

© L^eP_tC (萌狸)笔记项目主页: <http://leptc.github.io/lenote>

署名 · 非商用 · 相同方式共享

**精**

赵凯华. 电磁学 (第三版). 高等教育出版社

└ 或: 赵凯华. 新概念物理教程—电磁学 (第二版). 高等教育出版社 (上面那本的精简版)

Purcell. Electricity and Magnetism (2nd ed). McGraw-Hill (高斯单位制的)

└ 中译: 南开大学物理系. 电磁学. 科学出版社

参

Feynman. Feynman's Lectures on Physics - Volume 2

└ 中译: 桑兹. 费曼物理学讲义—第二卷. 上海科学技术出版社

符号约定国际单位制, 电子电荷量为 $-e$, 电量 q 可正可负, φ 为电势, U 为电势差上标 ' 表示极化, 下标 ₀ 表示自由, 除注明 \vec{p} 为动量外均指电偶极矩, 除注明 \vec{M} 为力矩外均指磁化强度**相关笔记**

电路见 〈电路〉 〈模电〉 〈数电〉 电表见 〈实验〉 凶残的数理方法见 〈电动〉 相对论见 〈狭相〉

静电

triboelectrification

vitreous positive

resinous negative

repel

attract

摩擦起电

丝绸摩擦过的光滑玻璃棒带正电荷, 毛皮摩擦过的橡胶棒带负电荷, 同性相斥, 异性相吸

(正负的区别就是负数的平方是与之反号的正数, 但电荷之积不是电荷, 故对电荷正负的命名是任意的)

electrostatic induction

neutralize

静电感应

用带电体感应起电, 金属棒先接触后分开, 带等量异号的电 **中和** 正负电荷完全抵消

性质 带电导体 A 靠近孤立不带电导体 N, 则 N_+ 的电场线都终止于无穷远而不能终止于自己的 N_-

[否则沿此电场线积分 N 不等势] \rightarrow 电势 N 升 A 降, $\varphi_N < \varphi_A$, N 感应出的电荷量小于 A 所带电量

conductor

insulator

breakdown

导体

电荷能迅速传导, **绝缘体** 电荷束缚在产生的地方, 绝缘体可被 **击穿** 成导体 (空气 $\approx 3 \times 10^6$ V/m)

charge

coulomb elementary charge

Millikan oil-drop experiment

电荷量

q 单位 C(库仑)

元电荷

$e \approx 1.602 \times 10^{-19}$ C (密立根油滴实验 1909)(夸克, 准粒子可带分数电荷)

global conservation of charge

全局电荷守恒

孤立系统的总电荷量不变 (正负电荷总成对产灭) (电荷量是洛伦兹不变量)

action at a distance

action through medium

ether

field

电磁力非 **超距作用** (不需要媒介或时间) 也非 **近距作用** (接触作用, 弹性媒质以太), 是通过**场**来

作用的, **电磁场**可以脱离电荷和电流独立存在, 和物质一样具有能量, 动量等属性 **场论**

静源动电荷

施力电荷 q_1 相对观察者静止, 则 q_2 受力 F_2 可用库仑定律 (F_1, F_2 非作用力和反作用力)

Coulomb's law

库仑定律

(1785) 真空中静源 q_1 给 q_2 的力 $\vec{F}_2 = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_{r_{21}}$, 库仑常数 $k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 8.99 \times 10^9$ Nm²/C²

($\vec{r}_{21} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ 从 1 指向 2) (电荷自己产生的场不能对自己有作用, 否则违背牛三)

库仑平方反比精确成立 \Leftrightarrow 光子静质量严格为零 \Leftrightarrow 光在真空无色散 \Leftrightarrow 光速不变 **电动**

例 若 $\vec{F} = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \left(1 + \frac{r}{\lambda}\right) \vec{e}^{-r/\lambda} \vec{e}_r$ 则点电荷 $\varphi(r) = k_e \frac{q}{r} \vec{e}^{-r/\lambda}$ 高斯定理 $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} + \frac{1}{\lambda^2} \iiint_V \varphi dV = \frac{q(S_{\text{内}})}{\epsilon}$

场强

point charge

点电荷

带电体间距离远大于其尺寸, 其形状大小可忽略

test charge

试探电荷

电量和线度足够小, 不影响原在电场

对于电场中的固定点, 试探电荷受力与电荷量的比值不变 \rightarrow **电场强度** $\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}}{q}$, 单位 N/C = V/m

superposition principle

compensation method

场强叠加原理

各电荷同时存在产生的场强, 等于单独存在时的场强的**矢量叠加** \rightarrow **虚构补偿法**

点电荷 $\vec{E} = k_e \frac{q}{r^2} \vec{e}_r$ **例** 两同号电荷在中垂线上 $E = \frac{2k_e q}{(l/\cos\theta)^2} \sin\theta$

$\cos^2\theta \sin\theta$ 在 $\tan\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\theta \approx 35.3^\circ$ 时取最大值 $\frac{2}{3\sqrt{3}} \approx 0.385$

例 (不稳定) 平衡 $\left[\frac{b}{(l_1+l_2)^2} = \frac{c}{l_1^2}, \frac{a}{(l_1+l_2)^2} = \frac{c}{l_2^2}\right] a:c:b = l_2^{-2}:(l_1+l_2)^{-2}:l_1^{-2}$

electric dipole

电偶极子

等量异号电荷 $\pm q$ 相距 l ,

electric dipole moment

\vec{l} 由负指向正 **电偶极矩** $\vec{p} \equiv q\vec{l}$

\rightarrow 力偶矩 $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} + \vec{r} \times \vec{F}$

(非均匀电场中受净力 \vec{F}) **静电能**

设场点 $r \gg l$, 延长线和中垂线上的解

$E_{//} = k_e q \left[\left(r - \frac{l}{2}\right)^{-2} - \left(r + \frac{l}{2}\right)^{-2} \right] \approx k_e \frac{2p}{r^3}$

$E_{\perp} = 2k_e \frac{q}{r^2 + l^2/4} \frac{l/2}{\sqrt{r^2 + l^2/4}} \approx k_e \frac{p}{r^3}$

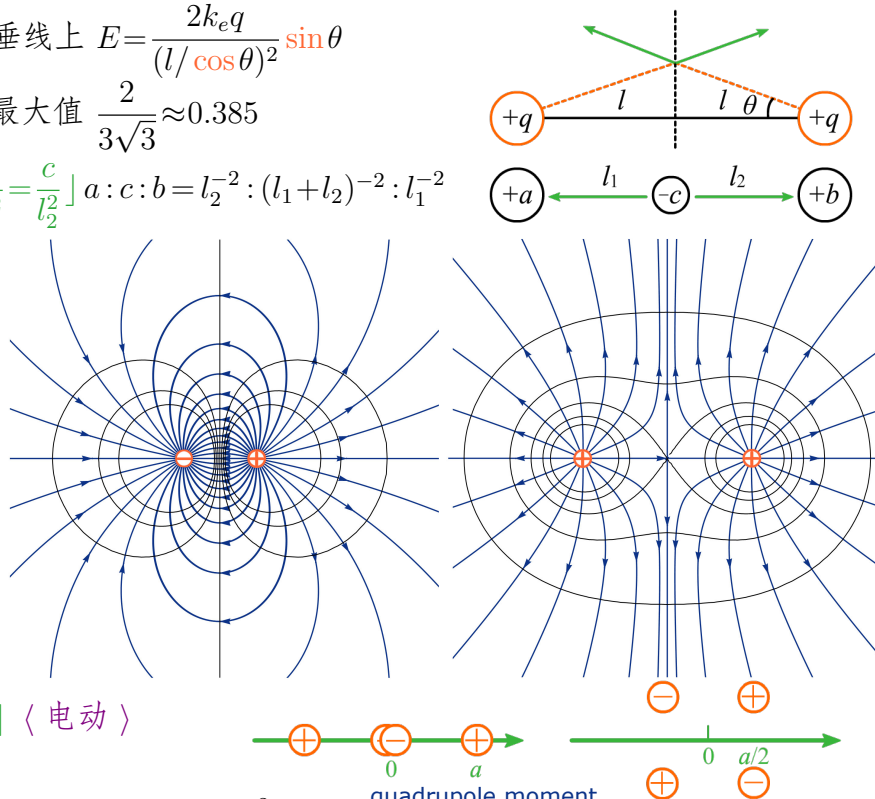
electric quadrupole

电四极子

偶极矩为零 $[\vec{p} \text{ 可矢量叠加}]$ **电动**

正方形, $E \approx k_e \frac{3ql^2}{r^4}$

共线型, 延长线上 $E = 2k_e qa \left[\left(r - \frac{a}{2}\right)^{-3} - \left(r + \frac{a}{2}\right)^{-3} \right] \approx k_e \frac{6qa^2}{r^4}$, 定义 **电四极矩** $Q = 2qa^2$



静电场

electric field line

(矢量场图是在每个点处画有大小和方向的小箭头, 场线图只能从疏密反映场强大小)

电场线

曲线每一点的切线方向和该点场强方向一致, 任一点电场线的数密度与该点场强大小成正比

性质

静电场的电场线起自正电荷或无穷远, 结束于负电荷或无穷远, 不会在没有电荷处中断

电场线不会相交, 除非该处场强为零, 静电场线不会闭合, 涡旋电场线闭合

electric flux

电通量

$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{S}$ 对于闭合曲面, 取外法线矢量方向为正 [1. 库仑定律算包围点电荷同心球面

2. 球面通量等于同立体角任意曲面 3. 不包围电荷通量为零 4. 场强叠加原理] →

Gauss theorem

电场高斯定理

通过任意闭合曲面 $\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q(S_{内})}{\epsilon}$ (适用于任何平方反比场) (适用于运动电荷)

Earnshaw's theorem

→ **恩绍定理**

(1842) 点电荷集合不可能只靠静电力保持稳定力学平衡 [有向内的电场线就有向外的]

(前例三体平衡点是鞍点) (亦适用于硬磁铁 < 静磁 >)

linear charge density

surface

volume

(宏观上可视电荷为连续分布)

电荷线密度

$dq = \eta_e dl$

电荷面密度

$dq = \sigma_e dS$

电荷体密度

$dq = \rho_e dV$

例 无限大平板 $E = \frac{\sigma_e}{2\epsilon_0}$ **例** 均匀带电球壳, 内部 $E = 0$, 外部 \equiv 点电荷 → 均匀带电球体 $E_{内} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3}$

[$E_{总} = E_{小面} + E_{其它}$, 面元自己不能对自己施力, 电场的不连续完全是因小面元两侧 $\pm \frac{\sigma_e}{2\epsilon_0}$ 产生的,

$E_{其它}$ 在小面处连续] 面电荷元受其它部分的力用 $E_{其它} = E_{外} + \frac{\sigma_e}{2\epsilon_0} = E_{内} - \frac{\sigma_e}{2\epsilon_0} = \frac{1}{2}(E_{外} + E_{内})$ 来求

例 球面元受排斥力 $dF = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_e}{\epsilon_0} + 0 \right) dq = \frac{\sigma_e^2}{2\epsilon_0} dS$ **静电力** 倾向于把面元吸向电场, 无论 σ_e 正负

