r

实分析

矢量分析

© LePtC (萌狸)
笔记项目主页: http://leptc.github.io/lenote

精

Matthews. Vector calculus. Springer

参

(同数学分析, 微分几何, 电动力学)

Last compiled on 2015/08/30 at 23:36:00

矢量

scalar　　　　　　　　　　　　　vector
标量 / 纯量 φ **例** 质量, 温度, 压强 **矢量 / 向量** $\vec{A}=|\vec{A}|\vec{e_a}$ **例** $\vec{r}$, $\vec{v}$

〈 线代 〉设有正交基 $\{\vec{e_i}\}$, 则矢量的分量形式为 $\vec{A}=\sum_i a_i\vec{e_i}$

modulus　　　　　　　　　　　　unit vector
模 $A=|\vec{A}|\equiv\sqrt{\vec{A}^2}$, 其中 $\vec{A}^2\equiv\vec{A}\cdot\vec{A}=\sum_i a_i^2$ 〈 勾股定理 〉 **单位矢量** 记作 $\vec{e_a}$ 或 $\hat{a}$

scalar multiplication
矢量加减 按平行四边形法则, 分量形式: 对应分量相加减, **数乘** 每一分量与标量乘

性质 加, 减, 数乘运算有交换律, 结合律, 左右分配律 〈 解析几何 〉

dot / inner / scalar product
点乘 / 内积 / 数量积 (拉格朗日 1773) $\vec{A}\cdot\vec{B}\equiv AB\cos\theta=\sum_i a_i b_i^*$ → 〈 余弦定理 〉

性质 有交换律, 左右分配律, 不存在结合律 (标量不能和矢量点, 叉乘)

cross / vector product
叉乘 / 矢积 / 向量积 $\vec{A}\times\vec{B}\equiv AB\sin\theta\,\vec{e_n}=\begin{vmatrix}\vec{e_x}&\vec{e_y}&\vec{e_z}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$, $\vec{e_n}$ 按右手定则 → $|\vec{A}\times\vec{B}|=$ 平行四边形面积

性质 有反交换律, 左右分配律, 雅可比恒等式, 不满足结合律 **推论** 平行矢量叉乘为零, $\vec{A}\times\vec{A}=0$

例 直线方程 $\vec{r}=\vec{r_0}+\lambda\vec{k}$ 又可写成 $\vec{r}\times\vec{k}=\vec{h}$, $\vec{h}$ 为常矢量

「$[\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})]_x=a_y(b_xc_y-b_yc_x)-a_z(b_zc_x-b_xc_z)=b_x(a_yc_y+a_zc_z)+a_xb_xc_x-c_x(a_yb_y+a_zb_z)-a_xb_xc_x$」

Lagrange's identity
拉格朗日恒等式 $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$ (结果在 $\vec{B},\vec{C}$ 面内, 中间者系数为正)

$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{A}(\vec{B}\cdot\vec{C})$ **推论** 当 $\vec{B}\times(\vec{A}\times\vec{C})=0$ 时上下两式相等

推论 $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D})=\vec{A}\cdot(\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{D}))=(\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D})-(\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{C})$

triple / mixed product
三重积 / 混合积 $[\vec{A},\vec{B},\vec{C}]\equiv(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}=(\vec{B}\times\vec{C})\cdot\vec{A}=(\vec{C}\times\vec{A})\cdot\vec{B}=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}=\pm$ 平行六面体体积

例 洛伦兹力 $q\vec{v}\times\vec{B}=m\dot{\vec{v}}$ 两边点乘 $\vec{v}$ 得 $0=m\dot{\vec{v}}\cdot\vec{v}=m\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{v}\cdot\vec{v})=m\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|v|^2)$ 得证速度大小不变

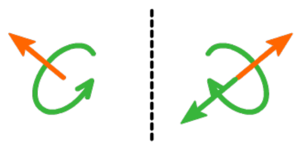
变换

仅仅不同分量的组合不是矢量 (a_x 个苹果加 a_y 个梨没有“方向”) 矢量的意义在于像位矢一样变换

polar vector
极 / 真矢量 空间反射变换下, 镜面垂直分量反向, 镜面平行分量不变 **例** $\vec{r}$, $\vec{p}$, $\vec{E}$, 电矩 $\vec{p}$

axial / pseudo vector
轴 / 赝矢量 空间反射变换下, 镜面垂直分量不变, 镜面平行分量反向 **性质** 真矢量叉乘得赝矢量

例 $\vec{\omega}$, $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$, $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$, $\vec{B}\propto I\vec{l}\times\vec{e_r}$, 磁矩 $\vec{m}$, 涡度 $\vec{\zeta}=\nabla\times\vec{B}$



pseudo scalar
变换时出个负号 → 矢量点乘赝矢量得 **赝标量** **例** 磁通量 Φ_B, 三重积

→ 赝标量乘矢量得赝矢量

矢量场

时变 **标量场** $\varphi(x,y,z,t)$ **矢量场** $\vec{A}(x,y,z,t)=\sum^{x,y,z}a_x(x,y,z,t)\vec{e_x}$ **静态场** 不含时

flux　　　　　　　　　　　　　source　sink
通量 矢量流过闭合曲面的分量的面积分 $\Phi\equiv\oint\!\!\!\oint_S a_\perp\,\mathrm{d}S$, 表示有 **源** 或 **汇** (流入和流出的不一样多)

circulation　　　　　　　　　　vortex
环量 矢量沿闭合环路的分量的线积分 $\Gamma\equiv\oint_L a_{/\!/}\,\mathrm{d}l$, 表示有 **涡旋** (流体自转)

