G

相

狭义相对论

精

(同力学, 电磁学, 电动力学等, 推荐赵凯华力学电磁学, 虞福春电动)

参

刘辽. 狭义相对论（第二版）. 高等教育出版社 (泡利度规的)

Landau. The Classical Theory of Fields

└ 中译: 鲁欣. 场论（第八版）. 高等教育出版社

符号约定

上标撇 ' 表示动系, v 表示动系速度, u 表示观察到的运动速度, 固有速度为 $\gamma_u \vec{u}$

μ,ν 表示四维指标, 从 0 开始, 采用西海岸度规 $\eta_{\mu\nu}=\mathrm{diag}\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & -1\end{bmatrix}$ (常见于粒子和场论教材)

(注: 东海岸度规 $(-+++)$, $(\mathrm{d}s)^2$ 反号, 导致 $u^2=-c^2$ 等, 常见于引力和弦论教材)

相关笔记

伽利略变换 (以下简称 GT) 见〈力学〉 张量分析见〈矢分〉 洛仑兹, 庞加莱群见〈李群〉

旋量场见〈相对论量子力学〉 总的标准模型见〈粒子〉

(Last compiled on 2015/10/12 at 23:43:00)

相对论时空观

ether
以太 曾以为的传播电磁波的介质

Michelson-Morley
迈克尔逊莫雷实验 (1887) 干涉仪转 90° 测不到条纹移动，即不同方向光速一样 (迈认为是地球带着以太运动)

aberration of light
光行差 (Bradlet 1728) 因地球公转，星光光线的真实方向和视方向有夹角 $\arcsin\beta\approx 20.47''$ (实验观测与理论一致，故以太并未被拖拽)

洛仑兹收缩 (1892) 认为以太风会压缩运动方向上物质的长度 γ 倍

Kennedy-Thorndike
肯尼迪桑戴克实验 (1932) 不等臂干涉仪，仍未观察到条纹移动

✓表示理论与实验结果符合
×表示理论与实验结果不符合
○表示理论不能解释实验

			光学实验							其他方面实验					
			光行差现象	斐索运流实验	迈克耳孙-莫雷实验	肯尼迪-桑戴克实验	运动的光源和反射镜实验	双星运行轨道的观察	太阳光源迈克耳孙-莫雷实验	质量随速度变化实验	普遍的质能相当实验	运动电荷的辐射实验	高速介子的衰变实验	特鲁顿-诺布耳实验	永磁体的单极感应实验
以太理论	固定以太理论(无洛伦兹收缩)		✓	✓	×	×	✓	✓	×	×	○	✓	○	×	×
以太理论	固定以太理论(有洛伦兹收缩)		✓	✓	✓	×	✓	✓	✓	✓	○	✓	○	✓	×
以太理论	以太附着在有质物体上的理论		×	×	✓	✓	✓	✓	✓	×	○	○	○	✓	○
发射理论	光在动镜反射后的速度	相对于原光源为 c/n	✓	✓	✓	✓	✓	×	×	○	○	×	○	○	○
发射理论	光在动镜反射后的速度	相对于反射镜为 c/n	✓	○	✓	✓	×	×	×	○	○	×	○	○	○
发射理论	光在动镜反射后的速度	相对于光源的像为 c/n	✓	○	✓	✓	×	×	✓	○	○	×	○	○	○
狭义相对论			✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

发射理论 (里兹 1908) 光不需要以太，真空光速为 c 按 GT，承认绝对时空观 (否认麦方程协变性)

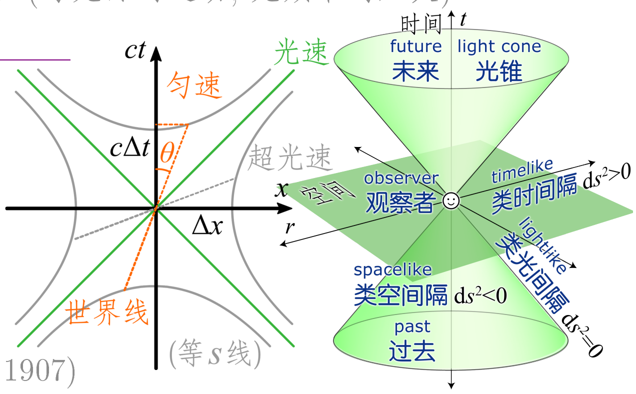
特鲁顿实验 (1903) 悬挂的电偶极子，若有绝对速度 $\vec{v}$，则会有磁力作用，转向与 $\vec{v}$ 垂直，结果示零

质量增加 (考夫曼 1901) 高速运动电子束荷质比会变 **时间延缓** 高速运动 π 介子寿命延长 γ 倍

principle of relativity
相对性原理 (爱因斯坦 1905) 物理规律在所有惯性参考系的形式相同

the universal speed of light
光速不变原理 真空中光速对于所有惯性系的观察者恒为 c (与光源的运动，光频率均无关)

时空结构



event　　world point
t 时刻在 (x,y,z) 处发生某 **事件**，记为 **世界点** (t,x,y,z)

world line　　space-time diagram
世界线 某粒子身上发生的事件，在 **时空图** 中连成的轨迹

例 不同地点的匀速直线运动，世界线是平行的直线

interval
两事件的 **间隔** $(\Delta s)^2\equiv(c\Delta t)^2-[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2]$

「光速不变」→ **间隔不变性** $(\Delta s)^2=(\Delta s')^2$ (闵可夫斯基 1907)

等 s 线 到原点的间隔相同 **闵氏长度** 欧氏长度乘以因子 $\sqrt{\cos 2\theta}$「$c^2(\Delta t)^2-(\Delta l)^2=c^2(\Delta t')^2-(\Delta l')^2$，令 $\Delta l'=0$ 或 $\Delta t'=0$」 **类时间隔** 存在同地的参考系 **类空间隔** 存在同时的参考系

洛仑兹变换

设动系 S' 相对静系 S 以 v 向 x 轴正向运动，对准两系的 $(0,0,0,0)$，记 $\beta\equiv\dfrac{v}{c}\in[0,1]$，$\gamma\equiv(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}\in[1,\infty)$

