量子

量子力学

笔记项目主页：http://leptc.github.io/lenote

精

赵凯华. 新概念物理教程—量子物理（第二版）. 高等教育出版社 (初学入门)

Griffiths. Introduction to quantum mechanics. Pearson (最好的初量教材)

└ 中译: 贾瑜. 量子力学概论. 机械工业出版社

Sakurai. Modern Quantum Mechanics (2nd ed). Wesley (现量, 讲概念不错, 但符号记号陈旧)

清华大学量子力学课程讲义

参

曾谨言. 量子力学导论（第二版）. 北京大学出版社 (初量, 数学很详细)

程檀生. 量子力学习题指导. 北京大学出版社 (研究生碰到的常用结论很多在这里有证明...)

Last compiled on 2015/07/31 at 21:27:00

基本公设

非相对论单粒子量子力学基本公设:

① **状态空间** (孤立) 系统的状态用 **希尔伯特空间** 中的归一化矢量表示 (复变, 线性)

② **演化** 封闭量子系统的演化可以用幺正算符作用在态矢上来描述 (例如时间演化遵从薛定谔方程)

③ **测量** **可观测量** 由厄米算符表示, 概率 p_x 为概率幅的模方, 测量平均值 $\langle \hat{X}\rangle \equiv \langle\psi|\hat{X}|\psi\rangle$ 和经典对应

见〈量子信息〉**投影测量** 后, 波函数 **坍缩** 到相应本征态 (冯诺依曼 1932) (③ 可能可由 ② 推出)

薛方程

〈光学〉(黑体辐射的普朗克公式 1900, 光电效应赫兹 1887, 爱因斯坦 1905 解释, 康普顿效应 1923)

〈原子〉(氢原子光谱巴耳末公式 1885, 卢瑟福模型 1911, 玻尔模型 1913, 索末菲量子化条件 1915)

wave particle duality

〈量子信息, 基本实验〉**波粒二象性** 微观粒子的运动由概率幅波来描述 (引入复数就是引入相位)

(不是波包, 自由粒子的波包要扩散〈相干态〉不是疏密波, 单粒子就有波动性)

de Broglie

德布罗意波 (1923) $\hbar k=p,\ \hbar\omega=E$ (标量波, 不存在横纵性或偏振) $v_g=\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}=\dfrac{p}{m}$, 但 $\dfrac{\mathrm{d}v_g}{\mathrm{d}k}=\dfrac{\hbar}{m}\neq 0$

当粒子的德布罗意波长 $\lambda=\dfrac{h}{p}=\dfrac{h}{\sqrt{2mE}}$ 大于与其发生相互作用的尺度时, 必须用量子力学来处理

例 电子波长 ~原子核大小时, $E=\dfrac{h}{\lambda}c\approx 400\ \mathrm{MeV}$ 中子波长 ~晶格间距时, $T=\dfrac{E}{k_{\mathrm{B}}}\approx 240\ \mathrm{K}$

引力波探测棒, 10 吨, 振幅 $10^{-21}\ \mathrm{m}$, 周期 $10^{-3}\ \mathrm{s}$, $\lambda\approx 10^{-20}\ \mathrm{m}>$ 振幅, 是量子谐振子

wave function

经典平面波 $\mathrm{Re}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right]\to$ **波函数** $\psi=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}$ (真·复数波) $\to \mathrm{i}\hbar\partial_t\psi=E\psi\to$

「记 $\psi=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\vec{r})}$, 有 $-\mathrm{i}\hbar\nabla\psi=\hbar(\nabla\varphi)\psi=\vec{p}\psi$」$\to \hat{p}\doteq-\mathrm{i}\hbar\nabla$

Schrödinger equation

薛定谔方程 (1926) $\mathrm{i}\hbar\partial_t\psi=\hat{H}\psi$ (ψ 是 $(\vec{r},t)$ 的函数), $\hat{H}=$动能$+$势能$=-\dfrac{\hbar^2\nabla^2}{2m}+V$

stationary Schrödinger equation

$\xrightarrow{V\text{不含时}}$ **定态薛方程** (能量本征方程) $\hat{H}\psi=E\psi$ ($\psi(\vec{r})$ 不含 t)

「分离变量法」**定态波函数** (能量本征态) $\psi_i(\vec{r},t)=\psi_i(\vec{r})\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E_it}$

定态展开 $\psi(\vec{r},t)=\sum C_i\psi_i(\vec{r})\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E_it}$, 由初始条件定展开系数 $C_i=\int_\infty\psi_i^*(\vec{r})\psi(\vec{r},0)\,\mathrm{d}\vec{r}$

统计诠释

statistical interpretation probabiliy amplitude

统计诠释 (玻恩 1926) 波函数的模方 $|\psi|^2$ 是概率的体密度 ρ (不是真实粒子数密度) 波函数 = **概率幅**

「$\partial_t(\psi^*\psi)=\psi^*\partial_t\psi+\psi\partial_t\psi^*\xlongequal[\text{若势函数为实}]{\psi^*(\text{方程})-(\text{方程})^*\psi}\dfrac{\mathrm{i}\hbar}{2m}\left(\psi^*\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\psi^*\right)=\dfrac{\mathrm{i}\hbar}{2m}\nabla\left(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*\right)$」

continuity equation probability density

概率的 **连续性方程** $\partial_t\rho+\nabla\cdot\vec{j}=0$, 其中 **概率密度** $\rho(\vec{r},t)=|\psi(\vec{r},t)|^2$ (体积分表示概率)

probability flux

概率流 $\vec{j}=\dfrac{-\mathrm{i}\hbar}{2m}(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*)=\dfrac{\hbar}{m}\mathrm{Im}(\psi^*\nabla\psi)$

例 平面波 $\psi=\sqrt{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}$ 的 $\vec{j}=\rho\dfrac{\hbar}{m}\vec{k}\to\displaystyle\int\vec{j}(\vec{r},t)\,\mathrm{d}^3\vec{r}=\dfrac{\langle\hat{\vec{p}}\rangle(t)}{m}$, 球面波 $\psi=\dfrac{1}{r}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}kr}$ 的 $\vec{j}=\dfrac{\hbar k}{mr^2}\vec{e_r}$

注 若势函数为复 $V=V_0-\mathrm{i}\Gamma$, 则粒子数不守恒, 为指数衰减 $\tau=\dfrac{\hbar}{2\Gamma}$〈核物〉(可描述吸收)

「$\partial_t\rho=0$ 要求 $\psi(\pm\infty,t)\to 0$」概率流在无穷远面积分为零 **推论** 归一化条件不随时间变化

设 $\psi=\sqrt{\rho}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S}$, $\rho(\vec{r},t)>0$, $S(\vec{r},t)\in\mathbb{R}$, 「$\vec{j}/\rho\propto(\frac{\nabla\psi}{\psi}-\mathrm{c.c.})=(\nabla(\ln\psi)-\mathrm{c.c.})=\nabla(\ln(\frac{\psi}{\psi^*}))$」得 $\vec{j}=\dfrac{\rho\nabla S}{m}$

结论 $\nabla S=\vec{p}$ 相位的空间变化导致了概率流, 定义 $\vec{v}=\vec{p}/m$ 则 $\vec{j}=\rho\vec{v}$ **推论** $\nabla\times\vec{v}=0$

(函数 $\vec{v}(\vec{r},t)$ 不是真的速度, 因为不可能同时测准速度和位置)

把 $\psi=\sqrt{\rho}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S}$ 代回薛方程, 在 $\hbar\to 0$ 极限下, 方程退化回哈雅方程 $\dfrac{1}{2m}|\nabla S|^2+V+\partial_tS=0$

对于定态, 分离出 $\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Et}$, 相当于哈密顿主函数可分离 $S(\vec{r},t)=W(\vec{r})-Et$

classical region

设 $\psi=A(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(x)}$, 则 $\psi''=[A''+2\mathrm{i}A'\varphi'+\mathrm{i}A\varphi''-A(\varphi')^2]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, 记 $p(x)=\sqrt{2m[E-V(x)]}$ $V\leqslant E$ 称为 经典区间

则定态薛可写为 $\psi''=-\frac{p^2}{\hbar^2}\psi$, 实部为 $A''=A\left[(\varphi')^2-\frac{p^2}{\hbar^2}\right]$, 虚部为 $(A^2\varphi')'=0\to A=\frac{C}{\sqrt{\varphi'}}$

Wentzel Kramers Brillouin

WKB 近似 $A(x)$ 变化缓慢 $\left(\frac{A''}{A}\ll(\varphi')^2 \text{ 和 } \frac{p^2}{\hbar^2}\right)$, 则 $\psi(x)\approx\frac{C}{\sqrt{p(x)}}\mathrm{e}^{\pm\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int p(x)\,\mathrm{d}x}$

(速度越快的区域, 找到粒子的概率越小)

波函数

(矩阵力学海森堡 1925, 波动力学薛定谔 1926, 两者等价)

波函数是态矢 $|\psi\rangle$ 在某连续表象 $\hat{X}$ 中的展开系数 $\psi(x)=\langle x|\psi\rangle$

反过来 $|\psi\rangle\doteq\int\mathrm{d}x\,|x\rangle\langle x|\psi\rangle=\int\mathrm{d}x\psi(x)\,|x\rangle$ 其中 $x\in\mathbb{R}$, $|x\rangle$ 表示 $\hat{X}$ 的取 x 值的本征态

平面波的 δ 函数归一化 $\langle x_1|x_2\rangle=\delta(x_1-x_2)=\int\mathrm{d}p\,\langle x_1|p\rangle\langle p|x_2\rangle=|A|^2\int\mathrm{d}p\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}p(x_1-x_2)}=|A|^2 2\pi\hbar\delta(x_1-x_2)$

动量本征态 $\psi_p(x)=\langle x|p\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}px}$ (可用作表象变换函数), 三维的 $\langle\vec{r}|\vec{p}\rangle=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}}$

例 $\psi(x)=\langle x|\psi\rangle=\int\mathrm{d}p\psi(p)\,\langle x|p\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\mathrm{d}p\psi(p)\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}px}=\mathcal{F}^{-1}[\psi(p)]$

Gaussian wave packet

高斯型波包 $\psi(x)=(\pi a^2)^{-1/4}\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}px\right)$ 性质 $\langle x\rangle=0$, $\langle x^2\rangle=\frac{d^2}{2}$, $\langle\hat{p}\rangle=p$, $\langle\hat{p}^2\rangle=p^2+\frac{\hbar^2}{2d^2}$

(满足最小不确定度)

定态

共轭定理 若 ψ 是能量为 E 定态薛的解, 只要 V 为实, 则 ψ^* 也是方程对应能量为 E 的一个解

$\to$ 若 E 下无简并, 可取 ψ 为实, 若有简并, 总能找出一组实解

反射定理 若 $V(\vec{r})=V(-\vec{r})$, 则 $\psi(-\vec{r})$ 也是方程对应能量为 E 的一个解, 若无简并, 则 ψ 必有确定宇称, 若有简并, 总能找出一组有确定宇称的解 (如自由粒子可写成 $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}kr}$ 或 $\sin kr$, $\cos kr$)

连续定理 若势函数在某点连续或有限阶跃, 则 ψ 和 ψ' 在该点连续「定态薛在该点附近积分」〈 δ 势 〉

定理 若 ψ_1,ψ_2 都是 E 下的解, 有 $(\psi_1\psi_2'-\psi_1'\psi_2)'=0$ $(\forall\,\vec{r})$, 对于束缚态, 常数是零, $\psi_1\psi_2'=\psi_1'\psi_2$ $\to$

