Devoir maison n° 1

$\boxed{\textbf{Tous les résultats seront encadrés.}}$ +1 point sur la note finale si les résultats sont encadrés, −1 point si non. −1 point par jour non rendu. 1 point sera affectés à la propreté de la copie. Ce devoir maison (DM) sera suivi du devoir surveillé (DS) n° 2. Si la note de ce DM est supérieure à la note de DS, le DM comptera dans votre moyenne avec un coefficient 1. Si la note de DS est supérieure à la note de DM, le DM comptera comme un bonus coefficient 2 dans votre moyenne finale. Dans ce cas là, ce DM ne sera donc compté que s'il affecte positivement votre moyenne finale.

En résumé, vous avez tout intérêt à faire ce devoir **sérieusement et de comprendre ce que vous faites** afin de vous préparer au mieux pour le devoir surveillé.
Le devoir surveillé sera compbtabilisé coefficient 5.

Un conseil : N'attendez pas les derniers jours pour faire ce DM, ou vous risquerez d'être submergé à la dernière minute. Faites-le plutôt régulièrement, à hauteur d'au moins un exercice par jour.

Exercice 1

(Calcul numérique) Calculer en donnant les résultats sous la forme d'une fraction irréductible. Détaillez les calculs.

$$a = \frac{2+\frac{2}{3}}{3-\frac{1}{2}} \qquad c = \frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}{\frac{5}{4}-4} \qquad e = \left(2-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{5}{2}\times 3-\frac{2}{3}\right)$$

$$b = \left(\frac{3}{2}+2\right)\times\frac{2}{5} \qquad d = \frac{2+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}-5\times\frac{2}{3}} \qquad f = \frac{1}{\frac{2}{3}}\times\frac{\frac{3}{4}}{5}.$$

Exercice 2

(Simplifications de puissances) Simplifier les expressions suivantes :

$$a = \left(2^3\times 5^2\right)^3\times 2^4\times 5^2 \qquad b = \left(\frac{3^2}{2^3}\right)^4\times\left(\frac{2}{3^3}\right)^2 \qquad c = 16^3\times 27^2$$

$$d = \frac{8^3\times 4^2}{32^4} \qquad e = \frac{\left(2^4\times 3^2\right)^2}{\left(2^3\times 3\right)^3} \qquad f = \frac{\left(x^2y\right)\left(xy^3\right)^2}{\left(x^3y^2\right)^3}$$

Exercice 3

(Résolution d'équations) Résoudre les équations suivantes :

(a) $\frac{x}{3} = 2+1$

(b) $\frac{2x+3}{2} = \frac{1}{5}$

(c) $2 = \frac{3x-\frac{1}{2}}{4}$

(d) $\frac{5x-1}{3} = 2x$

(e) $\frac{1-\frac{1}{5}x}{2} = \frac{3x}{5}$

(f) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(2-\frac{x}{-2}\right) = -\frac{2}{3}x$

Exercice 4

(Résolution d'équations) Résoudre les équations suivantes :

(1) $(2x-1)^2+(x-1)(2x-1)=0$
(2) $(x-1)(2x-2)+(2x-2)(5-2x)=0$
(3) $(3x-1)(2x+2)+3(5-2x)(x+1)=0$
(4) $(4x+6)(1-2x)=5(2x+3)^2$
(5) $\dfrac{x-3}{x+2}-\dfrac{-x-2}{3x+1}=0$
(6) $\dfrac{2x}{4x+1}=\dfrac{x+1}{2x-1}$

Exercice 5

(Problème d'optimisation) Un agriculteur dispose de 200 mètres de clôture. À l'aide de cette clôture, il souhaite entourer la plus grande partie de son champ ; cette partie doit avoir une forme rectangulaire. On note x et y la longueur et la largeur respectives de cette partie rectangulaire. On note l'aire de cette partie clôturée, la fonction à deux variables $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}(x,y)=xy$$

(a) Montrer que :

$$\mathcal{A}(x,y)=\frac{1}{4}(x+y)^2-\frac{1}{4}(x-y)^2.$$

(b) Justifier pourquoi $2x+2y=200$.

(c) Montrer que **sous la contrainte** $x+y=100$, maximiser $\mathcal{A}$ revient à maximiser la fonction

$$f(t)=50^2-\frac{1}{4}\left(2t-100\right)^2,$$

pour $t\in[0;100]$.

