Devoir maison n$^{\text{o}}$ 1

Tous les résultats seront encadrés. +1 point sur la note finale si les résultats sont encadrés, −1 point si non. −1 point par jour non rendu. 1 point sera affectés à la propreté de la copie. Ce devoir maison (DM) sera suivi du devoir surveillé (DS) n$^{\text{o}}$ 2. Si la note de ce DM est supérieure à la note de DS, le DM comptera dans votre moyenne avec un coefficient 1. Si la note de DS est supérieure à la note de DM, le DM comptera comme un bonus coefficient 2 dans votre moyenne finale. Dans ce cas là, ce DM ne sera donc compté que s'il affecte positivement votre moyenne finale.

En résumé, vous avez tout intérêt à faire ce devoir **sérieusement et de comprendre ce que vous faites** afin de vous préparer au mieux pour le devoir surveillé.
Le devoir surveillé sera compbtabilisé coefficient 5.

Un conseil : N'attendez pas les derniers jours pour faire ce DM, ou vous risquerez d'être submergé à la dernière minute. Faites-le plutôt régulièrement, à hauteur d'au moins un exercice par jour.

Exercice 1

(Calcul numérique) Calculer en donnant les résultats sous la forme d'une fraction irréductible. Détaillez les calculs.

$$a = \frac{2+\frac{2}{3}}{3-\frac{1}{2}} \qquad c = \frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}{\frac{5}{4}-4} \qquad e = \left(2-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{5}{2}\times 3-\frac{2}{3}\right)$$

$$b = \left(\frac{3}{2}+2\right)\times\frac{2}{5} \qquad d = \frac{2+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}-5\times\frac{2}{3}} \qquad f = \frac{1}{\frac{2}{3}}\times\frac{\frac{3}{4}}{5}.$$

Solution:

$$a = \frac{2+\frac{2}{3}}{3-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{6+2}{3}}{\frac{6-1}{2}} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{5}{2}} = \frac{8}{3}\times\frac{2}{5} = \boxed{\frac{16}{15}}.$$

$$b = \left(\frac{3}{2}+2\right)\times\frac{2}{5} = \left(\frac{3}{2}+\frac{4}{2}\right)\times\frac{2}{5} = \frac{7}{2}\times\frac{2}{5} = \boxed{\frac{7}{5}}.$$

$$c = \frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}{\frac{5}{4}-4} = \frac{\frac{4}{6}+\frac{3}{6}}{\frac{5}{4}-\frac{16}{4}} = \frac{\frac{7}{6}}{-\frac{11}{4}} = \frac{7}{6}\times\frac{-4}{11} = \frac{7}{3}\times\frac{-2}{11} = \boxed{-\frac{14}{33}}.$$

$$d = \frac{2+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}-5\times\frac{2}{3}} = \frac{\frac{6+1}{3}}{\frac{1}{2}-\frac{10}{3}} = \frac{\frac{7}{3}}{\frac{3-20}{6}} = \frac{\frac{7}{3}}{\frac{-17}{6}} = \frac{7}{3}\times\frac{6}{-17} = 7\times\frac{2}{-17} = \boxed{-\frac{14}{17}}.$$

$$e = \left(2-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{5}{2}\times 3-\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{6-2}{3}\right)\left(\frac{15}{2}-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}\times\left(\frac{45}{6}-\frac{4}{6}\right) = \frac{4}{3}\times\frac{41}{6} = \frac{2}{3}\times\frac{41}{3} = \boxed{\frac{82}{9}}.$$

$$f = \frac{1}{\frac{2}{3}}\times\frac{\frac{3}{4}}{5} = \frac{3}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{5} = \boxed{\frac{9}{40}}.$$

Exercice 2

(Simplifications de puissances) Simplifier les expressions suivantes :

$$a = \left(2^3 \times 5^2\right)^3 \times 2^4 \times 5^2 \qquad b = \left(\frac{3^2}{2^3}\right)^4 \times \left(\frac{2}{3^3}\right)^2 \qquad c = 16^3 \times 27^2$$

$$d = \frac{8^3 \times 4^2}{32^4} \qquad e = \frac{\left(2^4 \times 3^2\right)^2}{\left(2^3 \times 3\right)^3} \qquad f = \frac{\left(x^2y\right)\left(xy^3\right)^2}{\left(x^3y^2\right)^3}$$

