

偏振的数学理论

lpc14@mails.tsinghua.edu.cn

这是给数学系讲偏振的讲稿，故着重介绍数学模式，而物理过程略讲
绿色的字为推导过程，在报告时略讲

灰色的字是非主线内容，如果感兴趣的话再讲

(2015/10/20 初稿, 2015/10/23 组会讨论后修订, 最后编辑于 2015/10/23)

目 录				
1	电磁波	1	3.1 * 混合态相干理论	4
2	纯偏振态	1	3.2 斯托克斯矢量	5
2.1	琼斯矢量	2	3.3 穆勒矩阵	5
2.2	布洛赫球	2	3.4 表象变换	6
2.3	偏振变换	3	3.5 穆勒矩阵计算	6
2.4	相干理论	3	4 穆勒矩阵性质	7
3	混合偏振态	4	4.1 穆勒矩阵分解	7
			5 散射光学	8
			5.1 蒙特卡洛模拟	8
			5.2 一些结果	9

电磁波

由 **麦克斯韦方程组** (1864) 可得波动方程 $\nabla^2 \vec{E} = v^{-2} \partial_t^2 \vec{E}$ (对于磁场 \vec{H} 方程形式相同, 以下只研究电场即可) 它的解即为经典 **电磁波**
以下研究单色平面波解, 设光沿 z 方向传播, 光是横波 $\rightarrow E_z=0$
 $E_x(z,t)=E_{0x} \cos(kz-\omega t+\theta_x)=\operatorname{Re}[E_{0x} e^{ikz} e^{i\theta_x} e^{-i\omega t}]$

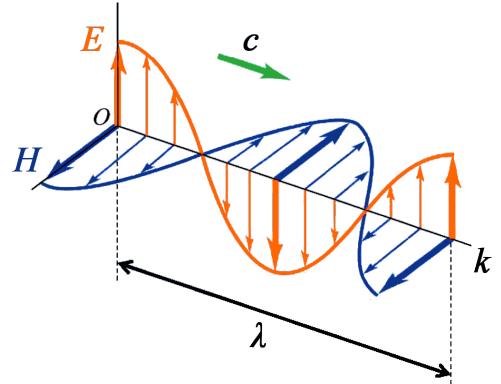
其中 **频率** $\omega \equiv \frac{2\pi}{T}$ **波数** $k \equiv \frac{2\pi}{\lambda}$ 为常数

等相位面 \rightarrow **相速度** $v \equiv \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}$

性质 ① 频率来自光源的本征扰动, 故 $\omega_x=\omega_y$

② 不考虑 **双折射** 的话, E_x 和 E_y 的速度相同

$\rightarrow k_x=k_y \rightarrow E_y(z,t)=E_{0y} \cos(kz-\omega t+\theta_y)$



非偏振光学 取 $\theta_x=\theta_y$, 从而 6 个分量 (\vec{E}, \vec{H}) 只需研究 1 个 (E_x) 即可

纯偏振态

考虑偏振 \rightarrow **相位** $\theta_x \neq \theta_y$

绝对相位不可观测, 只有相位差才有物理

意义 \rightarrow **相位差** $\theta \equiv \theta_y - \theta_x$

Lissajous figure

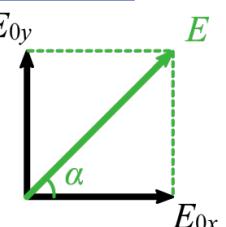
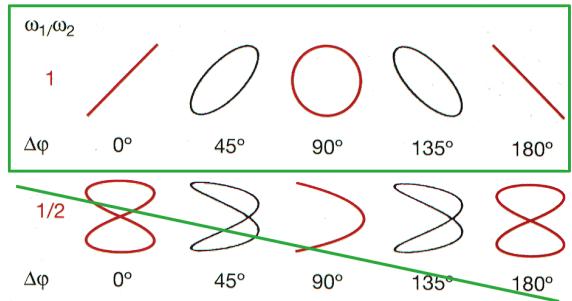
合成的结果见频率 1:1 的 **李萨如图** 相位差 $\theta=0$ 或 π 时为 **线偏振**

偏振面倾角 设合成的 E 方向与 x 轴成 α 角, 则 $\tan \alpha = \frac{E_{0y}}{E_{0x}}$

以下我们称 $\alpha=0$ 为 **水平线偏振**, $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 为 **垂直线偏振**