[可等效为圆弧] 无限长均匀带电细棒 $E = \frac{\eta_e}{2\pi\epsilon_0 r}$ (同二维空间), 有限长细棒中垂面 $E = \frac{\eta_e}{2\pi\epsilon_0} \frac{l}{r\sqrt{r^2 + l^2}}$

例 $\vec{E} = (ax, 0, 0)$ 得全空间电荷密度为常数 $\rho_e \equiv \epsilon_0 a$ → 给出电荷分布不一定能确定电场 (用库仑定律的话积分发散) (微分方程需要结合边界条件才能定解) (以前我们潜意识加了无穷远为零或对称性等) 无对称性则无法只靠高斯定理得出场强分布 (高斯定理对静电场的描述不完备)

电势

circuital theorem of electrostatic field

< 矢分 > 静电场力做功与路径无关 (保守力场) \Leftrightarrow **静电场环路定理** 沿任意闭合环路 $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

[亥姆霍兹定理] 散度 + 旋度 + 无穷远趋于零边界条件 \Leftrightarrow 库仑定律

electric potential energy

电势能

试探电荷从 \vec{r}_1 搬到 \vec{r}_2 , 静电场力做的功 $W_{12} = q \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} =$ 电势能减少, **电势差** $U_{12} \equiv \frac{W_{12}}{q}$

$= \varphi_1 - \varphi_2$ (绝对), 单位 **V(伏特) = J/C** 取无穷远电势为零 → **电势** $\varphi \equiv U_{r\infty} = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l}$ (相对)

(零势点不能选在电荷上, 分布于无穷远的净电荷为零才能选无穷远为零势点, 如单根无限长带电直线, 零势点不能取在直线上也不能取在无穷远, 一对无限长异号带电直线, 零势点可取在中垂面或无穷远)

例 点电荷 $\varphi = k_e \frac{q}{r}$, 无限长带电细棒 $\varphi = \frac{\eta_e}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{1}{r}\right) + \text{常数}$ (同二维空间点电荷)

superposition principle of electric potential

电势叠加原理

各电荷同时存在产生的电势, 等于单独存在时的电势的代数和

equipotential surface

等势面

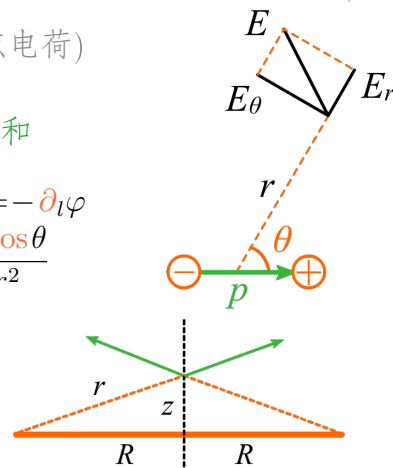
和电场线处处正交, 疏密反映场强大小, $\vec{E} = -\nabla\varphi$, 任意方向上 $E_l = -\partial_l\varphi$

例 电偶极子 $r \gg l$, $\varphi \approx k_e q \left(\frac{1}{r - \frac{l}{2} \cos\theta} - \frac{1}{r + \frac{l}{2} \cos\theta} \right) \approx k_e q \frac{l \cos\theta}{r^2 - (\frac{l}{2} \cos\theta)^2} \approx k_e \frac{p \cos\theta}{r^2}$

$E_r = -\partial_r\varphi = k_e \frac{2p \cos\theta}{r^3}$, $E_\theta = -\frac{1}{r} \partial_\theta\varphi = k_e \frac{p \sin\theta}{r^3}$, $E_\phi = -\frac{1}{r \sin\theta} \partial_\phi\varphi = 0$

带电圆环轴线上 $\varphi = \frac{\eta_e}{2\epsilon_0} \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}$ (标量和), $E_z = \frac{\eta_e}{2\epsilon_0} \frac{Rz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$ (矢量加)

均匀带电圆盘 (无限薄单电荷层) 轴线上 $\varphi_z = \frac{\sigma_e}{2\epsilon_0} (\sqrt{R^2 + z^2} - z)$, $E_z = \frac{\sigma_e}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)$



dipole layer

电偶极层 厚度为 l 的均匀曲面, 两面带相反电荷 $\pm\sigma_e$

$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \sigma_e \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) dS, r_2 \approx r_1 + \cos\theta, \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \approx -\frac{l \cos\theta}{r^2}, \frac{\cos\theta dS}{r^2} = \text{立体角 } d\Omega$, 两侧立体角跃变 4π

$\varphi = -\frac{\sigma_e l}{4\pi\epsilon_0} \Omega, \vec{E} = \frac{\sigma_e l}{4\pi\epsilon_0} \nabla \Omega$, 电偶极层的 E 和 φ 只和它对场点所张立体角有关, 两侧有电势跃变 $\frac{\sigma_e l}{\epsilon_0}$ (电势总连续, 电势跃变意味着有 δ 一样的场强)

静电能

electrostatic energy

静电能 W_e 把带电体系拆成无限分散的状态静电力做的总功 (与次序或路径无关)

self energy

mutual energy

对于多个带电体, W_e 等于各带电体的**自能** (聚成单个带电体) 加带电体间的**互能** (移带电体整体)

例 两个点电荷 $W_{\text{互}} = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$, n 个点电荷: 所有配对求和 $W_{\text{互}} = k_e \sum_{i \neq j}^n \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{k_e}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_i q_i$

其中 φ_i 是除 q_i 之外其余电荷在 q_i 的位置产生的电势 (固体)

对于连续分布 [没有 δ 的电荷, $\varphi_{\text{其余}} = \varphi_{\text{总}}$] $W_e = \frac{1}{2} \int \varphi dq$ (dq 有 3 种密度的表示)

例 均匀带电球壳 $W_{\text{自}} = k_e \frac{q^2}{2R}$, 球体 $W_{\text{自}} = k_e \frac{3q^2}{5R}$ (用(电容)算更简便)

把电子设想为带电球, 取 $m_e c^2 = k_e \frac{e^2}{r_c}$, 得 $r_c \approx 2.8 \text{ fm}$ 称为**电子经典半径** (别当真)

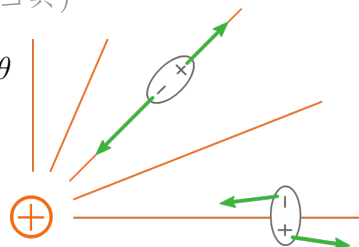
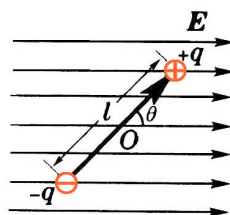
electron classical radius

例 电偶极子与匀强电场相互作用 $W_{\text{int}} = -\vec{p} \cdot \vec{E}$, 受力矩 $L_\theta = -\partial_\theta W = pE \sin\theta$

在非均匀电场中, 受净力 $\vec{F} = -\nabla W = \nabla(\vec{p} \cdot \vec{E}) \xrightarrow{p \text{ 不变}} (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}$

(这种记法的含义是 $F_x = \vec{p} \cdot \nabla E_x$, y, z 分量同理) (矢分)

→ 摩擦起电后, 碎片被极化, 电场力沿梯度方向, 拉向电场较强区域



电容

Isolated conductor

capacitance

farad

① **孤立导体** 电势随电量等比增加, **电容** $C \equiv \frac{q}{\varphi}$, 单位 F(法拉) = C/V **例** 孤立导体球(壳) $C = 4\pi\epsilon_0 R$

② 两靠近的导体, 表面各带电 $\pm q$ (自由电荷), [叠加原理] 电容 $C \equiv \frac{q}{U} > 0$, 两导体称为**电容器**的**极板**

注 充介质后 $C = \epsilon_r C_0$, 导体相当于 $\epsilon = \infty$ (电介质) **例** 平行板电容器 (忽略边缘效应) $C = \frac{\epsilon S}{d}$ [$\frac{\sigma_e S}{Ed}$]

→ 串联电容 [相当于合 d] $C^{-1} = C_1^{-1} + C_2^{-1}$, 并联电容 [相当于合 S] $C = C_1 + C_2$ (电路)

同轴圆柱 $C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln R_2 - \ln R_1}$ [$\frac{\eta_e l}{2\pi\epsilon \int \frac{1}{r}}$] 同心球 $C = 4\pi\epsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$ [$\frac{1}{k_e \Delta \frac{1}{r}}$]

公式 电容器储静电能 $W_e = \int_0^q \frac{q}{C} dq = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} Uq = \frac{1}{2} \int E d\sigma_e S = \frac{1}{2} \int E D_n V = \frac{1}{2} \epsilon E^2 V$ (电介质)

例 平行板电容, 将电介质层向外拉 dx , 则静电力会将它往里拉 (施力者为边缘电场, 难以计算)

可用虚功原理, 设 $S = xy$, 则 $dC = \frac{(\epsilon_0 - \epsilon)y dx}{d}$, $F = -\frac{dW_e}{dx} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C^2} \frac{dC}{dx} = -\frac{U^2 \epsilon_0 \chi_e y}{2d}$

(用恒电荷的公式而不是恒电压, 因为那样还有电源做功 $U dq = U^2 dC$ 恰为两倍, 最终计算结果相同)

electric field energy

electric energy density

电场能 占有体积的电场储藏着电能 (不依赖于电荷) **电能密度** $\omega_e = \frac{dW_e}{dV} = \frac{1}{2} \epsilon E^2$, 体积分得电场能

注 对于各向异性 \vec{E}, \vec{D} 不平行的情况, 一般形式为 $w_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$ 推导见 (电动)

例 导体球(壳) $W_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int_R^\infty \left(k_e \frac{q}{r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R} = \frac{q^2}{2C} \xrightarrow{R \rightarrow 0}$ 点电荷的静电能发散

注 电场能恒正, 静电能可能为负 (例如电偶极子) 是因为未算单个点电荷无穷大的电场能

性质 电场能不遵从叠加原理 (所有电荷加倍, 电场能变为 4 倍), 电场能变化与静电能一致

例 收缩带电球壳做功 $dW = \left(\frac{\sigma_e^2}{2\epsilon_0} \right) dS dr$ 等于新增电场的电能 $\frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \right)^2 dV$

例 均匀带电球体, 同理 $\frac{\epsilon_0}{2} k_e^2 \left[\int_0^R \left(\frac{qr}{R^3} \right)^2 + \int_R^\infty \left(\frac{q}{r^2} \right)^2 \right] 4\pi r^2 dr$, 第一项是第二项的 $\frac{1}{5}$ → 球壳乘 $\frac{6}{5}$ 即可

静电平衡

uniqueness theorem

唯一性定理 边界条件可将电场的恒定分布唯一确定 → 若静电屏蔽接地, 则内对外, 外对内均无影响
electrostatic equilibrium

静电平衡 自由电荷静止, 电场分布不随时间变化 [必要性: 反证法, 充分性: 唯一性定理 (电动)]

均匀(质料, 温度等) 导体 **静电平衡条件** $\vec{E}_{\text{内}} \equiv 0 \Leftrightarrow$ 感应电荷产生的电场 $\vec{E} = -\vec{E}_0 \xrightarrow{\text{高斯}} q_{\text{内}} \equiv 0 \Leftrightarrow \vec{E} = \frac{\sigma_e}{\epsilon_0} \vec{e}_n$

