Devoir maison de mathématiques n$^{\text{o}}$ 2 - 112

$\boxed{\textbf{Tous les résultats seront encadrés.}}$

Ce devoir maison comptera coefficient 1,5 dans la moyenne et devra être rendu en temps et en heure le Lundi 02 Mai 2016 à 11h30 (ou par e-mail scanné et zippé avant 11h30), **sous peine d'être sanctionné irrévocablement d'un 0 immédiatement**. Je vous conseille **fortement** de réaliser ce devoir maison vous-même car le prochain devoir surveillé contiendra un des exercices présents sur ce devoir maison. Vous pourrez vous mettre par groupes de 3 maximum (voire 4 pour un seul groupe éventuellement) afin de réaliser ce devoir. Vous me communiquerez vos groupes par e-mail à `le.philippe.duc.tai@gmail.com` avant Dimanche 17 Avril à 23h59, avec comme objet « Groupe DM 112 ». Passé ce délai vous serez considéré comme seul(e). Bon courage !

Pour les exercices 1 et 2, on admettra
- $\forall a \in]-1;1[$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda a^n = 0$,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.
- $\forall (u_n), (v_n)$ des suites convergentes respectivement vers u et v avec α et β des réels :

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha u + \beta v.$$

Exercice 1. Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et } \forall n,\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1.$$

1. a. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.

b. Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.

2. a. Soit la suite (v_n) définie pour tout n par $v_n = n + 3 - u_n$.

i. Calculer v_0.

ii. Montrer que $\forall n,\ v_{n+1} \geqslant \frac{2}{3}v_n$.

iii. En déduire le signe de v_n pour tout n.

b. Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}\left(n + 3 - u_n\right).$$

c. En déduire une validation de la conjecture précédente.

3. On désigne par (w_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = u_n - n$.

a. Démontrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

b. En déduire que pour tout entier naturel n,

$$u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$$

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \quad \text{et} \quad T_n = \frac{S_n}{n^2}.$$

a. Exprimer S_n en fonction de n.

b. Déterminer la limite de la suite (T_n).

Exercice 2. Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n, par la relation :

$$u_{n+1} = au_n + b,$$

pour a et b des réels non nuls tels que $a \neq 1$.
On pose pour tout entier naturel n,

$$v_n = u_n - \frac{b}{1-a}.$$

1. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison a.
2. En déduire une expression explicite de la suite (u_n).
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Exercice 3. Les questions sont indépendantes. Cet exercice consiste à comprendre plusieurs algorithmes et de préciser ce que fait **exactement** l'algorithme. Les algorithmes ne mettent pas forcément en œuvre des suites. Tentez, experimentez, comprenez : à vous de jouer !

1.

Variables :	K et J sont des entiers naturels P est un nombre réel
Initialisation :	P prend la valeur 0 J prend la valeur 1
Entrée :	Saisir la valeur de K
Traitement :	Tant que $P < 0,05 - 10^{-K}$ P prend la valeur $0,2 \times P + 0,04$ J prend la valeur $J + 1$ Fin tant que
Sortie :	Afficher J

2.

Variables :	Soit un entier naturel non nul n
Initialisation :	Affecter à u la valeur 2
Entrée :	Saisir la valeur de K
Traitement et sortie :	Pour i allant de 1 à n Affecter à u la valeur $\dfrac{1+0,5u}{0,5+u}$ Afficher u Fin Pour

3. Soit f une fonction positive définie sur $[0;1]$.

Variables :	k et n sont des nombres entiers naturels s est un nombre réel
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
Initialisation :	Affecter à s la valeur 0.
Traitement :	Pour k allant de 0 à $n-1$ Affecter à s la valeur $s + \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ Fin Pour
Sortie :	Afficher s

4.

Variables :	m et m' entiers relatifs
Traitement :	Pour m allant de -10 à 10 : Pour m' allant de -10 à 10 : Si $(mm')^2 + 16(m-1)(m'-1) + 4mm' = 0$ Alors Afficher $(m\ ;\ m')$ Fin du Pour Fin du Pour

Exercice 4. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout n entier naturel par :

$$u_n = \frac{50\sqrt{n}}{2n^2 - 25n + 100}.$$

Étudier le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5. 1. Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R} : x^3 - 1 = (x^2 + x + 1)(x - 1)$.
2. En déduire le signe de $x^3 - 1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que $\forall x \in]0; +\infty[: 2\sqrt{x} + \dfrac{1}{x} \geqslant 3$.

