实 矢量与张量分析

© LePtC (萌狸)
笔记项目主页：http://leptc.github.io/lenote

署名・非商用・相同方式共享

精

Matthews. Vector Calculus. Springer
黄克智. 张量分析（第二版）. 清华大学出版社 (较全)

参

余天庆. 张量分析及其应用. 清华大学出版社 (较精)

(同高等代数, 微分几何, 电动力学, 狭相广相)

符号约定

上标撇 ’ 表示变换后, $\vec{e_a}$ 表示单位矢量 (不用 $\hat{a}$) , g_i 表示逆变基矢, g^i 表示协变基矢 (非单位长度)
斜系之后, 矢/张量不再画箭头, (在不致混淆时) 用其分量 A^μ $T^{\mu\nu}$ 来代指整个矢/张量, 撇标在指标上

相关笔记

矢量与张量代数见〈 高等代数 〉 流形上的张量分析见〈 微分几何 〉

(Last compiled on 2015/11/26 at 00:18:00)

矢量空间

scalar　vector　magnitude　direction

标量 / 数量 $\varphi\in\mathbb{R}$ 矢量 / 向量 $\vec{A}=A\vec{e_a}$ ① 几何定义: 有 大小 和 方向 且满足 平行四边形法则

n 维矢量空间 $V^n=\mathbb{R}^n$ 上定义了两种运算: ① 矢量 加法 对应分量相加减, 满足交换律, 结合律 ② 标和矢 数乘 每一分量与标量乘, 满足结合律, 左右分配律 (详见〈高代〉) ② 代数定义: 元素 $\vec{A}\in V^n$

V^n 的 基底 记为 $\{\vec{e_i}\}$, 则任一矢量可唯一地表示为 $\vec{A}=\sum_i a_i\vec{e_i}$, a_i 称为 $\vec{A}$ 在相应基底下的 坐标

平移变换

仿射空间 $P^n=\mathbb{R}^n$, 区别是其元素视为 点

没有定义点和点的加法, 定义了点和矢量的运算 $P^n\otimes V^n\to P^n$, $O\mapsto O'=O+\vec{A}$ (详见〈高代〉)

从而 V^n 中每个 $\vec{A}$ 都给出了 P^n 到自身的一个变换, 称为由 $\vec{A}$ 决定的 平行移动

P^n 中任一点加上 V^n 中任一组基底构成一个 坐标系 $\{O,\vec{e_i}\}$

free vector　fixed vector　sliding vector

自由矢量 没有作用点 **例** 力偶矩 固定矢量 固定作用点 **例** 位矢 $\vec{r}$, 速度 $\vec{v}$ 滑移矢量 固定作用线 **例** 作用在刚体上的力〈力学〉

内积

定义了 内积 的矢量空间称为 内积空间 (详见〈高代〉)

定义了对称正定内积的实矢量空间称为 欧氏空间 E^n → 有了 长度 和 角度 θ 的概念

inner / dot / scalar product　modulus

内积 / 点乘 / 数量积 $\vec{A}\cdot\vec{B}\equiv AB\cos\theta\overset{\text{正交基}}{=\!=\!=}\sum_i a_ib_i$, 矢量的 模 $A=|\vec{A}|\equiv\sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}\overset{\text{正交基}}{=\!=\!=}\sum_i a_i^2$

内积满足交换律, 分配律 (不存在结合律, 标量不能和矢量点乘叉乘)

转动变换

基底不唯一, 记变换后的基底为 $\{\vec{e_i}'\}$, 新坐标为 $a_i'=\sum_j R_{ij}a_j$, 则 $\vec{A}=\sum_j a_j\vec{e_j}=\sum_i a_i'\vec{e_i}'$ (被动变换, 物不动, 基动坐标变) 「代入 $=\sum_i\sum_j R_{ij}a_j\vec{e_i}'$ 对比」 $\vec{e_j}=\sum_i R_{ij}\vec{e_i}'$ (基底的新旧变换与坐标相反)

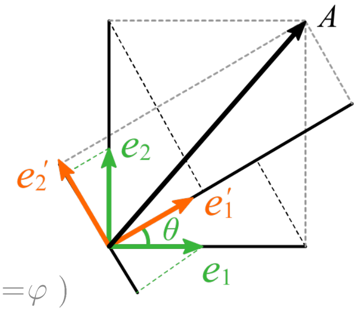
rotation

欧氏空间的等距变换为 空间转动 $R_{ij}=\vec{e_j}\cdot\vec{e_i}'=\cos\langle j,i'\rangle$

性质 R 是正交阵〈高代〉「$\sum_j R_{ij}R^{\mathsf{T}}_{jk}=\sum_j R_{ij}R_{kj}=\delta_{ik}\to\sum_i R_{ij}a_i'=\delta_{ii}a_j$」

→ 逆变换 $a_i=\sum_j R_{ji}a_j'$, $\vec{e_j}'=\sum_i R_{ji}\vec{e_i}$

$$\begin{bmatrix}a_1'\\a_2'\\a_3'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta&0\\-\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$$



covariant　contravariant

推论 协变 $R_{ij}=\dfrac{\partial a_i'}{\partial a_j}$, 逆变 $R_{ji}=\dfrac{\partial a_i}{\partial a_j'}$

③ 矢量的分析定义: 空间转动下分量按 $a_i'=\sum_j R_{ij}a_j$ 变换的量 (标量则是 $\varphi'=\varphi$)

例 证矢量的内积是标量

$(\vec{A}\cdot\vec{B})'=\sum_i a_i'b_i'=\sum_i\left(\sum_j R_{ij}a_j\right)\left(\sum_k R_{ik}b_k\right)=\sum_{ijk}R_{ij}R_{ik}a_jb_k=\sum_{jk}\delta_{jk}a_jb_k=\sum_k a_kb_k=\vec{A}\cdot\vec{B}$

矢积

(只有 3 维和 7 维空间能定义矢积, 分别用四元数和八元数乘法表示, 一般的乘法见〈外积〉)

(注: 矢量相除的结果为四元数)

vector / cross product

矢积 / 叉乘 / 向量积 $\vec{A}\times\vec{B}\equiv AB\sin\theta\,\vec{e_n}=\begin{vmatrix}\vec{e_x}&\vec{e_y}&\vec{e_z}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$, $\vec{e_n}$ 按 右手定则 → $|\vec{A}\times\vec{B}|=$ 平行四边形面积

(拉格朗日 1773)

性质 有反交换律, 左右分配律, 雅可比恒等式, 不满足结合律 **推论** 平行矢量叉乘为零, $\vec{A}\times\vec{A}=\vec{0}=0$

例 直线方程 $\vec{r}=\vec{r_0}+\lambda\vec{k}$ 又可写成 $\vec{r}\times\vec{k}=\vec{h}$, $\vec{h}$ 为常矢量

「$[\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})]_x=a_y(b_xc_y-b_yc_x)-a_z(b_zc_x-b_xc_z)=b_x(a_yc_y+a_zc_z)+a_xb_xc_x-c_x(a_yb_y+a_zb_z)-a_xb_xc_x$」

Lagrange's identity

拉格朗日恒等式 $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$ (结果在 $\vec{B},\vec{C}$ 面内, 中间者系数为正)

$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{A}(\vec{B}\cdot\vec{C})$ **推论** 当 $\vec{B}\times(\vec{A}\times\vec{C})=0$ 时上下两式相等

推论 $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D})=\vec{A}\cdot(\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{D}))=(\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D})-(\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{C})$

triple / mixed product
三重积 / 混合积 $[\vec A,\vec B,\vec C]\equiv(\vec A\times\vec B)\cdot\vec C=(\vec B\times\vec C)\cdot\vec A=(\vec C\times\vec A)\cdot\vec B=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}=\pm$平行六面体体积

例 洛伦兹力 $q\vec v\times\vec B=m\dot{\vec v}$ 两边点乘 $\vec v$ 得 $0=m\dot{\vec v}\cdot\vec v=m\frac12\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}(\vec v\cdot\vec v)=m\frac12\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}(|v|^2)$ 得证速度大小不变

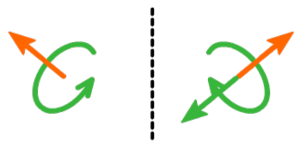
反射变换

polar vector
极 / 真矢量 空间反射变换下, 镜面垂直分量反向, 镜面平行分量不变 **例** $\vec r$, $\vec p$, $\vec E$, 电矩 $\vec p$

axial / pseudo vector
轴 / 赝矢量 空间反射变换下, 镜面垂直分量不变, 镜面平行分量反向 **性质** 真矢量叉乘得赝矢量

例 $\vec\omega$, $\vec M=\vec r\times\vec F$, $\vec L=\vec r\times\vec p$, $\vec B\propto I\vec r\times\vec e_r$, 磁矩 $\vec m$, 涡度 $\vec\zeta=\nabla\times\vec B$

pseudo scalar
「变换时出个负号」矢量点乘赝矢量得 **赝标量** **例** 磁通量 Φ_B, 三重积
→ 赝标量乘矢量得赝矢量



直角坐标系

rectangular　coordinate　basis vector
直角坐标系 下点的 **坐标** 记为 (x,y,z) , **基矢** 记为 $\{\vec e_x,\vec e_y,\vec e_z\}$ **右手系** $\vec e_x\times\vec e_y=\vec e_z$, 矢量 $\vec A=\sum^{xyz}a_x\vec e_x$

metric
度规 $g_{ij}\equiv\vec e_i\cdot\vec e_j=\sum^{xyz}(\vec e_i\cdot\vec e_x)(\vec e_x\cdot\vec e_j)=\sum^{xyz}\frac{\partial x}{\partial u_i}\frac{\partial x}{\partial u_j}$, 一般基底下的 **内积** 为 $\vec A\cdot\vec B=\sum_{ij}g_{ij}a_ib_j$

性质 欧氏空间 g_{ij} 是正定对称矩阵, 存在基底使 $g_{ij}=\delta_{ij}$「施密特正交化」(不唯一, 差个转动变换)