(电场线垂直于表面) \Leftrightarrow 平方反比精确成立 **结论** 导体是等势体, 表面是等势面, 电荷只分布于导体表面

例 将带电导体球与不带电导体球用细导线链接, 「两球等势」得电荷的重新分配为 $q_1:q_2=R_1:R_2$

注 自由动力学体系总寻找使电势能最小的分布 **例** 均匀带电球电场能大于带电球壳

静电平衡导体的 σ_e 一般难以求解析解 **公式** 椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的 $\sigma_e = \frac{q}{4\pi abc} \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{-1/2}$

[代入椭球方程消 z , $c=0$, 乘 2 因为两面] 导体圆盘 $\sigma_e(r) = \frac{q}{2\pi R} \frac{1}{\sqrt{R^2 - r^2}}$, 导体线段 $\eta_e(x) = \frac{q}{2a}$ (常数)
(二维和一维下的带电导体, 电荷并非只分布在边界)

electrostatic screening / shielding

静电屏蔽 ① 导体壳内部电场不受外界影响 (无论导体是否带电或接地), 电势有影响

② 内部带电体位置不影响腔外 (电量会感应到外表面), 若外壳接地则完全不影响腔外

Van de Graaff generator

范德格拉夫起电机 电势低的导体可不断接触高电势导体壳内部使其电势不断升高

导体表面尖端 (曲率较大) 处 σ_e 较大, 凹处 (曲率为负) σ_e 更小 → **尖端放电** →
electric wind corona

电晕 尖端的强电场电离空气, 吸引同号离子中和, 异号离子受排斥远离 → **电晕**

离子与空气分子碰撞产生光辐射, 消耗电能 (高压电线不能太细, 高压电极要极光滑) → **特利切尔脉冲**

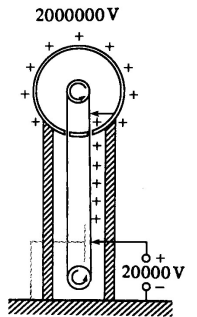
若电晕放电电压恒定, 电流会做周期性脉冲 (阴极 10^4 Hz, 阳极 10^6 Hz) → **静电放电** → **电磁脉冲**

lightning rod

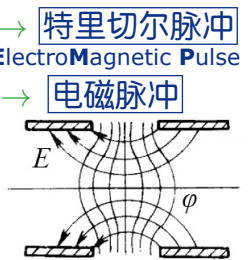
避雷针 在建筑物上安装尖端导体并良好接地, 带电云层接近时通过避雷针持续放电

electrostatic lens

静电透镜 带孔金属板, 可聚焦电子束



Trichel



电流

current charge carrier

电流 电荷 (载流子) 的定向运动, 规定为正电荷移动方向, 导体中电流方向同电场方向, 高电势向低电势
(电子平均漂移速率 $\sim 10^{-5}$ m/s, 电子热运动速率 $\sim 10^5$ m/s, 电场传播速率为光速 $\sim 3 \times 10^8$ m/s)

current intensity

电流强度 单位时间通过导体任一横截面的电荷量 $I \equiv \frac{dq}{dt}$ A (安培) = C/s, 标量 (电路)

linear charge density

线电流密度 $\vec{I} \equiv \eta_e \vec{v}$, 大小等于 I **面电流密度** 单位宽度电流强度 $\vec{i} \equiv \frac{d\vec{I}}{dl_{\perp}} = \sigma_e \vec{v}$

current density

(体) 电流密度 $\vec{j} \equiv \frac{d\vec{I}}{dS_{\perp}} = \rho_e \vec{v}$ A/m², 电流场是矢量场, I 是其通量 $I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$ $(\sum q \vec{v} = \int \vec{I} dl = \int \vec{i} dS = \int \vec{j} dV)$

local conservation of charge

局域电荷守恒 的数学表述: **电流连续性方程** $\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt}$, 流出闭合面的通量等于电荷减少

[代入 $q(t) = \int_V \rho_e(\vec{r}, t) dV \rightarrow \int_V \nabla \cdot \vec{j} dV = -\int_V \frac{\partial \rho_e}{\partial t} dV$ 对任意 V 都成立] 微分形式 $\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho_e}{\partial t}$

criterion of steadiness

电流恒定条件 \Leftrightarrow 环路定理 $\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$, 电流线不会中断, 恒定电路必然闭合 → 故可引入 **电压** U

Ohm law

欧姆定律 (1827) 宏观: $I = \frac{U}{R} = \frac{El}{\rho l/S} \rightarrow \vec{j} = \sigma \vec{E}$ 微观: 载流子速度和受力成正比, 说明存在阻力 (固体)

→ $\vec{j} = \sigma \vec{f} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ (导线中 v 很小可忽略, 等离子体不可) **理想导体** $\sigma = \infty$, 内部 $\vec{E} = \vec{j}/\sigma = 0$

电阻 $R \equiv \frac{U}{I}$ Ω (欧姆) **电导** $G \equiv \frac{1}{R}$ S (西门子) **电阻率** (恒温) $R = \rho \frac{l}{S}$ $\Omega \cdot m$ **电导率** $\sigma \equiv \frac{1}{\rho}$ S/m

$\rho_{\text{银}} \approx 1.59 \times 10^{-8}$, $\rho_{\text{铜}} \approx 1.68 \times 10^{-8}$, $\rho_{\text{水银}} \approx 9.6 \times 10^{-7}$, $\rho_{\text{石墨}} \approx 1.4 \times 10^{-5}$, $\rho_{\text{饱和盐水}} \approx 4.4 \times 10^{-2}$, $\rho_{\text{纯水}} \approx 2.5 \times 10^5$

→ 串联电阻 [相当于合 l] $R=R_1+R_2$, 并联电阻 [相当于合 S] $R^{-1}=R_1^{-1}+R_2^{-1}$ (电路)

例 同轴圆柱间的电阻 $I=\int \vec{j} \cdot d\vec{S}=\sigma \int \vec{E} \cdot d\vec{S}=\sigma \frac{\eta_e L}{\epsilon_0}$, $U=-\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}=\frac{\eta_e}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \rightarrow R=\frac{\ln(b/a)}{2\pi\sigma L}$

推论 [电高斯] $I=\sigma \frac{q}{\epsilon_0}=\frac{\sigma}{\epsilon_0} CIR \rightarrow$ 把导体嵌在均匀电阻材料中, 有 $R=\frac{\epsilon_0}{\sigma C}$

例 同心球间的电阻 $R=\frac{1}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$, 当 $b \gg a$ 时电阻与大球无关, 即主要的电阻都源于小球附近

性质 横截面保持不变的均匀电阻器, 内部电势线性变化 [拉普拉斯方程, 满足边界条件, 唯一性定理]

→ 若导线有电阻, 内部为匀强电场 $\vec{E}=\frac{I\rho}{S} \vec{e}_l$, 外部电场取决于如何使电路完整 (Merzbacher 难题)

volt-ampere characteristics nonlinear

伏安特性 (曲线) $I-U$ 图 **非线性元件** 伏安特性不为线性 **电阻温度系数** $\rho=\rho_0(1+\alpha t)$, 纯金属 $\alpha \approx 0.004$

electric power

电功率 电场单位时间做功 $P=UI \geq P_{\text{热}}$ (W) **热功率** $P_{\text{热}}=I^2 R=\frac{U^2}{R}=\sigma E^2 \Delta V$ (电路)

thermal power density

热功率密度 单位体积热功率 $p=\vec{j} \cdot \vec{E} \Leftrightarrow$ **焦耳定律** (1841) $p=\frac{j^2}{\sigma}=\sigma E^2$

电源

电场力沿闭合回路做功为零, 只有静电场不能维持恒定电流 (除了超导体) → 必须有 **非静电力** 做功

power source

电源 提供非静电力的装置, 记非静电力场强为 \vec{K} , 方向由 **负极** (低电势) 指向 **正极** (高电势)

ElectroMotive Force

记 $\vec{E}_{\text{总}}=\vec{K}+\vec{E}$, **电动势** $\mathcal{E} \equiv \oint \vec{K} \cdot d\vec{l}=\oint \vec{E}_{\text{总}} \cdot d\vec{l}$ (V) (标量) (静电场 $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l}=0$, 注意边缘电场, 没有永动机) 等于把单位正电荷从负极通过电源内部移到正极时非静电力做的功

对于闭合电路, 电源外部 $\vec{K}=0$, 公式可写成 $\mathcal{E}=\int_{-}^{+} \vec{K} \cdot d\vec{l}$, (电源内)

欧姆定律改为 $\vec{j}=\sigma \vec{E}_{\text{总}}$

internal resistance terminal voltage

实际电源有 **内阻** r , **路端电压** $U=\mathcal{E}-Ir$, 放电取减充电取加

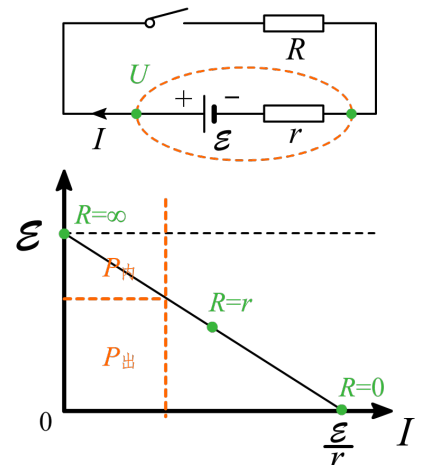
$P_{\text{总}}=\mathcal{E} I \stackrel{\text{纯电阻}}{=} I^2(R+r)=\frac{\mathcal{E}^2}{R+r}$, 电源内消耗 $P_{\text{内}}=I^2 r$

输出功率 $P_{\text{出}}=UI=(\mathcal{E}-Ir)I \stackrel{\text{纯电阻}}{=} I^2 R=\frac{\mathcal{E}^2 R}{(R+r)^2}=\frac{\mathcal{E}^2}{R+2r+\frac{r^2}{R}}$

impedance matching

阻抗匹配 当 $R=r$ 时电源输出功率最大 $P_{\text{max}}=\frac{\mathcal{E}^2}{4r}$

电流源等见 (电路)



效应

Thomson effect

汤姆孙效应 金属棒两端温度不等, 则加电流时 (除了产生焦耳热外) 冷 $\xrightleftharpoons[\text{放热}]{\text{吸热}}$ 热

Thomson e.m.f.