无散场 $\nabla\cdot\vec{B}=0\Leftrightarrow\vec{B}=\nabla\times\vec{A}\Leftrightarrow\iint_S\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$ 与所选面无关 $\Leftrightarrow\oint\!\!\!\oint=0$

连续性方程 $\partial_t\rho+\nabla\cdot(\rho\vec{v})=0$ **不可压缩流体** ρ 为常数 → $\nabla\cdot\vec{v}=0$

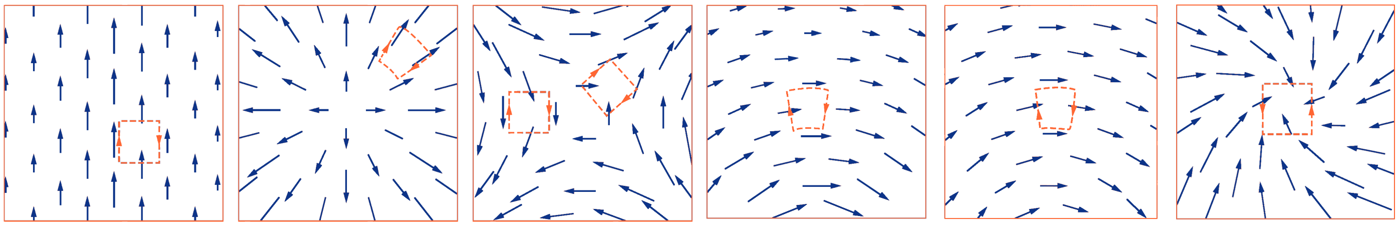
无旋场 / 势场 $\nabla\times\vec{E}=0\Leftrightarrow\vec{E}=-\nabla\varphi\Leftrightarrow\int_a^b\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$ 与路径无关 $\Leftrightarrow\oint=0$

harmonic field　　　　　　　　Laplace's equation
谐和场 无散无旋 → 势函数满足 **拉普拉斯方程** $\nabla^2\varphi=0$ **例** 常矢量场无散无旋

一般矢量场总可表示为无旋场和无散场之和 $\vec{F}=-\nabla\varphi+\nabla\times\vec{A}$ (分解不唯一, 可相差任意的谐和场)

Helmholtz theorem
加边界条件 → **亥姆霍兹定理** 若场在无限远处(比 $\frac{1}{r^2}$ 更快地) 趋于零, 则场可由其散度和旋度唯一确定

「不存在无限远趋于零的非零谐和场」



无散有旋 | 有散无旋 | 无散无旋 | 无散无旋 | 无散有旋 | 有散有旋

矢量微分

nabla / del operator

矢量微分算符 / 劈形算符 ∇ 或 $\vec{\nabla}$ (视作矢量, 向右作用) **例**「拉恒」$(\nabla\times\vec{A})\times\vec{A}=(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{A}-\frac{1}{2}\nabla(A^2)$

$\mathrm{d}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathrm{d}z=[(\vec{e_x}\partial_x+\vec{e_y}\partial_y+\vec{e_z}\partial_z)\varphi]\cdot(\mathrm{d}x\,\vec{e_x}+\mathrm{d}y\,\vec{e_y}+\mathrm{d}z\,\vec{e_z})\equiv\nabla\varphi\cdot\mathrm{d}\vec{l}\to\nabla\varphi\perp\mathrm{d}\vec{l}\,\big|_{\mathrm{d}\varphi=0}$

gradient

梯度 $\nabla\varphi$ 方向为该点处 φ 增速最大的方向 (垂直于等值面), 大小等于在这个方向上的斜率 **例** $\nabla r=\vec{e_r}$

梯度为零可能是极大点(山顶), 极小点(山谷), 鞍点(某方向极大, 另方向极小), 肩点(升或降的平坦处)

$\nabla\cdot\vec{A}=(\vec{e_x}\partial_x+\vec{e_y}\partial_y+\vec{e_z}\partial_z)\cdot(a_x\vec{e_x}+a_y\vec{e_y}+a_z\vec{e_z})=\partial_x a_x+\partial_y a_y+\partial_z a_z$ (结果为标量场)

divergence

散度 $\nabla\cdot\vec{A}$ 无限小闭合曲面围成空间中的通量除以围成空间体积, 描述矢量场中某点处是否有源或汇

$\nabla\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{e_x}&\vec{e_y}&\vec{e_z}\\\partial_x&\partial_y&\partial_z\\a_x&a_y&a_z\end{vmatrix}$ (结果为矢量场)

例 流体整体以 ω 旋转, $\vec{v}=\omega(-y\vec{e_x}+x\vec{e_y})$, 则 $\nabla\times\vec{v}=2\omega\vec{e_z}$
流体绕轴旋转 $\omega\propto\frac{1}{r}$, 则 $\nabla\times\vec{v}=0$

curl / rotation

旋度 $\nabla\times\vec{A}$ 无限小闭合曲线围成面积中的环量除以围成范围面积, 描述矢量场中某点处是否有涡旋

分量形式

〈微积分〉一般正交曲线系下的全微分 $\mathrm{d}\vec{l}=h_1\vec{e_1}\mathrm{d}x_1+h_2\vec{e_2}\mathrm{d}x_2+h_3\vec{e_3}\mathrm{d}x_3$「$\nabla\varphi\cdot\mathrm{d}\vec{l}$ 定义」$\to$

$\nabla\varphi=\left(\frac{\vec{e_1}}{h_1}\partial_1+\frac{\vec{e_2}}{h_2}\partial_2+\frac{\vec{e_3}}{h_3}\partial_3\right)\varphi$「$x_1$ 面上的面元 $\mathrm{d}S=h_2h_3\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3$, 体积元 $\mathrm{d}V=h_1h_2h_3\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3$」$\to$

