

群

algebraic structure

· 为 G 上的一个二元代数运算, 满足以下条件的 **代数结构** (G, \cdot) 称为:

closure

groupoid

① 集合对于乘法是封闭的 \rightarrow **群胚** (元素可以是任何东西, 特点: 无序性, 不重复, 不独立)

associativity

semigroup

② 群胚的乘法满足结合律 $(ab)c=a(bc) \rightarrow$ **半群** (为了定义三个元素相乘) (除法, 减法不行)

identity

monoid

③ 半群中存在 **单位元** e ($\forall a \in G, ae=ea=a$) \rightarrow **么半群 / 逆群** **定理** 只有单位元是 **幂等元** $a^2=a$

inverse

group

④ 么半群中所有元素存在 **逆元** ($\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G$ 使 $aa^{-1}=a^{-1}a=e$) \rightarrow **群** **定理** 单位元, 逆元唯一

定理 $(a^{-1})^{-1}=a$ **穿脱原理** $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$ **定理** 方程 $ag=b$ 在 G 中有唯一解 $g=a^{-1}b$, $ga=b$ 有 $g=ba^{-1}$

例 不是群: $(\mathbb{N}, +)$, (\mathbb{N}, \times) , (\mathbb{Z}, \times) , $(\{\vec{v}\}, \cdot)$, 是群: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{R}-\{0\}, \times)$, $(\mathbb{C}-\{0\}, \times)$

order

infinite group

群中元素的个数称为群的 **阶** $|G|$, 无限个元素 \rightarrow **无限群**

Abelian group / commutative group

若群的乘法可交换 $ab=ba \rightarrow$ **阿贝尔群 / 交换群**

一些数论

模 m 剩余类加群 $(\mathbb{Z}_m, +)$, $\mathbb{Z}_m=\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{m-1}\}$, $\bar{a}=\{x \in \mathbb{Z} | x \equiv a \pmod{m}\}$, 阿贝尔群

模 m 单位群 $(U(m), \times)$, $U(m)=\{\bar{a} \in \mathbb{Z}_m | (a, m)=1\}$, 阿贝尔群, m 为素数时, $U(p)=\mathbb{Z}_p^*=\{\bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{p-1}\}$

例 $U(15)=\{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$, 除单位元外元素阶均为 4, $U(15) \cong U(3) \otimes U(5)$

封闭性: a, b 和 m 互质, 则 ab 和 m 互质, 乘法有结合律, $\bar{1}$ 为单位元,

$(a, m)=1 \rightarrow \exists x, y$ 使 $ax+my=1$, $(x, m)=1$, $\overline{ax}=\overline{ax+my}=\bar{1}$

$|U(m)|=\varphi(m)$ **欧拉函数** $\varphi(m)$ 是 $\leq m$ 的与 m 互质的正整数数目

定理 设 $m=\prod p_i^{r_i}$, 则 $\varphi(m)=\prod (p_i^{r_i}-p_i^{r_i-1})=m \prod (1-p_i^{-1})$

n 次单位根群 (U_n, \times) , $U_n=\{e^{\frac{2k\pi}{n}} | k=0, 1, \dots, n-1\}$, 阿贝尔群 **例** $U_4=\{1, i, -1, -i\}$

greatest common divisor

最大公约数 常用圆括号记 **最小公倍数** 常用中括号记

最大公约数和最小公倍数的运算有可结合律

凯莱表

Cayley table

凯莱表 即乘法表, 单位元列最前, 左列乘上排 (上排先做) **性质** 凯莱表对称 \Leftrightarrow 交换群

重排定理 $aG=G$, 凯莱表每一行 (列) 都是所有元素的重排 (数独的表不一定是群, 还需验证结合律)

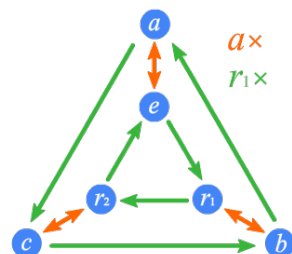
凯莱表	e	r_1	r_2	a	b	c
e	e	r_1	r_2	a	b	c
r_1	r_1	r_2	e	c	a	b
r_2	r_2	e	r_1	b	c	a
a	a	b	c	e	r_1	r_2
b	b	c	a	r_2	e	r_1
c	c	a	b	r_1	r_2	e

D₃ 例 正三角形不变操作, a 为绕 a 轴翻转, r_1 为逆时针转

$$r_1 a \begin{smallmatrix} \triangle \\ \text{A} \\ \text{B C} \end{smallmatrix} = r_1 \begin{smallmatrix} \triangle \\ \text{C B} \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix} \triangle \\ \text{A C} \end{smallmatrix} = c \begin{smallmatrix} \triangle \\ \text{B C} \end{smallmatrix}$$

Cayley graph

凯莱图 节点表示元素, 箭头表示生成元乘 (约定全部为左乘)



子群

subgroup

H 是群 G 的非空子集, 若 H 按 G 的运算也构成群, 则称为 **子群** $H \leq G$

trivial subgroup

proper subgroup

平凡子群 最小子群 $\{e\}$ 和最大子群 G , 除去 G 的子群称为 **真子群** $H < G$

定理 H 的单位元就是 G 的单位元 **消去律**

定理 $H \leq G \Leftrightarrow \forall a, b \in H, ab^{-1} \in H$ (把封闭 $ab \in H$ 有逆 $a^{-1} \in H$ 合为一个条件) 「封闭有逆可推出单位元」
 \rightarrow 子群之交还是子群 「 $ab^{-1} \in H_1, ab^{-1} \in H_2$ 」 (之并不一定) (之积不一定, 需 $H_1 H_2 = H_2 H_1$)

定义子集相乘 $AB = \{ab | a \in A, b \in B\}$, $A = \{a\}$ 时可记为 aB **性质** $|AB| \leq |A||B|$

定理 ① $(AB)C = A(BC)$ ② $aB = aC \rightarrow B = C$ ($AB = AC$ 未必 $B = C$)

③ **子群乘积幂等律** 对于有限群 $H \leq G \Leftrightarrow H^2 = H$ ④ **乘积定理** $A \leq G, B \leq G$, 则 $AB \leq G \Leftrightarrow AB = BA$

推论 $H \leq G$, 则对任意 $g \in G, gHg^{-1} \leq G$

陪集

(陪集是子群概念的延伸)

$H \leq G, a \in G$, 则 aH 称为 H 的 **左陪集** left coset, Ha 称为 **右陪集** right coset (左右陪集可一一对应)

性质 ① $a \in H \Leftrightarrow aH = H \Leftrightarrow aH \leq G$ 「封闭性, 没单位元」 ② $|aH| = |H|$ 「 $h \mapsto ah$ 是双射」

③ $(aH) \cap (bH) = \emptyset$ 「若有公共元 $g = ah_1 = bh_2$, 推出 $aH = ah_1H = bH$ 」 \rightarrow 各陪集或完全相同或不相交
 \rightarrow 陪集中任意元素均可作 **代表元**

结论 群 G 的子群 H 的全体左陪集构成群 G 的一个分类, 各陪集等大不交

H 在 G 中不同陪集的个数称为 H 在 G 中的 **指数** index $[G:H]$

Lagrange theorem

拉格朗日定理 $|G| = |H|[G:H] \rightarrow |G/N| = [G:H]$ **推论** 子群的阶是母群的因子

推论 素数阶群必为循环群, 除 e 外所有元素都可作生成元, 无非平凡子群

\rightarrow **费马小定理** 素数 p 与整数 a 互质, 则 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ 「 $\bar{a} \in \mathbb{Z}_p^*, (\bar{a})^{p-1} = \bar{1}$ 」

共轭类

relation

关系 对集合 G 中任意有序元素对 a, b , 总能确定是否满足条件 \sim , 则称 \sim 是 G 中的一个二元关系
equivalence relation

等价关系 ① 反身性 $\forall a \in G, a \sim a$ ② 对称性 $a \sim b \rightarrow b \sim a$ ③ 传递性 $a \sim b, b \sim c \rightarrow a \sim c$ (2,3 不能推出 1)

共轭 $\exists g \in G$, 使 $gag^{-1} = b$, 则 $a \sim b$, 易证共轭是一种等价关系 **共轭类** conjugacy class g 取遍群元素,

性质 ① 类或全同或不交 ② 阿贝尔群每个元素自成一类 (讨论类没意思) ③ 单位元总是自成一类
 ④ 同一共轭类的元素有相同的阶 ⑤ 有限群的每个共轭类的元素个数是群阶数的因子

正规子群

normal subgroup / invariant subgroup

正规子群 / 不变子群 $N \trianglelefteq G$, 对 $\forall g \in G$ 都有 $gN = Ng$ (或 $gNg^{-1} = N$) \Leftrightarrow 包含完整的类的子群

常用 $H \trianglelefteq G \Leftrightarrow \forall g \in G, h \in H$ 有 $ghg^{-1} \in H \rightarrow$ 正规子群之交, 之积仍为正规子群

D₃ 例 4 个子群: $\tilde{a} = \{e, a\}$ 等 3 个, 正规子群 $\mathbf{d}_3 = \{e, r_1, r_2\}$, $\mathbf{D}_3 / \mathbf{d}_3 = \{e, a\}$

定理 ① 平凡子群正规 ② $[G:H] = 2$ 的 $H \trianglelefteq G$ 「 $eH = He$, 另一个只能相等」 ③ 阿贝尔群的子群正规

注 子群可传递, 正规子群不一定

定理 $H \leq G, N \trianglelefteq G \rightarrow HN \leq G$ **定理** $H \trianglelefteq G, H \leq K \leq G \Rightarrow H \trianglelefteq K$ ($H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$ 未必 $H \trianglelefteq G$)

center

群 G 的 **中心** $C(G) = \{g \in G | gx = xg, \forall x \in G\}$ **推论** $C(G) \trianglelefteq G$

centralizer

a 在群 G 的 **中心化子** $C(a) = \{g \in G | ga = ag\}$ **推论** $C(a) \leq G$

normalizer

$H \leq G$, **正规化子** $N(H) = \{g \in G | gH = Hg\}$ **推论** $N(H) \leq G, H \trianglelefteq N(H)$

commutator

(符号和对易冲突, 仅此处用) **换位子** $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ **推论** $[G, G] \trianglelefteq G$, $G/[G, G]$ 是阿贝尔群

正规子群的陪集构成集合, 陪集的乘法 $aN \cdot bN = (ab)N$ (只有正规能保证左右乘无歧义) \rightarrow quotient group

商群 $G/N = \{aN | a \in G\}$, a 称为 **代表元** (从陪集中任选), 单位元 N , 逆元 $a^{-1}N$

性质 阿贝尔群的商群仍阿贝尔 **定理** $G/C(G)$ 是循环群, 则 G 是阿贝尔群

商群不一定和某个子群同构 (否则就没研究的意思了...)

simple group

若群 G ($\neq \{e\}$) 只有平凡的正规子群, 则称为 **单群** (只有平凡子群 \Leftrightarrow 素数阶循环群)

有限单群分类定理 所有有限单群已全部发现: 素阶循环群, 交错群 A_n ($n > 4$), 李型单群, 26 个散在单群

循环群

(相当于谐振子的地位)

cyclic group

循环群 $C_n = \{a^r | r \in \mathbb{Z}\}$, $a^n = e$, 均为阿贝尔群, 乘法 $a^i a^j = a^{(i+j) \bmod n}$, 逆元 $(a^i)^{-1} = a^{n-i}$

generator

由一个元素 a 生成的循环群 $\langle a \rangle = \{a^r | r \in \mathbb{Z}\}$, a 称为 **生成元**, 定义群元素 a 的阶 $|a| \equiv |\langle a \rangle|$

推导 $\forall m \in \mathbb{N}, a^m \neq e \rightarrow |a| = \infty$ (数学系常用另一种等价的: $\forall m, n \in \mathbb{Z}, a^m \neq a^n$, 可导出更多结论)

循环群结构定理 n 阶循环群同构于 $(\mathbb{Z}_n, +)$, 无限阶同构于 $(\mathbb{Z}, +)$

性质 $|a^{-1}| = |a|$ **定理** 循环群的子群仍为循环群 **推论** 对于有限群, $|a|$ 是 $|G|$ 的因子 [因为是子群]

生成元组 $S = \{a_1 \sim a_r\}$ 是群 G 的非空子集, **生成子群** $\langle S \rangle = \langle a_1 \sim a_r \rangle$ **定理** $\langle S \rangle$ 是 G 中包含 S 的最小子群 (不唯一, 必存在, 对于有限群只能用排除法找最少数量) 群元素简化为生成元组可减少群表示工作量

定理 生成元至多需 $\log |G|$ 个 [增加一个额外元素, $|G|$ 至少要翻倍]

例 $(\mathbb{Z}, +)$ 的生成元组是 $\{1, -1\}$ (有的习惯是逆都省略不写)

