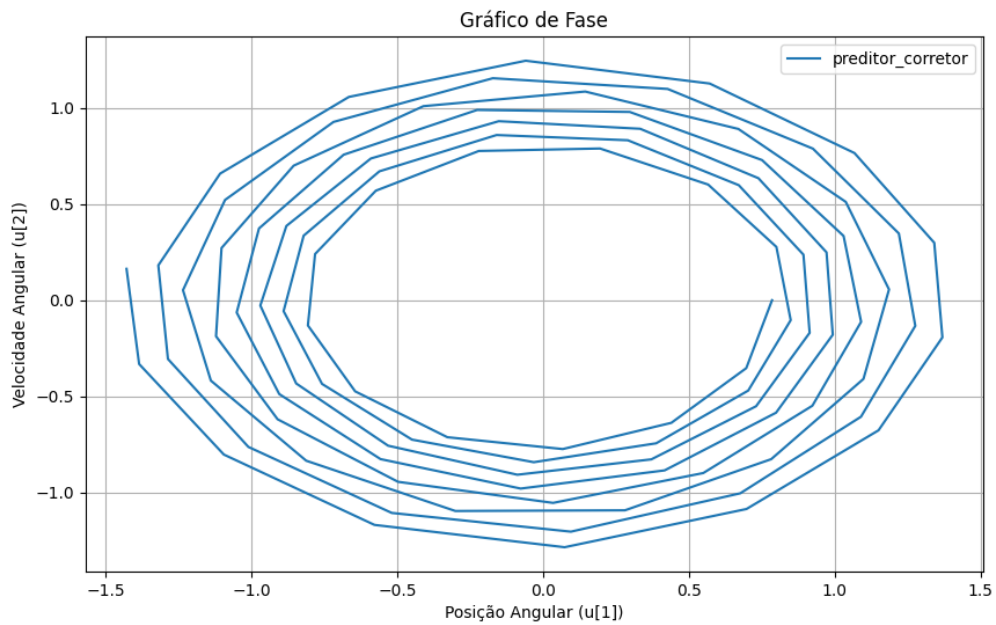


Figura 21: Limite de estabilidade para o método Preditor-Corretor

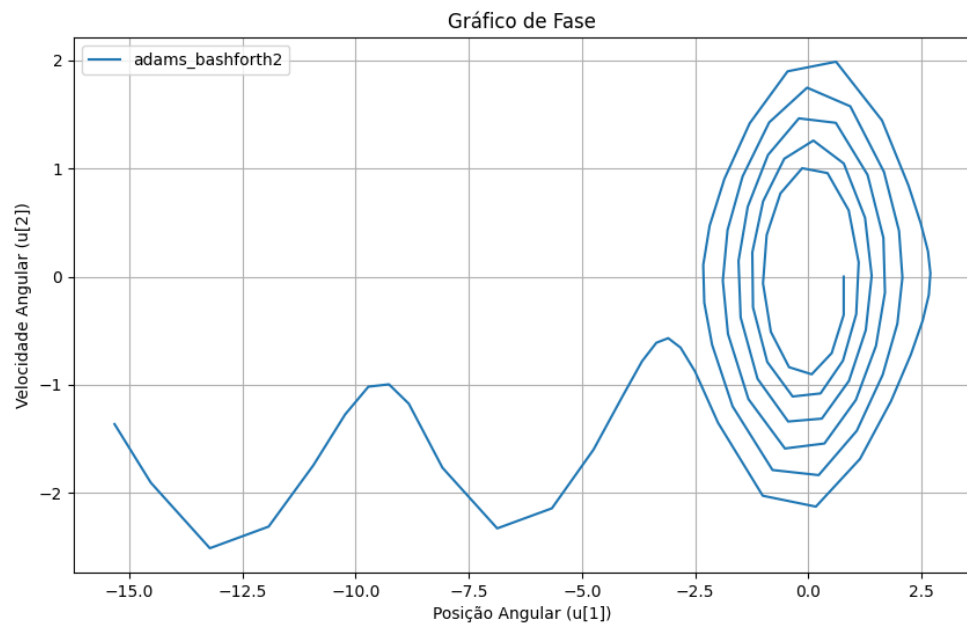


Figura 22: Limite de estabilidade para o método de Adams-Bashforth de 2 passos

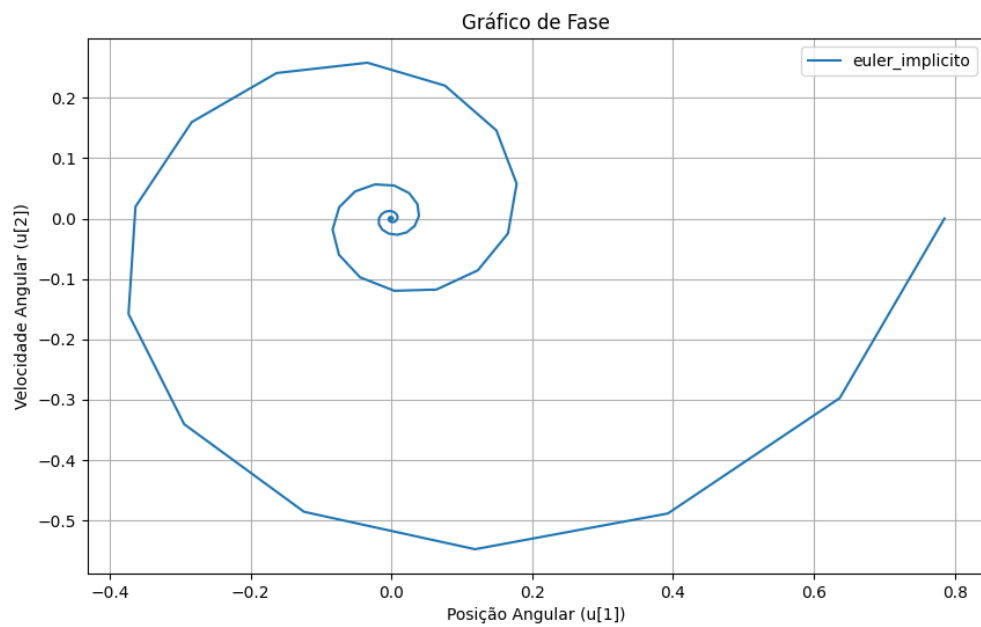


Figura 23: Limite de estabilidade para o método de Euler Implícito

8 Conclusão

A partir dos resultados apresentados, o método mais vantajoso para resolver o problema do pêndulo seria o de Taylor de Ordem 2. O método apresentou tempos de execução parecidos com os tempo de execução dos outros métodos implementados, além disso, ele aproxima muito bem a solução de referência, como evidenciado pelo seu gráfico de fase e pelos seus gráficos de posição angular e velocidade angular em função do tempo. Por fim, o método de Taylor de Ordem 2 possui ordem de convergência quadrática, se aproximando mais rapidamente do valor da solução exata quando comparado com os outros métodos.

Outro método vantajoso para resolver o problema proposto seria o método Preditor-Corretor. Este método também possui ordem de convergência quadrática, com tempo de execução parecido com o tempo de execução dos outros métodos. Além disso, seu gráfico de fase e os gráficos de posição e velocidade em função do tempo são muito parecidos com a solução de referência.

Referências

- [1] José A. Culminato. Messias M. Junior. *Discretização de Equações Diferenciais Parciais*. SBM, 2013.

[1]