汤姆孙电动势 汤姆孙系数 $\sigma(T)$, 热扩散力 $\vec{K}_T=\sigma(T) \frac{dT}{dl}$, $\mathcal{E}(T_1, T_2)=\int_{T_1}^{T_2} \sigma(T) dT$

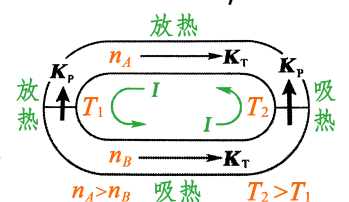
Peltier effect

佩尔捷效应 外加电流通过不同金属接触面时, \vec{K}_p 与 I 同向吸热反向放热, 电动势 $\Pi_{AB}(T)$, 半导体较强

thermoelectric effect

温差电效应 (塞贝克 1821) 同时存在温度和电子数密度梯度, 故不违反热二 **温差电偶** 用电势测温度

thermocouple



静磁

north pole

south pole

称小磁针指北一端为 **北极** N, 指南为 **南极** S (故地磁 N 极位于地理南极附近) 铁磁性 (凝态)

Gilbert

magnetic charge / monopole

吉尔伯特模型 历史上先以为有 **磁荷 / 磁单极子** $F=\frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{q_{m1}q_{m2}}{r^2}$, 后面和电场同理

magnetic field intensity

定义 **磁场强度** $\vec{H}=\frac{\vec{F}}{q_m}=-\nabla\varphi_m$ A/m= $4\pi \times 10^{-3}$ Oe(奥斯特) 引入 **磁标势** 的前提: 只能在没有自由电流分布的单连通区域内定义 (否则势函数不单值) (分子电流可以, 永磁体全空间都可以)

magnetic scalar potential

例 无限长直导线的磁标势 $\varphi_m = -\frac{\mu_0 I \phi}{2\pi}$, 限制 $0 \leq \phi < 2\pi$

magnetic dipole

磁偶极子 $\vec{p}_m = q_m \vec{l}$ (S 指向 N) 磁偶极子受力矩 $\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{H}$, 磁偶极层 $\vec{H} = \frac{\sigma_m l}{4\pi\mu_0} \nabla \Omega$

电流环受力矩 $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$, $W_{int} = -\vec{m} \cdot \vec{B}$, 受力 $\vec{F} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}) = (\vec{m} \cdot \nabla) \vec{B} + \mu_0(\vec{m} \times \vec{j})$
(和电的区别源于 $\nabla \times \vec{B} \neq 0$)

magnetic moment

磁矩 $\vec{m} \equiv IS \vec{e}_n$ (故小磁针 \vec{m} 总要转向 \vec{B} 的方向)

例 均匀带电旋转圆盘 $m = \int_0^R Svq = \int_0^R (\pi r^2)(\omega r)(\sigma_e dr) = \frac{1}{4}\pi\sigma_e\omega R^4$

例 均匀带电旋转圆环, 质量记作 m_0 [$\vec{m} = \frac{q\omega}{2\pi} \pi R^2 \vec{e}_z$, $\vec{L} = m_0 v R \vec{e}_z$] **旋磁比** 磁矩除以角动量 $g = \frac{q}{2m_0}$

「结果与 R 无关」 同样结果适用于任何旋转体 **〈量子〉** 电子自旋 $\frac{\hbar}{2}$ 磁矩 $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$ 比正常大 2 倍

「安培力」 任意形状载流线圈在均匀磁场中受力矩 $\vec{M} = IS(\vec{e}_n \times \vec{B})$, \vec{e}_n 为右手定则法向

电流环磁场公式 $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \nabla \Omega$, Ω 为线圈对场点所张立体角

「使磁偶极层和电流环等价」 $\rightarrow \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, $\vec{p}_m = \mu_0 \vec{m}$ **〈磁介质〉**

geomagnetic field

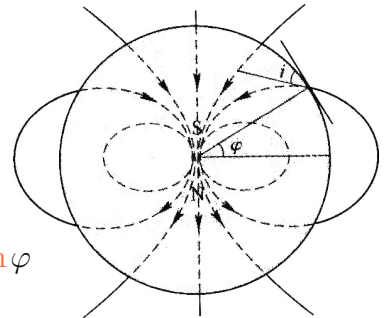
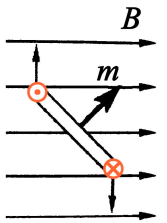
地磁场 来源于地核外核铁镍流体的涡电流, 强度约 0.25~0.65 Gs

可近似看作位于地心磁偶极子产生的 \rightarrow

磁倾角和地磁纬度的关系为 $\tan i = \left[\frac{-H_r}{H_\theta} = \frac{-k_m 2p_m \cos(\pi/2 + \varphi)/r^3}{k_m p_m \sin(\pi/2 + \varphi)/r^3} \right] = 2 \tan \varphi$

已知纬度 45° 的地磁水平分量约 0.23 Oe

「 $H_\theta = k_m \frac{p_m \sin \theta}{r^3} = \frac{1}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^3}$ 」 \rightarrow 地球的磁矩约 $8.4 \times 10^{22} \text{ Am}^2$ (相当于赤道上 $6.6 \times 10^8 \text{ A}$ 电流)



感强

Oersted experiment

奥斯特实验 (1820.07) 载流导线能偏转小磁针 \rightarrow 电荷总有库仑作用, 但只有运动电荷才有磁相互作用
(安培 1820.09) 同向载流导线相吸引, 反向载流导线相排斥 (故有转到同向趋势), 插金属板不能屏蔽

pinch effect

收缩效应 等离子体柱受自身电流的磁场的作用有向中心收缩的趋势 (导线中此效应极弱)

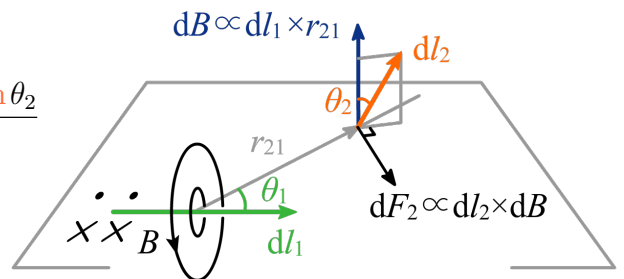
Ampère law

安培定律 (1820.12) 稳恒线电流元 I_1 给 I_2 的力

$d\vec{F}_2 = k_m \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{e}_{r_{21}})}{r^2}$ 大小 $= k_m \frac{I_1 dl_1 \sin \theta_1 I_2 dl_2 \sin \theta_2}{r^2}$

$k_m \equiv \frac{\mu_0}{4\pi}$, 取 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ **〈磁介质〉**, 然后定义 **A 〈实验〉**

(不满足牛三, 闭合回路积分才满足) **「安培定律拆开」** \rightarrow



Biot-Savart law

毕奥萨伐尔定律 (1820.10) $d\vec{B} = k_m \frac{I d\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2}$ (\vec{e}_r 由电流元指向场点), 另有 $I d\vec{l} = \vec{I} d\vec{l} = \vec{i} dS = \vec{j} dV$

magnetic induction

tesla

gauss

磁感应强度 $\vec{B} = \oint_L d\vec{B}$ T(特斯拉) = Wb/m² = N/(Am) = 10⁴ Gs(高斯) 电流集合有磁的 **场强叠加原理**

Ampère force

安培力 $d\vec{F}_2 = I_2 d\vec{l}_2 \times d\vec{B}$, 另有 $\vec{F} = \int \vec{v} \times \vec{B} dq = \int \vec{I} \times \vec{B} dl = \iint \vec{i} \times \vec{B} dS = \iiint \vec{j} \times \vec{B} dV$

(均匀磁场中, 安培力只与起点终点有关) **推论** 安培力冲量 $m\Delta v = F\Delta t = BIl\Delta t = Bl\Delta q$

例 两根平行的无限长均匀带电直线 (不是导线, 导线中性), 以 v 沿线方向运动, 要使单位长度磁吸引力 $\frac{\mu_0 \eta_e^2 v^2}{2\pi d}$ 和电排斥力 $\frac{\eta_e^2}{2\pi \epsilon_0 d}$ 平衡, 得 v 为光速 (η_e 和 v 均在实验室系测, 不必考虑相对论)

例 运动电荷磁场 (非稳恒电流, 此为近似推导) $\vec{B} = \frac{\mu_0 q \vec{v} \times \vec{e}_r}{4\pi r^2} = \mu_0 \epsilon_0 \vec{v} \times \frac{k_e q \vec{e}_r}{r^2} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}$ **〈电动〉**

Lorentz force

「 $I d\vec{l} \rightarrow q \vec{v}$ 」 **洛伦兹力** $\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$ (总与带电粒子速度方向垂直, 故不对粒子做功)

(洛伦兹力的作用是传递, 宏观导体上的安培力可以做功, 原因是自由电子的冲量传递给了金属晶格)

例 圆形区域中心对称的磁场 $\vec{B}(r)$, 若总磁通量为零, 则从圆心出发的粒子(若能脱离磁场区)必沿径向射出, 反之, 瞄准圆心的入射粒子最后必击中圆心 [粒子获得总角动量 $\vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{F} dt = q \int \vec{r} \times (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) dt = q[\int (\vec{r} \cdot \vec{B}) d\vec{l} - \int \vec{B}(\vec{r} \cdot d\vec{l})]$, 而 $\vec{r} \cdot \vec{B} = 0$, $\vec{r} \cdot d\vec{l} = \vec{r} \cdot d\vec{r} = r dr$, 得 $\vec{L} = -\frac{q}{2\pi} \int_0^R \vec{B} 2\pi r dr = -\frac{q}{2\pi} \Phi_B$]

Larmor radius

拉莫尔半径 $r = \frac{mv_{\perp}}{Bq}$

回旋周期 $T = \frac{2\pi m}{Bq}$

与 v, r 无关 \rightarrow **磁透镜** 磁聚焦

magnetic lens

velocity selector

速度选择器 $Eq = qvB \rightarrow$

MagnetoHydrodynamic generator

磁流体发电机

mass spectrometer

质谱仪 先平衡后断电, 由回旋半径得荷质比 $\frac{q}{m} = \frac{E_{\text{选}}}{r B_{\text{选}} B_{\text{偏}}}$ (非相对论)

相同电流 (同时改变电性和速度方向) 一般结论相同, **霍尔效应** 是例外 (固体)

cyclotron

回旋加速器

每圈的半径 $\propto \sqrt{n}$, $v_{\text{max}} = \omega R$ **回旋频率** $\omega = \frac{qB}{m}$

例 静止粒子放在正交的电场磁场中, 记 $R \equiv E/\omega B$

(微几) 解得运动轨迹为圆摆线 $(y - R\omega t)^2 + (z - R)^2 = R^2 \rightarrow v = E/B$

磁场越强半径越小, 磁矩不变 $|\vec{m}| = IS = \frac{q}{T} \pi r^2 = \frac{mv_{\perp}^2}{2B} = \frac{E_{k\perp}}{B} \rightarrow$

magnetic mirror

磁镜 带电粒子由弱磁场向强磁场运动, v_{\perp} 增加导致 v_{\parallel} 减小乃至反弹

例 两个同向载流线圈 \rightarrow 托卡马克装置, 约束等离子体 (核物)

Van Allen radiation belts

以及地磁场约束会形成 **范艾伦辐射带**

静磁场

line of magnetic induction

磁感线 磁铁外部从 N 走向 S, 磁铁内部从 S 走向 N, 不相交

steady current

稳恒电流 $\partial_t \rho_e = 0$, \vec{j} 无散, 电流闭合或为无限场 (永磁体满足)

Ampère circuital theorem

静磁场安培环路定理 通过任意闭合环路 $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{(L\text{内})}$

穿过回路面的电流与回路右手定则方向同向为正, 反向为负

(\vec{B} 为全空间电流产生的磁场, 不通过 L 的电流的环路积分为零)

例 载流直导线对磁场的贡献, $l = R \cot \theta$, $\frac{dl}{d\theta} = \frac{R}{\sin^2 \theta}$, $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}$

$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\sin \theta}{(R/\sin \theta)^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$, 无限长 $\frac{\mu_0 I}{2\pi R}$, 方向右手螺旋

