Trabalho #2 - Problemas de Valor inicial

1. Informações Preliminares

A situação descreve um movimento periódico de um pêndulo simples, no qual uma partícula está presa a uma haste inextensível e de massa desprezível de comprimento L. Considere que o movimento ocorre em um plano vertical e defina $\theta(t)$ o ângulo do pêndulo em relação ao eixo vertical no tempo t, conforme ilustrado na Figura 1. Ao aplicar as Leis de Newton, ignorando forças de atrito e resistência do ar, deduz o seguinte modelo, para o qual se considerou $g/L = 1$:

$$\theta''(t) + \sin(\theta(t)) = 0. \tag{1}$$

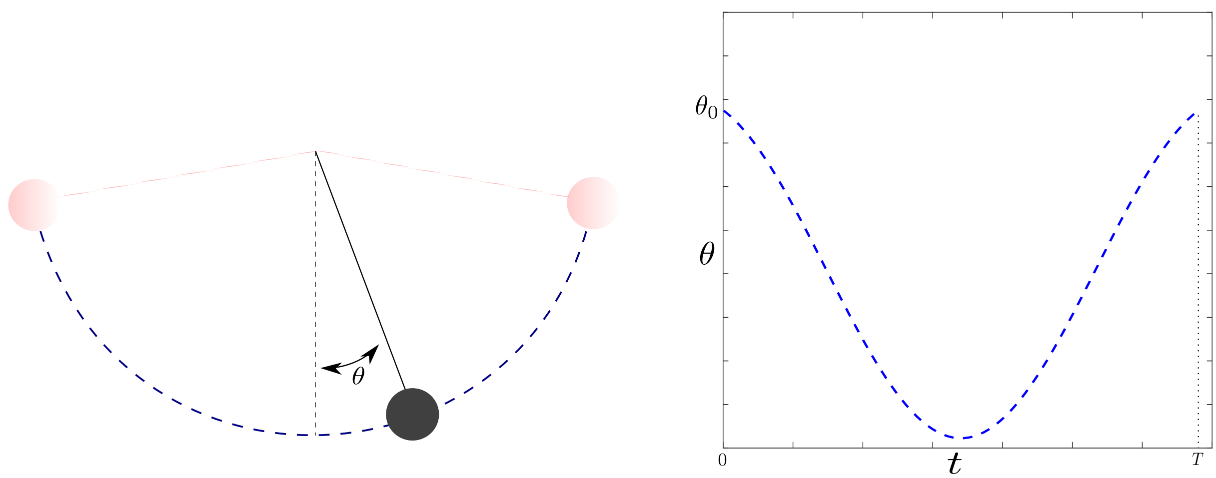

Figura 1: Representação geométrica do movimento periódico de um pêndulo como objeto (à esquerda); e como função periódica (à direita).

Para que a notação seja consistente com a apresentação disposta nos slides em aula (Slide #5), considere a formulação da equação (1) com variáveis p e q, dada por:

$$q''(t) + \sin(q(t)) = 0. \tag{2}$$

Sejam as oscilações nas seguintes condições iniciais

$$q(0) = q_0 \quad \text{e} \quad q'(0) = 0, \tag{3}$$

onde o ângulo q_0 é a amplitude inicial da oscilação.

Uma solução para a equação (2), sob as condições iniciais dadas, pode ser expressa na forma:

$$q(t) = 2\arcsin\left\{\sin\left(\frac{q_0}{2}\right)\operatorname{sn}\left[K\left(\sin^2\left(\frac{q_0}{2}\right)\right) - t;\ \sin^2\left(\frac{q_0}{2}\right)\right]\right\}. \tag{4}$$

Desenvolvimento detalhado que resulta nessa solução está disponível em [1, 2]. Na equação (4), as expressões $\mathrm{sn}(\cdot\,;\,\cdot)$ e $K(\cdot)$ são, respectivamente, a função elíptica de Jacobi e a integral elíptica completa de primeira ordem. Em MATLAB/Octave e em Python, existem as correspondentes:

- $\mathrm{sn}(u;m)$: ellipj(u,m);
- $K(m)$: ellipke(m) (MATLAB) e ellipk(m) (Python).

Em anexo, seguem os arquivos "RefSolution.m"e "RefSolution.py"que podem ser usados para gerar soluções de referência necessárias para estudos requeridos descritos a seguir.

Referências

[1] A. Beléndez, C. Pascual, D. I. Méndez, T. Beléndez, and C. Neipp. Exact solution for the nonlinear pendulum. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 29(4):645–648, 2007.

[2] K. Johannessen. An analytical solution to the equation of motion for the damped nonlinear pendulum. *European Journal of Physics*, 35:035014 (13pp), 2014.

2. Especificações sobre o trabalho

2.1 O que deve ser feito

Resolva o problema do pêndulo disposto na equação (2) como um sistema de duas EDO's de primeira ordem, tal como está definido no slide #5 sobre Problemas de Valor Inicial. Como valores iniciais, no tempo $t = 0$, considere que o pêndulo parte do repouso com $q_0 = \frac{\pi}{4}$.

Para resolver o problema, e posterior análise dos resultados, você deverá:

1. implementar os métodos Euler explícito, Taylor de ordem 2 e Adams-Bashforth de 2-passos;

2. implementar os métodos Euler implícito (resolvendo o sistema pelo método de Newton) e um método Preditor-Corretor (Euler explícito como preditor e Trapézio como corretor).

3. resolver o problema com todos os métodos implementados e produzir gráficos da velocidade angular e da posição angular com relação ao tempo (escolha um tempo final maior que 15 e menor do que 50 para gerar estes resultados);

4. fazer gráficos de ordem de convergência temporal usando a função de referência fornecida para cada um dos métodos (utilize pelo menos 5 malhas diferentes para capturar o comportamento assintótico do erro, e verificar se ele está tendendo a zero com a ordem esperada);

5. fazer um gráfico de fase para as soluções obtidas por cada um dos métodos implementados (utilize um valor para o tempo final que achar interessante);

6. utilizar pelo menos três passos de tempo distintos para quantificar qual o tempo computacional gasto pelos métodos implementados para resolver o mesmo problema (escolha passos de tempo para os quais seja possível identificar a diferença de performance entre os métodos); represente os resultados da forma que considerar mais interessante (com o uso de gráfico, tabela, etc.);

7. verificar, na prática, o limite de estabilidade absoluta para os métodos explícitos. Para tanto, vá aumentando gradativamente o passo h, até que a solução apresente crescimento exponencial descontrolado. Verifique também através do mesmo procedimento que o método de Euler implícito não sofre deste mesmo problema;

8. comentar brevemente, a partir dos resultados mostradas, e do seu ponto de vista, quais métodos seriam mais vantajosos, dentre os utilizados, para resolver o problema estudado;

9. Redigir um documento em PDF que contenha: breve relatório que inclua descrição de como o problema tratado para ser resolvido por cada método; os resultados solicitados com gráficos e comentários. Não se esqueça de se atentar à qualidade da escrita, à disposição do texto (justificado, com tipo e tamanho da fonte padronizados) e à legibilidade das imagens inseridas (lembre-se de incluir legendas caso haja mais de uma curva no mesmo plano). Inclua também, neste PDF, comentários que julgar necessários.

2.2 O que deve ser entregue

1. Documento em pdf elaborado;
2. Códigos utilizados.