不简并定理 除少数不规则 (有奇点) 的势场外, 一维势场若存在束缚态, 能级必不简并

「若 ψ 能除作分母, 可积分得 $\ln\psi_1=\ln\psi_2+C$, 即只差个系数, 线性相关」

$\to$ 规则势场为实函数时, 一维束缚态的概率流密度为零, 相位为常数 (常取作零)

bound state　　　　scattering state

束缚态 $\lim\limits_{r\to\infty}\psi(\vec{r})\to 0$, 否则称为 散射态, 束缚态的能量 E 满足条件 $V_{\min}<E<V_{\mathrm{out},\min}$

「若 $E<V_{\min}$, 则 ψ'' 和 ψ 同号, 波函数不可能归一化」

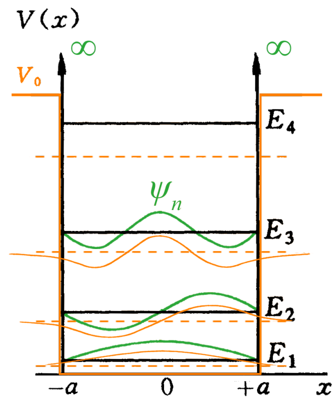
ground state

能量最低的束缚态称为 基态, 除 $r=\pm\infty$ 之外基态波函数无节点(零点)

excited

能量比基态高的称为 激发态, 激发态的节点数依次增加一个, 能量越高波函数振荡越厉害

方势



infinite square well

一维 无限深方势阱 若势取在 $0<x<2a$, 解得 $\psi(x)=A\sin(kx)$, $A^2=\frac{1}{a}$, $\langle x\rangle=a$

若对称, $\psi_n=A\cos(kx)$, $n=1,3,\ldots$ (偶宇称), $=A\sin(kx)$, $n=2,4,\ldots$ (奇宇称)

解出能级一致 $E_n=\frac{\hbar^2k^2}{2m}$, $k=\frac{n\pi}{2a}$, $n\in\mathbb{N}^*$ (最低能级不为零, $k=0$ 的波无意义)

性质 除端点外, 第 n 激发态波函数有 $(n-1)$ 个节点 性质 $\{\psi_n\}$ 正交归一完备

性质 波函数在全空间连续, 波函数的导数在端点不连续

「变量可分离」 推广到三维 $E=\frac{\hbar^2\pi^2}{2m(2a)^2}(n_x^2+n_y^2+n_z^2)$

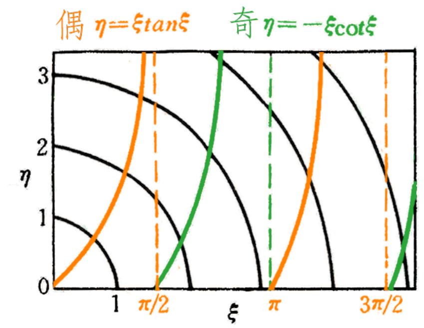
finite square well

一维 有限深方势阱 束缚态 $E<V_0$, 设 $k=\sqrt{2mE}/\hbar$, $\kappa=\sqrt{2m(V_0-E)}/\hbar$,

偶宇称, 阱外 $\psi=\mathrm{e}^{\pm\kappa x}$, 阱内 $\cos kx$「$x=a$ 处 $(\ln\psi)'$ 连续」 $k\tan ka=\kappa$

奇宇称, 阱外 $\psi=\pm\mathrm{e}^{\pm\kappa x}$, 阱内 $\sin kx$, 超越方程 $k\cot ka=-\kappa$

设无量纲量 $\xi=ka>0,\ \eta=\kappa a>0$



［图解法，找 $\xi^2+\eta^2=2mV_0a^2/\hbar^2$ 和方程的交点，得 E］

结论 最低的能级偶宇称，之后奇偶相间，

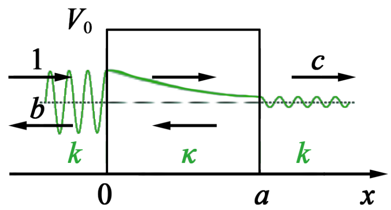
每个能级都比 $V_0\to\infty$ 的相应能级低一些

势阱再浅也至少存在一个偶束缚态 (三维则不然)

$a\to 0,\ V_0\to\infty,\ 2aV_0=\alpha\ \to\ \delta$ 势阱

square barrier

一维 方势垒 $V(x)=V_0\ (0\leqslant x\leqslant a)$，粒子从左向右运动



设 $\psi(x<0)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}+b\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx},\ \psi(x>a)=c\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$，

$\psi(0<x<a)=c_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa x}+c_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\kappa x}\equiv f\cosh\kappa x+g\sinh\kappa x$

$x=0$ 处 ψ,ψ' 连续，得 $f=1+b,\ g\kappa=\mathrm{i}k(1-b)$，再联立 $x=a$ 处连续，得

$b=(k^2+\kappa^2)\sinh\kappa a/d,\ c=2\mathrm{i}k\kappa/d$，其中 $d=(k^2-\kappa^2)\sinh\kappa a+2\mathrm{i}k\kappa\cosh\kappa a$

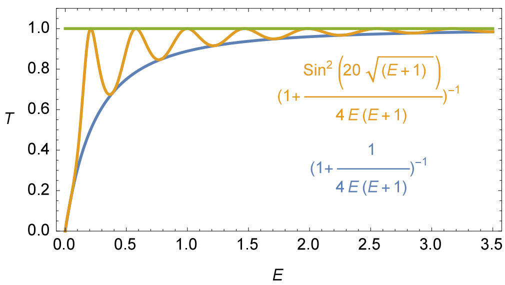
transmission coefficient　　reflection coefficient

$|d|^2=(k^2+\kappa^2)^2\sinh^2\kappa a+4k^2\kappa^2$，透射系数 $T\equiv\dfrac{k_{+\infty}|c|^2}{k_{-\infty}|1|^2}=|c|^2$ 反射系数 $R\equiv\dfrac{|b|^2}{|1|^2}=1-T$

$V_0>0$，势垒，无束缚态	$V_0<0$，势阱，有束缚态	散射态 (以 0 为无穷远势能，$E<0$ 解发散)
$0<E<V_0$	($V_0<E<0$ 有束缚态解)	$\kappa=\sqrt{2m(V_0-E)}/\hbar$，得 $T=\left[1+\frac{V_0^2}{4E(V_0-E)}\sinh^2\kappa a\right]^{-1}$
$0<V_0<E$ (光疏介质)	$V_0<0<E$ (光密介质)	$k'=\sqrt{2m(E-V_0)}/\hbar$，得 $T=\left[1+\frac{V_0^2}{4E(E-V_0)}\sin^2k'a\right]^{-1}$

tunnelling effect

隧穿效应 即使 $E<V_0$，$T\overset{\kappa a\gg 1}{\approx}\dfrac{16E(V_0-E)}{V_0^2}\mathrm{e}^{-2\kappa a}\neq 0$〈 α 衰变 〉



Ramsauer-Townsend effect

共振透射 $k'a=n\pi$ 时 T 极大 $\to E+|V_0|=\dfrac{\hbar^2}{2m}\left(\dfrac{n\pi}{2a}\right)^2$

(共振透射和形成束缚态的原因，都是在阱两壁上的反射形成共振)

当入射粒子能量与无限深势阱 虚能级 重合时，就会发生共振透射

delta-function potential

δ 势阱 $V(x)=-\alpha\delta(x)\ (\alpha>0)$　① 束缚态 $E<0$［设 $\kappa=\sqrt{-2mE}/\hbar$，在 $V=0$ 区域 $\psi(x)=C\,\mathrm{e}^{-\kappa|x|}$，

定态薛 $\psi''+\frac{2m}{\hbar^2}(E+\alpha\delta)\psi=0$ 在 $0_-\sim0_+$ 积分，ψ' 的跃变 $\psi'(0_+)-\psi'(0_-)=-\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\psi(0)=-2C\kappa$］

$\kappa=\dfrac{m\alpha}{\hbar^2},\ E=-\dfrac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$，归一化 $C=\sqrt{\kappa}$ 特征长度 $L\equiv\alpha^{-1}$ (量纲为米) (可近似描述短程强作用)

② 散射态 $E>0$，ψ 不可归一化，$T=\left[1+\dfrac{m\alpha^2}{2\hbar^2E}\right]^{-1}$ (若换成 δ 势垒，透反射率一样)

常用势

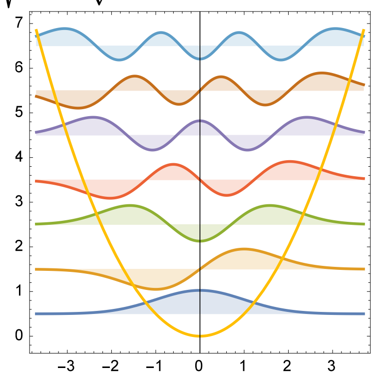
harmonic oscillator

一维 谐振子 势 $V(x)=\frac{1}{2}m\omega^2x^2$［无量纲化］$\alpha=\sqrt{\dfrac{m\omega}{\hbar}},\ \xi=\alpha x,\ \lambda=\dfrac{E}{\frac{1}{2}\hbar\omega}$，定态薛方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\xi^2}=(\xi^2-\lambda)\psi$

$\xi\to\pm\infty$ 的渐进解为 $\mathrm{e}^{\xi^2/2}$，但取正号不满足束缚态，故再设 $\psi(x)=\mathrm{e}^{-\xi^2/2}u(\xi)$，得 $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\xi^2}-2\xi\,\mathrm{d}_\xi u+(\lambda-1)u=0$

此为厄米方程，〈 数理 〉要求 $(\lambda-1)=2n$ 得 $E_n=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega$，归一化后 $\psi_n(x)=\sqrt{\dfrac{\alpha}{n!2^n\sqrt{\pi}}}\,\mathrm{e}^{-(\alpha x)^2/2}H_n(\alpha x)$

结论 基态 $\psi_0(x)=\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt[4]{\pi}}\mathrm{e}^{-(\alpha x)^2/2}$　$(\psi(x,t)=\psi(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2})$



动量表象 $\psi_0(p)=\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt[4]{\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-(\alpha x)^2/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px/\hbar}\mathrm{d}x\xlongequal{\text{配方}-\frac{\alpha^2}{2}(x-\frac{\mathrm{i}p}{\alpha^2\hbar})^2}$

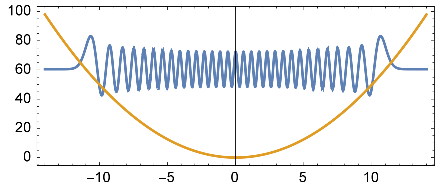
$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt[4]{\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\sqrt{\frac{2}{\alpha^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\,\mathrm{e}^{-\frac{p^2}{2\alpha^2\hbar^2}}=\frac{1}{\sqrt{\alpha\hbar}\sqrt[4]{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{p^2}{2\alpha^2\hbar^2}}$

$\psi_1(x)=\dfrac{\sqrt{2\alpha}}{\sqrt[4]{\pi}}(\alpha x)\,\mathrm{e}^{-(\alpha x)^2/2},\ \psi_3(x)=\dfrac{\sqrt{\alpha/2}}{\sqrt[4]{\pi}}(2(\alpha x)^2-1)\,\mathrm{e}^{-(\alpha x)^2/2}$

宇称同 n，$\langle x\rangle=0,\ \langle E_\mathrm{k}(x)\rangle=\langle V(x)\rangle=E_n/2$

「递推关系可用 $\hat{x}=\hat{a}+\hat{a}^\dagger$ 推出来」 $\hat{x}\,|n\rangle=\frac{1}{\alpha}\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\,|n-1\rangle+\sqrt{\frac{n+1}{2}}\,|n+1\rangle\right]$

