《数值》有效算法：计算量是问题规模n的多项式函数

「单纯形有一些 2^n」

苏文董

No.

Date

单纯形

线性规划 目标函数 $\max/\min\ z=\sum^{n} c_i x_i$ (线性) $\xrightarrow{\text{标准形式}}$ 目标函数最大 $\max/-\min\ z=\sum^{n} c_i x_i+\sum 0 s_i$

约束条件 $\begin{cases}\sum^{n} a_{mi} x_i \lesseqgtr b_m & \text{(线性)} \\ x_{1\sim n}\geq 0 & \text{(非负连续)}\end{cases}$ 决策变量

subject to s.t. $\begin{cases}\text{化等式} \pm \text{松弛变量 } s_i \text{ (slack/surplus)} & \text{(右端项非负)} \\ \text{决策变量, 松弛变量} \geq 0 & \text{(无限制则令 } x=x'-x'')\end{cases}$

图解法 2个变量 Co. 可行域为凸多边形 (convex)，最优解必在某顶点得到，无穷多最优解 平行，无界解 无最优解，无可行解 $\varnothing$

灵敏度 最优解不变的系数 c_i, b_m, a_{mi} 的变化范围 (最优值可变) 紧约束/有效约束 松弛=0

对偶价格/影子价格 在约束条件常数项 b_m 增加一个单位，最优目标函数值改进的数量 (在灵敏度范围内)

100%法则 c_i/b_i 有多个在变化时，$\sum\left(\frac{\text{增加量}}{\text{上限}-\text{当前}} \text{ 或 } \frac{\text{减少量}}{\text{当前}-\text{下限}}\right)\leq 100\%$ $\Rightarrow$ 最优解/对偶价格不变

单纯形法 (simplex algorithm) 从某一顶点(基可行解)出发，转换到另一个更优的顶点，判断是否已达到最优解

单纯形表

$\max z=c_1x_1+c_2x_2 (-Ma_1)$

$\begin{cases} a_{21}x_1+a_{22}x_2\leq b_2 & 0 \\ a_{11}x_1+a_{12}x_2 (+a_1) \geq b_1 \end{cases}$

第几回迭代 基 (base)	C_B	x_1 c_1	x_2 c_2	s_1 0	s_2 0	a_1 $-M$	b	$\frac{b_m}{a_{mix}}$ ($a=0$的跳过)
s_2	0	a_{21}	a_{22}	0	1	0	b_2	找最小者作出基变量 (负的不算) 都负为无界解
a_1	$-M$	a_{11}	a_{12}	-1	0	1	b_1	
$z_i=$ 对应乘完后求和				M	0	$-M$	z	
$\sigma_i=c_i-z_i$	找最大者作入基变量 i ($\forall\sigma<0$ 则 b 列就是最优解) (∃非基的 $\sigma=0$，无穷多最优解)							

1. 写成标准形式 $Ax=b$
2. 选基变量 (非基变量最后取值会=0)
3. 圈出出入基交叉的位置
4. 换基，初等行变换使 $\boxed{\text{基行列}}$ 始终为单位阵

大M法 $\geq$ 对应的 $-s_i$ 不能用于作基，引入人工变量 a，给目标函数加罚因子 $-Ma$，最后必 $a=0$ (若a最后没出基，无可行解)

两阶段法

退化解 有多个相同的最小 $\frac{b_m}{a_{mix}}$，则下回迭代出现多个基变量取零值，目标没改善，可能死循环

勃兰特规则 (Bland) 1. 选 $\sigma_i>0$ 中下标最小者 2. 比值一样最小时选下标最小者 [可以证明必可避循环]

最后一回

x_1	c_1'	1	0	$\boxed{B^{-1}}$ $[x_B]$
x_2	c_2	0	1	
z_i	乘			读出对偶价格, z_{max}
σ_i				

记 $B=\begin{bmatrix}\text{最终基} \\ \text{原系数}\end{bmatrix}$（$x_1, x_2$），必有 $B^{-1}=\begin{bmatrix}\text{原基阵} \\ \text{终状态}\end{bmatrix}$（$s_2, a_1$），$x_B=B^{-1}\begin{bmatrix}\text{原} \\ b \\ \text{列}\end{bmatrix}$