Solution:

$$a = \left(2^3 \times 5^2\right)^3 \times 2^4 \times 5^2 = 2^9 \times 5^6 \times 2^4 \times 5^2 = \boxed{2^{13} \times 5^8}.$$

$$b = \left(\frac{3^2}{2^3}\right)^4 \times \left(\frac{2}{3^3}\right)^2 = \frac{3^8}{2^12} \times \frac{2^2}{3^6} = \boxed{\frac{3^2}{2^{10}}}.$$

$$c = 16^3 \times 27^2 = \left(2^4\right)^3 \times \left(3^3\right)^2 = \boxed{2^{12} \times 3^6}.$$

$$d = \frac{8^3 \times 4^2}{32^4} = \frac{(2^3)^3 \times (2^2)^2}{(2^5)^4} = \frac{2^9 \times 2^4}{2^{20}} = \frac{2^{13}}{2^{20}} = \boxed{\frac{1}{2^7}}.$$

$$e = \frac{\left(2^4 \times 3^2\right)^2}{\left(2^3 \times 3\right)^3} = \frac{2^8 \times 3^4}{2^9 \times 3^3} = \boxed{\frac{3}{2}}.$$

$$f = \frac{(x^2y)(xy^3)^2}{(x^3y^2)^3} = \frac{x^2yx^2y^6}{x^9y^6} = \frac{x^4y^7}{x^9y^6} = \boxed{\frac{y}{x^5}}.$$

Exercice 3

(Résolution d'équations) Résoudre les équations suivantes :

(a) $\dfrac{x}{3} = 2 + 1$

(b) $\dfrac{2x+3}{2} = \dfrac{1}{5}$

(c) $2 = \dfrac{3x - \frac{1}{2}}{4}$

(d) $\dfrac{5x-1}{3} = 2x$

(e) $\dfrac{1 - \frac{1}{5}x}{2} = \dfrac{3x}{5}$

(f) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6}\left(2 - \dfrac{x}{-2}\right) = -\dfrac{2}{3}x$

Solution:

(a) $\dfrac{x}{3} = 2 + 1 \iff \dfrac{x}{3} = 3 \iff x = 9$. Alors, $\boxed{S = \{9\}}$.

(b) $\dfrac{2x+3}{2} = \dfrac{1}{5} \iff 2x + 3 = \dfrac{2}{5} \iff 2x = \dfrac{2}{5} - 3 \iff 2x = \dfrac{2-15}{5} \iff 2x = \dfrac{-13}{5} \iff x = \dfrac{-13}{10}$. Alors $\boxed{S = \left\{-\dfrac{13}{10}\right\}}$.

(c) $2 = \dfrac{3x - \frac{1}{2}}{4} \iff 8 = 3x - \dfrac{1}{2} \iff 8 + \dfrac{1}{2} = 3x \iff 3x = \dfrac{16+1}{2} \iff x = \dfrac{17}{6}$. Alors, $\boxed{S = \left\{\dfrac{17}{6}\right\}}$.

(d) $\dfrac{5x-1}{3}=2x \iff 5x-1=6x \iff -1=6x-5x \iff x=-1$. Alors $\boxed{S=\{-1\}}$.

(e) $\dfrac{1-\frac{1}{5}x}{2}=\dfrac{3x}{5} \iff 1-\dfrac{x}{5}=\dfrac{6x}{5} \iff 1=\dfrac{6x+x}{5} \iff \dfrac{7x}{5}=1 \iff x=\dfrac{5}{7}$. Alors, $\boxed{S=\left\{\dfrac{5}{7}\right\}}$.

(f) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\left(2-\dfrac{x}{-2}\right)=-\dfrac{2}{3}x \iff \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\left(2+\dfrac{x}{2}\right)=-\dfrac{2}{3}x \iff \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{4+x}{2}\right)=-\dfrac{2x}{3} \iff \dfrac{1}{3}+\dfrac{4+x}{12}=-\dfrac{2x}{3} \iff \dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{12}=\dfrac{-2x}{3}-\dfrac{x}{12} \iff \dfrac{2}{3}=\dfrac{-8x-x}{12} \iff \dfrac{2}{3}=\dfrac{-9x}{12} \iff x=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{12}{-9}=-2\times\dfrac{4}{9} \iff x=-\dfrac{8}{9}$. Alors, $\boxed{S=\left\{-\dfrac{8}{9}\right\}}$.

Exercice 4

(Résolution d'équations) Résoudre les équations suivantes :

(1) $(2x-1)^2+(x-1)(2x-1)=0$

(2) $(x-1)(2x-2)+(2x-2)(5-2x)=0$

(3) $(3x-1)(2x+2)+3(5-2x)(x+1)=0$

(4) $(4x+6)(1-2x)=5(2x+3)^2$

(5) $\dfrac{x-3}{x+2}-\dfrac{-x-2}{3x+1}=0$

(6) $\dfrac{2x}{4x+1}=\dfrac{x+1}{2x-1}$

Solution:

(a) $(2x-1)^2+(x-1)(2x-1)=0 \iff (2x-1)\left[(2x-1)+(x-1)\right]=0 \iff (2x-1)(3x-2)=0 \iff 2x-1=0$ ou $3x-2=0 \iff x=\dfrac{1}{2}$ ou $x=\dfrac{2}{3}$. Donc, l'ensemble des solutions est $\boxed{S=\left\{\dfrac{1}{2};\dfrac{2}{3}\right\}}$.

(b) $(x-1)(2x-2)+(2x-2)(5-2x)=0 \iff (2x-2)\left[(x-1)+(5-2x)\right]=0 \iff (2x-2)(x-1+5-2x)=0 \iff (2x-2)(4-x)=0 \iff 2x-2=0$ ou $4-x=0 \iff x=1$ ou $x=4$. Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{S=\{1;4\}}$.