定理 无限阶循环群仅有两个生成元 $\{a, a^{-1}\}$

定理 n 阶循环群恰有 $\varphi(n)$ 个生成元, a^r 是生成元 $\Leftrightarrow (n, r) = 1$

推论 偶数阶群必含有阶为 2 的元素

群同构

两个群 $a, b \in (G_1, \cdot)$ 和 $(G_2, *)$, 有映射 $f: G_1 \rightarrow G_2$, 若映射 **保乘** $f(a \cdot b) = f(a) * f(b)$, 则

homomorphism

epimorphism

isomorphism

endomorphism

automorphism

同态 $\overset{f}{\sim}$, f 为满射称为 **满同态**, 双射称为 **同构** \cong , 群 G 到自身的映射称为 **自同态**, **自同构**

恒等同构 $\forall g \mapsto g$ **零同构** $\forall g \mapsto e$ **自同构群** $\text{Aut}(G)$, 所有自同构关于变换的乘法构成群

(凯莱表一样则同构) **例** $f(a) = 2^a: (\mathbb{R}, +) \cong (\mathbb{R}^+, \times)$ **定理** 同构是等价关系

性质 同态保单位元, 保逆, $|f(a)|$ 整除 $|a|$, 同构保阶 $|f(a)| = |a|$, 同构群阶相等, 阿贝尔性相同

定理 素数阶群只有循环群 * 阶数为两不同素数积的交换群都是循环群

给定阶数的不同构的群个数, 尚无通项公式, 下标为其中阿贝尔群个数

低阶群的个数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1~20 阶	1 ₁	1 ₁	1 ₁	2 ₂	1 ₁	2 ₁	1 ₁	5 ₃	2 ₂	2 ₁	1 ₁	5 ₂	1 ₁	2 ₁	1 ₁	14 ₅	1 ₁	5 ₂	1 ₁	5 ₂
21~40 阶	2 ₁	2 ₁	1 ₁	15 ₃	2 ₂	2 ₁	5 ₃	4 ₂	1 ₁	4 ₁	1 ₁	51 ₇	1 ₁	2 ₁	1 ₁	14 ₄	1 ₁	2 ₁	2 ₁	14 ₃
41~60 阶	1 ₁	6 ₁	1 ₁	4 ₂	2 ₂	2 ₁	1 ₁	52 ₅	2 ₂	5 ₂	1 ₁	5 ₂	1 ₁	15 ₃	2 ₁	13 ₃	2 ₁	2 ₁	1 ₁	13 ₂
61~80 阶	1 ₁	2 ₁	4 ₂	267 ₁₁	1 ₁	4 ₁	1 ₁	5 ₂	1 ₁	4 ₁	1 ₁	50 ₆	1 ₁	2 ₁	3 ₂	4 ₂	1 ₁	6 ₁	1 ₁	52 ₅
81~100 阶	15 ₅	2 ₁	1 ₁	15 ₂	1 ₁	2 ₁	1 ₁	12 ₃	1 ₁	10 ₂	1 ₁	4 ₂	2 ₁	2 ₁	1 ₁	23 ₁	1	5	2	16
101~120 阶	1	4	1	14	2	2	1	45	1	6	2	43	1	6	1	5	4	2	1	47

最多数依次出现在: 128 阶: 2328_{15} , 256 阶: 56092_{22} , 512 阶: 10494213_{30} , 1024 阶: 49487365422_{42}

推论 G 是阿贝尔群 $\Leftrightarrow f: g \mapsto g^{-1}$ 是同构映射

可以证明 $f: g \mapsto aga^{-1}$ 是同构映射, 称为由 a 导出的 **内自同构**, inner automorphism

其集合构成 **内自同构群** $\text{Inn}(G) \trianglelefteq \text{Aut}(G)$ **定理** $\text{Inn}(G) \cong G/C(G)$

定义同态的 **像** $f(H_1) = \{f(a) | a \in H_1\}$ **原像** $f^{-1}(H_2) = \{a \in G_1 | f(a) \in H_2\}$ (单射则不一定有原像)

定理 $H_1 \leq G_1 \Rightarrow f(H_1) \leq G_2$, $H_2 \leq G_2 \Rightarrow f^{-1}(H_2) \leq G_1$, 换成正规子群亦成立

同态映射的 **核** 单位元的原像 $\text{Ker } f = f^{-1}(\{e_2\}) \leq G_1$ (单同态 $\Leftrightarrow \text{Ker } f = \{e\}$) (以下满单同态均适用)

定理 $f^{-1}(f(a)) = a \text{Ker } f$ **定理** $H \leq G$, $f^{-1}(f(H)) = H \text{Ker } f$

群同态基本定理 $(G_1/\text{Ker } f) \cong G_2$ **第一同构定理** 把 G_2 缩小为 $f(G_1)$ **例** $\mathbb{Z}/\langle m \rangle \cong \mathbb{Z}_m$ [取映射 $a \mapsto \bar{a}$]

第二同构定理 $H \leq G, N \trianglelefteq G$, 则 $(H \cap N) \trianglelefteq H$ 且 $H/(H \cap N) \cong HN/N$ [$f: H \rightarrow HN/N, h \mapsto hN$]

第三同构定理 $N \trianglelefteq G, K \trianglelefteq G, K \subseteq N$, 则 $G/N \cong (G/K)/(N/K)$

群直积

external direct product

外直积 $G_1 \otimes G_2 = \{(g_1, g_2) | g_1 \in G_1, g_2 \in G_2\}$, 运算 $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2)$, 构成群, 单位元 (e_1, e_2)

性质 ① $|G_1 \otimes G_2| = |G_1| |G_2|$ ② $G_1 \otimes G_2 \cong G_2 \otimes G_1$ ③ $G_1 \otimes G_2 \otimes G_3 \cong G_1 \otimes (G_2 \otimes G_3) \cong (G_1 \otimes G_2) \otimes G_3$

定理 ① $|(g_1, g_2)| = [|g_1|, |g_2|]$ (最小公倍数) ② $G_1 \otimes G_2$ 阿贝尔 $\Leftrightarrow G_1, G_2$ 都阿贝尔

③ G_1, G_2 是 m, n 阶循环群, 则 $G_1 \otimes G_2$ 是循环群 $\Leftrightarrow (m, n) = 1$ ④ $C(G) = C(G_1) \otimes C(G_2)$

internal direct product

$N_1 \trianglelefteq G, N_2 \trianglelefteq G, N_1 N_2 = G, N_1 \cap N_2 = \{e\}$ (否则分解不唯一), 则称 G 为 N_1, N_2 的 **内直积**

$\Leftrightarrow \forall g \in G$ 可唯一表为 $n_1 n_2$ 的形式, 且全部都有 $n_1 n_2 = n_2 n_1$

$\Rightarrow N_1 \otimes N_2 \cong G$ [$(n_1, n_2) \mapsto n_1 n_2$] **性质** $G/N_1 \cong N_2$, $G/N_2 \cong N_1$

\Leftarrow 若 $G = H_1 \otimes H_2$, 则存在 G 的正规子群 N_1, N_2 与 H_1, H_2 同构, 构成内直积 [$h_1 \mapsto (h_1, e_2), h_2 \mapsto (e_1, h_2)$] (故以后不必区分内外直积)

semidirect product

半直积 改为只有一个是正规子群(约定正规的写前面), 性质变为只有 $G/N_1 \cong H_2$

例 $(\mathbb{C}, +) \cong (\mathbb{R}, +) \otimes (\mathbb{R}, +)$ **D₃ 例** $\text{D}_3 = \text{d}_3 \rtimes_s \tilde{\text{a}}$

例 **洛伦兹群** 表示旋转 $\text{O}(3, 1)$, 直积上平移群才是所有的间隔不变 \rightarrow **庞加莱群** $\text{P} = \text{O}(3, 1) \otimes_s T$

群作用

有群 G 和非空集合 X , 若 $\forall g \in G, x \in X, \exists! y = g * x \in X$, 且 ① $e * x = x$ ② $(g_1 g_2) * x = g_1 * (g_2 * x)$

则称 $*$ 是 G 在 X 上的一个 **作用**, action 以下记作 $g(x)$

例 共轭变换 $g(x) = gxg^{-1}$ 是 G 在自身上的一个作用

称 X 的子集 $O_x = \{g(x) | g \in G\}$ 为 x 在 G 作用下的 **轨道**, orbit 若 $O_x = X$ 则称作用是 **传递的**, transitive

定理 O_x 与 O_y 或全同或不交

称 $S_x = \{g | g(x) = x\}$ 为 x 在 G 中的 **稳定子**, stabilizer **定理** $S_x \leq G$ (对于共轭作用, S_x 就是中心化子 $C(x)$)

定理 $f: O_x \rightarrow G/S_x, gx \mapsto gS_x$ 为双射 **例** 求正六面体群阶数, $X = 6$ 个面, $|G| = |O_1| |S_1| = 6 \times 4 = 24$

the euqation of finite group

群方程 $|G| = \sum_x [G:C(x)] = |C(G)| + \sum_{\text{非中心}} [G:C(x)] \rightarrow$ **柯西定理** 群阶数的素因子必存在该阶的元素

不动元素 $g(x)=x$, 其集合记作 F_g **伯恩萨德引理** X 在 G 作用下轨道数 $n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F_g|$

例 求 a 种颜色各 b 个珠子可串成多少种手链 $\Leftrightarrow ab$ 颗珠子所有排列为 X , 求它在 ab 边形对称变换群 G 作用下的轨道数

Sylow

p 群 有限群 G 的阶为某素数的幂 $|G|=p^k, k \geq 1$ **西罗 p 子群** $P \leq G, |P|=p^n$, 且 p^{n+1} 不能被 $|G|$ 整除 p 为素数, $n \geq 1$, 设有限群 $|G|=p^n m, (p, m)=1$

西罗第一定理 $0 < k \leq n$, 则 G 必有 p^k 阶子群 **推论** 群阶数的素因子必存在该阶的西罗 p 子群

西罗第二定理 H 为 p 子群, P 为西罗 p 子群, 则 $\exists a \in G$ 使 $H \subseteq aPa^{-1}$ **推论** $|G|$ 的任两西罗 p 子群共轭

西罗第三定理 $|G|$ 的西罗 p 子群个数 n_p 是 $|G|$ 的因子且满足 $n_p \equiv 1 \pmod{p}$

环域

环 对加减乘封闭 **域** 除了除 0 外对四则运算封闭

数域之交仍为数域, 之并不一定

集合 $R \neq \emptyset$, 定义运算 $+$, \cdot , 满足 $(R, +)$ 为阿贝尔群, (R, \cdot) 为半群

且满足 \cdot 对 $+$ 左右分配律 $a(b+c) = ab+ac$ $(b+c) \cdot a = ba+ca$

则 $(R, +, \cdot)$ 为一个环 commutative ring 交换环 \cdot 还满足交换律 单位元 $a \cdot e = e \cdot a = a$ (若存在则唯一)

零元加法的单位元 负元加法逆元 可逆元(单位) $\exists b \in R$ 使 $a \cdot b = b \cdot a = e$ (若可逆则唯一)

F 是有单位元的交换环, 且非零元都有逆元, 则 F 为一个域 \Leftrightarrow 交换的除环 skew field 非交换的除环

*单位群 $U(R)$ 所有可逆元成群 环 R 的中心 $C(R) = \{r \in R \mid rx = xr, \forall x \in R\} \leq R$

整数环 $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ 含么交换 偶数环 $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ 不含么, 交换

有理数/实数/复数域

模 m 剩余类环 $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ 有单位元 1 的交换环

全矩阵环 数域 F 上全体 $n (> 1)$ 阶方阵 $M_n(F)$ 关于矩阵加法乘法构成有单位元非交换环

性质 ① $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ ② $-(-a) = a$ ③ $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -ab$ ④ $(-a) \cdot (-b) = ab$

倍数法则 $m, n \in \mathbb{Z}, a, b \in R$ ① $ma + na = (m+n)a$ ② $m(a+b) = ma + mb$ ③ $m(na) = (mn)a = n(ma)$ ④ $m(ab) = (ma)b = a(mb)$

指数法则 $m, n \in \mathbb{N}, a, b \in R$ ① $(a^m)^n = a^{mn}$ ② $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $((a \cdot b)^n \text{ 未必等于 } a^n \cdot b^n)$

广义分配律 $(\sum a_i)(\sum a_j) = \sum a_i b_j$ $(= \text{项式定理未必成立})$

S 是环 R 一个非空子集, 若 S 关于 R 的运算也构成环, 则 S 为 R 一个子环, 记 $S \leq R$

平凡子环 $\{0\}$ 和 R

定理 $\emptyset \neq S \subseteq \text{环 } R$, 则 $S \leq R \Leftrightarrow S$ 是 R 的加法子群, 乘法子半群 [分配律已有, 要乘法封闭 $ab \in S$]