相位差 $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$ 为右/左旋 **正椭圆偏振**, 若振幅相等则为 **圆偏振**

其它的一般情况为 **斜椭圆偏振** (表达式略)



琼斯矢量

Jones vector

琼斯矢量 (1941) $|\psi\rangle = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{绝对相位是冗余信息}} \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} e^{i\theta} \end{bmatrix}$

例 振幅不等相位相等的例子: 线偏振 $|\psi\rangle = \sqrt{I} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}$

其中 **光强** $I = I_x + I_y = E_{0x}^2 + E_{0y}^2$ (若不考虑光强, 则对矢量做归一化)

振幅相等相位不等的例子: 圆偏振 (归一化后) $|\psi\rangle_{R,L} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \end{bmatrix}$

总结 描述单纯的偏振态需要 1 个复数 (或者说 2 个实数) : 相对振幅, 相对相位, 考虑光强的话则需要 3 个实数

布洛赫球

Bloch sphere

布洛赫球 用球坐标方位角和俯仰角 (即单位球面上的点) 来描述偏振态 (也是 2 个实数)

若将琼斯矢量表示为 $|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha e^{i\theta} \end{bmatrix}$

可以验证 $\vec{r} \equiv \langle \psi | \vec{\sigma} | \psi \rangle$ ($\langle \psi |$ 是 $|\psi\rangle$ 的共轭转置)

$$= \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha e^{-i\theta} \end{bmatrix} (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z) \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha e^{i\theta} \end{bmatrix}$$

$$= (\sin 2\alpha \cos \theta, \sin 2\alpha \sin \theta, \cos 2\alpha)$$

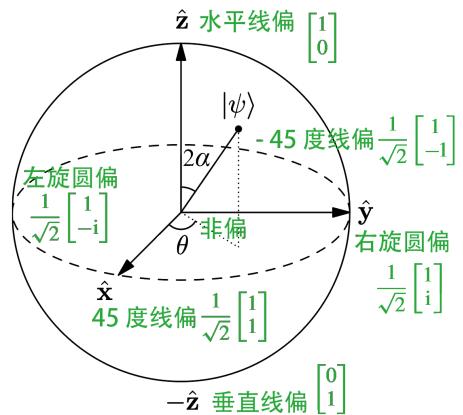
从而将琼斯矢量映射为球面上的点

其中 $\hat{\sigma}$ 是 **泡利矩阵** $\hat{\sigma}_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\hat{\sigma}_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, $\hat{\sigma}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

总结 $|\psi\rangle$ 是代数工具, \vec{r} 是几何工具, 均可完备地描述纯偏振态

性质 相对的两点代表 **正交偏振态** $\langle \psi_2 | \psi_1 \rangle = 0$ 「 $\alpha \rightarrow \alpha + \frac{\pi}{2}, \theta$ 不用变」

注 $\vec{r} \cdot \vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha e^{-i\theta} \\ \sin 2\alpha e^{i\theta} & -\cos 2\alpha \end{bmatrix}$ 这是 $SU(2)$ 的群元素, 布洛赫球则是 $SO(3)$ 群的一种表示



偏振变换

定理 两个正交偏振态可构成完备基

任一组正交完备基 (物理上称之为 **表象**) 均可线性组合出所有偏振态

例 圆偏振可以做正交分解, 分解成水平/垂直的线偏振, 线偏振亦可表示为左右旋圆偏振之和

不同表象间的变换用 **表象变换矩阵** 例 $\begin{bmatrix} E_0 \\ E_{90} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_L \\ E_R \end{bmatrix}$

性质 表象变换矩阵么正

数学图像 么正变换对应布洛赫球面的旋转

我们主要研究光学元件对入射光偏振态的变换 (和表象变换是两回事)

琼斯矩阵 $|\psi\rangle_{\text{out}} = J_{2 \times 2} |\psi\rangle_{\text{in}}$ **推论** 对于多个元件, 按光通过的顺序

J_1, J_2, J_3 , 总的变换为做左乘 $J = J_3 J_2 J_1$

相干理论

(相干理论包括时间相干, 空间相干, 偏振只是其中的同时刻二阶相干性)

coherent matrix density matrix
定义 **相干矩阵** (若归一化则称 **密度矩阵**) $\hat{\rho} \equiv |\psi\rangle \langle \psi| = \begin{bmatrix} E_x E_x^* & E_x E_y^* \\ E_y E_x^* & E_y E_y^* \end{bmatrix}$

