线性代数

(最后编辑于 2016/04/21 - 19:31:00)

http://leptc.github.io/lenote

精 Lay. Linear Algebra and Its Applications (5). Pearson
└ 中译: 刘深泉. 线性代数及其应用 (3). 机械工业出版社

参 Axler. Linear Algebra Done Right (2). Springer
└ 中译: 杜现昆. 线性代数应该这样学 (2). 人民邮电出版社

Strang. Linear Algebra and Its Applications (4)

(国内很多教材是从从天而降的行列式开始介绍线性代数, 这类书一概不推荐. Axler 是完全排斥行列式的讲法, 适合数学和做理论的童鞋, 不适合工科和做应用的童鞋. Strang 的线代建立在消元法解方程上, 行列式也处理的很自然, 推荐看他的公开课. Lay 很全面很详细, 感觉节奏略慢, 适合初学者自学)

符号约定

φ 为标量, $\boldsymbol{x}$ 为矢量, $(\lambda, \boldsymbol{u})$ 专指本征值和本征矢, V 默认指线性空间, U 默认为其子空间
$\mathcal{L}$ 为所有线性映射的空间, $T \in \mathcal{L}$ 为线性变换, $\boldsymbol{T}$ 为 T 在某组基下的矩阵表示
用 $\mathbb{F}$ 代表数域 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$, 默认按实数域给出公式, 复数域做替换: $^{\top} \to {}^{\dagger}$, 对称 $\to$ 厄米, 正交 $\to$ 幺正

相关笔记

谱定理, 范数, 奇异值, 工程矩阵见 ⟨ 矩阵分析 ⟩ 张量见 ⟨ 矢量分析 ⟩ 无穷维线性空间见 ⟨ 高代 ⟩
线代在解几, 图论, 常微, 运筹, 电路中的应用见相应笔记

线性空间

数 / 标量 φ (定义见〈高代〉) 点 / 矢量 point / vector (自由矢量〈矢分〉) $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}v_x\\v_y\end{bmatrix}$, v_i 称为第 i 维 坐标 coordinates

不区分形状 (行, 列, 甚至矩阵) 时, 矢量还可记作 n 元有序 数组 list / tuple $(v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{F}^n$

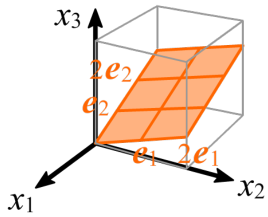
定义矢量 加法 $\begin{bmatrix}a_x\\a_y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_x\\b_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_x+b_x\\a_y+b_y\end{bmatrix}$ (平行四边形法则) , 矢量和标量 数乘 scalar multiplication $\varphi\begin{bmatrix}v_x\\v_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varphi v_x\\\varphi v_y\end{bmatrix}$

若 加法 满足 ① 封闭 ② 交换律 ③ 结合律 ④ 有零元 ⑤ 有逆元, 数乘 满足 ① 封闭 ② 结合律 ③ ④ 对数和对矢量都有分配律 ⑤ 有单位元, 则 $V=\{\boldsymbol{v}\}$ 构成 线性 / 线性空间 (存在唯一性等见〈群论〉)

点 (线性空间的元素) 还可以是 $\xrightarrow[\text{平方收敛?}]{\text{可数维}}$ 数列, $\xrightarrow[\text{平方可积}]{\text{稠密? 无穷维}}$ 函数 例 所有 $\mathbb{F}$ 系数多项式的集合 $\mathcal{P}$ 构成无穷维线性空间「加法 $(p+q)(x)=p(x)+q(x)$, 单位元为 $p(x)=0$, 数乘易验证」

「乘标量 0」 推论 线性空间必须含零矢量 (线性空间是过原点的点/直线/平面/超平面)

$\boldsymbol{v}$ 亦可记作 $\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{e}_x+v_y\boldsymbol{e}_y=[\boldsymbol{e}_x\ \ \boldsymbol{e}_y]\begin{bmatrix}v_x\\v_y\end{bmatrix}$, 其中 标准基 standard basis $\boldsymbol{e}_x=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{e}_y=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$



求和式 $\boldsymbol{v}=\sum v_i\boldsymbol{e}_i$, $v_i\in\mathbb{F}$ 称为矢量组 $(\boldsymbol{e}_{1\sim n})$ 的 线性组合 linear combination

所有线性组合的集合 $V=\{\boldsymbol{v}\}$ 称为由 $(\boldsymbol{e}_{1\sim n})$ 张成 span 的线性空间 $\mathrm{Span}(\boldsymbol{e}_{1\sim n})$

零维空间矢量记作 () , 规定 $\mathrm{Span}()=\{\boldsymbol{0}\}$ (空集不是线性空间)

线性相关

若 $\sum x_i\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{0}$ 仅对 $\forall x_i=0$ 成立, 则称 $(\boldsymbol{e}_{1\sim n})$ 线性无关 linearly independent 推论 含零矢量的组必 线性相关 linearly dependent

例 一个矢量的组线性无关 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{e}\neq\boldsymbol{0}$, 两个矢量的组线性相关 $\Leftrightarrow$ 平行 $\boldsymbol{e}_1=\varphi\boldsymbol{e}_2$

性质 往线性无关组中加入矢量仍相关, 从线性无关组中去掉矢量仍无关 $\rightarrow$ 规定空组是线性无关的

线性相关引理 线性相关 $\Leftrightarrow$ 组中的某个矢量可表示成其它矢量的线性组合「移项」

唯一表示定理 线性无关 $\Leftrightarrow$ 张成空间中的每个矢量都能唯一地表示为 $(\boldsymbol{e}_{1\sim n})$ 的线性组合「若有两种表示 $\boldsymbol{v}=\sum a_i\boldsymbol{e}_i=\sum b_i\boldsymbol{e}_i$, 相减得 $\boldsymbol{0}=\sum(a_i-b_i)\boldsymbol{e}_i$, 因 $(\boldsymbol{e}_i)$ 线性无关, 故系数都得等于零」

能张成 V 的线性无关组 $(\boldsymbol{e}_{1\sim n})$ 称为 V 的 基 basis (表示一个线性空间不必写出所有的点, 写出基即可)「若 $(\boldsymbol{e}_{1\sim n})$ 能张成 V 但线性相关, 由线性相关引理, 从组中去掉那个矢量不影响张成, 照此下去必可化简成一个基」 定理 每个有限维线性空间都有基 例 空组 () 是线性空间 $\{\boldsymbol{0}\}$ 的基

「若 $(\boldsymbol{e}_{1\sim n})$ 不足以张成 V , 则把 Span 之外的矢量加入组中」 定理 V 的线性无关组必可扩充成一个基

「往 $(\boldsymbol{w}_i)$ 中加入一个 $\boldsymbol{v}$, 由线性相关引理可去掉一个 $\boldsymbol{w}$ 而仍张成 V , 照此下去 $\boldsymbol{v}$ 全都换进来了, 但还剩一些 $\boldsymbol{w}$ 」 有限维线性空间中, 线性无关组 $(\boldsymbol{v}_i)$ 的元素数 $\leqslant$ 能张成该空间的矢量组 $(\boldsymbol{w}_i)$ 的元素数

$\rightarrow$ 有限维线性空间的任意两组基所含基矢的个数相等 $\rightarrow$ 定义为线性空间的 维数 dimension $\dim V$

基定理 有限维 V 中元素数为 $\dim V$ 的张成组/线性无关组必是基「不必再化简/扩充」

例 $\dim\{\boldsymbol{0}\}=0$, 它的基是空集 (含零个元素)

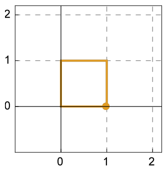
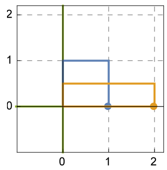
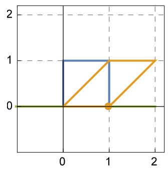
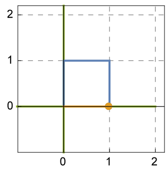
坐标变换

方程组 $\begin{cases}x'=a_{11}x+a_{12}y\\y'=a_{21}x+a_{22}y\end{cases}$ 称为线性的 坐标变换 , (x',y') 称为 (x,y) 在线性变换下的 像

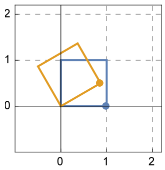
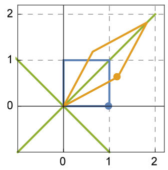
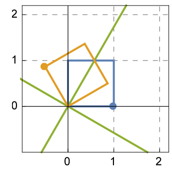
上式可记作 $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ 数表 $\boldsymbol{A}$ 称为 矩阵 matrix (凯莱 1858)
数 a_{ij} 称为 矩阵元 , i 为 行指标 , j 为 列指标 (台湾相反)

可进一步简记为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'$, 即矩阵把点映射到点 (就像函数把数映射到数) 例 零变换 zero $\boldsymbol{0}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$

identity $\boxed{\text{恒等变换}}$ $\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ 本征矢方向 stretching $\boxed{\text{缩放}}$ x 方向 shear $\boxed{\text{切变}}$ 向某平面 projection $\boxed{\text{投影}}$

$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$  $\begin{bmatrix}k_x&0\\0&k_y\end{bmatrix}$  $\begin{bmatrix}1&k\\0&1\end{bmatrix}$  $\boldsymbol{P}$ $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$ 

绕原点逆时针 rotation $\boxed{\text{转动}}$ boost $\boxed{\text{推动 / 伪转动}}$ 关于某平面 reflection $\boxed{\text{反射}}$

$\boldsymbol{R}$ $\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$  $\Lambda^{\mu}_{\ \nu}$ $\begin{bmatrix}\cosh\beta&\sinh\beta\\\sinh\beta&\cosh\beta\end{bmatrix}$  $\boldsymbol{H}$ $\begin{bmatrix}\cos 2\alpha&\sin 2\alpha\\\sin 2\alpha&-\cos 2\alpha\end{bmatrix}$ 

若存在变换 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 能复原 $\boldsymbol{A}$ 的变换 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$ (方阵左逆等于右逆) 则称 $\boldsymbol{A}$ invertible $\boxed{\text{可逆}}$, 不可逆则称 singular $\boxed{\text{奇异}}$

对于方阵, 单位正方形/体变换后的面积/体积称为 $\boldsymbol{A}$ 的 determinant $\boxed{\text{行列式}}$ (莱布尼茨 1693) 记作 $\det\boldsymbol{A}$ 或 $|\boldsymbol{A}|$