原问题 (L.P.) $\max z=\sum_i c_i x_i$ $(z=cX)$

s.t. $\sum_i a_{mi}x_i \leq,=,\geq b_m$ $(AX\leq b)$

$x_i\geq 0$, 无非负限制, $x_i\leq 0$

对偶问题 (D.P.) $\min f=\sum_m b_m y_m$ $(f=b^T Y)$

s.t. $y_m\geq 0$, 无非负限制, $y_m\leq 0$ $(A^T Y\geq c^T)$

$\sum_m a_{mi} y_m \geq c_i$

形. 原问题取最优解，其对偶价格就是对偶问题的最优解，最优值相等 (无界解 $\longleftrightarrow$ 无可行解)

弱对偶性 可行解满足 $c\cdot\hat{X}\leq b^T\cdot\hat{Y}$ (最优解时取等号) **强对偶性** 都有可行解，则都有最优解

对偶单纯形法 保持 $\forall\sigma_i\leq 0$，但 $b<0$ (非可行解)，找 b 最负行 m 出基，$\frac{\sigma_i}{a_{mi}}$ (且 $a<0$，若都 >0 无可行解) 最小列入基，最终 $\forall b\geq 0$

Operation Research

运筹学

一般建模方法 1.穷举出变量(多维下标) 2.约束条件化线性 3.目标函数化简

运输问题化产销平衡，求运费最少(虚构/拆分产地、销地，中转站穷举，空出支票运费为零，禁运运费为M)

表上作业

产\销	销地1	销地n	产量
产地1	运量 运费		
产地m		c_{mn}	
销量			总销=总产

产\销	销地1	销地n	u_i
产地1	基	基 c_{1n}	取 $u_1=0$
产地m	基	σ_{mn}	
v_j		c_{1n}	对偶价格

最小元素法 1.找最小的 c_{ij} 开始分配 2.每次只能划去一个耗尽的行列，最后共填了 $(m+n-1)$ 个非负运量为基(非基运量=0)

伏格尔法 1.求各行列最小、次小之差 2.从差额最大行、列开始用最小元素法 3.划去后重新计算差额

位势法 1.由基的 $\sigma_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j)=0$ 解出所有的 u、v 2.解出非基变量的检验数 σ_{mn}

3.若非基的 σ 都 ≥ 0 则为最优解 4.有负 σ，则它入基，画闭回路，调它运量最大，被扣到零者出基

闭回路从非基出发，碰到基才可转 $90°$ [可以证明存在唯一] 5.若最后存在非基的 $\sigma=0$，则有多个最优解

纯整数规划变量都为非负整数 0-1规划所有的变量都只取0或1 互斥型约束 $\sum ax \leq yM$，$y=0,1$ 表示选 x 与否

(非线性规划难解，初值敏感，局部最优(Local Optimal Solution)尽量化为0-1规划)

分枝定界法 1.按线性规划解得最优 $\bar{z}$，若不符合整数条件，观察出一个附近的整数可行解作 $\underline{z}$

2.选最优解中最远离整数的变量 b_j，分枝为两个线性规划 $x_j \leq [b_j]$ 和 $x_j \geq [b_j]+1$，分别求解

3.分枝的最优 z^*，若 $\leq \underline{z}$ 则剪掉这枝，若 $> \underline{z}$ 且仍不满足整数条件则继续分，直到 $\underline{z}=z^*=\bar{z}$ 为止

目标规划 多目标决策问题，按优先级降低依次求解 优先因子 $P_k \gg P_{k+1}$ (解前级时不用考虑次级，次级用前级结果)

正/负偏差变量 $d^+/d^- \geq 0$，决策值超过/未达目标值的部分(不算决策变量) $d^+ \times d^- = 0$

绝对约束/硬约束不满足就是非可行解 目标约束/软约束追求尽量满足 罚数权重 w (同一优先级)