曲线坐标系

curvilinear coordinate system　coordinate surface　coordinate curve
曲线坐标系 下点的 **坐标** 记为 (u_1,u_2,u_3) , u_i=常数 称为 **坐标面** , 曲面的交线称为 **坐标线**

坐标线的单位切向矢量记为 $\{\vec e_i\}$ (不一定是长度的量纲) , 指向 u_i 增加的方向, 构成 **局部标架**

假设 坐标变换函数 $x=x(u_1,u_2,u_3)$ (y,z 同理) 单值连续可微 → 存在逆变换 $(J\neq0)$ $u_i=u_i(x,y,z)$

有 $\mathrm d\vec r=\sum\frac{\partial\vec r}{\partial u_i}\mathrm du_i$, 定义 **协变基矢** $\vec g_i=\frac{\partial\vec r}{\partial u_i}$ (有长度的量纲, 不一定归一)

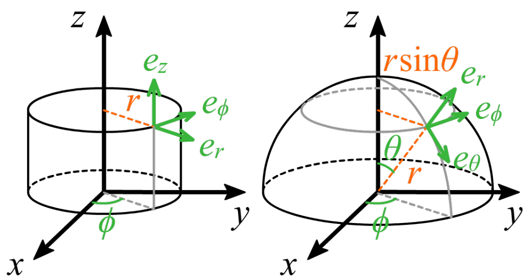
cylindrical
柱系 $\begin{cases}x=r\cos\phi\\y=r\sin\phi\\z=z\end{cases}$ $\begin{cases}\vec e_x=\cos\phi\,\vec e_r-\sin\phi\,\vec e_\phi\\\vec e_y=\sin\phi\,\vec e_r+\cos\phi\,\vec e_\phi\\\vec e_z=\vec e_z\end{cases}$ $\begin{cases}r=\sqrt{x^2+y^2}\\\phi=\arctan(y/x)\\z=z\end{cases}$ $\begin{cases}\vec e_r=\cos\phi\,\vec e_x+\sin\phi\,\vec e_y\\\vec e_\phi=-\sin\phi\,\vec e_x+\cos\phi\,\vec e_y\\\vec e_z=\vec e_z\end{cases}$ } polar **极系**

radial　angular　azimuthal angle　polar angle
径向 e_r **横向** e_ϕ **方位角** (经度) ϕ (逆时针为正向) **极角** (余纬度) θ

spherical
球系 $\begin{cases}x=r\sin\theta\cos\phi\\y=r\sin\theta\sin\phi\\z=r\cos\theta\end{cases}$ $\begin{cases}\vec e_x=\cos\phi(\sin\theta\,\vec e_r+\cos\theta\,\vec e_\theta)-\sin\phi\,\vec e_\phi\\\vec e_y=\sin\phi(\sin\theta\,\vec e_r+\cos\theta\,\vec e_\theta)+\cos\phi\,\vec e_\phi\\\vec e_z=\cos\theta\,\vec e_r-\sin\theta\,\vec e_\theta\end{cases}$

$\begin{cases}r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\\\theta=\arctan(\sqrt{x^2+y^2}/z)\\\phi=\arctan(y/x)\end{cases}$ $\begin{cases}\vec e_r=\sin\theta(\cos\phi\,\vec e_x+\sin\phi\,\vec e_y)+\cos\theta\,\vec e_z\\\vec e_\theta=\cos\theta(\cos\phi\,\vec e_x+\sin\phi\,\vec e_y)-\sin\theta\,\vec e_z\\\vec e_\phi=-\sin\phi\,\vec e_x+\cos\phi\,\vec e_y\end{cases}$

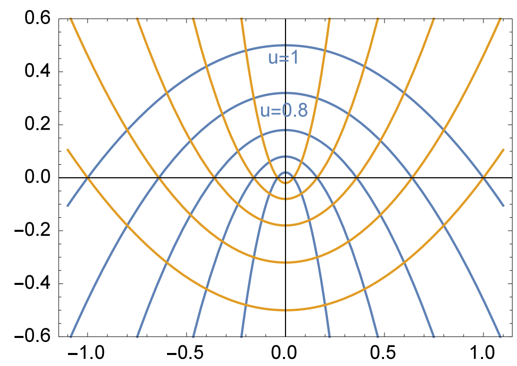
局部标架



parabolic
抛物线系 $x=uv\cos\phi$, $y=uv\sin\phi$, $z=\frac12(u^2-v^2)$

正交曲线系

坐标系	u_1	u_2	u_3	h_1	h_2	h_3
直角系	$x\in\mathbb R$	$y\in\mathbb R$	$z\in\mathbb R$	1	1	1
柱系	$0\leqslant r<\infty$	$0\leqslant\phi<2\pi$	$z\in\mathbb R$	1	r	1
球系	$0\leqslant r<\infty$	$0\leqslant\theta<\pi$	$0\leqslant\phi<2\pi$	1	r	$r\sin\theta$
抛物线	u	v	z	$\sqrt{u^2+v^2}$	$\sqrt{u^2+v^2}$	uv



orthogonal curvilinear coordinates

正交曲线坐标系 过任一点的各坐标线相互垂直 **正交条件** $g_{ij}=0\ (i\neq j)$ **右手系惯例** $\vec{e_1}\times\vec{e_2}=\vec{e_3}$

Lamé coefficient

定义 **拉梅系数** $h_i\equiv\sqrt{g_{ii}}$，则 $h_i=|\vec{g_i}|$，单位基矢 $\vec{e_i}=\vec{g_i}/h_i$

$\rightarrow$ **线元** $\mathrm{d}\vec{l}=\sum h_i\vec{e_i}\,\mathrm{d}u_i$，沿基矢的分量 $\mathrm{d}l_i=h_i\,\mathrm{d}u_i$，模长 $\mathrm{d}l^2=\sum\sum g_{ij}\,\mathrm{d}u_i\,\mathrm{d}u_j\overset{\text{正交}}{=\!=}\sum h_i^2\,\mathrm{d}u_i^2$

u_1 面上的 **面元** $\mathrm{d}S=h_2h_3\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_3$ **体积元** $\mathrm{d}V=J\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_3$，雅可比行列式 $J=h_1h_2h_3=\sqrt{|g|}\neq0$

[行列式可视作其行矢量或列矢量的三重积 $J=\left|\dfrac{\partial x_i}{\partial u_j}\right|=\left[\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u_1},\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u_2},\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u_3}\right]=[h_1\vec{e_1},h_2\vec{e_2},h_3\vec{e_3}]$] 〈 微积分 〉

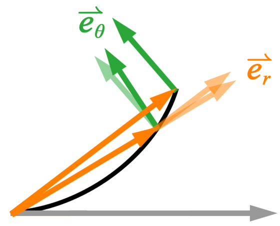
矢函数微分

设 **位矢** 函数 $\vec{r}=\vec{r}(t)$，**极限** **连续** **导数** **偏导数** 等的定义均和〈 微积分 〉类似

导矢 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\equiv\dot{\vec{r}}=\lim\limits_{\Delta t\to0}\dfrac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}$ 是一个矢量 **定理** 其方向沿 $\vec{r}(t)$ **矢端曲线** 的切线〈 微几 〉

矢量加减, 数乘的导数公式均同理, 内积, 矢积, 混合积的莱布尼茨法则亦同理, 注意顺序勿变

直角系 $\vec{r}=x\vec{e_x}+y\vec{e_y}+z\vec{e_z}$ **速度** $\vec{v}\equiv\dot{\vec{r}}=\dot{x}\vec{e_x}+\dot{y}\vec{e_y}+\dot{z}\vec{e_z}$ **加速度** $\vec{a}\equiv\dot{\vec{v}}=\ddot{\vec{r}}=\ddot{x}\vec{e_x}+\ddot{y}\vec{e_y}+\ddot{z}\vec{e_z}$〈 力学 〉



微分 $\mathrm{d}\vec{r}=\mathrm{d}x\,\vec{e_x}+\mathrm{d}y\,\vec{e_y}+\mathrm{d}z\,\vec{e_z}$，$|\mathrm{d}\vec{r}|^2=(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2$

弧长 $\mathrm{d}s\equiv\pm|\mathrm{d}\vec{r}|$ (相对于正方向) **速率** $v\equiv|\vec{v}|=\dot{s}$

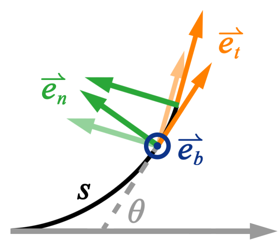
极系 $\vec{r}=r\cos\phi\,\vec{e_x}+r\sin\phi\,\vec{e_y}=r\vec{e_r}$ **径向** $\vec{e_r}=\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial r}=\cos\phi\,\vec{e_x}+\sin\phi\,\vec{e_y}$，

$\dot{\vec{e_r}}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{e_r}}{\mathrm{d}\phi}\dot{\phi}=\dot{\phi}\vec{e_\phi}$ **横向** $\vec{e_\phi}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}=-\sin\phi\,\vec{e_x}+\cos\phi\,\vec{e_y}$，$\dot{\vec{e_\phi}}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{e_\phi}}{\mathrm{d}\phi}\dot{\phi}=-\dot{\phi}\vec{e_r}$

$\vec{v}=\left[\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial r}\dot{r}+\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}\dot{\phi}\text{ 或 }\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\vec{e_r})\right]=\dot{r}\vec{e_r}+r\dot{\phi}\vec{e_\phi}$，$\vec{a}=(\ddot{r}-r\dot{\phi}^2)\,\vec{e_r}+(2\dot{r}\dot{\phi}+r\ddot{\phi})\,\vec{e_\phi}$ 或 $a_\phi=\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\phi})$

trajectory　natural

参数方程消去 t 即为质点的 **轨迹**，当轨迹已知时选用 **自然坐标系** 较方便



arc length　tangential　normal

弧长 $s=s(t)$, $\vec{r}=\vec{r}(s)$ **切向** $\vec{e_t}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}$，$\dfrac{\mathrm{d}\vec{e_t}}{\mathrm{d}\theta}=\vec{e_n}$ **法向** (指向曲线凹侧)