例 恒等, 切变, 转动, 推动, 反射的行列式为 1 , 投影的行列式为零, 行列式为零的变换不可逆

在变换中方向保持不变 (相同, 相反或归零) 的矢量称为 $\boldsymbol{A}$ 的 eigenvector $\boxed{\text{本征矢}}$ $\boldsymbol{u}_k$, 缩放率称为相应 eigenvalue $\boxed{\text{本征值}}$ λ_k

例 $\boxed{\text{数量变换}}$ $\varphi\boldsymbol{I}$, 所有矢量都是本征矢, 对应唯一本征值 $\lambda=\varphi$

零矢量是所有变换的本征矢, 二维转动变换在实数域没有非零本征矢, 切变只有一个非零本征矢

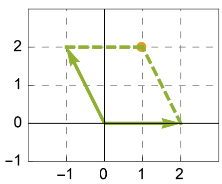
投影变换的投影面上的矢量都是其本征矢, 对应 $\lambda=1$, 法矢量也是本征矢, $\lambda=0$

基变换

设 $(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y)$ 和 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)$ 都是 V 的一组基, $\boldsymbol{v}$ 在不同基下的坐标不同 $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_x&\boldsymbol{e}_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_x\\v_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1&\boldsymbol{e}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}$

例 已知 $\boldsymbol{v}$ 及 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)$ 在标准基 $(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y)$ 下的表示:

$\begin{bmatrix}v_x\\v_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$, 则解 $\begin{bmatrix}2&-1\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ 得 $\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$



矩阵 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1&\boldsymbol{e}_2\end{bmatrix}$ 称为 representaion transformation $\boxed{\text{表象变换阵}}$ $\boldsymbol{S}$, 此处作用是由坐标得到本体 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{S}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}$

「因 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)$ 构成基, 故 $\boldsymbol{S}$ 必可逆」 $\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}$ **定理** $\boxed{\text{坐标映射}}$ 是由 V 到 $\mathbb{F}^n$ 的双射 (同构)

若 ab 是一般的基, $\boldsymbol{S}$ 的作用是由 12 坐标变换到 ab 坐标 $\begin{bmatrix}v_a\\v_b\end{bmatrix}=\underset{ab\leftarrow 12}{\boldsymbol{S}}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}$, 其中 $\underset{ab\leftarrow 12}{\boldsymbol{S}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1&\boldsymbol{e}_2\end{bmatrix}_{ab\text{基下}}$

同理有 $\underset{12\leftarrow ab}{\boldsymbol{S}}=\underset{ab\leftarrow 12}{\boldsymbol{S}}{}^{-1}$ **例** 已知 $\underset{xy\leftarrow 12}{\boldsymbol{S}}$, $\underset{xy\leftarrow ab}{\boldsymbol{S}}$, 则可由高斯法求出 $\underset{ab\leftarrow 12}{\boldsymbol{S}}=\underset{xy\leftarrow ab}{\boldsymbol{S}}{}^{-1}\underset{xy\leftarrow 12}{\boldsymbol{S}}$

线性变换

设有线性空间 $V=\mathbb{F}^n$, $W=\mathbb{F}^m$, 若对 $\forall\boldsymbol{v}\in V$, $\boldsymbol{w}\in W$, $\varphi\in\mathbb{F}$ 有 ① homogeneity $\boxed{\text{齐次性}}$ $T(\varphi\boldsymbol{v})=\varphi T(\boldsymbol{v})$ ② addivity $\boxed{\text{叠加性}}$

$T(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=T(\boldsymbol{v})+T(\boldsymbol{w})$, 则称 $T\colon V\to W$ 为 linear transformation / map $\boxed{\text{线性变换 / 映射}}$, 记作 $T\in\mathcal{L}_{V,W}$, $\dim\mathcal{L}=\dim V\dim W$

「$T(0)=2T(0)$」 **推论** $\boldsymbol{0}$ 的像还是 $\boldsymbol{0}$ **定理** 线性映射保零矢量, 负矢量, 子空间

例 $\boxed{\text{平移 / 仿射变换}}$ $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$ $(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$ 不是线性变换

W 中所有像的集合 $\{T\boldsymbol{v}\}$ 称为 range $\boxed{\text{值域}}$ $\mathcal{R}T$ 〈微积分〉值域等于 W 称为 $\boxed{\text{满射}}$

定义在无穷维线性空间上的线性变换 $T\in\mathcal{L}_{\mathbb{F}^\infty}$ **例** backward shift $\boxed{\text{后移}}$ $T(x_1,x_2,\dots)=(x_2,x_3,\dots)$

$\mathcal{P}$ 上的 differentiation $\boxed{\text{微分}}$ $Tp=p'$ integration $\boxed{\text{积分}}$ $Tp=\int_0^1 p(x)\,\mathrm{d}x$ multiplication by $\boxed{\text{乘 } x^2}$ $Tp=x^2p(x)$ (乘 x^2 是单射, 微分, 后移是满射)

V 中所有 $\boldsymbol{0}$ 的原像的集合称为 kernel $\boxed{\text{核}}$ $\operatorname{Ker}T$ **定理** T 是 $\boxed{\text{单射}}$ $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker}T=\{\boldsymbol{0}\}$

例 Ker 乘 $x^2=\{\mathbf{0}\}$, Ker 微分 = 常值函数, Ker 后移 $=\{(a,0,0,\dots)\}$

秩定理 对于有限维 $\dim V=\dim \operatorname{Ker}T+\dim \mathcal{R}T$ 「设 $\operatorname{Ker}T$ 的基为 $(\boldsymbol{u}_{1\sim p})$ ，它可扩充为 V 的基 $(\boldsymbol{u}_{1\sim p},\boldsymbol{v}_{1\sim q})$ ，证 $(T\boldsymbol{v}_{1\sim q})$ 是 $\mathcal{R}T$ 的基即可 (证能张成: 将 $\boldsymbol{v}\in V$ 用基展开, 作用上 $T\boldsymbol{v}$ 后没 $\boldsymbol{u}_i$ 了, 证线性无关: 设 $\sum c_i T\boldsymbol{v}_i=\mathbf{0}$, T 可提出去, 剩下的和式 $\in \operatorname{Ker}T$, $\boldsymbol{v}_i$ 基和 $\boldsymbol{u}_i$ 基无关故系数为零) 」

推论 若 $\dim V>\dim W$ 则 T 必不是单射 ($n>m$, 变量多于方程时, 齐次线性方程组必有非零解)

若 $\dim V<\dim W$ 则 T 必不是满射 ($n<m$, 方程多于变量时, 必存在 $\boldsymbol{b}$ 使非齐次方程组无解)

operator

线性空间到其自身的线性映射称为 **算符** , 以下将 $\mathcal{L}_{V,V}$ 简记为 $\mathcal{L}_V$ **例** 一维线性空间的算符就是乘 φ

算符的好处在于能自乘为幂, 且仍 $\in\mathcal{L}_V$, 规定 $T^0=I$, 若算符可逆则有负整数幂

还可定义算符的多项式 $p(T)$ **例** $T,U\in\mathcal{L}(V)$ 则 $p(UTU^{-1})=Up(T)U^{-1}$

定理 对于有限维空间的算符, 单 $\Leftrightarrow$ 满 $\Leftrightarrow$ 双 (无限维不行, 例如乘 x^2, 后移) 线性映射可逆 $\Leftrightarrow$ 双射

isomorphic

若两个线性空间之间存在双射则称它们 **同构** 〈 高代 〉 **定理** 有限维线性空间同构 $\Leftrightarrow$ 维数相等

矩阵表示

「给定了基后, 所有的点才有坐标, 线性变换才有矩阵表示」 对于 $T:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$, 输入空间 V 取基矢 $(\boldsymbol{e}_1{}^{(v)},\dots,\boldsymbol{e}_n{}^{(v)})$, 输出空间 W 取基矢 $(\boldsymbol{e}_1{}^{(w)},\dots,\boldsymbol{e}_m{}^{(w)})$

「矢量都可由基矢线性表示, 故知道基的变换便可由齐次叠加性知全部」

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m\end{bmatrix}$$

设 $T(\boldsymbol{e}_1{}^{(v)})=a_{11}\boldsymbol{e}_1{}^{(w)}+\dots+a_{m1}\boldsymbol{e}_m{}^{(w)}$, $\dots$,

$T(\boldsymbol{e}_n{}^{(v)})=a_{1n}\boldsymbol{e}_1{}^{(w)}+\dots+a_{mn}\boldsymbol{e}_m{}^{(w)}$, 则 T 在这两组基下的矩阵表示为

「$T\Big(v_1\boldsymbol{e}_1{}^{(v)}+v_n\boldsymbol{e}_n{}^{(v)}\Big)=\big[\boldsymbol{e}_1{}^{(w)}\ \ \boldsymbol{e}_m{}^{(w)}\big]\left(v_1\begin{bmatrix} a_{11}\\ a_{m1}\end{bmatrix}+v_n\begin{bmatrix} a_{1n}\\ a_{mn}\end{bmatrix}\right)=\big[\boldsymbol{e}_1{}^{(w)}\ \ \boldsymbol{e}_m{}^{(w)}\big]\boldsymbol{T}\begin{bmatrix} v_1\\ v_n\end{bmatrix}$」

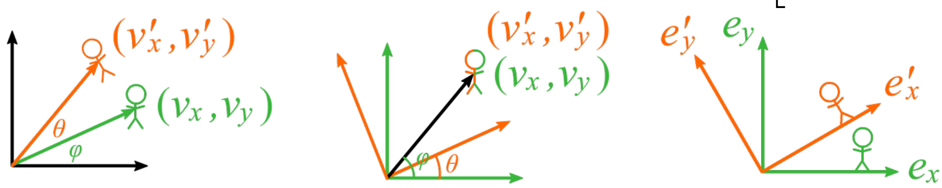
例 $\mathcal{P}_n$ 上的微分, 取 $x^0\sim x^{n-1}$ 为基, 矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}$$

总结 坐标变换是 ①

基变换是 ②

推导线性变换的表示是 ③



① 用坐标表示的主动变换 (物动, 基不动坐标变) $v'_x=r\cos(\theta+\varphi)=\cos\theta\, v_x-\sin\theta\, v_y$ → 系数横写第一行

② 被动变换 (物不动, 基动坐标变) $v'_x=r\cos(\varphi-\theta)=\cos\theta\, v_x+\sin\theta\, v_y$ → 系数横写第一行

③ 用基表示的主动变换 (物动, 基动坐标不变) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_x=\boldsymbol{e}'_x=\cos\theta\,\boldsymbol{e}_x+\sin\theta\,\boldsymbol{e}_y$ → 系数竖写第一列