目标准则函数 $\min z = \sum_{k=1} P_k \left(\sum w_j d_k^{\pm} \right)$

参考文献

数学模型 (第 4 版), 姜启源, 高等教育出版社

吴祁宗主编，运筹学（第 3 版），北京：机械工业出版社，2013 年

博弈论基础作者: 高峰罗伯特・吉本斯出版社: 中国社会科学出版社

dynamic programming

动态规划

最优性原理 最优策略的子策略在子过程也是最优的 ⇐ 最优性定理 ⟺ 基本方程

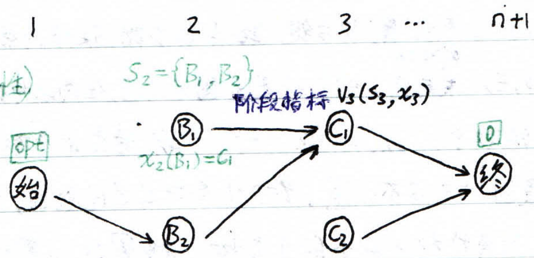
阶段变量 k =

状态变量 $s_k \in$ 可达状态集合 S_k (须满足无后效性)

决策变量 $x_k(s_k) \in$ 允许决策集合 $D_k(s_k)$

全过程策略 $p_{1,n}(s_1) \in$ 允许策略集合 P

k子过程策略 $p_{k,n}(s_k)=\{x_k(s_k),\dots,x_n(s_n)\}$



标号法：从该点到终点的最优值

指标函数 $V_{k,n}=\sum_k^n$ 路程，或 $=\prod_k^n$ 投资　最优值函数 $f_k(s_k)=\underset{x_k\in D_k}{opt} V_{k,n}$ (opt为max或min)

状态转移方程 $s_{k+1}=T_k(s_k,x_k)$　$s_3=T_2(B_2,C_1)=C_1$

动态规划基本方程(逆序解法) $f_k(s_k)=\underset{x_k\in D_k}{opt}\{V_k(s_k,x_k)+f_{k+1}(s_{k+1})\}$，边界条件 $f_{n+1}(s_{n+1})=0$

网络计划

Microsoft Project

双代号网络计划图 两节点间至多1条箭线(否则用虚工序加节点)，起点、终点各1个，不能有缺口、回路

紧前工序 → (i) $\xrightarrow[\text{持续时间D}]{\text{紧后工序}}$ (j) (i<j)

时间参数

ES	LS	TF
EF	LF	FF

S开始 E正推最早 TF不影响工期的自由时间

F完成 L倒推最迟 FF不影响紧后ES的自由时间

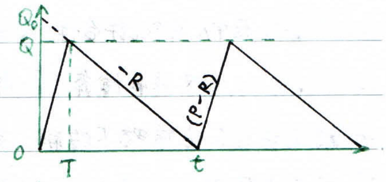
关键路线 持续时间最长(决定整个工期)，尽量放置在中央或用双箭线

存储论

inventory

存储缓解供求关系的必要有效的方法和措施

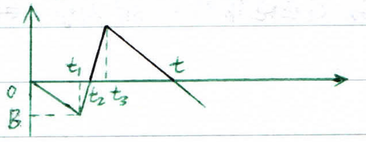
需求D,间断或均匀,确定或随机 补充Q,订购或生产 费用 C_1 存储费, $C_3(+KQ)$ 订货费, C_2 缺货费 (不允许即M)



不允许缺货,生产速度 $P=\frac{Q_0}{T}$, 需求速度 $R=\frac{Q_0}{t}$ $\left[C(t)=C_1\cdot\frac{1}{2}(P-R)T+\frac{C_3}{t}\right]$

Economic Odering Quantity

经济订购批量 $Q_0=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}\frac{P}{P-R}}$, $t_0=\frac{Q_0}{R}$, $C(t_0)=\sqrt{2C_1C_3R\frac{P-R}{P}}$



