

© L^eP_tC (萌狸)笔记项目主页: <http://leptc.github.io/lenote>

署名 · 非商用 · 相同方式共享

**精**

Griffiths, Introduction to Electrodynamics (3rd ed). Pearson

└ 中译: 贾瑜. 电动力学导论. 机械工业出版社

参

俞允强. 电动力学简明教程. 北京大学出版社 (会讲推导的思路)

虞福春. 电动力学 (修订版). 北京大学出版社 (讲的很全)

符号约定

源点 \vec{r}' , 场点 \vec{r} , 相对位矢 $\vec{r} \equiv \vec{r} - \vec{r}'$ (源点指向场点) 单位相对位矢 \vec{e}_r , 不再特别写重积分号
 $\vec{\Sigma}$ 为矢量面积, 引入能流 S 后用 Σ 表示普通面积

相关笔记

相对论见 〈狭相〉 波动光学见 〈经典光 A〉 电磁辐射应用见 〈现光〉 〈核物〉

静电学

库仑定律 $\vec{F} = k_e \frac{q_1 q_2}{z^2} \vec{e}_z$ **电场强度** $\vec{E}(\vec{r}) = k_e \int \frac{\vec{e}_z}{z^2} dq$ 其中 $dq = \eta_e(\vec{r}') d\vec{l}' = \sigma_e(\vec{r}') dS' = \rho_e(\vec{r}') dV'$ (\vec{e}_z 中含 \vec{r}' , 不能拿到积分号外)

[$\vec{z} = \sum (x-x') \vec{e}_x$, 若 \vec{r}' 固定, $\partial_x(x-x')^n = n(x-x')^{n-1}$, 故 z 的散度公式就是把 r 的都换成 z]

$$\rightarrow \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{有电荷}} \nabla_r \cdot \left(\frac{\vec{e}_z}{z^2} \right) \rho_e(\vec{r}') dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{全空间}} 4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \rho_e(\vec{r}') dV' = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_e(\vec{r})$$

[中心场无旋] $\rightarrow \nabla \times \vec{E} = 0$ [$\vec{E} = -\nabla\varphi$] **泊松方程** $\nabla^2 \varphi = -\rho_e/\epsilon_0 \xrightarrow{\rho_e=0}$ **拉普拉斯方程** $\nabla^2 \varphi = 0$

电势 $\varphi(\vec{r}) = k_e \int \frac{1}{z} dq$ 是局域电荷分布时泊松方程的解 (需预知电荷分布, 否则还是用微分方程)

静电能 $W_e = \int_V \varphi \rho_e dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \varphi (\nabla \cdot \vec{E}) dV \xrightarrow{\text{分部}} \frac{\epsilon_0}{2} \left(\oint_S \varphi \vec{E} \cdot d\vec{S} - \int_V \vec{E} \cdot \nabla \varphi dV \right)$, 后者 $\nabla \varphi = -\vec{E}$, 积分原为有电荷存在区域, 但可扩大到全空间, 体积分项增大, 面积分减少到零, 总和不变 $= \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\infty} E^2 dV$

由线性均匀电介质填充后的静电能 $\frac{\epsilon}{2} \int_V E^2 dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{E} \cdot \vec{D} dV$

注 上式不适用于非线性电介质, 因做功不仅和最终状态有关, 还和如何到达它的过程有关

电偶极子

记 $\vec{z}_{\pm} = \vec{r} \mp \vec{l}/2$, **电偶极子** $\varphi(\vec{r}) = k_e q (z_+^{-1} - z_-^{-1}) = -k_e q \vec{l} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = k_e \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{r^2}$ < 电磁 >

电介质 [总电势是小偶极子的做体积分] $\varphi(\vec{r}) = k_e \int_V \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{e}_z}{z^2} dV' = k_e \int_V \vec{P} \cdot \nabla_r \left(\frac{1}{z} \right) dV' \xrightarrow{\text{分部}} k_e \left(\oint_S \frac{1}{z} \vec{P} \cdot d\vec{S}' - \int_V \frac{1}{z} \nabla_r \cdot \vec{P} dV' \right) \equiv k_e \left(\oint_S \frac{\sigma_e}{z} dS' + \int_V \frac{\rho_e}{z} dV' \right)$, 面电荷 $\sigma_e \equiv \vec{P} \cdot \vec{e}_n$, 体电荷 $\rho_e \equiv -\nabla \cdot \vec{P}$

< 矢分 > $\rightarrow \vec{E}_{\text{偶极}}(\vec{r}) = \frac{k_e}{r^3} [3(\vec{p} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{p}]$ [零点发散] 还要加一项 $-\frac{\vec{p}}{3\epsilon_0} \delta^3(\vec{r})$ 才满足平均场定理

[一个偶极子的静电能 $W_e = -\vec{p} \cdot \vec{E}$] 两个偶极子相互作用能 $W_{\text{互}} = -\vec{p}_1 \cdot \vec{E}_2 = \frac{k_e}{r^3} [\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - 3(\vec{p}_1 \cdot \vec{e}_r)(\vec{p}_2 \cdot \vec{e}_r)]$

例 电偶极子位于原点方向朝 \vec{e}_z , 从 xy 平面静止释放一点电荷, 则电荷将在半圆弧上做单摆运动

[$q\vec{E} = k_e \frac{qp}{r^3} (2\cos\theta \vec{e}_r + \sin\theta \vec{e}_\theta)$, 而单摆的合力 $-mg\vec{e}_z - T\vec{e}_r = mg(2\cos\theta \vec{e}_r + \sin\theta \vec{e}_\theta)$]

另外在半顶角 $\theta_c = \tan^{-1}(\sqrt{2})$ 的锥面, \vec{E} 和 xy 面平行, 电荷可做匀速圆周运动

电偶极矩 概念推广 $\vec{p} = \sum q_i \vec{r}_i$ (纯的电偶极子应使 $l \rightarrow 0$, $q \rightarrow \infty$, p 不变, 才无多极矩)

(若总电量为零, 则偶极矩与原点选择无关, 否则有关, 总电势不受原点影响)

引理 球 R 内 \vec{r} 处点电荷 q 产生的平均电场, 等于球内均匀分布 $\rho_e \equiv -q/(\frac{4}{3}\pi R^3)$ 在 \vec{r} 处产生的电场, 均为 $\vec{E}_{\text{平均}} = k_e (-\rho_e) \int \frac{\vec{e}_z}{z^2} dV'$ (负号是因源点场点互换角色) **平均场定理**

球内所有电荷产生的 $\vec{E}_{\text{平均}} = -k_e \frac{\vec{p}_{\text{总}}}{R^3}$, 球外电荷在球内产生的 $\vec{E}_{\text{平均}}$ 等于其在球心处产生的电场

例 中性原子在静电场中受力 $\vec{F} = \frac{1}{2} \alpha \nabla(E^2)$, 而 E^2 亦无局域极值, 故不能用静电场来稳定束缚

边值问题

boundary value problem

boundary condition

静电场 **边值问题** 给出各带电导体几何形状与位置, 和各导体电荷量或电势 (边界条件)

first uniqueness theorem

第一唯一性定理 区域 V 拉普拉斯方程的解由 V 的边界上的电势唯一确定

[若有两种 φ , 则 $\varphi_3 \equiv \varphi_1 - \varphi_2$ 满足边界 $\varphi_3 = 0$ 的拉方程, 拉方程无局域极值, 故 φ_3 为恒零场]

(可推广为泊松方程, 作差亦得拉方程)

第二唯一性定理 区域 V 中每个导体上总电荷给定, 则电场唯一确定 (可推广到电介质, 换成 $\nabla \cdot (\varphi_3 \vec{D}_3)$)

[$\vec{E}_3 \equiv \vec{E}_1 - \vec{E}_2$, 则在导体间区域 $\nabla \cdot \vec{E}_3 = 0$, 由矢分公式得 $\nabla \cdot (\varphi_3 \vec{E}_3) = -E_3^2$, 边界面 $\oint_S \vec{E}_3 \cdot d\vec{S} = 0$, 高斯定理 $\iiint_V \nabla \cdot (\varphi_3 \vec{E}_3) dV = \oint_S \varphi_3 \vec{E}_3 \cdot d\vec{S}$, 已知导体为等势体, 故 φ_3 可提到积分号外, 得 $-\iiint_V E_3^2 dV = 0$]

[开头亦可用第一格林定理 $\iiint_V (\varphi_3 \nabla^2 \varphi_3 + \nabla \varphi_3 \cdot \nabla \varphi_3) dV = \oint_S \varphi_3 \nabla \varphi_3 \cdot d\vec{S}$, 代入 $\nabla^2 \varphi_3 = 0$, $\nabla \varphi_3 = -\vec{E}_3$]

method of image charges

→ **电像法** 若能使边界条件适应于解, 则由唯一性它就是解 (以解求题法)

例 导体板一侧的电场, 等于没有导体板而在另一侧有像电荷所共同产生的
 $\varphi = k_e q \left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z+d)^2}} \right]$, 导体板表面 $\sigma_e = -\varepsilon_0 \partial_z \varphi|_{z=0} = \frac{-qd}{2\pi r^3}$,

其中 $r = \sqrt{\rho^2 + d^2}$, 或用偶极子场强公式 (电磁) $\sigma_e = \varepsilon_0 (-E_\theta)|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -\varepsilon_0 k_e \frac{p}{r^3}$

可验证总感应电荷 $\int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{-qd}{2\pi(\rho^2 + d^2)^{3/2}} \rho d\rho d\phi = \frac{qd}{\sqrt{r^2 + d^2}} \Big|_0^\infty = -q$

导体板对电荷吸引力亦同点电荷, 半空间的电场能为全空间的一半

性质 像电荷不能放在要求解 φ 的区域 (会改变泊松方程的源)

像电荷的电量必与被替代区域中的总电荷量相等

例 导体板换成 $z < 0$ 下半空间充满 ε_r 电介质, $z = d$ 处放点电荷 q [$\sigma'_e = P_z = \varepsilon_0 \chi_e E_z$, 电介质内的 E_z 由 q 和 σ'_e 共同产生, 得 $E_z = -k_e \frac{q}{r^2} \frac{d}{r} - \frac{\sigma'_e}{2\varepsilon_0}$, 解出 $\sigma'_e = -\frac{\chi_e}{\chi_e + 2} \frac{qd}{2\pi r^3}$, 和导体板结果对比] 得 $q' = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1} q$