复合变换

composite transformation

复合变换 先做 A 再做 B 记作 $BA(\boldsymbol{v})$ (因为列矢量在最右) **性质** 结合律, 分配律 (没有交换律)

记 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2]$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2$, 由线性性 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})=x_1\boldsymbol{B}\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{B}\boldsymbol{a}_2=[\boldsymbol{B}\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{a}_2]\boldsymbol{x}\equiv(\boldsymbol{B}[\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2])\boldsymbol{x}$

矩阵乘法 $c_{ij}=\boldsymbol{b}_i\cdot\boldsymbol{a}_j$ ($\boldsymbol{B}_{m\times l}$ 的列数必须等于 $\boldsymbol{A}_{l\times n}$ 的行数)

若用 $\boldsymbol{B}$ 列乘 $\boldsymbol{A}$ 行 (得 $m\times n$ 矩阵) , 则 $\boldsymbol{C}=\sum_{k=1}^{l}\boldsymbol{b}_k\boldsymbol{a}_k$

(还可以分块做乘法, 依然是按照右示意图) 「证明很繁」

$$\underset{\text{第 2 行}}{\begin{bmatrix} b & b \\ \boxed{b_{21}\, b_{22}} \\ b & b\end{bmatrix}}\underset{\text{第 3 列}}{\begin{bmatrix} a & a & \boxed{\begin{matrix}a_{13}\\ a_{23}\end{matrix}} & a \\ a & a & & a\end{bmatrix}}=\underset{b_{21}a_{13}+b_{22}a_{23}}{\begin{bmatrix} c & c & c & c \\ c & c & \boxed{c_{23}} & c \\ c & c & c & c\end{bmatrix}}$$

还可视作: $\boldsymbol{C}$ 中某行是 $\boldsymbol{A}$ 中各行线性组合, $\boldsymbol{C}$ 中某列是 $\boldsymbol{B}$ 中各列线性组合, 系数是 $\boldsymbol{A}$ 中相应列

例 由复合变换的矩阵乘法可推出两角和公式 $\begin{bmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta_2 & -\sin\theta_2\\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2)\\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2)\end{bmatrix}$

性质 结合律, 左右分配律, 一般不满足交换律 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$, 没有消去律 (奇异矩阵不可消去)

对于 $T:V\to W$, 若 $\exists S:W\to V$ 使 $ST=I,TS=I$ (前 I 是 V 上的, 后 I 是 W 上的) 则称 T **可逆**

定理 逆若存在则唯一 「设 $TS_1=TS_2=I_W$, $S_1T=S_2T=I_V$, 则 $S_1=I_VS_1=S_2TS_1=S_2I_W=S_2$ 」

对于方阵, 若 ∃ 同阶方阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ **可逆** , $\boldsymbol{A}^{-1}$ 为 **逆矩阵**

推论 乘积的逆需换序 $(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$ 「$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{I}$, 结合律」

线性方程组

一般地, m 个 n 元一次方程, 称为 线性方程组 , 方程组所有的解称为 解集 , 无解称为方程组 不相容 (inconsistent)

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}, \text{矩阵形式为} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 称为 系数矩阵 , $m=n$ 称为 方阵 (square matrix) , $m<n$ 称为 宽矩阵 (broad matrix) , $m>n$ 称为 高矩阵 (tall matrix)

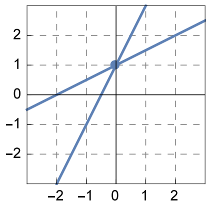
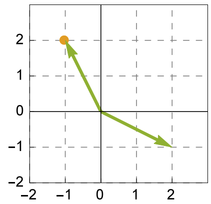
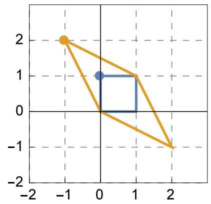
由 $\boldsymbol{A}$ 的列矢量线性组合张成的空间称为 列空间 (column space) $\mathrm{Col}(\boldsymbol{A}) \Leftrightarrow \mathcal{R}(A)\subseteq\mathbb{R}^m$, 行空间 (row space) 则记作 $\mathrm{Col}(\boldsymbol{A}^\mathsf{T})\subseteq\mathbb{R}^n$

矩阵表示　行图景 (row picture) 求两条直线交点　列图景 (row picture) 求线性组合系数　线性变换 求像的原像

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \qquad x_1\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$$

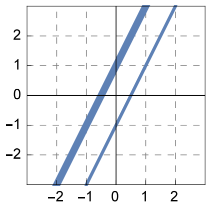
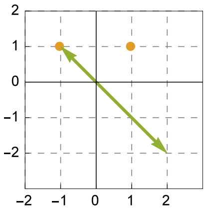
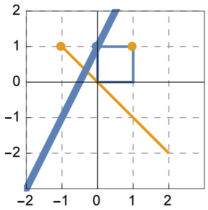
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

有唯一解 $x=0, y=1$

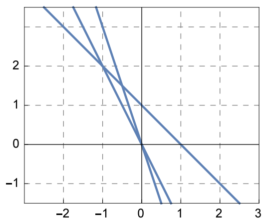
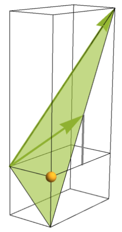
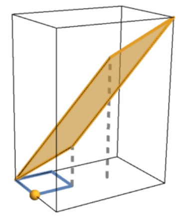
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ 无解,}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ 无穷多解}$$

高矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

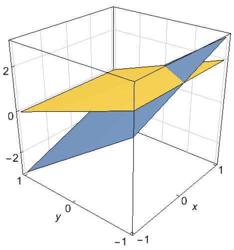
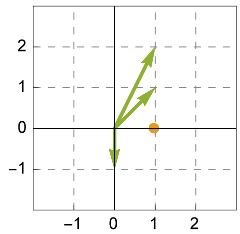
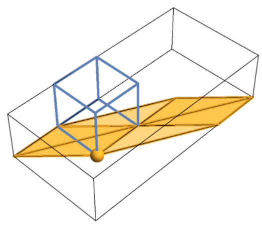
仅当 $\boldsymbol{b}\in$ 列空间时有解

宽矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

无穷多解

初等变换

记矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的 m 个行矢量为 $\boldsymbol{r}_i$,「模仿消元法解方程组」以下变换不改变方程的解:

① 两行互换 $\boldsymbol{r}_1\leftrightarrow\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (置换矩阵 〈 矩阵 〉) ② 倍乘非零数 $k\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

③ 某行倍加到另一行 $k\boldsymbol{r}_1\to\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$, 易知其逆变换为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{bmatrix}$

以上称为 初等行变换 (elementary row operation) , 记作 $\boldsymbol{EA}$ (初等列变换的矩阵形式为右乘 $\boldsymbol{AE}^\mathsf{T}$) **性质** 可逆

每行最左非零元称为 首项 (leading entry) , 行阶梯型 (row echelon form) ① 全零行都在矩阵底部 ② 非零行首项总在前一行首项的右边

③ 首项下方的同列元素均为零, 简化行阶梯型 (reduced row echelon form) ④ 非零行的首项化为 1 ⑤ 向上将首项列其它元消为零

→ 解方程组就是对 增广矩阵 (augmented matrix) $[\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b}]$ 化阶梯型的过程, 阶梯型唯一, 最后留下的首项称为 主元位置 (pivot position)

例 $\left[\begin{array}{ccc:c}\boxed{1}&2&1&2\\3&8&1&12\\0&4&1&2\end{array}\right]\xrightarrow{-3r_1\to r_2}\left[\begin{array}{ccc:c}\boxed{1}&2&1&2\\0&\boxed{2}&-2&6\\0&4&1&2\end{array}\right]\xrightarrow{-2r_2\to r_3}\left[\begin{array}{ccc:c}\boxed{1}&2&1&2\\0&\boxed{2}&-2&6\\0&0&\boxed{5}&-10\end{array}\right]$ 此即阶梯型

back substitution

通过 回代 可得 $x_3=-2$ 或继续简化阶梯型 $\to\left[\begin{array}{ccc:c}\boxed{1}&2&0&4\\0&\boxed{2}&0&2\\0&0&\boxed{1}&-2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}\boxed{1}&0&0&2\\0&\boxed{1}&0&1\\0&0&\boxed{1}&-2\end{array}\right]$

$\to x_2=1\to x_1=2$

化阶梯型过程可记作 $\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{L}^{-1}=\ldots\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{R}$ 称为矩阵的 LU 分解〈数值〉

若全零行不在最底部则还需做行交换（$\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{LR}$），若底部有全零行且右端的 $b_i\neq0$，此时方程组无解

Gauss-Jordan elimination

高斯消元法 初等行变换解方程 $[\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b}]\xrightarrow{\text{初等行变换}}[\boldsymbol{I}\ \boldsymbol{x}]$ (若失败则说明不可逆)

还能用来求逆 $[\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{I}]\xrightarrow{\text{初等行变换}}[\boldsymbol{I}\ \boldsymbol{A}^{-1}]$「因为 $\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{I}\to\boldsymbol{EI}=\boldsymbol{A}^{-1}$」一般地 $[\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B}]\to[\boldsymbol{I}\ \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}]$

例 $\left[\begin{array}{cc:cc}1&2&1&0\\3&7&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{-3r_1\to r_2}\left[\begin{array}{cc:cc}1&2&1&0\\0&1&-3&1\end{array}\right]\xrightarrow{-2r_2\to r_1}\left[\begin{array}{cc:cc}1&0&7&-2\\0&1&-3&1\end{array}\right]$

进一步称为 LDU 分解 $\begin{bmatrix}1&2\\3&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$

(两边主元均为 1)

对于复矩阵方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，可拆成实部和虚部 $(\boldsymbol{A}_\mathrm{r}+\mathrm{i}\boldsymbol{A}_\mathrm{i})(\boldsymbol{x}_\mathrm{r}+\mathrm{i}\boldsymbol{x}_\mathrm{i})=(\boldsymbol{b}_\mathrm{r}+\mathrm{i}\boldsymbol{b}_\mathrm{i})$，写成分块矩阵的形式