$\dfrac{\mathrm{d}\vec{e_n}}{\mathrm{d}\theta}=-\vec{e_t}$，$\dot{\vec{e_t}}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{e_t}}{\mathrm{d}\theta}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\dot{s}=\vec{e_n}\dfrac{v}{\rho}$　$\vec{v}=\dot{s}\vec{e_t}$，$\vec{a}=\ddot{s}\vec{e_t}+\dfrac{v^2}{\rho}\vec{e_n}$，$\tan\theta=\dfrac{a_n}{a_t}$

curvature radius

曲率半径 $\rho=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}=\dfrac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$〈 微几 〉 **常用** $a_t=\dot{v}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}v$

柱系 $\vec{e_r},\vec{e_\theta}$ 同极系，$\vec{e_z}$ 同直角系 **球系** $\vec{r}=r\vec{e_r}$，$\vec{v}=\dot{r}\vec{e_r}+r\dot{\theta}\vec{e_\theta}+r\dot{\phi}\sin\theta\,\vec{e_\phi}$

$\vec{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\sin^2\theta\dot{\phi}^2)\vec{e_r}+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}-r\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2)\vec{e_\theta}+(r\ddot{\phi}\sin\theta+2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta+2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta)\vec{e_\phi}$

矢函数积分

不定积分 $\vec{r}=\int\vec{v}(t)\,\mathrm{d}t+\vec{r_0}$，基本性质均成立 $\int(\varphi\vec{A}\pm\vec{k}\cdot\vec{B})\,\mathrm{d}t=\varphi\int\vec{A}\,\mathrm{d}t\pm\vec{k}\cdot\int\vec{B}\,\mathrm{d}t$，$\vec{k}$ 为常矢量

定积分 $\int_{t_0}^{t}\vec{v}(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)$ **分部积分** $\int\varphi\vec{v}\,\mathrm{d}t=\varphi\vec{r}-\int\dot{\varphi}\vec{r}\,\mathrm{d}t$，内积, 矢积公式同理

矢量场

(时变) **标量场** $\varphi(x,y,z,t)$ **矢量场** $\vec{A}(x,y,z,t)=\sum\limits^{xyz}a_x(x,y,z,t)\,\vec{e_x}$ **静态场** 不含时

flux　source　sink

通量 矢量流过闭合曲面的分量的面积分 $\Phi\equiv\oiint_S a_\perp\,\mathrm{d}S$, 表示有 **源** 或 **汇** (流入和流出的不一样多)

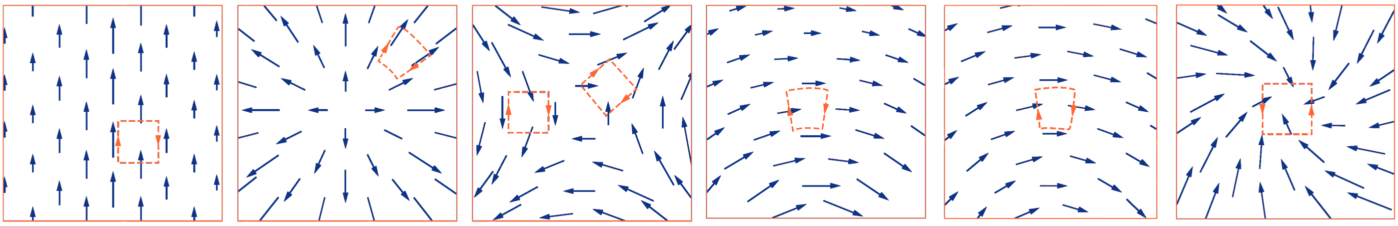
circulation　vortex

环量 矢量沿闭合环路的分量的线积分 $\Gamma\equiv\oint_L a_{/\!/}\,\mathrm{d}l$, 表示有 **涡旋** (流体自转)

无散场 $\nabla\cdot\vec{B}=0\Leftrightarrow\vec{B}=\nabla\times\vec{A}\Leftrightarrow\iint_S\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$ 与所选面无关 $\Leftrightarrow\oiint=0$

连续性方程 $\partial_t\rho+\nabla\cdot(\rho\vec{v})=0$ **不可压缩流体** ρ 为常数 $\rightarrow\nabla\cdot\vec{v}=0$〈 流力 〉

无旋场 / 势场 $\nabla\times\vec{E}=0\Leftrightarrow\vec{E}=-\nabla\varphi\Leftrightarrow\int_a^b\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$ 与路径无关 $\Leftrightarrow\oint=0$



无散有旋　有散无旋　无散无旋　无散无旋　无散有旋　有散有旋

harmonic field　　Laplace's equation

谐和场 无散无旋 $\rightarrow$ 势函数满足 **拉普拉斯方程** $\nabla^2\varphi=0$ **例** 常矢量场无散无旋

一般矢量场总可表示为无旋场和无散场之和 $\vec{F}=-\nabla\varphi+\nabla\times\vec{A}$ (分解不唯一, 可相差任意的谐和场)

Helmholtz theorem

加边界条件 $\rightarrow$ **亥姆霍兹定理** 若场在无限远处(比 $\frac{1}{r^2}$ 更快地) 趋于零, 则场可由其散度和旋度唯一确定

「拉方程无局域极值, 不存在无限远趋于零的非零谐和场」

矢量场微分

nabla / del operator

矢微算符 / 劈形算符 ∇ 或 $\vec{\nabla}$ (视作矢量, 向右作用) **例**「拉恒」$(\nabla\times\vec{A})\times\vec{A}=(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{A}-\frac{1}{2}\nabla(A^2)$

$\mathrm{d}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathrm{d}z=[(\vec{e_x}\partial_x+\vec{e_y}\partial_y+\vec{e_z}\partial_z)\varphi]\cdot(\mathrm{d}x\vec{e_x}+\mathrm{d}y\vec{e_y}+\mathrm{d}z\vec{e_z})\equiv\nabla\varphi\cdot\mathrm{d}\vec{l}\rightarrow\nabla\varphi\perp\mathrm{d}\vec{l}\,\big|_{\mathrm{d}\varphi=0}$

gradient

梯度 $\nabla\varphi$ 方向为该点处 φ 增速最大的方向 (垂直于等值面), 大小等于在这个方向上的斜率 **例** $\nabla r=\vec{e_r}$

梯度为零可能是极大点(山顶), 极小点(山谷), 鞍点(某方向极大, 另方向极小), 肩点(升或降的平坦处)

$$\nabla\cdot\vec{A}=(\vec{e_x}\partial_x+\vec{e_y}\partial_y+\vec{e_z}\partial_z)\cdot(a_x\vec{e_x}+a_y\vec{e_y}+a_z\vec{e_z})=\partial_x a_x+\partial_y a_y+\partial_z a_z$$ (结果为标量场)

divergence

散度 $\nabla\cdot\vec{A}$ 无限小闭合曲面围成空间中的通量除以围成空间体积, 描述矢量场中某点处是否有源或汇

$$\nabla\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z}\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}$$ (结果为矢量场)

例 流体整体以 ω 旋转, $\vec{v}=\omega(-y\vec{e_x}+x\vec{e_y})$, 则 $\nabla\times\vec{v}=2\omega\vec{e_z}$

流体绕轴旋转 $\omega\propto\frac{1}{r}$, 则 $\nabla\times\vec{v}=0$

curl / rotation

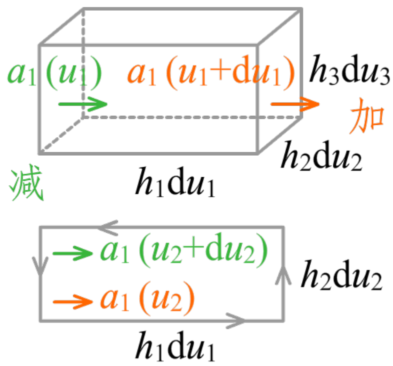
旋度 $\nabla\times\vec{A}$ 无限小闭合曲线围成面积中的环量除以围成范围面积, 描述矢量场中某点处是否有涡旋

分量形式

$$\nabla\varphi=\left(\frac{\vec{e_1}}{h_1}\partial_1+\frac{\vec{e_2}}{h_2}\partial_2+\frac{\vec{e_3}}{h_3}\partial_3\right)\varphi$$ 「$\mathrm{d}\vec{l}=\sum h_i\vec{e_i}\,\mathrm{d}u_i$」

$$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\Big[\partial_1(h_2h_3a_1)+\partial_2(h_1h_3a_2)+\partial_3(h_1h_2a_3)\Big]$$ 「$=\lim\limits_{V\to0}\frac{1}{V}\oiint\vec{A}\cdot\vec{S}$」

$$\nabla\times\vec{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix}h_1\vec{e_1} & h_2\vec{e_2} & h_3\vec{e_3}\\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3\\ h_1a_1 & h_2a_2 & h_3a_3\end{vmatrix}$$ 「$=\vec{e_n}\lim\limits_{S\to0}\frac{1}{S}\oint\vec{A}\cdot\vec{l}$」



(第 2 行的偏导是作用在第 3 行整体的, 不可化简)

例 柱系 $\nabla\cdot\vec{A}=\frac{1}{r}\partial_r(ra_r)+\frac{1}{r}\partial_\phi a_\phi+\partial_z a_z$　球系 $\nabla\cdot\vec{A}=\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2a_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta a_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi a_\phi$

推论 中心场 $\nabla f(r)=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\vec{e_r}\rightarrow\nabla\frac{1}{r}=-\frac{\vec{e_r}}{r^2}$, $\nabla\cdot\vec{A}(r)=\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2A_r)\rightarrow\nabla\cdot\vec{r}=3$, $\nabla\cdot\vec{e_r}=\frac{2}{r}$, $\nabla\cdot\left(\frac{\vec{e_r}}{r^2}\right)=-\nabla^2\frac{1}{r}=4\pi\delta(\vec{r})$「奇点要单独积分来求 $\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}\frac{1}{r^2}r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$」, $\nabla\times f(r)\vec{e_r}=0$ (中心场必无旋)