$\hat{x}^2\,|n\rangle=\frac{1}{2\alpha^2}\left[\sqrt{n(n-1)}\,|n-2\rangle+(2n+1)\,|n\rangle+\sqrt{(n+1)(n+2)}\,|n+2\rangle\right]$



correspondence principle

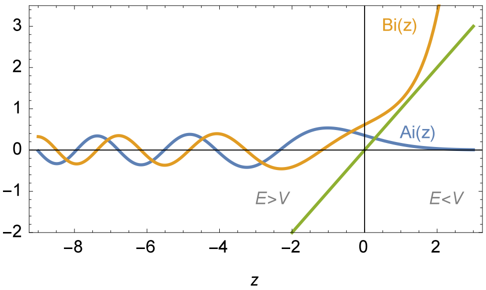
对应原理 (玻尔) 大量子数极限下，量子理论趋近于经典理论

库仑势〈 氢原子 〉

定理 只要势是球对称的 $V=V(r)$，对于束缚态有 $|\psi(0)|^2=\dfrac{m}{2\pi\hbar}\langle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}V\rangle$

线性势 $V(x)=E_0+fx$ 「 定态薛 $\psi''=\dfrac{2m}{\hbar^2}fx\psi$,

记 $z=\sqrt[3]{2mf/\hbar^2}\,x$, 则 $\psi''_z=z\psi$ 为艾里方程」〈 数理 〉



Airy function　patching　turning point

其精确解为 **艾里函数**, 常用于衔接 WKB 近似的**转折点**区域

态矢

state vector　Hilbert space

物理状态用 **波函数** 或 **态矢** 来表示，态矢存在于 **希尔伯特空间** $\mathcal{H}$ 中 (任意维复内积空间)〈 实分析 〉

ray

$c|\psi\rangle=|\psi\rangle c$, 物理认为 $|\psi\rangle$ 和 $c|\psi\rangle$ 代表同一个态，但为了概率诠释应归一化 (不限长度的矢量叫射线)

global phase factor

由于复变，归一化后仍有相位不定性 → **全局相因子** 与可观测性质无关，可忽略

null ket　additive identity

「为了与真空态 $|0\rangle$ 区分」 **空右矢** $|\varnothing\rangle\equiv 0\,|\psi\rangle\doteq\vec{0}$ (加运算的单位元) (无法归一化)

bra　ket　dual correspondence

左矢 $\langle\psi|$ (≐ 行矢量) 和 **右矢** $|\psi\rangle$ (≐ 列矢量) 互为对偶

内外积

inner product

内积 $\langle\psi_1|\psi_2\rangle=\langle\psi_2|\psi_1\rangle^*\in\mathbb{C}\rightarrow\langle\psi|\psi\rangle\in\mathbb{R}$〈 代数 〉

positive definite metric　indefinite metric

正定规范 $\langle\psi|\psi\rangle\geqslant 0$ (仅当空态矢取等号) (违背此假设的叫不定规范)

outer product

外积 的结果是算符 $|\psi_1\rangle\langle\psi_2|=\hat{X}\rightarrow\hat{X}^\dagger=|\psi_2\rangle\langle\psi_1|$

direct product

直积 / 张量积 $|\psi_1\rangle|\psi_2\rangle\equiv|\psi_1\rangle\otimes|\psi_2\rangle$ (ψ_1,ψ_2 属于不同的态矢空间)，自身直积记作 $|\psi\rangle^{\otimes n}$

算符

dynamical variable / observable

力学量 / 可观测量 动力学变量 (几乎所有物理量都是，在非相对论量子力学中时间不是)

operator

可观测量用线性**算符**表示 $\hat{F}\left(\sum c_i\,|\psi_i\rangle\right)=\sum c_i\left(\hat{F}\,|\psi_i\rangle\right)$, 约定右算符从左往右作用 $\hat{F}\,|\psi\rangle\leftrightarrow\langle\psi|\,\hat{F}^\dagger$

(算符并非属于态矢空间，而是作用在态矢上进行变换，所以定态薛方程中 ψ 不约掉)〈 群论 〉

adjoint　Hermite conjugate　anti-linearity

左右算符互称为 **伴随**, 在矩阵表示中即 **厄米共轭** $\hat{F}^\dagger=(\hat{F}^*)^T$ **性质** $(\hat{F}^\dagger)^\dagger=\hat{F}$, 反线性性 $(a_i\hat{F}_i)^\dagger=a_i^*\hat{F}_i^\dagger$

算符乘法同矩阵乘法 $\langle e_i|\hat{X}\hat{Y}|e_j\rangle=\sum_k\langle e_i|\hat{X}|e_k\rangle\langle e_k|\hat{Y}|e_j\rangle$, 有分配律，无交换律，$\hat{F}\hat{X}\,|\psi\rangle\leftrightarrow\langle\psi|\,\hat{X}^\dagger\hat{F}^\dagger$

identity operator　null operator

算符相等 $\hat{X}=\hat{Y}\Leftrightarrow\forall\psi,\hat{X}\,|\psi\rangle=\hat{Y}\,|\psi\rangle$, **单位算符** $\forall\psi,I\,|\psi\rangle=|\psi\rangle$ **空算符** $\forall\psi,\hat{X}\,|\psi\rangle=|\varnothing\rangle$

associative axiom

结合公理 $(|\psi_1\rangle\langle\psi_2|)\,|\psi_3\rangle=|\psi_1\rangle\,(\langle\psi_2|\psi_3\rangle)$, $\langle\psi_1|\,(\hat{X}\,|\psi_2\rangle)=(\langle\psi_1|\,\hat{X})\,|\psi_2\rangle\equiv\langle\psi_1|\hat{X}|\psi_2\rangle=\langle\psi_2|\hat{X}^\dagger|\psi_1\rangle^*$

注 $(\hat{X}^\dagger\,|\psi\rangle)^\dagger=\langle\psi|\,\hat{X}$ 对非厄米算符同样成立 (矩阵元不用变，由矩阵乘法结合律计算结果不变)

厄米算符

Hermite / self-adjoint ··· anti-Hermite

厄米算符 / 自伴算符 $\hat{F}^\dagger=\hat{F}$ ⇒ 本征值是实数 反厄米算符 $\hat{F}^\dagger=-\hat{F}$, 本征值是纯虚数

推论 若 $\hat{A},\hat{B}$ 是厄米算符, 则 $(\hat{A}+\hat{B})^n$ 是厄米算符, $\mathbf{i}[\hat{A},\hat{B}]$ 是厄米算符, 若还对易则 $\hat{A}\hat{B}$ 是厄米算符

对称化 $\vec{p}$ 和 $\vec{l}$ 均为厄米算符, 则 $(\vec{p}\times\vec{l})^\dagger=-\vec{l}\times\vec{p}$, 得这样构造厄米的楞次算符 $\frac{1}{2}(\vec{p}\times\vec{l}-\vec{l}\times\vec{p})$

性质 转置, 共轭, 厄米对直积分配 $(\hat{A}\otimes\hat{B})^\dagger=\hat{A}^\dagger\otimes\hat{B}^\dagger$ **推论** 厄米(/半正定/幺正) 算符的直积仍厄米(//)

normal ··· spectral decomposition theorem

正规算符 $\hat{F}\hat{F}^\dagger=\hat{F}^\dagger\hat{F}$ 谱分解定理 算符正规 ⇔ 可对角化 **定理** 正规算符厄米 ⇔ 本征值为实

positive operator ··· positive definite

半正定算符 $\forall|\psi\rangle,\langle\psi|\hat{F}|\psi\rangle\geqslant 0$, 半正定 ⊂ 厄米「任意算符可写成 $\hat{A}+\mathbf{i}\hat{B}$」, 正定 $\forall|\psi\rangle\neq|\varnothing\rangle,\langle\psi|\hat{F}|\psi\rangle>0$

推论 对任意算符 $\hat{A}$, $\hat{A}^\dagger\hat{A}$ 是半正定的

本征值谱

orthogonal ··· normalize

正交 $\langle\psi_1|\psi_2\rangle=0$ 归一 (非空态矢) $|\psi'\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}}|\psi\rangle\rightarrow\langle\psi'|\psi'\rangle=1$

eigenvalue spectra

〈代数〉本征值和本征矢系 $\hat{F}|\psi_i\rangle=f_i|\psi_i\rangle$, 称为 本征值谱

secular equation

对角化就是求解 久期方程 $|F-\lambda I|=0$ (名称来自天体力学摄动理论)

orthonormal set

定理 厄米算符的本征值为实数, 属于不同本征值的本征矢正交 正交归一系 $\langle e_i|e_j\rangle=\delta_{ij}$

degenerate

简并 同一本征值下有多个线性独立本征矢〈代数〉施密特正交化

spectral decomposition ··· operator function

正规算符 $\hat{X}$ 的 谱分解 $\hat{X}=\sum x|x\rangle\langle x|$, 定义 算符函数 $f(\hat{X})=\sum f(x)|x\rangle\langle x|$

(正规算符可定义指数, 半正定算符可定义平方根, 正定算符可定义对数)

向量空间的维度 N 就是独立本征态的数目 (可以是有限维, 可数维, 连续维...)

对易

commutator ··· anti-commutator

对易式 $[\hat{A},\hat{B}]\equiv\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}$ 反对易式 $\{\hat{A},\hat{B}\}\equiv\hat{A}\hat{B}+\hat{B}\hat{A}$ **推论** $[\hat{A},\hat{B}]^\dagger=[\hat{B}^\dagger,\hat{A}^\dagger]$

性质 交换反对称, 线性 $[\hat{A}+\hat{B},\hat{C}]=[\hat{A},\hat{C}]+[\hat{B},\hat{C}]$, 雅可比恒等式〈群论〉

乘积展开 $[\hat{A}\hat{B},\hat{C}]=\hat{A}[\hat{B},\hat{C}]+[\hat{A},\hat{C}]\hat{B}$, $[\hat{A},\hat{B}\hat{C}]=\hat{B}[\hat{A},\hat{C}]+[\hat{A},\hat{B}]\hat{C}$

Dirac's rule

狄拉克规则 (1925) 泊松括号 $\{x,p\}\xrightarrow{\text{除以 }\mathbf{i}\hbar}$ 对易式 $[\hat{x},\hat{p}]\rightarrow$ 经典极限 $\hbar\rightarrow 0$ 下所有量都对易

simultaneous diagonalization theorem

同时对角化定理 $\hat{A},\hat{B}$ 为厄米算符, 则 ∃ 表象(标准正交基) 使 $\hat{A},\hat{B}$ 都对角的充要条件是 $[\hat{A},\hat{B}]=0$

定理 若 $\hat{X}$ 没有简并, 则和 $\hat{X}$ 对易的算符在 $\hat{X}$ 表象下是对角的「$\langle x_i|[\hat{X},\hat{Y}]|x_j\rangle=(x_i-x_j)\langle x_i|\hat{Y}|x_j\rangle=0$」

simutaneous eigenket

算符对易 ⇔ 有 共同本征矢 $|x_i,y_i\rangle$ 必要性: $[\hat{X},\hat{Y}]|\psi\rangle=\sum_i(x_iy_i-y_ix_i)|x_i,y_i\rangle=0$

充分性: $\hat{X}\hat{Y}|x\rangle=\hat{Y}\hat{X}|x\rangle=x\hat{Y}|x\rangle$ 说明 $\hat{Y}|x\rangle$ 也是 $\hat{X}$ 的属于 x 的本征矢, 只能差常数 y

注 对易算符, 一个取本征态, 另一个不一定能确定态, (例如 $\hat{L}^2$ 确定时 $\hat{L}_z$ 不能确定, 有简并)