则它和琼斯矢量一样, 可完备描述纯偏振态, $\text{tr } \hat{\rho}$ 代表光强, 行列式 $|\hat{\rho}|=0$ 和几何工具的联系: $\hat{\rho} = \frac{1}{2}(I_2 + \vec{r} \cdot \vec{\sigma})$, I_2 是单位矩阵

(稍后我会讲它可以扩展到描述一般偏振态, 而琼斯矢量不行)

推论 光学元件对密度矩阵的变换方式为 $\hat{\rho}_{\text{out}} = J \hat{\rho}_{\text{in}} J^\dagger$

若元件无吸收, 能量守恒要求 $\text{tr } \hat{\rho} = \text{tr}(J \hat{\rho} J^\dagger) = \text{tr}(J^\dagger J \hat{\rho})$ 对所有 $\hat{\rho}$ 都成立
 \rightarrow 么正变换 $J^\dagger J = I_2$ (保迹变换?) 以下举几个光学元件的例子:

水平偏振片 将入射光的偏振态投影到水平方向上, $J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
(非么正, 光强有损失)

相位延迟器 将入射光相位差缩小 θ , $J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix}$ (么正, 无吸收)
(在量子信息中叫相位门)

旋光器 将偏振态逆时针转 α , $J = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ (么正, 无吸收)
(或者说就是坐标变换)

另一种工具是 **相干矢量**
(两个列矢量做张量积)

$$\vec{C} = |\psi\rangle |\psi\rangle^* = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} E_x^* \\ E_y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_x E_x^* \\ E_x E_y^* \\ E_y E_x^* \\ E_y E_y^* \end{bmatrix}$$

$$|\psi\rangle_{\text{out}} \otimes |\psi\rangle_{\text{out}}^* = (J|\psi\rangle_{\text{in}}) \otimes (J^*|\psi\rangle_{\text{in}}^*) = (J \otimes J^*)(|\psi\rangle_{\text{in}} \otimes |\psi\rangle_{\text{in}}^*)$$

则相干矢量的变换方式是 $\vec{C}_{\text{out}} = (J \otimes J^*) \vec{C}_{\text{in}}$

混合偏振态

非偏振光 各种偏振态等概率均匀混合, 从而看不出偏振特性, 如自然光

部分偏振光 纯偏振光和非偏振光的混合

→ 定义 **偏振度** P , 纯态 $P=1$, 非偏 $P=0$

结论 描述一般的偏振态需要 3 个实数, 考虑光强则需 4 个

→ 琼斯矢量无法描述一般偏振态! (引入偏振度就要引入统计)

一般偏振态 $0 \leq P \leq 1$ → 用代表点到原点的距离来表示 ① 布洛赫球面上的点表示纯偏振态, 球内的点表示部分偏振态, 原点表示非偏振态

② 升级 **混合态的相干矩阵** $\hat{\rho} = \sum p_i \hat{\rho}_i$, 同理 $\vec{C} = \sum p_i \vec{C}_i$

其中 p_i 是取 $\hat{\rho}_i$ 这个偏振态的概率, $\text{tr } \hat{\rho} = \sum p_i I_i$, 即总光强 I

几何联系: $\hat{\rho} = \frac{1}{2}[I_2 + (\sum p_i \vec{r}_i) \cdot \vec{\sigma}]$, 由于 $\sum p_i = 1$, 故最终点必落在球内, 记为 $P \vec{r} \equiv \sum p_i \vec{r}_i \rightarrow \text{tr } \hat{\rho}^2 = \frac{1}{2}(1+P^2)I^2 \rightarrow$ 提取出 P 的信息

(密度矩阵是 2 维的, 但它是复数的, 一般是研究电子极化的人用
我们做光子偏振的需要联系实验, 实验测的都是实数) ③ $\vec{C} \xrightarrow{\text{实数化}} \vec{S}$

* 混合态相干理论

(本节为附加内容, 初次介绍概念可跳过此节) 记 $\hat{\rho} = \begin{bmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{xy}^* & \rho_{yy} \end{bmatrix}$