「设 $t'=a_1x+a_2t$，$x'=a_3x+a_4t$，$x=vt$ 对应 $x'=0$ → $a_4/a_3=-v$，间隔不变 $(\mathrm{d}s)^2=c^2\,\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}x^2=(\mathrm{d}s')^2=c^2(a_1\,\mathrm{d}x+a_2\,\mathrm{d}t)^2-(a_3\,\mathrm{d}x+a_4\,\mathrm{d}t)^2=0$，对应系数 $-1=c^2a_1^2-a_3^2$，$c^2a_1a_2=a_3a_4$，$c^2=c^2a_2^2-a_4^2$，解方程组」

Lorentz transformation
洛仑兹变换 $t'=\gamma(t-xv/c^2)$，$x'=\gamma(x-vt)$，$y'=y$，$z'=z$ (把 ' 互换，v 换 $-v$，就是逆变换式)

「$t_2'-t_1'=\gamma\left[(t_2-t_1)-\dfrac{v}{c^2}(x_2-x_1)\right]$」 **推论** 同地点事件，同时先后性绝对「$\Delta t$，$\Delta t'$ 同号 → $1>\dfrac{v}{c^2}\dfrac{x_2-x_1}{t_2-t_1}$」

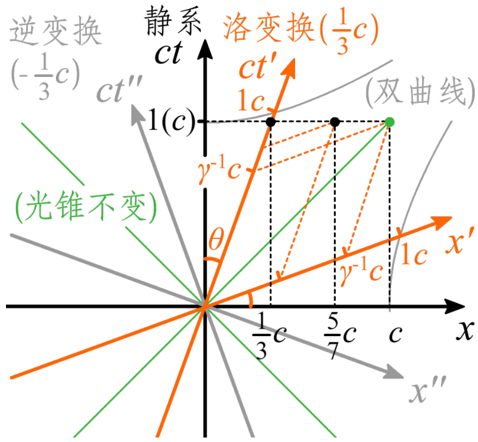
signal　　causal event
信号速度 $v_s\equiv\left|\dfrac{x_2-x_1}{t_2-t_1}\right|$ → **因果事件** 的先后性绝对 (若 $v_s>c$ 则必为无因果联系事件，先后次序可变)

LT 在时空图中使坐标轴对称地向光锥靠拢或远离，$\tan\theta=\beta$ **注** 不平行的 LT 不对易 (GT 总对易)

rapidity
记 $\beta=\tanh\xi$，$\gamma=\cosh\xi$，有 **快度** $\xi=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+\beta}{1-\beta}\right)$ **例** 光速的快度是无穷 (所以光速不变)

快度在 LT 下 (像 GT 下的速度一样) 直接相加减 **例** 速度合成 $\xi'=\xi-\xi_v$，其中 $\tanh\xi=\dfrac{u}{c}$，$\tanh\xi_v=\dfrac{v}{c}$

相对论力学



时间变换 $\frac{dt'}{dt}=\gamma\Gamma=(\gamma\Gamma')^{-1}$，其中 $\Gamma\equiv1-\frac{vu_x}{c^2}$，$\Gamma'\equiv1+\frac{vu_x'}{c^2}$

速度变换 $u_x'=\frac{dx'/dt}{dt'/dt}=\frac{u_x-v}{\Gamma}$，$u_y'=\frac{u_y}{\gamma\Gamma}$，$u_z'$ 同理, 逆变换 $u_x=\frac{u_x'+v}{\Gamma'}$

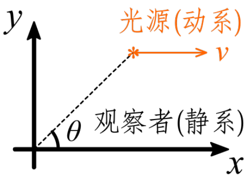
例 动系 $v=\frac{c}{3}$，看到物体 $u_x'=\frac{c}{2}$，则该物体相对于静系 $u_x=\frac{5}{7}c$

质量变换 $m'=\frac{m_0}{\sqrt{1-(u_x')^2/c^2}}=\gamma\Gamma m$ 加速度变换 $a_x'=\frac{du_x'}{dt}\frac{dt}{dt'}=\frac{d}{dt}\left(\frac{u_x-v}{\Gamma}\right)\frac{1}{\gamma\Gamma}=\frac{a_x}{(\gamma\Gamma)^3}$，$a_y'=\frac{1}{(\gamma\Gamma)^2}\left(a_y+\frac{vu_y}{c^2\Gamma}a_x\right)$，$a_z'$ 同理

能量动量变换 $(E/c^2,\vec{p})$ 的变换与 $(t,\vec{x})$ 形式相同

力的变换 $F_x'=\frac{dp_x'}{dt}\frac{dt}{dt'}=\frac{d}{dt}\left[\gamma\left(p_x-v\frac{E}{c^2}\right)\right]\frac{1}{\gamma\Gamma}=\left[F_x-\frac{v}{c^2}(\vec{F}\cdot\vec{u})\right]\frac{1}{\Gamma}=F_x-\frac{v}{c^2\Gamma}(F_yu_y+F_zu_z)$，$F_y'=\frac{F_y}{\gamma\Gamma}$

「$E'=\gamma(E-p_xv)$，代入 $p_x=\frac{E}{c}\cos\theta$，$E=\hbar\omega$」 相对论多普勒效应 $\omega'=\gamma(1-\beta\cos\theta)\omega$



纵向: $\theta=0,\pi$ 时 $\frac{\omega}{\omega'}\approx1\pm\beta$，即经典的红移公式, 横向: $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时 $\frac{\omega}{\omega'}=\gamma^{-1}\approx1-\frac{1}{2}\beta^2$

例 发现微波背景辐射 (宇宙热平衡电磁辐射) 有 10^{-3} 偶极各向异性, 说明我星系相对于背景辐射有速度 $c\times10^{-3}$，方向由红移指向蓝移

光线角度变换 $\cos\theta'=\frac{u_x'}{c}=\frac{\cos\theta-\beta}{1-\beta\cos\theta}\Leftrightarrow\sin\theta'=\frac{\gamma^{-1}\sin\theta}{1-\beta\cos\theta}\xrightarrow[\theta'\approx\pi/2+\Delta\theta]{\theta\approx\pi/2}\cos\theta'\approx-\beta$ 光行差角 $\sin(\Delta\theta)\approx\beta$