$\Leftrightarrow \forall a, b \in S, a-b \in S, ab \in S$

子环之交还是子环

$a, b \neq 0 \in \text{环 } R$, 若 $a \cdot b = 0$, 称 a 为 R 一个左零因子, b 为 R 一个右零因子 left zero-divisor

整环无零因子的(有单位元)交换环 \Rightarrow 乘法左右消去律成立($c \neq 0$)

除环每个非零元都可逆的有单位元环 \Rightarrow 无零因子

p 为素数 $\Leftrightarrow \mathbb{Z}_p$ 为整环 $\xLeftrightarrow{\text{费马定理}} \mathbb{Z}_p$ 是域

* 有限整环必是域 [取 a 乘遍环元素, 成子集, 元素互不同, 个数又相同, a, a_j 必为单元元]

高斯整环 $\mathbb{Z}[i] = \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ 复数 +

quaternion field

四元数体 $\mathbb{H} = \{a+bi+cj+dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ $A = a+bi+cj+dk$

$$i^2=j^2=k^2=ijk=-1, ij=-ji=k, jk=-kj=i, ki=-ik=j$$

复矩阵形式 $\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$ $A = \begin{pmatrix} a+b\sqrt{-1} & c+d\sqrt{-1} \\ -c+d\sqrt{-1} & a-b\sqrt{-1} \end{pmatrix}$

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad i = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{pmatrix} \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad k = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

环与子环

左理想(子环) $I \leq R, \forall r \in R, a \in I, \text{有 } ra \in I$ 右理想(子环) $a \in I$ (双边)理想 $\forall a, b \in I, r \in R, \text{有 } a-b \in I, ra \in I, ar \in I$

零理想 $\{0\}$

trivial

平凡理想 $I = \{0\}$ 和 $I = R$

proper

真理想 $I \subsetneq R$

理想之交 $I \cap J$ 、之和 $I+J = \{a+b \mid a \in I, b \in J\}$ 还是理想, 有限个和, 任意个交还是理想

\mathbb{Z} 中素数 p 生成素理想 $\langle p \rangle$

生成理想 R 中包含 S 的最小的理想 $\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \{ \sum x_i a_i + x a + a y + m a \mid x, y \in R, m \in \mathbb{Z} \}$

若 R 为含单元交换环, $S = \{a\}$, 由 a 生成的主理想 $\langle a \rangle = \{ra \mid r \in R\}$

\mathbb{Z} 的任何理想都是主理想 [取 I 中最小正整数, 带余除法余 0]

主理想整环 任何理想都是主理想的整环, 记 PID $\mathbb{Z}[x]$ 不是 PID

$F[x]$ 是主理想整环

[取 I 中次数最低首 1 多项式, 带余除法余 0] * 多元 $F[x, y]$ 未必

I 为 R 的理想, 记陪集 $\bar{r} = r+I$, 则阿贝尔加群的商群 $R/I = \{\bar{r} \mid r \in R\}$

商环 $R/I = \{\bar{r} \mid r \in R\}$ 陪集加法 $(\bar{r}_1 + \bar{r}_2) = (\bar{r}_1 + \bar{r}_2) + I$ 乘法 $(\bar{r}_1) \cdot (\bar{r}_2) = (\bar{r}_1 \cdot \bar{r}_2) + I$ [要证无歧义]

商环含么交换 $\Leftrightarrow R$ 含么交换 (单元元 $\bar{e} = e+I$ 零元 $\bar{0} = 0+I = I$) $\bar{1} \in I, \bar{1} = \bar{0} = I$

P 是含么交换环 R 的真理想, $\forall a, b \in R, ab \in P \Rightarrow a \text{ 或 } b \in P$, 称 P 是 R 的一个素理想 (逆否同理)

$\langle n \rangle$ 为 \mathbb{Z} 的素理想 $\Leftrightarrow n$ 为素数

(R 是含么交换环) R/I 是整环 $\Leftrightarrow I$ 是 R 的素理想 (R 是整环未必 R/I 是整环)

M 是含么交换环 R 的真理想, \forall 理想 $M' \supsetneq M \Rightarrow M' = R$, 称 M 是 R 的一个极大理想

(R 是含么交换环) R/I 是域 $\Leftrightarrow I$ 是 R 的极大理想 (极大理想 \Rightarrow 素理想)

环 $(R, +, \cdot)$ 和 (R', \oplus, \otimes) , $f: R \rightarrow R'$, 满足 $f(a+b) = f(a) \oplus f(b)$, $f(a \cdot b) = f(a) \otimes f(b)$, $\forall a, b \in R$

f 单射称单同态, f 满射称满同态, f 一一对应称同构, 记 $f: R \cong R'$

零同态 $f: R \rightarrow R', a \mapsto 0', \forall a \in R$

性质 同态 ① $f(0) = 0'$ [加法零元] ② $f(na) = nf(a), n \in \mathbb{Z}$ ③ $f(a^n) = [f(a)]^n, n \in \mathbb{N}$

R, R' 含么 ④ f 满, 则 $f(e) = e'$ ⑤ R' 无零因子, $f(e) \neq 0'$, 则 $f(e) = e'$

⑥ $f(e) = e'$, 则左/右逆元对应到左/右逆元

环同态 f 的核 $\text{Ker } f = \{a \in R \mid f(a) = 0'\}$

$$\text{Ker } f \trianglelefteq R$$

$I \trianglelefteq R$, 商环 R/I , 则 $\pi: R \rightarrow R/I, r \mapsto \bar{r} = r + I$ 是满射, 构成自然同态 $\text{Ker } \pi = I$

环同态基本定理 $R/\text{Ker } f \cong f(R)$ (推广到第一同构) [同构映射 $\bar{r} \mapsto f(r)$]

环的第二同构定理 $S \leq R, I \trianglelefteq R$ 则 $S \cap I \trianglelefteq S$ 且 $S/(S \cap I) \cong (S+I)/I$ (部分同时扩大!)

Characteristic

特征使 $(\forall a \in R) na = 0$ 的最小正整数 n

若不存在, 记 $\text{Char } R = 0$

定理 R 为含么环, 则 $\text{Char } R = |e|$, 若 e 关于加法的阶为无穷, 则 $\text{Char } R = 0$

整环的特征只能是 0 或一个素数 $\text{Char } \mathbb{Z}_m = m \quad \text{Char } \mathbb{Z}_m[x] = m$

R 为含么环, 则 $f: \mathbb{Z} \rightarrow R, n \mapsto ne$ 是环同态 (未必单/满) [恒等映射]

若 $\text{Char } R = n > 0$, 则 R 包含一个与 \mathbb{Z}_n 同构的子环 $\{me \mid m \in \mathbb{Z}\}$
若 $\text{Char } R = 0$, 则 R 包含一个与 \mathbb{Z} 同构的子环

prime field

素域不含任何真子域的域

F 为域, 若 $\text{Char } F = 0$, 则 F 包含一个与 \mathbb{Q} 同构的素域

若 $\text{Char } F = \text{素数 } p$, 则 F 包含一个与 \mathbb{Z}_p 同构的素域

* 交换环 R 的特征为素数 p , 则 $(\sum a)^p = \sum a^p$ [系数都有因子 p] 如布尔环 \mathbb{Z}_2

$\mathbb{Q}[x]$ 一元有理多项式

$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$

$\mathbb{Q}(x) = \{\frac{f(x)}{g(x)} \mid f, g \in \mathbb{Q}[x], g \neq 0\}$ 有理函数域

次数 $\deg f(x) = n, a_n \neq 0, \deg 0 = -\infty$

R 为含么环, 作 $R[x] = \{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \mid n \geq 0, a_i \in R\}$ 称为 R 上的以 x 为未定元的 (一元) 多项式环

定义 $\sum a_i x^i + \sum b_i x^i = \sum (a_i + b_i) x^i \quad (\sum a_i x^i)(\sum b_j x^j) = \sum (\sum_{i+j=k} a_i b_j) x^k$

性质 ① 若 $R \cong R'$ 则 $R[x] \cong R'[x]$

② R 的零元、单位元、可逆元就是 $R[x]$ 的零多项式、有单位元、可逆元

③ R 无零因子、交换、整环 $\Rightarrow R[x]$ 也是

* 形式幂级数环 $R[[x]]$ n 无限制 $R[x] \leq R[[x]]$ 性质同理

D 为整环, $D \times D^* = \{(a, b) \mid a, b \in D, b \neq 0\}$, 定义等价关系 $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$

D 的商域 (分式域) $F = D \times D^* / \sim = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in D, b \neq 0\}, \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}, \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

定理 每一个整环都可扩充为一个域 * 域的商域就是本身

唯一分解整环 (数论)

主理想整环 \Leftrightarrow 任一理想可由一元素生成 \Leftrightarrow 任一理想 $I = \{ra \mid r \in R\}$ [整环 $\mathbb{Z}[x]$ 不是 PID]

D 为整环, $\exists \phi: D - \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$, 使 $\forall a, b \in D (b \neq 0)$, 带余除法存在 ($\exists q, r \in D$ 使 $a = bq + r$ 且 $\phi(r) < \phi(b)$ 或 $r = 0$)

则称 D 为欧几里得整环, 记 ED

推论 ED 必为 PID

\mathbb{Z} 是 ED , ϕ 为绝对值

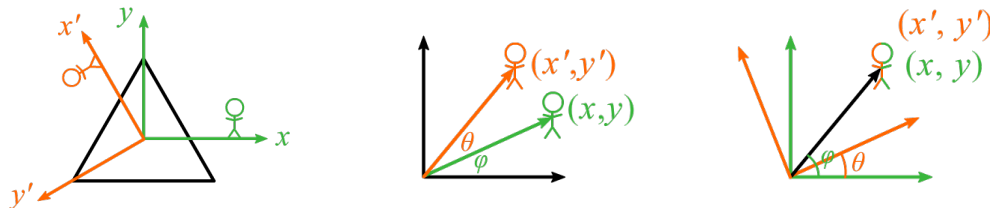
$\mathbb{Z}[i]$ 是 ED , ϕ 为模方

群表示

对于抽象群 $\{g\}$, 寻找一个矩阵群 $\{A(g)\}$ 与之同态, 称 A 是群 G 的一个 **线性表示** (linear representation)
 若同构则称为 **忠实表示** (faithful representation), 通常映射可多对一, 如 **恒等表示** (identity representation) 所有群元素都映射到单位算符

性质 表示必为方阵, 单位元必表为单位阵, 迹 $\text{tr} A(e) = \text{表示空间 } V \text{ 的维数}$, 保逆 $A(g^{-1}) = [A(g)]^{-1}$
 若已知群元素 g 表示的是对向量 \vec{r} 的某种变换 $\vec{r}' = \hat{A}(g)\vec{r}$, 则有 **选基求表示法**: 取线性空间 V 中一组基 $\{\vec{e}_i\}$ 「要求完备」, 群元素作用上去 $\hat{A}(g)\vec{e}_i = \sum_j A_{ji}(g)\vec{e}_j$ 「可证保乘」 $\xrightarrow{\text{正交基}} A_{ji}(g) = \langle \vec{e}_j, \hat{A}(g)\vec{e}_i \rangle$

D₃ 例 已知群元素对应的变换含义, 在欧氏空间做群表示 $A(e) = I_3, A(r_2) = A^{-1}(r_1) = A^T(r_1)$
 $A(r_1) = \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A(a) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, A(b) = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, A(c) = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$



- ① 用基表示的主动变换 (物动, 基不动坐标不变) $\hat{A}(r_1)\vec{x} = \vec{x}' = \cos\theta\vec{x} + \sin\theta\vec{y} + 0\vec{z}$, 系数竖写第一列
- ② 用坐标表示的主动变换 (物动, 基不动坐标变) $x' = r\cos(\theta + \varphi) = \cos\theta x - \sin\theta y$, 系数横写第一行
- ③ 被动变换 (物不动, 基动坐标变) $x' = r\cos(\varphi - \theta) = \cos\theta x + \sin\theta y$, 系数横写第一行

不可约表示

equivalent representation

等价表示 对于矩阵: \exists 同阶非奇异阵 X , 使 $\forall g, A'(g) = X^{-1}A(g)X$ (维数不同显然不等价)
 对于空间: $(e_i') = X(e_i)$

reducible

可约表示 对于矩阵: 有零块

block-diagonalized structure

(不可能有三个零块, 没有逆, 不是群) 有对角块结构称为 **完全可约表示** $A = \bigoplus m_i A_i^{(\text{IR})}$

所有矩阵能同时对角化 (通过相似变换同时化三角型) 的充要条件是对易 (可交换) (高代)

对于空间: 存在非平凡不变子空间 $W, V = W \oplus \overline{W}$

Irreducible Representation

在所有等价表示(基) 都没有零块则称 **不可约表示** (一维的都是不可约表示)

例 $(\mathbb{R}^*, +)$ 有表示 $A(x) = e^{mx}$, 不同的 m 都是不等价表示, 还可有二维不可分表示 $A(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix}$