定理 任何统计稳定的光束必可唯一地分解为

非偏振光 $\hat{\rho}_u = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 和纯偏振光 $\hat{\rho}_p = \begin{bmatrix} \rho_{xx}-a & \rho_{xy} \\ \rho_{xy}^* & \rho_{yy}-a \end{bmatrix}$ 之和

纯态满足 $|\hat{\rho}_p| = 0 \rightarrow |\hat{\rho}| - a(\rho_{xx} + \rho_{yy}) + a^2 = 0 \rightarrow a = \frac{1}{2}[\text{tr } \hat{\rho} \pm \sqrt{(\text{tr } \hat{\rho})^2 - 4|\hat{\rho}|}]$

要求 $\hat{\rho}_p$ 的对角元非负 → 排除正号根, a 只有唯一解

$\text{tr } \hat{\rho}_p = \sqrt{(\text{tr } \hat{\rho})^2 - 4|\hat{\rho}|} \rightarrow$ 另一种表达式: $P \equiv \frac{I_p}{I} = \frac{\text{tr } \hat{\rho}_p}{\text{tr } \hat{\rho}} = \sqrt{1 - \frac{4|\hat{\rho}|}{(\text{tr } \hat{\rho})^2}}$

旋转变换不改变行列式和迹 ↓

结论 故偏振度与 x, y 轴的选择无关, 是光子系综固有的统计性质

又另一种表达式: 因 $\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$ 厄米, 故可通过幺正变换对角化, 设本征值为 λ_1, λ_2 , 则 $|\hat{\rho}| = \lambda_1 \lambda_2$, $\text{tr } \hat{\rho} = \lambda_1 + \lambda_2 \rightarrow P = \frac{|\lambda_1 - \lambda_2|}{\lambda_1 + \lambda_2}$

斯托克斯矢量

Stokes vector

斯托克斯矢量 (1852) $\vec{S} = I \begin{bmatrix} 1 \\ P \vec{r}, \end{bmatrix}$ (1列4行)
出于习惯 $\vec{r}, = (r_z, r_x, r_y)$ (**庞加莱球**)

它和相干矢量等价 $\vec{S} = U \vec{C}$

其中 **琼斯 – 穆勒变换矩阵**

(这是表象变换矩阵, 幺正, 作用是实数化 \vec{C})

$$U \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{i} & -\mathbf{i} & 0 \end{bmatrix}$$

故斯托克斯矢量亦可表示为如下形式, 和实验测量相联系

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} E_x E_x^* + E_y E_y^* \\ E_x E_x^* - E_y E_y^* \\ E_x E_y^* + E_y E_x^* \\ \mathbf{i}(E_x E_y^* - E_y E_x^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{0x}^2 + E_{0y}^2 \\ E_{0x}^2 - E_{0y}^2 \\ 2E_{0x} E_{0y} \cos \theta \\ 2E_{0x} E_{0y} \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 + P_{90} \\ P_0 - P_{90} \\ P_{45} - P_{-45} \\ P_R - P_L \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 - I_1 \\ I_3 - I_1 \\ I_4 - I_1 \end{bmatrix}$$

P_α 指光透过 α 度线偏振片后的光强, $P_{R/L}$ 指右/左旋圆偏振片透过光强

证明第 3 个等号, 用到表象变换 $\begin{bmatrix} E_{-45} \\ E_{+45} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos & \sin \\ -\sin & \cos \end{bmatrix} (-45^\circ) \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} E_x - E_y \\ E_x + E_y \end{bmatrix}$

6 次测量理论上可简化为 4 次测量, 不过其物理意义解释起来就更麻烦
(I_i 指透过某种特殊滤光片的光强: I_1 各向同性, 一律吸收 50%, I_2 对 x 轴透光, y 轴全吸收, I_3 是 I_2 转 $\frac{\pi}{4}$ 角度, I_4 对右旋透明, 左旋全吸收)

穆勒矩阵

Mueller matrix

穆勒矩阵 (1948) 取值均为实数

故 m_{00} 代表非偏振的光强变换

$$\vec{S}_{\text{out}} = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \vec{S}_{\text{in}}$$

例 水平偏振片

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

相位延迟器

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

旋光器

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ 0 & -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