(c) $(3x-1)(2x+2)+3(5-2x)(x+1)=0 \iff (3x-1)2(x+1)+3(5-2x)(x+1)=0 \iff (x+1)\left[2(3x-1)+3(5-2x)\right]=0 \iff (x+1)(6x-2+15-6x)=0 \iff (x+1)(13)=0 \iff x+1=0$. Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{S=\{-1\}}$.

(d) $(4x+6)(1-2x)=5(2x+3)^2 \iff 2(2x+3)(1-2x)-5(2x+3)^2=0 \iff (2x+3)\left[2(1-2x)-5(2x+3)\right]=0 \iff (2x+3)(2-4x-10x-15)=0 \iff (2x+3)(-14x-13)=0 \iff 2x+3=0$ ou $-14x-13=0 \iff x=-\dfrac{3}{2}$ ou $x=-\dfrac{13}{14}$. Donc, $\boxed{S=\left\{-\dfrac{-3}{2};\dfrac{-13}{14}\right\}}$.

(e) Valeurs interdites : 2 et $-\dfrac{1}{3}$.

$\dfrac{x-3}{x+2}-\dfrac{-x-2}{3x+1}=0$

$\iff \dfrac{(x-3)(3x+1)-(-x-2)(x+2)}{(x+2)(3x+1)}=0 \iff 3x^2+x-9x-3-(-x^2-2x-2x-4)=0 \iff 3x^2-8x-3+x^2+4x+4=0 \iff 4x^2-4x+1=0 \iff (2x-1)^2=0 \iff 2x-1=0 \iff x=\dfrac{1}{2}$. Alors $\boxed{S=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}}$.

(f) Valeurs interdites : $-\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{2}$.

$\dfrac{2x}{4x+1}=\dfrac{x+1}{2x-1} \iff \dfrac{2x}{4x+1}-\dfrac{x+1}{2x-1}=0$

$\iff \dfrac{2x(2x-1)-(x+1)(4x+1)}{(4x+1)(2x-1)}=0 \iff 4x^2-2x-(4x^2+x+4x+1)=0 \iff 4x^2-2x-4x^2-x-4x-1=0 \iff -7x-1=0 \iff x=-\dfrac{1}{7}$. Alors $\boxed{S=\left\{-\dfrac{1}{7}\right\}}$.

Exercice 5

(Problème d'optimisation) Un agriculteur dispose de 200 mètres de clôture. À l'aide de cette clôture, il souhaite entourer la plus grande partie de son champ ; cette partie doit avoir une forme rectangulaire. On note x et y la longueur et la largeur respectives de cette partie rectangulaire. On note l'aire de cette partie clôturée, la fonction à deux variables $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}(x,y)=xy$$

(a) Montrer que :

$$\mathcal{A}(x,y)=\frac{1}{4}(x+y)^2-\frac{1}{4}(x-y)^2.$$

(b) Justifier pourquoi $2x+2y=200$.

(c) Montrer que **sous la contrainte** $x+y=100$, maximiser $\mathcal{A}$ revient à maximiser la fonction

$$f(t)=50^2-\frac{1}{4}\left(2t-100\right)^2,$$

pour $t\in[0;100]$.

(d) Justifier pour quel $t\in[0;100]$ la fonction f est maximale. En déduire les dimensions de x et y afin que l'aire de la partie clôturée soit maximale. Donner l'aire du champ obtenu en m^2.

Solution:

(a) Il suffit de développer le terme de droite et obtenir que cela vaut xy.

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2 &= \frac{1}{4}\left(x^2+2xy+y^2\right) - \frac{1}{4}\left(x^2-2xy+y^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(x^2+2xy+y^2-x^2+2xy-y^2\right)\\ &= \frac{1}{4}(4xy)\\ &= xy = \mathcal{A}(x,y).\end{aligned}$$

On a bien $\mathcal{A}(x,y) = \frac{1}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2$.

(b) L'agriculteur dispose de 200 mètres de clôture. Ainsi, le périmètre final sera forcémment de 200 mètres. La clôture sera de forme rectangulaire, et le périmètre d'un rectangle est égale à $2 \times Longeur + 2 \times largeur$. Ainsi, x étant la longueur et y étant la largeur, forcémment, $2x + 2y = 200$.

(c) Dans la question (a), on intègre la contrainte dans l'expression trouvée de $\mathcal{A}(x,y)$. On peut exprimer y en fonction de x par la contrainte :

$$\begin{aligned}& x + y = 100\\ \iff & y = 100 - x.\end{aligned}$$

Alors en remplaçant dans $\mathcal{A}$ de la question (a) :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x, 100-x) &= \frac{1}{4}(x+100-x)^2 - \frac{1}{4}(x-(100-x))^2\\ &= \frac{1}{4}(100)^2 - \frac{1}{4}(x-100+x)^2\\ &= \frac{1}{4}100^2 - \frac{1}{4}(2x-100)^2\\ &= \left(\frac{100}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(2x-100)^2\\ &= 50^2 - \frac{1}{4}(2x-100)^2.\end{aligned}$$

Alors, maximiser $\mathcal{A}$ sous la contrainte $x+y=100$ revient donc à maximiser la fonction :

$$f(t) = 50^2 - \frac{1}{4}(2x-100)^2.$$

sur l'intervalle $[0, 100]$.