积的微分

矢量场加减数乘的微分公式简易, 标量场的公式和函数同理 $\nabla(fg)=f\nabla g+g\nabla f$, $\nabla\left(\frac{f}{g}\right)=(g\nabla f-f\nabla g)/g^2$

① 散度公式「$\partial_x(fa_x)=\frac{\partial f}{\partial x}a_x+f\frac{\partial a_x}{\partial x}$」$\nabla\cdot(f\vec{A})=(\nabla f)\cdot\vec{A}+f(\nabla\cdot\vec{A})\rightarrow\nabla\cdot\left(\frac{\vec{A}}{f}\right)=\big(f(\nabla\cdot\vec{A})-(\nabla f)\cdot\vec{A}\big)/f^2$

「$\partial_x(a_yb_z-a_zb_y)=(b_z\partial_x a_y-b_y\partial_x a_z)-(a_z\partial_x b_y-a_y\partial_x b_z)$」$\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A})-\vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B})$

② 旋度公式 $\nabla\times(f\vec{A})=(\nabla f)\times\vec{A}+f(\nabla\times\vec{A})$, $\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{A}(\nabla\cdot\vec{B})-\vec{B}(\nabla\cdot\vec{A})+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}-(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$

「$\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})=\vec{A}\times(\nabla_B\times\vec{B})\overset{\text{拉恒}}{=\!=}\nabla_B(\vec{A}\cdot\vec{B})-\vec{B}(\vec{A}\cdot\nabla_B)$, 而 $\vec{B}(\vec{A}\cdot\nabla_B)=(\vec{A}\cdot\nabla_B)\vec{B}=(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$」

③ 梯度公式 $\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B})=(\nabla_A+\nabla_B)(\vec{A}\cdot\vec{B})=\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})+\vec{B}\times(\nabla\times\vec{A})+(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}$

注 $(\vec{A}\cdot\nabla)$ 整体视为一个算符, $\vec{F}=(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$ 是指 $F_x=\vec{A}\cdot\nabla B_x$, y,z 分量同理

$\rightarrow$ 若 $\vec{k}$ 为常矢量, 则 $(\vec{k}\cdot\nabla)\vec{r}=\vec{k}\rightarrow\nabla(\vec{k}\cdot\vec{r})=\vec{k}\rightarrow\ \nabla(\vec{k}\cdot\vec{e_r})=(\vec{k}\cdot\nabla)\vec{e_r}=\frac{1}{r}[\vec{k}-\vec{e_r}(\vec{k}\cdot\vec{e_r})]=\frac{1}{r}\vec{k_\perp}$

$\rightarrow\nabla\left(\vec{k}\cdot\left(\frac{1}{r}\right)\right)=-\nabla\left(\frac{\vec{k}\cdot\vec{e_r}}{r^2}\right)=\frac{1}{r^3}[2(\vec{k}\cdot\vec{e_r})-r\nabla(\vec{k}\cdot\vec{e_r})]=\frac{1}{r^3}[3(\vec{k}\cdot\vec{e_r})\vec{e_r}-\vec{k}]\ \rightarrow\nabla\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r^3}(3\vec{e_r}\vec{e_r}-\vec{I})$

$u(x,y,z)$ 连续可微, 则复合函数求导 $\nabla f(u)=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\nabla u$, $\nabla\cdot\vec{A}(u)=\nabla u\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}u}$, $\nabla\times\vec{A}(u)=\nabla u\times\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}u}$

例 $\vec{k},\vec{E}$ 为常矢量 $\rightarrow\nabla\cdot[\vec{E}\sin(\vec{k}\cdot\vec{r})]=\nabla\sin(\vec{k}\cdot\vec{r})\cdot\vec{E}=\vec{E}\cdot\nabla(\vec{k}\cdot\vec{r})\cos(\vec{k}\cdot\vec{r})=\vec{E}\cdot\vec{k}\cos(\vec{k}\cdot\vec{r})$

$\nabla\times[\vec{E}\sin(\vec{k}\cdot\vec{r})]=\nabla\sin(\vec{k}\cdot\vec{r})\times\vec{E}=\vec{k}\times\vec{E}\cos(\vec{k}\cdot\vec{r})$

二阶微分

① 梯度的散度 $\nabla\cdot(\nabla\varphi)\equiv\nabla^2\varphi$ (或记作 Δ, 不推荐) 拉普拉斯算符 (Laplace operator) $\nabla^2=\nabla\cdot\nabla$ (可视作标量)

对标量场 $\nabla^2\varphi=(\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2)\varphi$ 对矢量场 (直角系) $(\nabla^2\vec{A})_x=\nabla^2A_x$, y,z 分量同理

正交曲线系下 $\nabla^2\varphi=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\partial_1\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\partial_1\right)+\partial_2\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\partial_2\right)+\partial_3\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\partial_3\right)\right]$

例 柱系 $\nabla^2=\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r)+\frac{1}{r^2}\partial_\phi^2+\partial_z^2$ 球系 $\nabla^2=\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\,\partial_\theta)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\phi^2$

注 算符恒等式 (需作用在连续可微函数上才有意义) $\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r)\equiv\frac{1}{r}\partial_r^2r$「都等于 $\frac{2}{r}\partial_r+\partial_r^2$」

② 梯度的旋度 $\nabla\times(\nabla\varphi)=0$「$\partial_x(\partial_y\varphi)=\partial_y(\partial_x\varphi)$」 ④ 旋度的散度 $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})=0$「$\partial_x(\partial_ya_z)=\partial_y(\partial_xa_z)$」

③ 散度的梯度 $\nabla(\nabla\cdot\vec{A})\neq\nabla^2\vec{A}$, 很少用到 ⑤ 旋度的旋度 $\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}$「拉恒」

推论 $\nabla\times(\nabla^2\vec{A})=-\nabla\times(\nabla\times(\nabla\times\vec{A}))=\nabla^2(\nabla\times\vec{A})$ (旋度算符和拉普拉斯对易)

矢量场积分

矢场线积分 $\int_L\varphi\,\mathrm{d}\vec{r}$ 和 $\int_L\vec{A}\times\mathrm{d}\vec{r}$ 型的积分结果是个矢量, 计算时先对积分路径参数化再算各分量

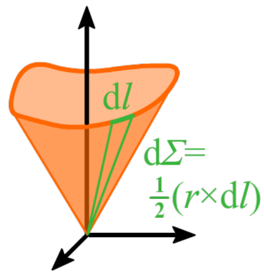
例 沿 $y=x^2$ 积分, 设 $x=t$, $y=t^2$, 则 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x+y^2)\,\mathrm{d}\vec{r}=\int_0^1(t+t^4)(1,2t)\,\mathrm{d}t=(0.7,1)$

例 沿 $y=\sin x$ 积分, 设 $x=t$, $y=\sin t$, 则 $\int_{(0,0,0)}^{(\pi,0,0)}(y,x,0)\times\mathrm{d}\vec{r}=\vec{e_z}\int_0^\pi(\sin t\cos t-t)\,\mathrm{d}t=-\frac{\pi^2}{2}\vec{e_z}$

矢场面积分 $\iint_S\varphi\,\mathrm{d}\vec{S}$ 和 $\iint_S\vec{A}\times\mathrm{d}\vec{S}$ 型的积分结果是个矢量

矢量面积 $\vec{\Sigma}\equiv\iint_S\mathrm{d}\vec{S}$ $(=\iint_S\vec{e_n}\mathrm{d}S$, $\vec{e_n}$ 为外法线方向) **推论** $\vec{\Sigma}=\frac{1}{2}\oint\vec{r}\times\mathrm{d}\vec{l}$

(若 S 为平面, 则 $|\vec{\Sigma}|$ 等于标量面积)



例 半球面 $\vec{\Sigma}=\iint\cos\theta(r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi)\vec{e_z}=2\pi r^2\vec{e_z}\int_0^{\pi/2}\sin\theta(\mathrm{d}\sin\theta)=\pi r^2\vec{e_z}$, 球面为零

「梯度体积分公式 $\varphi=1$」$\rightarrow$ 任何闭合曲面 $\vec{\Sigma}=0\rightarrow$ 有相同边界的曲面的 $\vec{\Sigma}$ 相同

设 $\vec{k}$ 为常矢量「梯度线积分公式 $\varphi\rightarrow\vec{k}\cdot\vec{r}$」$\rightarrow\oint(\vec{k}\cdot\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{l}=\vec{\Sigma}\times\vec{k}$

积分定理

〈微积分〉 微积分基本定理 $\int_a^bf'\,\mathrm{d}x=f(b)-f(a)\rightarrow$ 梯度定理 $\int_a^b(\nabla\varphi)\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\varphi(b)-\varphi(a)$ (与路径无关)

高斯定理 散度体积分 $\iiint_V\nabla\cdot\vec{A}\,\mathrm{d}V=\oiint_S\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$ 斯托克斯定理 旋度线积分 $\iint_S\nabla\times\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\oint_L\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$

「高斯定理中 $\vec{A}\rightarrow\varphi\vec{k}$, $\vec{k}$ 为常矢量」梯度体积分 $\iiint_V\nabla\varphi\,\mathrm{d}V=\oiint_S\varphi\,\mathrm{d}\vec{S}$

「高斯定理 $\vec{A}\rightarrow\vec{A}\times\vec{k}$」旋度体积分 $\iiint_V\nabla\times\vec{A}\,\mathrm{d}V=\oiint_S\mathrm{d}\vec{S}\times\vec{A}$

「斯托克斯定理 $\vec{A}\rightarrow\varphi\vec{k}$」梯度线积分 $\iint_S\mathrm{d}\vec{S}\times(\nabla\varphi)=\oint_L\varphi\,\mathrm{d}\vec{l}$

(φ,ψ 在有界的 V 中有连续二阶偏导, 在 V 的边界 S 上有连续一阶偏导)