么正表示 $A^\dagger = A^{-1}$, 荷载表示的空间 V 为复内积空间 **定理** 么正表示可约则完全可约(不存在可分)

全部 即完备 (以下把「全部不等价不可约么正表示」简记为 $\forall \neq \text{IUR}$)

Maschke's theorem

马施克定理 有限群的任何表示都等价于一个么正表示 (有限群不存在可分表示)

么正 \Leftrightarrow 保内积, 设在某基下有非么正表示 $\langle A(g)x_1 | A(g)x_2 \rangle \neq \langle x_1 | x_2 \rangle$, 用群平均定义新内积 $\langle\langle x_1 | x_2 \rangle\rangle \equiv \frac{1}{n} \sum_g \langle A(g)x_1 | A(g)x_2 \rangle$, 根据重排定理 $\langle\langle A(g_i)x_1 | A(g_i)x_2 \rangle\rangle = \langle\langle x_1 | x_2 \rangle\rangle$ (选了非正交基, 导致所见不么正)

Schur's lemma 1

舒尔引理 I A 为 IR, 若 $\exists X \in V$ 和 $\forall A(g)$ 对易 (维数必相同), 则 $X = \lambda I$ (常用其逆否判断不可约)

设 $X\vec{r} = \lambda\vec{r}$, 因 $X(A\vec{r}) = A(X\vec{r}) = \lambda(A\vec{r})$, 则 $A(g)\vec{r}$ 也是 λ 下的本征矢, $A(G)$ 构成不变子空间, 又 A 不可约, 故 $A(G)$ 就是整个 V , 即对 V 中任意向量 $\vec{R} = \sum c_i \vec{r}_i$ 都有 $X\vec{R} = \lambda\vec{R}$, 只能为常数阵

定理 阿贝尔群 (包括无限群) 的 IR 都是一维的

Schur's lemma 2

舒尔引理 II A, B 为不等价 IR (维数可不同), 若 $\forall g$ 有 $XA(g) = B(g)X$, 则 $X = 0$ (常用逆否, 不为零则必等价)

群函数

group representation function

群函数 $\varphi: G \rightarrow \mathbb{C}$, **群表示函数** $\varphi: A(G) \rightarrow \mathbb{C}$ (例如矩阵元 $A_{ij}(g)$, 特征标, 都是群函数)

每行可视作 n 维矢量 \rightarrow 记 **群函数空间** V_G 的基为 $\{\varphi_k\}$

定理 n 阶有限群只有 n 个线性独立的群函数

\rightarrow 群函数值表 $\{\varphi_k\}$ 是个方阵

D₃ 例 前面的欧氏三维表示可轻易约为 χ^{Γ}, χ^A

(以下括号 (A) 表示 IR, n 为群维数, S_A 为 A 的维数)

群函数内积 用 **群平均** 定义 $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle \equiv \frac{1}{n} \sum_i \varphi_1^*(g_i) \varphi_2(g_i)$

orthogonality theorem

正交性定理 群函数值表各行正交(列没有), $\langle A_{ij}^{(p)}, A_{ij'}^{(q)} \rangle \equiv \frac{1}{n} \sum_g A_{ij}^{(p)*}(g) A_{ij'}^{(q)}(g) = \frac{1}{S_p} \delta_{pq} \delta_{ii'} \delta_{jj'}$

矢量长度的平方(分量的平方和)为 $\frac{1}{S} \rightarrow \{\sqrt{S} \varphi_k\}$ 构成正交归一基

D₃ 例 验证 Γ_{11} 行内积 Γ_{11} 行归一: $\frac{1}{n} \sum_g \Gamma_{11}^* \Gamma_{11} = \frac{1}{6} [1^2 + (-\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2})^2 + 1^2 + (-\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2})^2] = \frac{1}{2}$

completeness theorem

完备性定理 有限群的 $\forall \neq \text{IUR}$ 产生的群表示函数($\sum S^2$ 个)集合, 构成空间 V_G (n 维)的完备基

Burnside's theorem r

\rightarrow **伯恩萨德定理** $\sum_{i=1}^r S_i^2 = n$, 其中 r 为 $\forall \neq \text{IUR}$ 的个数

推论 所有群都有一个恒等表示, 故 5 阶及以下群只有一维 IR

D₃ 例 6 阶群, 3 个类, 只有 $6 = 2^2 + 1^2 + 1^2$ 这种分解

(类数多的伯恩萨德分解可能不唯一, 如狄拉克群 $32 = 1 \cdot 4^2 + 16 \cdot 1^2 = 5 \cdot 2^2 + 12 \cdot 1^2$)

特征标

class function

在同一个共轭类上取常值的函数称为 **类函数**

character

与基的选择无关的矩阵函数, 如矩阵的迹在相似变换下不变 \rightarrow **特征标** $\chi^A(g) \equiv \text{tr } A(g)$ **性质** $\chi^A(e) = S_A$

判断可约 IUR 的特征标的模 $\langle \chi^{(A)}, \chi^{(A)} \rangle = \frac{1}{n} \sum_g |\chi(g)|^2 = 1$, 可约则 $\langle \chi^A, \chi^A \rangle > 1$

判断等价 不等价 IUR 的特征标正交 $\rightarrow \langle \chi^{(A)}, \chi^{(B)} \rangle = \delta_{AB}$ **定理** 等价表示 \Leftrightarrow 特征标相等

约化 可约表示 $A = \bigoplus m_i (A)_i$ 的特征标, 等于它所包含的 IR 的特征标之和 $\chi^A = \sum m_i \chi^{(A)_i}$

$m_i = \langle \chi^{(A)}, \chi^{(A)_i} \rangle$ 为该类中元素个数, 即重复次数, m_i 确定即表明 A 的约化完成 (不用确定顺序)

性质 同类元素的特征标相等 (记类中元素个数为 n_i , 求和公式中可合并)

群的 $\forall \neq \text{IUR}$ 的个数等于群中类的个数 $r \rightarrow$ 特征标表是方阵

第一正交性关系 特征标表各行正交 $\frac{1}{n} \sum_r n_i \chi^{(p)*}(g) \chi^{(q)}(g) = \delta_{pq}$

第二正交性关系 特征标表各列正交 $\frac{n_i}{n} \sum_p \chi^{(p)*}(g_i) \chi^{(p)}(g_j) = \delta_{ij}$

(以上讲的性质都是对同一个群, 不同构的群也可能碰巧有相同的特征标表)

D₃ 例 验证 χ^{Γ} 行归一 $\langle \chi^{\Gamma}, \chi^{\Gamma} \rangle = \frac{1}{n} \sum_r n_i \chi^{\Gamma*} \chi^{\Gamma} = \frac{1}{6} [1 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \cdot 0] = 1$

D₃ 例 验证第 2 列归一 $\frac{n_2}{n} \sum_p \chi^{p*}(g_2) \chi^p(g_2) = \frac{2}{6} [1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1)] = 1$

群表示直积

(一个群的两个表示直积, 不是两个群直积)

① 群的两个表示的直积也是该群的表示 **「证保乘」** ② $\chi^{A \otimes B} = \chi^A \chi^B$ **「迹的乘法」**

Clebsch-Gordan

reduction coefficient

CG 展开 $(A)_i \otimes (A)_j = \bigoplus_k a_{ijk} (A)_k$, 利用特征标定 **约化系数** (求出出现次数就约化完工了)

$$a_{ijk} = \langle \chi^{(A)_k}, \chi^{(A)_i \otimes (A)_j} \rangle = \frac{1}{n} \sum_g \chi^{(A)_k*}(g) \chi^{(A)_i}(g) \chi^{(A)_j}(g) = \frac{1}{n} \sum_r n_i \chi^{(A)_k*} \chi^{(A)_i} \chi^{(A)_j}$$

性质 任何表示与恒等表示的直积等于该表示, IR 与一维表示的直积等于该 IR

结论 当且仅当两个互为共轭表示的直积表示中, 才会出现且只出现一次恒等表示

[恒等表示的特征标都是 1, 按定义计算 $a_{ij,S} = \langle \chi^{(A)}_i, \chi^{(A)}_{j*} \rangle = \delta_{ij}$]

D₃ 例 求 A 在 $\Gamma \otimes \Gamma$ 中的次数 $a_{\Gamma \otimes \Gamma, A} = \langle \chi^A, \chi^{\Gamma \otimes \Gamma} \rangle = \frac{1}{n} \sum n_i \chi^A \chi^{\Gamma} \chi^{\Gamma} =$

$\frac{1}{6}[1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) \cdot 0 \cdot 0] = 1$ **结论** $\Gamma \otimes \Gamma = S \oplus A \oplus \Gamma$ simple reducibility **简单可约** 所有约化系数均不超过 1

< 高量 > **CG 系数** 本质: 耦合分解, 好量子数: 提炼不可约表示

函数基

设 $g \in G$ 表示 \vec{r} 的向量空间中的旋转 (如由 \vec{r}_0 转到 \vec{r}_1), 另外又定义个函数空间 $\psi(\vec{r})$ (如空间 \vec{r} 处的温度), 则 $\hat{T}(g)\psi(\vec{r}) = \psi'(\vec{r}) = \psi(g^{-1}\vec{r})$ (旋转后 \vec{r}_1 处的温度 $\psi'(\vec{r}_1)$ 是旋转前 \vec{r}_0 处的温度 $\psi(g^{-1}\vec{r}_1)$)

[可以证明 $\hat{T}(g_2)\hat{T}(g_1)\psi(\vec{r}) = \psi(g_1^{-1}g_2^{-1}\vec{r}) = \psi((g_2g_1)^{-1}\vec{r})$]

注意 \hat{T} 代表的是对函数 $\hat{T}\psi = \psi'$ 变换, 和 g 表示对矢量 $g\vec{r}_0 = \vec{r}_1$ 变换不一样, 称为由 g **诱导** 出的 \hat{T} 把 ψ 写成坐标(基的分量)的函数 $\hat{T}(g)\psi(r_{1 \sim s}) = \psi(r'_{1 \sim s})$, 则 $r'_j = \sum_i A_{ij}(g^{-1})r_i$

由函数基 ψ_i 得矩阵表示 $\hat{T}(g)\psi_i(\vec{r}) = \psi_i(g^{-1}\vec{r}) = \sum_j A_{ji}(g)\psi_j(\vec{r})$

D₃ 例 取函数基 $\psi_{1 \sim 6} = \{x^2, y^2, z^2, xy, yz, zx\}$, (线性无关, 但不正交归一)

$T(r_1)\psi_1 = x'^2$, $x' = x \cos(\frac{2}{3}\pi) + y \sin(\frac{2}{3}\pi) = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \rightarrow T(r_1)\psi_1 = \frac{1}{4}\psi_1 + \frac{3}{4}\psi_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\psi_4$, 竖写第一列

$A(e) = I_6$, $A(r_2) = A^T(r_1)$, $A(a) = \text{diag}[1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 1]$

$$A(r_1) = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & -\sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/4 & 0 & \sqrt{3}/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}, A(b, c) = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & \pm\sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/4 & 0 & \mp\sqrt{3}/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \pm\sqrt{3}/2 & \mp\sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & \mp\sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mp\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

广义投影

从荷载可约表示的基中把荷载 IR 的基挑选出来方法 ① 算 CG 系数, 麻烦 ② 广义投影算符

设 A, B 是两个 IR, A 表示的函数基为 $\{\psi_{1 \sim s}\}$, 前面有 $\hat{T}_g\psi_i = \sum_j A_{ji}(g)\psi_j$

两边左乘 B_{kl}^* 对群元素求和, 用正交性定理,

$$\sum_g B_{kl}^*(g)\hat{T}_g\psi_i = \sum_g \sum_j B_{kl}^*(g)A_{ji}(g)\psi_j = \sum_j \frac{n}{s} \delta_{AB} \delta_{kj} \delta_{li} \psi_j = \frac{n}{s} \delta_{AB} \delta_{li} \psi_k$$

generalized projection operator / transfer operator

记 **广义投影算符 / 转移算符** $P_{kl}^{(B)} = \frac{s}{n} \sum_g B_{kl}^*(g)\hat{T}_g$, 则有 $P_{kl}^{(B)}\psi_i^{(A)} = \delta_{AB} \delta_{li} \psi_k^{(A)}$

若 $A=B, l=i$, 则 P_{ki} 就是把第 i 个基分量 ψ_i 变成同一 IR 的第 k 个基分量 ψ_k

有 s^2 个矩阵元就有 s^2 个投影算符, 故 n 阶有限群有 n 个广义投影算符

下标相同的话记为一个指标 $P_k \equiv P_{kk}$, 自身到自身的, 作用上去之后没有转动, 幂等 $P_k^2 = P_k$

D₃ 例 现要把 2 维的 Γ 从那个 6 维表示函数基中投影出来

用一个 $s=2$ 维 IR 可构造 s^2 个投影算符, 但只需选取 s 个就够了,

$$\text{先选投影算符 } P_{11}^{(\Gamma)} = \frac{s}{n} \sum_g \Gamma_{11}^*(g)T_g = \frac{2}{6}[T_e - \frac{1}{2}T_{r_1} - \frac{1}{2}T_{r_2} - T_a + \frac{1}{2}T_b + \frac{1}{2}T_c]$$