(d) Pour tout $t \in [0;100]$, $-\frac{1}{4}(2t-100)^2 \leq 0$, car un carré est toujours positif, et multiplié par -1 le rend négatif. Ainsi, en ajoutant 50^2 des deux côtés de l'inégalité on a pour tout $t \in [0;100]$: $50^2 - \frac{1}{4}(2t-100)^2 \leq 50^2$. Soit donc $f(t) \leq 50^2$ pour tout $t \in [0;100]$.

De plus, ce maximum est atteint lorsque le terme $-\frac{1}{4}(2t-100)^2 = 0$. Cela est possible seulement si $(2t-100)^2 = 0 \iff 2t - 100 = 0 \iff 2t = 100 \iff t = 50$. Alors, $f(50) = 50^2$.
Ainsi, pour $t = 50$, la fonction f admet un maximum. Si $x = 50$, alors $y = 50$ car on sait que $x + y = 100$. Ainsi, la partie clôturée sera carrée et d'aire égale à $50 \times 50 = 2500m^2$.

Exercice 6

(Points d'intersection) On considère les deux fonctions f et g dont les images d'un nombre x sont données par les relations :

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3$$
$$g(x) = \frac{x}{2} + 1$$

(a) Représenter $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives de f et g sur un repère orthonormé.

(b) i. Déterminer les valeurs des réels a et b vérifiant l'égalité :

$$-x^2 + 4x + 12 = (x-6)(ax+b).$$

ii. En déduire les solutions des équations $f(x) = 0$.

(c) i. Établir l'égalité suivante :

$$-\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + 2 = -\frac{(x-4)(x+2)}{4}.$$

ii. Résoudre l'équation : $f(x) = g(x)$.

iii. En déduire les coordonnées des points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Solution:

(a) aa

(b) i. Il suffit dans cette question de développer le terme de droite et identifier le termes associés à x^2, x et les constantes avec les constantes :

$$\begin{aligned}(x-6)(ax+b) &= ax^2 + bx - 6ax - 6b \\ &= ax^2 + (b-6)x - 6b.\end{aligned}$$

Cette dernière quantité est égale à $-x^2 + 4x + 12$. Ainsi, on identifie par les coefficients :

$$\left\{\begin{array}{rcr} a &=& -1 \\ b-6 &=& 4 \\ -6b &=& 12 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcr} a &=& -1 \\ b+6 &=& 4 \\ b &=& \dfrac{12}{-6} \end{array}\right.$$

$$\iff \boxed{\left\{\begin{array}{rcr} a &=& -1 \\ b &=& -2 \end{array}\right.}$$

D'où,

$$-x^2 + 4x + 12 = (x-6)(-x-2).$$

ii. $f(x) = 0 \iff -\frac{1}{4}x^2 + x + 3 = 0$. On remarque que en multipliant par 4 des deux côtés de l'égalité, on tombe sur l'équation $-x^2 + 4x + 12 = 0$. Celle ci est vraie si et seulement si $(x-6)(-x-2) = 0 \iff x - 6 = 0$ ou $-x-2 = 0 \iff x = 6$ ou $x = -2$. L'ensemble des solutions est donc : $\boxed{S = \{-2; 6\}}$.

(c) i. Il suffit là aussi de développer le terme de droite et d'obtenir que cela est égal au terme de gauche :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4}(x-4)(x+2) &= -\frac{1}{4}(x^2 + 2x - 4x - 8) \\
&= -\frac{1}{4}(x^2 - 2x - 8) \\
&= -\frac{x^2}{4} + \frac{2x}{4} + \frac{8}{4} \\
&= \boxed{-\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + 2}.
\end{aligned}$$

ii. L'équation $f(x) = g(x)$ se ramène à résoudre :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4}x^2 + x + 3 &= \frac{x}{2} + 1 \\
\iff -\frac{x^2}{4} + x + 3 - \frac{x}{2} - 1 &= 0 \\
\iff -\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + 2 &= 0.
\end{aligned}$$

On a vu à la question précédente que cette dernière équation était équivalente à $-\frac{(x-4)(x+2)}{4} = 0$. Celle-ci est résolue pour $x = 4$ et $x = -2$. D'où, l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont $S = \{-2; 4\}$.

iii. On sait donc que $f(x) = g(x)$ si et seulement si $x = -2$ ou $x = 4$. Donc en $x = -2$ et en $x = 4$ les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se rencontrent en les points $(-2; g(-2))$ et $(4; g(4))$. Il suffit maintenant de calculer les images de -2 et 4 par f :

$$\begin{aligned}
g(-2) &= \frac{-2}{2} + 1 \\
&= -1 + 1 = 0. \\
g(4) &= \frac{4}{2} + 1 \\
&= 2 + 1 = 3.
\end{aligned}$$

Alors, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ s'intersectent aux points de coordonnées $(-2; 0)$, et $(4; 3)$.