$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_\mathrm{r}&-\boldsymbol{A}_\mathrm{i}\\\boldsymbol{A}_\mathrm{i}&\boldsymbol{A}_\mathrm{r}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_\mathrm{r}\\\boldsymbol{x}_\mathrm{i}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_\mathrm{r}\\\boldsymbol{b}_\mathrm{i}\end{bmatrix}$ (n 个复未知数的 m 个复方程 $=$ $2n$ 个实未知数的 $2m$ 个实方程) 求解同理 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_\mathrm{r}&-\boldsymbol{A}_\mathrm{i}&\boldsymbol{b}_\mathrm{r}\\\boldsymbol{A}_\mathrm{i}&\boldsymbol{A}_\mathrm{r}&\boldsymbol{b}_\mathrm{i}\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_n&\boldsymbol{O}_n&\boldsymbol{x}_\mathrm{r}\\\boldsymbol{O}_n&\boldsymbol{I}_n&\boldsymbol{x}_\mathrm{i}\end{bmatrix}$

零空间

homogeneous linear system of equations　　trivial solution

$\boldsymbol{b}$ 为零 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 称为 齐次线性方程组，显然 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是一个解，称为 零解 / 平凡解

列矢量线性相关 $\Leftrightarrow$ 齐次方程有非零解 $\Leftrightarrow$ 奇异「若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则两边左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 得唯一解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$」

null space

齐次方程的通解（国内称为 基础解系）$\Leftrightarrow$ 被 $\boldsymbol{A}$ 映射到 $\boldsymbol{0}$ 的原像的集合 零空间 $\mathrm{Null}(\boldsymbol{A})\Leftrightarrow\mathrm{Ker}(A)$

定理 零空间是线性空间「套定义，齐次解相加仍是解」

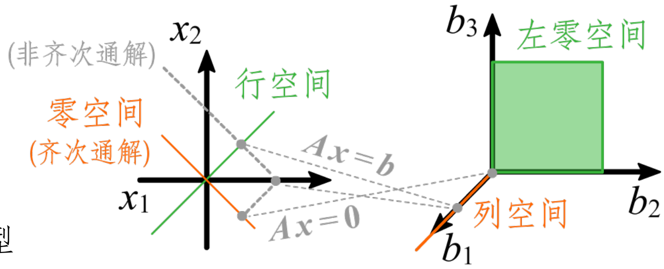
「若 $\boldsymbol{Ax}_1=\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{Ax}_\mathrm{n}=\boldsymbol{0}$, 相加得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_\mathrm{n})=\boldsymbol{b}$」非齐次通解 $=$ 非特 $+$ 齐通

非通不是线性空间「因为不包含零」（几何图像是平移了的超平面，经过 $\boldsymbol{x}_p$）

left null space

「$\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{b}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}^\mathsf{T}$」左零空间 $\mathrm{Null}(\boldsymbol{A}^\mathsf{T})\subseteq\mathbb{R}^m$

例 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$，右图展示的是 $\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$



定理 任一矩阵都有且只有唯一的行等价的行简约阶梯型

(只需做行变换，最后主元列和自由列可能交错出现，以下为了公式美观写成主元列都在前面的情况)

pivot　　rank

$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}&\boldsymbol{F}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$，主元列对应变量称为 主元变量 x_p，主元的个数称为 秩（表示有 r 个方程起作用）

free column

最终齐次方程通解是 $\boldsymbol{x}_\mathrm{p}=-\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_\mathrm{f}$「$\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}&\boldsymbol{F}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_\mathrm{p}\\\boldsymbol{x}_\mathrm{f}\end{bmatrix}=\boldsymbol{O}$」, x_f 自由取值，称为 自由变量

pivot column

「行变换不改变主元位置」称原矩阵（不是 $\boldsymbol{R}$ 哦）中主元所在列为 主元列

① 列空间维数为 r，主元列是列空间的一组基

② 行空间维数为 r，$\boldsymbol{R}$ 的前 r 行是一组基「行变换不改变行空间」（会改变各行的线性相关关系）

③ （秩定理）零空间维数为 $n-r$，$\boldsymbol{N}$ 的列是一组基「齐次方程 $\boldsymbol{RN}=\boldsymbol{O}\to$ 解 $\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{F}\\\boldsymbol{I}\end{bmatrix}$」

（行变换会改变列空间，但不改变解，即不改变零空间）

④ 左零空间维数 $m-r$「除掉主元变量剩下的是自由变量」，基矢是求出 $\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{R}$ 中的 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{RA}^{-1}$ 的最末几行「因为它将 $\boldsymbol{A}$ 的行线性组合成 $\boldsymbol{R}$ 最下面的零行」（$\boldsymbol{E}$ 可以用高斯法 $[\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{I}]\to[\boldsymbol{R}\ \boldsymbol{E}]$ 求）

rank $\boldsymbol{A}$	rank deficient 秩亏缺 $r<m$, $r<n$	full row rank 行满秩 $r=m<n$	full column rank 列满秩 $r=n<m$	full rank 满秩 方阵 $r=m=n$
简化阶梯型	$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{F} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$	$\boldsymbol{I}$
自由变量		$n-r$ 个	无	
零空间		Col $\boldsymbol{F}$	只有零矢量	
非齐的解	无解或无穷多解	必有无穷多个解	解只有 0 或 1 个	存在唯一解

总结 对于方阵 $\boldsymbol{A}_{n\times n}$：可逆 $\Leftrightarrow$ 线性变换是双射 $\Leftrightarrow$ 行列式非零 $\Leftrightarrow$ 0 不是本征值 $\Leftrightarrow$ 满秩 $r=n$ $\Leftrightarrow$ 初等变换为单位阵 $\Leftrightarrow$ n 个主元 $\Leftrightarrow$ 齐次方程无非零解 $\Leftrightarrow$ Null $\boldsymbol{A}=\{\boldsymbol{0}\}$ $\Leftrightarrow$ dim Null $\boldsymbol{A}=0$ $\Leftrightarrow$ 各列线性无关 $\Leftrightarrow$ dim Col $\boldsymbol{A}=n$ $\Leftrightarrow$ 对任意 $\boldsymbol{b}$ 非齐都有解 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}^\top$ 可逆 (列可换成行)

行列式

性质 ① **规范性** $|\boldsymbol{I}|=1$ ② **交错性** 交换行, 则行列式反号 $\rightarrow$ $|\boldsymbol{P}|=\pm1$

③ 对每一行有 **线性性** (不是整体 $|A+B|\neq|A|+|B|$) $\begin{vmatrix} a+\alpha & b+\beta \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ c & d \end{vmatrix}$ **推论** 某行倍乘, 行列式倍乘 注意 $|\varphi\boldsymbol{A}|=\varphi^n|\boldsymbol{A}|$ (就像体积)

定理 满足 ① ② ③ 的函数就是行列式, 只满足 ② ③ 则是行列式的 $|\boldsymbol{I}|$ 倍

② $\rightarrow$ ④ 两行相等则行列式为零, ③ $\rightarrow$ 线性相关则为零

③,④ $\rightarrow$ ⑤ 倍加初等行变换不改变行列式 ③ $\rightarrow$ ⑥ 有全零行则行列式为零

⑤,③,①, 若有零则用 ⑥ $\rightarrow$ ⑦ 三角阵的行列式为对角元之积

⑥ 若换行也救不了 $\rightarrow$ ⑧ det $\boldsymbol{A}=0$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 奇异 } 「至此可知道所有方阵的行列式」

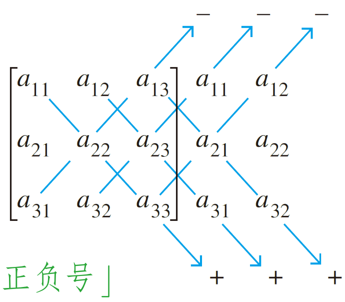
「化对角阵证」⑨ 同阶方阵 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$ $\rightarrow$ 若可逆 $|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$, 乃至多项式函数

「LU 分解」⑩ $|\boldsymbol{A}^\top|=|\boldsymbol{A}|$ 从而以上结论对列也成立 **推论** 奇数阶反对称行列式为零

「证体积满足性质①②③ 即可」行列式等于行/列矢量所确定的平行六面体体积 (若为左手系则为体积的负数) **例** 正交阵是转动了的单位立方体, 行列式为 ±1

(②蕴含要求任何置换都能够区分奇偶〈群论〉, 故引出行列式的严格定义)

「由性质 ③, 逐行展开 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \ldots$, 最终展出 n^n 项, 每行仅一个非零元, 非零元须在不同列, 否则存在全零列行列式为零, 剩下 A_n^n 项 由性质 ② 置换成对角阵得行列式」



公式 $|\boldsymbol{A}|=\sum\pm a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{nj_n}$, 列指标 $j_1\ldots j_n$ 互异, 为偶/奇排列时取正/负

例 一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$ (不是绝对值), 二三阶行列式等于主对角减副对角 (不能推广到更高阶)

「若某行仅一个非零元 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \\ g & h & i \end{vmatrix} = d(ch-bi) = -d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix}$, 置换到第 1 行 1 列可定正负号」

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 删掉第 i 行和第 j 列后记为 $\boldsymbol{A}_{ij}$, 元素 a_{ij} 的 **代数余子式** (cofactor / minor) $A_{ij}\equiv(-1)^{i+j}|\boldsymbol{A}_{ij}|$, $i=j$ 称为 **主子式** (principal)

公式 $|\boldsymbol{A}|=\sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij}$ (行列式等于其任意一行/列的元素乘余子式求和) 用于降阶

例 三对角线行列式 $\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & a & b & 0 \\ 0 & c & a & b \\ 0 & 0 & c & a \end{vmatrix}$ 有 $|\boldsymbol{A}_1|=a$, $|\boldsymbol{A}_2|=a^2-bc$, $|\boldsymbol{A}_n|=a|\boldsymbol{A}_{n-1}|-bc|\boldsymbol{A}_{n-2}|$ 〈常微, 差分〉设 $x^2-ax+bc=0$ 的根为 x_1,x_2, 则 $|\boldsymbol{A}_n|=\dfrac{x_1^{n+1}-x_2^{n+1}}{x_1-x_2}$

「某行乘余子式得行列式, 某行乘另一行的余子式 (相当于都变成某行求行列式) 得 0 $\rightarrow$ $\boldsymbol{AA}^\#=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$ 」

伴随矩阵 (adjoint) 余子式矩阵的转置, 记作 $\boldsymbol{A}^\#$ **公式** $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^\#$ **例** $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{vmatrix}$

推论 $(\boldsymbol{A}^\#)^\#=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$ $(n>2)$, 方阵 $\boldsymbol{A}$ 满秩时 $\boldsymbol{AA}^\#=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}\rightarrow|\boldsymbol{A}^\#|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$ $(n\geqslant2)$, rank $\boldsymbol{A}^\#=n$

k 阶子式 取 k 行 k 列行列式为 α, 删掉后构造代数余子式 $A_{pq}=(-1)^{\sum i_{1\sim k}+j_{1\sim k}}|\boldsymbol{A}_{pq}|$