(虽然 T_g 的表达式不知道, 但它作用在 ψ_1 上的结果是知道的, 结果就写在 $A_{6 \times 6}$ 的第一列)

$$P_{11}^{(\Gamma)}\psi_1 = P_1^{(\Gamma)}\psi_1 = \frac{1}{3} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1/4 \\ 3/4 \\ 0 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1/4 \\ 3/4 \\ 0 \\ -\sqrt{3}/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1/4 \\ 3/4 \\ 0 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1/4 \\ 3/4 \\ 0 \\ -\sqrt{3}/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$\Psi = \sum^S \phi_i$, 若 $P_1\Psi = 0$, 说明 Ψ 中不含 ψ_1 , 换成其它的广义投影算符

$$P_{12}^{(\Gamma)}\psi_1 = \frac{2}{6} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \begin{bmatrix} 1/4 \\ 3/4 \\ 0 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{bmatrix} 1/4 \\ 3/4 \\ 0 \\ -\sqrt{3}/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{bmatrix} 1/4 \\ 3/4 \\ 0 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{bmatrix} 1/4 \\ 3/4 \\ 0 \\ -\sqrt{3}/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = xy$$

同理可计算 $P_2^{(r)}\psi_1 = \frac{2}{6}[T_e - \frac{1}{2}T_{r_1} - \frac{1}{2}T_{r_2} + T_a - \frac{1}{2}T_b - \frac{1}{2}T_c] = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$

对称群

symmetry group

使图形不变形地变到与自身重合的操作, 关于变换的乘法构成 **对称群**

(注: 物理上找某量子体系的对称群是指 $[G, \hat{H}] = 0$)

dihedral group

平面正 n 边形对称群称为 $2n$ 阶 **二面体群** D_n (二面体是强调无厚度)

保持正 n 边形不变的全部操作: 1 不动 $+(n-1)$ 转动 $+n$ 翻转 $= 2n$, 除了 $n=2$ 外均为非阿贝尔群

定义关系 $W_i(g_1 \dots g_m) = e$, 乘法表的化简方式 (i 需要多少目前尚无定论, 已证明肯定存在)

$D_n = \langle r, s | r^n = s^2 = (sr)^2 = e \rangle$, $r \doteq \begin{bmatrix} \cos \frac{2\pi}{n} & -\sin \frac{2\pi}{n} \\ \sin \frac{2\pi}{n} & \cos \frac{2\pi}{n} \end{bmatrix}$, $s \doteq \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (空间旋转和 x 轴翻转)

D₃ 例 D_3 的生成元组: $\{a, b\}$ (不唯一)

一般地 a 表示欧氏空间中旋转 $2\pi/n$ 度 \rightarrow 生成循环群 C_n , 「相同的转动角 (正转或反转) 属于一个共轭类」

① n 为偶数: C_n 有 $(\frac{n}{2}+1)$ 个共轭类 (含单位元) ② n 为奇数: C_n 有 $(\frac{n+1}{2})$ 个共轭类

$C_n \trianglelefteq D_n$ 「由 $bab = a^{-1}$ 得 $ba^k b = a^{-k}$ 」 \rightarrow 除 a^k 之外的元素构成陪集, 可写成 ba^k 的形式, 阶均为 2 「 $(ba^k)^2 = e$ 」, 表示欧氏空间中的翻转. 「 $a^j (ba^k) a^{-j} = (a^j b a^j) a^{k-2j} = b^{-1} a^{k-2j}$ 」 $\rightarrow ba^k \sim ba^{k-2j}$

① 若 n 为偶数, 则所有反射操作构成 2 个共轭类 (k 为奇数或偶数, 分别代表对称轴过顶点或边中点). 令 ± 1 按一切可能方式和 a, b 对应, 可得 4 个 1 维表示. 欧氏空间的旋转变换可表示为:

$$a \doteq \begin{bmatrix} \cos \frac{2\pi m}{n} & -\sin \frac{2\pi m}{n} \\ \sin \frac{2\pi m}{n} & \cos \frac{2\pi m}{n} \end{bmatrix}, \quad b \doteq \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(由于 ba^k 的存在, 上面的旋转矩阵表示不可约)

$m \in \mathbb{Z}$, 由于 χ^m 和 χ^{n-m} 同构, 故 $0 < m < \frac{n}{2}$, 共有 $(\frac{n}{2}-1)$ 个均为 2 维表示. 由伯恩斯坦定理 $2n = 4 \cdot 1^2 + (\frac{n}{2}-1) \cdot 2^2$ 知已找出全部不同构 UIRs.

② 若 n 为奇数, 则所有反射操作构成 1 个共轭类, 1 维表示只有 2 个. 2 维表示同偶数情形, 由伯恩斯坦定理 $2n = 2 \cdot 1^2 + (\frac{n-1}{2}) \cdot 2^2$, 故已找出全部不同构 UIRs.

circle group

圆群 圆的对称群是 $T \cong \text{SO}(2, \mathbb{R})$ (线性群)

特征标	a^k	ba^k
χ^1	1	1
χ^2	1	-1
χ^3	$(-1)^k$	$(-1)^k$
χ^4	$(-1)^k$	$-(-1)^k$
χ^m	$2 \cos \frac{2\pi mk}{n}$	0

特征标	a^k	ba^k
χ^1	1	1
χ^2	1	-1
χ^m	$2 \cos \frac{2\pi mk}{n}$	0

点群

point group

3 维 \rightarrow **点群** $O(3)$ 的有限子群, $SO(3)$ 的叫 **第一类点群**, 有反演的叫 **第二类点群**

第一类点群基本方程 $\sum_{i=1}^l (1 - \frac{1}{n_i}) = 2(1 - \frac{1}{n})$ 「只可能有 $l=2, 3$ 」5 个解穷尽第一类点群: 循环群 C_n ,

tetrahedral group

octahedral group

icosahedral group

二面体群 $D_n (2n)$, **四面体群** $T \cong A_4 (12)$, **八面体群** $O \cong S_4 (24)$, **二十面体群** $Y \cong A_5 (60)$

(部分符号冲突, 仅限点群使用) 点群已研究完, 查表即可

$\mathbf{T} \ (\omega = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{2}{3}\pi})$	e	(12)(34)	(123)	(132)	\mathbf{O}	e	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)	\mathbf{Y}	e	(12)(34)	(123)	(12345)	(12354)
元素个数	1	3	4	4		1	6	8	6	3		1	15	20	12	12
χ^1	1	1	1	1		1	1	1	1	1		1	1	1	1	1
χ^2	1	1	ω	ω^2		1	-1	1	-1	1		3	-1	0	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
χ^3	1	1	ω^2	ω		2	0	-1	0	2		3	-1	0	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
χ^4	3	1	0	0		3	-1	0	1	-1		4	0	1	-1	-1
χ^5						3	1	0	-1	-1		5	1	-1	0	0

Schoenflies

直积上反演群即相应第二类点群, 去掉同构的剩 9 种: **熊夫利记号** $S_{2n}, C_{nv}, C_{nh}, D_{nh}, D_{nd}, T_h, T_d, O_h, Y_h$

置换群

非空集合 X 的全体可逆变换构成 **全变换群 / 对称群** S_X , 其子群称为 **变换群**, $\xrightarrow{X \text{ 有限}}$ 置换群

n 阶 **置换群** S_n , $|S_n|=n!$, $n \geq 3$ 均非阿贝尔, 置换相乘先右后左 (最右有波函数) **例** $S_3 \cong D_3$

置换记法 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ f(1) & f(2) & f(3) \end{pmatrix}$, **轮换记法** $(a_1 a_2 \dots a_m)$, $f(a_i)=a_{i+1}$, **对换** 2 轮换, **邻换** 相邻元素对换

恒等置换 1 轮换 $(a)=e$, **例** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}=(132)$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}=(13)$, $(132)(123)=(1)$

定理 ① 不相交的轮换可交换顺序 ② 任一置换可唯一表为不相交轮换之积 「**数学归纳**」

性质 轮换的长度就是该元素的阶 **鲁菲尼定理** 不相交轮换之积的阶为最小公倍数

③ 任一置换可表为对换之积 $(a_1 a_2 \dots a_m)=(a_1 a_m)(a_1 a_{m-1}) \dots (a_1 a_2)=(a_1 a_2)(a_2 a_3) \dots (a_{m-1} a_m)$
(不唯一, 但轮换结构不变) **推论** $(a_1 a_2 \dots a_m)^{-1}=(a_m a_{m-1} \dots a_1)$

odd / even permutation

奇 / 偶置换 奇/偶数个对换之积 (奇数阶轮换 \leftrightarrow 偶置换) **定理** 逆置换的奇偶性相同

定理 $n > 1$ 的 S_n 有各 $\frac{n!}{2}$ 个奇偶置换, 全体偶置换构成 S_n 正规子群 \rightarrow **交错群** A_n , $S_n/A_n=C_2$

④ 任一对换都可写成邻换之积 **结论** 生成元就是 $(n-1)$ 个邻换

Cayley

凯莱定理 任一群都同构于一个变换群, 有限群 ($|G|=n$) 都同构于一个置换群 (S_n 的一个子群)

取 $a \in G$, 定义 **左平移变换** $\phi_a(g)=ag$, 可证明

left regular representation

左正则表示 $G_l=\{\phi_a|a \in G\}$ 是 S_G 的一个子群

同理可定义 **右平移变换** $\psi_a(g)=ga^{-1}$ 和 **右正则表示**

D₃ 例 $a \cdot \{e, r_1, r_2, a, b, c\} = \{a, c, b, e, r_2, r_1\} \rightarrow A(a)=$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ r_1 \\ r_2 \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \\ b \\ e \\ r_2 \\ r_1 \end{bmatrix}$$

结论 ① 忠实 ② 除了 $\chi(e)=n$ 外其它 $\chi(g)=0$ ③ IR 在正则表示中出现次数等于其维数 (\rightarrow 伯恩萨德)

杨图

某一置换的 **轮换结构** $(i^{v_i} \dots)$, 分解出 v_i 个长度为 i 的轮换之积, $i=1, \dots, k$

定理 共轭运算保持轮换结构不变 \rightarrow 具有相同轮换结构的置换属于同一个类

总长度 $n=v_1+2v_2+\dots+kv_k$, 重组 $\lambda_i \equiv v_i + \dots + v_k$ ($(1^n) \rightarrow [n]$, $(n^1) \rightarrow [1 \dots 1]$)

则有 $n=\lambda_1+\dots+\lambda_k$ 且 $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k > 0$, 称为 n 的一个 **划分**, 记作 $[\lambda_1 \dots \lambda_k]$

定理 n 的划分的个数等于 S_n 的共轭类个数

「**排列组合**」每个类中元素个数为 $\rho^{[\lambda]} = \frac{n!}{\prod i^{v_i} \prod (v_i!)}$

例 $\rho^{[n]}=1$ (只有单位元) $\rho^{[1 \dots 1]}=(n-1)!$ (1 个长度为 n)

杨图 $[\lambda]$, 第 i 行有 λ_i 个格, 互为转置的称为 **对偶杨图**

在杨图中填入正整数 (表示单粒子态) \rightarrow **杨盘**

(n 表示粒子个数) **外尔盘** ① 行 (全对称态) 从左到右不减小 ② 列 (反对称态) 从上到下严格增

每格的数字都不重复 \rightarrow **标准杨盘** $T_i^{[\lambda]}$, **字典顺序** 逐格比较, 数小的在前

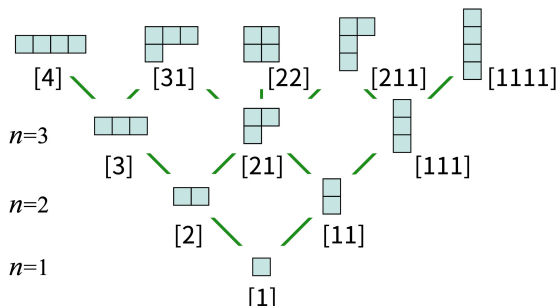
「**排列组合数学归纳**」**定理** 给定杨图的标准盘个数 $f^{[\lambda]} = \frac{n!}{\prod g_{ij}}$

$$n=v_1+v_2+\dots+v_k$$

$$+v_2+v_3+\dots+v_k$$

$$+v_3+\dots+v_k$$

$$\dots+v_k$$



$$T_1^{[21]} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{bmatrix}, T_2^{[21]} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

hook length

钩长 g_{ij} 该格子及其右方和下方的格子数 **性质** 对偶杨图的标盘个数相等 **例** $f^{[n]} = f^{[1 \dots 1]} = 1$