注 对于某些特殊的态 (甚至子空间, 如 $l=0$ 的 s 态), 有可能不对易算符也以它为共同本征态

$([\hat{l}_x,\hat{l}_y]|\psi\rangle=0)$

Complete Set of Commuting Observables

对易可观测量完全集 一组力学量彼此独立, 两两对易, 有共同本征矢, 则给定一组

Complete Set of Commuting Conserved Observables

量子数 (本征值无量纲化) 后, 可完全确定一个态 $\xrightarrow{\text{带上 }\hat{H}}$ 对易守恒量完全集〈守恒律〉

(一个力学量存在简并, 用其它量来确定状态) (先测 $\hat{X}$ 再测 $\hat{Y}$ 不会破坏 $\hat{X}$ 的状态)

例 $[\hat{x},\hat{y}]=0$, 则 $|\vec{r}\rangle$ 是 $\hat{x},\hat{y},\hat{z}$ 的共同本征矢, $\hat{x}|\vec{r}\rangle=x|\vec{r}\rangle$, 记 位矢算符 $\hat{\vec{r}}=(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$

不确定度

expectation value

测量只能得到某本征值, 测得值的平均 → 期望值 $\langle F\rangle\equiv\langle\psi|\hat{F}|\psi\rangle,\langle\psi|\psi\rangle=1$ (平均值是确定的, 似经典)

记算符 $\Delta\hat{F}\equiv\hat{F}-\langle F\rangle$，variance / dispersion 方差 / 离差 $(\Delta F)^2\equiv\langle(\Delta\hat{F})^2\rangle=\langle\hat{F}^2-2\hat{F}\langle F\rangle+\langle F\rangle^2\rangle=\langle\hat{F}^2\rangle-\langle F\rangle^2$

(差方均 = 方均 − 均方) 数 ΔF 即态 $|\psi\rangle$ 的 $\hat{F}$ 量 uncertainty 不确定度

$[\Delta\hat{X},\Delta\hat{Y}]=[\hat{X},\hat{Y}]\to\langle\Delta\hat{X}\Delta\hat{Y}\rangle=\frac{1}{2}\langle[\hat{X},\hat{Y}]\rangle+\frac{1}{2}\langle\{\Delta\hat{X},\Delta\hat{Y}\}\rangle$，若 $\hat{X},\hat{Y}$ 厄米，前一项纯虚，后一项纯实

施瓦茨不等式 $\Delta X^2\Delta Y^2\geqslant\left|\langle\Delta\hat{X}\Delta\hat{Y}\rangle\right|^2\to$ uncertainty relation 不确定度关系 (海森堡 1927) $\Delta X^2\Delta Y^2\geqslant\left(\frac{\langle[\hat{X},\hat{Y}]\rangle}{2\mathrm{i}}\right)^2$

(除 i 是因为分子是虚数) 取等号的条件：施瓦茨不等式取等号，纯实部分为零

结论 两个力学量的不确定度由它们的对易和态共同控制

例「$\Delta F^2\Delta H^2\geqslant(\langle[\hat{F},\hat{H}]\rangle/2\mathrm{i})^2=\frac{\hbar^2}{4}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{F}\rangle\right)^2$，另由狭相应有 $\Delta t\Delta E\geqslant\frac{\hbar}{2}$」$\Delta t=\Delta\hat{F}/\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{F}\rangle\right|$

即 Δt 的含义是力学量平均值变化一个标准差 ΔF 所需的时间

表象

completeness relation 完备性条件 $\sum_i|e_i\rangle\langle e_i|=I$ projection operator 投影算符 $\hat{P}_i=|e_i\rangle\langle e_i|$，厄米算符，幂等 $\hat{P}_i^2=\hat{P}_i$，本征值为 0, 1

$\hat{P}_i$ 的作用就是只选出第 i 态，剩下的部分 $\hat{Q}=I-\hat{P}$ 叫作 $\hat{P}$ 的 orthogonal complement 正交补

任意态矢可在完备的本征函数系上展开 $|\psi\rangle=\sum_i^N c_i|e_i\rangle$，若正交则表法唯一

满足正交归一完备则可作为 base ket 基矢，归一化态矢的展开系数 $\sum_i|c_i|^2=1$，符合概率诠释

representation 表象 选择一套基矢 进入表象 乘以完备投影算符 I 进行展开，把“表示为”记作 $\doteq$

	连续谱	离散谱
$\hat{X}$ 的本征矢	$\hat{X}\|x\rangle=x\|x\rangle, x\in\mathbb{R}$	$\hat{X}\|x_i\rangle=x_i\|x_i\rangle$
正交归一性	$\langle x_1\|x_2\rangle=\delta(x_1-x_2)$	$\langle x_i\|x_j\rangle=\delta_{ij}$
完备性	$\int\mathrm{d}x\|x\rangle\langle x\|=I$	$\sum_i\|x_i\rangle\langle x_i\|=I$
态矢展开 $\|\psi\rangle=$	$\int\mathrm{d}x\|x\rangle\langle x\|\psi\rangle\equiv\int\mathrm{d}x\,\psi(x)\|x\rangle$	$\sum_i\|x_i\rangle\langle x_i\|\psi\rangle\equiv\sum_i c_i\|x_i\rangle$
态矢内积 $\langle\psi_1\|\psi_2\rangle=$	$\int\mathrm{d}x\,\psi_1^*(x)\psi_2(x)$	$\sum_i c_{1i}^*c_{2i}$
算符 (函数) 在自身表象 $f(\hat{X})\doteq$	$f(x), x\in\mathbb{R}$	对角矩阵，$f(X_{ii})=f(x_i)$
平均值 $\langle f(X)\rangle\equiv\langle\psi\|f(\hat{X})\|\psi\rangle=$	$\int\mathrm{d}x\,\psi^*(x)f(x)\psi(x)$	$\sum_i f(x_i)\|c_i\|^2$
算符 $\hat{F}$ 在 $\hat{X}$ 表象 $\hat{F}\doteq$	连续算子 (如微分算子)	$n\times n$ 方阵，$F_{ij}=\langle x_i\|\hat{F}\|x_j\rangle$

求算符的矩阵表示 $|\psi_1\rangle=\hat{X}|\psi_2\rangle\to\langle e_i|\psi_1\rangle=\langle e_i|\hat{X}|\psi_2\rangle=\sum_j\langle e_i|\hat{X}|e_j\rangle\langle e_j|\psi_2\rangle$

例 $\hat{\sigma}_z=|0\rangle\langle 0|-|1\rangle\langle 1|$，$\hat{\sigma}_y=\mathrm{i}|1\rangle\langle 0|-\mathrm{i}|0\rangle\langle 1|$

幺正算符

unitary 幺正 / 酉算符 $\hat{U}^\dagger=\hat{U}^{-1}$，是正规算符(故可对角化)，本征值模为 1，即均可写成 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \theta\in\mathbb{R}$ 形式

幺正厄米算符 $\hat{A}=\hat{A}^\dagger=\hat{A}^{-1}$ (复豪斯赫尔德 $A=I-2ee^\dagger$，$e^\dagger e=I$)

性质 本征值只能是 ±1 **例** 单位算符，宇称算符，泡利矩阵

表象变换

从 $\hat{X}$ 变到 $\hat{Z}$：$\psi(z)=S^\dagger\psi(x)$ representaion transformation matrix 表象变换算符 $S_{ij}^\dagger=\langle z|x\rangle$，幺正，非厄米

「$\langle z_i|\hat{F}|z_j\rangle=\langle z_i|x_i\rangle\langle x_i|\hat{F}|x_j\rangle\langle x_j|z_j\rangle$」$\hat{F}_{(z)}=S^\dagger\hat{F}_{(x)}S$

连续表象间的变换即波函数 $\langle x|\psi\rangle=\int\mathrm{d}p\langle x|p\rangle\langle p|\psi\rangle\to\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\mathrm{d}p\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}px}\psi(p)$ (亦为傅变换)

推论 表象变换不改变可观测量 (内积，平均值，分布，归一性，本征值，迹，行列式)，
不改变算符作用式 (加，乘，对易关系 $[\hat{A}_{(x)},\hat{B}_{(x)}]=\hat{C}_{(x)}\to[\hat{A}_{(z)},\hat{B}_{(z)}]=\hat{C}_{(z)}$)

→ 幺正等价的可观测量有相同的本征值谱〈代数〉

守恒律

stationary state

定态 能量本征态, 体系能量取确定值 **性质** 在定态上, 任何力学量(只要不显含时间, 不管是不是守恒量) 的平均值和取值概率分布都不随时间变化

(定态的组合当然不一定是定态 $|c_1\psi_1+c_2\psi_2|^2=c_1^2\psi_1^2+c_2^2\psi_2^2+2c_1c_2\psi_1\psi_2\cos[(E_2-E_1)t/\hbar]$)

时间演化方程 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overline{F}=\langle\partial_t\psi|\hat{F}|\psi\rangle+\langle\psi|\partial_t\hat{F}|\psi\rangle+\langle\psi|\hat{F}|\partial_t\psi\rangle=\frac{-1}{\mathrm{i}\hbar}\langle\psi|\hat{H}\hat{F}|\psi\rangle+\overline{\partial_t\hat{F}}+\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\langle\psi|\hat{F}\hat{H}|\psi\rangle=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\overline{[\hat{F},\hat{H}]}+\overline{\partial_t\hat{F}}$ (力学量本身没有确定值, 但其平均值是确定值, 不确定度另算)

conserved quantity

守恒量 在任意态上(不只是定态) 的平均值不随时间变化 (不是随空间) $\Leftrightarrow$ $\hat{F}$ 和 $\hat{H}$ 对易

推论 如果哈氏量显含时间, 则能量不守恒 **等时对易关系** 算符自己和自己对易, 条件是时间相同

例 $\hat{H}=\frac{1}{2m}\vec{p}^2+V(\vec{r})$, 若 $V=0$ 则为自由粒子, 动量守恒, 势场有梯度时动量不守恒

例 〈 中心力场 〉 $\frac{\vec{p}^2}{2m}=-\frac{\hbar^2}{2mr^2}\partial_r(r^2\partial_r)+\frac{\vec{L}^2}{2mr^2}+V(r)\to$ $[\vec{L}^2,\hat{H}]=[\hat{L}_z,\hat{H}]=0$ 守恒 $\to$ 分波分析

「 设 ψ_n 是 $\hat{F},\hat{H}$ 共同本征态, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\langle\psi_n|\psi(t)\rangle|^2=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\langle\psi_n|\psi\rangle\langle\psi|\psi_n\rangle)=\langle\psi_n|\partial_t\psi\rangle\langle\psi|\psi_n\rangle+\mathrm{c.c.}=\frac{E_n}{\mathrm{i}\hbar}|\langle\psi_n|\psi\rangle|^2+\mathrm{c.c.}=0$ 」 **推论** 守恒量取值的概率分布不随时间变化 (不意味着守恒量取确定值)

推论 若体系初始时处于守恒量的本征态, 则恒处于该本征态, 否则恒不处于本征态

$\to$ 故习惯上用 **好量子数** (守恒力学量本征值的量子数) 来标记状态

对称性

symmetry operator

设有一 **对称性算符** $\hat{S}$ (不含时) , 记变换后的态 $|\psi'\rangle=\hat{S}|\psi\rangle$, 变换前的态满足 $\hat{H}$ 的薛方程 $\mathrm{i}\hbar\partial_t|\psi\rangle=\hat{H}|\psi\rangle$