Exercice 7

(Résolution d'inéquations) Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$. Donner les solutions sous forme d'ensemble.

(1) $2x \geq 0$
(2) $3x+1 \geq 2$
(3) $3x-3>0$
(4) $\dfrac{3}{7}+\dfrac{1}{2}x<2$
(5) $-\dfrac{5}{2}+\dfrac{\sqrt{2}x}{-3}>0$
(6) $\dfrac{4\sqrt{8}x+1}{5}>\dfrac{3\sqrt{2}}{4}x$

Solution:

(a) $2x \geq 0 \iff x \geq 0$. $\boxed{S=[0;+\infty[}$.

(b) $3x+1 \geq 2 \iff 3x \geq 2-1 \iff 3x \geq 1 \iff x \geq \dfrac{1}{3}$. Alors $\boxed{S=\left[\dfrac{1}{3};+\infty\right[}$.

(c) $3x-3>0 \iff 3x>3 \iff x>1$. $\boxed{S=]1;+\infty[}$.

(d) $\dfrac{3}{7}+\dfrac{1}{2}x<2 \iff \dfrac{x}{2}<2-\dfrac{3}{7} \iff \dfrac{x}{2}<\dfrac{14-3}{7} \iff x<\dfrac{11\times 2}{7} \iff x<\dfrac{22}{7}$. Alors $\boxed{S=\left]-\infty;\dfrac{22}{7}\right[}$.

(e) $-\dfrac{5}{2}+\dfrac{\sqrt{2}x}{-3}>0 \iff \dfrac{\sqrt{2}x}{-3}>\dfrac{5}{2} \iff x<\dfrac{5}{2}\times\dfrac{-3}{\sqrt{2}}$ (On change le sens de l'inégalité lorsqu'on multiplie par -1 des deux côtés de l'inégalité) $\iff x<\dfrac{-15}{2\sqrt{2}}$. Alors, $\boxed{S=\left]-\infty;-\dfrac{15}{2\sqrt{2}}\right[}$.

(f) $\dfrac{4\sqrt{8}x+1}{5}>\dfrac{3\sqrt{2}}{4}x \iff \dfrac{4\sqrt{8}x}{5}-\dfrac{3\sqrt{2}x}{4}>\dfrac{-1}{5} \iff \left(\dfrac{4\times 2\sqrt{2}}{5}-\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\right)x>\dfrac{-1}{5} \iff \left(\dfrac{32\sqrt{2}}{20}-\dfrac{15\sqrt{2}}{20}\right)x>\dfrac{-1}{5} \iff \dfrac{17\sqrt{2}}{20}x>-\dfrac{1}{5} \iff x>\dfrac{-1}{5}\times\dfrac{20}{17\sqrt{2}} \iff x>\dfrac{-4}{17\sqrt{2}}$. Alors, $\boxed{S=]-\dfrac{-4}{17\sqrt{2}};+\infty[}$.

Exercice 8

(Résolution d'inéquations) Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$ en établissant un tableau de signes. Donner les solutions sous forme d'ensemble.

(1) $x^2>x$
(2) $x^2-4 \geq 0$
(3) $(2x+1)(x+3) \geq 0$
(4) $(x+1)^2(2x+3) \leq 0$
(5) $(3-x)(2x+5)(x+3) \geq 0$
(6) $(2x+3)(2-x)+(2-x)(3x-1) \geq 0$
(7) $(2x-1)(2-x)-\left(\dfrac{x}{2}+1\right)(5-4x) \leq 0$
(8) $(x-1)^2-(2x+1)^2 \geq 0$

Solution:

(a) $x^2 > x \iff x^2 - x > 0 \iff x(x-1) > 0$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On cherche lorsque le terme $x(x-1)$ est positif. On cherche alors les signes + sur le tableau de signe et on donne l'ensemble associé. Alors,

$$\boxed{S =]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[}.$$

On n'oublie pas les crochets ouverts pour les solutions en 0 car l'inégalité de l'inéquation est **stricte**.

(b) $x^2 - 4 \geq 0 \iff (x-2)(x+2) \geq 0$.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-2)(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On cherche dans l'inéquation lorsque $(x-2)(x+2)$ est positif. D'après le tableau de signes, cela n'est possible que sur l'intervalle $]-\infty; -2]$ ou $[2; +\infty[$. Alors,

$$\boxed{S =]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[}.$$

Inégalités larges, donc on inclut -2 et 2 dans les intervalles.

(c) $(2x+1)(x+3) \geq 0$.

x	$-\infty$		-3		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2x+1)(x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{S = [-\infty; -3] \cup \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[}.$$

(d) $(x+1)^2(2x+3) \leq 0$.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x+1)^2(2x+3)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

$$\boxed{S = \left]-\infty; -\frac{3}{2}\right]}.$$

(e) $(3-x)(2x+5)(x+3) \geq 0$.