$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\Big[\partial_1(h_2h_3A_1)+\partial_2(h_1h_3A_2)+\partial_3(h_1h_2A_3)\Big]$ $\quad\nabla\times\vec{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix}h_1\vec{e_1}&h_2\vec{e_2}&h_3\vec{e_3}\\\partial_1&\partial_2&\partial_3\\h_1A_1&h_2A_2&h_3A_3\end{vmatrix}$

(第 2 行的偏导是作用在第 3 行整体的, 勿化简或换序)

例 柱系 $\nabla\cdot\vec{A}=\frac{1}{r}\partial_r(ra_r)+\frac{1}{r}\partial_\phi a_\phi+\partial_z a_z$ 球系 $\nabla\cdot\vec{A}=\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2a_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta a_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi a_\phi$

例 $\nabla\times(\sin\theta\,\vec{e_\phi})=\frac{1}{r}(2\cos\theta\,\vec{e_r}+\sin\theta\,\vec{e_\theta})$

推论 中心场 $\nabla f(r)=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\vec{e_r}\to\nabla\frac{1}{r}=-\frac{\vec{e_r}}{r^2}$, $\nabla\cdot\vec{A}(r)=\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2A_r)\to\nabla\cdot\vec{r}=3$, $\nabla\cdot\vec{e_r}=\frac{2}{r}$, $\nabla\cdot\left(\frac{\vec{e_r}}{r^2}\right)=-\nabla^2\frac{1}{r}=4\pi\delta(\vec{r})$「奇点要单独积分来求 $\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}\frac{1}{r^2}r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$」, $\nabla\times f(r)\vec{e_r}=0$ (中心场必无旋)

积的微分

矢量场加减数乘的微分公式简易, 标量场的公式和函数同理 $\nabla(fg)=f\nabla g+g\nabla f$, $\nabla\left(\frac{f}{g}\right)=(g\nabla f-f\nabla g)/g^2$

① 散度公式「$\partial_x(fa_x)=\frac{\partial f}{\partial x}a_x+f\frac{\partial a_x}{\partial x}$」$\nabla\cdot(f\vec{A})=(\nabla f)\cdot\vec{A}+f(\nabla\cdot\vec{A})\to\nabla\cdot\left(\frac{\vec{A}}{f}\right)=\big(f(\nabla\cdot\vec{A})-(\nabla f)\cdot\vec{A}\big)/f^2$

「$\partial_x(a_yb_z-a_zb_y)=(b_z\partial_xa_y-b_y\partial_xa_z)-(a_z\partial_xb_y-a_y\partial_xb_z)$」$\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A})-\vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B})$

② 旋度公式 $\nabla\times(f\vec{A})=(\nabla f)\times\vec{A}+f(\nabla\times\vec{A})$, $\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{A}(\nabla\cdot\vec{B})-\vec{B}(\nabla\cdot\vec{A})+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}-(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$

「$\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})=\vec{A}\times(\nabla_B\times\vec{B})\overset{\text{拉恒}}{=\!=\!=}\nabla_B(\vec{A}\cdot\vec{B})-\vec{B}(\vec{A}\cdot\nabla_B)$, 而 $\vec{B}(\vec{A}\cdot\nabla_B)=(\vec{A}\cdot\nabla_B)\vec{B}=(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$」

③ 梯度公式 $\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B})=(\nabla_A+\nabla_B)(\vec{A}\cdot\vec{B})=\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})+\vec{B}\times(\nabla\times\vec{A})+(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}$

注 $(\vec{A}\cdot\nabla)$ 整体视为一个算符, $\vec{F}=(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$ 是指 $F_x=\vec{A}\cdot\nabla B_x$, y,z 分量同理

$\to$ 若 $\vec{k}$ 为常矢量, 则 $(\vec{k}\cdot\nabla)\vec{r}=\vec{k}\to\nabla(\vec{k}\cdot\vec{r})=\vec{k}\to\nabla(\vec{k}\cdot\vec{e_r})=(\vec{k}\cdot\nabla)\vec{e_r}=\frac{1}{r}[\vec{k}-\vec{e_r}(\vec{k}\cdot\vec{e_r})]=\frac{1}{r}\vec{k_\perp}$

$\to\nabla\left(\vec{k}\cdot\left(\frac{1}{r}\right)\right)=-\nabla\left(\frac{\vec{k}\cdot\vec{e_r}}{r^2}\right)=\frac{1}{r^3}[2(\vec{k}\cdot\vec{e_r})-r\nabla(\vec{k}\cdot\vec{e_r})]=\frac{1}{r^3}[3(\vec{k}\cdot\vec{e_r})\vec{e_r}-\vec{k}]\to\nabla\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r^3}(3\vec{e_r}\vec{e_r}-\vec{I})$

$u(x,y,z)$ 连续可微, 则复合函数求导 $\nabla f(u)=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\nabla u$, $\nabla\cdot\vec{A}(u)=\nabla u\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}u}$, $\nabla\times\vec{A}(u)=\nabla u\times\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}u}$

例 $\vec{k},\vec{E}$ 为常矢量 $\to\nabla\cdot[\vec{E}\sin(\vec{k}\cdot\vec{r})]=\nabla\sin(\vec{k}\cdot\vec{r})\cdot\vec{E}=\vec{E}\cdot\nabla(\vec{k}\cdot\vec{r})\cos(\vec{k}\cdot\vec{r})=\vec{E}\cdot\vec{k}\cos(\vec{k}\cdot\vec{r})$

$$\nabla\times[\vec E\sin(\vec k\cdot\vec r)]=\nabla\sin(\vec k\cdot\vec r)\times\vec E=\vec k\times\vec E\cos(\vec k\cdot\vec r)$$