例 无限大载流平面, 两侧 $B = \frac{1}{2} \mu_0 i$, 方向相反 (右手定则)

均匀带电球面自转, $[dI = \frac{q}{T} \sigma_e \omega r dx]$ 转轴上, 球内 $B_z = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma_e \omega R$ (匀强), 外 $B_z = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma_e \omega \frac{R^4}{x^3}$ (偶极)

载流圆线圈在轴线, 记 $r = \sqrt{R^2 + x^2}$, $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dl R}{r^2} = \frac{\mu_0 I R^2}{2r^3}$, $x=0 \rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2R}$, $x \gg R \rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{m}}{2\pi x^3}$

Helmholtz coils

亥姆霍兹线圈 间距等于半径的一对共轴载流圆线圈 [设间距 $2d$, 记 $r_{\pm} = \sqrt{R^2 + (x \pm d)^2}$, 则

$B \propto r_+^{-3} + r_-^{-3}$, $B' \propto (x+d)r_+^{-5} + (x-d)r_-^{-5}$, $B'' \propto [4(x+d)^2 - R^2]r_+^{-7} + [4(x-d)^2 - R^2]r_-^{-7}$ 中点处 $B''_x = 0$

(由于偶函数, 奇次导亦都为零) 可方便地获得均匀磁场, $B = \frac{8\mu_0 I}{5\sqrt{5}R}$

solenoid

载流 **螺线管** 在轴线 $B = \mu_0 n I \frac{\cos \theta_2 - \cos \theta_1}{2}$, 方向右手螺旋, n 为单位长度匝数

无限长密绕螺线管在轴线 $B = \frac{\mu_0 I R^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n dx}{r^3} = \mu_0 n I$ **螺绕环** $\vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi R} \vec{e}_{\phi}$ (任意形状截面均适用)

性质 整个螺线管内部磁场都是均匀的 [矩形安培环路, 另一边在无限远], 管外 $B=0$

磁矢势

magnetic flux

weber

Gauss theorem of magnetic field

磁通量 $\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{S}$ Wb(韦伯) = Vs = CΩ

磁场高斯定理 通过任意闭合曲面 $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

无旋场是某标量场的梯度 $\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$, 无散场是某矢量场的旋度 $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$ (矢分)

magnetic vector potential

磁矢势 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, 即 $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \Phi_B$ (很像 $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$, 故 \vec{B} 生成 \vec{A} 就像 \vec{j} 生成 \vec{B})
电势可以加个任意无梯度场(常数)而不影响 \vec{E} , 矢势可以加个任意无旋场(梯度)而不影响 \vec{B}

库仑规范 取矢势散度为零 $\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$ (电动)

例 对于匀强磁场 $\vec{B} = B\vec{e}_z$ [$B\pi r^2 = 2\pi r A$] $\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r}$

$\vec{A} \cdot \vec{p} = [\frac{1}{2} (\vec{B} \times \vec{r})] \cdot \vec{p} = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{1}{2} BL_z$

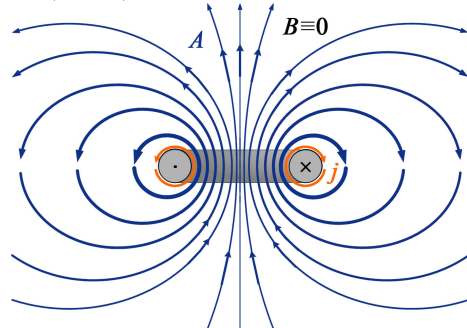
例 无限长载流直导线, \vec{A} 与导线平行, [取长为 l 的矩形环路,

$\Delta A_z l = \Phi_B = l \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int \frac{dr}{r}$] $A_z(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{1}{r} + \text{常数}$

(零势点不能取在无穷远)

对一般的载流回路 L , 取无穷远矢势为零, 产生的矢势为 $k_m \oint_L \frac{I d\vec{l}}{r}$ (表达式不唯一) (电动)

例 无限长密绕螺线管, 矢势和电流同向, 只有 A_φ 分量, $A_\varphi(r) = \mu_0 n I \frac{r}{2} (r < R), = \mu_0 n I \frac{R^2}{2r} (r > R)$



电磁感应

Faraday's law of electromagnetic induction

法拉第电磁感应定律 (法拉第 1831 实验发现, 诺埃曼 1845 给出公式) $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ **磁通链** $\Psi = N\Phi_B$

标量的正负是相对于标定方向而言的: 若 Φ_B 与 \vec{e}_n 同向并增大, 则感应电动势逆着右手定则方向 →

Lenz's law

楞次定律 (1834) 感应电流的效果总是反抗激发感应电流的原因 (产生焦耳热要付出功, 符合能量守恒)

注 因 \vec{B} 无散, 故同一边界用任意面求通量都可以, 对变化的磁场适用静磁学的范围: 准静态, 类空间隔

例 用感应电动势驱动有负载的回路, $\Delta\Phi_B = \mathcal{E} \Delta t = \frac{I \Delta t}{R} = \Delta q R$

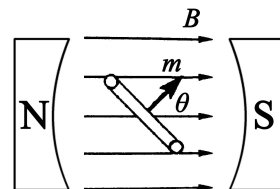
例 均匀磁场中的滑动矩形导线框 $\mathcal{E} = Blv$, 绕一端旋转的棒 $\mathcal{E} = \frac{1}{2} Bl^2 \omega$

motional e.m.f.

$[\vec{K} = \frac{\vec{F}_{\text{洛}}}{-e} = \vec{v} \times \vec{B}]$ **动生电动势** 导体切割磁感线 $\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} = U_{12}$

alternating current generator (alternator)

交流发电机 $\mathcal{E} = 2Blv \sin \theta \xrightarrow{\text{或}} -\frac{d}{dt} (BS \cos \omega t) = BS \omega \sin \omega t$



涡旋电场

induced e.m.f.

实验发现**感生电动势**与导体的性质无关 → 即使不存在导体, 变化的磁场也会激发出**涡旋电场**

vortex electric field

$[\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = -\oint \partial_t \vec{A} \cdot d\vec{l}]$ $\vec{E}_{\text{旋}} = \vec{K} = -\partial_t \vec{A} \rightarrow \nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$, 为无源有旋场

总电场 $\vec{E} = -\nabla \varphi - \partial_t \vec{A}$ (\vec{l} 与 \vec{S} 以右手定则为正)

注 当 $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \neq 0$ 时电势不能良好定义 **例** 电路中有一线性增加的磁通量 $\Phi_B = \alpha t$, 则 $I = \frac{\alpha}{R_1 + R_2}$, $U_1 = IR_1$, $U_2 = IR_2$, 高低如图

两(理想)电压表读数不等, 即使连在相同点上

betatron

电子感应加速器 用 $E_{\text{旋}}$ 加速回旋电子, 由 $mv = Bqr$, 只要 $B \propto p$ 就可维持电子在固定轨道运动

$[\frac{d(mv)}{dt} = -eE_{\text{旋}} = \frac{e}{2\pi r} \frac{d\Phi_B}{dt}]$, 左边 v 和右边 Φ_B 均从零开始积分, 得 $mv = \frac{e}{2\pi r} \Phi_B$, 而 $\Phi_B = \pi r^2 \bar{B}$

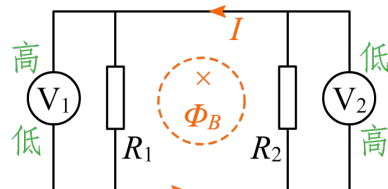
条件: 轨道上的 $B(r) = \frac{1}{2} \bar{B}$ (轨道内平均感强的一半), 加速不受相对论限制, 受同步辐射限制

eddy current

涡流 金属内部的感应涡电流 → 变压器采用多片与磁感线平行的硅钢片, 高频交流电可用于冶炼金属

electromagnetic damping

电磁阻尼 阻碍相对运动, 可用于让电磁仪表指针快速稳定, 亦可用于驱动, 如转速表, 感应式异步电机



电感

mutual inductance

mutual induction e.m.f.

互感 $\Psi_{12}=M_{12}I_1, \Psi_{21}=M_{21}I_2$ **互感电动势** $\mathcal{E}_2=-M_{12}\frac{dI_1}{dt}$ (负号表示反抗电流变化)

[准静态, $\Psi_2=\oint \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2, \vec{A}_1=k_m \oint \frac{I_1 d\vec{l}_1}{r}$] **纽曼公式** $M_{12}=M_{21}=k_m \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r_{12}} \equiv M$

[$M=\frac{N_2\Phi_1}{I_1}=\frac{N_1\Phi_2}{I_2}$] $M \leq \sqrt{L_1 L_2}$, 无漏磁时取等号 **例** 嵌套螺线管 $B=\mu_0 \frac{N_1 I_1}{l}, M=\frac{\Psi_{12}}{I_1}=\mu_0 \frac{N_1 N_2 S}{l}$

例 相距 d 共轴平行的一大一小载流圆环, 记 $r=\sqrt{d^2+R_2^2}$, 大对小, 近似匀场 $\Phi_B=\frac{\mu_0 I R_2^2}{2r^3} \pi R_1^2$, 小对大, 近似偶极子, 选球冠做积分 $\Phi_B=k_m \frac{I \pi R_1^2}{r^3} \int_0^{\sin^{-1}(d/r)} (2\cos\theta)(r^2 2\pi \sin\theta d\theta)$, 而 $\sin^2\theta|_0^{\sin^{-1}}=\frac{R_2^2}{r^2}$, 两结果一致

self inductance inductance

henry

自感 $\Psi=LI$ **电感** $L>0 \text{ H(亨利)}=Vs/A$ 与回路形状有关 (若有铁芯还和 I 有关) **自感电动势** $\mathcal{E}=-L\frac{dI}{dt}$

例 螺线管或螺绕环 $B=\mu_0 nI, L=NBS/I=\mu_0 n^2 V$, 其中 $V=lS$ **注** 充介质后 $L=\mu_r L_0$,

magnetic circuit

磁路 由铁芯构成磁感应管可类比电路, $I \rightarrow \Phi_B, \sigma \rightarrow \mu, \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_m=N I_0, R \rightarrow R_m=\frac{l}{\mu S}$

空气高磁阻 \rightarrow 在铁芯上开一条缝, 电感大幅下降, 但可提高 Q 值 (电路)

静磁能

串联电感的总自感, 其中的互感顺接取加反接取减, 如图

自感磁能 $W_L=\int_0^I LI dI=\frac{1}{2}LI^2$, 互感磁能 $W_{12}=M_{12}I_1 I_2$

总磁能 $W_m=\frac{1}{2}\sum_i L_i I_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i \neq j} M_{ij} I_i I_j$

[$LI=\Phi_B=\oint \vec{A} \cdot d\vec{l}$] $\rightarrow W_m=\frac{1}{2}\int \vec{A} \cdot (I d\vec{l})$

用 w_m 计算两线圈总磁能: $w_m=\frac{1}{2}(\vec{B}_1+\vec{B}_2) \cdot (\vec{H}_1+\vec{H}_2)=\frac{1}{2}\mu(H_1^2+H_2^2+2\vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2) \rightarrow w_{\text{自}} \geq 0, w_{\text{互}}$ 可正可负