效应与佯谬

proper time

固有时 物体的静止系 (即同速动系) 测出的时间 $\Delta\tau$ 推论 $\Delta s=c\Delta\tau$「同地点事件」

time dilation

钟慢 $\Delta t=\gamma\Delta\tau$

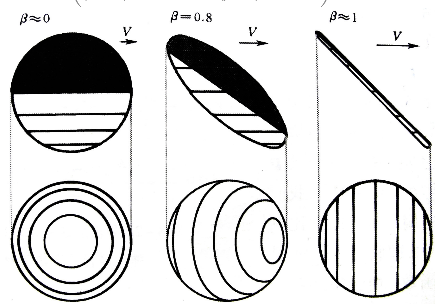
twin paradox

孪生子佯谬 孪生兄弟分别留在地面和高速旅行, 到底谁更年轻「旅行者会经历加速, 两参考系不等价」

例 地球和某星相距 8 ly，旅行者以 $0.8c$ 飞到该星然后返航 (为避免广相计算, 假设加速度无穷大) 起飞时地球, 飞船, 星上的钟均为 $t=0$，飞船突然达到 $0.8c$，「$\gamma^{-1}=0.6$, $t=\gamma(0+x'v/c^2)=\beta x/c$」 星上的钟跳到 6.4 a，到达该星时, 飞船 $t=6$ a 地球 3.6 a 星 6.4+3.6 a，飞船突然调头, 飞船仍为 $t=6$ a，地球的钟跳到 3.6+2*6.4 a，回到地球时, 飞船 $t=6+6$ a 地球 16.4+3.6 a，即地面的兄弟比自己老 8 岁

孪生子效应 (Hafele 1971) 飞机载铯原子钟绕赤道一周 (忽略公转, 飞机小于自转速度, 故均为绝对向东)，向东: 钟慢 59 ns (理论: 广相贡献 144 狭相 −184)，向西: 钟快 273 ns (广相 179 狭相 96)

结论 相对于惯性系加速越大的钟越慢



rest length

静长度 l_0「同时测量」

length contraction

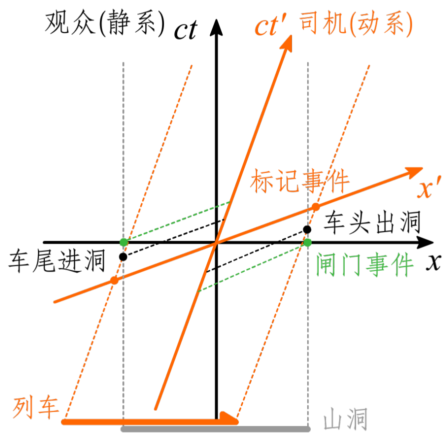
尺缩 $l_{/\!/}=\gamma^{-1}l_0$ (垂直于运动方向不收缩)

爱伦费斯特佯谬 旋转唱片, 周长收缩半径不收缩 → 加速物体绝非刚体

位矢角度变换 沿 θ 角某一边的方向以 v 运动, 看到角度 $\tan\theta'=\gamma\tan\theta$

Terrell

特勒尔转动 (1959) 尺缩效应对应的是测量形象 (物体上各点相对静系同一时刻的位置) 但物体的视觉影像为同时到达眼睛的光 (不同时发出) 故有景深的物体看起来是发生了转动 $\arcsin\beta$



列车佯谬 列车通过与它等长的山洞, 记列车与山洞中点对齐为 0 时刻

① 司机认为山洞变短, 在 0 时刻从车头车尾同时向地面射出标记, 然而观众看到先射尾标 → 车尾进洞 → 关门 → 车头撞门出洞 → 再射头标

② 观众认为列车变短, 在 0 时刻在两洞口同时放下闸门关住列车, 然而司机看到前门先关 → 车头撞门出洞 → 车尾进洞 → 后门再关

穿孔佯谬 可以穿过, 在动系看来是因为栅栏变斜而穿过的

rest mass
静质量 m_0 (旧称 $m=\gamma m_0$ 为 动质量 现已弃用, 见相对论的牛二律公式, 还有别的项)

相对论能量 $E=mc^2=\gamma m_0c^2=m_0\left(1+\frac{1}{2}\beta^2+\frac{3}{8}\beta^4+\dots\right)c^2\equiv m_0c^2+E_{\mathrm{k}}=\sqrt{|\vec{p}|^2c^2+m_0^2c^4}$ 〈 4 动量 〉

推论 群速度 $v_g=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}=\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\sqrt{p^2c^2+m_0^2c^4}=\frac{2pc^2}{2E}=\frac{p}{m_0}$, 相速度 $v_p=\frac{\omega}{k}=\frac{E}{p}=\frac{mc^2}{mv}=\frac{c}{\beta}$

「洛仑兹变换 (数学) 并不禁止超光速, 是因果律 (亦可能是热二律) 禁止的, 见双曲面的图」

光速极限原理 在任意惯性系中观测, 任意物体/信号/能量在空间中传播的速度, 不超过真空光速

例 可以超光速: 空间本身的膨胀速度, 相速度 (对于反常色散, 群速度不代表信号速度) , 影子的速度, 几何交点的速度, 第三观察者看到的相对速度, 量子纠缠 (尚有争议) , 虚粒子等

推论 不存在绝对刚体, 应力波未到达的区域仍保持原有应力分布及运动状态

若选择超光速的惯性参考系, 则 γ 为虚数 $\rightarrow$ 快子 (tachyon) (所有论文都可写个快子版的, 故在证实前一律不收) (热力学量的变换尚有争议)

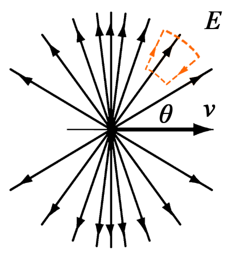
相对论电磁学

例 导体动磁场不动, 和磁场动导体不动, 产生的电动势相等 $\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_B=-\partial_t(\oint_L\vec{A}\cdot\mathrm{d}\,\vec{l})=\oint_L\vec{E}_{旋}\,\vec{l}$