二阶微分

① 梯度的散度 $\nabla\cdot(\nabla\varphi)\equiv\nabla^2\varphi$ (或记作 Δ, 不推荐) 拉普拉斯算符 (Laplace operator) $\nabla^2=\nabla\cdot\nabla$ (可视作标量)

对标量场 $\nabla^2\varphi=(\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2)\varphi$ 对矢量场 (直角系) $(\nabla^2\vec A)_x=\nabla^2 A_x$, y,z 分量同理

正交曲线系下 $\nabla^2\varphi=\dfrac{1}{h_1h_2h_3}\left[\partial_1\left(\dfrac{h_2h_3}{h_1}\partial_1\right)+\partial_2\left(\dfrac{h_1h_3}{h_2}\partial_2\right)+\partial_3\left(\dfrac{h_1h_2}{h_3}\partial_3\right)\right]$

例 柱系 $\nabla^2=\dfrac1r\partial_r(r\partial_r)+\dfrac{1}{r^2}\partial_\phi^2+\partial_z^2$ 球系 $\nabla^2=\dfrac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r)+\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\,\partial_\theta)+\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\phi^2$

注 算符恒等式 (需作用在连续可微函数上才有意义) $\dfrac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r)\equiv\dfrac1r\partial_r^2 r$ 「都等于 $\dfrac2r\partial_r+\partial_r^2$」

② 梯度的旋度 $\nabla\times(\nabla\varphi)=0$ 「$\partial_x(\partial_y\varphi)=\partial_y(\partial_x\varphi)$」 ④ 旋度的散度 $\nabla\cdot(\nabla\times\vec A)=0$ 「$\partial_x(\partial_y a_z)=\partial_y(\partial_x a_z)$」

③ 散度的梯度 $\nabla(\nabla\cdot\vec A)\neq\nabla^2\vec A$, 很少用到 ⑤ 旋度的旋度 $\nabla\times(\nabla\times\vec A)=\nabla(\nabla\cdot\vec A)-\nabla^2\vec A$ 「拉恒」

推论 $\nabla\times(\nabla^2\vec A)=-\nabla\times(\nabla\times(\nabla\times\vec A))=\nabla^2(\nabla\times\vec A)$ (旋度算符和拉普拉斯对易)

矢量积分

矢量线积分 $\int_L\varphi\,d\vec r$ 和 $\int_L\vec A\times d\vec r$ 型的积分结果是个矢量, 计算时先对积分路径参数化再算各分量

例 沿 $y=x^2$ 积分, 设 $x=t$, $y=t^2$, 则 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x+y^2)\,d\vec r=\int_0^1(t+t^4)(1,2t)\,dt=(0.7,1)$

例 沿 $y=\sin x$ 积分, 设 $x=t$, $y=\sin t$, 则 $\int_{(0,0,0)}^{(\pi,0,0)}(y,x,0)\times d\vec r=\vec e_z\int_0^\pi(\sin t\cos t-t)\,dt=-\frac{\pi^2}{2}\vec e_z$

矢量面积分 $\iint_S\varphi\,d\vec S$ 和 $\iint_S\vec A\times d\vec S$ 型的积分结果是个矢量

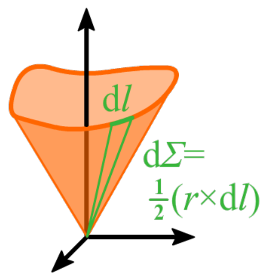
矢量面积 $\vec\Sigma\equiv\iint_S d\vec S$ ($=\iint_S\vec e_n\,dS$, $\vec e_n$ 为外法线方向) **推论** $\vec\Sigma=\frac12\oint\vec r\times d\vec l$

(若 S 为平面, 则 $|\vec\Sigma|$ 等于标量面积)

例 半球面 $\vec\Sigma=\iint\cos\theta(r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi)\vec e_z=2\pi r^2\vec e_z\int_0^{\pi/2}\sin\theta(d\sin\theta)=\pi r^2\vec e_z$, 球面为零

「梯度体积分公式 $\varphi=1$」 $\rightarrow$ 任何闭合曲面 $\vec\Sigma=0$ $\rightarrow$ 有相同边界的曲面的 $\vec\Sigma$ 相同

设 $\vec k$ 为常矢量 「梯度线积分公式 $\varphi\rightarrow\vec k\cdot\vec r$」 $\rightarrow$ $\oint(\vec k\cdot\vec r)\,d\vec l=\vec\Sigma\times\vec k$



积分定理

〈微积分〉 **微积分基本定理** $\int_a^b f'\,dx=f(b)-f(a)$ $\rightarrow$ **梯度定理** $\int_a^b(\nabla\varphi)\cdot d\vec l=\varphi(b)-\varphi(a)$ (与路径无关)

高斯定理 散度体积分 $\iiint_V\nabla\cdot\vec A\,dV=\oiint_S\vec A\cdot d\vec S$ **斯托克斯定理** 旋度线积分 $\iint_S\nabla\times\vec A\cdot d\vec S=\oint_L\vec A\cdot d\vec l$

「高斯定理中 $\vec A\rightarrow\varphi\vec k$, $\vec k$ 为常矢量」 梯度体积分 $\iiint_V\nabla\varphi\,dV=\oiint_S\varphi\,d\vec S$

「高斯定理 $\vec A\rightarrow\vec A\times\vec k$」 旋度体积分 $\iiint_V\nabla\times\vec A\,dV=\oiint_S d\vec S\times\vec A$