表象变换

- ① 对于不改变偏振度的元件, 有 **琼斯 - 穆勒换算关系** $M = U(J \otimes J^*)U^{-1}$
(这种情况, 必然可以降维?)
- ② 穆勒矩阵亦可描述有退偏的元件, 举例: 消偏器 $M = \text{diag}[1 \ 0 \ 0 \ 0]$
(穆勒矩阵能描述的东西更多)

总结 几何工具 $P\vec{r}$ 可表征一般偏振光, 但不便再表征光强
代数工具 $\hat{\rho} \Leftrightarrow \vec{C} \Leftrightarrow \vec{S}$ 均可完全表征带光强一般偏振光

- ① 矢量表征偏振光, 偏振态的空间基本上弄得很清楚了
② 矩阵表征线性的光学元件, 种类繁多, 我们只弄清了一小部分
③ 非线性元件就完全不清楚了!

穆勒矩阵计算

我们用程序计算穆勒矩阵的方法是, 统一把元件当作黑盒子, 分别输入

$\vec{S}_{\text{in}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 然后测 \vec{S}_{out} , 以下记作 Sx, Sy, Sp, Sr , 那么

$$M = \begin{bmatrix} (Sx_0 + Sy_0)/2 & (Sx_0 - Sy_0)/2 & Sp_0 - m_{00} & Sr_0 - m_{00} \\ (Sx_1 + Sy_1)/2 & (Sx_1 - Sy_1)/2 & Sp_1 - m_{10} & Sr_1 - m_{10} \\ (Sx_0 + Sx_2 + Sy_0 + Sy_2)/2 - m_{00} & (Sx_0 + Sx_2 - Sy_0 - Sy_2)/2 - m_{01} & Sp_2 - m_{20} & Sr_2 - m_{20} \\ (Sx_0 + Sx_3 + Sy_0 + Sy_3)/2 - m_{00} & (Sx_0 + Sx_3 - Sy_0 - Sy_3)/2 - m_{01} & Sp_3 - m_{30} & Sr_3 - m_{30} \end{bmatrix}$$

(和 \vec{S} 同理, 穆勒矩阵理论上只需 16 次测量, 但实验常常比这多)

穆勒矩阵性质

以下附上一些已知的关于穆勒矩阵解析的结论, 供参考

一般线偏振片 (主轴沿 α 角方向) 前 3 维对称

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) & 0 \\ \cos(2\alpha) & \cos^2(2\alpha) & \sin(2\alpha)\cos(2\alpha) & 0 \\ \sin(2\alpha) & \sin(2\alpha)\cos(2\alpha) & \sin^2(2\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

一般相位延迟 (δ 为快慢轴相位差, α 为快轴角度) 第 4 维反对称

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(2\alpha) + \cos(\delta)\sin^2(2\alpha) & \cos(2\alpha)\sin(2\alpha) - \cos(2\alpha)\cos(\delta)\sin(2\alpha) & \sin(2\alpha)\sin(\delta) \\ 0 & \cos(2\alpha)\sin(2\alpha) - \cos(2\alpha)\cos(\delta)\sin(2\alpha) & \cos(\delta)\cos^2(2\alpha) + \sin^2(2\alpha) & -\cos(2\alpha)\sin(\delta) \\ 0 & -\sin(2\alpha)\sin(\delta) & \cos(2\alpha)\sin(\delta) & \cos(\delta) \end{bmatrix}$$

穆勒矩阵分解

Mueller Matrix Polar Decomposition

穆勒矩阵极分解 (1996) $M = m_{00} \begin{bmatrix} 1 & \vec{D} \\ \vec{P}_\Delta & m \end{bmatrix} = M_\Delta M_R M_D = \begin{bmatrix} 1 & \vec{0} \\ \vec{P}_\Delta & m_\Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \vec{0} \\ \vec{0} & m_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \vec{D} \\ \vec{D} & m_D \end{bmatrix}$

含义分别为: 二向色性, 相位延迟, 散射退偏 (不同分解顺序结果不同, 这种分解方式只是经验上和物理意义对的最好)

从这种分解我们能提取以下物理参数: **二向色性** $D = \frac{1}{m_{00}} |\vec{D}|$,

总相位延迟 $R = \cos^{-1}(\frac{1}{2} \text{tr} M_R - 1)$, **旋光** $\Psi = \tan^{-1} \left(\frac{m_{R21} - m_{R12}}{m_{R11} - m_{R22}} \right)$,