允许缺货 $\left[C(t_1,t_2)=\frac{1}{t}\left[\frac{1}{2}C_1(P-R)(t_3-t_2)(t-t_2)+\frac{1}{2}C_2Rt_1t_2+C_3\right]\right.$ 消 t_3、t_1, 偏导=0]

$t_2=\frac{C_1}{C_1+C_2}t_0$, $t_0=\sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}\frac{C_1+C_2}{C_2}\frac{P}{P-R}}$, $Q_0=Rt_0$, $C(t_0,t_2)=\sqrt{2C_1C_3R\frac{C_2}{C_1+C_2}\frac{P-R}{P}}$

(s,S)随机存储策略 每个周期末,若存货 < s 就订货,使存量达到S

设存货 x, 订货 u (周期初到), 起订费 c_0, 进货单价 c_1, 一个周期的贮存费 c_2, 缺货损失 c_3 (等于售价)

一周总费用的期望 $J(u)=c_0+c_1u+L(x+u)$ $(u>0)$, $=L(x)$ $(u=0)$ 不订货 $L(x)=c_2\int_0^x(x-r)p(r)dr+c_3\int_x^\infty(r-x)p(r)dr$

$S=x+u$ 满足 $\frac{dJ}{du}=c_1+c_2\int_0^S p(r)dr-c_3\int_S^\infty p(r)dr=0$ 时 J 最小 $\left[\int_0^\infty p(r)dr=1\right]$ $\frac{\int_0^S}{\int_S^\infty}=\frac{c_3-c_1}{c_2+c_1}$

[不订货条件 $L(x)\leq c_0+c_1(S-x)+L(S)$] 记 $I(x)=c_1x+L(x)$, 则 s 为 $I(x)=c_0+I(S)$ 最小正根时 J 最小 (图解法)

排队论

queueing theory

输入过程 顾客相互独立,分布平稳,逐个到达 排队规则 各列不能转移,不中途退出 服务机构 只讨论逐个服务

Kendall

肯德尔记号 X到达间隔分布/Y服务时间分布/c服务台数/N系统容量/m顾客源量/FCFS 服务规则

First Come First Served

系统顾客 L_s = 排队顾客 L_q + 正被服务 $\xleftarrow[\times\lambda_e]{\text{Little公式}}$ 逗留时间 W_s = 等待时间 W_q + 服务时间 $\frac{1}{\mu}$

Markov / deterministic / Erlang / general

M马尔可夫性, D确定性, E_k k阶爱尔朗分布, G一般分布 (知道期望和方差)

相继到达的间隔时间 $T\sim E(\lambda)$ $\Longleftrightarrow$ t时间内到达顾客数 $n\sim\Pi(\lambda t)$ $\left[P_n(t)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t},\ 1-P_0(t)=P(T\leq t)\right]$ $(t>0, n\in N)$

$M\sim\lambda/M\sim\mu/1/\infty/\infty$ [设 $L_s(t)=n$ 的概率 $P_n(t)$, 微元 $(t+\Delta t)$ 得 $\frac{dP_n(t)}{dt}=\lambda P_{n-1}(t)+\mu P_{n+1}(t)-(\lambda+\mu)P_n(t)$

$\frac{dP_0(t)}{dt}=-\lambda P_0(t)+\mu P_1(t)$, 稳态 P_n 与t无关, 得 $P_n=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^nP_0$] 服务强度 $\rho=\frac{\lambda}{\mu}<1$ (否则排队无限远) $\left[\sum_0^\infty P_n=1\right]$ $P_0=1-\rho$

traffic intensity

期望 $L_s=\left[\sum_0^\infty nP_n=\right]\frac{\rho}{1-\rho}$, $L_q=\left[\sum_0^\infty(n-1)P_n=L_s-\rho=\right]\frac{\rho^2}{1-\rho}$, $W_s=\left[\sim E(\mu-\lambda)\right]\frac{1}{\mu-\lambda}$, $W_q=\left[W_s-\frac{1}{\mu}=\right]\frac{\rho}{\mu-\lambda}$