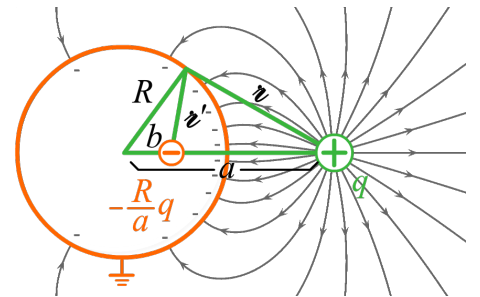
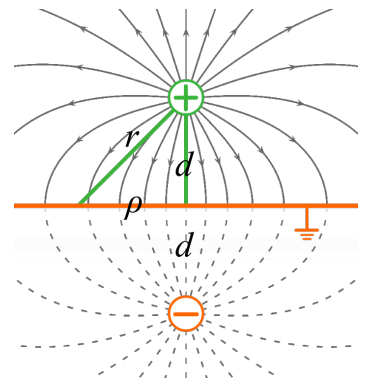
则算 $z > 0$ 区域电势时, 像电荷 q' 放在 $z = -d$, 算 $z < 0$ 时, 像电荷 $q + q'$ 放在 $z = d$ (均用的是 $1/(4\pi\varepsilon_0)$)

若上半空间为 ε'_r 电介质, 则 $q' = \left(\frac{\varepsilon'_r - \varepsilon_r}{\varepsilon'_r + \varepsilon_r} \right) q$, 算 $z > 0$ 时, 原 $\frac{q}{\varepsilon'_r}$ 像 q' , 算 $z < 0$ 时, 像 $\frac{q}{\varepsilon'_r} + q' = \frac{2q}{(\varepsilon'_r + \varepsilon_r)}$

两平面夹角为 180° 的整数分之一倍亦可用电像法

少数其它形状可以用电像法 **例** 球面 [使三角形相似] → $ab = R^2$

→ $z:z' = a:R = R:b = q:|q'|$ 二维空间或圆柱面: 换成 $\ln z$



格林定理

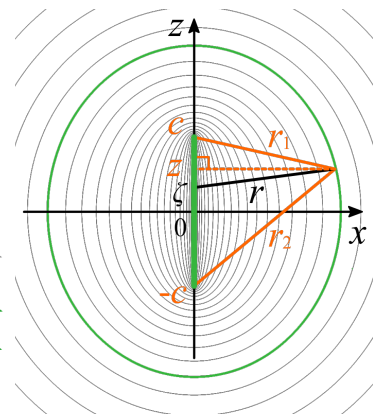
Green's equivalent layer theorem

[唯一性定理] **格林等效层定理** 等势面包围体积 V 内电荷在 V 外产生的电势, 等价于把等势面换成带同样电荷的导体产生的电势 → 反之, 导体产生的电势亦可用能产生同样等势面的电荷分布代替

例 导体椭球可用其焦点间的均匀带电线段来代替, $\eta_e = q/2c$

$$\varphi = k_e \frac{q}{2c} \int_{-c}^c \frac{d\zeta}{\sqrt{x^2 + (z-\zeta)^2}} = k_e \frac{q}{2} \ln \frac{r_2 + z + c}{r_1 + z - c} = \text{常数} \quad \text{记 } (r_2 + z_+) = k(r_1 + z_-)$$

$$r_1^2 - z_-^2 = r_2^2 - z_+^2 \rightarrow (r_1 - z_-) = k(r_2 - z_+) \rightarrow r_1 + r_2 = \text{常数} \quad \frac{2c(k+1)}{k-1} \equiv 2a$$



Green's reciprocity theorem

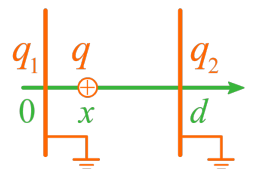
格林互易定理 设电荷分布 ρ_{e1} 产生了 φ_1 , 另一种分布 ρ_{e2} 产生了 φ_2 (两种情况可以完全不相关), 则 $\int_\infty \rho_{e1} \varphi_2 dV = \int_\infty \rho_{e2} \varphi_1 dV$ [等式两边都等于 $\varepsilon_0 \int (\nabla \varphi_1) \cdot (\nabla \varphi_2) dV$, 因为 $(\nabla \varphi_1) \cdot (\nabla \varphi_2) = \nabla \cdot (\varphi_1 \nabla \varphi_2) - \varphi_1 (\nabla^2 \varphi_2)$, 前者变面积分, 因无穷远 $\varphi \rightarrow 0$ 积分为零, 后者 $-\nabla^2 \varphi_2 = \rho_{e2}/\varepsilon_0$]

推论 两个导体, A 带电 q , B 不带电, 电势 φ , 则若 B 带电 q , A 不带电, A 电势亦为 φ

例 两接地无限大导体板相距 d , 在 $0 < x < d$ 处放电荷 q , 求感应电荷

构造情况 2: 左板 $\varphi = 0$, 右板为 φ_0 , 板间没电荷 [$\rho_1 \varphi_2 = 0 + q \frac{x}{d} \varphi_0 + q_2 \varphi_0 = \rho_2 \varphi_1 = 0$]

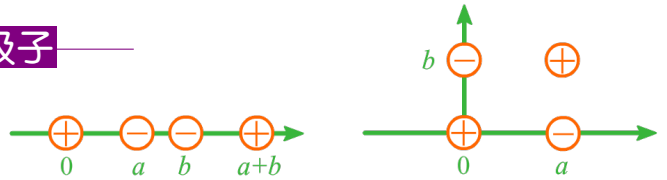
$$q_2 = -\frac{x}{d} q, \quad q_1 + q_2 = -q, \quad \text{同理同心接地导体球壳 } q_a = -\frac{qa}{b-a} \left(\frac{b}{r} - 1 \right), \quad q_b = -\frac{qb}{b-a} \left(1 - \frac{a}{r} \right)$$



电多极子

〈电磁〉偶极矩为零的 **电四极子**

〈矢分〉「 $|\vec{r}-\vec{r}_0|^{-1}$ 的泰勒展开」两种表达式均为



$$\varphi(\vec{r}) = k_e q \left(r^{-1} - |\vec{r}-\vec{a}|^{-1} - |\vec{r}-\vec{b}|^{-1} + |\vec{r}-(\vec{a}+\vec{b})|^{-1} \right) = k_e \frac{q(\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{a}) : (3\vec{e}_r\vec{e}_r - \vec{I})}{2r^3} = k_e \frac{\vec{\mathcal{D}} : (3\vec{e}_r\vec{e}_r - \vec{I})}{2r^3}$$

其中 $\vec{\mathcal{D}} \equiv \sum q_i \vec{r}_i \vec{r}_i$ 为二阶对称张量, \vec{r}_i 为电荷 q_i 的位矢 **例** 共线型只有 $\mathcal{D}_{xx}=2qab$, 方型 $\mathcal{D}_{xy}=\mathcal{D}_{yx}=qab$

由公式可见 **tr** $\vec{\mathcal{D}}$ 对 φ 没影响, 故定义零迹对称张量 **电四极矩** $\vec{D} \equiv 3\vec{\mathcal{D}} - (\text{tr} \vec{\mathcal{D}}) \vec{I}$ (剩 5 个独立分量)

(若总电量, 偶极矩均为零, 则四极矩与原点选取无关) **例** 球对称系统, $\vec{\mathcal{D}}$ 三个对角元相等, $\vec{D}=0$

例 z 轴均匀带电椭球, 仅 1 个独立量, $\vec{D} = \begin{bmatrix} -D_{zz}/2 & 0 & 0 \\ 0 & -D_{zz}/2 & 0 \\ 0 & 0 & D_{zz} \end{bmatrix}$, 四极势 $\varphi_2 = k_e \frac{D_{zz}}{4r^3} (3\cos^2\theta - 1)$

对于形状 $\frac{x^2+y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$, 电四极矩 $Q \equiv \frac{1}{q} \int (3(z')^2 - (r')^2) dq = \frac{2}{5}(a^2 - b^2)$, $Q > 0$ 长椭球, $Q < 0$ 扁椭球

〈核物〉原子核看作 $q=Ze$ 均匀分布于椭球内, 基态空间反射对称, 故没有电偶极矩, 只有零, 四, 十六等 **multipole expansion**

电多极展开



电 2^n 极势衰减 $\propto r^{-(n+1)}$ (电场多 r^{-1}) =

$$\text{张量表示 } \varphi = k_e \left(\frac{q}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{r^2} + \frac{\vec{D} : \vec{e}_r \vec{e}_r}{2r^3} + \dots \right) \xrightarrow{\text{分量表示}} k_e \left(\frac{q}{r} + \frac{\sum p_i \vec{e}_i}{r^2} + \frac{\frac{1}{2} \sum Q_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j}{r^3} + \dots \right)$$

记 $dq = \rho_e(\vec{r}') dV'$, 电极矩的积分表示为 $q = \int dq$, $\vec{p} = \int \vec{r}' dq$, $\vec{D} = \int \vec{r}' \vec{r}' dq$

$$\langle \text{偏微} \rangle \text{「母函数」} \frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos\theta + (r')^2}} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^l P_l(\cos\theta)$$

$$\rightarrow \text{勒让德多项式表示 } \varphi = k_e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int (r')^n P_n(\cos\theta') dq \quad \text{例 } \varphi_1 = \frac{k_e}{r^2} \int r' \cos\theta' dq = \frac{1}{r^2} \vec{p} \cdot \vec{e}_r$$

$$\varphi_2 = \frac{k_e}{r^3} \int (r')^2 \frac{1}{2} (3\cos^2\theta' - 1) dq \rightarrow Q_{ij} = \int [3\vec{r}_i' \vec{r}_j' - (r')^2 \delta_{ij}] dq$$

$$\text{例 均匀带电线段 } \varphi = k_e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int_{-a}^a z^n P_n(\cos\theta) \frac{q}{2a} dz, \text{ 而 } \frac{z^{n+1}}{n+1} \Big|_{-a}^a = \frac{2a^{n+1}}{n+1} \Big|_{n \text{ 为偶数}}, n \text{ 为奇数时等于零}$$

分离变量

〈偏微〉分离变量法解拉普拉斯方程

直角系: $\varphi''_x = k^2 x \rightarrow \varphi(x) = A e^{kx} + B e^{-kx}$, $\varphi''_y = -k^2 y \rightarrow \varphi(y) = C \sin ky + D \cos ky$, 若边界为零 $k = \frac{n\pi}{L}$

柱系: 柱对称 $\varphi(r, \phi) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} \left[r^k (A_k \cos k\phi + B_k \sin k\phi) + r^{-k} (C_k \cos k\phi + D_k \sin k\phi) \right]$

球系: 轴对称 $\varphi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta)$ 球对称 $\varphi(r) = A_0 + \frac{B_0}{r}$

例 不带电导体球放入匀强电场 $\vec{E} = E_0 \vec{e}_z$ 中, 取球面为零势点, 边界条件 $\varphi(R) = 0$, $\varphi(\infty) \rightarrow -E_0 r \cos\theta$

$\rightarrow \varphi(r, \theta) = -E_0 \left(r - \frac{R^3}{r^2} \right)$ 第一项为外场, 第二项为诱导电荷 $\rightarrow \sigma_e(\theta) = -\epsilon_0 \partial_r \varphi_2|_{r=R} = 3\epsilon_0 E_0 \cos\theta$