$3 - x \geq 0 \iff x \leq 3$.

$2x + 5 \geq 0 \iff 2x \geq -5 \iff x \geq -\dfrac{5}{2}$.

$x + 3 \geq 0 \iff x \geq -3$.

x	$-\infty$		-3		$-\frac{5}{2}$		3		$+\infty$
$3-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x+5$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$(3-x)(2x+5)(x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Par conséquent :

$$\boxed{S =]-\infty; -3] \cup \left[-\frac{5}{2}; 3\right]}.$$

(f) $(2x+3)(2-x) + (2-x)(3x-1) \geq 0$.

$$\iff (2-x)\left[(2x+3)+(3x-1)\right] \geq 0$$
$$\iff (2-x)(2x+3+3x-1) \geq 0$$
$$\iff (2-x)(5x+2) \geq 0.$$

x	$-\infty$		$-\dfrac{2}{5}$		2		$+\infty$
$2 - x$		$+$		$+$	0	$-$	
$5x + 2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2-x)(5x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\boxed{S = \left[-\frac{2}{5}; 2\right]}.$$

(g) $(2x-1)(2-x) - \left(\dfrac{x}{2}+1\right)(5-4x) \leq 0.$

$$\begin{aligned}
&\iff 4x - 2x^2 - 2 + x - \left(\frac{5x}{2} - 2x^2 + 5 - 4x\right) \leq 0\\
&\iff 5x - 2x^2 - 2 - \frac{5x}{2} + 2x^2 - 5 + 4x \leq 0\\
&\iff \frac{13x}{2} - 7 \leq 0\\
&\iff \frac{13x}{2} \leq 7\\
&\iff x \leq 7 \times \frac{2}{13}\\
&\iff x \leq \frac{14}{13}.
\end{aligned}$$

x	$-\infty$		$\dfrac{14}{13}$		$+\infty$
$(2x-1)(2-x) - \left(\dfrac{x}{2}+1\right)(5-4x)$		$-$	0	$+$	

Alors,

$$\boxed{S = \left]-\infty; \frac{14}{13}\right]}$$

(h) $(x-1)^2 - (2x+1)^2 \geq 0$

$$\begin{aligned}
&\iff (x - 1 - (2x+1))(x - 1 + (2x+1)) \geq 0\\
&\iff (-x-2)(3x) \geq 0.
\end{aligned}$$

$-x - 2 \geq 0 \iff -2 \geq x \iff x \leq -2.$

$3x \geq 0 \iff x \geq 0.$

Ainsi :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$-x - 2$		$+$	0	$-$		$-$	
$3x$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)^2-(2x+1)^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\boxed{S = [-2;0]}$.

Exercice 9

Résoudre l'inéquation dans $\mathbb{R}$. Donner la solution sous forme d'ensemble.

$$\frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} < 0.$$

Solution:

Tout d'abord étudions le dénominateur. Notons $P(x) = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$.
A priori, on ne connaît pas encore le signe de P. Essayons de développer afin de voir si l'on peut se débloquer.

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) \\ &= x^2(x^2 + \sqrt{2}x + 1) - \sqrt{2}x(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + 1 \times (x^2 + \sqrt{2}x + 1) \\ &= x^4 + \sqrt{2}x^3 + x^2 - \sqrt{2}x^3 - \sqrt{2}^2x^2 - \sqrt{2}x + x^2 + \sqrt{2}x + 1 \\ &= x^4 + \cancel{\sqrt{2}x^3} + \cancel{2x^2} - \cancel{\sqrt{2}x^3} - \cancel{2x^2} - \cancel{\sqrt{2}x} + \cancel{\sqrt{2}x} + 1 \\ &= x^4 + 1 > 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, le signe du dénominateur est strictement positif quel que soit x. Cela nous enlève déjà une épine du pied !
Étudions le numérateur que nous notons $Q(x)$, et tentons de factoriser. On peut faire apparaître un facteur commun, le terme $(x-1)$:

$$\begin{aligned} Q(x) &= x^3 - x^2 + 2x - 2 \\ &= x^2(x-1) + 2(x-1) \\ &= (x-1)(x^2+2). \end{aligned}$$

$x - 1 \geq 0 \iff x \geq 1.$
$x^2 + 2 > 0 \iff x \in \mathbb{R}.$

On peut donc affirmer que le signe de $Q(x)$ est le même que celui de $(x-1)$ sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, $\frac{Q(x)}{P(x)}$ est négatif sur $]-\infty;1]$ et positif sur $[1;+\infty[$. Le rapport $\frac{Q(x)}{P(x)}$ s'annulle en $x=1$, donc sera strictement négatif sur $]-\infty;1[$. La solution à l'inéquation est donc

$$\boxed{S =]-\infty;1[}.$$

Exercice 10

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = x^3 - 3x + 2.$$

(a) Établir l'égalité suivante : $f(x) = (x+2)(x-1)^2$.

(b) Dresser le tableau de signes de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

(c) En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > 0$.