公式 电感储静磁能 $W_m=\frac{1}{2}\mu n^2 V I^2=\frac{1}{2}BH_t V=\frac{1}{2}\mu H^2 V$, 一般形式为 $w_m=\frac{1}{2}\vec{H} \cdot \vec{B}$ (电动)

总结: L 可用磁能 $=\frac{1}{2}LI^2$ 求或 Ψ/I 求, Ψ 可用平均磁链 $\iint I d\Phi/I$ 或 $\iint \Phi dI/I$ 求

例 反向平行载流直导线, 设粗细为 r (否则导线外 Φ_B 无穷大), 间距 $d \gg r$, 则单位长度 l 的自感为

[$\Phi_B=\int B l dr=\int_r^{d-r} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{1}{r}+\frac{1}{d-r}\right] l dr=\frac{\mu_0 I l}{2\pi} [\ln r - \ln(d-r)] \Big|_r^{d-r} \approx \left(\frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d}{r}\right) I$] $L=\frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d}{r}$

将导线拉远磁能增加, 它加上磁场做的功 (导线相斥), 等于电源维持电流恒定做的功 (感应电流反抗)

电介质

dielectric

free charge

polarization

bound charge

电介质 绝缘介质, 无**自由电荷** q_0 (以下用下标 0 表示与极化无关), 因**极化**产生**束缚电荷** q'

displacement polarization

orientation polarization

无极性分子为电子的**位移极化**, 极性分子还有**取向极化**, 效应比前者强 (但高频电场下仅前者能跟上)

[视电子云为均匀分布, 其偏离原子核 d 产生的电场 $E_e=k_e \frac{qd}{R^3}$ 与外场 E 平衡, 得 $qd=4\pi\epsilon_0 R^3 E$]

atomic polarizability

原子极化率 $\vec{p}=\alpha\vec{E}$, 初阶近似 $\alpha=3\epsilon_0 V$ (预测氢原子 $k_e\alpha \approx 0.12 \times 10^{-30} \text{ m}^3$, 实验值 0.67×10^{-30})

polarizability tensor

对于分子 α_{ij} 为**极化张量** (碳原子 $k_e\alpha \approx 1.76 \times 10^{-30}$, CO_2 分子轴向 4.0×10^{-30} , 垂直于轴 1.8×10^{-30})

polar molecules

permanent dipole moment

极性分子 例如水分子, 无需外电场就有**固有电偶极矩** $\vec{p}_0 \approx 6.17 \times 10^{-30} \text{ Cm}$ (很大, 所以是个好溶剂)

electric polarization intensity

定义 **电极化强度** $\vec{P} \equiv \frac{\vec{p}_{\text{分子}}}{dV}=nq\vec{l} \text{ C/m}^2$, 分子数体密度 $n=\frac{N}{V}$ [$q_{\text{剩}}=qn l dS \cos\theta=\vec{P} \cdot d\vec{S}$]

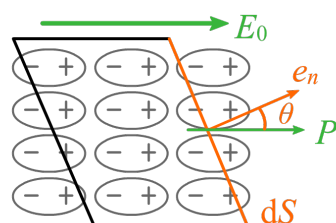
面内外 $q_{\text{剩}}$ 等大反号 $\oiint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}=-q'_{(S\text{内})} \rightarrow$ **极化电荷体密度** $\rho'_e=-\nabla \cdot \vec{P}$

$\rightarrow q_{\text{剩}}$ 仅存在于界面或自由电荷附近, 均匀极化 $\rho'_e=0$, 总束缚电荷为零

depolarization field

极化电荷面密度 $\sigma'_e=\frac{q_{\text{剩}}}{dS}=\vec{P} \cdot \vec{e}_n \equiv P_n$ **退极化场** σ'_e 产生的 E'

例 平行板电介质, 均匀极化 \vec{P} , 则 $\pm\sigma'_e=\pm P, E'=P/\epsilon_0$ 方向与 P 相反



电极化率

总电场 $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$ (注: 对一般形状, \vec{E}' 不一定总严格和 \vec{E}_0 反向, 即使介质和 E_0 都均匀)

electric susceptibility

对各向同性线性介质, $\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$ (不是 \vec{E}_0) 成正比 **电极化率** χ_e , 量纲为 1

对各向异性材料 (如晶体) χ_e 为二阶张量, 高强度光场下为非线性 $\vec{P} = \epsilon_0 (\chi^{(1)} \vec{E} + \chi^{(2)} \vec{E}^2 + \dots)$ (现光)

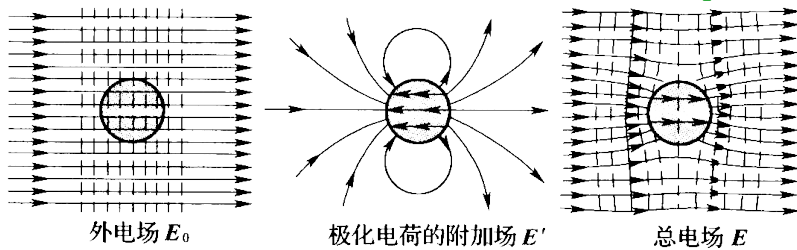
例 均匀极化的电介质球, 表面 $\sigma_e' = P \cos \theta$ [由叠加原理, 可视为两个各带正负电的球错开 l 距离]

$\vec{P} = \rho_e \vec{l}$, $\vec{p}_{\text{总}} = \vec{P}V$, V 为球体积 (电动)

$E_{\text{外}}$ 和处于球心偶极子的外电场完全相同

$$q = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_e, E_{\text{内}} = k_e \frac{qr}{R^3}, E' = \frac{\rho_e}{3\epsilon_0} (-l) = -\frac{P}{3\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \frac{\chi_e}{3} \vec{E} \rightarrow \vec{E}_{\text{内}} = \left(1 + \frac{\chi_e}{3}\right)^{-1} \vec{E}_0$$



Clausius-Mossotti

Lorentz-Lorenz

若介质由原子 (或非极性分子) 组成 $\vec{P} = n\vec{p}$, 有 **克劳修斯-莫索提公式** 光学称 **洛伦兹-洛伦茨方程**

(用 $\chi_e = n\alpha/\epsilon_0$ 不够精确, 因为 $\vec{p} = \alpha\vec{E}$ 中的电场是除原子自身的 $\vec{E}_{\text{其他}}$, $\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$ 中是总的宏观电场)

$$\left[\vec{E}_{\text{自}} = -\frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 R^3} \rightarrow \vec{E} = \left(1 - \frac{n\alpha}{3\epsilon_0}\right) \vec{E}_{\text{其他}} \rightarrow \chi_e = \frac{n\alpha/\epsilon_0}{1 - n\alpha/3\epsilon_0}\right] \alpha = \frac{3\epsilon_0 \epsilon_r - 1}{n \epsilon_r + 2} \quad (\text{最适合气体, } \epsilon_r \approx 1 \text{ 回到原式})$$

对于极性分子 \vec{p}_0 [分子在电场中势能 $U = -\vec{p}_0 \cdot \vec{E}$, 按玻耳兹曼分布, 分子有能量 u 的概率 $\propto e^{-u/\beta}$,

$$\text{故平均能量 } \langle u \rangle = \frac{\int_{-pE}^{pE} u e^{-u/\beta} du}{\int_{-pE}^{pE} e^{-u/\beta} du} = k_B T - p_0 E \coth\left(\frac{p_0 E}{k_B T}\right), \vec{P} = n \langle p_0 \cos \theta \rangle \vec{e}_E = n (-\langle u \rangle) \frac{\vec{e}_E}{E}, \text{ 高温弱场下}$$

$$\coth x - \frac{1}{x} \approx \frac{x}{3} \quad \text{Langevin} \quad \text{朗之万方程} \quad \chi_e = \frac{np_0^2}{3\epsilon_0 k_B T} \rightarrow \text{实验分别测定气体的两类极化 } \chi_e \approx \frac{n}{\epsilon_0} \left(\alpha + \frac{p_0^2}{3k_B T}\right)$$

介电常量

$$\vec{E}_0 \rightarrow \vec{P}_0 = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}_0 \rightarrow \sigma_e' \rightarrow \vec{E}_1' = -\frac{\chi_e}{3} \vec{E}_0 \rightarrow \vec{P}_1 = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}_1 \rightarrow \vec{E}_2' = -\frac{\chi_e}{3} \vec{E}_1 \rightarrow \dots \text{求级数和 } \vec{E} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\chi_e}{3}\right)^n \vec{E}_0$$

↓ 引入 \vec{D} 可避免无限递推地求总电场

$$\left[\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} (q_0 + q'), \text{联立 } \vec{P} \text{ 的高斯定理消去 } q'\right] \rightarrow \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0(S_{\text{内}})$$

electric displacement

dielectric constant / electric permittivity

电位移矢量 / 电感应强度 $\vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} \equiv \epsilon \vec{E}$, 介质的 **介电常量 / 电容率** $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$

例 介质中的点电荷 $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r = k_e \frac{q/\epsilon_r}{r^2} \vec{e}_r$ (介质能部分屏蔽, 导体则完全抵消)

vacuum

relative

真空介电常量 $\epsilon_0 = (\mu_0 c^2)^{-1} \approx 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ **相对介电常量** $\epsilon_r = 1 + \chi_e$, 20°C 下 $\epsilon_{r,\text{空气}} \approx 1.0005$ $\epsilon_{r,\text{水}} \approx 80$

[\vec{E}_0 和 \vec{D} 散度相同, 若旋度也相同, 即 $\nabla \times \vec{D} = 0 + \nabla \times \vec{P}$ 为零的话] $\rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_0 \rightarrow \vec{E} = \vec{E}_0 / \epsilon_r \rightarrow C = \epsilon_r C_0$

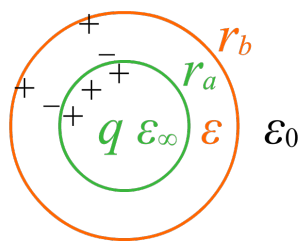
注 不能认为 \vec{D} 和 q' 无关, 上式成立的条件: 均匀电介质充满电场所在空间, 或表面沿等势面填充

例 带电导体球外包裹一层电介质壳, 球内 $\vec{E}, \vec{P}, \vec{D} = 0$, 球外 $\vec{D}_{r>a} = \frac{q}{4\pi r^2} \vec{e}_r \rightarrow$

$$\vec{E}_{a \sim b} = \vec{D} / \epsilon, \vec{E}_{r>b} = \vec{D} / \epsilon_0, \vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}, \rho_e = 0, \sigma_e = P_n$$

$$\text{记 } k = \frac{1 - \epsilon_r^{-1}}{4\pi}, \text{内表面 } \sigma_e = -k \frac{q}{a^2} \text{ 外表面 } \sigma_e = k \frac{q}{b^2} \text{ 总感应电荷 } \sigma_e' = \frac{\chi_e}{\epsilon_r} q$$

$$W_e = \frac{1}{2} \int E D dV = \left(\frac{q}{4\pi}\right)^2 \frac{4\pi}{2} \left(\epsilon^{-1} \int_a^b + \epsilon_0^{-1} \int_b^\infty\right) \frac{r^2 dr}{r^4} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon} \left(\frac{1}{a} + \frac{\chi_e}{b}\right)$$