(对于带电导体球放入匀强电场, 电势加上真空中的带电导体球即可, 零势点在赤道面无限远处)

对于介质球放入匀强电场, 电势分球内 $\varphi_{\text{内}} = \sum A_l r^l P_l(\cos\theta)$ 和 $\varphi_{\text{外}} = -E_0 r \cos\theta + \sum \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta)$ 来求边界条件 $\varphi_{\text{内}}(R) = \varphi_{\text{外}}(R) \rightarrow A_1 R = -E_0 R + B_1 R^{-2}$, 其它 $A_l R^l = B_l R^{-(l+1)}$

电介质表面无自由电荷要求 $\epsilon \partial_r \varphi_{\text{内}} = \epsilon_0 \partial_r \varphi_{\text{外}} \rightarrow \epsilon_r A_1 = -E_0 - 2B_1 R^{-3}$, 其它 $\epsilon_r l A_l R^{l-1} = -(l+1) B_l R^{-(l+2)}$

得 $A_1 = \frac{-3}{\epsilon_r + 2} E_0$, $B_1 = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} R^3 E_0$, 其它 $= 0 \rightarrow$ 介质球内部为均匀电场 $\vec{E} = \frac{3}{\epsilon_r + 2} \vec{E}_0$

静磁学

「 $I_{\text{流出}} = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{j} dV = -\frac{d}{dt} \int_V \rho_e dV = -\int_V \partial_t \rho_e dV$ 」 **连续性方程** $\nabla \cdot \vec{j} = -\partial_t \rho_e \stackrel{\text{稳恒电流}}{=} 0$

「 $\nabla \cdot (x\vec{j}) = x(\nabla \cdot \vec{j}) + j_x$ ，等式左边换成面积分为零，因为 \vec{j} 只在 V 内，故 $\int_V (\nabla \cdot \vec{j}) x dV = -\int_V j_x dV$ 」

推论 对体积 V 内的电荷电流分布，总电偶极矩为 \vec{p} ，有 $\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho_e \vec{r} dV = -\int_V (\nabla \cdot \vec{j}) \vec{r} dV = \int_V \vec{j} dV$

安培定律 $\vec{F} = k_m \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{e}_z)}{z^2} \rightarrow$ **洛伦兹力** 体密度 $\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B}$

可以证明闭合回路积分满足牛三 $\vec{F}_2 = -k_m I_1 I_2 \oint \oint \frac{\vec{e}_z}{z} dl_1 dl_2$ 互换 12 时 \vec{e}_z 反号

毕萨定律 $\vec{B}(\vec{r}) = k_m \int \frac{I d\vec{l}' \times \vec{e}_z}{z^2}$ 另有 $I d\vec{l}' = \vec{I} dl' = \vec{i}(\vec{r}') dS' = \vec{j}(\vec{r}') dV'$

$\nabla \cdot \vec{B} = 0$ 「 $= k_m \int \nabla_r \cdot (\vec{j} \times \frac{\vec{e}_z}{z^2}) dV'$ ，矢分公式出两项，自变量不一样， $\nabla_r \times \vec{j} = 0$ ，另一项中心场无旋」

「同理 $\nabla_r \cdot \vec{j} = 0$ ，矢分公式 $\nabla_r \times (\vec{j} \times \frac{\vec{e}_z}{z^2}) = \vec{j} (\nabla_r \cdot \frac{\vec{e}_z}{z^2}) - (\vec{j} \cdot \nabla_r) \frac{\vec{e}_z}{z^2}$ ，后者用 $\nabla_r f(z) = -\nabla_r' f(z)$ 用到稳恒

电流无散，换成全空间面积分为零」 $\nabla \times \vec{B} = k_m \int \vec{j}(\vec{r}') 4\pi \delta^3(z) dV' = \mu_0 \vec{j}(\vec{r})$

「 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ ， $\nabla \times \vec{B} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$ ，选择 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ 」 **泊松方程** $\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$

磁矢势 $\vec{A}(\vec{r}) = k_m \int \frac{1}{z} \vec{j}(\vec{r}') dV'$ 是无穷远处 $\vec{j} = 0$ 时泊松方程的解（ \vec{B} 生成 \vec{A} 可类比 \vec{j} 生成 \vec{B} ）

（选择库仑规范后，我们还可以定义矢势的矢势 $\vec{A} = \nabla \times \vec{\Lambda} \rightarrow \vec{\Lambda} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{z} \vec{B} dV'$ ，乃至无限地做下去）

静磁能 $W_m = \int_V \vec{A} \cdot \vec{j} dV = \frac{1}{2\mu_0} \int_V \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) dV \stackrel{\text{分部}}{=} \frac{1}{2\mu_0} \left(-\oint_S (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} + \int_V \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) dV \right)$ ，

后者 $\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$ ，积分原为有电流存在区域，同理可扩大到全空间，总和不变」 $= \frac{1}{2\mu_0} \int_{\infty} B^2 dV$

唯一性定理 区域 V 中 \vec{j} 给定，再给定 V 的边界上的 \vec{A} 或 \vec{B} ，则磁场唯一确定

磁偶极子

「一切都和电偶极子类似」 $\vec{B}_{\text{偶极}}(\vec{r}) = \frac{k_m}{r^3} [3(\vec{m} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{m}]$ 还要加一项 $+\frac{2\mu_0}{3} \vec{m} \delta^3(\vec{r})$ 才满足 **平均场定理**

球内所有稳恒电流产生的 $\vec{B}_{\text{平均}} = k_m \frac{2\vec{m}}{R^3}$ ，球外稳恒电流在球内产生的 $\vec{B}_{\text{平均}}$ 等于其在球心产生的磁场

磁介质 「总矢势是小偶极子的做体积分」 $\vec{A}(\vec{r}) = k_m \int_V \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times \vec{e}_z}{z^2} dV' = k_m \int_V \vec{M} \times \nabla_r' \left(\frac{1}{z} \right) dV' \stackrel{\text{分部}}{=} k_m$

$\left(\oint_S \frac{1}{z} \vec{M} \times d\vec{S}' + \int_V \frac{1}{z} \nabla_r' \times \vec{M} dV' \right) \equiv k_m \left(\oint_S \frac{\vec{i}}{z} dS' + \int_V \frac{\vec{j}}{z} dV' \right)$ ，面电流 $\vec{i} \equiv \vec{M} \times \vec{e}_n$ ，体电流 $\vec{j} \equiv \nabla \times \vec{M}$

例 均匀带电球面自转 为了便于积分，先以 \vec{r} 为 z 轴，

$\vec{A}(\vec{r}) = k_m \int \frac{1}{z} \vec{i}(\vec{r}') dS'$ ， $\vec{i} = \sigma_e \vec{v}$ ， $z = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta'}$ ，

$dS' = R^2 \sin \theta' d\theta' d\phi'$ ， $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}' =$

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \omega \sin \psi & 0 & \omega \cos \psi \\ R \sin \theta' \cos \phi' & R \sin \theta' \sin \phi' & R \cos \theta' \end{vmatrix}$$

含 $\sin \phi'$ ， $\cos \phi'$ 的项 $\int_0^{2\pi} d\phi'$ 为零，只剩下 $\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{2} \sigma_e R^3 \omega \sin \psi \vec{e}_y \int_0^\pi \frac{\cos \theta' \sin \theta' d\theta'}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta'}}$

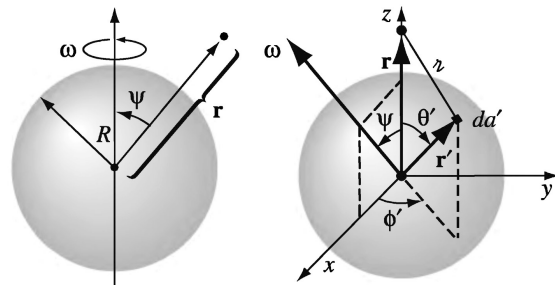
而 $-\omega r \sin \psi \vec{e}_y = \vec{\omega} \times \vec{r}$ ， $\int_{-1}^1 \frac{u du}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rru}} = \frac{2r}{3R^2} (r < R) = \frac{2R}{3r^2} (r > R)$

得 $\vec{A} = \frac{\mu_0 \sigma_e R}{3} \vec{\omega} \times \vec{r}$ （球内） $= \frac{\mu_0 \sigma_e R^4}{3r^3} \vec{\omega} \times \vec{r}$ （球外）以 ω 为 z 轴的话 $\vec{\omega} \times \vec{r} = \omega r \sin \theta \vec{e}_\phi$

Condon-Hipple

\rightarrow 球内磁场均匀 $\nabla \times (r \sin \theta \vec{e}_\phi) = 2(\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta) = 2\vec{e}_z$ **康登希帕磁场** 将导线平行密绕在球面上

球外偶极 $\nabla \times (r^{-2} \sin \theta \vec{e}_\phi) = \frac{1}{r}(2\cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$



磁多极子

闭合电流圈的 **磁多极展开** $\vec{A} = k_m I \int \frac{1}{r} d\vec{l}' = k_m I \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \oint (r')^n \mathbf{P}_n(\cos\theta') \vec{l}'$ (另有换成 $\vec{j} dV'$ 等)

例 磁单极 $\oint d\vec{l}' = 0$ 不存在 (注意以上磁矢势理论是基于 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ 假设的) \rightarrow 磁偶极矩总不依赖于原点 (对于体电流分布, 单极不存在用 $\vec{A}_0 = \frac{k_m}{r} \int \vec{j} dV = \frac{k_m}{r} \frac{d\vec{p}}{dt} \stackrel{\text{静磁}}{=} 0$ 证)

< 矢分 > $\left[\oint r' \cos\theta' d\vec{l}' = \oint \vec{e}_r \cdot \vec{r}' d\vec{l}' \stackrel{\vec{e}_r \text{ 为常矢}}{=} \vec{\Sigma} \times \vec{e}_r \right]$ 磁偶极矢势 $\vec{A}_1(\vec{r}) = k_m \frac{\vec{m} \times \vec{e}_r}{r^2}$

磁偶极矩 $\vec{m} \equiv I \vec{\Sigma} \stackrel{\text{体分布}}{=} \frac{1}{2} I \oint \vec{r}' \times d\vec{l}' = \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times \vec{j} dV$

磁单极子

假设存在 **磁荷** **< 电磁 >** (有的教材设 $F = k_m \frac{g_1 g_2}{r^2}$, 它和 q_m 差个常数 $q_m = \mu_0 g$)