Solution:

(a) Il suffit de développer l'expression donnée :

$$\begin{aligned}(x+2)(x-1)^2 &= (x+2)(x^2-2x+1) \\ &= x^3 - 2x^2 + x + 2x^2 - 4x + 2 \\ &= x^3 - 3x + 2 \qquad = f(x).\end{aligned}$$

(b) On peut maintenant dresser le tableau de signes de f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$(x+2)(x-1)^2$		$-$	0	$+$	0	$+$	

(c) On en déduit donc que l'ensemble solution de l'inéquation $f(x) > 0$ est

$$\boxed{S =]-\infty;-2[}.$$

Exercice 11

(Croissance et décroissance)

(a) Démontrer que la fonction définie par $f(x) = 3x + 2$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

(b) Démontrer que la fonction définie par $f(x) = 2 - x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

(c) Démontrer que la fonction définie par $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$ est décroissante sur $\left]-\infty; \dfrac{1}{2}\right[$.

(d) Démontrer que la fonction définie par $f(x) = -2x^2 + x^4$ est décroissante sur $[0; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$.

Solution:

(a) Soit $u, v \in \mathbb{R}$ tels que $u \leq v$. Étudions le signe de $f(v) - f(u)$:

$$\begin{aligned} f(v) - f(u) &= 3v + 2 - (3u + 2) \\ &= 3v + 2 - 3u - 2 \\ &= 3(v - u). \end{aligned}$$

Comme par hypothèse $u \leq v$, alors $v - u \geq 0$. Par conséquent $3(v - u) \geq 0$. Donc $f(v) - f(u) \geq 0$, soit donc $f(v) \geq f(u)$. Ainsi, f est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

(b) Soit $u, v \in \mathbb{R}$ tels que $u \leq v$. Étudions le signe de $f(v) - f(u)$:

$$\begin{aligned} f(v) - f(u) &= 2 - v - (2 - u) \\ &= 2 - v - 2 + u \\ &= u - v. \end{aligned}$$

Par hypothèse, $u \leq v$, donc $u - v \leq 0$. D'où, $f(v) - f(u) \leq 0$, soit donc $f(u) \geq f(v)$. Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

(c) Soit $u, v \in]-\infty; \frac{1}{2}[$ tels que $u \leq v$. Étudions le signe de $f(u) - f(v)$:

$$\begin{aligned} f(u) - f(v) &= 2u^2 - 2u + 1 - 2v^2 + 2v - 1 \\ &= 2(u^2 - v^2) - 2(u - v) \\ &= 2(u - v)(u + v) - 2(u - v) \\ &= 2(u - v)(u + v - 1) \end{aligned}$$

Sachant que $u \leq v$, alors $u - v \leq 0$.
De plus sachant que $u, v \in]-\infty; \frac{1}{2}]$, soit donc $u \leq \frac{1}{2}$, et $v \leq \frac{1}{2}$. Par conséquent $u + v \leq 1$. Ainsi, $u + v - 1 \leq 0$.
Le produit des termes $(u - v)$ et $(u + v - 1)$ est donc positif (car produit de deux termes de même signe). Ainsi, $f(u) - f(v) \geq 0$, et donc $f(u) \geq f(v)$. Alors f est décroissante sur $]-\infty; \frac{1}{2}[$.

(d) i. Soit $u, v \in [0, 1]$ tels que $u \leq v$. Montrons que $f(u) - f(v) \geq 0$.

$$\begin{aligned}
f(u) - f(v) &= -2u^2 + u^4 - (-2v^2 + v^4) \\
&= -2u^2 + u^4 + 2v^2 - v^4 \\
&= -2(u-v)(u+v) + (u^2)^2 - (v^2)^2 \\
&= -2(u-v)(u+v) + (u^2 - v^2)(u^2 + v^2) \\
&= -2(u-v)(u+v) + (u-v)(u+v)(u^2 + v^2) \\
&= (u-v)(u+v)(-2 + (u^2 + v^2))
\end{aligned}$$

Sachant que $u \leq v$, alors $u - v \leq 0$. Donc $u - v$ est négatif.
Reste à déterminer le signe de l'autre terme :

$$\begin{aligned}
&0 \leq u \leq 1 \\
&0 \leq v \leq 1 \\
&0 \leq u + v \leq 2
\end{aligned}$$

Donc le terme $u + v \geq 0$ de toutes façons.
De plus,

$$\begin{aligned}
&0 \leq u \leq 1 \\
&0 \leq u^2 \leq 1 (\text{car la fonction carrée est croissate sur } [0; +\infty[) \\
&0 \leq v \leq 1 \\
&0 \leq v^2 \leq 1 (\text{car la fonction carrée est croissate sur } [0; +\infty[) \\
\Rightarrow &0 \leq u^2 + v^2 \leq 2
\end{aligned}$$

Ainsi, $u^2 + v^2 - 2 \leq 0$. Par conséquent, le produit $(u-v)(u+v)(-2 + u^2 + v^2) \geq 0$, car $(u - v) \leq 0$, $(u + v) \geq 0$, et $(-2 + (u^2 + v^2)) \leq 0$.
Ainsi, $f(u) - f(v) \geq 0$, donc $f(u) \geq f(v)$. Donc f est décroissante sur $[0; 1]$.