退偏振 (量子信息中为退相干) $\Delta = 1 - \frac{1}{3} |\text{tr} m_\Delta| = 1 - \frac{1}{3} |\text{tr} M_\Delta - 1|$

总结 元件串联对应乘法的矩阵分解, 元件并联对应加法的矩阵分解

Mie

均质球粒子 上的单次散射 (**米氏散射** (1908))

和 **无限长圆柱** 上的单次散射, 均有解析解

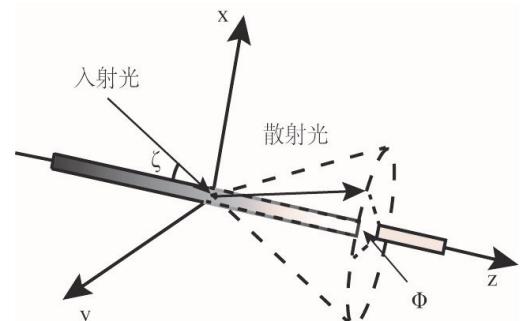
球的:
$$\begin{bmatrix} E_{\parallel} \\ E_{\perp} \end{bmatrix} = \frac{e^{ik(r-z)}}{-ikr} \begin{bmatrix} S_2 & 0 \\ 0 & S_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{\parallel} \\ E_{\perp} \end{bmatrix}$$

其中 S_1, S_2 和散射方向 θ 有关, 级数, 含勒让德, 贝塞尔函数等等...

$$M = \frac{1}{k^2 r^2} \begin{bmatrix} S_a & S_b & 0 & 0 \\ S_b & S_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_c & S_d \\ 0 & 0 & -S_d & S_c \end{bmatrix} \quad S_a = \frac{1}{2}(|S_1|^2 + |S_2|^2), S_b = \frac{1}{2}(|S_2|^2 - |S_1|^2) \\ S_c = \frac{1}{2}(S_1 S_2^* + S_1^* S_2), S_d = \frac{i}{2}(S_1 S_2^* - S_1^* S_2)$$