Exercice 6. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{4x^2 - 8x}{x^2 - 2x - 3}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer l'expression de la fonction dérivée de f.

$$\text{On trouvera : } f'(x) = \frac{-24x + 24}{(x^2 - 2x + 3)^2}.$$

3. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f.
4. En quel point $\mathcal{C}_f$ admet-elle une tangente horizontale ? Quelle est alors son équation ?
5. Donner une équation de la droite $(\mathcal{D})$ tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 5.

Exercice 7. On jette trois fois de suite un dé cubique parfaitement équilibré. Chaque fois qu'on obtient un multiple de 3, on gagne 5 euros, sinon on perd 2 euros. On désigne par X la variable aléatoire correspondant au gain obtenu au bout de 3 lancers.

1. Réaliser un arbre pondéré représentant cette expérience. On notera M l'événement : « On obtient un multiple de 3 », et $\bar{M}$ son événement contraire. Indiquer au bout de chaque chemin le gain obtenu.
2. Montrer que la probabilité de gagner exactement 1€ est :

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{12}{27}.$$

3. Réaliser un tableau donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire X (*on ne demande pas de détailler tous les calculs).*
4. Calculer l'espérance mathématique de X. Ce jeu est-il équitable ?
5. L'organisateur de ce jeu décide de demander une mise de 2€ à chaque joueur. Quelle est alors l'espérance de gain d'un joueur ?

Exercice 8. (Introduction au Modèle de Cox-Ross-Rubinstein)
L'approche la plus pédagogique, et donc la plus populaire pour évaluer les options sur actions [1] s'appuie sur la représentation de l'évolution du cours de l'action par un arbre binomial.
On s'intéressera à un modèle à une période. Dans ce modèle, on est libre d'acheter, vendre, placer, emprunter. Les biens sont infiniment liquides. [2]
Soit r le taux sans risque tel qu'une quantité V_0 placée à l'instant $t = 0$, rapportera $(1 + r)V_0$ à l'instant $t = 1$. De même, une quantité V_0 peut être empruntée à $t = 0$ et doit être rendue à hauteur de $(1 + r)V_0$.
Soit u et d des réels non nuls tels que $u > d$. Soit S_0 le prix de l'action à l'instant initial $t = 0$. On note S_1 la variable aléatoire représentant le prix de l'action à la date $t = 1$. On suppose qu'avec une probabilité p, S_1 vaudra $u \times S_0$ et avec une probabilité $1 - p$, S_1 vaudra $d \times S_0$.

1. Représenter le cours de l'action aux temps $t = 0$ à $t = 1$ par un arbre pondéré.
2. Calculer l'espérance de S_1.
3. Calculer p tel que l'espérance de S_1 soit égale à $(1 + r)S_0$. C'est-à-dire de calculer p tel que le rendement de l'action soit égal au taux sans risque. [3]

$$\text{On trouvera : } p = \frac{1 + r - d}{u - d}.$$

4. Que doit-on en déduire sur u,d et r pour que p définisse une probabilité ? Donner un encadrement de $(1 + r)$.
5. Montrer que si l'action n'avait pas un rendement espéré égal au taux sans risque, et donc que $u < (1 + r)$ ou $d > (1 + r)$, il existerait un moyen de réaliser un **profit infini** de l'instant $t = 0$ à $t = 1$.

1. Une action est un titre de propriété sur une entreprise qui permet au détenteur d'exercer un droit sur l'entreprise et de toucher des dividendes. Le prix d'une action est déterminée généralement par la confrontation de l'offre et la demande que des investisseurs sont prêts à payer pour l'acquérir. Les ordres d'achats et ventes incessants sur le marché amènent à une variation du prix très erratique.
2. On peut par exemple acheter 0,0001 actions.
3. La probabilité obtenue est appelée probabilité risque-neutre.