ii. Soit $u, v \in [1; +\infty[$ tels que $u \leq v$. Montrons que $f(u) \leq f(v)$.

$$f(u) - f(v) = (u-v)(u+v)(-2 + u^2 + v^2).$$

Le terme $(u - v)$ reste négatif car $u \leq v$. De même pour $u + v$ qui reste positif.
On a par hypothèse :

$$\begin{aligned}
&u \geq 1 \\
&v \geq 1 \\
&u^2 \geq 1 (\text{car la fonction carrée est croissate sur } [0; +\infty[) \\
&v^2 \geq 1 (\text{car la fonction carrée est croissate sur } [0; +\infty[) \\
\Rightarrow &u^2 + v^2 \geq 2.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $u^2 + v^2 - 2 \geq 0$. Ainsi, la différence $f(u) - f(v)$ est du signe de $(u - v)$, qui est négatif. Donc finalement, $f(u) \leq f(v)$, et donc f est croissante sur $[1; +\infty[$.

Exercice 12

(Probabilités d'événements) On considère l'expérience suivante : on lance simultanément deux dés équilibrés **numérotés de 5 à 10**.

(a) Décrire rapidement l'univers de l'expérience, que l'on notera Ω.

(b) Justifier que les issues obtenues sont équiprobables.

(c) Réaliser les tableaux à double entrée suivants :

1. L'un représentant celui de la somme des deux dés[1].
2. L'autre représentant celui du produit des deux dés[2].

(d) On note les événements suivants :

A : « Obtenir que la somme des deux nombres obtenus soit égal à 7 ».
B : « Obtenir que la somme des deux nombres obtenus soit égale à 15 ».
C : « Obtenir que le produit des deux nombres obtenus soit inférieur ou égal à 45 ».
D : « Obtenir que le produit des deux nombres obtenus soit supérieur à 65 ».
E : « Obtenir que la somme des deux nombres soit supérieure ou égale à 12, **et** dont le produit est inférieur ou égal à 40 ».

Question : Calculer les probabilités des événements A, B, C, D et E.

Solution:

(a) L'univers de l'expérience, Ω est défini par l'ensemble des couples que l'on peut former avec les chiffres de 5 à 10 :

$$\Omega = \{5;6;7;8;9;10\}^2 = \{(5;5),(5;6),\ldots,(5;10),(6;5),(6;6),\ldots,(10;5),\ldots,(10;10)\}.$$

(b) Les issues sont équiprobabiles car les deux dés sont *équilibrés*. Chacune des issues a la même probabilité d'être tirée.

(c)

+	5	6	7	8	9	10
5	10	11	12	13	14	15
6	11	12	13	14	15	16
7	12	13	14	15	16	17
8	13	14	15	16	17	18
9	14	15	16	17	18	19
10	15	16	17	18	19	20

$\times$	5	6	7	8	9	10
5	25	30	35	40	45	50
6	30	36	42	48	54	60
7	35	42	49	56	63	70
8	40	48	56	64	72	80
9	45	54	63	72	81	90
10	50	60	70	80	90	100

(d)

1. L'événement A est impossible. Le plus petit nombre que l'on puisse obtenir est 10. Donc $\mathbb{P}(A) = 0$.
2. B est donné par la deuxième diagonale, où tous les nombres valent 15. Il y a 6 de ces nombres sur 36 au total, donc $P(B) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas total}} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$.
3. On regarde maintenant le second tableau. On dénombre 12 cases dont la valeur est inférieure ou égale à 45. Alors, $P(C) = \dfrac{12}{36} = \dfrac{1}{3}$.

1. La somme de deux nombres est l'addition des deux nombres.
2. Le produit de deux nombres est la multiplication des deux nombres.

4. On dénombre 10 valeurs du tableau qui sont supérieures à 65. Ainsi, $P(D) = \dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18}$.
5. Là, il faut faire attention. Il faut que le produit soit inférieur ou égal à 40. Par conséquent, on cherchera parmis ces couples lesquels ont une somme supérieure à 12. Les couples dont le produit est inférieur à 40 :

$$(5;5), (6;5), (7;5), (8;5), (5;6), (6;6), (5;7), (5;8)$$

. Parmi cette liste, les seuls couples dont la somme est supérieure ou égale à 12 sont : $(7;5), (8;5), (6;6), (5;7), (5;8)$. Par conséquent, $P(E) = \dfrac{5}{36}$.

Exercice 13

(Bonus) Jean dispose d'un gâteau d'anniversaire circulaire et uniforme (pas de glaçage ni de décoration au dessus). Il a invité 8 amis à son anniversaire.
Question : Comment découper le gâteau en 8 parts **équitables** en seulement **3 tranchers de couteau** ?

Solution: Il fallait simplement couper en 4 parts égales simples, puis réaliser une découpe sur *l'épaisseur*, ce qui donne donc 8 parts.