「洛伦兹力为 $F_y=q(E_y+u_zB_x-u_xB_z)$ 等 3 式, 由力变换公式, 及速度逆变换, 得 $F_y'=\gamma\Gamma' F_y=q(\gamma\Gamma' u_z)B_x+q\gamma\left(1+\frac{u_x'v}{c^2}\right)E_y-q\gamma(\Gamma' u_x)B_z=qu_z'B_x+q\gamma\left[(E_y-vB_z)+u_x'\left(\frac{v}{c^2}E_y-B_z\right)\right]$, 同理由 F_z' 得另 3 式」

$E_x'=E_x\,,\;E_y'=\gamma(E_y-vB_z)\,,\;E_z'=\gamma(E_z+vB_y)\;,\;B_x'=B_x\,,\;B_y'=\gamma\left(B_y+\frac{v}{c^2}E_z\right),\;B_z'=\gamma\left(B_z-\frac{v}{c^2}E_y\right)$

(对于电磁学, 无论速度多低, 伽利略变换都不适用)

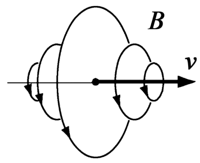


推论 若 S 系中 $\vec{E}=0$, 则 $\vec{E}'=\vec{v}\times\vec{B}'$, 若 S 系中 $\vec{B}=0$, 则 $\vec{B}'=-\frac{1}{c^2}(\vec{v}\times\vec{E}')$

$E^2-c^2B^2$ 是不变量, $\vec{E}\cdot\vec{B}$ 是不变量 $\rightarrow$ 保正交性, 保锐/钝角

例 匀速直线运动点电荷 (并非稳恒电流) 「对 E 积分, 可验证高斯定理仍成立」

$E=k_e\frac{q}{r^2}\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}$, $B=k_m\frac{qv}{r^2}\frac{(1-\beta^2)\sin\theta}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}\xrightarrow{\beta\ll1}k_m\frac{qv}{r^2}\sin\theta$



注 特鲁顿实验示零原因: 运动学: 静系下加速度沿连线方向, 则变换后依然如此
动力学: 杆不是刚体, 可以证明电力磁力矢量和总与椭圆周正交

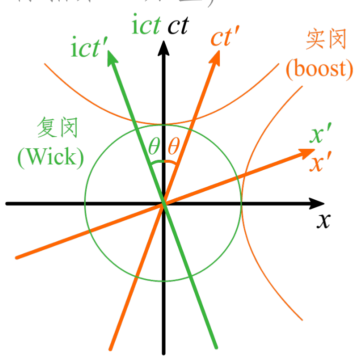
隐藏动量 $\vec{p}=\frac{1}{c^2}(\vec{m}\times\vec{E})$, 电场中的磁偶极矩携带动量 (尽管不运动) , 纯相对论力学效应, 与电磁场动量精确相消

张量代数

(类似 GT 下距离不变, 说明空间不是 3 个无关维度) 「LT 表明 1 维时间和 3 维空间是整体四维时空」

Minkowski Space
闵氏空间 内积 $(\mathrm{d}s)^2=\eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu$ (求和约定) , 伪欧空间, 闵氏度规 (metric) $\eta_{\mu\nu}=\eta^{\mu\nu}=\mathrm{diag}\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & -1\end{bmatrix}$

指标升降 $\eta_{\mu\nu}x^\nu=x_\mu\,,\;\eta^{\mu\nu}x_\nu=x^\mu$ 例 内积 $a^\mu b_\mu=a_\mu b^\mu=\eta_{\mu\nu}a^\mu b^\nu=a^0b^0-\vec{a}\cdot\vec{b}$ (上标指第 0 分量)



复闵氏空间 取 $x_\mu=x^\mu=(\mathrm{i}ct,x,y,z)$ 可实现该内积 (此为泡利度规, 已弃用)

Wick rotation
LT 表现为复闵空间的 维克转动 (把 t 换 $\mathrm{i}t$ 的 trick 仅限狭相, 不适用广相)

scalar
标量 坐标系转动时量值不变 $\rightarrow$ 不变量 (invariant) 内积, 固有量, 电量, 4 体积元 d^4x 等

4-vector
4 矢量 分量随坐标系做转动变换 $\rightarrow$ (以下采用 Bjorken-Drell 度规)

contravariant
逆变坐标 $x^\mu=(ct,x,y,z)$ (列矢量) 协变坐标 (covariant) $x_\mu=(ct,-x,-y,-z)$

事件矢量 $x^\mu=\begin{bmatrix}ct\\x\\y\\z\end{bmatrix}$ Lorentz boost 伪转动 $\Lambda^\mu_{\ \nu}=\begin{bmatrix}\gamma & -\beta\gamma & 0 & 0\\-\beta\gamma & \gamma & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cosh\xi & -\sinh\xi & 0 & 0\\-\sinh\xi & \cosh\xi & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ (μ 行 ν 列)

公式 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\tau\omega}=-\begin{vmatrix}\delta^\mu_\alpha & \delta^\mu_\beta & \delta^\mu_\tau & \delta^\mu_\omega\\\delta^\nu_\alpha & \delta^\nu_\beta & \delta^\nu_\tau & \delta^\nu_\omega\\\delta^\rho_\alpha & \delta^\rho_\beta & \delta^\rho_\tau & \delta^\rho_\omega\\\delta^\sigma_\alpha & \delta^\sigma_\beta & \delta^\sigma_\tau & \delta^\sigma_\omega\end{vmatrix}$

洛伦兹变换 矩阵写法 $\vec{x}'=\vec{\Lambda}\vec{x}$, 指标表示 $(x')^\mu=\Lambda^\mu_\nu x^\nu$, $x'_\mu=\Lambda_\mu^\nu x_\nu$ **公式** $\Lambda^\mu_\nu\Lambda^\nu_\rho=\delta^\mu_\rho \to \Lambda^\mu_\nu\Lambda_\mu^\nu=1$