磁介质

Ampère molecular current hypothesis

magnetization current

安培分子电流假说 分子环流定向排列形成宏观 **磁化电流 / 束缚电流** (无热效应)

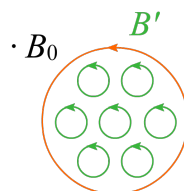
magnetizing current magnetizing field

magnetic medium

magnetized

外加 **励磁电流** 产生 **磁化场** \vec{B}_0 将 **磁介质** (如铁芯) **磁化**

被磁化后 \vec{B}' 与 \vec{B}_0 同向, 故铁芯能使线圈的磁通增加



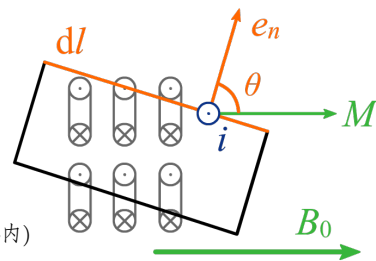
$$\text{① 环流观点: 定义 } \text{磁化强度 } \vec{M} \equiv \frac{\vec{m}_{\text{分子}}}{dV} = n I \vec{S} \text{ A/m, 环流体密度 } n = \frac{N}{V} \quad [I_{\text{剩}} = I n S d\vec{l} \sin \theta = \vec{M} \cdot d\vec{l}]$$

$$\oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l} = I'_{(L内)} \rightarrow \text{磁化电流密度 } \vec{j}' = \nabla \times \vec{M}$$

$\rightarrow I_{\text{剩}}$ 仅存在于界面或自由电流附近, 均匀磁化 $\vec{j}' = 0$

$$\text{面磁化电流密度 } \vec{i}' = \frac{I_{\text{剩}}}{dl} = \vec{M} \times \vec{e}_n \equiv \vec{M}_t \quad \text{总磁场 } \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$$

$$[\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0(I_0 + I')_{(L内)}, \text{联立 } \vec{M} \text{ 的环路定理消去 } I' \rightarrow \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{0(L内)}]$$



$$\text{辅助矢量 } \text{磁场强度 } \vec{H} = \mu_0^{-1} \vec{B} - \vec{M} \quad \text{真空磁导率 } \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2 = \text{H/m}$$

$[\vec{B}_0 \text{ 和 } \vec{H} \text{ 旋度相同, 若散度也相同, 即 } \nabla \cdot \vec{H} = 0 - \nabla \cdot \vec{M} \text{ 为零的话}] \rightarrow \text{若充满磁介质, } \vec{H} = \mu_0^{-1} \vec{B}_0,$
 $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = B_0 + \mu_0 \vec{M}$ (即使是线性介质, 分界面处 \vec{M} 的散度可以为无穷大) 泊松方程 $\nabla^2 \varphi_m = \nabla \cdot \vec{M}$

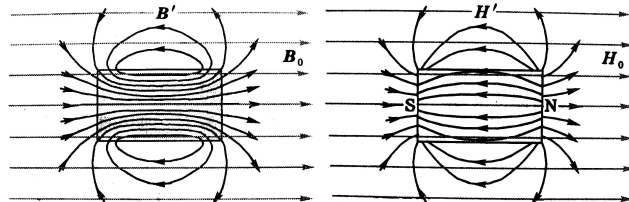
$$\text{② 磁荷观点: 定义 } \text{磁极化强度 } \vec{P}_m \equiv \frac{\vec{p}_{m\text{分子}}}{dV} \text{ Wb/m}^2$$

$$\text{退磁场 } \sigma'_m \text{ 产生的 } \vec{H}', \text{ 总 } \vec{H} = \vec{H}_0 - \vec{H}', \vec{P}_m = \chi_m \mu_0 \vec{H}$$

$$\text{辅助矢量 } \text{磁感应强度 } \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{P}_m = \mu_0(1 + \chi_m) \vec{H} \equiv \mu \vec{H}$$

$$\text{magnetic susceptibility } \chi_m, \text{量纲为 } 1 \quad \text{magnetic permeability } \mu = \mu_r \mu_0$$

$$\text{磁化率 } \chi_m, \text{量纲为 } 1 \quad \text{磁导率 } \mu = \mu_r \mu_0 \quad \text{相对磁导率 } \mu_r = 1 + \chi_m, \chi_{m, \text{铁}} \approx 10^5, \chi_{m, \text{铝}} \approx 10^{-5}, \chi_{m, \text{铜, 水}} \approx -10^{-5}$$



$$\text{③ 两种观点计算结果相同, 联系 (各向同性线性介质)} \vec{P}_m = \mu_0 \vec{M}, \vec{M} = \chi_m \vec{H} \rightarrow \vec{j}' = \chi_m \vec{j}_0$$

例 均匀磁化介质球的磁场, 取 \vec{e}_z 与 \vec{M} 同向, 体内电流 $\vec{j}' = \nabla \times \vec{M} = 0$,

表面束缚电流 $\vec{i}' = \vec{M} \times \vec{e}_n = M \sin \theta \vec{e}_\phi$, 形同均匀带电旋转球壳 $\vec{i} = \sigma_e \vec{v} = \sigma_e \omega R \sin \theta \vec{e}_\phi$

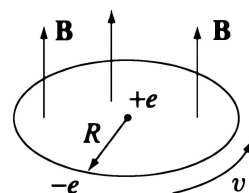
故球内为均匀磁场 $\vec{B} = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}$, 球外同纯磁偶极子 $\vec{m} = \vec{M} V$

注 无自由电流的静磁问题可直接从无自由电荷静电问题类比 $\vec{D} \rightarrow \vec{B}, \epsilon_0 \vec{E} \rightarrow \mu_0 \vec{H}, \vec{P} \rightarrow \mu_0 \vec{M}$

效应

弱磁质 $B' \ll B_0$, 同向为 **顺磁质** 源于力矩将磁偶极子拽向平行于外场方向, 因电子一般成对自旋反平行排列, 故通常出现在奇数电子的原子或分子中 (铜, 氢是例外)

抗磁质 (定性解释) 源于诱导轨道磁矩和磁场方向相反
 最弱, 只能在没有顺磁性的偶数电子的原子中才能观察到



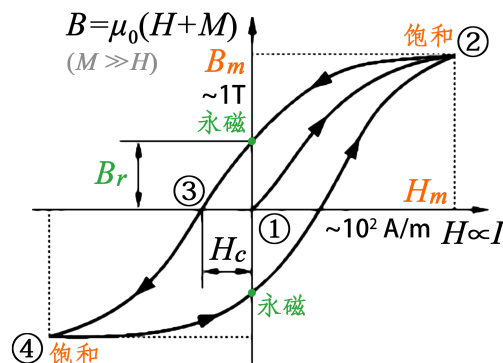
强磁质 $B' \gg B_0$, 自旋平行的为 **铁磁质**, 有 **磁滞回线** $\vec{M} \propto \vec{H}$

磁滞损耗 因磁滞消耗的能量, $W = \oint H dB =$ 磁滞回线包围面积

矫顽力 H_C 使介质完全退磁所需反向磁化场大小, 小的叫 **软磁材料**

软磁材料 (纯铁, 铁氧体 $\sim 1 \text{ A/m}$) 大的叫 **硬磁材料**, 即 **永磁体**

永磁体 (钕铁硼合金 $\sim 10^4 \sim 10^6 \text{ A/m}$)



磁畴 无外磁场铁磁质中, 自旋磁矩的小范围自发磁化区 ($\mu\text{m} \sim \text{mm}$)

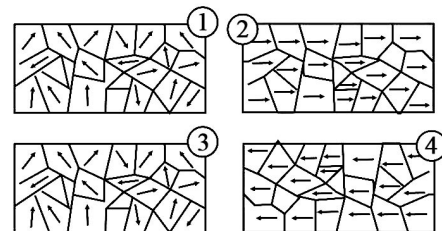
居里点 铁磁顺磁相变点, 高于此温度磁畴瓦解 (铁 770°C 钴 1131°C)

小磁针会因相吸同向排列, 但真正导致铁磁性的是量子的交换力

自旋反平行, 且磁矩等强为 **反铁磁性** (FeO), 不等强为 **亚铁磁性** (Fe_3O_4) (凝态)

矩磁材料 磁滞回线接近矩形, 适合做信息存取 **旋磁材料** 微波技术中用于抑制反射波

磁致伸缩 铁磁质磁畴磁化方向改变引起晶格间距改变 ($\sim 10^{-5}$)



ferroelectrics

铁电体 \vec{P}, \vec{E} 间有电滞效应, 类似磁滞, 有很强的极化和压电效应 (如石英, 酒石酸钾钠, 钛酸钡)

electret

驻极体 在极化后能将极化冻结起来, 类似永磁体 (如石蜡)

piezoelectric effect

压电效应 晶体发生机械形变时会极化, 在相对两面产生异号极化电荷 \rightarrow 话筒, 晶体振荡器

逆压电效应 晶体上加电场会发生机械形变 \rightarrow 耳机, 超声波发生

magnetostatic shielding

静磁屏蔽 用高磁导率的铁磁材料做成屏蔽罩以屏蔽外磁场 (效果不如静电屏蔽, 可采用多层铁壳屏蔽)

理想导体 内部磁场恒定 $\partial_t \vec{B} = -\nabla \times \vec{E} = 0$, 通过理想导体回路的磁通量恒定 $\left[\frac{d\Phi_B}{dt} = -\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \right]$

superconductor

Meissner effect

超导体 除电导无穷外还有 **迈斯纳效应 / 完全抗磁性** 内部 $\vec{B} = 0$, $\chi_m = -1$ (凝态)

超导体电流只存在于表面 $\left[\vec{j} = \mu_0^{-1} \nabla \times \vec{B} - 0 = 0 \right]$

边界条件

\vec{E} 线终止于电荷, \vec{D} 线终止于自由电荷, 介质分界面上各分量的连续性:

若无自由电荷, $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = (D_{2n} - D_{1n})S = 0$, $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = (E_{2t} - E_{1t})l = 0$

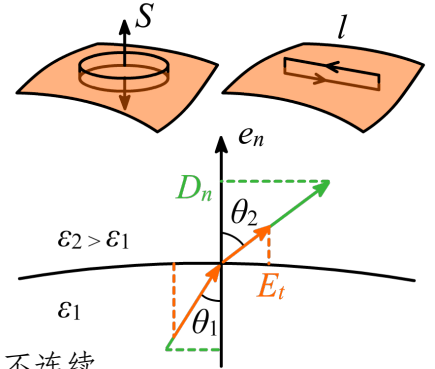
若无传导电流, $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = (B_{2n} - B_{1n})S = 0$, $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = (H_{2t} - H_{1t})l = 0$

$D = \epsilon E \rightarrow$ 电场线折射 $\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$, $B = \mu H \rightarrow$ 磁感应线折射 $\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$

与光线相反 (电介质凸透镜会使电场线发散)

有自由电荷 $\Delta D_n = q_0/S = \sigma_0$, 电势在边界连续, 电势的梯度继承了 E_n 的不连续

有传导电流 $\Delta H_t = I_0/l = i_0$, 磁矢势在边界连续, 矢势的旋度继承 B_t 的不连续 (矢势散度取决于规范)



全电流

(麦克斯韦 1861) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \vec{j}$, 等式左边须为零, 但对非稳恒电流 \vec{j} 并非无散