一种实验探测方法 (Cabrera 1982) 当磁单极子通过自感 L 的无电阻回路时, 会感应出 $I = q_m/L$

[电磁感应例子的类比] $\nabla \times \vec{E} = -\vec{j}_m - \partial_t \vec{B}$, $\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = -I_m - \frac{d}{dt} \Phi$, 又 $\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}$, 故 $I = (\Delta q_m + \Delta \Phi)/L$, 结果与积分面的选取无关, 选平面则 $\Delta \Phi = 0$, 选无穷远面则 $\Delta q = 0$, $\Delta \Phi = q_m$

Thomson's dipole

汤姆森偶极子 电荷 q 产生电场 $\vec{E} = k_e \frac{q}{r^2} \vec{e}_r$, 磁荷 q_m 产生磁场 $\vec{B} = k_m \frac{g}{r^2} \vec{e}_r$, 电磁场总角动量为 $\frac{q q_m}{4\pi}$

方向由 q 指向 q_m (尽管结果与间距 d 无关) $[\vec{L} = \int_{\infty} dV \vec{r} \times (\epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B})]$

< 量子 > **[角动量为半整数倍 \hbar]** $q q_m = 2\pi n \hbar$

故全宇宙只要有一个磁荷存在, 便可解释电荷量子化 $q = \frac{2\pi \hbar}{q_m} n$ (狄拉克 1931)

例 质量为 m 的电荷在磁单极子的磁场中运动, 则速度的大小不变

极坐标下可以证明 θ 也不变, 电荷在一个圆锥面上沿测地线运动 (庞加莱 1896)

轨迹方程为 $r(\phi) = \frac{C}{\cos[(\phi - \phi_0) \sin \theta]}$, $C = -k_m \frac{q q_m \tan \theta}{mv}$

电磁波

在 ρ_e 和 $\vec{j} = 0$ 的空间, 电磁波能够独立存在 (赫兹 1888 实验证实) 设 (线性介质中) 以 v_p 传播 对 $\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$ 两边取 $\nabla \times$, 左边 $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$, 右边 $-\partial_t(\nabla \times \vec{B}) = -\mu \epsilon \partial_t^2 \vec{E}$

得波动方程 $v_p^2 \nabla^2 \vec{E} = \partial_t^2 \vec{E}$ (对 \vec{H} 形式相同), 其中 $v_p = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$

电磁波是横波 $E_z, H_z = 0$, **< 光学 >** 设线偏振 $E_y = 0$,

得 $\partial_t H_x, \partial_z H_x = 0$, 故只剩 H_y , 有 $\partial_z E_x = -\mu \partial_t H_y$, $\partial_z H_y = -\epsilon \partial_t E_x$

基本解 $E_x(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t + \theta)$, $H_y(z, t) = H_0 \cos(kz - \omega t + \theta)$

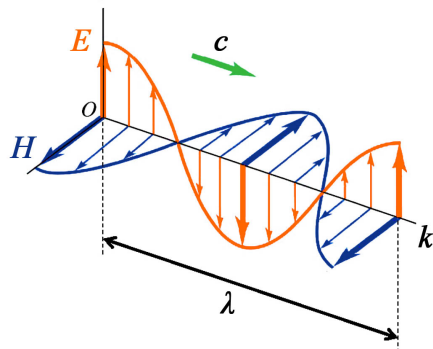
其中 **频率** $\omega \equiv \frac{2\pi}{T}$ **波数** $k \equiv \frac{2\pi}{\lambda}$ 为常数 \rightarrow **相速度** $v_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu$

结论 $\vec{E} \vec{H} \vec{k}$ 右手正交, 电场磁场同相位, $\sqrt{\mu} H_0 = \sqrt{\epsilon} E_0 \rightarrow E_0 = Z H_0$

wave impedance $Z \equiv \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$

自由空间的 **真空特征阻抗** $Z_0 \approx Z |n| \approx 377 \Omega$

< 光学 > **折射率** $n \equiv \frac{c}{v_p} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \stackrel{\text{非铁磁}}{\approx} \sqrt{\epsilon_r}$ (需测光频下的 ϵ) $\rightarrow k = \frac{\omega}{v_p} = \frac{\omega}{c} n$



能流

对于线性介质 **[全微分的一半]** 电磁场的 **能量密度** 为 $w = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) = w_e + w_m$

电磁场总能量 $W = \frac{1}{2} \iiint_{\infty} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) dV = \frac{1}{2} \iiint_{\infty} (\rho \varphi + \vec{j} \cdot \vec{A}) dV$

(前者认为能量存储在电场里, 后者认为能量存储在电荷里, 两者结果相等, 一般不认为后者是能量密度)

由 **洛伦兹力 (体) 密度** $\vec{f} = \rho_e \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$, 得电磁场做功的 **功率密度** $P_{\text{机}} = \vec{f} \cdot \vec{v} \stackrel{\text{磁力不做功}}{=} \rho_e \vec{E} \cdot \vec{v} = \vec{E} \cdot \vec{j}$

目标: 用场量 \vec{E}, \vec{H} 来表示 $P_{\text{机}}$ (不含 ρ_e, \vec{j}) \rightarrow 用非静磁环路换掉 \vec{j} 得 $P_{\text{机}} = \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H} - \vec{E} \cdot \partial_t \vec{D}$, 矢分

公式 $\vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H} = -\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E})$, 用非静电环路换 $\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$ 最终得 $P_{\text{机}} =$

$-\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - (\vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} + \vec{H} \cdot \partial_t \vec{B}) \equiv -\nabla \cdot \vec{S} - \partial_t w$, 记 $P_{\text{机}} = \partial_t w_{\text{机}}$, 有 **能量守恒公式** $\partial_t (w_{\text{机}} + w) = -\nabla \cdot \vec{S}$

坡印廷矢量 / 能流密度矢量 $\vec{S} \equiv \vec{E} \times \vec{H}$, 大小 $S = \frac{1}{Z} E^2$ W/m², 对于电磁波 $S = w v_p$

light intensity

光强 $I \equiv \bar{S} = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt$ ($t \gg T$) 对于单色平面波 $I = \frac{1}{2Z} E_0^2$

动量

例 牛三律在静电和静磁中成立, 但在电动力学中, 需把电磁场动量加入机械动量

momentum density

light pressure

狭相 $w = gc \rightarrow$ 电磁波的 **动量密度** $\vec{g} \equiv \vec{D} \times \vec{B} = \vec{S} / c^2 \rightarrow$ **光压** (列别捷夫 1900 验证)

radiation pressure

[当光打在面积 Σ 上被吸收时, 传递的动量为 $\Delta \vec{p} = \vec{g} \Sigma c \Delta t$] **辐射压** $P = gc$ (全反射则 $\times 2$)

用场量 \vec{E}, \vec{H} 来表示 $\vec{f} = (\nabla \cdot \vec{D}) \vec{E} + (\nabla \times \vec{H} - \partial_t \vec{D}) \times \vec{B}$, 而 $\partial_t (\vec{D} \times \vec{B}) = \partial_t \vec{D} \times \vec{B} - \vec{D} \times (\nabla \times \vec{E})$, 为了对称补一项 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, 得 $\vec{f} = (\nabla \cdot \vec{D}) \vec{E} - \vec{D} \times (\nabla \times \vec{E}) + (\nabla \cdot \vec{B}) \vec{H} - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{H}) - \partial_t (\vec{D} \times \vec{B})$, 矢分公式 $\nabla (E^2) = \nabla (\vec{E} \cdot \vec{E}) = 2(\vec{E} \cdot \nabla) \vec{E} + 2\vec{E} \times (\nabla \times \vec{E})$, 最后用并矢梯度公式 $\nabla \cdot (\vec{D} \vec{E}) = (\nabla \cdot \vec{D}) \vec{E} + (\vec{D} \cdot \nabla) \vec{E}$ 化简最终得 $\vec{f} = (\nabla \cdot \vec{D}) \vec{E} + (\vec{E} \cdot \nabla) \vec{D} + (\nabla \cdot \vec{B}) \vec{H} + (\vec{H} \cdot \nabla) \vec{B} - \frac{1}{2} \nabla (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) - \partial_t (\vec{D} \times \vec{B}) \equiv \nabla \cdot \vec{T} - \partial_t \vec{g}$

momentum current density

记 $\vec{f} = \partial_t \vec{g}_{\text{机}}$ (机械动量(体)密度), 有 **动量守恒公式** $\partial_t (\vec{g}_{\text{机}} + \vec{g}) = \nabla \cdot \vec{T} \rightarrow -\vec{T}$ 表示 **动量流密度**

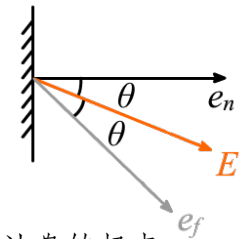
Maxwell's stress tensor

麦克斯韦应力张量 $\vec{T} \equiv \vec{E} \vec{D} + \vec{H} \vec{B} - w \vec{I}$, 分量形式 $T_{ij} = E_i D_j + H_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \sum_k (E_k D_k + H_k B_k)$ (**狭相**)

$\vec{e}_n \cdot \vec{T}$ 表示电磁场作用在单位面积上的应力 (对角元为正应力, 非对角元为剪应力)

① 正入射电磁波被完全吸收, 则单位面积受力 $\vec{e}_n \cdot \vec{T} = E_n \vec{D} + H_n \vec{B} - w \vec{e}_n \xrightarrow{\text{横波}} -w \vec{e}_n$

② 静电场与法线夹角 θ , 介质单位表面受力 $\vec{e}_n \cdot \vec{T} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 (2 \cos \theta \vec{e}_E - \vec{e}_n) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \vec{e}_f$ 故 $\theta = 45^\circ$ 时为切应力, 小于为张力 (例如导体 $\theta = 0$), 大于为压力 (例 ① $\theta = 90^\circ$)



费曼圆盘佯谬 悬空圆盘上固定有通电线圈和带电小球, 则断电时涡旋电场会驱动小球让盘转起来 [断电前 \vec{g} 沿涡旋向, 电磁场具有角动量] \rightarrow 类似 $q\varphi$ 存储电势能, $q\vec{A}$ 相当于存储磁势动量

带电粒子在电磁场中 $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = -q[\nabla \varphi + \partial_t \vec{A} - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{A})] = -q[\nabla \varphi + \frac{d}{dt} \vec{A} - \nabla (\vec{v} \cdot \vec{A})] = \frac{d}{dt} (m \vec{v})$ 注: $\frac{d}{dt} \vec{A}(\vec{r}, t) = \partial_t \vec{A} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{A}$, 若沿粒子轨道 \vec{A} 不变则后项为零, 矢分 $\vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{A}$

$\frac{d}{dt} (m \vec{v} + q \vec{A}) = -q \nabla (\varphi - \vec{v} \cdot \vec{A}) \rightarrow$ **广义势** $U = \varphi - \vec{v} \cdot \vec{A}$, 拉氏量 $L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - q\varphi + q \vec{A} \cdot \dot{\vec{r}}$, 哈 $H = \frac{p^2}{2m} + q\varphi$