(d) Justifier pour quel $t\in[0;100]$ la fonction f est maximale. En déduire les dimensions de x et y afin que l'aire de la partie clôturée soit maximale. Donner l'aire du champ obtenu en m^2.

Exercice 6

(Points d'intersection) On considère les deux fonctions f et g dont les images d'un nombre x sont données par les relations :

$$f(x)=-\frac{1}{4}x^2+x+3$$
$$g(x)=\frac{x}{2}+1$$

(a) Représenter $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives de f et g sur un repère orthonormé.

(b) i. Déterminer les valeurs des réels a et b vérifiant l'égalité :

$$-x^2+4x+12=(x-6)(ax+b).$$

ii. En déduire les solutions des équations $f(x)=0$.

(c) i. Établir l'égalité suivante :

$$-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+2=-\frac{(x-4)(x+2)}{4}.$$

ii. Résoudre l'équation : $f(x)=g(x)$.

iii. En déduire les coordonnées des points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Exercice 7

(Résolution d'inéquations) Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$. Donner les solutions sous forme d'ensemble.

(1) $2x \geq 0$
(2) $3x + 1 \geq 2$
(3) $3x - 3 > 0$
(4) $\dfrac{3}{7} + \dfrac{1}{2}x < 2$
(5) $-\dfrac{5}{2} + \dfrac{\sqrt{2}x}{-3} > 0$
(6) $\dfrac{4\sqrt{8}x + 1}{5} > \dfrac{3\sqrt{2}}{4}x$

Exercice 8

(Résolution d'inéquations) Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$ en établissant un tableau de signes. Donner les solutions sous forme d'ensemble.

(1) $x^2 > x$
(2) $x^2 - 4 \geq 0$
(3) $(2x + 1)(x + 3) \geq 0$
(4) $(x + 1)^2(2x + 3) \leq 0$
(5) $(3 - x)(2x + 5)(x + 3) \geq 0$
(6) $(2x + 3)(2 - x) + (2 - x)(3x - 1) \geq 0$
(7) $(2x - 1)(2 - x) - \left(\dfrac{x}{2} + 1\right)(5 - 4x) \leq 0$
(8) $(x - 1)^2 - (2x + 1)^2 \geq 0$

Exercice 9

Résoudre l'inéquation dans $\mathbb{R}$. Donner la solution sous forme d'ensemble.

$$\frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} < 0.$$

Exercice 10

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = x^3 - 3x + 2.$$

(a) Établir l'égalité suivante : $f(x) = (x + 2)(x - 1)^2$.
(b) Dresser le tableau de signes de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
(c) En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > 0$.

Exercice 11

(Croissance et décroissance)

(a) Démontrer que la fonction définie par $f(x) = 3x + 2$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
(b) Démontrer que la fonction définie par $f(x) = 2 - x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
(c) Démontrer que la fonction définie par $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$ est décroissante sur $\left]-\infty; \dfrac{1}{2}\right[$.
(d) Démontrer que la fonction définie par $f(x) = -2x^2 + x^4$ est décroissante sur $[0; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$.

Exercice 12

(Probabilités d'événements) On considère l'expérience suivante : on lance simultanément deux dés équilibrés **<u>numérotés de 5 à 10</u>**.

(a) Décrire rapidement l'univers de l'expérience, que l'on notera Ω.
(b) Justifier que les issues obtenues sont équiprobables.
(c) Réaliser les tableaux à double entrée suivants :

1. L'un représentant celui de la somme des deux dés [1].
2. L'autre représentant celui du produit des deux dés [2].

(d) On note les événements suivants :

A : « Obtenir que la somme des deux nombres obtenus soit égal à 7 ».
B : « Obtenir que la somme des deux nombres obtenus soit égale à 15 ».
C : « Obtenir que le produit des deux nombres obtenus soit inférieur ou égal à 45 ».
D : « Obtenir que le produit des deux nombres obtenus soit supérieur à 65 ».
E : « Obtenir que la somme des deux nombres soit supérieure ou égale à 12, **et** dont le produit est inférieur ou égal à 40 ».

Question : Calculer les probabilités des événements A, B, C, D et E.

Exercice 13

(Bonus) Jean dispose d'un gâteau d'anniversaire circulaire et uniforme (pas de glaçage ni de décoration au dessus). Il a invité 8 amis à son anniversaire.

Question : Comment découper le gâteau en 8 parts **équitables** en seulement **3 tranchers de couteau** ?

1. La somme de deux nombres est l'addition des deux nombres.
2. Le produit de deux nombres est la multiplication des deux nombres.