$M/M/1/N/\infty$, $\rho\neq1$, $P_0=\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}$, $L_s=\frac{\rho}{1-\rho}-\frac{(N+1)\rho^{N+1}}{1-\rho^{N+1}}$, $L_q=L_s-(1-P_0)$ 有效到达率 $\lambda_e=\lambda(1-P_N)$ $\left(1-P_0=\frac{\lambda_e}{\mu}\right)$, $W_s=\frac{L_s}{\lambda_e}$

$M/M/c/\infty/\infty$, $P_0=\left[\sum_{k=0}^{c-1}\frac{\rho^k}{k!}+\frac{\rho^c}{c!}\frac{1}{1-\rho}\right]^{-1}$, $P_n=\frac{\rho^n}{n!}P_0(n\leq c)$, $=\frac{\rho^n}{c!c^{n-c}}P_0(n>c)$, $L_q=\left[\sum_{n=c+1}^\infty(n-c)P_n=\right]\frac{c^c\rho^{c+1}}{c!(1-\rho)^2}P_0$ (M/M/c比c个M/M/1/好)

Pollaczek-Khintchine

M/G/1 P-K公式 $L_s=\rho+\frac{\rho^2+\lambda^2D(T)}{2(1-\rho)}$, $\rho=\lambda E(T)$ (Little公式仍适用)

博奕论

局中人 $i\in I$，均为理智（不侥幸，从最不利中选损失最少） 策略集 $S_i=\{\alpha_j\}$，供选策略 $j\ge 2$

局势 各局中人选定的策略组 $s=(s_{1\sim n})\in S=S_1\times S_2\times\cdots S_n$ 赢得函数/支付函数 (pay-off) 局中人 i 赢得 $H_i(s)$

非合作博弈 局中人间不允许合作 完全信息博弈 每个局中人都清楚所有局中人的 S_i 与 $H_i(s)$ 零和博弈 $\sum H_i=0$ 有限博弈 i 有限

矩阵博弈 2人有限零和博弈 赢得矩阵 对局中人1，$a_{ij}=H_1(\alpha_i,\beta_j)$，对局中人2，$A_2=-A_1$，记 $G=\{S_1,S_2;A\}$

平衡局势 G在纯策略下的解，局中人在每个策略中取最坏的H，选输得最少的为最优纯策略，组合成纯局势

Th G在纯策略下有解 $a_{i^*j^*}$ $\Leftrightarrow$ $a_{i^*j^*}$ 是矩阵A的一个鞍点 $a_{ij^*}\le a_{i^*j^*}\le a_{i^*j}$

当局中人2的至多损失 > 局中人1的至少赢得时，G无纯策略的解

混合策略 S_i^* 给出策略的概率分布） 相当于双方混合策略下的解（必有 [线性规划]构造

非零和/双矩阵博弈 （要对纯策略保密）

非合作博弈，平衡局势不一定是最好的结果

纳什定理 非合作n人博弈（在混合策略意义下）平衡局势一定存在

cooperative n-person game Nash equilibrium

合作博弈 → 纳什均衡（纯） 每一方的决策对于他方的决策都达到最优 （不一定存在）

Shapley 值 〈数模〉P393

策略类

Analytic Hierarchy Process

层次分析法 目标层 goal「选手机」 准则层 criterion「性能，价格」 方案层「手机1，手机2」

成对比较矩阵 $a_{ij}=\frac{C_i}{C_j}$ 对上层的重要性之比 正互反矩阵 (positive reciprocal) $a_{ij}>0$，$a_{ji}=\frac{1}{a_{ij}}$ → $a_{ii}=1$

一致性矩阵 $a_{ij}\cdot a_{jk}=a_{ik}$ → 秩=1，非零 $\lambda=n$，任一列都是其特征向量

权向量 成对比较矩阵的对应 $\lambda=n$ 的和归一化的特征向量，不是一致阵则用最大特征根的

一致性指标 [$\sum\lambda=n$, $\lambda\ge n$] 其余的 λ 的平均值 $CI=\frac{\lambda-n}{n-1}$

随机一致性指标 a用1-9尺度，随机构造正互反阵，计算CI平均值RI

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
RI	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49