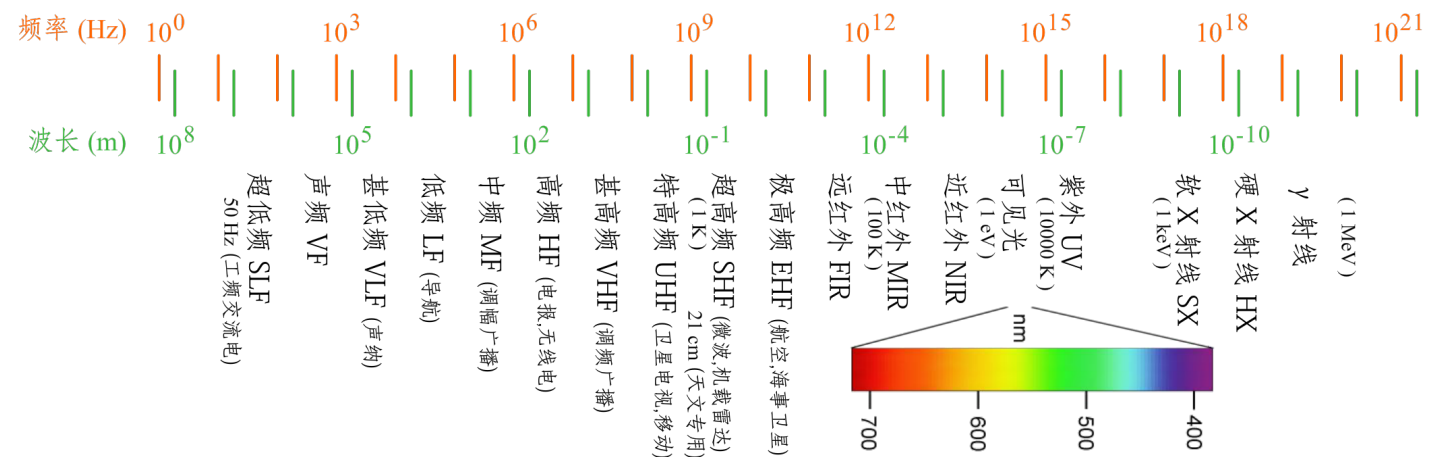
canonical momentum

kinematical momentum

$\nabla U = 0$ 时 **正则动量** $\vec{\pi} = m \vec{v} + q \vec{A}$ 守恒 (满足正则对易关系) 而 $m \vec{v}$ 改叫作 **动力学动量** $\vec{p} = \vec{\pi} - q \vec{A}$

例 仅有 $E_{\text{势}}$ 时能量守恒 $H = \frac{1}{2} m v^2 + q\varphi = \text{常数}$, 仅有 $E_{\text{旋}}$ 时正则动量守恒 $[\frac{d}{dt} (m \vec{v}) = q \vec{E}_{\text{旋}} = -q \frac{d}{dt} \vec{A}]$

传输



quasi-steady

① 直流或低频, 称为 **准恒电路** $\lambda \ll l$ 或 $\omega \ll c/l$, 实际电路 $l \sim 10$ cm, 故频率需低于 $\sim 10^9$ Hz

例 用电阻线连接正负电荷, 电流产生 \vec{B} , $\vec{E} \times \vec{B}$ 垂直指向电阻

\rightarrow 能流沿导线表面输送, 遇到电阻时从侧面空间输入负载内部

注 位移电流/涡旋电场会使基尔霍夫/电压等失效 → **集总元件** 电容/电感, 把电磁场集中在很小的元件内部 **分布参量** 杂散的分布电容/电感, 高频时凸显 (同轴传输线, 把分布看成集总的组合) **〈电路〉**

② 交流电路 [静磁环路, 代入欧姆定律 $\nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E}$, 分量形式 (设线偏振) $\partial_z H_y = \sigma E_x$, 静电环路 $\partial_z E_x = -\mu \partial_t H_y$, 消掉 H_y 得 $\partial_z^2 E_x = -\mu \sigma \partial_t E_x$, 试探解 $E_x = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \rightarrow k = \sqrt{i\mu\sigma\omega}$]

记 **趋肤深度** $d_s = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}}$ 则 $k = \frac{1+i}{d_s} \rightarrow E_x = E_0 e^{-z/d_s} e^{i(z/d_s - \omega t)}$ **趋肤效应** 高频交流电流趋于导线表面

[若考虑位移电流, 矢分, 旋度的旋度, $\nabla^2 \vec{E} = \mu\sigma \partial_t \vec{E} + \mu\epsilon \partial_t^2 \vec{E} \rightarrow k = \sqrt{\mu\epsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega} \equiv |k| e^{i\theta}$, $B_0 = k/\omega E_0$]

磁场的相位滞后于电场 θ , 振幅比 $E_0/B_0 = \omega/|k|$ [$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$, $|k| = \omega\sqrt{\mu|\epsilon|}$] 相当于 **复电容率** $\tilde{\epsilon} = \epsilon + i\sigma/\omega$

$d_s \approx 1/\text{Im } k$ **推论** 良导体 ($\sigma \gg \omega\epsilon$) $d_s = \lambda$, $\theta = \pi/4$ **例** 金属对可见光不透明 $\omega \sim 10^{15}$, $\sigma \sim 10^7 \rightarrow d_s \approx 13 \text{ nm}$

不良导体 $d_s = 2/\sigma\sqrt{\epsilon/\mu}$ (与 ω 无关) **例** 纯水 $d_s \approx 12 \text{ km}$

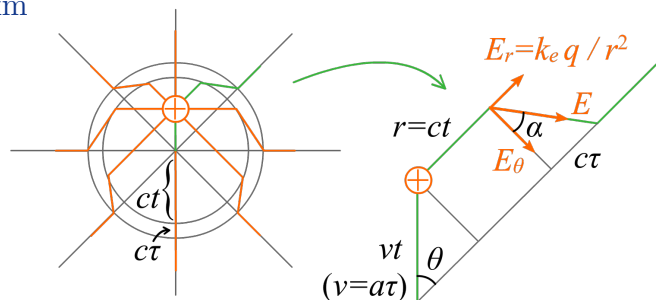
③ 射频 **例** 非相对论加速带电粒子的辐射

[$\tan \alpha = \frac{c\tau}{vt \sin \theta} = \frac{c}{at \sin \theta}$] $E_\theta = k_e \frac{qa \sin \theta}{c^2 r} \rightarrow S \propto \frac{a^2}{r^2} \sin^2 \theta$

对于偶极子, 位移 $\propto \cos \omega t$, 则 $a \propto \omega^2 \cos \omega t \rightarrow S \propto \omega^4$

例 飞机的雷达散射截面 (垂直入射) $\sigma_r = \frac{4\pi}{\lambda^2} \Sigma^2$

[被飞机接收 $S_0 \Sigma$, 再辐射出去 $\propto \Sigma/\lambda^2$]



无线电波能衍射绕过建筑而 ④ 微波, 波长 $\text{mm} \sim \text{cm}$, 衍射效应弱, 像光线一样会被反射, 雷达用

波导

wave guide

(低频电力用双线传输, 高频用同轴电缆, 微波用 →) **波导** 空心金属管道

(高频时电路不集总, 需考虑空间分布, 需解场方程) [设截面为 $l_x \times l_y$ 矩形, 波导沿 z 方向, 则 x, y 面上形成驻波, 合成波沿 z 方向行进, 设频率单一 $\vec{E} = \vec{E}_0(x, y) e^{i(k_z z - \omega t)}$, 分离变量法 $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2/c^2$, 由驻波条件得 $k_y l_y = m\pi$, $k_x l_x = n\pi$, $m, n \in \mathbb{N}$, $E_{0i}(x, y) = (C_{i1} \cos k_x x + C_{i2} \sin k_x x)(C_{i3} \cos k_y y + C_{i4} \sin k_y y)$, 由 ① $y=0, l_y$ 时 $E_x = E_z = \partial_y E_y = 0$, ② $x=0, l_x$ 时 $E_y = E_z = \partial_x E_x = 0$ 减少待定系数]

$$\begin{cases} E_{0x} = C_x \cos k_x x \sin k_y y \\ E_{0y} = C_y \sin k_x x \cos k_y y \\ E_{0z} = C_z \sin k_x x \sin k_y y \end{cases} \quad \begin{cases} B_{0x} = \frac{1}{\omega} (C_y k_z + i C_z k_y) \sin k_x x \cos k_y y \\ B_{0y} = \frac{1}{\omega} (C_x k_z + i C_z k_x) \cos k_x x \sin k_y y \\ B_{0z} = \frac{i}{\omega} (C_y k_x - C_x k_y) \cos k_x x \cos k_y y \end{cases}$$

[再由横波条件 $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ (注: 此时 $\nabla \neq \vec{k}$) 得] $C_x k_x + C_y k_y - i C_z k_z = 0$ [当 ω, m, n 确定后 k_z 也定了, 横波条件还剩两个复数的自由度, 代表两个独立波模的振幅和相位] 可引入两种基本波型作为基

[磁波形式也为 $\vec{B} = \vec{B}_0(x, y) e^{i(k_z z - \omega t)}$, 可由 $\partial_t \vec{B} = -\nabla \times \vec{E} \rightarrow i\omega \vec{B} = \nabla \times \vec{E}$ 得出]

Transverse Electric

Transverse Magnetic

$C_z = 0 \Leftrightarrow E_z = 0$ 称为 **横电波**, $C_y k_x = C_x k_y \Leftrightarrow B_z = 0$ 称为 **横磁波**, 均为横波的称为 TEM 波

[\vec{E} 无散无旋, 拉普拉斯方程无极值, 边界条件要求势为常数] 中空波导中不存在 TEM 波 (如 TE_{00})

(虚数时电磁波衰减) $k_z = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{l_x}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{l_y}\right)^2}$ 为实数 $\rightarrow \left(\frac{\omega}{\pi c}\right)^2 > \left(\frac{m}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{n}{l_y}\right)^2 \equiv \frac{1}{l_{mn}^2}$

cutoff frequency

截止频率 一定尺寸的波导, 能传输的最低频率为 $\omega_{mn} \equiv \frac{\pi c}{l_{mn}}$ [$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$] **截止波长** $\lambda_{\max} = 2l_{mn}$

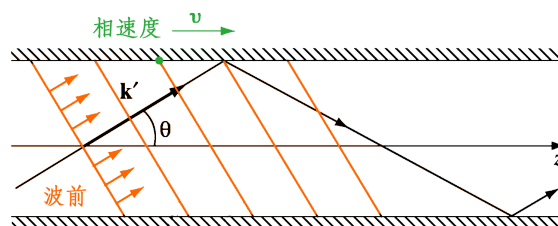
例 $l_x \times l_y = 3 \times 7$, 则 $\lambda > 14$ 的波无法传输, $7 \sim 14$ 只能以 TE_{01} 传输, $\lambda_{02} = 7$, $\lambda_{10} = 6$, $\lambda_{11} \approx 5.5$, $\lambda_{20} = 3$