Young
杨定理 S_n 的对应杨图 $[\lambda]$ 的 IR 的维数等于 $f^{[\lambda]}$ **例**

S_5 , 有 7 个类, 伯恩萨德验证: $5! = 120 = 2 \cdot (1^2 + 4^2 + 5^2) + 6^2$

$f^{[41]} = f^{[2111]} = \frac{5!}{5 \cdot 3 \cdot 2} = 4$, $f^{[32]} = f^{[221]} = \frac{5!}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 5$, $f^{[311]} = \frac{5!}{5 \cdot 2 \cdot 2} = 6$

row permutation

column permutation

行置换 $\hat{R}(T) \leq S_n$, 包含标盘 T 中同行数字间的置换及它们的乘积, **列置换** $\hat{C}(T) \leq S_n$, 同理

例 对标盘 有 $\hat{R} = \{e, (12), (34), (12)(34)\}$, $\hat{C} = \{e, (13), (24), (13)(24)\}$

symmetrizing operator

antisymmetrizing operator

对称化算符 $\hat{P}(T) = \sum_{g \in \hat{R}} g$ **反对称化算符** $\hat{Q}(T) = \sum \pm g \in \hat{C}$, 奇置换取负, 偶置换取正

Young operator

杨算符 $\hat{E}(T) = \hat{P}(T)\hat{Q}(T)$ **结论** 同一杨图不同杨盘算出的杨算符不独立, 标盘的才独立

性质 若有两个数字既在杨盘 T_1 的同一行, 又在杨盘 T_2 的同一列, 则 $\hat{E}(T_1)\hat{E}(T_2) = 0$

置换群表示

定理 同一杨图 $[\lambda]$ 的不同标盘间必存在置换 σ_{ij} 使 $\sigma_{ij}T_j^{[\lambda]} = T_i^{[\lambda]}$ **例** $(23)T_1^{[21]} = T_2^{[21]}$

任意设函数 ψ_i 与标盘 T_i 对应, 然后由 $T_j = \sigma_{ji}T_i$ 得 $\psi_j = \sigma_{ji}\psi_i$, 由此得到 $f^{[\lambda]}$ 个基函数

定理 用杨算符可构造一组具有确定置换对称性的函数基 $\Psi_i = \hat{E}(T_i^{[\lambda]})\psi_i$ 来荷载不可约表示 $[\lambda]$

最后把 $(n-1)$ 个生成元 $(12) \sim (k-1, k)$ 作用到基 $\Psi_i(1, 2, \dots, n)$, $i = 1 \sim f^{[\lambda]}$ 即可得 IR

S_3 **例** $T^{[3]} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $T^{[111]} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, 表示均为 1 维, 设基函数为 $\psi = \psi(123)$, 则

$$\hat{E}(T^{[3]})\psi(123) = [(1) + (12) + (13) + (23) + (13)(12) + (12)(13)]\psi(123) \quad (\text{全对称})$$

$$\Psi = \psi(123) + \psi(213) + \psi(321) + \psi(132) + \psi(231) + \psi(312) \quad \text{元素作用在基上, 得恒等表示}$$

$$\hat{E}(T^{[111]})\psi(123) = [(1) - (12) - (13) - (23) + (13)(12) + (12)(13)]\psi(123) \quad (\text{同斯莱特行列式, 全反对称})$$

$$\Psi = \psi(123) - \psi(213) - \psi(321) - \psi(132) + \psi(231) + \psi(312) \quad (12)\Psi = -\Psi \rightarrow A(12) = -1$$

$\{T_1^{[21]}, T_2^{[21]}\}$ 对应 2 维表示, 设 T_1 对应基函数为 $\psi_1 = \psi(123)$, 由 $T_2 = (23)T_1$ 得 $\psi_2 = \psi(132)$,

$$\Psi_1 = \hat{E}(T_1^{[21]})\psi_1 = [(1) + (12)][(1) - (13)]\psi(123) = \psi(123) + \psi(213) - \psi(321) - \psi(312)$$

$$\Psi_2 = \hat{E}(T_2^{[21]})\psi_2 = [(1) + (13)][(1) - (12)]\psi(132) = \psi(132) + \psi(312) - \psi(231) - \psi(213)$$

$$\text{元素作用到基 } \Psi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \Psi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ 上推出矩阵表示: } (12)\Psi_1 = \Psi_1, (12)\Psi_2 = -\Psi_1 - \Psi_2 \rightarrow A(12) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{求出 } (n-1) \text{ 个生成元的表示即可 } A(23) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{然后还得么正化})$$

后来马后炮总结出了 S_n 的 $A_{ij}^{[\lambda]}(k-1, k)$ 的 UIR 的规律: 若 $k-1$ 和 k

① 在标盘 $T_i^{[\lambda]}$ 同一行, 则 $A_{ii} = 1$ ② 在标盘 $T_i^{[\lambda]}$ 同一列, 则 $A_{ii} = -1$

③ 不同行列, 且 $(k-1, k)T_i^{[\lambda]} = T_j^{[\lambda]}$, 则 $\begin{bmatrix} A_{ii} & A_{ij} \\ A_{ji} & A_{jj} \end{bmatrix}^{[\lambda]} = \begin{bmatrix} -\rho & \sqrt{1-\rho^2} \\ \sqrt{1-\rho^2} & \rho \end{bmatrix}$ ④ 其它 $A_{ij} = 0$

axial distance

ρ 是**轴距离**的倒数 ρ^{-1} , 向左向下数 +1, 向右向上数 -1 (如相邻格子距离 ± 1)

$$S_3 \text{ 例 } A^{[21]}(12) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, A^{[21]}(23) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

分支律

用轮换结构 $(i^{v_i} \dots)$ 来标记类 (便于数元素数)

S_3 特征标	(111)	(21)	(3)	
$\chi^{[3]}$	1	1	1	
$\chi^{[21]}$	2	0	-1	
$\chi^{[111]}$	1	-1	1	

S_4 特征标	(1111)	(211)	(22)	(31)	(4)
元素个数	1	6	3	8	6
$\chi^{[4]}$	1	1	1	1	1
$\chi^{[31]}$	3	1	-1	0	-1
$\chi^{[22]}$	2	0	2	-1	0
$\chi^{[211]}$	3	-1	-1	0	1
$\chi^{[1111]}$	1	-1	1	1	-1

分支律 $S_4 \downarrow S_3$

[S_4 中含有 S_3 元素的就那 3 个类]

$$\begin{aligned}\chi^{[4]} &= \chi^{[3]} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \times \\ \hline \end{array} \\ \chi^{[31]} &= \chi^{[3]} + \chi^{[21]} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \times \\ \hline \times & & \end{array} \\ \chi^{[22]} &= \chi^{[21]} \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \times & \end{array} \\ \chi^{[211]} &= \chi^{[21]} + \chi^{[111]} \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \times \\ \hline \times & \end{array} \\ \chi^{[1111]} &= \chi^{[111]} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \times \\ \hline \end{array}\end{aligned}$$

branching rule

分支律 就是对量子数取值的约束

例 ($\vec{L} \perp \vec{A}$ 限制了 $n_2=0$) 给定 n_1 , 则 $l=0,1,\dots,(n_1-1)$
给定 l , 则 $m=-l,\dots,l \rightarrow$ 由群链给出氢原子波函数 $|nlm\rangle$

	$SO(4) \supset SO(3) \supset SO(2)$
IR	$(n_1, n_2) \quad D^{(l)} \quad e^{im\theta}$

置换群直积

同一群的不同 IR 直积的分解尚无规律, 只有一个 **定理** $[\lambda_1]$ 和 $[\lambda_2]$ 对偶 \Leftrightarrow 直积分解包含一次 $[1^n]$

两个群 S_{n_1}, S_{n_2} 的 IR 的直积, 记为 $[\lambda] \otimes [\mu] = \bigoplus a_\nu [\nu]$, 其中 $[\nu]$ 是 $S_{n_1+n_2}$ 的不可约表示

设各自的基为 $\Psi_{1 \sim n_\lambda}^{[\lambda]}, \Phi_{1 \sim n_\mu}^{[\mu]}$, 则新的基由 $\{\Psi_i \Phi_j\}$ 组成, 且还要考虑两组粒子 n_1+n_2 之间的置换 \rightarrow

共需 $\frac{(n_1+n_2)!}{n_1!n_2!} n_\lambda n_\mu$ 个基分量

Littlewood

利特伍德规则 不同群的 IR 直积分解规律 ① 在杨图 $[\mu]$ 的第 i 行都标上数字 i

② 杨图 $[\nu]$ 由在杨图 $[\lambda]$ 上添加杨图 $[\mu]$ 的方格构成

③ 原来同行的不能同列 (\Leftrightarrow 同列标号严格增), 原来同列的也不能同行 [否则对称性反了]

④ 从右往左从上往下数, 无论数到哪, 小的数出现的次数总不少于大的数出现次数

例 两个双态直积分解为三重态和单态 $[2] \otimes [2] = [3] \oplus [1]$ $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$

对于 $SU(3)$, 一个方格表示夸克基本三重态 \rightarrow

3 味夸克 + 3 味反夸克 = 介子 8 重态 + 单态 $[3] \otimes [\bar{3}] = [8] \oplus [1]$

重子有十重态, 两种不同对称性的八重态, 单态 $[3] \otimes [3] \otimes [3] = [10] \oplus [8]_1 \oplus [8]_2 \oplus [1]$

$$\left(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \right) \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$$

外尔盘

外尔盘的个数就是 $V_r^{[\lambda]}$ 中基矢量个数, 即 $GL(n, \mathbb{C})$ 的 IR 的维数 **Robinson 罗宾逊公式** $\dim [\lambda] = \frac{\prod_{i,j} (n+j-i)}{g_{ij}}$

例 对于 $SU(2)$, 分子为 $\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \end{array}$, 勾长为 $\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline 1 & \end{array}$, 维数 = 2 对于 $SU(3)$, 分子为 $\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 4 \\ \hline 2 & \end{array}$, 维数 = 8

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} = \psi(11), \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array} = \psi(22), \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi(12) + \psi(21)], \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi(12) - \psi(21)]$$

应用: 经典李群的张量表示

结论 投影算符就是杨算子

$V_r^{[\lambda]} = \hat{E}(T_r^{[\lambda]}) V^{(k)}$ 是 $GL(n)$ 的不变子空间

GL 的 IR 可用 $[\lambda]$ 标记 (表示还没做出来, 但名字能起出来了)

线性群

general linear group

一般线性群 $GL(n, \mathbb{R} \text{ 或 } \mathbb{C})$, 要求 $|M| \neq 0$, 即 n 阶可逆矩阵乘群

special linear group

特殊线性群 $SL(n)$, 要求 $|M|=1$

$SL(n, \mathbb{R}) \leq GL(n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{R})/SL(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^*$

orthogonal group

(本笔记均指实数域) **正交群** $O(n)$ 需 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 个独立参数 [约束方程 $O^T O = I$, 上下三角的 $=0$ 对称]
 $O(n) = SO(n) \otimes \{I, -I\}$ [$|O| = \pm 1$] **例** $O(1) = \{\pm 1\}$, $SO(1) = \{1\}$

二维空间转动群 $SO(2) = \{R_z(\theta) | -\pi \leq \theta \leq \pi\}$ **例** D_n 是 $O(2)$ 的离散子群 (反射对应行列式 -1)
 (参数群可用数学分析方法) 由于 $SO(2)$ 阿贝尔, 表示一维, 设 $A = \{a(\theta)\}$, 已知乘法关系为 $a(\theta_1 + \theta_2) = a(\theta_1)a(\theta_2)$, 两边对 θ_1 求导后令 $\theta_1 = 0$, 得 $a'(\theta_2) = a(\theta_2)a'(0)$, 为使么正取 $a'(0) = im$ 纯虚, 解得 $a(\theta) = e^{im\theta}$,
 由周期性 $a(\theta) = a(\theta + 2\pi)$ (费米子是 $+4\pi$), 得 $m \in \mathbb{Z}$, 证不可约 $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi^{m*} \chi^m d\theta = \delta_{mm}$,
 「特征标就是本身」群表示的直积 $T^{(m_1)} \otimes T^{(m_2)} = T^{(m_1+m_2)}$

three dimensional rotation group

三维空间转动群 $SO(3) \leq O(3)$, 均由 3 个 **群参数** 表示 (独立, 实数), 群元素写法:

定理 $\forall g \in SO(3)$, $\exists \vec{n} \in E^3$, 使 $g\vec{n} = \vec{n}$ [本征方程 $|g - I| = 0$] \rightarrow 定义 \vec{n} 为 **转轴**

$SO(3)$ 的 3 种表示方法:

