

Devoir maison n° 1

Tous les résultats seront encadrés.

Exercice 1

(Calcul numérique) Calculer en donnant les résultats sous la forme d'une fraction irréductible. Déterminez les calculs.

$$a = \frac{2 + \frac{2}{3}}{3 - \frac{1}{2}}$$

$$b = \left(\frac{3}{2} + 2\right) \times \frac{2}{5}$$

$$c = \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}{\frac{5}{4} - 4}$$

$$d = \frac{2 + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} - 5 \times \frac{2}{3}}$$

$$e = \left(2 - \frac{2}{3}\right) \left(\frac{5}{2} \times 3 - \frac{2}{3}\right)$$

$$f = \frac{1}{\frac{2}{3}} \times \frac{\frac{3}{4}}{5}$$

Exercice 2

(Simplifications de puissances) Simplifier les expressions suivantes :

$$a = (2^3 \times 5^2)^3 \times 2^4 \times 5^2$$

$$b = \left(\frac{3^2}{2^3}\right)^4 \times \left(\frac{2}{3^3}\right)^2$$

$$c = 16^3 \times 27^2$$

$$d = \frac{8^3 \times 4^2}{32^4}$$

$$e = \frac{(2^4 \times 3^2)^2}{(2^3 \times 3)^3}$$

$$f = \frac{(x^2y)(xy^3)^2}{(x^3y^2)^3}$$

Exercice 3

(Résolution d'équations) Résoudre les équations suivantes :

$$(a) \frac{x}{3} = 2 + 1$$

$$(c) 2 = \frac{3x - \frac{1}{2}}{4}$$

$$(e) \frac{1 - \frac{1}{5}x}{2} = \frac{3x}{5}$$

$$(b) \frac{2x + 3}{2} = \frac{1}{5}$$

$$(d) \frac{5x - 1}{3} = 2x$$

$$(f) \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \left(2 - \frac{x}{-2}\right) = -\frac{2}{3}x$$

Exercice 4

(Résolution d'équations) Résoudre les équations suivantes :

$$(1) (2x - 1)^2 + (x - 1)(2x - 1) = 0$$

$$(2) (x - 1)(2x - 2) + (2x - 2)(5 - 2x) = 0$$

$$(3) (3x - 1)(2x + 2) + 3(5 - 2x)(x + 1) = 0$$

$$(4) (4x + 6)(1 - 2x) = 5(2x + 3)^2$$

$$(5) \frac{x - 3}{x + 2} - \frac{-x - 2}{3x + 1} = 0$$

$$(6) \frac{2x}{4x + 1} = \frac{x + 1}{2x - 1}$$

Exercice 5

(Problème d'optimisation) Un agriculteur dispose de 200 mètres de clôture. À l'aide de cette clôture, il souhaite entourer la plus grande partie de son champ ; cette partie doit avoir une forme rectangulaire. On note x et y la longueur et la largeur respectives de cette partie rectangulaire. On note l'aire de cette partie clôturée, la fonction à deux variables \mathcal{A} :

$$\mathcal{A}(x, y) = xy$$

(a) Montrer que :

$$\mathcal{A}(x, y) = \frac{1}{4}(x + y)^2 - \frac{1}{4}(x - y)^2.$$

(b) Justifier pourquoi $2x + 2y = 200$.

(c) Montrer que **sous la contrainte** $x + y = 100$, maximiser \mathcal{A} revient à maximiser la fonction

$$f(t) = 50^2 - \frac{1}{4}(2t - 100)^2,$$

pour $t \in [0; 100]$.

(d) Justifier pour quel $t \in [0; 100]$ la fonction f est maximale. En déduire les dimensions de x et y afin que l'aire de la partie clôturée soit maximale. Donner l'aire du champ obtenu en m^2 .

Exercice 6

(Points d'intersection) On considère les deux fonctions f et g dont les images d'un nombre x sont données par les relations :

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3$$

$$g(x) = \frac{x}{2} + 1$$

(a) Représenter \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g les courbes représentatives de f et g sur un repère orthonormé.