拉普拉斯定理 $|\boldsymbol{A}|=\sum_{p\text{或}q}^{C_n^k}\alpha_{pq}A_{pq}$

Cramer's rule 「$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解是 $\boldsymbol{x}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{\#}\boldsymbol{b}\to x_i=\sum_k A_{ki}b_k$，对比行列式的按列余子式展开公式」

克莱姆法则 (1750) $x_i=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}|\boldsymbol{B}_i|$，其中 $|\boldsymbol{B}_i|$ 是把 $\boldsymbol{A}$ 中第 i 列换成 $\boldsymbol{b}$ (理论工具, 数值并不实用)

子空间

若 V 的非空子集也是线性空间, 则称为 子空间 (subspace) 例 $\mathbf{0}$ 和 V 本身, 都是 V 的子空间

对于子空间只需验证 ① 含零元素 ② 加法封闭 ③ 数乘封闭 (其它都自然成立)

例 记 $\mathcal{P}_n$ 为次数不超过 n 的多项式组成的线性空间, 则 $\mathcal{P}_n$ 是 $\mathcal{P}$ 的子空间

性质 V 中任意一组矢量张成的都是 V 的子空间, 而且是包含这组矢量的最小子空间

定理 子空间 $\dim U\leqslant\dim V$「用线性无关组的扩充证」 定理 $\mathcal{R}T$ 是 W 的子空间

子空间之 和 (sum) 为元素所有可能的和 $U_1+U_2=\{\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2|\boldsymbol{u}_1\in U_1,\boldsymbol{u}_2\in U_2\}$，子空间之 交 为集合的交 $U_1\cap U_2$

定理 同一线性空间 V 的子空间的和, 交, 仍是 V 的子空间 (并集 $U_1\cup U_2$ 不是)

U_1+U_2 是 V 中包含子空间 U_1 和 U_2 最小的子空间

$U_1\cap U_2$ 是 V 中同时属于子空间 U_1 和 U_2 的最大的子空间

定理 若 U_1,U_2 都是有限维 V 的子空间, 则 $\dim(U_1+U_2)=\dim U_1+\dim U_2-\dim(U_1\cap U_2)$

「用基的个数证」 (对于多个子空间, 公式形同容斥原理) 例 两个相交平面之和为三维空间

例 所有 3 阶方阵构成线性空间 (此处不涉及矩阵乘法)，其子空间有: 所有上三角阵 U，所有对称阵 S，$U\cap S=$ 所有对角阵 D，$\dim M_{3\times3}=9$, $\dim U=\dim S=6$, $\dim(S\cap U)=3$, $\dim(S+U)=9$

设 $V=U_1+U_2$，若 $\forall\boldsymbol{v}\in V$ 都可唯一地写成 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2$，则称 V 是 U_1,U_2 的 直和 (direct sum) $V=U_1\oplus U_2$

定理 判断两个子空间的和是否是直和, 只需验证 $U_1\cap U_2=\{\mathbf{0}\}$ (不能推广到多个)

一般的 $\sum U_i=\bigoplus U_i\Leftrightarrow U_k\cap\sum U_{i\neq k}=\mathbf{0}\Leftrightarrow\sum\boldsymbol{u}_i=\mathbf{0}$ 仅对 $\forall\boldsymbol{u}_i=\mathbf{0}$ 成立

对于有限维, $\sum U_i=\bigoplus U_i\Leftrightarrow\dim V=\sum\dim U_i$

「用线性无关组的扩充证」有限维线性空间 V 的每个子空间 U 都可找到 补空间 (complement) W 使得 $V=U\oplus W$

不变子空间

设 T 是 V 上的算符, U 是 V 的子空间, 若 $\forall\boldsymbol{u}\in U$ 有 $T\boldsymbol{u}\in U$，则称 U 在 T 下 不变 (invariant)

例 $\{\mathbf{0}\}$ 和 V 总是不变的, $\operatorname{Ker}T,\mathcal{R}T$ 是 T 不变的

定理 (同一个 V 的) T 不变子空间之和或之交仍是 T 不变的

「从 V 中任取 $\boldsymbol{u}\neq\mathbf{0}$，则 $U=\{\varphi\boldsymbol{u}|\varphi\in\mathbb{F}\}$ 是 V 的一维子空间 (V 的一维子空间都是此形式)，若 U 在 T 下不变, 则 $T\boldsymbol{u}\in U$，故存在 $\lambda\in\mathbb{F}$ 使 $T\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}$ 」

对于 $T\in\mathcal{L}(V),\lambda\in\mathbb{F}$，若存在非零矢量 $\boldsymbol{u}\in V$ 使 $T\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}$，则称 λ 为 T 的 本征值 / 特征值 / 久期值 (eigenvalue / characteristic / latent value)

(T 有一维不变子空间 $\Leftrightarrow T$ 有本征值 $\Leftrightarrow$ 定义域内存在非零矢量能被该算符映射为其标量倍)

「$T\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}\Leftrightarrow(T-\lambda I)\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$，要求存在非零解」$\lambda$ 是 T 的本征值 $\Leftrightarrow T-\lambda I$ 不可逆 ($\Leftrightarrow$ 不单 $\Leftrightarrow$ 不满)

称 $\boldsymbol{u}$ 是 T 的对应 λ 的 本征矢 (eigenvector)，$(\lambda,\boldsymbol{u})$ 为 本征对 (eigenpair)，λ 下的本征矢的集合 $\operatorname{Ker}(T-\lambda I)$ 是 V 的子空间

($\mathbf{0}$ 也纳入本征矢) 称为 本征空间 $\to$ 同一本征值下的本征矢可线性组合, 仍是其本征矢

例 $T\in\mathcal{L}(V)$ 是数量算符 $\Leftrightarrow\forall\boldsymbol{v}\in V$ 都是 T 的本征矢 $\Leftrightarrow$ 每个 $\dim V-1$ 维子空间都是 T 不变的

性质 不同本征值的本征矢线性无关 (不一定正交) 「假设 $(\boldsymbol{u}_{1\sim n})$ 相关, 其中 $(\boldsymbol{u}_{1\sim(k-1)})$ 无关而 $\boldsymbol{u}_k=\sum_1^{k-1}c_i\boldsymbol{u}_i$，把 T 作用上去 $\lambda_k\boldsymbol{u}_k=\sum_1^{k-1}c_i\lambda_i\boldsymbol{u}_i$，原式乘 λ_k 作差 $\mathbf{0}=\sum_1^{k-1}c_i(\lambda_i-\lambda_k)\boldsymbol{u}_i$，因 $(\boldsymbol{u}_{1\sim(k-1)})$ 无关, $c_i=0$，得 $\boldsymbol{u}_k=\mathbf{0}$ 矛盾」 推论 V 上的算符最多有 $\dim V$ 个不同的本征值

定理 复线性空间上的算符, 关于某组基是上三角阵「对维数用归纳法, 设小于 $\dim V$ 的都成立, 记 $U=\mathcal{R}(T-\lambda I)$，不是满射故 $\dim U<\dim V$，可验证 U 是 T 不变的, 把 U 基扩充成 V 基」

(实空间不成立, 因为基中第一个矢量必须是本征矢)

上三角阵对角元就是 T 的所有本征值「当 $\boldsymbol{T}-\lambda\boldsymbol{I}$ 对角线上有 0 时, 矩阵不可逆」

不一定能找到成对角阵的基 (即使是复空间) 源于重本征值可能会缺本征矢 (若 $\dim V$ 个本征值都互异则必可对角化) **例** $\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$，$\lambda=0$ 两重, 子空间 $\begin{bmatrix}a\\0\end{bmatrix}$

定理 有限维非零实线性空间算符, 若没有 1 维的不变子空间, 就必有 2 维的「证明用到投影算符」

推论 奇数维实线性空间, 算符必有本征值「归纳法」

本征多项式

characteristic polynomial

$p(x)\equiv|x\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=p_nx^n+p_{n-1}x^{n-1}+\cdots+p_0$ 称为 **本征多项式**

$\to p(x)=\prod(x-\lambda_i)^{d_i}=\prod^n(x-\lambda_i)=x^n-(\sum\lambda_i)x^{n-1}+\cdots+(-1)^n\prod\lambda_i$

推论 $p_n=1$，$-p_{n-1}=\operatorname{tr}\boldsymbol{A}$，$p_{n-2}=\operatorname{tr}\boldsymbol{A}^{\#}$，$(-1)^{n-k}p_k=\sum A_{kk}$ (k 阶主子式之和)，$(-1)^np_0=|\boldsymbol{A}|$

本征方程 $p(x)=0$ 的根即本征值 **例** 二维转动变换, $p(x)=(x-\cos\theta)^2+\sin^2\theta$，除 $\sin\theta=0$ 外无实根

degenerate algebraic multiplicity nonderogatory

存在重根称为本征值 **简并 / 退化**，λ_i 是 d_i 重根称为其 **代数重度**，$\forall g_i=1$ 称为 **无减次**

定理 有限维复线性空间 $\sum d_i=\dim V$「〈高代〉多项式有 n 个根」

(无穷维上的算符可能没有任何本征值, 如 **前移** $T(x_1,x_2,x_3,\ldots)=(0,x_1,x_2,\ldots)$ 没有非零本征矢)

geometric multiplicity

解出 λ_i 后, 本征矢为齐次方程解, 即 **本征空间** $\operatorname{Null}(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{I})$，其维数称为 **几何重度** g_i

nondefective distinct

本征矢缺失时 $g_i\leqslant d_i$，$\forall g_i=d_i$ 称 $\boldsymbol{A}$ **无缺陷** $\Leftrightarrow$ 可对角化, 本征值 **互异** $\Leftrightarrow$ 无缺陷且无减次

generalized eigenvector

广义本征矢 $\exists k\in\mathbb{N}_+$ 使 $(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{I})^k\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ **定理** 上三角时 $\dim\operatorname{Null}(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{I})^{\dim V}=d_i$

例 $\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})^2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})^3=\boldsymbol{O}$ **推论** $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{I})\geqslant n-d_i$，$d_i=1$ 时取等号

Cayley-Hamilton annihilating polynomial

凯莱哈密顿定理 (1858) 方阵满足其自己的本征方程 $\Leftrightarrow p(x)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 **零化多项式** $\Leftrightarrow\prod(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{I})=\boldsymbol{O}$