「斯托克斯定理 $\vec A\rightarrow\varphi\vec k$」 梯度线积分 $\iint_S d\vec S\times(\nabla\varphi)=\oint_L\varphi\,d\vec l$

(φ,ψ 在有界的 V 中有连续二阶偏导, 在 V 的边界 S 上有连续一阶偏导)

「高斯定理 $\vec A\rightarrow\psi\nabla\varphi$」 **第一标量格林定理** $\oiint_S\psi\nabla\varphi\cdot d\vec S=\iiint_V(\nabla\psi\cdot\nabla\varphi+\psi\nabla^2\varphi)\,dV$ (亦可写成 $\nabla\cdot(\psi\nabla\varphi)$)

$\rightarrow$ **第二标量格林定理** $\oiint_S(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n})\,dS=\iiint_V(\psi\nabla^2\varphi-\varphi\nabla^2\psi)\,dV$ ($\nabla\varphi\cdot\vec e_n\,dS=\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS$, n 为外法线向)

矢量格林定理 $\oiint_S(\vec A\times\nabla\times\vec B)\cdot d\vec S=\iiint_V[(\nabla\times\vec A)\cdot(\nabla\times\vec B)-\vec A\cdot\nabla\times\nabla\times\vec B]\,dV$

$\rightarrow$ $\oiint_S(\vec A\times\nabla\times\vec B-\vec B\times\nabla\times\vec A)\cdot d\vec S=\iiint_V(\vec B\cdot\nabla\times\nabla\times\vec A-\vec A\cdot\nabla\times\nabla\times\vec B)\,dV$

函数和另一个函数导数乘积的积分可以用 **分部积分**

「$\nabla\cdot(\varphi\vec A)=\varphi(\nabla\cdot\vec A)+\vec A\cdot(\nabla\varphi)$」 $\iiint_V\varphi(\nabla\cdot\vec A)\,dV=\oiint_S\varphi\vec A\cdot d\vec S-\iiint_V\vec A\cdot(\nabla\varphi)\,dV$

常用 $\iint_S\varphi(\nabla\times\vec A)\cdot d\vec S=\iint_S[\vec A\times(\nabla\varphi)]\cdot\vec S+\oint_L\varphi\vec A\cdot d\vec l$

$\iiint_V\vec B\cdot(\nabla\times\vec A)\,dV=\iiint_V\vec A\cdot(\nabla\times\vec B)\,dV+\oiint_S(\vec A\times\vec B)\cdot d\vec S$

外乘

(只有 3 维和 7 维矢量能定义叉乘, 分别用四元数和八元数乘法表示)

一般 n 维空间中, 由 $(n-1)$ 个矢量得 1 个和它们都垂直矢量的运算:

exterior / wedge product

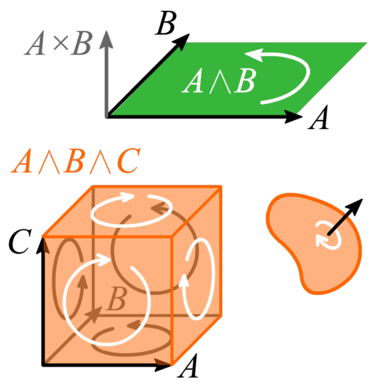
外乘 / 楔积 (格拉斯曼 1844) $\vec{A}\wedge\vec{B}=$ 有向面积 (3 矢量外乘为有向体积)

性质 基矢满足反交换律, 有结合律, 左右分配律

推论 线性相关矢量外乘为零, $\vec{A}\wedge\vec{A}=0$

Grassmann

格拉斯曼代数 $\vec{A}\in V^m$, $\vec{B}\in V^n$, 则 $\vec{A}\wedge\vec{B}=(-1)^{mn}\vec{B}\wedge\vec{A}$



外微分

p-form

n 维空间的 **p (次外微分) 形式** 从 n 个基向量的微分中, 选 p 个外乘起来, 这 C_n^p 种外乘结果设予系数 $(f,\varphi,P,Q,R,\ldots,$ 均为坐标的函数$)$ 作和

p 形式	$n=1$	$n=2$	$n=3$
0 形式	$f(x)$	$f(x,y)$	$f(x,y,z)$
1 形式	$\varphi\,\mathrm{d}x$	$P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$	$P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$
2 形式		$\varphi\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$	$P\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$
3 形式			$\varphi\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$

$\mathrm{d}\omega$	$n=1$	$n=2$
1 形式	$f'\,\mathrm{d}x$	$\dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$
2 形式	0	$\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$
3 形式		0

3 维 p 形式的物理意义 **例** 0 形式: 标量场, 1 形式: 做功 $\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$, 2 形式: 通量 $\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$, 3 形式: 质量 $\rho\,\mathrm{d}V$

例 1 形式外乘 $(1\wedge1\to2)$ $(P_1\,\mathrm{d}x+Q_1\,\mathrm{d}y+R_1\,\mathrm{d}z)\wedge(P_2\,\mathrm{d}x+Q_2\,\mathrm{d}y+R_2\,\mathrm{d}z)=\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\ P_1 & Q_1 & R_1\\ P_2 & Q_2 & R_2\end{vmatrix}$

$(1\wedge2\to3)$ $(P_1\,\mathrm{d}x+Q_1\,\mathrm{d}y+R_1\,\mathrm{d}z)\wedge(P_2\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q_2\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R_2\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)=(P_1P_2+Q_1Q_2+R_1R_2)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$

设 $\omega=\sum f\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\ldots\mathrm{d}x_p$ **外微分** 系数对所有基全微分, 其它同 p 形式, 共 C_n^p 种作和