① $R_{(\theta, \varphi)}(\psi)$, $0 \leq \psi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi \rightarrow$ 映射到半径 π 球面上 (ψ, θ, φ)

(球面上的点是二对一 $R_n(\pi) = R_{-n}(\pi) \rightarrow$ 在四维空间连起来 (拓扑))

② 固定系, $R_{(\theta, \varphi)}(\psi) = R_z(\varphi)R_y(\theta)R_z(\psi)R_y^{-1}(\theta)R_z^{-1}(\varphi)$, 其中 $R_z = \begin{bmatrix} \cos & -\sin & 0 \\ \sin & \cos & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $R_y = \begin{bmatrix} \cos & 0 & \sin \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin & 0 & \cos \end{bmatrix} \rightarrow$ 矩阵
 (展开表达式很长, 此处略) **结论** 迹为 $2\cos\psi + 1$

共轭为 $gR_{\vec{n}}(\psi)g^{-1}$, ① 求其轴, $(gRg^{-1}g)\vec{n} = g\vec{n} \rightarrow$ 轴为 $g\vec{n}$ ② 求转角, 相似保迹, 特征标 $= 2\cos\psi + 1 \rightarrow$ 转角还是 ψ ③ $gR_{\vec{n}}(\psi)g^{-1} = R_{g\vec{n}}(\psi)$, g 遍取 \rightarrow **定理** 转角 ψ 相同的构成一类

③ 欧拉角 $g(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\gamma)R_y(\beta)R_z(\alpha)$, $0 \leq \alpha < 2\pi, 0 \leq \beta \leq \pi, 0 \leq \gamma < 2\pi$ [见理力] $= R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma) \rightarrow$ 同②写出矩阵形式 (缺点: $\beta=0$ 时, $\alpha+\gamma$ 相同的都对同一旋转, $\beta=\pi$ 时, $\alpha-\gamma$ 都对同一旋转)

rotations about a fixed point in four-dimensional Euclidean space

四维空间转动群 $SO(4) \cong SO(3) \otimes SO(3)$ 是一个非阿贝尔紧致 6 维李群

氢原子, $\frac{1}{r}$ 势特殊, 有角动量守恒和龙格矢守恒

(正交群是实数版的么正群, 是子群) 物理上, 正交群用于欧氏空间, 么正群用于内禀空间

unitary group

(本笔记均指复数域) **么正群** $U(n)$ 需 n^2 个独立实参数 [$2n^2 -$ 对角线 $-2 \times$ 上三角]

[$|U|^2 = 1 \rightarrow |U| = e^{i\theta}$, 要求 $\theta=0 \rightarrow$] $SU(n)$ 需 (n^2-1) 个群参数

$U(n) = SU(n) \otimes U(1)$, 如 QCD 引入 $\lambda_0 = I_3 \rightarrow U(3) = SU(3) \otimes U(1)$

例 $SU(1) = \{e\}$ **例** $U(1) = \{e^{i\theta}\} \cong T \cong SO(2) \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\theta \in \mathbb{R}$, 描述轻子、重子数守恒,
 局部 $U(1)$ 描述 QED (生成元是电荷/弱超荷 Y)

two dimensional special unitary group

二维特殊么正群 群元素写法: $u = \begin{bmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{bmatrix}$, $|a|^2 + |b|^2 = 1$ (亦为一个忠实表示), $a, b \in \mathbb{C}$ 称为 **CK 参数**

$SU(2) \overset{2:1}{\sim} SO(3)$ 定义零迹厄米矩阵 $h \equiv \vec{r}' \cdot \vec{\sigma} = \begin{bmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{bmatrix}$, 在 $SU(2)$ 中的变换 $uhu^\dagger = h' = \vec{r}' \cdot \vec{\sigma}$, 对应到
 $SO(3)$ 中的变换 $\vec{r}' = R_u \vec{r}$, 因 $|h| = -x^2 - y^2 - z^2 = |h'|$ 矢长不变, 故 R_u 是正交变换, 再证保乘, $|R_u| = +1$

$R_u = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(a^2 + a^{*2} - b^2 - b^{*2}) & \frac{i}{2}(-a^2 + a^{*2} - b^2 + b^{*2}) & -(ab + a^*b^*) \\ \frac{i}{2}(a^2 - a^{*2} - b^2 + b^{*2}) & \frac{1}{2}(a^2 + a^{*2} + b^2 + b^{*2}) & -i(ab - a^*b^*) \\ (a^*b + ab^*) & i(a^*b - ab^*) & (aa^* - bb^*) \end{bmatrix} \xrightarrow{a=e^{-i\alpha}, b=0} \begin{bmatrix} e^{-i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha/2} \end{bmatrix} \rightarrow R_z(\alpha)$
 $\xrightarrow{a=\cos \frac{\beta}{2}, b=-\sin \frac{\beta}{2}} \begin{bmatrix} \cos \beta/2 & -\sin \beta/2 \\ \sin \beta/2 & \cos \beta/2 \end{bmatrix} \rightarrow R_y(\beta)$
CK 关系 $a = \cos \frac{\beta}{2} e^{-\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)}$, $b = -\sin \frac{\beta}{2} e^{-\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)}$ 证满射

Cayley-Klein

研究同态核, $\alpha=0, 2\pi$ 对 $\mathbf{SU}(2)$ 来说不一样 $\rightarrow \mathbf{SO}(3)$ 单位元的原像有两个: $\pm I_2$

求其它 IR 可以从已知 IR (那个忠实表示) 做直积然后分解直和得新 IR, 矩阵分解难, 用空间分解, 可用基 (\vec{e}_1, \vec{e}_2) 或坐标 (x_1, x_2) 做, 选后者吧, $(x_1, x_2) \otimes (x_1, x_2) = (x_1^2, x_1x_2, x_2x_1, x_2^2)$, 规律: 齐次单项式, 故选基函数 $f_m^j = x_1^{j+m} x_2^{j-m}$, $m=-j, \dots, j$ (方便以后解释为角动量) 为使表示么正还需除常数 $\sqrt{(j+m)!(j-m)!}$ 作用上去, 把 $(ax_1+bx_2)^{j+m} (-b^*x_1+a^*x_2)^{j-m}$ 展开, 之后都是机械活 得 $\forall \neq \text{IUR}$ 为

$$A_{mm'}^{(j)}(u) = \sum_k \frac{(-1)^{k-m+m'} \sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{(j+m-k)!(j-m'-k)!(k-m+m')!k!} \times a^{j+m-k} (a^*)^{j-m'-k} b^k (b^*)^{k-m+m'}$$

$$A^{(j)}(u), j=0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots, \max(0, m-m') \leq k \leq \min(j+m, j-m')$$

① 证不等价: j 不同维数不同, ② 么正: 后来除的常数, ③ 证完备: 先对角化成 $\text{diag}[e^{-im\varphi}]$ 再求

$$\text{特征标 } \chi^{(j)}(\varphi) = 1 + 2(\cos \frac{1}{2}\varphi + \cos \varphi + \cos \frac{3}{2}\varphi + \dots + \cos j\varphi),$$

$$\text{当 } j \text{ 遍取时 } \{1, \cos \frac{1}{2}\varphi, \cos \varphi, \cos \frac{3}{2}\varphi, \dots\} \text{ 是傅氏变换基, 故 } \chi^{(j)}(\varphi) = \sum_{m=-j}^j e^{-im\varphi} \frac{\sin(2j+1)\varphi/2}{\sin \varphi/2}$$

定理 特征标是类函数空间完备系 \Leftrightarrow 全部的 UIR

④ 证不可约: 特征标内积正交归一, 群平均为积分 $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi^{(j_1)} \chi^{(j_2)} (1 - \cos \varphi) d\varphi = \delta_{j_1 j_2}$ (双值需积到 4π)

$$\text{例 } j=0, \text{ 基 } f_0^0=1, A^{(0)}(u)=1 \quad j=\frac{1}{2}, \text{ 基 } f_{1/2}^{1/2}=x_1, f_{-1/2}^{1/2}=x_1, A^{(1/2)}(u)=u = \begin{bmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{bmatrix}$$

$$j=1, \text{ 基 } f_1^1 = \frac{x_1^2}{\sqrt{2}}, f_0^1 = x_1x_2, f_{-1}^1 = \frac{x_2^2}{\sqrt{2}}, A^{(1)}(u) = \begin{bmatrix} a^2 & \sqrt{2}ab & b^2 \\ -\sqrt{2}ab^* & a^*a-b^*b & \sqrt{2}a^*b \\ b^{*2} & -\sqrt{2}a^*b^* & a^{*2} \end{bmatrix}, \chi^{(1)}(\varphi) = \frac{\sin \frac{3}{2}\varphi}{\sin \frac{1}{2}\varphi} = 2\cos \varphi + 1$$

单位元的特征标等于维数 $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \chi^{(j)}(\varphi) = 2j+1$

性质 奇偶性 $A^j(-u) = (-1)^{2j} A^j(u)$ (还可利用球谐函数基, 后来的事了)

用 CK 关系换参数即得 $\mathbf{SO}(3)$ 的表示 $D^{(j)}$, $\langle \text{高量} \rangle$ 还可分解为 $D_{mm'}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-im\alpha} d_{mm'}^{(j)}(\beta) e^{-im'\gamma}$
single-value representation

① j 取整数, $\pm u$ 对应同一个旋转, $D^{(j)}$ 是 $\mathbf{SO}(3)$ 的 **单值表示**

double-value representation

② j 取半奇数, $g(\alpha)$ 和 $g(\alpha+2\pi)$ 为同一旋转, 却对应不同矩阵 $D^{(j)}(\alpha) = -D^{(j)}(\alpha+2\pi)$, 推广 **双值表示**

$$d_{mm'}^{(j)}(\beta) = \sum_k \frac{(-1)^k \sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{(j+m-k)!(j-m'-k)!(k-m+m')!k!} \times \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^{2j+m-m'-2k} \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^{2k-m+m'}$$

$$\text{性质 } d_{mm'}^{(j)}(\beta) = (-1)^{m-m'} d_{m',m}^{(j)}(\beta) \quad d_{mm'}^{(j)}(\beta) = d_{-m,-m'}^{(j)}(\beta)$$

$$d_{mm'}^{(j)}(-\beta) = d_{m',m}^{(j)}(\beta) \quad d_{mm'}^{(j)}(\pi-\beta) = (-1)^{j-m'} d_{-m',m}^{(j)}(\beta)$$

$$[\chi^{(j_1)}(\varphi) \chi^{(j_2)}(\varphi) = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} e^{-i(m_1+m_2)\varphi} \xrightarrow{\text{重组}} \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{m=-j}^j e^{-im\varphi}]$$

Clebsch-Gordon

$$\text{CG 定理 } D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)} = \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} D^{(j)} \quad \text{例 } D^{(2)} \otimes D^{(3)} = D^{(1)} \oplus D^{(2)} \oplus \dots \oplus D^{(5)} \quad (5 \times 7 = 3 + 5 + \dots + 11)$$

描述双态都是 $\mathbf{SU}(2)$, 分别自旋和同位旋 $\mathbf{SU}_s(2) \otimes \mathbf{SU}_T(2)$

自旋-轨道耦合是 $\mathbf{SU}(2) \otimes \mathbf{SO}(3)$

$\mathbf{SU}(1,1) \sim \mathbf{SO}(2,1)$

$\mathbf{SU}(3)$, 8 个生成元, 可描述谐振子, 夸克的 3 色 $\lambda_{1\sim 8}$ 或 3 味 u, d, s

$g \leftrightarrow r$	$r \leftrightarrow b$	$b \leftrightarrow g$	$r \quad g \quad b$
$\lambda_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\lambda_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\lambda_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \bar{r} \\ \bar{g} \\ \bar{b} \end{matrix}$
$\lambda_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\lambda_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\lambda_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}$	$\lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

单态 $\lambda_9 = \frac{1}{\sqrt{3}}(r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b})$ 无色, 实验证明无色重子不互相作用, 故 $r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b} = 0$

9 种组合 $r\bar{r}, r\bar{g}, r\bar{b}, g\bar{r}, g\bar{g}, g\bar{b}, b\bar{r}, b\bar{g}, b\bar{b}$, 加上上面的条件, 只有 8 种线性独立的胶子

$SU(4) \cong O(6)$, 15 个生成元, 狄拉克群

$SU(6) = 3 \text{ 味} \otimes 2 \text{ 自旋}$

Interacting Boson Model

相互作用玻色子模型 振动谱, 转动谱, γ 不稳定可用一个群描述

子群链为: $U(6) \supset \left\{ \begin{array}{l} U(5) \\ U(3) \\ O(6) \end{array} \right\} \supset O(3) \supset O(2)$