(不能把 $|\boldsymbol{A}-x\boldsymbol{I}|$ 中的 x 换成 $\boldsymbol{A}$ 来证)「设 $(\boldsymbol{e}_k)$ 是使 A 上三角的基, 则只需证 $p(A)\boldsymbol{e}_k=\boldsymbol{0}$，$k=1\sim n$ 等价于证 $\prod_{i=1}^k(A-\lambda_iI)\boldsymbol{e}_k=\boldsymbol{0}$，$k=1$ 成立, 后面用归纳法, 设该式对 $1\sim k-1$ 都成立, 因上三角故 $(A-\lambda_kI)\boldsymbol{e}_k\in\operatorname{Span}(\boldsymbol{e}_{1\sim k-1})$，故 $\prod_{i=1}^{k-1}(A-\lambda_iI)$ 作用上它也为 $\boldsymbol{0}$」

推论 用来求逆「用 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 左乘 $p(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$ 移项」 $\boldsymbol{A}^{-1}=-\frac{1}{p_0}(p_n\boldsymbol{A}^{n-1}+\cdots+p_1\boldsymbol{I})$

minimal polynomial

最小多项式 使方阵 $\boldsymbol{A}$ 零化 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$ ($\Leftrightarrow$ 使 $\boldsymbol{I},\boldsymbol{A},\ldots,\boldsymbol{A}^m$ 线性相关) 的次数最小的首一多项式

定理 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式是 $p(x)$ 的因子, $\prod(x-\lambda_i)^{r_i}$，其中 $0<r_i\leqslant d_i$ **例** $\varphi\boldsymbol{I}$ 的最小多项式是 $(x-\varphi)$

$U_i=\operatorname{Ker}(x-\lambda_i)^{r_i}=\{\boldsymbol{v}\in V|(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{I})^{r_i}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}\}$ 称为属于 λ_i 的 **根子空间**，$\boldsymbol{v}$ 称为 **根矢量**

primary decomposition

定理 U_i 是 V 的不变子空间, 且 $V=\bigoplus U_i$，称为 **准素分解**

相似变换

similar

若存在可逆方阵 $\boldsymbol{S}$ 使同阶方阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}$ 则称两矩阵 **相似** $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{A}$

性质 自反, 对称, 传递〈群论〉若 $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{A}$ 则 $\boldsymbol{B}^\mathsf{T}\sim\boldsymbol{A}^\mathsf{T}$，$\boldsymbol{B}^k\sim\boldsymbol{A}^k$，若可逆则 $\boldsymbol{B}^{-1}\sim\boldsymbol{A}^{-1}$

「设算符在旧基下是 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，算符做基变换, 相当于算符不动, 矢量逆变 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{S}\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}\boldsymbol{y}$」

算符在新基下是 $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}$，称为矩阵的 **相似变换** (相似矩阵是不同基下的同一种算符)

性质 相似矩阵的本征值不变, 本征矢跟着变「$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}\to\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{u})=\lambda(\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{u})$」

若能以本征矢为基, 则表现为对角阵 (纯缩放变换) 「将列本征矢排成矩阵 $\boldsymbol{U}$，要求其可逆, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_i=\lambda_i\boldsymbol{u}_i\to\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}\to\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{\Lambda}$」其中 **本征值矩阵** $\boldsymbol{\Lambda}=\operatorname{diag}(\lambda_{1\sim n})$

diagonalizable

可对角化定理 方阵能相似变换成对角阵 $\Leftrightarrow$ **本征矢矩阵** $\boldsymbol{U}$ 可逆 $\Leftrightarrow$ 有 n 个线性无关本征矢

$\Leftrightarrow$ 本征空间维数之和为 n (每个 d_i 都要取满) $\Leftrightarrow\sum d_i=n$ 且 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{I})=n-d_i$

若本征值简并, 则本征矢可能缺失 **例** 数量阵 $4\boldsymbol{I}$ 只和自己相似, $\begin{bmatrix}4&1\\0&4\end{bmatrix}$ 有相同本征值, 但不和 $4\boldsymbol{I}$ 相似

Jordan block
若尔当块 $\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & 0\\ 0 & \lambda_i & 1\\ 0 & 0 & \lambda_i\end{bmatrix}$, 每缺失个本征矢, 就在对角线上方放个 1,
Jordan normal form (曾今的压轴, 如今少用, 数值计算本征值很难精确相同)
若尔当标准型 (1870) 所有方阵 (包括不能对角化) 都能相似成由若尔当块组成的分块对角阵, 所有若尔当块的数目 = 线性无关本征矢个数, 对应 λ_i 的块有 g_i 个, 其中最大的维数 $=r_i$, 所有维数之和 $=d_i$
推论 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=\sum\lambda_i$, $|\boldsymbol{A}|=\prod\lambda_i$ → 可逆矩阵 ⇔ 所有本征值非零
注意严格区分本征空间维数
「上三角阵的秩 ⩾ 非零主对角元个数」
定理 方阵的 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}$ ⩾ 非零本征值个数
例 $\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ 不相似
若尔当块可分解为 $\lambda_i\boldsymbol{I}+$ 幂零阵 → 任意方阵均可表示为可对角化阵 + 幂零阵, 且这两部分对易

对偶空间

定义在线性空间 $V=\mathbb{F}^n$ 上的函数 $f:\boldsymbol{v}\mapsto\varphi$ 若满足齐次性叠加性则称为 线性函数 例 tr 是线性函数
取 V 的基为 $(\boldsymbol{e}_i)$, $\boldsymbol{v}\in V$ 的坐标写成列矢量, 则 f 为坐标的一次齐次多项式, 矩阵表示为行矢量
$f(\boldsymbol{v})=\sum f_iv_i=[f_1\ \dots\ f_n]\begin{bmatrix}v_1\\v_n\end{bmatrix}$, 其中 $f_i=f(\boldsymbol{e}_i)$, $\boldsymbol{f}$ 又称为 对偶矢量 / 余矢量 (dual / covector)
定义在 V 上所有 f 关于函数的加减和数乘构成线性空间 V^* , 称为 对偶空间 (dual space) , $\dim V^*=\dim V$
$\boldsymbol{v}$ 亦可看作 V^* 上的线性函数, $V^{**}=V$, 为显得平等 $f(\boldsymbol{v})$ 又记作 $\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}\rangle$
在 V^* 中取基 $(\boldsymbol{e}^j)$, 若满足 $\langle\boldsymbol{e}^j,\boldsymbol{e}_i\rangle=\delta_{ij}$ 则称 $(\boldsymbol{e}^j)$ 为 $(\boldsymbol{e}_i)$ 的 对偶基 〈 矢分 〉

$V_1\otimes V_2\to W$ 若对每个 $\boldsymbol{v}_i$ 满足齐次性叠加性则称为 双线性映射 (bilinear map) , 若 $W=\mathbb{F}$ 称为 双线性函数 (bilinear function) $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$
$V^*_{1\sim p}\otimes V_{1\sim q}\to\mathbb{F}$ 称为 多线性函数 (multilinear function) 例 行列式关于行矢量组是多线性函数 $\det\in\mathcal{L}_{\mathbb{F}^n\otimes\cdots\otimes\mathbb{F}^n,\mathbb{F}}$
多线性函数在给定基下的表示, 称为 p 阶协变 q 阶逆变 张量 〈 矢分 〉
例 标量为 (0,0) 阶张量, 矢量 (1,0) 阶, 余矢量 (0,1) 阶, 由矢量到矢量的线性映射 T 为 (1,1) 阶张量

「由线性性 $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum\sum x_iy_jG(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)$ 」 度规矩阵 $\boldsymbol{G}=[G(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)]$ 是 G 在相应基下的矩阵表示
双线性型 (bilinear form) $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}^\mathsf{T}\boldsymbol{G}\boldsymbol{y}$ 例 $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$ 是双线性型, 取对偶基时对应 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{I}$
G 将两个矢量映射到数 (蕴含将一个矢量映射到余矢量) , 为 (0,2) 阶张量
((1,1) 阶张量和 (0,2) 阶张量都表示为矩阵, 当基变换时可看出区别)
若对 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$ 有 $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ 称为 对称双线性型 ⇔ $\boldsymbol{G}$ 是对称阵, 若对 $\forall\boldsymbol{v}\in V$ 有 $G(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})=0$ 称为 交错型 ⇔ $\boldsymbol{G}$ 是交错阵 〈 矩阵 〉, 若 $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=-G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ 称为 反 / 斜对称型 ⇔ $\boldsymbol{G}$ 反对称
若对 $\forall\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$ 有 $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})>0$ 称为 正定 (positive definite) , $\geqslant 0$ 则称 半正定 / 非负定 (positive semidefinite) , 可正可负称 不定 (indefinite)
若 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 正定记作 $\boldsymbol{A}\succ\boldsymbol{B}$, 半正定记作 $\boldsymbol{A}\succcurlyeq\boldsymbol{B}$ 性质 自反, 传递, 反对称 ($\boldsymbol{A}\succcurlyeq\boldsymbol{B}$ 且 $\boldsymbol{A}\preccurlyeq\boldsymbol{B}$ → $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$)
所有元素对都可比较称为 全序 (total order) , 存在厄米阵使 $\boldsymbol{A}\succcurlyeq\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}\preccurlyeq\boldsymbol{B}$ 都不成立, 这种关系称为 偏序 (partial order)
推论 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 正定, 有 $\boldsymbol{A}\succcurlyeq\boldsymbol{B}\Leftrightarrow\boldsymbol{B}^{-1}\succcurlyeq\boldsymbol{A}^{-1}\Rightarrow|\boldsymbol{A}|\geqslant|\boldsymbol{B}|$, $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}\geqslant\operatorname{tr}\boldsymbol{B}$, 按顺序排列有 $\lambda_i^{(\boldsymbol{A})}\geqslant\lambda_i^{(\boldsymbol{B})}$
定理 (仅讨论对称/厄米阵) 正定和以下条件充要 例 $\begin{bmatrix}a&b\\b&c\end{bmatrix}$

⇔ 所有本征值为正实数 推论 正定阵的逆也正定 $\lambda_1>0,\lambda_2>0$
⇔ 所有主元为正数 (半正定时主元会缺) $a>0,c-\frac{b^2}{a}>0$
⇔ 所有顺序主子式 (左上角的子行列式) 为正 ⇔ 所有主子式为正 $a>0,ac-b^2>0$
⇔ 除原点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 外 $Q(\boldsymbol{x})>0$ 推论 正定阵之和也正定 $ax_1^2+2bx_1x_2+cx_2^2>0$

二次型

记 $\boldsymbol{x}=[x_1\ \dots\ x_n]^\mathsf{T}$，方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 二次型 quadratic form $Q(\boldsymbol{x})\equiv\boldsymbol{x}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(a_{ij}+a_{ji})x_ix_j$