变换后的态满足 $\hat{H}'$ 薛方程 $\mathrm{i}\hbar\partial_t|\psi'\rangle=\mathrm{i}\hbar\hat{S}\partial_t|\psi\rangle=\hat{S}\hat{H}|\psi\rangle=\hat{S}\hat{H}\hat{S}^{-1}\hat{S}|\psi\rangle\equiv\hat{H}'|\psi'\rangle\to\hat{H}'=\hat{H}\Leftrightarrow[\hat{S},\hat{H}]=0$

symmetry

若 $\hat{H}$ 和 $\hat{S}$ 对易, 称体系在变换 $\hat{S}$ 下具有不变性, 或 **对称性**

(体系就是哈氏量, 构造一个体系就是构造哈氏量, 对称性可用于猜哈氏量)

① 若 $\hat{S}$ 厄米, 就是守恒量 ② 若 $\hat{S}$ 是厄米算符的函数 $S(\hat{F})$, 则要求 $\hat{F}$ 是守恒量 (其他情况无意义)

连续/离散变换	无限小变换	有限变换	守恒量
空间平移	$\hat{T}(\delta\vec{r})=1-\delta\vec{r}\,\partial_{\vec{r}}=1-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\vec{p}\cdot\delta\vec{r}$	$\exp(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r})$	$\vec{p}$
时间平移	$\hat{U}(\delta t)=1-\delta t\,\partial_t=1-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}\delta t$	见 $\hat{U}(t,t_0)$	H
空间转动	$\hat{R}(\theta)=1-\delta\varphi\,\partial_\varphi=1-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{J}_z\delta\varphi$	$\exp(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\vec{J}\cdot\vec{e}_n\varphi)$	$\vec{J}$
空间反射	对算符 $\hat{P}^\dagger\hat{r}\hat{P}=-\vec{r}$, 对态 $\hat{P}\psi(\vec{r})=\psi(-\vec{r})$		π
时间反演	$\hat{\Theta}\psi(\vec{r},t)=\psi^*(\vec{r},-t)=\psi^*(\vec{r})\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E_it}$		

全同粒子

identical particles

全同粒子 内禀性质(静质量, 电荷, 自旋, 磁矩等) 完全相同的粒子

(只有状态量子化后才有全同, 经典物理中物理量连续变换, 总可区分)

indistinguishable exchange degeneracy

在波函数重叠区域全同粒子 **不可分辨**, 因为所有可观测量都 **交换简并**

「 交换全同粒子的算符记作 $P_{ij}|\psi_1\psi_2\rangle=|\psi_2\psi_1\rangle$, 设 $\hat{F}_i|\psi_1\psi_2\rangle=f_i|\psi_1\psi_2\rangle$, 则 $P_{12}\hat{F}_1P_{12}^{-1}=\hat{F}_2$ 」

例 两相同质量无相互作用粒子在无限深方势阱中, 则最低能级为 $2E_1$, 次低能级为 $5E_1$

① 非全同粒子, 自旋 $\frac{1}{2}$, 基态有 $\psi_1(x_1)\psi_1(x_2)|00\rangle$ 和 $\psi_1(x_1)\psi_1(x_2)|1m\rangle$, 共 4 重简并

第一激发态为 $\psi_1(x_1)\psi_2(x_2)$ 或 $\psi_2(x_1)\psi_1(x_2)$, 和 $|00\rangle$ 或 $|1m\rangle$ 组合, 共 $2\times4=8$ 重简并

② 全同粒子, 自旋 $\frac{1}{2}$, 基态为 $\psi_1(x_1)\psi_1(x_2)|00\rangle$, 无简并

第一激发态有 $[\psi_1(x_1)\psi_2(x_2)+\psi_2(x_1)\psi_1(x_2)]|00\rangle$ 和 $[\psi_1(x_1)\psi_2(x_2)-\psi_2(x_1)\psi_1(x_2)]|1m\rangle$, 共 4 重简并

③ 全同粒子, 自旋为 1, 基态有 $\psi_1(x_1)\psi_1(x_2)|00\rangle$ 和 $\psi_1(x_1)\psi_1(x_2)|2m\rangle$, 共 6 重简并

第一激发态有和 ② 相同的那两组, 加上 $[\psi_1(x_1)\psi_2(x_2)+\psi_2(x_1)\psi_1(x_2)]|2m\rangle$, 共 9 重简并

所有 P_{ij} 的共同本征态存在，全对称〈群论〉或全反对称 Slater determinant $\boxed{\text{斯莱特行列式}}$ $\Psi_{123}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}\psi_1(x_1) & \psi_1(x_2) & \psi_1(x_3)\\ \psi_2(x_1) & \psi_2(x_2) & \psi_2(x_3)\\ \psi_3(x_1) & \psi_3(x_2) & \psi_3(x_3)\end{bmatrix}$

解薛方程后还需做对称化才能完全描述多体波函数 → 粒子数表象更方便

boson $\boxed{\text{玻色子}}$ $P_{ij}|n\rangle=|n\rangle$ fermion $\boxed{\text{费米子}}$ $P_{ij}|n\rangle=-|n\rangle$ → Pauli exclusion principle $\boxed{\text{泡利不相容原理}}$ (1925) 全同费米子不能占据相同的态

anyon $\boxed{\text{任意子}}$ (Wilczek 1982) 二维系统中，准粒子可连续地遵循费米和玻色之间的任意统计 $P_{ij}|n\rangle=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|n\rangle$

定理 自旋整数为玻色子，自旋半奇数为费米子「来自实验总结，在相对论量子力学可反证」

例 设两个自由粒子 (平面波)，设相对位矢为 $\vec{r}$，相对动量为 $\vec{k}$ (交换两粒子时 r 变号 k 不变)

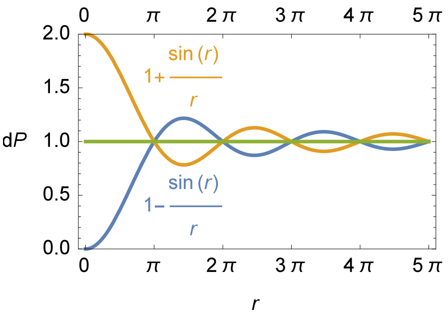
以其中一个为参考系，另一个的相对运动波函数为 $\psi(\vec{r})=(2\pi\hbar)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}$，以下省略归一化系数

若两个粒子不全同，在半径为 r 的球壳内找到另一个粒子的概率密度为 $\frac{\mathrm{d}P}{4\pi r^2\,\mathrm{d}r}=\frac{1}{4\pi}\int|\psi|^2\,\mathrm{d}\Omega=1$

若要求波函数交换反对称 $\psi(\vec{r})=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}})=\mathrm{i}\sqrt{2}\sin(\vec{k}\cdot\vec{r})$，若交换对称 $=\sqrt{2}\cos(\vec{k}\cdot\vec{r})$

$$\frac{2}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin^2(kr\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=\int_{-1}^{1}\sin^2(krx)\,\mathrm{d}x=$$

$$\frac{1}{2kr}\int_{-kr}^{kr}(1-\cos(2x))\,\mathrm{d}x=1-\frac{\sin(2kr)}{2kr},\quad \cos^2\text{ 则换成加}$$



全同性要求会影响力学量平均值，全同粒子的交换对称性是可观测效应

bunching $\boxed{\text{聚团}}$ 玻色子靠近几率增大，像有吸引力，antibunching $\boxed{\text{反聚团}}$ 费米子靠近几率减小

exchange force $\boxed{\text{交换力}}$ 为统计规律，并非相互作用力，无施力者，$r\to\infty$ 时消失

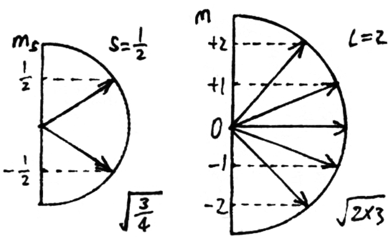
自旋

spin $\boxed{\text{自旋}}$ (Uhlenbeck Goudsmit 1925) 粒子在内禀 intrinsic 空间(西空间) 转动的固有属性〈群论〉〈拓扑〉

施特恩—格拉赫实验〈量子信息〉简并度为 $2s+1$ → 电子自旋 $s=\frac{1}{2}\hbar$

$\vec{F}=-\nabla V=\mu_z\partial_z B_z\vec{e}_z$，$\vec{\mu}\propto\vec{S}$〈电磁学〉

「角动量 $\vec{l}=m_e r^2\omega$ 守恒，磁矩 $\vec{\mu}=\frac{-e}{T}\pi r^2=\frac{-e}{2m_e}\vec{l}$」



电子 orbit $\boxed{\text{轨道磁矩}}$ $\vec{\mu}_l=-\mu_{\mathrm{B}}\frac{\vec{l}}{\hbar}$ Bohr magneton $\boxed{\text{玻尔磁子}}$ $\mu_{\mathrm{B}}=\frac{e\hbar}{2m_e}$ spin $\boxed{\text{自旋磁矩}}$ $\vec{\mu}_s=-2\mu_{\mathrm{B}}\frac{\vec{s}}{\hbar}$

Landé g factor $\boxed{\text{朗德 } g \text{ 因子}}$ $\mu_s=g_s\sqrt{s(s+1)}\mu_{\mathrm{B}}$，$g_e\approx-2.002\approx g_\mu$，$g_p\approx5.586$，$g_n\approx-3.826$〈粒子〉

$\mu_l=g_l\sqrt{l(l+1)}\mu_{\mathrm{B}}$，$g_l=1$

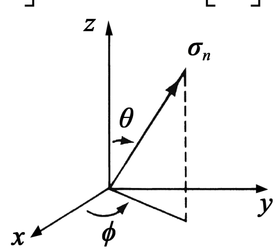
电子自旋

假设角动量对易关系 $[\hat{S}_x,\hat{S}_y]=\mathrm{i}\hbar\hat{S}_z$ 也适用于自旋 → $\boxed{\text{自旋角动量算符}}$ $\vec{S}=\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ (无量纲化)

任何表象上 $\hat{S}_x^2=\hat{S}_y^2=\hat{S}_z^2=\frac{1}{4}\hbar^2$，定义 $\vec{S}^2\equiv\vec{S}\cdot\vec{S}=\frac{3}{4}\hbar^2$ (对于更高自旋 $\vec{S}^2$ 不是常数，但仍有 $[\vec{S}^2,\hat{S}_i]=0$)

Pauli matrix $\boxed{\text{泡利矩阵}}$ $\hat{\sigma}_z\doteq\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，(右手系) 取 $\hat{\sigma}_x\doteq\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，$|s_x^\pm\rangle\doteq\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ \pm1\end{bmatrix}$，相应 $\hat{\sigma}_y\doteq\begin{bmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{bmatrix}$，$|s_y^\pm\rangle\doteq\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ \pm\mathrm{i}\end{bmatrix}$

$\hat{\sigma}_i^2=I$ → 正则反对易 $\{\hat{\sigma}_i,\hat{\sigma}_j\}=2\delta_{ij}$ (仅对自旋半整数成立)



$\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y=\mathrm{i}\hat{\sigma}_z$ → $[\hat{\sigma}_x,\hat{\sigma}_y]=2\mathrm{i}\hat{\sigma}_z$，又 $[\hat{\sigma}_x,\hat{\sigma}_x]=0$ → $[\hat{\sigma}_i,\hat{\sigma}_j]=2\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\hat{\sigma}_k$ 或写作 $\vec{\sigma}\times\vec{\sigma}=2\mathrm{i}\vec{\sigma}$

推论 $(\vec{\sigma}\cdot\vec{a})(\vec{\sigma}\cdot\vec{b})=\sum_{i,j}(\frac{1}{2}\{\hat{\sigma}_i,\hat{\sigma}_j\}+\frac{1}{2}[\hat{\sigma}_i,\hat{\sigma}_j])a_ib_j=\vec{a}\cdot\vec{b}+\mathrm{i}\vec{\sigma}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$