「高斯定理 $\vec{A}\rightarrow\psi\nabla\varphi$」第一标量格林定理 $\oiint_S\psi\nabla\varphi\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\iiint_V(\nabla\psi\cdot\nabla\varphi+\psi\nabla^2\varphi)\,\mathrm{d}V$ (亦可写成 $\nabla\cdot(\psi\nabla\varphi)$)

$\rightarrow$ 第二标量格林定理 $\oiint_S(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n})\,\mathrm{d}S=\iiint_V(\psi\nabla^2\varphi-\varphi\nabla^2\psi)\,\mathrm{d}V$ $(\nabla\varphi\cdot\vec{e_n}\mathrm{d}S=\frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}S$, n 为外法线向)

矢量格林定理 $\oiint_S(\vec{A}\times\nabla\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\iiint_V[(\nabla\times\vec{A})\cdot(\nabla\times\vec{B})-\vec{A}\cdot\nabla\times\nabla\times\vec{B}]\,\mathrm{d}V$

$\rightarrow\oiint_S(\vec{A}\times\nabla\times\vec{B}-\vec{B}\times\nabla\times\vec{A})\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\iiint_V(\vec{B}\cdot\nabla\times\nabla\times\vec{A}-\vec{A}\cdot\nabla\times\nabla\times\vec{B})\,\mathrm{d}V$

函数和另一个函数导数乘积的积分可以用 分部积分

「$\nabla\cdot(\varphi\vec{A})=\varphi(\nabla\cdot\vec{A})+\vec{A}\cdot(\nabla\varphi)$」 $\iiint_V\varphi(\nabla\cdot\vec{A})\,\mathrm{d}V=\oiint_S\varphi\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}-\iiint_V\vec{A}\cdot(\nabla\varphi)\,\mathrm{d}V$

常用 $\iint_S\varphi(\nabla\times\vec{A})\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\iint_S[\vec{A}\times(\nabla\varphi)]\cdot\vec{S}+\oint_L\varphi\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$

$\iiint_V\vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A})\,\mathrm{d}V=\iiint_V\vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B})\,\mathrm{d}V+\oiint_S(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{S}$

指标表示

suffix notation 指标表示 $\vec{A}=\sum_i a_i\vec{e_i}$ summation convention 求和约定 (爱因斯坦) 某项中有指标变量成对出现，表示对该指标的所有可能值求和，省略 $\sum$ 号 (物理惯例 i,j 表示求和 3 个，μ,ν 表示求和 4 个)

dummy index 哑指标 作和的指标对，可替换为其它相同取值范围的字母 free index 自由指标 不作和的指标，要替换必须全部替换 例 证明 $\mathrm{tr}(AB)=A_{jk}B_{kj}\xlongequal{\text{换符号}}A_{kj}B_{jk}\xlongequal{\text{标量可换序}}B_{jk}A_{kj}=\mathrm{tr}(BA)$

内积的指标表示 $\vec{A}\cdot\vec{B}=a_ib_i=\delta_{ij}a_ib_j$ 注 哑指标不能重复，属于不同内积的要改用不同指标符号区分

例 $u_i+a_jb_jc_i=a_ja_jb_kc_ka_i$ 表示 $\vec{U}+(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}=|A|^2(\vec{B}\cdot\vec{C})\vec{A}$

全微分 $(\mathrm{d}\varphi)_i=\mathrm{d}x_j\,\partial_j\varphi_i$ 梯度 $(\nabla\varphi)_i=\partial_i$ 例 $(\nabla r)_i=\partial_i\sqrt{x_jx_j}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_jx_j}}\partial_i(x_jx_j)=\dfrac{1}{2r}2x_j\,\partial_ix_j=\dfrac{1}{r}x_j\delta_{ij}=\dfrac{x_i}{r}$

散度 $\nabla\cdot\vec{A}=\partial_ia_i$ 例 $\nabla\cdot\vec{r}=\partial_ix_i=\delta_{ii}=3$ 拉普拉斯 $\nabla^2\varphi=\partial_i^2\varphi$ 散度的梯度 $[\nabla(\nabla\cdot\vec{A})]_i=\partial_i\,\partial_ja_j$

符号

Kronecker symbol 克罗内克符号 $\delta_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ (行 $i=1,2,3$ 列 $j=1,2,3$)

性质 $\delta_{ij}=\delta_{ji}$，$\delta_{ii}=3$，$\delta_{ij}a_i=a_j$，$\delta_{ij}a_j=a_i$ (故又称 替换张量 substitution tensor)，$\delta_{ij}\delta_{jk}=\delta_{ik}$

Levi-Civita symbol 列维–奇维塔符号 $\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}0 & (\text{有相同})\\ 1 & (\text{偶排列})\\ -1 & (\text{奇排列})\end{cases}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}_{i=1}\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}_{i=2}\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}_{i=3}$ (行 j 列 k)

(又称 交错张量 alternating tensor) 性质 $\varepsilon_{ijk}=\varepsilon_{jki}=\varepsilon_{kij}=-\varepsilon_{jik}$，$\varepsilon_{iik}=0$，$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}=\text{所有项平方和}=6$

矢积指标表示 $(\vec{A}\times\vec{B})_i=\varepsilon_{ijk}a_jb_k$ 三重积 $[\vec{A},\vec{B},\vec{C}]_i=a_i(\vec{B}\times\vec{C})_i=\varepsilon_{ijk}a_ib_jc_k$

旋度 $(\nabla\times\vec{A})_i=\varepsilon_{ijk}\,\partial_ja_k$ 例 $(\nabla\times\vec{r})_i=\varepsilon_{ijk}\,\partial_jx_k=\varepsilon_{ijk}\delta_{jk}=0$ 例 证拉格朗日恒等式 $(\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}))_i=\varepsilon_{ijk}a_j(\vec{B}\times\vec{C})_k=\varepsilon_{ijk}a_j\varepsilon_{klm}b_lc_m=(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})a_jb_lc_m=a_mb_ic_m-a_jb_jc_i=b_i(\vec{A}\cdot\vec{C})_i-c_i(\vec{A}\cdot\vec{B})_i$

广义列奇符号 $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta\ldots}$，有相同 $=0$，偶排列 $=1$，奇排列 $=-1$

例 2 阶 $\varepsilon_{ij}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$，$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn}=\begin{vmatrix}\delta_{im}&\delta_{in}\\\delta_{jm}&\delta_{jn}\end{vmatrix}\to\varepsilon_{ij}\varepsilon_{in}=\delta_{jn}\to\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}=3$ (4 阶见〈伪欧〉)

广义克罗内克符号 $\delta^{ijk}_{lmn}=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}=\begin{vmatrix}\delta_{il}&\delta_{im}&\delta_{in}\\\delta_{jl}&\delta_{jm}&\delta_{jn}\\\delta_{kl}&\delta_{km}&\delta_{kn}\end{vmatrix}$ 当 i,j,k 和 l,m,n 都顺序或逆序时 $=1$ 一顺一逆时 $=-1$，其它非序排列 $=0$

(6 阶张量)

「缩并」 $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn}=\delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{km}\equiv\delta^{jk}_{mn}\to\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn}=2\delta_{kn}\to\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}=3!$

并矢

dyadic 并矢 两矢量并列 (省略张量积 $\otimes$ 符号) $\vec{A}\vec{B}=a_ib_j\vec{e_i}\vec{e_j}$，其中 $\vec{e_i}\vec{e_j}$ 称为 并矢基元 (共 9 个)

代表对矢量的线性映射 $\vec{A}\vec{B}\cdot\vec{r}=\vec{A}(\vec{B}\cdot\vec{r})$，$\vec{r}\cdot\vec{A}\vec{B}=(\vec{r}\cdot\vec{A})\vec{B}$ (只作用于最近邻) 例 $\vec{e_x}\cdot\vec{A}\vec{B}\cdot\vec{e_y}=a_xb_y$

性质 并矢运算以及数乘，满足结合律，分配律，$\vec{A}\vec{B}\neq\vec{B}\vec{A}$ 定义 并矢的转置 $(\vec{A}\vec{B})^{\mathsf{T}}=\vec{B}\vec{A}$

单位并矢 $\overleftrightarrow{I}=\delta_{ij}\vec{e_i}\vec{e_j}$ 性质 $\overleftrightarrow{I}\cdot\vec{A}=\vec{A}\cdot\overleftrightarrow{I}=\vec{A}$，$\overleftrightarrow{I}\cdot\overleftrightarrow{T}=\overleftrightarrow{T}\cdot\overleftrightarrow{I}=\overleftrightarrow{T}$

二阶张量 ① 张量的代数定义 $\overleftrightarrow{T}=T_{kl}\vec{e_k}\vec{e_l}=T'_{ij}\vec{e_i}'\vec{e_j}'$ $\Leftrightarrow$ ② 分析定义：分量按 $T'_{ij}=R_{ik}R_{jl}T_{kl}$ 变换 $\Leftrightarrow$ ③ 多重线性函数定义 $f:(\vec{A},\vec{B})\mapsto y\in\mathbb{R}$，$f=T_{ij}a_ib_j$ 对每个变量均线性，则其系数构成张量

triadics 三并矢 $\vec{A}\vec{B}\vec{C}=a_ib_jc_k\vec{e_i}\vec{e_j}\vec{e_k}$ (共 27 个基元) 三阶张量 $\overleftrightarrow{T}=T_{ijk}\vec{e_i}\vec{e_j}\vec{e_k}$ 变换方式 $T'_{ijk}=R_{il}R_{jm}R_{kn}T_{lmn}$