注 TM_{0n} , TM_{m0} 对应的电磁场全为零, 最低模式为 TM_{11}

(波导中的电磁波是合成的结果, 不是真的纵波)

$k_z = \sqrt{\omega^2 - \omega_{mn}^2}/c$, $\cos \theta = k_z/k' = \sqrt{1 - (\omega_{mn}/\omega)^2}$

相速度 $v_p = \frac{\omega}{k_z} = \frac{c}{\cos \theta} > c$, 群速度 $v_g = \frac{d\omega}{dk_z} = c \cos \theta < c$



[推导略] 圆柱形波导, 最低模式为 TM_{01} ($\lambda \approx 2.613r$) 和 TE_{11} ($\lambda \approx 3.413r$)

(TM_{01} 有 E_z 且 $E(x, y)$ 轴对称, 故常应用于直线加速器)

把 z 方向也封起来即为 **谐振腔** 用来产生电磁振荡 (高频时 LC 振荡品质因数降低)

⑤ 光频, 用光导纤维, 纤芯折射率大于包层以全内反射, 包层足够厚则可避免能量损失

⑥ 更高频的光粒子性显著, 详见〈核物〉

电磁势

「非静态时 $\vec{E} = -\nabla\varphi - \partial_t \vec{A}$, 电高斯」 $-\nabla^2\varphi - \partial_t(\nabla \cdot \vec{A}) = \rho/\epsilon_0 \rightarrow$ **库仑规范** $\nabla \cdot \vec{A} = 0$

(库仑规范中 φ 超距地响应 ρ 的变化, 但 φ 不能直接观测, 还需 \vec{A} 才知道 \vec{E})

「磁环路 $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{j} - \mu_0 \epsilon_0 \partial_t(\nabla\varphi + \partial_t \vec{A})$ 矢分公式 $= \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$ 」 $\nabla \Lambda + (\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2) \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$

记 $\Lambda \equiv \frac{1}{c^2} \partial_t \varphi + \nabla \cdot \vec{A}$ 〈狭相〉有 $\square^2 \varphi - \partial_t \Lambda = \rho/\epsilon_0$, $\square^2 \vec{A} + \nabla \Lambda = \mu_0 \vec{j} \rightarrow$ **洛伦兹规范** $\Lambda = 0$

例 $\varphi = 0$, $\vec{A} = A_0 \cos(kz - \omega t) \vec{e}_z$, 既是库仑规范又是洛伦兹规范

规范变换 设 θ 为任意标量函数, 则共同做变换 $\vec{A} + \nabla\theta$, $\varphi - \partial_t\theta$ 对 \vec{B}, \vec{E} 均无影响

推迟势

「泊松方程的解为 $\varphi(\vec{r}) = k_e \int \frac{1}{z} \rho(\vec{r}') dV'$, $\vec{A}(\vec{r}) = k_m \int \frac{1}{z} \vec{j}(\vec{r}') dV'$ 推广到非静止源」记 $t_r = t - \frac{z}{c}$ 则

retarded potential

推迟势 $\varphi(\vec{r}, t) = k_e \int \frac{1}{z} \rho(\vec{r}', t_r) dV'$, $\vec{A}(\vec{r}, t) = k_m \int \frac{1}{z} \vec{j}(\vec{r}', t_r) dV'$

「可以证明, 它满足势的波动方程, 洛伦兹规范」(对库仑, 毕萨定律的推广还有别的项)

〈偏微〉波动方程 $\partial_z^2 U = v^{-2} \partial_t^2 U$ 的一般解为 $U(z, t) = U_+(z - vt) + U_-(z + vt)$

advanced potential

超前势 $t_a = t + \frac{z}{c}$ 同样满足麦方程 (\square^2 含 t^2 , 故理论本身时间反演不变, 不用超前势是因为违反因果)

Jefimenko

杰斐逊柯方程 (1966) $\vec{E}(\vec{r}, t) = k_e \int \left[\frac{\vec{e}_z}{z^2} \rho(\vec{r}', t_r) + \frac{\vec{e}_z}{c^2 z} \dot{\rho}(\vec{r}', t_r) - \frac{1}{c^2 z} \dot{\vec{j}}(\vec{r}', t_r) \right] dV'$

$\vec{B}(\vec{r}, t) = k_m \int \left[\frac{1}{z^2} \vec{j}(\vec{r}', t_r) + \frac{1}{c^2 z} \dot{\vec{j}}(\vec{r}', t_r) \right] \times \vec{e}_z dV'$ 「证它可回到静态, 用 $\vec{j}(t_r) \approx \vec{j}(t) + (t_r - t) \dot{\vec{j}}(t)$ 」

点电荷辐射

retarded position

设点电荷的运动轨迹为 $\vec{r}'(t)$, 推迟时间含在方程 $|\vec{r} - \vec{r}'(t_r)| = c(t - t_r)$ 中, **推迟位置** $z \equiv \vec{r} - \vec{r}'(t_r)$

推论 若带电粒子 $v < c$, 则任何时刻至多有一个推迟点对势有贡献 (若超出视野则没有, 如双曲线运动)

「点电荷的推迟势并非只是 $k_e \frac{q}{z}$, 体积分差个因子 $\int \rho(\vec{r}', t_r) dV' = q/(1 - \vec{e}_z \cdot \vec{v}/c)$, 无关狭相, 多普勒」

Liénard-Wiechert potential

李纳维谢尔势 (1898) $\varphi(\vec{r}, t) = \frac{k_e q}{z - \vec{z} \cdot \vec{v}/c}$, $\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{v}}{c^2} \varphi(\vec{r}, t)$

例 匀速运动 $\vec{r}'(t) = \vec{v}t$, 对 $|\vec{r} - \vec{v}t| = c(t - t_r)$ 两边平方, 求根公式求 t_r , 用 $v=0$ 判断一下, 应取减号,

得 $t_r = [(c^2 t - \vec{r} \cdot \vec{v}) - \sqrt{(c^2 t - \vec{r} \cdot \vec{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2 t^2)}] / (c^2 - v^2)$, 便得 $z = c(t - t_r)$, $\vec{e}_z = (\vec{r} - \vec{v}t_r)/z$

计算 $z(1 - \vec{e}_z \cdot \vec{v}/c) = \frac{1}{c} \sqrt{(c^2 t - \vec{r} \cdot \vec{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2 t^2)}$ 代入便得 φ, \vec{A} (可验证满足洛伦兹规范)

注 分母亦可写成 $R\sqrt{1 - (v \sin \theta/c)^2}$, $\vec{R} \equiv \vec{r} - \vec{v}t$ 由粒子的当前位置指向场点, θ 是 \vec{R}, \vec{v} 夹角 〈狭相〉

对任意运动, 「推导很长」记 $\vec{u} \equiv c\vec{e}_z - \vec{v}$, 有

$\vec{E}(\vec{r}, t) = k_e q \frac{z}{(\vec{z} \cdot \vec{u})^3} \left[(c^2 - v^2) \vec{u} + \vec{z} \times (\vec{u} \times \vec{a}) \right]$, $\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \vec{e}_z \times \vec{E}(\vec{r}, t)$, 即总垂直于 \vec{E}

「球面积 $4\pi z^2$, 故系数 $\geq z^{-2}$ 才不衰减」第一项称为 **速度场 / 自有场**, 第二项为 **加速场 / 辐射场**

$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0 c} \left[E^2 \vec{e}_z - (\vec{e}_z \cdot \vec{E}) \vec{E} \right]$ (第一项是运动粒子携带的场能, 第二项才是辐射能)

例 (再次推导加速点电荷的〈能流〉) 设电荷在 t_r 时刻静止, 则近似有 $\vec{u} = c\vec{e}_z$

辐射场 $\vec{E}_2 = \frac{k_e q}{c^2 z} [\vec{e}_z \times (\vec{e}_z \times \vec{a})] = k_m \frac{q}{z} [(\vec{e}_z \cdot \vec{a}) \vec{e}_z - \vec{a}]$

辐射能流 $\vec{S}_2 = \frac{1}{\mu_0 c} \left(k_m \frac{q}{z} \right)^2 [a^2 - (\vec{e}_z \cdot \vec{a})^2] \vec{e}_z = \frac{k_m^2}{\mu_0 c} \left(qa \frac{\sin \theta}{z} \right)^2 \vec{e}_z$ **辐射功率** $dP = \vec{S} \cdot d\vec{\Sigma}$

「面积 $d\Sigma = d\Omega r^2$ 」**辐射角分布** $\frac{dP(t_r)}{d\Omega} = \frac{k_m^2}{\mu_0 c} (qa \sin \theta)^2$, 积分得 **拉莫尔公式** $P(t_r) = \frac{\mu_0}{6\pi c} q^2 a^2$

Larmor

— 辐射角分布 —

「拉莫尔公式仅适用于低速, 加入多普勒因子」 $\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\vec{e}_z \cdot \vec{u}}{zc} \frac{1}{\mu_0 c} E_2^2 \gamma^2 = \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 c^2} \frac{|\vec{e}_z \times (\vec{u} \times \vec{a})|^2}{(\vec{e}_z \cdot \vec{u})^5}$

「很难的积分」得 **李纳公式** $P = \frac{\mu_0}{6\pi c} \gamma^6 q^2 \left(a^2 - \left| \frac{\vec{v} \times \vec{a}}{c} \right|^2 \right)$ (狭相)

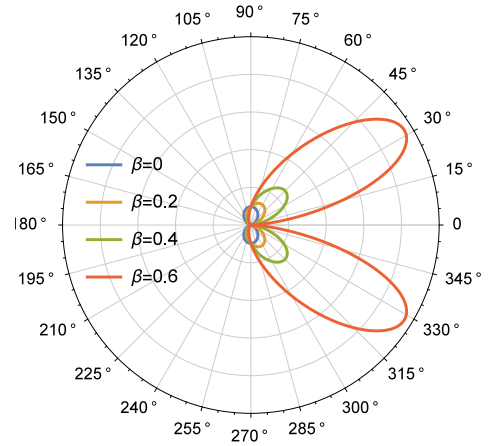
bremsstrahlung

轫致辐射 加速度与速度平行, 产生的辐射谱连续

「 $\vec{u} \times \vec{a} = c(\vec{e}_z \times \vec{a})$, 矢分, 以 \vec{v} 为极轴」 $\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5}$

积分得 $P = \frac{\mu_0}{6\pi c} \frac{q^2 a^2}{(1 - \beta^2)^3}$ 和李纳公式一致

「 $\frac{d}{d\theta}$ 为零, 二次方程」辐射最强的方向角 $\cos \theta_{\max} = \frac{\sqrt{1 + 15\beta^2} - 1}{3\beta}$
(粒子速度增大, 质量增大, 加速度减小, 故直线加速器辐射损失很小)