记 $\hat{\sigma}_n=\vec{\sigma}\cdot\vec{e}_n=\hat{\sigma}_xn_x+\hat{\sigma}_yn_y+\hat{\sigma}_zn_z$ **性质** 本征值为 ±1，$\hat{\sigma}_n^2=I$

$\boxed{\text{布洛赫球}}$〈量子信息〉设 $\vec{e}_n=(\cos\phi\sin\theta,\sin\phi\sin\theta,\cos\theta)$，则

「直接求 $\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\\ \sin\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} & -\cos\theta\end{bmatrix}$ 的本征值」在 $\hat{\sigma}_z$ 表象的本征矢为 $|\sigma_n^+\rangle\doteq\begin{bmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\sin\frac{\theta}{2}\end{bmatrix}$，$|\sigma_n^-\rangle\doteq\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\sin\frac{\theta}{2}\\ -\cos\frac{\theta}{2}\end{bmatrix}$

注 不同粒子的自旋算符对易 (即使有耦合 $\hat{H}=\vec{s}_1\vec{s}_2$)「态矢空间是张量积而成」

光子自旋

推广到更高自旋可用升降算符〈量光〉 $s=1$ 的自旋算符为:

$\hat{S}_z \doteq \hbar\begin{bmatrix}1&&\\&0&\\&&-1\end{bmatrix}$, $\hat{S}^+ \doteq \sqrt{2}\hbar\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$, $\hat{S}^- \doteq \sqrt{2}\hbar\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$, $\hat{S}_x \doteq \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$, $\hat{S}_y \doteq \frac{\hbar}{\sqrt{2}\mathrm{i}}\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}$

推论 $\vec{S}^2=2I$, $\hat{S}_i(\hat{S}_i+\hbar I)(\hat{S}_i-\hbar I)=0$, $\hat{S}_i^n=\hat{S}_i^{n-2}$ $(n\geqslant 3)$, $\{\hat{S}_i,\hat{S}_j\}\neq 0$, $\hat{S}_i\hat{S}_j\hat{S}_i=0$, $\{\hat{S}_i,\hat{S}_j^2\}=\hat{S}_i$ $(i\neq j)$

例 可以验证 $(G_i)_{jk}=-\mathrm{i}\hbar\varepsilon_{ijk}$ 满足角动量对易关系, 故是光子自旋的另一种表象

虽然光子 $s=1$, 但光子由于始终为光速, 0 偏振态(纵波模式) 看不到, 故光子偏振可和电子自旋类比

自旋耦合

两个 $s=\frac{1}{2}$ 的粒子 (不必全同), $\vec{s}=\vec{s}_1+\vec{s}_2$, 非耦合表象 $|\updownarrow\updownarrow\rangle$, 耦合表象 $|SM\rangle$ (注意不是量子信息)

singlet　triplet

单态 $|00\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle-|\downarrow\uparrow\rangle)$, **三重态** $|1\text{-}1\rangle=|\downarrow\downarrow\rangle$, $|10\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle+|\downarrow\uparrow\rangle)$, $|11\rangle=|\uparrow\uparrow\rangle$

「CG 系数可用 $\hat{j}^\pm=(\hat{j}_1^\pm\oplus\hat{j}_2^\pm)$ 从 $|j\pm j\rangle=|$全$\pm\rangle$ 开始推, 然后推 $|j-1,m\rangle$ 要用到正交性」

自旋耦合 $\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2=\frac{1}{2}(\hat{s}^2-\hat{s}_1^2-\hat{s}_2^2)=\frac{1}{2}(\hat{s}^2-\frac{3}{2}\hbar^2)$ (注意 $\langle\hat{s}^2\rangle=s(s+1)$)

完整的态矢为位形和自旋的直积 $\psi(\vec{r})\otimes|\sigma_z\rangle$ **例** 氦原子两电子的单态(仲氦) 和三重态(正氦, 能量较低)

电子排布	自旋	$^{2S+1}\mathrm{L}_J$	空间波函数	自旋波函数
基态 1s1s	单态	$^1\mathrm{S}$	1s1s	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\|\uparrow\downarrow\rangle-\|\downarrow\uparrow\rangle)$
激发态 1s2s	三重态	$^3\mathrm{S}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(1s2s-2s1s)$ 反对称 (l 奇)	$\|\uparrow\uparrow\rangle$, $\|\downarrow\downarrow\rangle$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(\|\uparrow\downarrow\rangle+\|\downarrow\uparrow\rangle)$ 对称 ($s=1$)
	单态	$^1\mathrm{S}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(1s2s+2s1s)$ 对称 (l 偶)	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\|\uparrow\downarrow\rangle-\|\downarrow\uparrow\rangle)$ 反对称 ($s=0$)

entangled state　separable state

纠缠态 不能写成各子系统态矢的直积, 如 $|00\rangle, |10\rangle$, **可分离态** 直积态, 如 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle\pm|00\rangle)$

轨道

轨道角动量算符 $\vec{l}=\vec{r}\times\vec{p}\doteq-\mathrm{i}\hbar\vec{r}\times\nabla$ (分量形式 $\hat{l}_z=\hat{x}\hat{p}_y-\hat{y}\hat{p}_x$), 可以证明 $[\hat{l}_i,\hat{l}_j]=\mathrm{i}\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{l}_k$,

「$(1-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{l}_z\delta\phi)|x,y,z\rangle=|x-y\delta\phi,y+x\delta\phi,z\rangle$」轨道角动量算符的坐标表示 $\langle\vec{r}|\hat{l}_z|\psi\rangle=-\mathrm{i}\hbar\partial_\phi\langle\vec{r}|\psi\rangle$,

「$\partial_x=\frac{\partial r}{\partial x}\partial_r+\frac{\partial\theta}{\partial x}\partial_\theta+\frac{\partial\phi}{\partial x}\partial_\phi$, 注意 $\frac{\partial r}{\partial x}\neq(\frac{\partial x}{\partial r})^{-1}$」$\hat{l}_x=\mathrm{i}\hbar(\sin\phi\,\partial_\theta+\cot\theta\cos\phi\,\partial_\phi)$, $\hat{l}_y=\mathrm{i}\hbar(-\cos\phi\,\partial_\theta+\cot\theta\sin\phi\,\partial_\phi)$

动量表象中 $(\hat{L}_x)_{\vec{p}\vec{p}'}=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}(y\hat{p}_z-z\hat{p}_y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{p}'\cdot\vec{r}/\hbar}\mathrm{d}\vec{r}=\mathrm{i}\hbar(p_z\partial_{p_y}-p_y\partial_{p_z})\delta(\vec{p}-\vec{p}')$

$\hat{l}^+=\hbar\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}(\partial_\theta+\mathrm{i}\cot\theta\,\partial_\phi)$, $\hat{l}^-=\hbar\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}(-\partial_\theta+\mathrm{i}\cot\theta\,\partial_\phi)$ **角动量平方算符** $\vec{l}^2=-\hbar^2(\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\,\partial_\theta)+\frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\phi^2)$

另有 $\vec{l}^2=\vec{r}^2\vec{p}^2-(\vec{r}\cdot\vec{p})^2+\mathrm{i}\hbar\vec{r}\cdot\vec{p}\doteq r^2\vec{p}^2+\hbar^2(r^2\partial_r^2+2r\,\partial_r)$

$[\nabla,r]=(\nabla r)=\vec{e_r}\to\frac{1}{2}[\nabla^2,r]=\frac{1}{2}(\nabla\cdot(\vec{e_r}\psi)+\vec{e_r}\cdot\nabla\psi)=\frac{1}{2}(2\vec{e_r}\cdot\nabla+(\nabla\cdot\vec{e_r}))\psi=\partial_r+\frac{1}{r}$

而 $[\nabla,\vec{r}]=(\vec{e_i}\vec{e_i}+\vec{e_j}\vec{e_j}+\vec{e_k}\vec{e_k})$ 是张量, 「∇ 和这张量做点乘」 $\frac{1}{2}[\nabla^2,\vec{r}]=\nabla$

径向动量算符 $\hat{p}_r=\frac{1}{2}(\vec{p}\cdot\vec{e_r}+\vec{e_r}\cdot\vec{p})=-\mathrm{i}\hbar\left(\partial_r+\frac{1}{r}\right)$, 厄米, 有 $[\hat{r},\hat{p}_r]=\mathrm{i}\hbar$

$\hat{p}_r^2=-\hbar^2\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r)$, $\vec{p}^2=\frac{1}{r^2}\vec{l}^2+\hat{p}_r^2$ (所以 $\vec{l}^2$ 很像 ∇^2 的角度部分)

magnetic quantum number

〈数理〉分离变量法, 解出 $\hat{l}_z$ 的本征值 $m\hbar$, 本征函数 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$, **磁量子数** $m=0,\ldots,\pm l$

azimuthal quantum number

$\vec{l}^2$ 的本征值 $l(l+1)\hbar^2$, 本征函数 $Y_{lm}(\theta,\phi)$, **角量子数** l 只能为非负整数 〈原子〉

(半整数的 m 会导致波函数转 2π 变负, 不单值, 亦可从升降算符推出与半整数球谐函数解矛盾)

可以证明对有心势 $[\hat{l}^2,\hat{l}_z]=0$, $[\hat{H},\hat{l}^2]=0$, $[\hat{H},\hat{l}_z]=0$

角动量算符

对于 $s=\frac{1}{2}$, $\hat{\sigma}^\pm=\frac{1}{2}(\hat{\sigma}_x\pm\mathrm{i}\hat{\sigma}_y)$, $\hat{\sigma}^+\doteq\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$, $\hat{\sigma}^-\doteq\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$, $\hat{\sigma}_x^2=\hat{\sigma}_y^2=\hat{\sigma}_z^2=I$,

得 $\hat{\sigma}^+\hat{\sigma}^-=\frac{1}{4}(2I-\mathrm{i}[\hat{\sigma}_x,\hat{\sigma}_y])=\frac{1}{2}(I+\hat{\sigma}_z)$, $\hat{\sigma}^-\hat{\sigma}^+=\frac{1}{2}(I-\hat{\sigma}_z)\to\{\hat{\sigma}^-,\hat{\sigma}^+\}=I$ (费米)

一般地 $[\hat{J}_x,\hat{J}_y]=\mathrm{i}\hbar\hat{J}_z$, 引入 **升降算符** $\hat{J}^{\pm}=\hat{J}_x\pm\mathrm{i}\hat{J}_y\to[\hat{J}^+,\hat{J}^-]=2\hbar\hat{J}_z,[\hat{J}_z,\hat{J}^{\pm}]=\pm\hbar\hat{J}^{\pm},[\vec{J}^2,\hat{J}^{\pm}]=0$

由于 $[\vec{J}^2,\hat{J}_z]=0$, 设 $\hat{J}_z$ 的本征值为 m, 记 $|jm\rangle$ 为 $\vec{J}^2$ 和 $\hat{J}_z$ 的共同本征矢

$\vec{J}^2=\hat{J}^+\hat{J}^-+\hat{J}_z^2-\hbar\hat{J}_z=\hat{J}^-\hat{J}^++\hat{J}_z^2+\hbar\hat{J}_z$「在 m 取到最大值 j 时 $\hat{J}^+|jj\rangle=0$」$\vec{J}^2$ 的本征值为 $j(j+1)\hbar^2$,

总角量子数 j 可为零, 正整数, 半整数, 简并度为 $2j+1$, **总磁量子数** $m=-j,-j+1,\ldots,j$

$\hat{J}^{\pm}|jm\rangle=\hbar\sqrt{j(j+1)-m(m\pm1)}\,|jm\pm1\rangle=\hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\,|jm\pm1\rangle$