张量算符

张量: ① 多分量, 分量数目叫**秩** ② 变换(逆变, 协变) 用途: ① 分类 ② 简化 $\langle jm|T|jm \rangle$ 的计算
 P 是和坐标旋转变换 g 相联系的函数变换算符 $\psi(\vec{r}) \xrightarrow{\text{坐标旋转}} \psi'(\vec{r}) = P_g \psi(\vec{r})$, 么正, T 是某算符
 $T(\vec{r})\psi_1(\vec{r}) = \psi_2(\vec{r})$ 「旋转后 $T'(\vec{r})\psi'_1(\vec{r}) = \psi'_2(\vec{r})$ 成立 $\rightarrow T'PT_1 = PT_1$ 」 **结论** $T'(\vec{r}) = PT(\vec{r})P^\dagger$

Irreducible Tensor Operator

$SO(3)$ 群的 j 秩 **不可约张量算符** $\{T_m^j\}$, $m = -j, -j+1, \dots, j$, 满足:

① 群视角: 在 $P(\alpha, \beta, \gamma)$ 作用下它的 $(2j+1)$ 个分量按 $D^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma)$ 变换: $PT_m^j P^\dagger = \sum_m D_{m'm}^{(j)} T_m^j$,
(如果定义成 $\sum_m D_{m'm}^{(j)*} T_m^j$, 则为逆变 ITO)

② 代数: $[J_z, T_m^j] = m T_m^j$, $[J_\pm, T_m^j] = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} T_{m \pm 1}^j$, 其中 $J_\pm \equiv J_x \pm i J_y$, (j 为整数, 否则双值)
两种定义等价 「分别取参数 $(\alpha, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), (0, \beta, 0), (0, 0, \gamma)$, 求偏导, 再取它 $= 0$ 」

标量算符 按 $D^{(0)}$ 变换, 即空间旋转不变 **例** 各向同性的 \hat{H} , 自旋轨道相互作用 $\vec{S} \cdot \vec{L}$

矢量算符 $\begin{bmatrix} r_{-1} \\ r_0 \\ r_1 \end{bmatrix} = (D^{(1)}) \begin{bmatrix} r_{-1} \\ r_0 \\ r_1 \end{bmatrix}$ **例** \vec{L} (必须用球谐形式)

其中球谐分量 $J_0 = J_z$, $J_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} J_\pm$ (用笛卡尔分量的话就是个和 $D^{(1)}$ 相似的矩阵)

例 电多极跃迁 $er^l Y_{lm}(\theta)$ 是 l 秩 ITO

厄米 ITO $\{T^j\}^\dagger = \{T^j\}$ ($\Leftrightarrow \forall m, \{T^j\}_m^\dagger = T_m^j$) 要求 $(T_m^j)^\dagger = (-1)^m T_{-m}^j$

(对一般的 ITO 直接取厄米变成的是逆变的)

Wigner-Eckart

维格纳定理 ITO 在角动量表象 $|jm\rangle$ 下的矩阵元可分为 $\langle j'm'|T_q^k|jm\rangle = \langle j'||T^k||j\rangle \langle j'm'|kqjm\rangle$
(原 CG 系数的符号是 $\langle (j_1 j_2) jm | j_1 m_1 j_2 m_2 \rangle$, 是实的所以反序也一样)

reduced matrix element

dynamical property

约化矩阵元 $\langle j'||T^k||j\rangle$ 旋转不变, 包含系统的动力学性质 (CG 系数反映几何性质)

例 标量算符 $\langle j'm'|T_0^0|jm\rangle = \delta_{j,j} \delta_{m,m} \langle j||T^0||j\rangle$

「取迹, 求和项为 $\sum_{jm} \langle j||T^k||j\rangle \langle jm|kqjm\rangle \rightarrow k=0$ 」 **推论** 只有标量算符的迹才可能不为零

例 γ 跃迁(电多极辐射) 的选择定则 $\langle j_2 m_2 | Y_{lm}(\theta, \varphi) | j_1 m_1 \rangle = \langle j_2 || Y_l || j_1 \rangle \langle j_2 m_2 | l m j_1 m_1 \rangle$

CG 系数非零条件 $\rightarrow |j_1 - j_2| \leq l \leq j_1 + j_2, m = m_1 - m_2$? (体现角动量守恒)

李群

continuous group

连续群 群的元素是连续变量的函数

connected

连续且 **连通群** 群参数的连续变化可导致从群的任一元素到其它元素

Lie group

李群 群元素是有限个群参数的解析函数 (一致收敛/实光滑/连续可导)

generators

群元素 $g \in G$ 可写成 **生成元** T^α 的线性组合 $g = g(\theta_1 \sim \theta_N) = e^{i \sum \theta_\alpha T^\alpha} = e^{i \vec{\theta} \cdot \vec{T}}, \theta_\alpha \in \mathbb{R}$

(一般选择参数使 $g(0) = I$ 便于展开)

classical

经典李群 保内积不变的线性群 $U(n)(A_n), O(n)(B_n, D_n), Sp(2n)(C_n)$

compact

non-compact

紧致 内积的形式为 $\sum x_i^2$ **非紧致** 内积的形式为 $\sum x_i^2 - \sum x_j^2$

$\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$	n^2	非连通	非紧
$\mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$	$n^2 - 1$	连通	非紧
$\mathbf{O}(n, \mathbb{R})$	$\frac{1}{2}n(n-1)$	非连通	紧
$\mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$	$\frac{1}{2}n(n-1)$	连通	紧
$\mathbf{Sp}(2n, \mathbb{R})$	$n(2n+1)$	连通	非紧

$\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$	$2n^2$	连通	非紧
$\mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$	$2(n^2 - 1)$	连通	非紧
$\mathbf{O}(n, \mathbb{C})$	$n(n-1)$	非连通	非紧
$\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$	$n(n-1)$	连通	非紧
$\mathbf{U}(n, \mathbb{C})$	n^2	连通	紧
$\mathbf{SU}(n, \mathbb{C})$	$n^2 - 1$	连通	紧
$\mathbf{Sp}(2n, \mathbb{C})$	$2n(2n+1)$	连通	非紧

单李群 没有非平凡的连续(李的)正规子群 \Rightarrow **半单李群** 没有非平凡的连续阿贝尔正规子群

例外李群 $\mathbf{G}_2, \mathbf{F}_4, \mathbf{E}_6, \mathbf{E}_7, \mathbf{E}_8$

Lie algebra

Lie product / commutator

李代数 是一线性空间, 定义 **李积 / 对易子** $[x, y] = xy - yx$, 该运算需满足:

closure bi-linearity anti-commutation Jacobi identity

① 封闭性 ② 双线性 ③ 反对易 ④ 雅可比恒等式

(代数就是有乘也有加) **例** 向量积 $(\{\vec{v}\}, +, \times)$ 满足李代数

只要知道所有生成元的李积 $[T_i, T_j] = \sum C_{ij}^k T_k$ 就可确定任意元素李积 \rightarrow **结构常数** C_{ij}^k

性质 反对易 $\rightarrow C_{ij}^k = -C_{ji}^k$, 雅可比 $\rightarrow \sum_{k=1}^n [C_{ij}^k C_{kq}^p + C_{jq}^k C_{ki}^p + C_{qi}^k C_{kj}^p] = 0$

李代数的维数是指生成元的个数, 等于相应李群的群参数个数

例 平移群, 阿贝尔, 实际上是 3 个 1 维李群之积

单李代数 除了零和本身之外没有其它理想 **半单李代数** 能表为单李代数的直和

infinitesimal group element

李氏定理 李群的 **无穷小群元素** 满足上述李代数的定义 (李代数刻画李群在单位元邻域的性质)

设无穷小群元素 $\delta_U = I - \mathbf{i}T$, 由 $U^{-1} = U^\dagger$, 得 $T = T^\dagger$ $\left[\mathbf{e}^T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \right] \rightarrow U = \mathbf{e}^{-\mathbf{i}T}$

(如果设 $U = I + \mathbf{i}T$ 就是 $\mathbf{e}^{\mathbf{i}T}$, 即被动变换, 数学上甚至设 $U = I + T$ 因为不管厄米)

群 \rightarrow 代数: 微扰展开到一阶, 代数 \rightarrow 群: **指数映射** $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{T}{n})^n = \mathbf{e}^T$

例 二阶矩阵可用泡利阵展开 $T = \delta_0 I_2 + \vec{\delta} \cdot \vec{\sigma}$, $\left[(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) \right]$ 公式可证完备 $\mathbf{SU}(2) \delta_0 = 0$,

$\rightarrow U = \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\vec{\delta} \cdot \vec{\sigma}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathbf{i}\vec{\delta} \cdot \vec{\sigma})^n}{n!} = \left[\cos \delta - \mathbf{i} \hat{\delta} \sin \delta \dots \right]$

3 个生成元: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, 结构为 $[\sigma_x, \sigma_y] = 2\mathbf{i}\sigma_z$

例 设 $\delta_O = I_3 + \mathbf{i}J$ $[O^{-1} = O^T]$ $J^T = -J$ 反对称, 可用角动量基展开:

$J_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{i} \\ 0 & \mathbf{i} & 0 \end{bmatrix}, J_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{i} & 0 & 0 \end{bmatrix}, J_z = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{i} & 0 \\ \mathbf{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, \rightarrow 可得 $\mathbf{SO}(3)$ 的表示之 ②

结构为 $[J_x, J_y] = \mathbf{i}J_z, \vec{J} = \frac{1}{2}\vec{\sigma} \rightarrow \mathbf{su}(2) \cong \mathbf{so}(3)$ **局部同构** 李代数一样, 在单位元附近一一对应 (种子一样)

, 但群参数空间不同 ($\mathbf{SU}(2)$ 是半径 2π 的球) (生长不一样), 结果群不同构

$\mathbf{so}(n) \cong \mathbf{o}(n)$ $\left[\text{因为单位元不在 } \det = -1 \text{ 那一叶里} \right]$

3 种求代数表示方法:

Casimir operator

① 构造 **卡西米尔算符** 和所有生成元都对易 (必存在) 剩下的两两重组成 **嘉当算符** J^\pm

Cartan

recurrence equation

highest weight

lowest weight

得 **递推关系**, 由于是有限维不可约表示空间, 故 m 必有最大值 **最高权** 最小值 **最低权**

例 $[J^2, J_i] = 0$, 和 J_z 标记基函数 $|jm\rangle$, 用球谐形式 $J_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(J_x \pm \mathbf{i}J_y)$, 最高低权记为 $\pm j$

Conden-Shortley

CS 惯例 J^- 开根号取正 $J^- |jm\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}(j+m)(j-m+1)}$, J^+ 开根号取负 $J^+ |jm\rangle = -\sqrt{\frac{1}{2}(j-m)(j+m+1)}$

(未来可保证 CG 的 S 矩阵实么正)

boson realization

② **玻色子实现** 角动量算符 \hat{J} 的三个分量可用两组玻色子算符描述 $\hat{J} = \frac{1}{2} A^\dagger \hat{\sigma} A$, $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$

可验证 $J^+ = a_1^\dagger a_2$, $J^- = a_1 a_2^\dagger$, $J_z = \frac{1}{2}(n_1 - n_2)$, $J^2 = \frac{1}{4}(n_1 + n_2)(n_1 + n_2 + 2)$ 满足李代数结构

基函数天然就是 $|n_1, n_2\rangle = \frac{(a_1^\dagger)^{n_1} (a_2^\dagger)^{n_2}}{\sqrt{n_1! n_2!}} |00\rangle$ 得递推式同①

(一个玻色子也可以, 方法有无数种, 链接凝聚态中的 HP 变换)

③ **微分实现** $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \leftrightarrow [\frac{\partial}{\partial x}, x] = 1$, $J^+ = x \frac{\partial}{\partial y}$, $J^- = y \frac{\partial}{\partial x}$, $J_z = \frac{1}{2}(x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y})$ 作用到坐标函数空间

用同②的基函数 $|jm\rangle = \frac{x^{j+m} y^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}$

反对易的叫 **泊松代数**

李积加上 $\{x, y\}$ 叫 **超代数**, 数学叫超群, 物理叫超对称

$[x, y]_q = xy - qyx \rightarrow$ **量子群**

去掉有限条件 \rightarrow 无限维李代数

参考文献

精

韩世安. 近世代数 (第二版). 科学出版社 (数学专业, 讲群环境, 推导很详细)

Elliott. Symmetries in Physics. Macmillan (完整讲群和群表示论以及物理应用)

└ 中译: 仝道荣. 物理学中的对称性. 科学出版社

清华大学群论课程讲义

参

Serre. Linear Representation of Finite Groups

└ 中译: 郝鈞新. 有限群的线性表示. 科学出版社

Greiner. Quantum Mechanics Symmetries. Springer (讲李群)

└ 中译: 钱裕昆. 量子力学: 对称性. 北京大学出版社 (不确定这本书是放数学还是放粒子物理里...)

韩其智. 群论. 北京大学出版社 (不适合初学)

编者: L^eP_tC 笔记项目主页: <http://leptc.github.io/lenote>

Last compiled on 2015/06/30 at 10:52:00