性质 同阶的张量可以相加减，结果仍为同阶张量，有交换律 张量相等 所有分量都相等

并矢内积

张量内积 $\overleftrightarrow{T}\cdot\vec{A}=T_{ij}a_k\vec{e_i}(\vec{e_j}\cdot\vec{e_k})=T_{ij}a_j\vec{e_i}$, $\overleftrightarrow{T}\cdot\overleftrightarrow{S}=T_{ij}S_{jl}\vec{e_i}\vec{e_l}$, 不可交换

double dot

双点乘 $\overleftrightarrow{T}:\vec{A}\vec{B}=(\overleftrightarrow{T}\cdot\vec{A})\vec{B}\rightarrow\overleftrightarrow{T}:\overleftrightarrow{S}=T_{ij}S_{ji}$ 例 $\overleftrightarrow{I}:\overleftrightarrow{T}=T_{ii}=\mathrm{tr}\,\overleftrightarrow{T}$, $\overleftrightarrow{I}:\vec{A}\vec{B}=\vec{A}\cdot\vec{B}$, $\overleftrightarrow{I}:\nabla\nabla=\nabla^2$

矢积的并矢表示 $\vec{A}\times\vec{B}=\varepsilon:\vec{A}\vec{B}=\vec{A}\vec{B}:\varepsilon$ 例 $\overleftrightarrow{T}\times\vec{k}=-\overleftrightarrow{T}\cdot\varepsilon\cdot\vec{k}$, $\vec{k}\times\overleftrightarrow{T}=-\vec{k}\cdot\varepsilon\cdot\overleftrightarrow{T}$, $\overleftrightarrow{T}\times\overleftrightarrow{S}=-\overleftrightarrow{T}\cdot\varepsilon\cdot\overleftrightarrow{S}$

并矢 (即张量积) 运算的阶: 直接相加, 叉乘: 再减 1 阶, 点乘减 2 阶, 双点乘减 4 阶

例 $\vec{A}\vec{B}\cdot\vec{C}\vec{D}=(\vec{B}\cdot\vec{C})\vec{A}\vec{D}$, 串联 $\vec{A}\vec{B}\cdot\cdot\vec{C}\vec{D}=(\vec{B}\cdot\vec{C})(\vec{A}\cdot\vec{D})$ 并联 $\vec{A}\vec{B}:\vec{C}\vec{D}=(\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D})$

并矢的矢场微分 $\nabla\cdot(\vec{A}\vec{B})=(\nabla\cdot\vec{A})\vec{B}+(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$, $\nabla\times(\vec{A}\vec{B})=(\nabla\times\vec{A})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$

(若微分算符后没有括号, 则表示只对紧邻张量进行)

梯度升一阶, 散度降一阶, 旋度不变 例 $\nabla\vec{r}=\overleftrightarrow{I}$, $\nabla\cdot(\varphi\overleftrightarrow{I})=\nabla\varphi$

$\nabla\cdot(\vec{A}r^2)=r^2\nabla\cdot\vec{A}+2\vec{r}\cdot\vec{A}$, $\nabla\cdot(\vec{A}\vec{r})=(\nabla\cdot\vec{A})\vec{r}+\vec{A}$, $\nabla\cdot(\vec{A}\vec{r}\vec{r})=(\nabla\cdot\vec{A})\vec{r}\vec{r}+\vec{A}\vec{r}+\vec{r}\vec{A}$

场量的泰勒展开 $f(\vec{r})=f(\vec{r_0})+\nabla f(\vec{r_0})\cdot(\vec{r}-\vec{r_0})+\frac{1}{2!}\nabla\nabla f(\vec{r_0}):(\vec{r}-\vec{r_0})(\vec{r}-\vec{r_0})+\ldots$

例 $f(\vec{r}-\vec{r_0})=f(\vec{r})-\nabla f(\vec{r})\cdot\vec{r_0}+\frac{1}{2!}\nabla\nabla f(\vec{r}):\vec{r_0}\vec{r_0}+\ldots$ $\dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r_0}|}=\dfrac{1}{r}+\dfrac{\vec{r_0}\cdot\vec{e_r}}{r^2}+\dfrac{\vec{r_0}\vec{r_0}:(3\vec{e_r}\vec{e_r}-\overleftrightarrow{I})}{2r^3}+\ldots$

「 $\vec{e_r}\vec{e_r}:\overleftrightarrow{I}=\vec{e_r}\cdot\vec{e_r}=1$, $\vec{r_0}\vec{r_0}:\overleftrightarrow{I}=r_0^2$ 」 第三项分子亦可写成 $(3\vec{r_0}\vec{r_0}-r_0^2\overleftrightarrow{I}):\vec{e_r}\vec{e_r}$

张量

「引入矢量乃至高阶张量, 是为了使物理学定律写成与坐标系无关的形式」

tensor rank indices

张量 (里奇 1890) 多重线性量 (广义的数量) , r 阶张量有 r 组指标, n 维空间的张量共有 n^r 个分量

例 标量为零阶张量, 矢量为一阶张量, 矩阵为二阶张量

不同基下像张量一样变换即为张量 例 证 $\partial_j a_i$ 是 2 阶张量 $\dfrac{\partial a_i'}{\partial x_j'}\overset{A\text{是矢量}}{=\!=\!=}R_{ik}\dfrac{\partial a_k}{\partial x_j'}=R_{ik}\dfrac{\partial a_k}{\partial x_l}\dfrac{\partial x_l}{\partial x_j'}=R_{ik}R_{jl}\dfrac{\partial a_k}{\partial x_l}$

quotient rule

商法则 若 $a_i=T_{ij}b_j$ 在任何坐标系对任意矢量 $\vec{B}$ 成立, 则 T_{ij} 是张量

「 $a_i'\overset{A\text{是矢量}}{=\!=\!=}R_{ik}a_k=R_{ik}T_{kj}b_j\overset{B\text{是矢量}}{=\!=\!=}R_{ik}T_{kj}R_{mj}b_j'\overset{\text{任何系}}{=\!=\!=}T_{im}'b_m'\rightarrow(T_{im}'-R_{ik}T_{kj}R_{mj})b_m'\overset{\text{任何}B}{=\!=\!=}0$ 」

可推广为: 若 m 阶张量 A 和 n 阶张量 B 通过 $(m+n)$ 个指标的量 T 线性联系, 则 T 是 $(m+n)$ 阶张量

isotropic tensor

各向同性张量 其分量在所有坐标系都不变 例 $\delta_{ij}'=R_{ik}R_{jm}\delta_{km}=R_{ik}R_{jk}=\delta_{ij}$, 而 δ 的确在任何坐标系定义都一样, 故 δ 是 (2 阶对称) 张量, 同理可证 $\varepsilon_{ijk}'=\varepsilon_{ijk}$ 是 (3 阶反对称赝) 张量 定理 1 阶各向同性只有零矢量, 2 阶都是 δ 的倍数, 3 阶都是 ε 的倍数, 4 阶各向同性张量可表示成 $T_{ijkl}=\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu\delta_{ik}\delta_{jl}+\nu\delta_{il}\delta_{jk}$

symmetric tensor

对称张量 $T_{ij}=T_{ji}$, 一般为 6 个独立分量 (主轴坐标系下剩 3 个, 即 主值) (对 n 维有 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 个)

性质 $\varepsilon_{ijk}T_{jk}=0$ 「 $0=\varepsilon_{mni}\varepsilon_{ijk}T_{jk}=(\delta_{mj}\delta_{nk}-\delta_{mk}\delta_{nj})T_{jk}=T_{mn}-T_{nm}$ 」

张量的 对称化 对选中指标的所有排列取算数平均 例 $T_{(ij)k(l)}=\frac{1}{3!}(T_{ijkl}+T_{jlki}+T_{likj}+T_{ilkj}+T_{ljki}+T_{jikl})$

若已对称则不变 $T_{\mu\nu}=T_{(\mu\nu)}$, 若做对称化的指标是哑标则有 传染性 $T^{(\mu\nu)}F_{\mu\nu}=T^{(\mu\nu)}F_{(\mu\nu)}$

antisymmetric tensor

反对称张量 $T_{ij}=-T_{ji}$, 3 个独立分量 (对于 n 维有 $\frac{1}{2}(n-1)n$ 个) 性质 $\mathrm{tr}(T)=0$

张量的 反对称化 同理, 但奇排列变减号 例 $T_{[ij]k[l]}=\frac{1}{3!}(T_{ijkl}+T_{jlki}+T_{likj}-T_{ilkj}-T_{ljki}-T_{jikl})$

记 T 的 全反对称化张量 为 $[T]=\frac{1}{k!}\delta_{i\ldots}^{j\ldots}T_{j\ldots}$ 性质 [] 运算对加法和数乘有线性性, 对张量积有结合律

定理 任何张量可表示成对称和反对称之和 $T_{ij}=\frac{1}{2}(T_{ij}+T_{ji})+\frac{1}{2}(T_{ij}-T_{ji})=T_{(ij)}+T_{[ij]}$

性质 坐标变换不改变对称性 (混合张量除外) 「已知 $T_{ij}=T_{ji}$ 则 $T_{ij}'=R_{ik}R_{jm}T_{km}=R_{jm}R_{ik}T_{mk}=T_{ji}'$ 」

外积

V^n 中的 p 阶反对称张量，称为 p 次外形式，简称 p-form [p 形式] $[T]\in V^n_{[p]}$

设任意张量 $T\in V^n_p$，$F\in V^n_q$，exterior / wedge product [外积 / 楔积] $T\wedge F=\dfrac{(p+q)!}{p!q!}T_{[i\dots}F_{j\dots]}\in V^n_{[p+q]}$

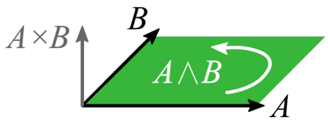
(若 $p+q>n$ 则 $T\wedge F=0\in V^n_{[0]}$)

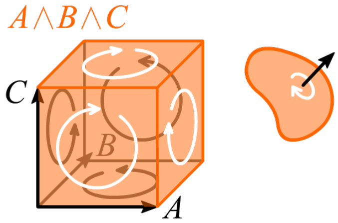
定义在 V^n 上的 $V^n_{[p]}$ 共 $n+1$ 个 $\rightarrow$ Grassmann [格拉斯曼代数] (1844) $\{\bigoplus_{p=0}^{n+1}V^n_{[p]},+,\wedge\}$