注 $\Lambda_\nu{}^\mu=(\Lambda^T)^\mu{}_\nu$ 本笔记不区分前后「$(\Delta s)^2=(\Delta x)^T\eta(\Delta x)=(\Delta x')^T\eta(\Delta x')=(\Delta x)^T\Lambda^T\eta\Lambda(\Delta x)$」$\to$

相对性原理 $\eta=\Lambda^T\eta\Lambda$ (矩阵写法不能换序) 张量按 $(\eta')^{\mu\nu}=\Lambda^\mu_\rho\Lambda^\nu_\sigma\eta^{\rho\sigma}$ 变换 (指标表示不用管求和顺序)

tangent space

(欧氏空间中用两点之差定义矢量, 非欧空间中矢量不能随意平移, 只能在一个时空点上定义) $\to$ **切空间**

「矢量的参数化写法 $r(t)=r_a+t(r_b-r_a)\to v=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)|_{t=0}$」参数化 $x^\mu(\lambda)$ $\to$ **切矢量** (的分量) $V^\mu=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}x^\mu$

$\to$ 分量的变换方式和 x^μ 相同 $V^\mu\xrightarrow{\mathrm{LT}}(V')^\mu=\Lambda^\mu_\nu V^\nu$「以后构造的 4 矢量均按此式变换, 不再重申」

(采用被动变换观点) 矢量的本体 $V=V^\mu\vec{e}^{(\mu)}$ 不变, 基矢 $\vec{e}^{(\mu)}$ 和分量 V^μ 按相反方式变换

「 $V=V^\nu\vec{e}^{(\nu)}=(V')^\mu\vec{e}'^{(\mu)}=\Lambda^\mu_\nu V^\nu\vec{e}'^{(\mu)}$ $\to$ $\vec{e}^{(\nu)}=\Lambda^\mu_\nu\vec{e}'^{(\mu)}$ 」基矢的变换方式为 $\vec{e}'^{(\mu)}=\Lambda_\mu^\nu\vec{e}^{(\nu)}$

covector　cotangent space　dual vector

和**矢量** ((1,0) 阶张量) 做内积的为**余矢量** ((0,1) 阶张量) , 生活在**余切空间**中, 两者互称**对偶矢量**

混合张量 以矢量基矢的张量积为基 (张量积一般不可交换) , 代表矢量间的映射 $T^\mu{}_\nu V^\nu=U^\mu$

缩并 的结果还是张量 $T^{\mu\rho}{}_\sigma F^\sigma{}_{\rho\nu}=U^\mu{}_\nu$, $T^{\mu\nu\rho}{}_{\sigma\nu}=F^{\mu\rho}{}_\sigma$, 顺序不同张量不同 $T^{\mu\nu\rho}{}_{\sigma\nu}\neq T^{\mu\rho\nu}{}_{\sigma\nu}$

逆变张量 ((2,0) 阶张量) 一般 $T^{\mu\nu}\neq T^{\nu\mu}$ (对称张量才等于) **协变张量** $T_{\mu\nu}$ ((0,2) 阶张量)

张量的指标升降, 不可变指标顺序 **例** $\eta^{\mu\gamma}T^{\alpha\beta}{}_{\gamma\sigma}=T^{\alpha\beta\mu}{}_\sigma$, $\eta_{\mu\alpha}T^{\alpha\beta}{}_{\gamma\sigma}=T_\mu{}^\beta{}_{\gamma\sigma}$

单位张量 (四维) $\delta^\mu_\nu x^\nu=x^\mu$, 迹 $\delta^\mu_\mu=4$ **性质** η,δ,ε 均为各向同性张量 **例** $\eta^\rho_\mu=\eta_{\mu\nu}\eta^{\nu\rho}=\delta^\rho_\mu$

公式 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\tau\omega}=-2(\delta^\rho_\tau\delta^\sigma_\omega-\delta^\rho_\omega\delta^\sigma_\tau)$, $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\tau}=-6\delta^\sigma_\tau$, $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}=-4!$

(在弯曲空间中, 张量的偏导不再是张量, 需协变导数才能保持) 「$\dfrac{\partial}{\partial(x')^\mu}=\dfrac{\partial x^\nu}{\partial(x')^\mu}\dfrac{\partial}{\partial x^\nu}=\Lambda_\mu^\nu\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$」

cogradient

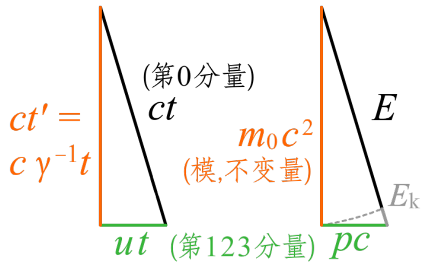
逆变导数 $\partial^\mu\equiv\sum\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}=(\frac{1}{c}\partial_t,-\nabla)$ **协变导数** $\partial_\mu\equiv\sum\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}=(\frac{1}{c}\partial_t,\nabla)$

例 $\partial_\mu x^\nu=\delta^\nu_\mu\to\partial_\mu x^\mu=4$ **性质** $\partial_\mu\partial_\nu=\partial_\nu\partial_\mu$ (是对称张量)

d'Alembert operator

达朗贝尔算符 $\Box^2=\partial^\mu\partial_\mu=\dfrac{1}{c^2}\partial_t^2-\nabla^2$ (或记作 $\Box$, 不推荐) (是标量算符) (东岸度规与此相反)

力学协变形式



4 位移 Δx^μ **例** $\Delta x^\mu\Delta x_\mu=(\Delta s)^2=c^2(\Delta\tau)^2$ 是不变量

(本章后将不再关注变换) 下称 $\vec{u}$ 为平常速度, 记 $\beta_u\equiv\dfrac{u}{c}$, $\gamma_u\equiv(1-\beta_u^2)^{-\frac{1}{2}}$

「时空是等价的, 不应空间对时间求导, 而应时空都对某固有参数求导」

固有 4 速度矢量, 简称 **4 速度** $u^\mu\equiv\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}x^\mu=\gamma_u(c,\vec{u})$, $u^\mu u_\mu=c^2$