$\mathrm{d}\omega=\sum\left(\sum^n\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x^i\right)\wedge\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\ldots\mathrm{d}x_p$ **性质** 0 形式外微分就是微分, p 形式的外微分为 $(p+1)$ 形式

例 $\omega=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$, 则 $\mathrm{d}\omega=\left(\dfrac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\wedge\mathrm{d}x+\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\wedge\mathrm{d}y=\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$

庞加莱引理 $\mathrm{d}\,\mathrm{d}\omega=0$

积分公式

generalized Stokes' theorem

广义斯托克斯定理 $\int_G\mathrm{d}\omega=\int_{\partial G}\omega$, 高维区域积分等于低一次形式在区域边界上的积分

n	p	$\int_{(p+1)维}(p+1)$形式$=\oint_{(p)维}(p)$形式	名称
1	0	$\int_a^b f'\,\mathrm{d}x=f(b)-f(a)$	微积分基本定理
3	0	$\int_a^b(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathrm{d}z)=\varphi(b)-\varphi(a)$	梯度定理
2	1	$\iint_S(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$	格林公式
3	1	$\iint_S(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$	斯托克斯定理
3	2	$\iiint_V(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\oiint_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$	高斯定理

指标表示

suffix notation

指标表示 $\vec{A}=\sum_i a_i\vec{e_i}$ (物理惯例 i,j 表示求和 3 个, μ,ν 表示求和 4 个)

summation convention

爱因斯坦 **求和约定** 某项中有指标变量重复出现, 表示对该指标的所有可能值求和, 省略 $\sum$ 号

dummy index　　free index

哑指标 作和的指标, 可任意替换 **自由指标** 不作和的指标, 要替换必须等式两边全部替换

例 证明 $\mathrm{tr}(AB)=A_{jk}B_{kj}\overset{\text{换符号}}{=\!=\!=}A_{kj}B_{jk}\overset{\text{标量可换序}}{=\!=\!=\!=}B_{jk}A_{kj}=\mathrm{tr}(BA)$

内积的指标表示 $\vec{A}\cdot\vec{B}=a_ib_i=\delta_{ij}a_ib_j$ **注** 哑指标不能重复, 属于不同内积的要改用不同指标符号区分

例 $u_i+a_jb_jc_i=a_ja_jb_kc_ka_i$ 表示 $\vec{U}+(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}=|A|^2(\vec{B}\cdot\vec{C})\vec{A}$

全微分 $(\mathrm{d}\varphi)_i=\mathrm{d}x_j\,\partial_j\varphi_i$ 梯度 $(\nabla\varphi)_i=\partial_i$ **例** $(\nabla r)_i=\partial_i\sqrt{x_jx_j}=\frac{1}{2\sqrt{x_jx_j}}\partial_i(x_jx_j)=\frac{1}{2r}2x_j\,\partial_ix_j=\frac{1}{r}x_j\delta_{ij}=\frac{x_i}{r}$

散度 $\nabla\cdot\vec{A}=\partial_ia_i$ **例** $\nabla\cdot\vec{r}=\partial_ix_i=\delta_{ii}=3$ 拉普拉斯 $\nabla^2\varphi=\partial_i^2\varphi$ 散度的梯度 $[\nabla(\nabla\cdot\vec{A})]_i=\partial_i\partial_ja_j$

符号

Kronecker symbol

克罗内克符号 $\delta_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j)\\0 & (i\neq j)\end{cases}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ (行 $i=1,2,3$ 列 $j=1,2,3$)

substitution tensor

性质 $\delta_{ij}=\delta_{ji}$, $\delta_{ii}=3$, $\delta_{ij}a_i=a_j$, $\delta_{ij}a_j=a_i$ (故又被称为 **替换张量**), $\delta_{ij}\delta_{jk}=\delta_{ik}$

alternating tensor

交错张量 $\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}0 & (\text{有相同})\\1&(\text{偶排列})\\-1&(\text{奇排列})\end{cases}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}_{i=1}\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}_{i=2}\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}_{i=3}$ (行 j 列 k)

性质 $\varepsilon_{ijk}=\varepsilon_{jki}=\varepsilon_{kij}=-\varepsilon_{jik}$, $\varepsilon_{iik}=0$, $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}=$所有项平方和$=6$

广义克罗内克符号 $\delta^{lmn}_{ijk}=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}=\begin{vmatrix}\delta_{il}&\delta_{im}&\delta_{in}\\\delta_{jl}&\delta_{jm}&\delta_{jn}\\\delta_{kl}&\delta_{km}&\delta_{kn}\end{vmatrix}\to\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn}=\delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{km}\to\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn}=2\delta_{kn}$

矢积指标表示 $(\vec{A}\times\vec{B})_i=\varepsilon_{ijk}a_jb_k$ 三重积 $[\vec{A},\vec{B},\vec{C}]_i=a_i(\vec{B}\times\vec{C})_i=\varepsilon_{ijk}a_ib_jc_k$

旋度 $(\nabla\times\vec{A})_i=\varepsilon_{ijk}\,\partial_ja_k$ **例** $(\nabla\times\vec{r})_i=\varepsilon_{ijk}\,\partial_jx_k=\varepsilon_{ijk}\delta_{jk}=0$ **例** 证拉格朗日恒等式 $(\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}))_i=\varepsilon_{ijk}a_j(\vec{B}\times\vec{C})_k=\varepsilon_{ijk}a_j\varepsilon_{klm}b_lc_m=(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})a_jb_lc_m=a_mb_ic_m-a_jb_jc_i=b_i(\vec{A}\cdot\vec{C})_i-c_i(\vec{A}\cdot\vec{B})_i$