对任意角动量均可用上式推出升降算符, 例如 $S=\frac{3}{2},\hat{S}_z=\mathrm{diag}\begin{bmatrix}3/2 & 1/2 & -1/2 & -3/2\end{bmatrix}$

$$\hat{S}^+=\begin{bmatrix}0&\sqrt{3}&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&\sqrt{3}\\0&0&0&0\end{bmatrix},\hat{S}^-=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\\sqrt{3}&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&\sqrt{3}&0\end{bmatrix},\hat{S}_x=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&\sqrt{3}&0&0\\\sqrt{3}&0&2&0\\0&2&0&\sqrt{3}\\0&0&\sqrt{3}&0\end{bmatrix},\hat{S}_y=\frac{1}{2\mathrm{i}}\begin{bmatrix}0&\sqrt{3}&0&0\\-\sqrt{3}&0&2&0\\0&-2&0&\sqrt{3}\\0&0&-\sqrt{3}&0\end{bmatrix}$$

$S=2,\ \hat{S}_z=\mathrm{diag}\begin{bmatrix}2&1&0&-1&-2\end{bmatrix},\ \hat{S}^+=$偏右上$\begin{bmatrix}2&\sqrt{6}&\sqrt{6}&2\end{bmatrix},\ \hat{S}^-=$偏左下$\begin{bmatrix}2&\sqrt{6}&\sqrt{6}&2\end{bmatrix}$,

角动量耦合

两个(任意类型) 角动量合成 $\vec{j}=\vec{j}_1+\vec{j}_2$, 可以证明总角动量 $[\hat{j}_i,\hat{j}_j]=\mathrm{i}\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{j}_k$ 仍是角动量算符

uncoupled

$[\hat{j}_{1i},\hat{j}_{2j}]=0$ 即 $\vec{j}_1,\vec{j}_2$ 有共同本征矢 $\to$ **非耦合表象** $|j_1m_1j_2m_2\rangle=|j_1m_1\rangle|j_2m_2\rangle$

但 $\vec{j}^2$ 在这表象不对角 $[\vec{j}^2,\hat{j}_{iz}]\neq0$, 不便求本征值 (耦合表象才是总角动量的本征态)

例 $\hat{H}=\hat{H}_0+\hat{H}_{\mathrm{int}}$, $\hat{H}_0$ 可用非耦合表象, $\hat{H}_{\mathrm{int}}$ 含有 $\vec{j}_1\cdot\vec{j}_2$ 项, 但仍然可在 $\hat{H}_0$ 的非耦合表象展开

「$\vec{J}^2=\frac{1}{2}(\hat{J}^+\hat{J}^-+\hat{J}^-\hat{J}^+)+\hat{J}_z^2$ 推广」$\vec{j}_1\cdot\vec{j}_2=\hat{j}_{1z}\hat{j}_{2z}+\frac{1}{2}(\hat{j}_1^+\hat{j}_2^-+\hat{j}_1^-\hat{j}_2^+)\to\langle m_1m_2|\vec{j}_1\cdot\vec{j}_2|m_1m_2\rangle=m_1m_2\hbar^2$

耦合表象 $|j_1j_2jm\rangle=\sum_{m_1=-j_1}^{j_1}\sum_{m_2=-j_2}^{j_2}C^{jm}_{j_1m_1j_2m_2}|j_1m_1j_2m_2\rangle$

Clebsch-Gordan coefficient

表象变换 **CG 系数** $C^{jm}_{j_1m_1j_2m_2}=\langle j_1m_1j_2m_2|j_1j_2jm\rangle\in\mathbb{R}$

$j_1=\frac{1}{2},j_2=\frac{1}{2}$

m	m_1,m_2	$j=1$	$j=0$
1	$\frac{1}{2},\frac{1}{2}$	1	-
0	$\frac{1}{2},-\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$
0	$-\frac{1}{2},\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$

$j_1=1,j_2=\frac{1}{2}$

m	m_1,m_2	$j=3/2$	$j=\frac{1}{2}$
3/2	$1,\frac{1}{2}$	1	-
$\frac{1}{2}$	$1,-\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$
$\frac{1}{2}$	$0,\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$

$j_1=1,j_2=1$

m	m_1,m_2	$j=2$	$j=1$	$j=0$
2	1,1	1	-	-
1	1,0	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	-
1	0,1	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	-
0	1,−1	$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$
0	0,0	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	0	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$
0	−1,1	$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$

$m<0$ 的可从对称性关系 $C^{j-m}_{j_1-m_1j_2-m_2}=(-1)^{j_1+j_2-j}C^{jm}_{j_1m_1j_2m_2}$ 得出

(只有满足三角形法则的系数不为零: $|j_1-j_2|<j<j_1+j_2,|m_i|\leqslant j_i,m=m_1+m_2$)

3- j symbol

更方便的是 **3 j 符号** $\begin{bmatrix}j_1&j_2&j_3\\m_1&m_2&m_3\end{bmatrix}=\dfrac{(-1)^{j_1-j_2-m_3}}{\sqrt{2j_3+1}}\langle j_1m_1j_2m_2|j_3-m_3\rangle$ ($j_3=j,m_3=-m$)

3 个角动量耦合: **6 j 符号**, 4 个角动量耦合: **9 j 符号**〈群论〉

算符函数

算符的多项式 $f(\hat{x},\hat{p})=\sum C_{mn}\hat{x}^m\hat{p}^n$ **定理** $[\hat{x},f(\hat{x},\hat{p})]=\mathrm{i}\hbar\frac{\partial f}{\partial\hat{p}}$, $[\hat{p},f(\hat{x},\hat{p})]=-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial f}{\partial\hat{x}}$

算符的指数 定义 $\mathrm{e}^{\hat{A}}=\sum_{i=0}^{\infty}\dfrac{\hat{A}^n}{n!}$ (此为定义, 收不收敛另说) **幺正算符指数化** $\hat{T}$ 厄米, 则 $\hat{U}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta\hat{T}}$ 幺正

Baker Campbell Hausdorff formula

常用 $(1+\hat{T})\hat{A}(1-\hat{T})=\hat{A}+[\hat{T},\hat{A}]+$高阶小$\to$ **BCH 公式** $\mathrm{e}^{\hat{T}}\hat{A}\mathrm{e}^{-\hat{T}}=\hat{A}+[\hat{T},\hat{A}]+\dfrac{1}{2!}[\hat{T},[\hat{T},\hat{A}]]+\ldots$

定义函数 $\hat{A}(\lambda)=\mathrm{e}^{\lambda\hat{T}}\hat{A}\mathrm{e}^{-\lambda\hat{T}}$, 从 $\lambda=0$ 泰勒展开 $\hat{A}(\lambda)=\sum\frac{1}{n!}\hat{A}^{(n)}(\lambda)|_{\lambda=0}\lambda^n$, $\hat{A}(\lambda)|_{\lambda=0}=\hat{A}$,

$\mathrm{d}_\lambda\hat{A}(\lambda)|_{\lambda=0}=(\mathrm{e}^{\lambda\hat{T}}\hat{T}\hat{A}\mathrm{e}^{-\lambda\hat{T}}-\mathrm{e}^{\lambda\hat{T}}\hat{A}\hat{T}\mathrm{e}^{-\lambda\hat{T}})|_{\lambda=0}=[\hat{T},\hat{A}]$

推论 $\mathrm{e}^{\hat{A}+\hat{B}}=\mathrm{e}^{\hat{A}}\mathrm{e}^{\hat{B}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}$, $\mathrm{e}^{\hat{A}}\mathrm{e}^{\hat{B}}=\mathrm{e}^{[\hat{A},\hat{B}]}\mathrm{e}^{\hat{B}}\mathrm{e}^{\hat{A}}$ ($[\hat{A},\hat{B}]=0\Rightarrow\mathrm{e}^{\hat{A}}\mathrm{e}^{\hat{B}}=\mathrm{e}^{\hat{A}+\hat{B}}$ 的逆命题不成立)

若 $[\hat{A},\hat{B}]=C$ (常数) , 则 $[\hat{A},\mathrm{e}^{\hat{B}}]=C\mathrm{e}^{\hat{B}}$ (算符从指数上求导下来, 不一定落在左边或右边)

算符的逆 若 $\hat{A}^{-1}$ 存在, λ 为小量, 则 $(\hat{A}-\lambda\hat{B})^{-1}=(1-\lambda\hat{A}^{-1}\hat{B})^{-1}\hat{A}^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda\hat{A}^{-1}\hat{B})^n\hat{A}^{-1}$ $=\hat{A}^{-1}+\lambda\hat{A}^{-1}\hat{B}\hat{A}^{-1}+\lambda^2\hat{A}^{-1}\hat{B}\hat{A}^{-1}\hat{B}\hat{A}^{-1}+\dots$ 〈 场论 〉

空间平移

$\hat{T}(\delta x)|\psi\rangle=\int \mathrm{d}x\ \hat{T}|x\rangle\langle x|\psi\rangle=\int \mathrm{d}x\,|x+\delta x\rangle\langle x|\psi\rangle=\int \mathrm{d}x\,|x\rangle\langle x-\delta x|\psi\rangle$

(前者是主动变换, 波函数向前, 后者是被动变换, 坐标系向后 〈 群论 〉)

infinitesimal translation

微分平移算符 $\hat{T}(\delta x)|x\rangle=|x+\delta x\rangle \to \hat{T}(\delta x)\psi(x)=\psi(x-\delta x)\equiv\psi'(x)$

引理 $\langle x-\delta x|\psi\rangle=\langle x|\psi\rangle-\delta x\,\partial_x\langle x|\psi\rangle$ (移项即证)

$\psi'(x)=\psi(x-\delta x)=\psi(x)-\delta x\,\partial_x\psi(x)=(1-\delta x\,\partial_x)\psi(x)\equiv(1-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\delta x\,\hat{p}_x)\psi(x)$, 通过对比知 $\hat{p}$ 是动量算符

spacial translation

空间平移 通过无穷多微分平移相乘实现 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\frac{x}{n}\hat{p}_x\right)^n=\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}x\hat{p}_x\right)\to\hat{T}(\vec{r})=\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}\right)$

$\hat{T}(\vec{r})|\vec{p}\rangle=\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}}|\vec{p}\rangle$ 只是变了相位, 故 $|p\rangle$ 是 $\hat{T}$ 的本征态, $|x\rangle$ 不是

时间平移

quantum dynamics

量子动力学 量子态及观测量的动力学演化 **薛定谔方程** (未进入表象) $\mathrm{i}\hbar\partial_t|\psi,t\rangle=\hat{H}|\psi,t\rangle$

time translation

(非相对论量子力学中, 时间只是参数, 不是算符) **时间平移** $|\psi,t\rangle=\hat{U}(t,t_0)|\psi,t_0\rangle$, $\hat{U}(0,0)=I$

若
- $\hat{H}$ 不含时间 (如恒磁场) $\hat{U}(t,t_0)=\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)\right)$
- $\hat{H}$ 含时间但对易 (磁场强度时变但方向不变) $\hat{U}(t,t_0)=\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\hat{H}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)$
- 不同时间的 $\hat{H}$ 不对易 (磁场强度和方向都变) 戴森级数

Dyson series

戴森级数 $\hat{U}(t,t_0)=1-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\hat{H}(t_1)+(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar})^2\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t_2\hat{H}(t_1)\hat{H}(t_2)+\cdots$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-\tfrac{\mathrm{i}}{\hbar})^n\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t_2\cdots\int_{t_0}^{t_{n-1}}\mathrm{d}t_n\hat{H}(t_1)\hat{H}(t_2)\cdots\hat{H}(t_n)$$