柱的: 太多了, 每个矩阵元都不为零

几个 **结论**: 散射光会分布在如图的锥面上
不同方位角散射出来的光的偏振态不同
不同入射偏振态也会影响散射光的偏振态分布



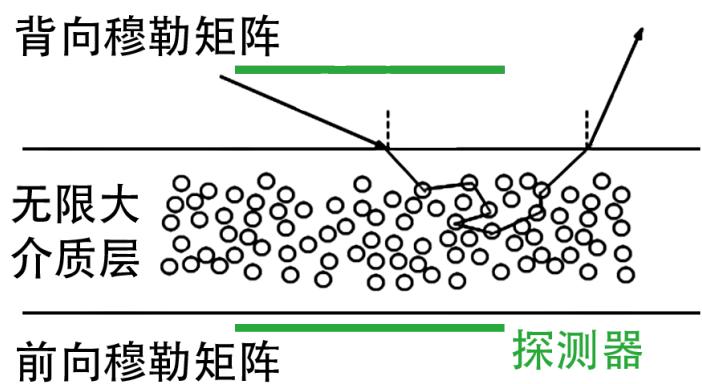
该现象称为 **圆柱散射体的偏振各向异性**

多次散射, 目前只能蒙特卡洛模拟

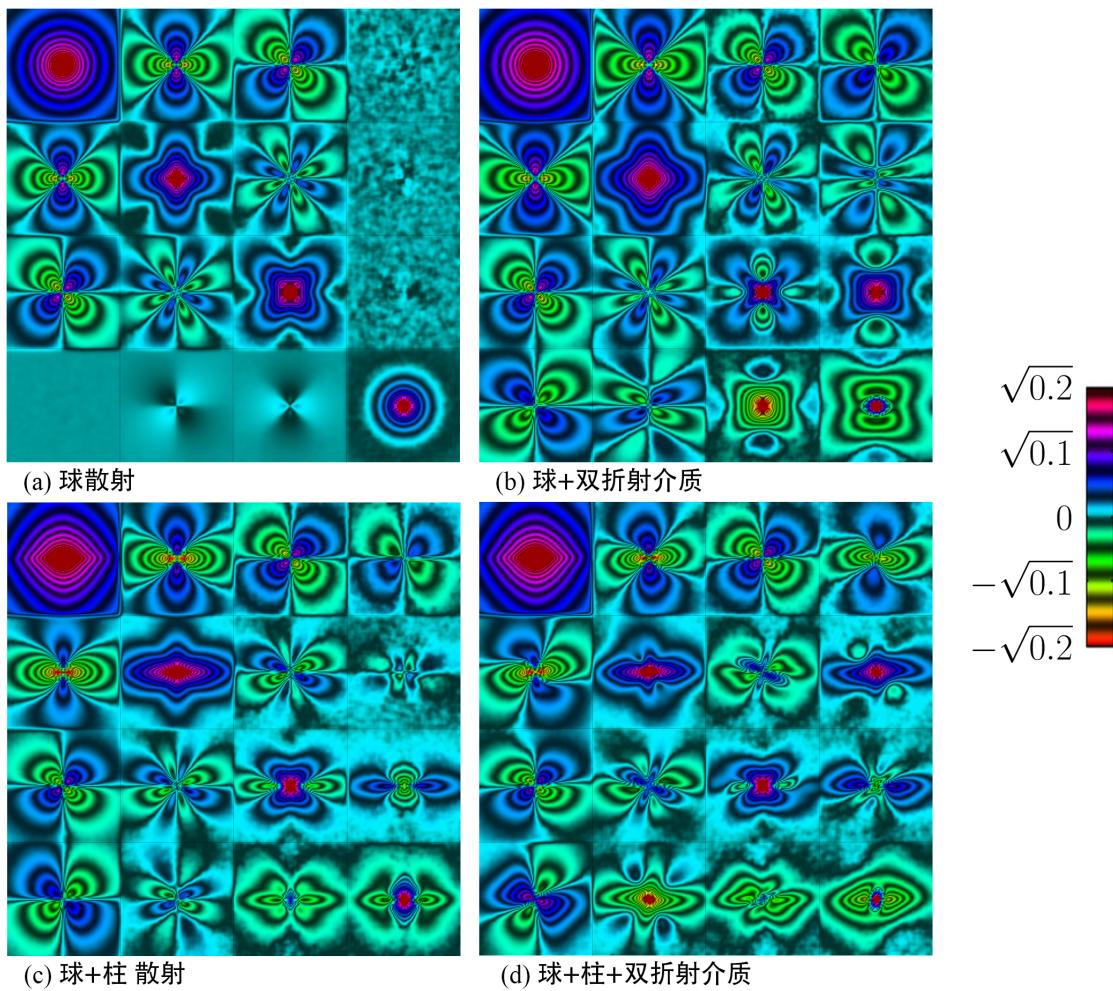
蒙特卡洛模拟

粒子云模型 (不是晶格!)

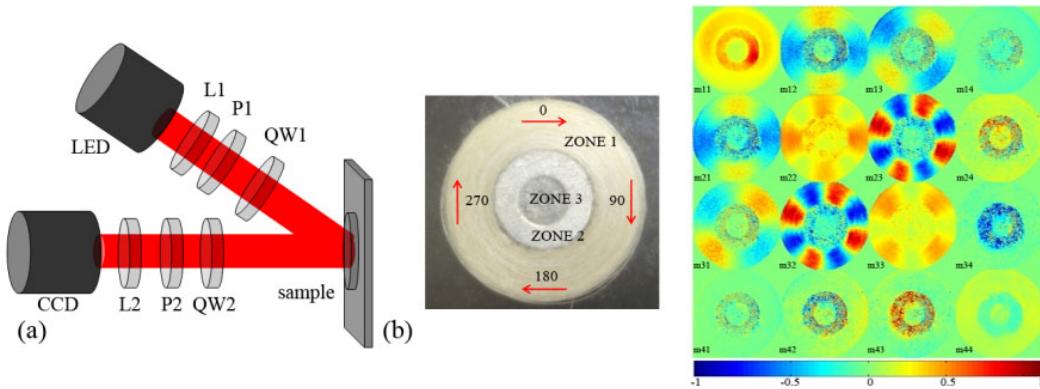
单个光子的散射过程具有极大的随机性, 但如果我们模拟足够多的光子然后统计起来, 最终的宏观结果会趋于稳定, 这便是 **统计力学** 的思想



下图是对于点入射光，穆勒矩阵元的空间分布



而点入射和真实实验又有一些区别，其联系我们尚不清楚



左图为绕成圈圈的蚕丝样品，右图为测量的背向穆勒矩阵