(b) i. Déterminer les valeurs des réels a et b vérifiant l'égalité :

$$-x^2 + 4x + 12 = (x - 6)(ax + b).$$

ii. En déduire les solutions des équations $f(x) = 0$.

(c) i. Établir l'égalité suivante :

$$-\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + 2 = -\frac{(x - 4)(x + 2)}{4}.$$

ii. Résoudre l'équation : $f(x) = g(x)$.

iii. En déduire les coordonnées des points d'intersection des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

Exercice 7

(Résolution d'inéquations) Résoudre les inéquations suivantes dans \mathbb{R} . Donner les solutions sous forme d'ensemble.

(1) $2x \geq 0$

(2) $3x + 1 \geq 2$

(3) $3x - 3 > 0$

(4) $\frac{3}{7} + \frac{1}{2}x < 2$

(5) $-\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{2}x}{-3} > 0$

(6) $\frac{4\sqrt{8}x + 1}{5} > \frac{3\sqrt{2}}{4}x$

Exercice 8

(Résolution d'inéquations) Résoudre les inéquations suivantes dans \mathbb{R} en établissant un tableau de signes. Donner les solutions sous forme d'ensemble.

- | | |
|--------------------------------|---|
| (1) $x^2 > x$ | (5) $(3 - x)(2x + 5)(x + 3) \geq 0$ |
| (2) $x^2 - 4 \geq 0$ | (6) $(2x + 3)(2 - x) + (2 - x)(3x - 1) \geq 0$ |
| (3) $(2x + 1)(x + 3) \geq 0$ | (7) $(2x - 1)(2 - x) - \left(\frac{x}{2} + 1\right)(5 - 4x) \leq 0$ |
| (4) $(x + 1)^2(2x + 3) \leq 0$ | (8) $(x - 1)^2 - (2x + 1)^2 \geq 0$ |

Exercice 9

Résoudre l'inéquation dans \mathbb{R} . Donner la solution sous forme d'ensemble.

$$\frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} < 0.$$

Exercice 10

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par la relation :

$$f(x) = x^3 - 3x + 2.$$

- Établir l'égalité suivante : $f(x) = (x + 2)(x - 1)^2$.
- Dresser le tableau de signes de la fonction f sur \mathbb{R} .
- En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > 0$.

Exercice 11

(Croissance et décroissance)

- Démontrer que la fonction définie par $f(x) = 3x + 2$ est croissante sur \mathbb{R} .
- Démontrer que la fonction définie par $f(x) = 2 - x$ est décroissante sur \mathbb{R} .
- Démontrer que la fonction définie par $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$ est décroissante sur $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$.
- Démontrer que la fonction définie par $f(x) = -2x^2 + x^4$ est décroissante sur $[0; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$.

Exercice 12

(Probabilités d'événements) On considère l'expérience suivante : on lance simultanément deux dés équilibrés **numérotés de 5 à 10**.

- Décrire rapidement l'univers de l'expérience, que l'on notera Ω .
- Justifier que les issues obtenues sont équiprobables.
- Réaliser les tableaux à double entrée suivants :
 - L'un représentant celui de la somme des deux dés¹.
 - L'autre représentant celui du produit des deux dés².
- On note les événements suivants :

A : « Obtenir que la somme des deux nombres obtenus soit égal à 7 ».

B : « Obtenir que la somme des deux nombres obtenus soit égale à 15 ».

C : « Obtenir que le produit des deux nombres obtenus soit inférieur ou égal à 45 ».

D : « Obtenir que le produit des deux nombres obtenus soit supérieur à 65 ».

1. La somme de deux nombres est l'addition des deux nombres.

2. Le produit de deux nombres est la multiplication des deux nombres.

E : « Obtenir que la somme des deux nombres soit supérieure ou égale à 12, **et** dont le produit est inférieur ou égal à 40 ».

Question : Calculer les probabilités des événements A , B , C , D et E .

Exercice 13

(Bonus) Jean dispose d'un gâteau d'anniversaire circulaire et uniforme (pas de glaçage ni de décoration au dessus). Il a invité 8 amis à son anniversaire.

Question : Comment découper le gâteau en 8 parts **équitables** en seulement **3 tranchers de couteau** ?