一致性检验 一致性比率 $CR=\frac{CI}{RI}<0.1$ 第2层对第1层那个目标

组合权向量 第3层对第1层 $w=[w_1^{(3)},\cdots,w_n^{(3)}][w_{n}^{(2)}]$ $w_1^{(3)}=[w_{nm}]$（第3层对第2层的准则）

人数 $p=\sum^m p_i$ 分席位 $n=\sum^m n_i$，精确的席位 q_i 是小数 相对不公平度 $r_i=\frac{p_i/n_i-p_j/n_j}{p_j/n_j}$ $(\frac{p_i}{n_i}\ge\frac{p_j}{n_j})$

公平席位分配 份额性 $([q_i]\le n_i\le[q_i]+1)$ 席位单调性（n增加，各 n_i 不减少） 人口单调性（p_i 相对 p_j 增加，不会 n_i 减 n_j 加）

Huntington 除数法：用 $\frac{p_i}{d(n_i)}$ 作n增加1时各方的优先级，常用 $d(0)=0$ 表示各方自动分得1席后继续

Greatese R 最大剩余法	除数法	Greatest Divisors 最大除数法	Major Fraction 主要分数法	Equal Proportions 相等比例法	Harmonic Mean 调和平均法	Smallest Divisors 最小除数法	
给 $q_i-[q_i]$ 最大的	$d(n)$	$n+1$	$n+\frac{1}{2}$	$\sqrt{n(n+1)}$	$\frac{2n(n+1)}{2n+1}$	n	满足6个性质
满足性质1	Quota Method 份额方法 满足两个性质	偏向人多方		r_i 最小		偏向人少方	

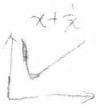
可以证明，对 $m\ge 4$，$n\ge m+3$ 不存在满足3个性质的分配方法

公正选举 P282

不存在满足 Arrow 公理

联合尺度

〈应用题〉?



马氏链〈概统〉

No.

Date

经济类

utility function

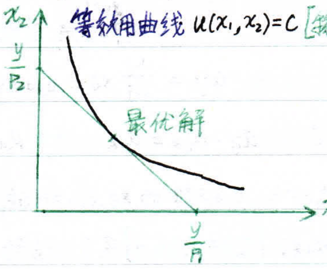
效用函数 人们对事物的主观价值、偏爱倾向、风险态度（对比提问法）

设物品1,2单价 p 数量 x 有钱 y，则约束为 $p_1x_1+p_2x_2=y$

[拉格朗日乘子法 $L(x_1,x_2,\lambda)=u(x_1,x_2)+\lambda(y-p_1x_1-p_2x_2)$，$\frac{\partial L}{\partial x}=0$]

最优解 (x_1,x_2) 满足 $\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big/\frac{\partial u}{\partial x_2}=\frac{p_1}{p_2}$ 边际效用 $\frac{\partial u}{\partial x}$

等效用曲线 $u(x_1,x_2)=c$ [物以稀为贵]



Douglas

道格拉斯生产函数 设技术 c 资金 K 劳力 L，产值 $Q=cK^{\alpha}L^{\beta}$，$0<\alpha,\beta<1$

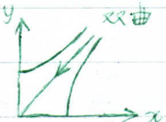
设贷款利率 r 劳力工资 w，效益 $S=Q-rK-wL$ [微分法] 资金劳力最佳分配 $\frac{K}{L}=\frac{\alpha}{\beta}\frac{w}{r}$

投入产出模型 外部对各部门需求 d_i，各部门之间需求 x_{ij}，则第 i 部门总产出 $x_i=\sum_j x_{ij}+d_i$

直接消耗系数 $a_{ij}=\frac{x_{ij}}{x_j}$ → $[x]=[A][x]+[d]$ → $(I-A)x=d$

正规战模型 $\begin{cases} x'=-ay, & x_0 \\ y'=-bx, & y_0 \end{cases}$

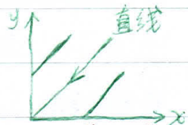
$a=$ 射击率 $r\cdot$ 命中率 p



解为 $ay^2-bx^2=$ 常数 **平方律** y 获胜条件 $\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2>\frac{b}{a}$