$\boldsymbol{A}$ 和 $\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^\mathsf{T})$ 二次型相同，故一般假设 $\boldsymbol{A}$ 为对称/厄米阵，该假定还可保证 Q 为实值函数「$(\boldsymbol{x}^\dagger\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^*=(\boldsymbol{x}^\dagger\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^\dagger=\boldsymbol{x}^\dagger\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^\dagger\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$」(从而可和零比大小)

性质 Q 是二次齐次函数 (非线性 $Q(2\boldsymbol{v})=4Q(\boldsymbol{v})$)，$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\frac{1}{2}[Q(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})-Q(\boldsymbol{x})-Q(\boldsymbol{y})]$

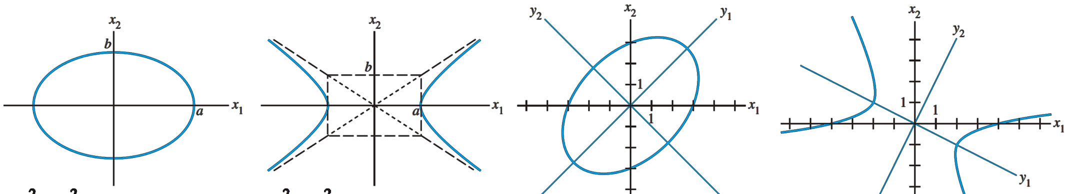
completing the square

配方 以二阶对称阵为例 $a(x_1+\frac{b}{a}x_2)^2+(c-\frac{b^2}{a})x_2^2$ (平方项里面就是消元的过程，外面的系数就是主元)

几何图景下，此过程为通过基变换使二次型没交叉项 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{y}\rightarrow\boldsymbol{x}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^\mathsf{T}(\boldsymbol{S}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S})\boldsymbol{y}$

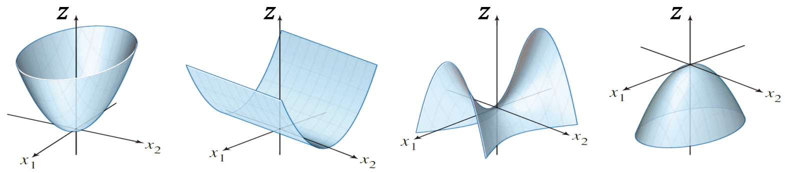
$Q(\boldsymbol{x})=c$ 为圆锥曲线 (椭圆体的长中短轴为本征矢的方向，半轴长的倒数为本征值)

$f=Q(\boldsymbol{x})$ 为二次曲面



$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=1,\ a>b>0$　$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}=1,\ a>b>0$　$5x_1^2-4x_1x_2+5x_2^2=48$　$x_1^2-8x_1x_2-5x_2^2=16$

(正定: 抛物面，横截面为椭圆
不定: 原点为鞍点)



正定 $z=3x_1^2+7x_2^2$　半正定 $z=3x_1^2$　不定 $z=3x_1^2-7x_2^2$　负定 $z=-3x_1^2-7x_2^2$

条件优化问题〈数模〉**例** $f=3x_1^2+7x_2^2$ 在 $\|\boldsymbol{x}\|=1$ 的约束下的最大值为 7，最小值为 3

二次型在 $\|\boldsymbol{x}\|=1$ 的约束下的最值就是本征值的最值，在 $\boldsymbol{x}$ 为相应单位本征矢时取得

二次型在 $\|\boldsymbol{x}\|=1$，$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_1=0$ 的约束下的最大值是第二大本征值，在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{u}_2$ 时取得，依此类推

合同变换

若存在可逆方阵 $\boldsymbol{S}$ 使同阶方阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{S}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}$ 则称两矩阵 合同/相合 congruent / cogredient $\boldsymbol{B}\simeq\boldsymbol{A}$

性质 保对称性，二次型不变 $\rightarrow$ 惯性相同 ①「配方法」对称阵必可通过合同变换对角化

congruent canonical form

合同规范型 实数域上必可合同到 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_p & & \\ & -\boldsymbol{I}_q & \\ & & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$，复数域上必可合同到 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & \\ & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$

p,q 分别称为 正/负惯性指数

等于正/负/零本征值的个数 (重根重复算)，$p-q$ 称为 号差 signature，$p+q=$ 秩 r，满秩又可称为 非退化 nondegenerate

总结 对于实对称方阵 $\boldsymbol{A}$，正定 $\Leftrightarrow\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{I}\Leftrightarrow p=n\Leftrightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{S}^\mathsf{T}\boldsymbol{S}$，$\boldsymbol{S}$ 为可逆方阵

半正定 $\Leftrightarrow\boldsymbol{A}\simeq\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & \\ & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}\Leftrightarrow q=0\Leftrightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{S}^\mathsf{T}\boldsymbol{S}$，$\boldsymbol{S}$ 为实方阵 $\Leftrightarrow$ 所有主子式非负 (只说顺序主子式不充要)

Cholesky

乔莱斯基分解 半/正定方阵能分解为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^\mathsf{T}$，$\boldsymbol{L}$ 为下三角阵，若 $\boldsymbol{A}$ 可逆则分解唯一

负定 $\Leftrightarrow\boldsymbol{A}\simeq-\boldsymbol{I}\Leftrightarrow q=n\Leftrightarrow$ 奇数阶顺序主子式 <0，偶数阶顺序主子式 >0

② 交错方阵必可合同到 $\mathrm{diag}(\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix},0,\dots)$ **定理** 交错阵的秩必为偶数

以下称 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{S}^\dagger\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}$ 为 $\dagger$ 合同，若 $\boldsymbol{S}$ 为实则 T 合同 $\Leftrightarrow\dagger$ 合同 **性质** 都有自反，对称，传递性〈群论〉

Sylveter

惯性定律 厄米阵 $\dagger$ 合同 $\Leftrightarrow$ 惯性相同，实对称阵实合同 $\Leftrightarrow$ 惯性相同，
对称阵 $\dagger$ 合同 $\Leftrightarrow$ 实合同，复或实对称阵 T 合同 $\Leftrightarrow$ 秩相同 $\Leftrightarrow$ 等价

内积空间

inner product

内积 将一对矢量映射到一个数，且满足 ① 正性 positivity $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle\geqslant0$ 定性 definiteness 仅当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 取等号 ② 齐次性 $\langle\varphi\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\varphi\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$ 叠加性 $\langle\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\rangle=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle+\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\rangle$ ③ 厄米性 $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle^*$ (不存在结合律)

定义了内积的线性空间称为 内积空间 inner product space，对应 $\boldsymbol{G}$ 正定，对称/厄米，非退化

例 $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\sum c_ix_iy_i^*$ $(\forall c_i>0)$ 是内积，若 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{I}$ 称为 欧氏空间 Euclidean

〈 矢分 〉欧氏空间内积等于点乘 $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^\dagger\boldsymbol{y}$, 以下 欧氏范数 记作 $\|x\|=\sqrt{\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle}$ 〈 矩阵 〉

$\langle p,q\rangle=\int_0^1 p(x)q^*(x)\,\mathrm{d}x$ 是 $\mathcal{P}_n$ 上的内积, 一般地 $\int_a^b f(x)g^*(x)\,\mathrm{d}x$ 是 $C[a,b]$ 上的内积

$\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=0$ 则称两矢量相互 正交 / 垂直 (orthogonal / perpendicular) **例** 零矢量和所有矢量正交

勾股定理 (Pythagorean theorem) 对于正交矢量 $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2=\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2$「$\langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\rangle=\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2+\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle+\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle$」

「$\boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{y}$ 上投影的长度小于 $\boldsymbol{x}$ 自己的长度, $\left\|\frac{\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle}{\|\boldsymbol{y}\|^2}\boldsymbol{y}\right\|^2=\frac{|\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle|^2}{\|\boldsymbol{y}\|^2}\leqslant\|x\|^2$」

柯西施瓦茨不等式 (Cauchy-Schwartz) $|\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle|\leqslant\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|$, 当且仅当 $\boldsymbol{y}=\varphi\boldsymbol{x}$ 时取等号

三角不等式 (triangle inequality) $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leqslant\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$「$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2=\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2+2\,\mathrm{Re}\,\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle\leqslant\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2+2|\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle|$ 用柯西」

平行四边形法则 (parallelogram law) $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2=2\left(\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2\right)$ (对角线长平方和等于四条边长平方和)

极化恒等式 (polarization identity) $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\frac{1}{4}\left(\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2-\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2-\mathrm{i}\,\|\boldsymbol{x}+\mathrm{i}\boldsymbol{y}\|^2-\mathrm{i}\,\|\boldsymbol{x}-\mathrm{i}\boldsymbol{y}\|^2\right)$ (实内积空间没后两项)

若不要求 ① 称为 正交几何空间 (orthogonal) , 若 $\boldsymbol{G}=\mathrm{diag}(\pm1)$ 称为 伪欧空间 (pseudo-Euclidean) 〈 矢分 〉

将 ③ 改为反对称称为 斜积 (alternating product) , 定义了斜积的线性空间称为 辛几何空间 (symplectic) 〈 高代 〉

定理 正交关系满足对称性 $(x\perp y\Leftrightarrow y\perp x)$ 的几何, 只有正交几何和辛几何「$\boldsymbol{G}$ 必对称或交错」

和自己正交的非零矢量称为 迷向 / 零积矢量 (isotropic / null) **例** 光锥上的矢量迷向, 辛空间矢量全都迷向

复对称阵可能有迷向矢量作为本征矢, 对应 λ 必不是单本征值

正交组

一组矢量两两正交称为 正交组 **定理** 不含零矢量的正交组线性无关, 构成 正交基

正交基下较易计算坐标「$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_i=(\sum v_k\boldsymbol{e}_k)\cdot\boldsymbol{e}_i$」 $v_i=\dfrac{\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{e}_i\rangle}{\langle \boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_i\rangle}$

矢量的 归一化 (normalize) $\dfrac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}$, 全由单位矢量组成的正交基称为 标准正交 / 笛卡尔基 (orthonormal / Cartesian basis)

将正交归一的列矢量排列成矩阵 $\boldsymbol{Q}$ (可以是高矩阵, 若方阵则称 正交阵 〈 矩阵 〉) 由定义得 $\boldsymbol{Q}^\mathsf{T}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}$

推论 $\langle \boldsymbol{Qx},\boldsymbol{Qy}\rangle=(\boldsymbol{Qx})^\mathsf{T}\boldsymbol{Qy}=\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$, 即正交变换保内积 $\to$ 保长度, 夹角