海森堡图景

Heisenberg equation

海森堡方程 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{F}(t)=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{F},\hat{H}]+\partial_t\hat{F}(t)$ **性质** 守恒量在两图景表达式相同 $\hat{F}(t)=\hat{U}^\dagger\hat{F}\hat{U}$

Ehrenfest theorem

取平均可得 **爱伦费斯特定理** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle r\rangle=\frac{\langle p\rangle}{m}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle p\rangle=-\langle\nabla V\rangle$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle l\rangle=-\langle\vec{r}\times\nabla V\rangle\xlongequal{V\text{ 球对称}}0$

图景(体系的时间演化)	Schrödinger picture 薛定谔图景	interaction picture 相互作用图景	Heisenberg picture 海森堡图景
态矢 $\|\psi\rangle$ 密度矩阵 $\hat{\rho}$	$\|\psi,t\rangle=\hat{U}(t)\|\psi,0\rangle$ $\hat{\rho}(t)=\hat{U}(t)\hat{\rho}(0)\hat{U}^\dagger(t)$	演化, 只与 $\hat{H}'$ 有关	不随时间变
可观测量 $\hat{F}$ 基矢 $\|f\rangle$	不随时间变	演化, 只与 $\hat{H}_0$ 有关	$\hat{F}(t)=\hat{U}^\dagger(t)\hat{F}(0)\hat{U}(t)$ $\|f,t\rangle=\hat{U}^\dagger(t)\|f,0\rangle$
运动学方程	薛 $\mathrm{i}\hbar\partial_t\|\psi,t\rangle=\hat{H}\|\psi,t\rangle$	$\mathrm{i}\hbar\partial_t\|\psi,t\rangle=\hat{H}'\|\psi,t\rangle$ $\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{F}(t)=[\hat{F},\hat{H}_0]$	海 $\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{F}(t)=[\hat{F},\hat{H}]$

满足 态矢在基矢上分解的系数 $\langle f|\psi\rangle$ 不变, 力学量在某态矢上的平均值 $\langle\psi|\hat{F}|\psi\rangle$ 不变

空间转动

spacial rotation

同理可得三维 **空间转动** $\hat{R}(\theta)=\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\varphi\hat{J}_n\right)$, 亦可写为欧拉角: 〈 理力 〉〈 群论 〉

$\hat{R}(\alpha,\beta,\gamma)=\exp(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\gamma\hat{J}_{z''})\exp(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\beta\hat{J}_{y'})\exp(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\alpha\hat{J}_z)=\exp(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\alpha\hat{J}_z)\exp(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\beta\hat{J}_y)\exp(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\gamma\hat{J}_z)$

Wigner D-matrix

维格纳 D 矩阵 $\hat{R}$ 在 $|jm\rangle$ 表象的矩阵元, $D^{j'j}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma)=\langle j'm'|\hat{R}(\alpha,\beta,\gamma)|jm\rangle$, 所有 $j'\neq j$ 的阵元为零

又可记为 $D^j_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m'\alpha}d^j_{m'm}(\beta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\gamma}$, 其中 $d^j_{m'm}(\beta)=\langle jm'|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta\hat{J}_y}|jm\rangle$

定理 「 $\hat{\sigma}_n^2=I$, 偶数次幂是常数, 相当于欧拉公式中的虚数单位, 泰勒展开即证 」 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{\sigma}_n\theta}=I\cos\theta+\mathrm{i}\hat{\sigma}_n\sin\theta$

自旋 $s=\frac{1}{2}$ 的粒子绕 $\vec{e_n}$ 方向的轴转 θ, $\hat{R}_n(\theta)=\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{S}_n\theta}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{\sigma}_n\theta/2}=I\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)-2\mathrm{i}\frac{\hat{S}_n}{\hbar}\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)$ 〈 量信 〉

对于 $s=1$,「$(\frac{\hat S_i}{\hbar})^n=(\frac{\hat S_i}{\hbar})^{n-2}, n\geqslant 3$」$\to$ $\hat R_i(\theta)=e^{-\frac{i}{\hbar}\hat S_i\theta}=I-i\frac{\hat S_i}{\hbar}\sin\theta-(\frac{\hat S_i}{\hbar})^2(1-\cos\theta)$, 故转 2π 即复原

对于一般的 j, 转 2π 后乘相位 $d^j_{mm}=(-1)^{2j}$ (故自旋整数复原, 自旋为零意味着粒子球对称)

例 $j=\frac{1}{2}$, $d^{(1/2)}=\begin{bmatrix}\cos(\beta/2) & -\sin(\beta/2)\\ \sin(\beta/2) & \cos(\beta/2)\end{bmatrix}$, $D^{(1/2)}=\begin{bmatrix}e^{-i\alpha/2}\cos(\beta/2)e^{-i\gamma/2} & -e^{-i\alpha/2}\sin(\beta/2)e^{i\gamma/2}\\ e^{i\alpha/2}\sin(\beta/2)e^{-i\gamma/2} & e^{i\alpha/2}\cos(\beta/2)e^{i\gamma/2}\end{bmatrix}$

例 $j=1$, $e^{-i\theta J_z}=\mathrm{diag}\begin{bmatrix}e^{-i\theta} & 1 & e^{i\theta}\end{bmatrix}$ $\to$ $D^{(1)}$ 就是 $d^{(1)}$ 每列乘 $[e^{-i\alpha}\ 1\ e^{i\alpha}]^T$ 每行乘 $[e^{-i\gamma}\ 1\ e^{i\gamma}]$

$$e^{-i\beta J_y}=I-\frac{\sin\beta}{\sqrt2}\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}+\frac{1}{2}(1-\cos\beta)\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&-2&0\\1&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac12(1+\cos\beta) & -\frac{1}{\sqrt2}\sin\beta & \frac12(1-\cos\beta)\\ \frac{1}{\sqrt2}\sin\beta & \cos\beta & -\frac{1}{\sqrt2}\sin\beta\\ \frac12(1-\cos\beta) & \frac{1}{\sqrt2}\sin\beta & \frac12(1+\cos\beta)\end{bmatrix}$$

球谐函数 就是轨道角动量本征态在球坐标系下的表示 $Y_{lm}(\theta,\phi)=\langle r,\theta,\phi|lm\rangle$, 宇称为 $(-1)^l$ 〈数理〉

「有效势」 已知 $\theta=0$ 处, $m\neq 0$ 的 $Y_{lm}(0,\phi)=0$, 有 $Y_{lm}(0,\phi)=\sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}}\delta_{m0}$

按类似 $\hat\sigma_n$ 的方法, 球坐标系先绕 y 轴转 θ, 再绕 z 轴转 ϕ, 得 $|r,\theta,\phi\rangle=\hat R_z(\phi)\hat R_y(\theta)|r,0,\phi\rangle\to$

$Y^*_{lm}(\theta,\phi)=\langle lm|r,\theta,\phi\rangle=\sum_{m'}\langle lm|\hat R_z(\phi)\hat R_y(\theta)|lm'\rangle\langle lm'|r,0,\phi\rangle=e^{-im\phi}d^l_{m0}(\theta)\sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}}\to d^l_{00}(\theta)=P_l(\cos\theta)$

空间反射

(经典力学无宇称这一力学量, 因为都是连续变换, 不能从 r 突变到 $-r$)

parity operator

宇称算符 $\hat P\psi(\vec r)=\psi(-\vec r)$, 既厄米也幺正, 设其本征值为 π「$\hat P^2\psi=\pi^2\psi=\psi$」$\pi=\pm1$

定理 若势函数有确定宇称 $[\hat H,\hat P]=0$, 则 (非简并) 定态解有确定宇称 (共同本征态)

spacial inversion

空间反射 对坐标系是左右手系转换, 对态 $\hat P|\vec r\rangle=|-\vec r\rangle\to\hat P^\dagger\hat r\hat P=-\hat{\vec r}\to\{\hat P,\hat{\vec r}\}=0$

极矢量 $\{\hat P,\hat{\vec p}\}=0$ **轴矢量** $[\hat P,\hat{\vec l}]=0$, $[\hat P,\hat{\vec s}]=0$, $[\hat P,\hat{\vec J}]=0$ 〈几何〉

标量 $\hat P^\dagger\hat{\vec s}\cdot\hat{\vec l}\hat P=\hat{\vec s}\cdot\hat{\vec l}$ **赝标量** $\hat P^\dagger\hat{\vec s}\cdot\hat{\vec r}\hat P=-\hat{\vec s}\cdot\hat{\vec r}$

parity selection rule

宇称选择定则 设 $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$ 是 $\hat P$ 的本征态, $\hat F$ 为奇宇称算符 (极矢量, 赝标量)

则 $\langle\psi_2|\hat F|\psi_1\rangle$ 只有当 $\pi_1=-\pi_2$ 时不为零

时间反演

time reversal　　　　　　motion

时间反演 准确来说是运动反演 $\hat\Theta\psi(\vec r,t)=\psi^*(\vec r,-t)=\psi^*(\vec r)e^{-\frac{i}{\hbar}E_it}$

time reversal operator

时间反演算符 $\hat\Theta|\vec p\rangle=|-\vec p\rangle$, 反幺正 (如果幺正会导致能谱为负)

antilinear

反线性算符 $\hat A(\sum c_i|\psi_i\rangle)=\sum c_i^*(\hat A|\psi_i\rangle)$

antiunitary

反幺正算符 $|\psi'\rangle=\hat A|\psi\rangle$, $\langle\psi_2'|\psi_1'\rangle=\langle\psi_2|\psi_1\rangle^*$, 任意反幺正算符可写成 $\hat A=\hat U\hat K$

complex-conjugate operator

复共轭算符 为对右方系数取共轭, $\hat Kc|\psi\rangle=c^*\hat K|\psi\rangle$

(只有 $\langle\psi_2|(\hat A|\psi_1\rangle)$ 没有 $(\langle\psi_2|\hat A)|\psi_1\rangle$)

$-i\hat H\hat\Theta|\psi\rangle=\hat\Theta i\hat H|\psi\rangle\xlongequal{\text{反幺正}}-i\hat\Theta\hat H|\psi\rangle\to[\hat\Theta,\hat H]=0$

推论 $\hat\Theta\hat{\vec p}\hat\Theta^{-1}=-\hat{\vec p}$, $\hat\Theta\hat{\vec r}\hat\Theta^{-1}=\hat{\vec r}$, $\hat\Theta\hat{\vec J}\hat\Theta^{-1}=-\hat{\vec J}$, $\hat\Theta|lm\rangle=(-1)^m|l\text{-}m\rangle$

定理 $\hat\Theta^2|jm\rangle=\pm|jm\rangle$, j 为整数取正, 半奇数取负

定理 若哈氏量时间反演不变, 则非简并定态解为实 (相因子不含 $\vec r$)

〈粒子〉

物理量	$\hat C$	$\hat P$	$\hat\Theta$
位置 $\vec r$	$\vec r$	$-\vec r$	$\vec r$
动量 $\vec p$	$\vec p$	$-\vec p$	$-\vec p$
自旋 $\vec s$	$\vec s$	$\vec s$	$-\vec s$
电场 $\vec E$	$\vec E$	$-\vec E$	$\vec E$
磁场 $\vec B$	$\vec B$	$\vec B$	$-\vec B$
手性 ν_L	$\bar\nu_L$	ν_R	ν_L

其它

基本实验见〈量子信息〉　氢原子, 微扰论, 几何相见〈原子〉

玻色费米统计见〈统计〉　散射理论见〈核物〉　BEC, BCS 理论见〈凝态〉

产灭算符, 二次量子化, 相干态见〈量子光学〉　密度算符见〈量子统计〉　路径积分见〈量子场论〉

特殊函数的数学背景见〈数理〉　角动量算符, CG 系数的数学背景见〈群论〉