游击战模型 $\begin{cases} x'=-cxy, & x_0 \\ y'=-dxy, & y_0 \end{cases}$

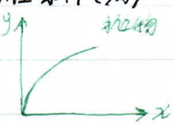
命中率 $=\frac{\text{射击面积}}{\text{敌人活动面积}}$



解为 $cy-dx=$ 常数 **线性律** y 获胜条件 $\frac{y_0}{x_0}>\frac{d}{c}$

混合战模型 $\begin{cases} x'=-cxy, & x_0 \\ y'=-bx, & y_0 \end{cases}$

x 游击 y 正规



解为 $cy^2-2bx=$ 常数

y 获胜条件 $\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2>\frac{2b}{cx_0}$

《微分方程》稳定性 P243　$p=-\mathrm{tr}A$　$q=|A|$　$p>0, q>0$ 则 $(0,0)$ 处稳定

No.

Date

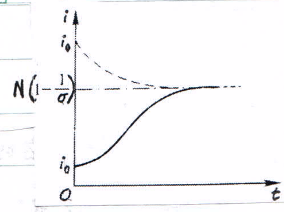
生物类

传染病模型 总人数 $N=$ 易感染 $s(t)$ (susceptible) $+$ 已感染 $i(t)$ (infective)

SI模型 日接触率 i人每人每天使λs人感染 [$i'=\lambda si$ 的解是 $i=\frac{N}{1+(\frac{1}{i_0}-1)e^{-\lambda t}}$] $i=\frac{N}{2}$ 时 i' 最大

SIS模型 日治愈率 每天治愈 μi 人 [$i'=\lambda si-\mu i=-\lambda i[i-(1-\frac{1}{\sigma})]$]

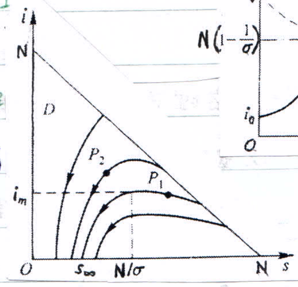
平均传染期 $\frac{1}{\mu}$ 接触数 $\sigma=\frac{\lambda}{\mu}$



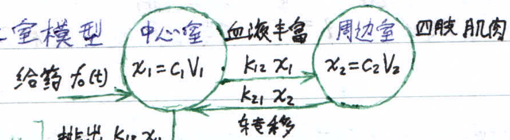
SIR模型 治愈后免疫，移出总人数 $r(t)$ (removed) $\begin{cases} i'=\lambda si-\mu i, & i_0 \text{ 数值解} \\ s'=-\lambda si, & s_0 \text{ 相轨线} \end{cases}$

交换数 1个病人与 σs 个健康人交换

不蔓延条件 $s_0\leq\frac{N}{\sigma}$ 免疫预防 $r_0\geq(1-\frac{1}{\sigma})N$ 参数估计 $\sigma=\frac{\ln s_0-\ln s_\infty}{s_0-s_\infty}$



房室模型 (compartment model) 药物在同一房室均匀分布，在不同房室间按k转移 二室模型



乱窦状模型 k为常数

[齐次通解 $C_i(t)=A_ie^{-\alpha t}+B_ie^{-\beta t}$, $\alpha+\beta=k_{12}+k_{21}+k_{13}$, $\alpha\beta=k_{21}k_{13}$]

快速静脉注射 $f_0(t)=0$, $C_1(0)=\frac{D_0}{V_1}$, $A_1=\frac{D_0(k_{21}-\alpha)}{V_1(\beta-\alpha)}$, $B_1=\frac{D_0(\beta-k_{21})}{V_1(\beta-\alpha)}$, $A_2=\frac{D_0k_{12}}{V_2(\beta-\alpha)}=-B_2$