Levi-Civita symbol

推广 **列维－奇维塔符号** $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta\ldots}$, 有相同 $=0$, 偶排列 $=1$, 奇排列 $=-1$ **例** 2 阶 $\varepsilon_{ij}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$

$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn}=\begin{vmatrix}\delta_{im}&\delta_{in}\\\delta_{jm}&\delta_{jn}\end{vmatrix}\to\varepsilon_{ij}\varepsilon_{in}=\delta_{jn}\to\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}=3$

并矢

(若只考虑空间转动变换不反射, 真和赝没有区别, 欧氏空间中逆变协变没有区别)

设有矢量 $\vec{A}=a_j\vec{e_j}=a_i'\vec{e_i}'$, 其空间转动变换 (物不动, 基动坐标变) 〈群论〉 $\begin{bmatrix}a_1'\\a_2'\\a_3'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta&0\\-\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$

写成指标表示 $a_i'=R_{ij}a_j$ → 基矢的变换 $\vec{e_j}=R_{ij}\vec{e_i}'$

$a_i'=\vec{e_i}'\cdot\vec{A}=\vec{e_i}'\cdot\vec{e_j}a_j$ 和 $a_i'=R_{ij}a_j$ 对比得 $R_{ij}=\vec{e_i}'\cdot\vec{e_j}=\cos\langle i',j\rangle$ (即老系在新系上投影)

性质 R 是正交变换 $RR^T=I\to R_{ij}R^T_{jk}=R_{ij}R_{kj}=\delta_{ik}\to a_i=R_{ji}a_j'$

矢量的张量定义: 空间转动下按 $a_i'=R_{ij}a_j$ 变换的量, 标量则是 $\varphi'=\varphi$

例 证点乘结果是标量 $(\vec{A}\cdot\vec{B})'=a_i'b_i'=R_{ij}a_jR_{ik}b_k=R_{ij}R_{ik}a_jb_k=\delta_{jk}a_jb_k=a_kb_k=\vec{A}\cdot\vec{B}$

dyadic

并矢 两矢量并列不做任何运算 $\vec{A}\vec{B}=a_ib_j\vec{e_i}\vec{e_j}$, 其中 $\vec{e_i}\vec{e_j}$ 称为 **并矢基元** (共 9 个)

直接并矢运算, 以及数乘, 满足结合律, 分配律, 定义并矢的转置 $(\vec{A}\vec{B})^T=\vec{B}\vec{A}$

单位并矢 $\overleftrightarrow{I}=\delta_{ij}\vec{e_i}\vec{e_j}$ **性质** $\overleftrightarrow{I}\cdot\vec{A}=\vec{A}\cdot\overleftrightarrow{I}=\vec{A}$, $\overleftrightarrow{I}\cdot\overleftrightarrow{T}=\overleftrightarrow{T}\cdot\overleftrightarrow{I}=\overleftrightarrow{T}$

二阶张量 $\overleftrightarrow{T}=T_{kl}\vec{e_k}\vec{e_l}=T_{ij}'\vec{e_i}'\vec{e_j}'$, 张量的变换方式为 $T_{ij}'=R_{ik}R_{jl}T_{kl}$

triadics

三并矢 $\vec{A}\vec{B}\vec{C}=a_ib_jc_k\vec{e_i}\vec{e_j}\vec{e_k}$ (共 27 个基元) **三阶张量** $\overset{\leftrightarrow}{\vec{T}}=T_{ijk}\vec{e_i}\vec{e_j}\vec{e_k}$ 变换方式 $T_{ijk}'=R_{il}R_{jm}R_{kn}T_{lmn}$

张量

tensor
张量 (里奇 1890) 多重线性量(广义的数量), r **阶**(rank)张量有 r 组**指标**(indices), n 维空间的张量共有 n^r 个分量

例 标量为零阶张量, 矢量为一阶张量, 矩阵为二阶张量

不同坐标系下按照张量一样变换的东西就是张量 (数学概念用其行为来定义)

例 证 $\partial_j a_i$ 是 2 阶张量 $\dfrac{\partial a_i'}{\partial x_j'} \xlongequal{A\text{是矢量}} R_{ik}\dfrac{\partial a_k}{\partial x_j'} = R_{ik}\dfrac{\partial a_k}{\partial x_l}\dfrac{\partial x_l}{\partial x_j'} = R_{ik}R_{jl}\dfrac{\partial a_k}{\partial x_l}$

isotropic tensor
各向同性张量 其分量在所有坐标系都不变 **例** $\delta_{ij}' = R_{ik}R_{jm}\delta_{km} = R_{ik}R_{jk} = \delta_{ij}$, 而 δ 的确在任何坐标系定义都一样, 故 δ 是 2 阶对称张量, 同理可证 $\varepsilon_{ijk}' = \varepsilon_{ijk}$ 是 3 阶反对称赝张量 **定理** 1 阶各向同性只有零矢量, 2 阶都是 δ 的倍数, 3 阶都是 ε 的倍数, 4 阶各向同性张量可表示成 $T_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\delta_{ik}\delta_{jl} + \nu\delta_{il}\delta_{jk}$

symmetric tensor
对称张量 $T_{ij} = T_{ji}$, 一般为 6 个独立分量 (主轴坐标系下剩 3 个, 即 **主值**)