牛二律 $\vec{F}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{p}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma_u m_0\vec{u})$ 在狭相依然成立, 记平常加速度 $\vec{a}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{u}$

得 $\vec{F}=\gamma_u m_0\left[\vec{a}+\dfrac{(\vec{u}\cdot\vec{a})\vec{u}}{c^2-u^2}\right]$, 固有 **4 加速度** $\alpha^\mu\equiv\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}u^\mu=\gamma_u\left(\dfrac{1}{c}\gamma_u^3(\vec{u}\cdot\vec{a}),\dfrac{\vec{F}}{m_0}\right)$ **性质** 和 4 速度正交 $\alpha^\mu u_\mu=0$

推论 带电粒子在电磁场中的平常加速度 $\vec{a}=\dfrac{q}{\gamma_u m_0}\left[\vec{E}+\vec{u}\times\vec{B}-\dfrac{1}{c^2}(\vec{u}\cdot\vec{E})\vec{u}\right]$

例 恒力作用下粒子的 s-t 图为双曲线 $x(t)=\dfrac{m_0c^2}{F}\left[\sqrt{1+\left(\dfrac{Ft}{m_0c}\right)^2}-1\right]$ (经典为抛物线 $x(t)=\dfrac{F}{2m_0}t^2$)

注 牛三律与同时的相对性不相容, 必须是两物体接触作用 (同地点事件) 才可以

能量动量 4 矢量, 简称 **4 动量** $p^\mu\equiv m_0u^\mu=(E/c,\vec{p})$, $p^\mu p_\mu=m_0^2c^2$

固有 4 维力矢量, 又称 **闵氏力** $K^\mu=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}p^\mu=(K^0,\gamma_u\vec{F})$, $K^\mu K_\mu=\gamma_u^2(1-\beta_u^2\cos^2\theta)F^2$, θ 为 $\vec{u}$ 和 $\vec{F}$ 夹角

牛二律的闵氏形式 $K^\mu=m_0\alpha^\mu$, 同理有正交性 $K^\mu u_\mu=0$

「$E=\hbar\omega$, $\vec{p}=\hbar\vec{k}$」 **4 波矢** $k^\mu=(\omega/c,\vec{k})$「亦可推出多普勒效应, 用 $\cos\theta=\vec{u}\cdot\vec{k}/uk$」

$\to\phi=k^\mu x_\mu=\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}$ **相位不变性** 任何波, 相位为不变量 (波峰还是波谷, 绝对)

「电动力学的协变性并非理论证明的结果，而是狭义相对论的前提，由实验来检验，本章只是重写公式使其协变性更明显」

electromagnetic field tensor
电磁场张量 $F^{\mu\nu}\equiv\begin{bmatrix}0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c\\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y\\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x\\ E_z/c & -B_y & B_x & 0\end{bmatrix}$，对偶张量 $F_*^{\mu\nu}\equiv\begin{bmatrix}0 & -B_x & -B_y & -B_z\\ B_x & 0 & E_z/c & -E_y/c\\ B_y & -E_z/c & 0 & E_x/c\\ B_z & E_y/c & -E_x/c & 0\end{bmatrix}$

($F_{\mu\nu}$ 为 E 区取负) (仍满足变换规则)

为四维二阶反对称张量，电磁场不变量 $\sum^{16}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}=2\left[B^2-(E/c)^2\right]$，$|F_{\mu\nu}|=\left[(\vec{E}/c)\cdot\vec{B}\right]^2$

「q 不变，$\rho=\gamma_u\rho_0$，$\vec{j}=\rho u$」 4 电流密度 $j^\mu\equiv\rho_0u^\mu=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}q=\left(c\rho,\vec{j}\right)$

散度为零 $\partial_\mu j^\mu=0\rightarrow$ 连续性方程 $\partial_t\rho+\nabla\cdot\vec{j}=0$

麦方程组 $\partial_\mu F^{\mu\nu}=\mu_0 j^\nu$ ($\Leftrightarrow\partial_\nu F^{\mu\nu}=-\mu_0 j^\mu$) $\rightarrow\begin{cases}\nu=0: & \text{「}0+(\partial_xE_x+\partial_yE_y+\partial_zE_z)/c=\mu_0c\rho\text{」 电高斯 } \nabla\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_0\\ \nu=1,2,3: & \text{「}-\partial_tE_x/c^2+\partial_yB_z-\partial_zB_y=\mu_0j_x\text{」 磁环路 } \nabla\times\vec{B}-\partial_t\vec{E}/c^2=\mu_0\vec{j}\end{cases}$

$\partial_\lambda F_{\mu\nu}+\partial_\mu F_{\nu\lambda}+\partial_\nu F_{\lambda\mu}=0$
或 $\partial_\mu F_*^{\mu\nu}=0$ 「$\vec{E}/c\rightarrow\vec{B}$，$\vec{B}\rightarrow-\vec{E}/c$」 $\rightarrow\begin{cases}\nu=0: \text{磁高斯 } \nabla\cdot\vec{B}=0\\ \nu=1,2,3: \text{电环路 } \nabla\times\vec{E}+\partial_t\vec{B}=0\end{cases}$

例 从麦方程可直接导连续性方程：$\partial_\mu\partial_\nu F^{\mu\nu}=\mu_0\partial_\mu j^\mu$，而 $\partial_\mu\partial_\nu F^{\mu\nu}=\partial_\nu\partial_\mu F^{\nu\mu}=\partial_\mu\partial_\nu(-F^{\mu\nu})$ 故为零

闵氏力 $K^\mu=qu_\nu F^{\mu\nu}\rightarrow\begin{cases}\nu=0: \text{功率 } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E=q(\vec{u}\cdot\vec{E})\\ \nu=1,2,3: \text{洛伦兹力 } \vec{K}/\gamma_u=\vec{F}=q(\vec{E}+\vec{u}\times\vec{B})\end{cases}$