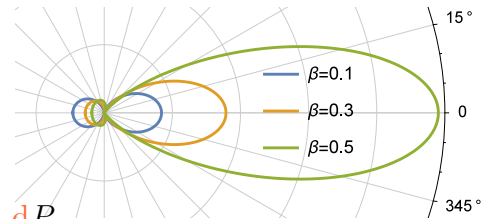
synchrotron radiation

同步辐射 (Schoot 1912 专著, 1947 首次在电子同步加速器上观测)

带电粒子以 ω_0 做匀速圆周运动, 加速度与速度垂直

$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \frac{(1 - \beta \cos \theta)^2 - (1 - \beta^2) \sin^2 \theta \cos^2 \phi}{(1 - \beta \cos \theta)^5}$, $P = \frac{\mu_0}{6\pi c} \gamma^4 q^2 a^2$

轨道平面内 $[\phi=0, \pi]$ $\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \frac{(\cos \theta - \beta)^2}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \rightarrow \theta = \pm \arccos \beta$ 时 $\frac{dP}{d\Omega} = 0$



同步辐射发射角 $\frac{1}{2} \Delta \theta = \arccos \beta \xrightarrow{\beta \rightarrow 1} 1/\gamma$ 「若固定探测器, 则 Δt 很小, 频谱很宽」近似为连续谱

「 $\Delta t_r = \frac{\theta}{\omega_0} \approx \frac{\sin \theta}{\omega_0} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\omega_0}$, $\frac{\partial t}{\partial t_r} = 1 - \frac{v}{c} \cos \theta \approx 1 - \beta^2$ 」频谱上限 $\omega_e = \frac{1}{\Delta t} = \frac{\partial t}{\partial t_r} \Delta t_r = \omega_0 \gamma^3$ (定量 $\frac{3}{2} \omega_0 \gamma^3$)

同步辐射光源 (激光物理) **切伦科夫辐射** (核物理)

— 电磁场反作用 —

电磁场带有动量, 故 ① 自有场表现为电子的 **电磁质量** ② 辐射场表现为 **辐射阻尼**

① 「匀速直线运动, $\beta \ll 1$ 展开到二次 $\vec{E} \approx \vec{E}_0 \left[1 + \frac{1}{2} \beta^2 - \frac{3}{2} (\vec{\beta} \cdot \vec{e}_r)^2 \right]$, \vec{E}_0 为点电荷电场, $\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{\beta} \times \vec{E}_0$ 」

自有场动量 $\vec{g} = \epsilon_0 \int (\vec{E} \times \vec{B}) dV = \frac{\epsilon_0}{c} \int [E_0^2 \vec{\beta} - (\vec{\beta} \cdot \vec{E}_0) \vec{E}_0] dV = \frac{4\vec{\beta}}{3c} \left(\frac{\epsilon_0}{2} \int E_0^2 dV \right) = \frac{4\vec{v}}{3c^2} w_0$

其中 w_0 为静止点电荷的电场能 「同理求积分可得」自有场能量 $w_e = w_0$, $w_m = \frac{2}{3} \beta^2 w_0$

\rightarrow 电子运动时表现出的惯性质量为 $m = m_0 + m_2$, 其中 m_0 为 **机械质量**, 低速下 **电磁质量** $m_2 = \frac{4w_0}{3c^2}$

(电磁) 点电荷模型有 **电场能发散疑难**

\rightarrow 经典电动力学的适用范围下至 **电子经典半径** r_e (实验证明至 10×10^{-17} m 电子还可看成点粒子)

我们观察的是总 m , 故也许 $m_0 \rightarrow -\infty$ (量子电动力学依然有此疑难, 那里用 **质量重整** 掩盖了此问题)

② 记 $m\tau \equiv \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c}$, 低速下有 **阿伯拉罕洛伦兹方程** $\vec{F}_2 = m\tau \dot{\vec{a}}$, 相对论版见 (狭相)

「由拉莫尔公式, 损失能量的功率 $\vec{F}_2 \cdot \vec{v} = -m\tau a^2$, 该式在瞬时是不对的, 取时间平均才成立 $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_2 \cdot \vec{v} dt = -m\tau \int_{t_1}^{t_2} a^2 dt$, 后者分部积分 $= (\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}})|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} dt$, 边界不变 $\rightarrow \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F}_2 - m\tau \dot{\vec{a}}) \cdot \vec{v} dt = 0$ 」

例 连在弹簧上的带电粒子 $m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x + m\tau \ddot{x} + F_{驱动}$, 设受迫为 ω , 由 $\ddot{x} = -\omega^2 \dot{x}$ 得 **阻尼系数** $\Gamma = \omega^2 \tau$ (对于简谐振动, 正比于 \ddot{v} 和正比于 v 效果一样) **推论** 电子在均匀磁场中, 回旋半径按 $e^{-\Gamma t}$ 减小

「前面的推导并非充要, 严格推导: 由于场在点粒子处发散, 需先假设粒子有限大, 然后取无限小极限, 推出的公式相同」自作用力源于牛三律的打破, 电荷的不同部分产生的场对彼此施加的力不抵消

加速度自发增加疑难 若粒子不受外力, 由 $F_2 = ma$ 解得 $a(t) = a_0 e^{t/\tau}$ (对于电子 $\tau \approx 6 \times 10^{-24}$ s)

(若令 $a_0=0$ 则会导致粒子在施力前就开始反应, 相对论版依然有此疑难) → 经典电动不适用于微观

总结 带电粒子的波动性 (玻尔原子) 和光的粒子性 (光电效应) 都不明显的电磁过程, 才适用经典电动

电偶极辐射

电量振荡 (位置固定) 的电偶极子模型 $\vec{p}(t)=ql \cos(\omega t) \vec{e}_z$, 记 $t_{\pm} \equiv t - z_{\pm}/c$

则推迟势 $\varphi(\vec{r}, t)=k_e q [\cos(\omega t_{+})/z_{+} - \cos(\omega t_{-})/z_{-}]$

[余弦定理 $z_{\pm} = \sqrt{r^2 \mp r l \cos \theta + (l/2)^2}$, 理想偶极子 $l \ll r$ 有 $z_{\pm} \approx r(1 \mp \frac{l}{2r} \cos \theta)$, $t_{\pm} \approx t_r \pm \frac{l}{2c} \cos \theta$, 展开 $\cos(\omega t_{\pm}) = \cos \cos \mp \sin \sin$, 理想 $l \ll \frac{c}{\omega} = \lambda$,

第 2 个 $\cos \approx 1$, 第 2 个 $\sin x \approx x$, 乘上 $\frac{1}{z_{\pm}} \approx \frac{1}{r}(1 \pm \frac{l}{2r} \cos \theta)$ $\varphi(r, \theta, t) = k_e \frac{p \cos \theta}{r} \left[\frac{1}{r} \cos(\omega t_r) - \frac{\omega}{c} \sin(\omega t_r) \right]$

(满足洛伦兹规范) ① 近区 $r \ll \lambda = \frac{c}{\omega} \Leftrightarrow$ 静态极限 $\omega \rightarrow 0$, $\varphi = k_e \frac{p \cos \theta}{r^2}$, 相当于电偶极子 $\vec{p}(t)$ 产生的似稳电磁场, $\vec{S} \propto \overline{\cos(\omega t_r) \sin(\omega t_r)} = 0$, 即没有能量辐射出去 ② 远场区 $r \gg \lambda$, $\varphi = -k_e \frac{p \cos \theta}{\lambda r} \sin(\omega t_r)$

[$\vec{I}(t) = \frac{dq}{dt} \vec{e}_z = -q\omega \sin(\omega t) \vec{e}_z$, $\vec{A} = k_m \int_{-l/2}^{l/2} \frac{1}{z} \vec{I}(t_r) dz$] $\vec{A}(r, \theta, t) = -k_m \frac{p\omega}{r} \sin(\omega t_r) \vec{e}_z$ (满足洛伦兹规范)

$\vec{E} = -k_m p \omega^2 \frac{\sin \theta}{r} \cos(\omega t_r) \vec{e}_\theta$, $\vec{B} = -\frac{k_m}{c} p \omega^2 \frac{\sin \theta}{r} \cos(\omega t_r) \vec{e}_\phi$, 即电场磁场同相位, 单色波沿径向光速传播

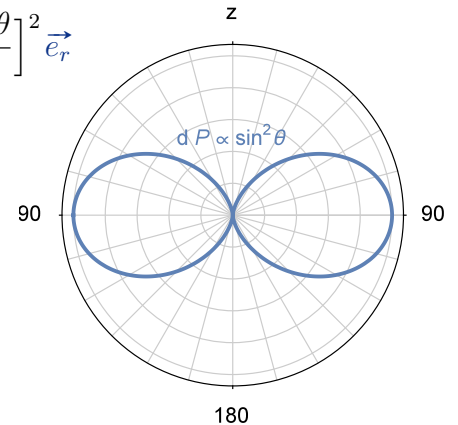
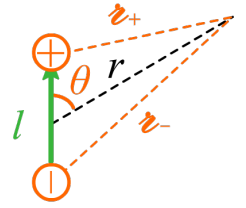
能流 $\vec{S} = \frac{k_m^2}{\mu_0 c} \left[p \omega^2 \frac{\sin \theta}{r} \cos(\omega t_r) \right]^2 \vec{e}_r$, 在一个周期平均 $\vec{S} = \frac{k_m^2}{2\mu_0 c} \left[p \omega^2 \frac{\sin \theta}{r} \right]^2 \vec{e}_r$

$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{k_m^2}{2\mu_0 c} (p \omega^2 \sin \theta)^2$, 总辐射功率 $P = \frac{k_m}{3c} p^2 \omega^4$ 与半径无关, 符合能守

radiation resistance

因辐射损耗的功率在〈电路〉中等效为 **辐射电阻** R

[$P = IR^2$, $I = q\omega \sin(\omega t) \rightarrow \bar{P} = \frac{1}{2} q^2 \omega^2 R$] $R = \frac{\mu_0}{6\pi c} l^2 \omega^2 = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 (\Omega)$



天线基础

linear wire antenna

直线天线 长为 d 的导体, 中间开缝, 高频电流从中央同相馈送 (电流分布中心对称)

[$\vec{j}(\vec{r}', t_r) = I_0 e^{-i\omega t_r} \sin(kd/2 - k|z|) \vec{e}_z$, 远场区 $r - \vec{r}' \cdot \vec{e}_r \approx r - z \cos \theta$, $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{k_m}{r} e^{ikr} \int \vec{j}(\vec{r}') e^{-ikz \cos \theta} dV$,