性质 $\varepsilon_{ijk}T_{jk} = 0$ 「$0 = \varepsilon_{mni}\varepsilon_{ijk}T_{jk} = (\delta_{mj}\delta_{nk} - \delta_{mk}\delta_{nj})T_{jk} = T_{mn} - T_{nm}$」

antisymmetric tensor
反对称张量 $T_{ij} = -T_{ji}$, 3 个独立分量

定理 任何张量可表示成对称和反对称之和 $T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})$

性质 坐标变换不改变对称性 (混合张量除外) 「已知 $T_{ij} = T_{ji}$ 则 $T_{ij}' = R_{ik}R_{jm}T_{km} = R_{jm}R_{ik}T_{mk} = T_{ji}'$」

quotient rule
商法则 若 $a_i = T_{ij}b_j$ 在任何坐标系对任意矢量 $\vec{B}$ 成立, 则 T_{ij} 是张量

「$a_i' \xlongequal{A\text{是矢量}} R_{ik}a_k = R_{ik}T_{kj}b_j \xlongequal{B\text{是矢量}} R_{ik}T_{kj}R_{mj}b_j' \xlongequal{\text{任何系}} T_{im}'b_m' \to (T_{im}' - R_{ik}T_{kj}R_{mj})b_m' \xlongequal{\text{任何}B} 0$」

可推广为: 若 m 阶张量 A 和 n 阶张量 B 通过 $(m+n)$ 个指标的量 T 线性联系, 则 T 是 $(m+n)$ 阶张量

并矢乘法

对于并矢 $\vec{A}\vec{B}$, 左点乘只作用于 $\vec{A}$, 右点乘只用于 $\vec{B}$ **例** $\vec{e_x}\cdot\vec{A}\vec{B}\cdot\vec{e_y} = a_x b_y$

张量点乘 $\vec{T}\cdot\vec{A} = T_{ij}a_k\vec{e_i}(\vec{e_j}\cdot\vec{e_k}) = T_{ij}a_j\vec{e_i}$, $\vec{T}\cdot\vec{S} = T_{ij}S_{jl}\vec{e_i}\vec{e_l}$ (不满足交换律)

double dot
双点乘 $\vec{T}:\vec{A}\vec{B} = (\vec{T}\cdot\vec{A})\vec{B} \to \vec{T}:\vec{S} = T_{ij}S_{ji}$ **例** $\vec{I}:\vec{T} = T_{ii} = \mathrm{tr}\,\vec{T}$, $\vec{I}:\vec{A}\vec{B} = \vec{A}\cdot\vec{B}$, $\vec{I}:\nabla\nabla = \nabla^2$

矢积的并矢表示 $\vec{A}\times\vec{B} = \varepsilon:\vec{B}\vec{A} = \vec{B}\vec{A}:\varepsilon$ **例** $\vec{T}\times\vec{k} = -\vec{T}\cdot\varepsilon\cdot\vec{k}$, $\vec{k}\times\vec{T} = -\vec{k}\cdot\varepsilon\cdot\vec{T}$, $\vec{T}\times\vec{S} = -\vec{T}\cdot\varepsilon\cdot\vec{S}$

并矢(或张量积) 运算: 阶直接相加, 叉乘: 再减 1 阶 **缩并**(contraction) 点乘减 2 阶, 双点乘减 4 阶

例 $\vec{A}\vec{B}\cdot\vec{C} = \vec{A}(\vec{B}\cdot\vec{C})$, $\vec{A}\vec{B}\cdot\vec{C}\vec{D} = (\vec{B}\cdot\vec{C})\vec{A}\vec{D}$, $\vec{A}\vec{B}:\vec{C}\vec{D} = (\vec{B}\cdot\vec{C})(\vec{A}\cdot\vec{D})$

并矢的矢量微分 $\nabla\cdot(\vec{A}\vec{B}) = (\nabla\cdot\vec{A})\vec{B} + (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$, $\nabla\times(\vec{A}\vec{B}) = (\nabla\times\vec{A})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$

(若微分算符后没有括号, 则表示只对紧邻张量进行)

梯度升一阶, 散度降一阶, 旋度不变 **例** $\nabla\vec{r} = \vec{I}$, $\nabla\cdot(\varphi\vec{I}) = \nabla\varphi$

$\nabla\cdot(\vec{A}r^2) = r^2\nabla\cdot\vec{A} + 2\vec{r}\cdot\vec{A}$, $\nabla\cdot(\vec{A}\vec{r}) = (\nabla\cdot\vec{A})\vec{r} + \vec{A}$, $\nabla\cdot(\vec{A}\vec{r}\vec{r}) = (\nabla\cdot\vec{A})\vec{r}\vec{r} + \vec{A}\vec{r} + \vec{r}\vec{A}$

场量的泰勒展开 $f(\vec{r}) = f(\vec{r_0}) + \nabla f(\vec{r_0})\cdot(\vec{r} - \vec{r_0}) + \frac{1}{2!}\nabla\nabla f(\vec{r_0}):(\vec{r} - \vec{r_0})(\vec{r} - \vec{r_0}) + \ldots$

例 $f(\vec{r} - \vec{r_0}) = f(\vec{r}) - \nabla f(\vec{r})\cdot\vec{r_0} + \frac{1}{2!}\nabla\nabla f(\vec{r}):\vec{r_0}\vec{r_0} + \ldots$ $\dfrac{1}{|\vec{r} - \vec{r_0}|} = \dfrac{1}{r} + \dfrac{\vec{r_0}\cdot\vec{e_r}}{r^2} + \dfrac{\vec{r_0}\vec{r_0}:(3\vec{e_r}\vec{e_r} - \vec{I})}{2r^3} + \ldots$

「 $\vec{e_r}\vec{e_r}:\vec{I} = \vec{e_r}\cdot\vec{e_r} = 1$, $\vec{r_0}\vec{r_0}:\vec{I} = r_0^2$」 第三项分子亦可写成 $(3\vec{r_0}\vec{r_0} - r_0^2\vec{I}):\vec{e_r}\vec{e_r}$