定义 4 力密度 $f^\mu=(\frac{1}{c}\vec{f}\cdot\vec{u},\vec{f})\rightarrow$ 力密度形式 $f^\mu=j_\nu F^{\mu\nu}=(\frac{1}{c}\vec{E}\cdot\vec{j},\rho\vec{E}+\vec{j}\times\vec{B})$

4 矢势 $A^\mu=\left(\varphi/c,\vec{A}\right)$ 则场张量可表示为 $F^{\mu\nu}=\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu$

「例：$F^{01}=\partial_tA_x/c-(-\partial_x)\varphi/c=-E_x/c$，$F^{12}=(-\partial_x)A_y-(-\partial_y)A_x=-(\nabla\times\vec{A})_z=-B_z$」

规范不变性 可以给 A^μ 加上任意标量函数的梯度 $\partial^\mu\phi$ 而不改变 $F^{\mu\nu}$

(库仑规范不能在 LT 下保持) 洛伦兹规范 $\partial_\mu A^\mu=0\rightarrow\partial_t\varphi/c^2+\nabla\cdot\vec{A}=0$

「麦方程 + 洛规范」$\rightarrow$ 电磁波 $\Box^2A^\nu=\mu_0j^\nu$ (东岸度规有个负号) $\rightarrow\begin{cases}\frac{1}{c^2}\partial_t^2\varphi-\nabla^2\varphi=\rho/\varepsilon_0\\ \frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{A}-\nabla^2\vec{A}=\mu_0\vec{j}\end{cases}$

将麦氏应力张量推广到四维 $\rightarrow$
stress-energy-momentum tensor
应力能量动量张量 零迹对称

$$T^{\mu\nu}\equiv\begin{bmatrix}w & g_xc & g_yc & g_zc\\ S_x/c & -T_{xx} & -T_{xy} & -T_{xz}\\ S_y/c & -T_{yx} & -T_{yy} & -T_{yz}\\ S_z/c & -T_{zx} & -T_{zy} & -T_{zz}\end{bmatrix}$$

w 为电磁场能量密度
$\vec{g}$ 为电磁场动量密度
坡印廷矢 (能流密度) $S_i=g_ic^2$

电磁场运动方程的能动张量表示 $f^\nu=-\partial_\mu T^{\mu\nu}\rightarrow\begin{cases}\nu=0: \text{能量守恒 } \vec{f}\cdot\vec{u}=-(\partial_tw+\nabla\cdot\vec{S})\\ \nu=1,2,3: \text{动量守恒 } f_i=-\partial_tg_i+\partial_jT_{ij}\end{cases}$

「分析力学中拉氏量为 $L(q,\dot{q},t)$，作用量为 $S=\int_t L\,\mathrm{d}t$，时空不对称」

定义 $L=\iiint \mathcal{L}\,\mathrm{d}^3x$，拉氏量密度 $\mathcal{L}$ 应为标量 (LT 不变量)，能量密度的量纲

并将 $q(t)$ 推广为 $\psi(x^\mu)$，从而 $S=\iiiint \mathcal{L}(\psi,\partial_\mu\psi)\,\mathrm{d}^4x$ 哈密顿原理 变为 $\delta\psi(x_1^\mu)=\delta\psi(x_2^\mu)=0$，则 $\delta S=0$

〈分析力学〉「$\delta(\partial_\mu\psi)=\partial_\mu(\delta\psi)$，同理分部积分可得」拉格朗日方程 $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}-\partial_\mu\Big(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\Big)=0$

(同理拉氏量密度不唯一，可加上任意矢量函数的散度 $\mathcal{L}+\partial_\mu V^\mu$)

同理可定义 正则动量密度 $\pi^\mu\equiv\partial_{(\partial_\mu\psi)}\mathcal{L}$ 哈氏量密度 $\mathcal{H}(\psi,\pi^\mu)=\pi^\mu\,\partial_\mu\psi-\mathcal{L}$

「标准模型的任务是构造拉氏量，使其拉氏方程 $\partial_\psi\mathcal{L}=\partial_\mu\pi^\mu$ 能给出运动方程」

标量场

① ψ 取为实标量 $\phi(x^\mu)\in\mathbb{R}$〈流体力学〉「动能 $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$，梯度能 $\frac{1}{2}(\nabla\phi)\cdot(\nabla\phi)$，势能 $U(\phi)$」

将动能项写为协变形式 $\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2\equiv\frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)(\partial_\mu\phi)=\frac{1}{2}(\partial_t\phi)^2-\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 \to \mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2-U(\phi)$

「$\partial_\phi\mathcal{L}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}U$，$\partial_{(\partial_\mu\phi)}\mathcal{L}=\partial^\mu\phi$」若 $U=0$，得运动方程为 $\Box^2\phi=0$，描述的是自由粒子

例〈广相〉对于标量场 $T^{\mu\nu}=\pi^\mu\partial^\nu\phi-g^{\mu\nu}\mathcal{L}$「$\pi^\mu=\partial^\mu\phi$」$\to T^{00}$ 是哈氏量

Klein-Gordon equation

若取谐振子势 $U=\frac{1}{2}m^2\phi^2 \to$ 克莱因戈登方程 $(\Box^2+m^2)\phi=0$，即描述有质量的自由粒子

$\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2-\frac{1}{2}m^2\phi^2+J\phi$ 得运动方程 $(\Box^2+m^2)\phi=J$，故 ϕ 的一次项称为 源流 $J(x^\mu)\phi(x^\mu)$

「一般的势函数 $U=\frac{1}{2}m^2\phi^2+\frac{h}{3!}\phi^3+\frac{g}{4!}\phi^4+\dots$，$h,g,\dots$ 为常系数，若有 $\phi\to-\phi$ 对称性则无奇次幂项」

$\mathcal{L}=\dfrac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2-\dfrac{1}{2}m^2\phi^2-\dfrac{g}{4!}\phi^4 \to$ 自发对称性破缺〈热力学〉

interaction strength

得运动方程为 $(\Box^2+m^2)\phi=-\dfrac{g}{3!}\phi^3$，描述有质量粒子受到相互作用，$g$ 称为 相互作用强度

现有两个全同的标量粒子发生相互作用，记 $\mathcal{L}_i=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_i)^2-\frac{1}{2}m^2\phi_i^2$