性质 $\varphi\wedge T=\varphi T$，线性性，结合律，[斜交换律] $T\wedge F=(-1)^{pq}F\wedge T$

例 两矢量外积 $\vec{A}\wedge\vec{B}=\dfrac{2!}{1!1!}a_{[i}b_{j]}=\vec{A}\vec{B}-\vec{B}\vec{A}=-\vec{B}\wedge\vec{A}$

推论 线性相关矢量外积为零，$\vec{A}\wedge\vec{A}=0$　几何意义：$\vec{A}\wedge\vec{B}=$ 有向面积，3 矢量外积为有向体积





对偶

Hodge dual [霍奇对偶 / 星算符] $*:V^n_{[p]}\rightarrow V^n_{[n-p]}$，$T\mapsto *T\equiv\dfrac{\sqrt{|g|}}{p!}\delta^{1\dots n}_{i_1\dots i_n}T^{i_1\dots i_n}$ $(0\leqslant p\leqslant n)$ **性质** 线性性，[对偶性] $**T=(-1)^{p(n-p)}T$ **例** E^3 中有 4 种对偶：$*\varphi=\varphi\vec{e_1}\wedge\vec{e_2}\wedge\vec{e_3}$，$*(a^i\vec{e_i})=\sum a^1\vec{e_2}\wedge\vec{e_3}$，$*(\sum T^{12}\vec{e_1}\wedge\vec{e_2})=\sum T^{23}\vec{e_1}$

($\sum$ 表示指标轮换，3 项求和) $*(\varphi\vec{e_1}\wedge\vec{e_2}\wedge\vec{e_3})=\varphi$ **推论** $\vec{A}\times\vec{B}=*(\vec{A}\wedge\vec{B})$ $\rightarrow$ 外积和矢积同构

(V^n 中，$(n-1)$ 个矢量外积，得 1 个和它们都垂直矢量的矢量，故称外积为矢积的推广)

外微分

构造方法：从 n 个基底微分中选 p 个外积，这 C^p_n 种外积设上系数 (f,φ,P,Q,R 均为坐标的函数) 作和

p 形式	$n=1$	$n=2$	$n=3$
0 形式	$f(x)$	$f(x,y)$	$f(x,y,z)$
1 形式	$\varphi\,\mathrm{d}x$	$P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$	$P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$
2 形式		$\varphi\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$	$P\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$
3 形式			$\varphi\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$

$\mathrm{d}\omega$	$n=1$	$n=2$
1 形式	$f'\,\mathrm{d}x$	$\dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$
2 形式	0	$\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$
3 形式		0

3 维 p 形式的物理意义 **例** 0 形式：标量场，1 形式：做功 $\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$，2 形式：通量 $\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$，3 形式：质量 $\rho\,\mathrm{d}V$

例 1 形式外积 $(1\wedge1\rightarrow2)$ $(P_1\,\mathrm{d}x+Q_1\,\mathrm{d}y+R_1\,\mathrm{d}z)\wedge(P_2\,\mathrm{d}x+Q_2\,\mathrm{d}y+R_2\,\mathrm{d}z)=\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\ P_1 & Q_1 & R_1\\ P_2 & Q_2 & R_2\end{vmatrix}$

$(1\wedge2\rightarrow3)$ $(P_1\,\mathrm{d}x+Q_1\,\mathrm{d}y+R_1\,\mathrm{d}z)\wedge(P_2\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q_2\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R_2\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)=(P_1P_2+Q_1Q_2+R_1R_2)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$

设 $\omega=\sum f\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\dots\mathrm{d}x_p$　[外微分] 系数对所有基全微分，其它同 p 形式，共 C^p_n 种作和

$\mathrm{d}\omega=\sum\left(\sum^n\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x^i\right)\wedge\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\dots\mathrm{d}x_p$ **性质** 0 形式外微分就是微分，p 形式的外微分为 $(p+1)$ 形式

例 $\omega=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$，则 $\mathrm{d}\omega=\left(\dfrac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\wedge\mathrm{d}x+\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\wedge\mathrm{d}y=\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$

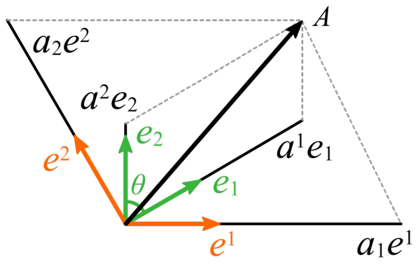
[庞加莱引理] $\mathrm{d}\,\mathrm{d}\omega=0$「既交换又反交换」

积分公式

generalized Stokes' theorem [广义斯托克斯定理] $\int_G\mathrm{d}\omega=\int_{\partial G}\omega$，高维区域积分等于低一次形式在区域边界上的积分

n	p	$\int_{(p+1)维}(p+1)形式=\oint_{(p)维}(p)形式$	名称
1	0	$\int_a^b f'\,\mathrm{d}x=f(b)-f(a)$	微积分基本定理
3	0	$\int_a^b(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathrm{d}z)=\varphi(b)-\varphi(a)$	梯度定理
2	1	$\iint_S(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$	格林公式
3	1	$\iint_S(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$	斯托克斯定理
3	2	$\iiint_V(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\oiint_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$	高斯定理

斜角坐标系



oblique

斜角坐标系 设有非正交非归一基 g_1, g_2，夹角为 θ，$\vec{A}=a^1 g_1+a^2 g_2$

a^i 称为 $\vec{A}$ 的 逆变分量 (投影 $\neq$ 分量)，g_i 称为 协变基矢

引入另一组 对偶基 $g^2\perp g_1,\ g^1\perp g_2$ (详见〈高代〉)，有 $\vec{A}=a_1 g^1+a_2 g^2$

a_i 称为 $\vec{A}$ 的 协变分量，g^i 称为 逆变基矢，取其长度 $|g^i|=\dfrac{1}{|g_i|\sin\theta}$

从而满足 对偶条件 $g^i\cdot g_j=\delta^i_j$ $\rightarrow$ 内积 用逆变乘协变来表示较简便 $\vec{A}\cdot\vec{B}=(a^i g_i)(b_j g^j)=a^i b_j \delta^j_i=a^i b_i$

对于三维斜角系，取三个斜交的 g_i，为右手系时混合积为正，记 $[g_1, g_2, g_3]=\sqrt{g}$

对偶基矢 的构造方式为 $g^1=\frac{1}{\sqrt{g}}(g_2\times g_3)$，有 $g^1\cdot g_1=1$，从而满足对偶条件

推论 $[g^1, g^2, g^3]=\frac{1}{\sqrt{g}}$ 故也为右手系，$g_1=\sqrt{g}(g^2\times g^3)$

度规张量 $g_{ij}\equiv g_i\cdot g_j,\ g^{ij}\equiv g^i\cdot g^j$ 性质 均为对称矩阵，「$\delta^i_j=g^{ik}g_k\cdot g_j=g^{ik}g_{kj}$」互为逆矩阵，$|g_{ij}|=g$

$\rightarrow$ 基矢分解 $g^i=g^{ij}g_j,\ g_i=g_{ij}g^j$ 指标升降 $a^i=\vec{A}\cdot g^i=(a_j g^j)\cdot g^i=g^{ij}a_j,\ a_i=g_{ij}a^j$

从而 内积 可表示为 $\vec{A}\cdot\vec{B}=a^i b_i=a_i b^i=g^{ij}a_i b_j=g_{ij}a^i b^j$

(直角系有 自对偶性 $a^i=a_i$「$g_{ij}=\delta_{ij}$」，故此前未区分逆变和协变，指标均写在下方)

斜系转动变换

g_i 和直角系的转换关系为 $g_i=\sum^{xyz}\dfrac{\partial x}{\partial u^i}e_x$「$g_i\cdot(\nabla u^j)=\dfrac{\partial x^k}{\partial u^i}\dfrac{\partial u^j}{\partial x^k}=\delta^j_i$」推论 $g^i=\nabla u^i$

对于曲线系，$\mathrm{d}\vec{r}=g_i\,\mathrm{d}u^i=g^i\,\mathrm{d}u_i$，$g_i=\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u^i}$，基矢变换方式为 $g_{i'}=\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u^{i'}}=\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u^j}\dfrac{\partial u^j}{\partial u^{i'}}=R^j_{i'}g_j$

雅可比矩阵 $R^j_{i'}\equiv\dfrac{\partial u^j}{\partial u^{i'}}$ (写成 (新)'$=R$(旧)，撇号在下为协变，在上为逆变)

「$\vec{A}=a^j g_j=a^{i'}g_{i'}=a^{i'}R^j_{i'}g_j$」某一分量的变换方式和基矢相反 $a^{i'}=R^{i'}_j a^j$，逆变基矢同理 $g^{i'}=R^{i'}_j g^j$

例 分量 u^i 的全微分 $\mathrm{d}u^i$ 是逆变矢量「$\mathrm{d}u^{i'}=\dfrac{\partial u^{i'}}{\partial u^j}\mathrm{d}u^j$」

梯度 $\partial_i\varphi$ 是协变矢量「$\dfrac{\partial\varphi}{\partial u^{i'}}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial u^j}\dfrac{\partial u^j}{\partial u^{i'}}$」亦可用商法则来证「$\mathrm{d}\varphi=\dfrac{\partial\varphi}{\partial u^i}\mathrm{d}u^i$，而 $\mathrm{d}u^i$ 是任意逆变矢量」

度规张量的变换方式为 $(g')_{ij}\equiv g_{i'j'}=g_{i'}\cdot g_{j'}=R^k_{i'}g_k\cdot R^l_{j'}g_l=R^k_{i'}R^l_{j'}g_{kl}$，同理可证 $g_{ij}=R^{k'}_i R^{l'}_j g_{k'l'}$

混合张量

张量总可用并矢基表示 $T=T^i{}_j{}^k e^i e_j e^k$ (并矢不可交换，故每个指标需明确占一列以区分前后 $T^i{}_j\neq T_i{}^j$)