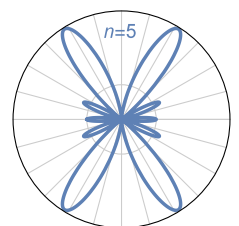
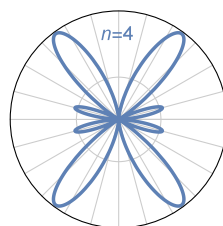
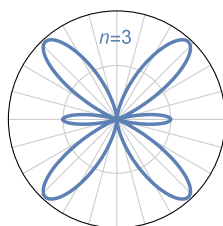
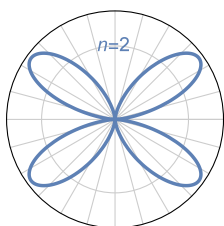
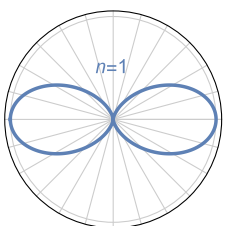
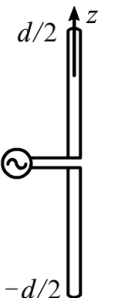
$= \frac{k_m I_0 \vec{e}_z}{2r} e^{ikr} \int_0^{d/2} \sin(kd/2 - kz) \cos(kz \cos \theta) dz$, $\vec{B} = ik \vec{e}_r \times \vec{A}$, $\vec{E} = c \vec{B} \times \vec{e}_r$]

$\frac{dP}{d\Omega} = \vec{S} \cdot \vec{e}_r r^2 = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\vec{E}^* \times \vec{B}) \cdot \vec{e}_r r^2 = \frac{c}{2\mu_0} k^2 \sin^2 \theta |\vec{A}|^2 r^2 = \frac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi^2} \left[\frac{\cos(kd/2 \cos \theta) - \cos(kd/2)}{\sin \theta} \right]^2$

取 $d = n \frac{\lambda}{2} = \frac{n\pi}{k}$, **半波天线** $n=1$, 角分布因子 $\frac{\cos^2(\pi/2 \cos \theta)}{\sin^2 \theta}$, 数值积分 2.44, $R \approx 73.2 \Omega$

全波天线 $n=2$, 角分布 $\frac{4 \cos^4(\pi/2 \cos \theta)}{\sin^2 \theta}$, 积分 6.64, $R \approx 199 \Omega$ (比 **短天线** $l \ll \lambda$ 辐射强)

对于反相馈送 (\vec{j} 里的 z 不加绝对值), n 为奇数的角分布相同, 偶数的为 $\frac{\sin^2(n\pi/2 \cos \theta)}{\sin^2 \theta}$



antenna array

以上均只对 θ 有方向性 (侧视图), 要对 ϕ 也有方向性 (俯视图) 可用 **天线阵**

设有 N 个线天线, 间距 l 〈 光学 〉 [相邻两个有光程差 $l \cos \theta$,

$$\vec{E}_{\text{总}} = \sum_{m=0}^{N-1} \vec{E}_0 e^{imkl \cos \theta} \quad \text{角分布因子} \quad f(\alpha) = \left| \frac{1 - e^{iNkl \cos \theta}}{1 - e^{ikl \cos \theta}} \right|^2 = \frac{\sin^2(N\alpha/2)}{\sin^2(\alpha/2)}$$

线性排列称为 **边射阵** $\alpha = kl \sin \phi$ (右图为 $kl=2$ 情况)

横向排列称为 **端射阵** $\alpha = kl \sin \theta \cos \phi$

(形似鱼骨, 例如电视接收用的八木宇田天线)

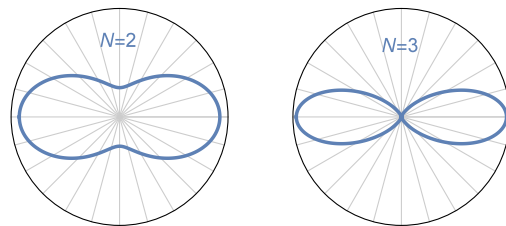
利用导体面, 单极天线可和其镜像构成对称振子

aperture antenna

(例如手机多为 $\lambda/4$ 单极天线) \rightarrow **面天线 / 口径天线**

Carson reciprocity theorem

卡森互易定理 设线性介质中分别由源 \vec{j}_1, \vec{j}_2 产生了同频的电磁场, 则有 $\int_{V_1} (\vec{E}_2 \cdot \vec{j}_1 - \vec{H}_2 \cdot \vec{j}_{m1}) dV = \int_{V_2} (\vec{E}_1 \cdot \vec{j}_2 - \vec{H}_1 \cdot \vec{j}_{m2}) dV$ **推论** 一个天线用作发射和接收时, 角分布, 增益, 输入阻抗均相同



磁偶极辐射

通有交变电流的圆环 $\vec{m}(t) = \pi r_0^2 I \cos(\omega t) \vec{e}_z$, 环不带电 $\varphi=0$, 推迟矢势 $\vec{A}(\vec{r}, t) = k_m I \int \cos(\omega t_r) / r d\vec{l}$,

[推导略] 理想磁偶极子 $\vec{A}(r, \theta, t) = k_m m \frac{\sin \theta}{r} \left[\frac{1}{r} \cos(\omega t_r) - \frac{\omega}{c} \sin(\omega t_r) \right] \vec{e}_\phi$

① 静态 $\vec{A}(r, \theta) = k_m \frac{m \sin \theta}{r^2} \vec{e}_\phi$ ② 远场 $\vec{A}(r, \theta, t) = -k_m \frac{m \omega \sin \theta}{c r} \sin(\omega t_r) \vec{e}_\phi$

$\vec{E} = -\partial_t \vec{A} = k_m \frac{m \omega^2 \sin \theta}{c r} \cos(\omega t_r) \vec{e}_\phi$, $\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = -k_m \frac{m \omega^2 \sin \theta}{c^2 r} \cos(\omega t_r) \vec{e}_\theta$, 同相位, 振幅比 $E_0/B_0 = c$

$\vec{S} = \frac{k_m^2}{\mu_0 c^3} \left[m \omega^2 \frac{\sin \theta}{r} \cos(\omega t_r) \right]^2 \vec{e}_r$, $\vec{S} = \frac{k_m^2}{2\mu_0 c^3} \left[m \omega^2 \frac{\sin \theta}{r} \right]^2 \vec{e}_r$, $P = \frac{k_m}{3c^3} m^2 \omega^4$, $\frac{P_{\text{磁}}}{P_{\text{电}}} = \left(\frac{m}{pc} \right)^2 \frac{l = \pi r_0}{I = q\omega} \left(\frac{\omega r_0}{c} \right)^2$

很小 (以上结论亦可由电磁对称性从电偶极类比得出)

定理 对于单一的 m 有 $\frac{\text{辐射带走的角动量 } l_z}{\text{单位时间辐射的能量}} = \frac{m}{\omega}$ (场的能量量子化必导致角动量量子化) 〈 量子 〉

多极辐射

任意源的远场辐射 [多极展开] ① 电荷守恒, 故没有电单极场 ② 取 r 最低阶则为电偶极辐射 ③ 取到 \ddot{r} 则包含磁偶极和电四极 $\rightarrow \vec{A}(\vec{r}, t) = k_m \left[\frac{1}{r} \dot{\vec{p}}(t_r) + \frac{1}{cr} \dot{\vec{m}}(t_r) \times \vec{e}_r + \frac{1}{6cr} \vec{e}_r \cdot \ddot{\vec{D}}(t_r) \right]$

$\vec{A}(\vec{r}, t) = k_m \left[\frac{1}{r} \dot{\vec{p}}(t_r) + \frac{1}{cr} \dot{\vec{m}}(t_r) \times \vec{e}_r + \frac{1}{6cr} \vec{e}_r \cdot \ddot{\vec{D}}(t_r) \right]$

[因只保留 $1/kr$ 最低次项, 故作用在相因子 $e^{i(kr - \omega t)}$ 上相当于做替换 $\nabla \leftrightarrow i k \vec{e}_r$, $\partial_t \leftrightarrow -i\omega$]

公式 $\vec{B} = i k \vec{e}_r \times \vec{A} = \frac{1}{c} (\dot{\vec{A}} \times \vec{e}_r)$, $\vec{E} = c \vec{B} \times \vec{e}_r = \vec{e}_r \times (\vec{e}_r \times \dot{\vec{A}})$

② $\vec{E}(\vec{r}, t) \approx \frac{k_m}{r} \left[(\vec{e}_r \cdot \ddot{\vec{p}}) \vec{e}_r - \ddot{\vec{p}} \right] = \frac{k_m}{r} \left[\vec{e}_r \times (\vec{e}_r \times \ddot{\vec{p}}) \right]$, $\vec{B}(\vec{r}, t) \approx \frac{k_m}{rc} (\ddot{\vec{p}} \times \vec{e}_r)$, 其中 $\ddot{\vec{p}}$ 取 t_r 时的值

若用球坐标, 以 $\ddot{\vec{p}}(t_r)$ 为 z 轴, 则 $\vec{E}(r, \theta, t) \approx k_m \ddot{p}(t_r) \frac{\sin \theta}{r} \vec{e}_\theta$, $\vec{B}(r, \theta, t) \approx \frac{k_m}{c} \ddot{p}(t_r) \frac{\sin \theta}{r} \vec{e}_\phi$

$\vec{S} = \frac{k_m^2}{\mu_0 c} \left(\ddot{p}(t_r) \frac{\sin \theta}{r} \right)^2 \vec{e}_r$, $P = \frac{\mu_0}{6\pi c} \ddot{p}^2$ **例** 点电荷 $p(t) = q r'(t)$, $\ddot{p}(t) = q a(t)$, 亦得 **拉莫尔公式**

电偶极子 $p(t) = p_0 \cos(\omega t)$, $\ddot{p}(t) = -\omega^2 p_0 \cos(\omega t)$ 结论一致

③ **电四极辐射** $\vec{A} = -k_m \frac{\omega^2}{6cr} \vec{e}_r \cdot \ddot{\vec{D}}$, $\vec{S} = \frac{k_m}{288c^3 r^2} D_\theta^2 \omega^6 \vec{e}_r$

$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{k_m}{288c^3} D_\theta^2 \omega^6$ 其中 **角分布因子** $D_\theta^2 = |\vec{e}_r \cdot \ddot{\vec{D}} \times \vec{e}_r|^2$

例 共线型电四极子, $\ddot{\vec{D}} = 2qab \vec{e}_z \vec{e}_z$, $\vec{e}_r \cdot (\vec{e}_z \vec{e}_z) = \cos \theta \vec{e}_z$,

$\vec{e}_z \times \vec{e}_r = \sin \theta \vec{e}_\phi \rightarrow D_\theta^2 = \sin^2 \theta \cos^2 \theta$

$P = \frac{k_m}{360c^3} \ddot{\vec{D}} : \ddot{\vec{D}} \omega^6$, 其中 $\ddot{\vec{D}} : \ddot{\vec{D}} = \sum_{i,j} |D_{ij}|^2$