「考虑 $\phi_1\leftrightarrow\phi_2$ 交换对称性，自作用 ϕ_i^4 应和互作用 $\phi_1^2\phi_2^2,\phi_2^2\phi_1^2$ 一样强」加入势能 $\mathcal{L}=\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-g(\phi_1^2+\phi_2^2)^2$

做变换 $\begin{bmatrix}\phi_1'\\\phi_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1\\\phi_2\end{bmatrix}$ 时拉氏量不变 $\to$ 实标量粒子有内禀 $\mathbf{SO}(2)$ 对称性

② 复标量场，取 $\psi=\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1+\mathbf{i}\phi_2)$，则 $\psi^\dagger=\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1-\mathbf{i}\phi_2)$，得 $\mathcal{L}=\partial^\mu\psi^\dagger\,\partial_\mu\psi-m^2\psi^\dagger\psi-g(\psi^\dagger\psi)^2$

做变换 $\psi\to\psi\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 时拉氏量不变 $\to$ 复标量粒子有内禀 $\mathbf{U}(1)$ 对称性

矢量场

③ 对于电磁场，ψ 取 4 矢势 A_ν「$\mathcal{L}$ 可以是 $A_\nu,\partial_\mu A_\nu,F_{\mu\nu}\dots$ 的函数，又要求为标量，故应做内积」

「哈氏量的提示 $\mathcal{H}=\dfrac{1}{2}\varepsilon_0E^2+\dfrac{1}{2\mu_0}B^2$」取 $\mathcal{L}_0=\dfrac{1}{2}\varepsilon_0E^2-\dfrac{1}{2\mu_0}B^2=-\dfrac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$

「$\mathcal{L}_0$ 仅为 $\partial_\mu A_\nu$ 的函数，故 $\partial_{A_\nu}\mathcal{L}=0$，因要对 $\partial_\mu A_\nu$ 求导，故把 F 都换到下标，并换指标记号以免混淆
$F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}=\eta^{\alpha\bar{\alpha}}\eta^{\beta\bar{\beta}}F_{\alpha\beta}F_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$，$\partial_{(\partial_\mu A_\nu)}F_{\alpha\beta}=\partial_{(\partial_\mu A_\nu)}(\partial_\alpha A_\beta-\partial_\beta A_\alpha)=\delta_\alpha^\mu\delta_\beta^\nu-\delta_\beta^\mu\delta_\alpha^\nu$，积的求导 $\partial_{(\partial_\mu A_\nu)}(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta})=$
$\eta^{\alpha\bar{\alpha}}\eta^{\beta\bar{\beta}}\big[(\delta_\alpha^\mu\delta_\beta^\nu-\delta_\beta^\mu\delta_\alpha^\nu)F_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}+(\delta_{\bar{\alpha}}^\mu\delta_{\bar{\beta}}^\nu-\delta_{\bar{\beta}}^\mu\delta_{\bar{\alpha}}^\nu)F_{\alpha\beta}\big]=(\eta^{\mu\bar{\alpha}}\eta^{\nu\bar{\beta}}-\eta^{\nu\bar{\alpha}}\eta^{\mu\bar{\beta}})F_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}+(\text{一样的})=2(F^{\mu\nu}-F^{\nu\mu})=4F^{\mu\nu}$」

得运动方程为 $\partial_\mu F^{\mu\nu}=0$，故 $\mathcal{L}_0$ 描述真空中的电磁场

「可加上任意矢量的散度 $-\dfrac{1}{2\mu_0}\partial_\mu(A_\nu\partial^\nu A^\mu)$，因 $\partial_\mu A^\mu=0$ 括号可去掉」亦可写作 $\mathcal{L}_0=-\dfrac{1}{2\mu_0}\partial_\mu A_\nu\partial^\mu A^\nu$

「$\partial_{(\partial_\mu A_\nu)}(\partial_\alpha A_\beta\partial^\alpha A^\beta)=\eta^{\alpha\alpha}\eta^{\beta\beta}(2\partial_\alpha A_\beta)\delta_\alpha^\mu\delta_\beta^\nu=2\partial^\mu A^\nu$」得 $\partial_\mu\partial^\mu A^\nu=0$

有源时取 $\mathcal{L}_{em}=\mathcal{L}_0-j^\nu A_\nu$，则得 $\partial_\mu F^{\mu\nu}=\mu_0 j^\nu$ 或 $\partial_\mu\partial^\mu A^\nu=\mu_0 j^\nu$

Proca

若规范粒子有质量，无源为 KG 方程，有源为 普罗卡方程 $(\Box^2+m^2)A^\mu=\mu_0 j^\mu \to \mathcal{L}=\mathcal{L}_{em}+\dfrac{m^2}{2\mu_0}A^\nu A_\nu$

$\to$ 加入质量项后不再有规范不变性

〈广相〉对于矢量 $T^{\mu\nu}=\pi^{\mu\nu}\partial^\lambda A_\nu-g^{\mu\nu}\mathcal{L}$ (不唯一，可加个反对称张量的梯度) $\pi^{\mu\nu}\equiv\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}=-F^{\mu\nu}$

「加 $\partial_\lambda(F^{\mu\lambda}A^\nu)$ 使对称化」$T^{\mu\nu}=\dfrac{1}{\mu_0}F^{\mu\lambda}F_\lambda{}^\nu-\eta^{\mu\nu}\mathcal{L}$ **例**「$\eta^{00}F^{0\lambda}F_{\lambda0}=(-E/c)^2$，$\eta^{00}F^{i\lambda}F_{\lambda0}=(\vec{E}\times\vec{B})_i/c$」

$T^{00}=\frac{1}{\mu_0}F^{0\lambda}F_\lambda{}^0-\frac{1}{2}(\varepsilon_0E^2-\frac{1}{\mu_0}B^2)=\frac{1}{2}(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2)=w$，$T^{i0}=\frac{1}{\mu_0}F^{i\lambda}F_\lambda{}^0=S_i/c$