$\to$ 标准正交基经 $\boldsymbol{Q}$ 变换后仍为标准正交基 (就是空间转动, 反射变换)

施密特正交化 (Gram-Schmidt) 对于线性无关组, 记 $\boldsymbol{q}_1=\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{q}_2=\boldsymbol{a}_2-\dfrac{\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{q}_1}{\boldsymbol{q}_1\cdot\boldsymbol{q}_1}\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_3=\boldsymbol{a}_3-\dfrac{\boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{q}_1}{\boldsymbol{q}_1\cdot\boldsymbol{q}_1}\boldsymbol{q}_1-\dfrac{\boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{q}_2}{\boldsymbol{q}_2\cdot\boldsymbol{q}_2}\boldsymbol{q}_2$, … ,

最后对所有 $\boldsymbol{q}$ 归一化, 可得正交归一基

此过程不改变列空间, 称为 QR 分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{QR}$, 其中 $\boldsymbol{R}$ 上三角「$\boldsymbol{a}_1^\mathsf{T}\boldsymbol{q}_2=0$, 后面的总垂直于前面所有」

两线性空间 正交 $U_1\perp U_2$ 是指在两空间中各任取矢量都正交 $\to U_1\cap U_2=\{\boldsymbol{0}\}$

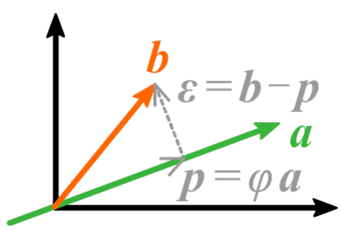
例「$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 逐行看」行空间和零空间正交,「转置同理」列空间和左零空间正交

V 中与 $\forall\boldsymbol{u}\in U$ 正交的矢量的集合称为 U 的 正交补 (orthogonal complement) $U^\perp$ **性质** $U^\perp$ 是 V 的子空间, $(U^\perp)^\perp=U$,

$V=U\oplus U^\perp$「设 U 有正交归一基 $(\boldsymbol{e}_{1\sim k})$, 则 $\boldsymbol{v}=(\sum_1^k\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{e}_i\rangle\,\boldsymbol{e}_i)+(\boldsymbol{v}-\sum_1^k\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{e}_i\rangle\,\boldsymbol{e}_i)$, 后者组成 $U^\perp$」

最小二乘

「由 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{\varepsilon}$ 有 $\boldsymbol{a}^\mathsf{T}(\boldsymbol{b}-\varphi\boldsymbol{a})=0\to\varphi=\dfrac{\boldsymbol{a}^\mathsf{T}\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^\mathsf{T}\boldsymbol{a}}\to\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}\dfrac{\boldsymbol{a}^\mathsf{T}}{\boldsymbol{a}^\mathsf{T}\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$」 投影算符 (projection) $\boldsymbol{P}=\dfrac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^\mathsf{T}}{\boldsymbol{a}^\mathsf{T}\boldsymbol{a}}$



性质 由几何意义知 $\boldsymbol{P}^2=\boldsymbol{P}$, $\mathrm{Col}\,\boldsymbol{P}$ 是 $\boldsymbol{a}$ 所在直线, $\mathrm{rank}\,\boldsymbol{P}=1$, 易证是对称阵

若向平面 $\mathrm{Span}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)$ 投影, 设 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{A\varphi}$, 其中 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2]$, $\boldsymbol{\varphi}=\begin{bmatrix}\varphi_1\\\varphi_2\end{bmatrix}$

「由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\perp\boldsymbol{\varepsilon}$ 有 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1^\mathsf{T}\\\boldsymbol{a}_2^\mathsf{T}\end{bmatrix}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A\varphi})=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\to\boldsymbol{A}^\mathsf{T}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A\varphi})=\boldsymbol{0}$」 即 $\boldsymbol{\varepsilon}\in\mathrm{Null}(\boldsymbol{A}^\mathsf{T})$

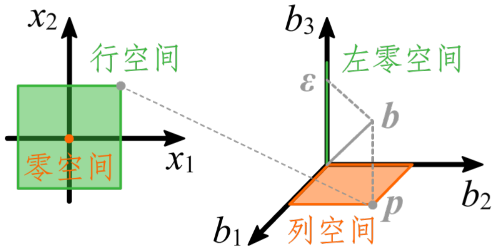
normal equation
→ $\boxed{\text{法方程}}$ $\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{b}$ → 「 $\boldsymbol{\varphi}=(\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{b}$ 」 向列空间投影 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^\top$

例 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}$ (投影到全空间自身) 当 $\boldsymbol{A}$ 为正交阵时 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^\top$

$\boldsymbol{P}_i$ 的作用就是只选出第 i 个基上的坐标, 正交补 $\boldsymbol{P}^\perp=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}$ 也有对称性幂等性, 称为 $\boxed{\text{正交投影算符}}$

定理 对任意矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A}$ 为对称方阵, 半正定, 秩仍为 $\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}$ → 若 $\boldsymbol{A}$ 列满秩则 $\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A}$ 可逆, 正定
「 $\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, 矢量的模方 $\geqslant 0$, 仅当零矢量取等号, 因 $\boldsymbol{A}$ 列满秩故不会有零空间 」

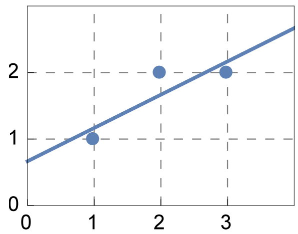
$\boxed{\text{最佳逼近定理}}$ $\boldsymbol{x}$ 在子空间 U 上的投影, 是 U 中到 $\boldsymbol{x}$ 距离最小的点 「 勾股定理 」



实验常会多做测量, 得高矩阵方程, 若 $\boldsymbol{b}$ 不在列空间时无解, 退而用 $\boldsymbol{b}$ 在列空间的投影 $\boldsymbol{p}$ 求出的解作为 $\boxed{\text{最小二乘解}}$ $\boldsymbol{\varphi}$
「 观测值与预测值之差称为 $\boxed{\text{残差}}$, 也是极小化 $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|^2=\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2$ 」

例 $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 无解, 最小二乘解为 $\begin{bmatrix}\varphi_1\\\varphi_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

例 给 3 个点 $(1,1),(2,2),(3,2)$, 拟合直线 $v=x_1+x_2t$



$\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$ $\xrightarrow{\text{两边乘}\boldsymbol{A}^\top}$ normal equations $\boxed{\text{正规方程组}}$ $\begin{bmatrix}3&6\\6&14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_1\\\varphi_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\11\end{bmatrix}$

(从 $\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2$ 对 x_1,x_2 偏导为零亦可得同样的方程) $\varphi_1=\frac{2}{3},\varphi_2=\frac{1}{2}$

谱分解

spectrum　　　　　　　　　　　　　　EigenValue Decomposition
算符/方阵的所有本征值的集合称为 $\boxed{\text{谱}}$ $\lambda^{(\boldsymbol{A})}$, $\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{\Lambda}$ 翻过来称为 $\boxed{\text{本征值 / 谱分解}}$ $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{U}^{-1}$

推论 $\boldsymbol{A}^2$ 的本征值是 λ^2 , 本征矢不变, 可推广至多项式函数 $f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{u}=f(\lambda)\boldsymbol{u}$ 「 从几何图像亦可证 」
「 $\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{I}$, $\mathrm{eig}(\boldsymbol{I})=(1,\boldsymbol{u})$ 」 **例** $\mathrm{eig}(\boldsymbol{A}+\varphi\boldsymbol{I})=(\lambda+\varphi,\boldsymbol{u})$ → 若 $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{A}$ 则 $\boldsymbol{B}+\varphi\boldsymbol{I}\sim\boldsymbol{A}+\varphi\boldsymbol{I}$
(注意区分 $(\lambda,c\boldsymbol{u})$ 仍是 $\boldsymbol{A}$ 的特征对) 若可逆则可到负幂次 $\lambda^{(\boldsymbol{A}^{-1})}=\lambda^{-1}$ **例** $\lambda^{(\boldsymbol{A}^{\#})}=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$
(若可对角化) 本征值分解可用来求幂 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{U}^{-1}$ → $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{U}\,\mathrm{e}^{\boldsymbol{\Lambda}t}\boldsymbol{U}^{-1}$

满足 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{A}$ 的矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的 $\boxed{\text{平方根}}$ → 只能是方阵, 可对角化阵必有平方根 $\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{U}^{-1}$
平方根一般不唯一 (每个 $\sqrt{\lambda_i}$ 可取正或负, 本征值互异非零则有 2^n 个平方根) **例** $\boldsymbol{I}$ 有无数个方根

「 我希望某方阵能通过正交阵 (空间转动) 相似对角化, 即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^\top$, 可见 $\boldsymbol{A}$ 是对称的 」
spectral theorem　　　principle axis
$\boxed{\text{谱定理}}$ (力学上称 $\boxed{\text{主轴定理}}$) $\boldsymbol{A}$ 是对称阵 ⇔ 存在实正交阵使方阵 $\boldsymbol{A}$ 对角化 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$
spectral decomposition
$\boldsymbol{A}=\sum\lambda_i\boldsymbol{q}_i\boldsymbol{q}_i^\top$ 称为 $\boxed{\text{谱分解}}$, 注意 $\boldsymbol{q}_i\boldsymbol{q}_i^\top$ 是投影阵 → 对称阵由相互正交的投影阵之和组成
(任意矩阵可表为秩 1 阵之和, 个数等于秩, 若矩阵半正定则可由半正定阵加和)

复数域上的 $\boxed{\text{谱定理}}$ 是正规阵 ⇔ 可幺正对角化 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^\dagger\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{U}$ 〈 矩阵 〉
定理 对于正规阵, 厄米 ⇔ 本征值都为实, 反厄米 ⇔ 本征值都纯虚, 幺正 ⇔ 本征值的模都为 1 〈 矩阵 〉
正规阵在实数域, 只能实正交相似到分块对角阵 $\mathrm{diag}(\begin{bmatrix}a_i&b_i\\-b_i&a_i\end{bmatrix},\lambda_j)$
例 厄米阵 $\sim\mathrm{diag}(\lambda_{1\sim n})$, 反厄米阵 $\sim\mathrm{diag}(\begin{bmatrix}0&b_i\\-b_i&0\end{bmatrix},0,\ldots)$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\top=\boldsymbol{I}$ 阵 $\sim\mathrm{diag}(\pm1,\begin{bmatrix}\cos\theta_i&\sin\theta_i\\-\sin\theta_i&\cos\theta_i\end{bmatrix})$