逆变张量 $T^{i'j'}=R^{i'}_k R^{j'}_l T^{kl}$ 协变张量 $T_{i'j'}=R^k_{i'}R^l_{j'}T_{kl}$ 混合张量 $T^{i'}{}_{j'}=R^{i'}_k R^l_{j'}T^k{}_l$ $\quad T_{i'}{}^{j'}=R^l_{i'}R^{j'}_k T_l{}^k$

例 克罗内克符号是混合张量 $\delta^{i'}_{j'}=R^{i'}_k R^l_{j'}\delta^k_l=R^{i'}_k R^k_{j'}=\dfrac{\partial u^{i'}}{\partial u^{j'}}=\delta^i_j$

高阶张量 依此类推 推论 若某个坐标系下，张量的所有分量在某点为零，则任何坐标系下该点都恒为零

张量的 指标升降 不可变前后顺序 例 $T_{ij}=T_i{}^l g_{lj}=g_{ik}T^k{}_j=g_{ik}T^{kl}g_{lj}$

交换指标的前后顺序 (不改变上下) 称为张量的 转置，对不同指标，转置的结果不同

$\rightarrow$ 对称张量 可以不区分前后顺序 (混合指标一般不定义对称性，克罗内克符号是特例)

张量积 例 $T\otimes F=U\Leftrightarrow T^{ij}F_k{}^l=U^{ij}{}_k{}^l$，一般不可交换 张量内积 例 $T^{ij}{}_k F^k{}_{jl}=U^i{}_l$

contraction

缩并 同一张量中一上一下指标相同，按求和约定应视为内积并消掉「可以证明结果是降两阶的张量」

例 $T^{ilj}{}_{kl}=F^{ij}{}_k$，顺序不同张量不同 $T^{ilj}{}_{kl}\neq T^{ijl}{}_{kl}$

注 同为上标或下标不可缩并或做内积，因为求和结果不一定是张量

Eddington

爱丁顿张量 $\varepsilon_{ijk}\equiv[g_i, g_j, g_k]=\pm\sqrt{g},0$，$\varepsilon^{ijk}=\pm1/\sqrt{g},0$ (偶/奇排列规则同列奇符号)

$\varepsilon_i{}^{jk}=\pm g_{ii}/\sqrt{g},0$，另有 $=\pm g_{li}/\sqrt{g}$ (当 $i=j$ 或 $j=k$，且 ljk 是偶/奇排列时)「$\varepsilon_i{}^{jk}=g_{il}\varepsilon^{ljk}$」

伪欧空间

不要求内积正定 → 伪欧氏空间 (详见〈高代〉) **性质** g_{ij} 是不定对称矩阵，存在基底使 $g_{ij}=\pm\delta_{ij}$

Minkowski Space

号差 三个维度同号，一个维度异号的四维伪欧空间称为 闵氏空间 (以下均以闵氏空间为例)

(伪欧必须区分逆变协变) 仿射 (平直) 闵氏空间的 度规 记作 $\eta_{\mu\nu}=\eta^{\mu\nu}=\mathrm{diag}\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & -1\end{bmatrix}$〈狭相〉

内积 $a^\mu b_\mu=a_\mu b^\mu=\eta_{\mu\nu}a^\mu b^\nu=\eta^{\mu\nu}a_\mu b_\nu=a^0b^0-\vec{a}\cdot\vec{b}$ (上标指第 0 分量) **例** $\eta_\mu^\rho=\eta_{\mu\nu}\eta^{\nu\rho}=\delta_\mu^\rho$

逆变坐标 $x^\mu=(ct,x,y,z)$ (列矢量) **协变坐标** $x_\mu=(ct,-x,-y,-z)$，$(\mathrm{d}s)^2=\eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu$

单位张量 (四维) $\delta_\nu^\mu x^\nu=x^\mu$，迹 $\delta_\mu^\mu=4$ **性质** η,δ,ε 均为各向同性张量

Ricci tensor density

里奇符号 (实际上是张量密度 $\tilde{\varepsilon}$，此处懒得区分) $\varepsilon^{0123}=+1$，$\varepsilon_{0123}=-1$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\tau\omega}=-\begin{vmatrix}\delta_\alpha^\mu & \delta_\beta^\mu & \delta_\tau^\mu & \delta_\omega^\mu\\ \delta_\alpha^\nu & \delta_\beta^\nu & \delta_\tau^\nu & \delta_\omega^\nu\\ \delta_\alpha^\rho & \delta_\beta^\rho & \delta_\tau^\rho & \delta_\omega^\rho\\ \delta_\alpha^\sigma & \delta_\beta^\sigma & \delta_\tau^\sigma & \delta_\omega^\sigma\end{vmatrix}$$

公式 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\tau\omega}=-2(\delta_\tau^\rho\delta_\omega^\sigma-\delta_\omega^\rho\delta_\tau^\sigma)$，$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\tau}=-6\delta_\tau^\sigma$，$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}=-4!$

若 $F^{\mu\nu}$ 是反对称张量，则它的 对偶 是赝张量 $*F^{\mu\nu}=\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ (几何上表示垂直的面) 内积 $F^{\mu\nu}*F_{\mu\nu}$ 是赝标量，矢量的对偶是三阶反对称赝张量 $*F^\mu=\frac{1}{3!}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\nu\rho\sigma}$ (几何上表示法向量)，$*F^{\mu\nu\rho}=\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_\sigma$

推动变换

boost

伪欧空间的等距变换为 推动 / 伪转动

(〈狭相〉中称为 洛伦兹变换 LT)

(上标 μ 记行，下标 ν 记列)

$$\Lambda_\nu^\mu=\begin{bmatrix}\gamma & -\beta\gamma & 0 & 0\\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cosh\xi & -\sinh\xi & 0 & 0\\ -\sinh\xi & \cosh\xi & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

公式 $\Lambda_\nu^\mu\Lambda_\rho^\nu=\delta_\rho^\mu$ → $\Lambda_\nu^\mu\Lambda_\mu^\nu=4$ **注** $\Lambda_\nu{}^\mu=(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu$ 本章不必区分前后

标量 不随坐标系的推动变换 **例** 内积，固有量，电量，4 体积元 d^4x 等

4 矢量 分量变换方式为：矩阵写法 $\vec{x}'=\overleftrightarrow{\Lambda}\vec{x}$，指标表示 $x^{\mu'}=\Lambda_\nu^{\mu'}x^\nu$，对偶的变换方式相反 $x_{\mu'}=\Lambda_{\mu'}^\nu x_\nu$

「$V=V^\nu e_\nu=V^{\mu'}e_{\mu'}=\Lambda_\nu^{\mu'}V^\nu e_{\mu'}$ → $e_\nu=\Lambda_\nu^{\mu'}e_{\mu'}$」基矢和分量的变换方式相反 $e_{\mu'}=\Lambda_{\mu'}^\nu e_\nu$，$e^{\mu'}=\Lambda_\nu^{\mu'}e^\nu$

张量 分量变换方式为：矩阵写法 (不能换序) $\eta=\Lambda^\mathsf{T}\eta\Lambda$，指标表示 $(\eta')^{\mu\nu}=\Lambda_\rho^\mu\Lambda_\sigma^\nu\eta^{\rho\sigma}$

「间隔不变 $(\Delta s)^2=(\Delta x)^\mathsf{T}\eta(\Delta x)=(\Delta x')^\mathsf{T}\eta(\Delta x')=(\Delta x)^\mathsf{T}\Lambda^\mathsf{T}\eta\Lambda(\Delta x)$，狭相中称为相对性原理」

伪欧中的微分

cogradient

「$\dfrac{\partial}{\partial x^{\mu'}}=\dfrac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}}\dfrac{\partial}{\partial x^\nu}=\Lambda_{\mu'}^\nu\dfrac{\partial}{\partial x^\nu}$」 **逆变导数** $\partial^\mu\equiv\sum\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}=(\frac{1}{c}\partial_t,-\nabla)$ **协变导数** $\partial_\mu\equiv\sum\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}=(\frac{1}{c}\partial_t,\nabla)$

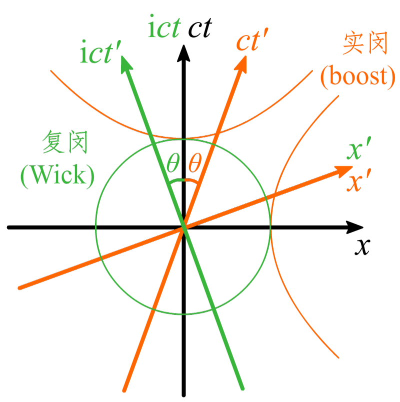
例 标量的 4 梯度是 4 矢量 $\partial_\mu\phi=(\frac{1}{c}\partial_t\phi,\nabla\phi)$，4 矢量的散度是标量 $\partial_\mu x^\nu=\delta_\mu^\nu$ → $\partial_\mu x^\mu=4$

性质 $\partial^\mu x^\nu=\eta^{\mu\nu}$，$\partial_\mu x_\nu=\eta_{\mu\nu}$，$\partial^\mu=\eta^{\mu\nu}\partial_\nu$，$\partial_\mu\partial_\nu=\partial_\nu\partial_\mu$ (是对称张量)

d'Alembert operator

达朗贝尔算符 $\square^2=\partial^\mu\partial_\mu=\dfrac{1}{c^2}\partial_t^2-\nabla^2$ (或记作 $\square$，不推荐) (是标量算符) (东岸度规与此相反)

复欧空间



注 实伪欧空间可等效地表示成复真欧空间

例 复闵氏空间 取 $x_\mu=x^\mu=(\mathrm{i}ct,x,y,z)$ 亦可实现非正定内积

(此为泡利度规，已弃用，把 t 换成 $\mathrm{i}t$ 的 trick 仅限狭相，不适用于广相)

「$\cos\vartheta=\gamma$，$\sin\vartheta=\mathrm{i}\gamma\beta$，$\tan\vartheta=\mathrm{i}\beta=\mathrm{i}\tan\theta=\tanh(\mathrm{i}\theta)$」

Wick rotation

LT 表现为复闵空间的 维克转动 → LT 构成 $\mathbf{SO}(4)$ 群〈群论〉