恒速静脉滴注 $f_0(t)=k_0$ 口服、肌肉注射 $f_0(t)=D_0k_{01}e^{-k_{01}t}$

参数估计 设 $\alpha<\beta$, $t\to\infty$ 得 α，再在小t处测 β, $C_1(0)=A+B=\frac{D}{V_1}=k_{13}\int_0^\infty C_1(t)dt=k_{13}(\frac{A}{\alpha}+\frac{B}{\beta})$，定出 $k_{13}=\frac{\alpha\beta(A+B)}{\alpha B+\beta A}$

指数增长模型 $x'=rx \to x(t)=x_0e^{rt}$ 参数估计 $\ln x=rt+\ln x_0$

阻滞增长模型 (logistic) 人口容量 x_m，增长率 $r(x)=r(1-\frac{x}{x_m})$ [分离变量] $x(t)=\frac{x_m}{1+(\frac{x_m}{x_0}-1)e^{-rt}}$，$\frac{x_m}{2}$ 时 x' 最大

$\ln(\frac{x_m}{x}-1)$

参数估计 $\frac{x'}{x}=r-\frac{r}{x_m}x$

产量模型 $h(x)=Ex$ 捕捞强度E，单位时间捕捞率 $E^*=\frac{r}{2}$ 时获得最大持续产量，$x_1=\frac{x_m}{2}$

[$x'=r(1-\frac{x}{x_m})x-Ex=0$ 的解是 $x_0=0$ 和 $x_1=x_m(1-\frac{E}{r})$] $E>r$ 稳定至 x_0，$E<r$ 稳定至 x_1

种群竞争 $\begin{cases} x_1'=r_1(1-\frac{x_1}{x_{1m}}-\sigma_1\frac{x_2}{x_{2m}})x_1 \\ x_2'=r_2(1-\sigma_2\frac{x_1}{x_{1m}}-\frac{x_2}{x_{2m}})x_2 \end{cases}$

平衡点	p	q	稳定条件
$P_1(N_1,0)$	$r_1-r_2(1-\sigma_2)$	$-r_1r_2(1-\sigma_2)$	$\sigma_1<1,\sigma_2>1$
$P_2(0,N_2)$	$-r_1(1-\sigma_1)+r_2$	$-r_1r_2(1-\sigma_1)$	$\sigma_1>1,\sigma_2<1$
$P_3\left(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2},\frac{N_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right)$	$\frac{r_1(1-\sigma_1)+r_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}$	$\frac{r_1r_2(1-\sigma_1)(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}$	$\sigma_1<1,\sigma_2<1$
$P_4(0,0)$	$-(r_1+r_2)$	r_1r_2	不稳定

$\sigma_1=\frac{2\text{消耗1资源}}{1\text{消耗1资源}}$ (阻滞作用相同时 $\sigma_1\sigma_2=1$)

[解方程组 $x_1'=0$, $x_2'=0$ 得4个平衡点 $P_{1\sim4}$，第一象限]

竞争排斥原理 单个成员的消耗相同，则 x_m 小的一方灭绝 [$\sigma_1\frac{x_{1m}}{x_{2m}}=1$, $\sigma_2\frac{x_{2m}}{x_{1m}}=1$]

种群依存 $\begin{cases} x_1'=r_1(1-\frac{x_1}{x_{1m}}+\sigma_1\frac{x_2}{x_{2m}})x_1 \\ x_2'=r_2(-1+\sigma_2\frac{x_1}{x_{1m}}-\frac{x_2}{x_{2m}})x_2 \end{cases}$

(x_2 离不开 x_1，$-r_2$ 为死亡率)

(公式改成 $-\sigma_1$ 即可)

prey-predator by Volterra $\begin{cases} x'=(r-ay)x \\ y'=(-d+bx)y \end{cases}$ 数值解有周期振荡，加入 logistic 可稳定

y吃x，死亡率 $-d$

随机人口？P311