$\left[\nabla \cdot \vec{j}_0 = -\partial_t \rho_0 = -\partial_t (\nabla \cdot \vec{D}) = -\nabla \cdot (\partial_t \vec{D}) \right]$ 把它和 \vec{j}_0 合一起可消除散度」非静磁下 $\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_0 + \partial_t \vec{D}$

displacement current

称新增项为 **位移电流密度** $\vec{j}_D \equiv \partial_t \vec{D}$, 包括了 $\mu_0^{-1} \nabla \times \vec{B} = \vec{j}_0 + \nabla \times \vec{M} + \partial_t \vec{P} + \epsilon_0 \partial_t \vec{E}$ 中的最后两项

conducting current

total current

加上 **传导电流** \vec{j}_0 称为 **全电流** $\vec{j} = \vec{j}_0 + \vec{j}_D$ 在所有情况下连续

麦方程

Linear Isotropic Homogeneous constitutive relations

对于 **线性各向同性均匀介质**, **结构方程** $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$, **欧姆定律** $\vec{j}_0 = \sigma \vec{E}$

| 麦方程组 | 积分形式 (强调散度旋度) | 微分形式 (场由电荷电流产生) | 边界条件 |
|-------|--|--|-------------------------|
| 电高斯 | $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0$ | $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_0$ | $\Delta D_n = \sigma_0$ |
| 非静电环路 | $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint \partial_t \vec{B} \cdot d\vec{S}$ | $\nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0 - \vec{j}_m$ | $\Delta E_t = 0$ |
| 磁高斯 | $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ | $\nabla \cdot \vec{B} = 0 + \rho_m$ | $\Delta B_n = 0$ |
| 非静磁环路 | $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_0 + \iint \partial_t \vec{D} \cdot d\vec{S}$ | $\nabla \times \vec{H} - \partial_t \vec{D} = \vec{j}_0$ | $\Delta H_t = i_0$ |

Maxwell equations

麦克斯韦方程组 (1864) (绿色为若存在磁单极子) 以及洛伦兹力公式 $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) + q_m(\vec{H} - \vec{v} \times \vec{D})$ 构成电动力学基本方程 (连续性方程 $\nabla \cdot \vec{j} = -\partial_t \rho_e$, $\nabla \cdot \vec{j}_m = -\partial_t \rho_m$ 可以推出来) (对于微分形式还需边界条件才能定解) 加上牛二律, 构成完整的带电粒子和电磁场相互作用的经典描述

电磁波

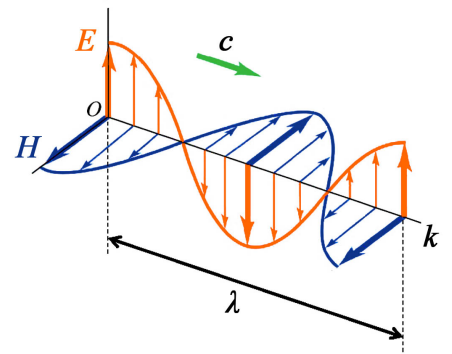
在 ρ_e 和 $\vec{j} = 0$ 的空间, 电磁波能够独立存在, 并以 v_p 传播 (赫兹 1888 实验证实)

对 $\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$ 两边取 $\nabla \times$, 左边 $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$, 右边 $-\partial_t (\nabla \times \vec{B}) = -\mu \epsilon \partial_t^2 \vec{E}$

得波动方程 $\nabla^2 \vec{E} = v_p^{-2} \partial_t^2 \vec{E}$, 对 \vec{H} 相同, 基本解是 $\omega \equiv \frac{2\pi}{T}$, $k \equiv \frac{2\pi}{\lambda}$ 的平面波, 相速度 $v_p = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$

电磁波是横波, 假定 $E_z, H_z=0$, 〈光学〉设线偏振 $E_y=0$,
得 $\partial_t H_x, \partial_z H_x=0$, 故只剩 H_y , 有 $\partial_z E_x = -\mu \partial_t H_y$, $\partial_z H_y = -\varepsilon \partial_t E_x$
解可写作 $E_x(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t + \theta)$, $H_y(z, t) = H_0 \cos(kz - \omega t + \theta)$
结论 $\vec{E} \vec{H} \vec{k}$ 右手正交, 电场磁场同相位, $\sqrt{\mu} H_0 = \sqrt{\varepsilon} E_0 \rightarrow E_0 = Z H_0$

由折射率定义 $n = \frac{c}{v_p}$ 知 $n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \approx \sqrt{\varepsilon_r}$ (需测光频下的 ε)
wave impedance $Z \equiv \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$, 自由空间的 **真空特征阻抗** $Z_0 \approx Z |n| \approx 377 \Omega$



能流

对于线性介质 [全微分的一半] 电磁场的**能量密度**为 $w = \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) = w_e + w_m$

电磁场总能量 $W = \frac{1}{2} \iiint_{\infty} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) dV = \frac{1}{2} \iiint_{\infty} (\rho \varphi + \vec{j} \cdot \vec{A}) dV$

(前者认为能量存储在电场里, 后者认为能量存储在电荷里, 两者结果相等, 一般不认为后者是能量密度)

由**洛伦兹力(体)密度** $\vec{f} = \rho_e \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$, 得电磁场做功的**功率密度** $P_{机} = \vec{f} \cdot \vec{v} \xrightarrow{\text{磁力不做功}} \rho_e \vec{E} \cdot \vec{v} = \vec{E} \cdot \vec{j}$
目标: 用场量 \vec{E}, \vec{H} 来表示 $P_{机}$ (不含 ρ_e, \vec{j}) \rightarrow 用非静磁环路换掉 \vec{j} 得 $P_{机} = \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H} - \vec{E} \cdot \partial_t \vec{D}$, 矢分
公式 $\vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H} = -\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E})$, 用非静电环路换 $\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$ 最终得 $P_{机} =$

$-\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - (\vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} + \vec{H} \cdot \partial_t \vec{B}) \equiv -\nabla \cdot \vec{S} - \partial_t w$, 记 $P_{机} = \partial_t w_{机}$, 有**能量守恒公式** $\partial_t (w_{机} + w) = -\nabla \cdot \vec{S}$

例 用电阻线连接正负电荷, 电流产生 \vec{B} , $\vec{E} \times \vec{B}$ 垂直指向电阻, 即电磁能是从侧面空间输入电阻的

Poynting vector / energy-flux density

坡印廷矢量 / 能流密度矢量 $\vec{S} \equiv \vec{E} \times \vec{H}$

其大小 $S = \frac{1}{Z} E^2$ W/m², 对于电磁波 $S = w v_p$

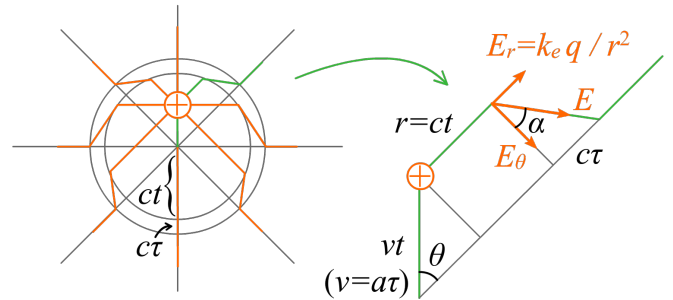
light intensity

光强 $I \equiv \frac{1}{T} \int_t S(t) dt$ ($t \gg T$) 对于单色平面波 $I = \frac{1}{2Z} E_0^2$

例 非相对论加速带电粒子的辐射(匀速不发射电磁波)

$\left[\tan \alpha = \frac{c\tau}{vt \sin \theta} = \frac{c}{at \sin \theta} \right]$ $E_{\theta} = k_e \frac{qa \sin \theta}{c^2 r}$ $\rightarrow S \propto \frac{a^2}{r^2} \sin^2 \theta$

对于偶极子, 位移 $\propto \cos \omega t$, 则 $a \propto \omega^2 \cos \omega t \rightarrow S \propto \omega^4$ 〈电动〉



动量

momentum density

light pressure

〈狭相〉 $w = gc \rightarrow$ 电磁波的**动量密度** $\vec{g} \equiv \vec{D} \times \vec{B} = \vec{S} / c^2 \rightarrow$ **光压** (列别捷夫 1900 实验证实)

用场量 \vec{E}, \vec{H} 来表示 $\vec{f} = (\nabla \cdot \vec{D}) \vec{E} + (\nabla \times \vec{H} - \partial_t \vec{D}) \times \vec{B}$, 而 $\partial_t (\vec{D} \times \vec{B}) = \partial_t \vec{D} \times \vec{B} - \vec{D} \times (\nabla \times \vec{E})$, 为了对称
补一项 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, 得 $\vec{f} = (\nabla \cdot \vec{D}) \vec{E} - \vec{D} \times (\nabla \times \vec{E}) + (\nabla \cdot \vec{B}) \vec{H} - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{H}) - \partial_t (\vec{D} \times \vec{B})$, 矢分公式 $\nabla (E^2) =$
 $\nabla (\vec{E} \cdot \vec{E}) = 2(\vec{E} \cdot \nabla) \vec{E} + 2\vec{E} \times (\nabla \times \vec{E})$, 最后用并矢梯度公式 $\nabla \cdot (\vec{D} \vec{E}) = (\nabla \cdot \vec{D}) \vec{E} + (\vec{D} \cdot \nabla) \vec{E}$ 化简
最终得 $\vec{f} = (\nabla \cdot \vec{D}) \vec{E} + (\vec{E} \cdot \nabla) \vec{D} + (\nabla \cdot \vec{B}) \vec{H} + (\vec{H} \cdot \nabla) \vec{B} - \frac{1}{2} \nabla (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) - \partial_t (\vec{D} \times \vec{B}) \equiv \nabla \cdot \vec{T} - \partial_t \vec{g}$

记 $\vec{f} = \partial_t \vec{g}_{机}$ (机械动量(体)密度), 有**动量守恒公式** $\partial_t (\vec{g}_{机} + \vec{g}) = \nabla \cdot \vec{T} \rightarrow -\vec{T}$ 表示 **动量流密度**

Maxwell's stress tensor

麦克斯韦应力张量 $\vec{T} \equiv \vec{E} \vec{D} + \vec{H} \vec{B} - w \vec{I}$, 分量形式 $T_{ij} = E_i D_j + H_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \sum_k (E_k D_k + H_k B_k)$

表示电磁场作用在单位面积上的应力, 对角元为压力, 非对角元为剪切力

例 费曼圆盘佯谬: 悬空圆盘上固定有通电线圈和带电小球, 则断电时涡旋电场会驱动小球让盘转起来
「断电前 \vec{g} 沿涡旋向, 电磁场具有角动量」 \rightarrow 类似 $q\varphi$ 存储电势能, $q\vec{A}$ 相当于存储磁势动量

带电粒子在电磁场中 $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = -q[\nabla \varphi + \partial_t \vec{A} - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{A})] = -q[\nabla \varphi + \frac{d}{dt} \vec{A} - \nabla (\vec{v} \cdot \vec{A})] = \frac{d}{dt} (m \vec{v})$
注: $\frac{d}{dt} \vec{A}(\vec{r}, t) = \partial_t \vec{A} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{A}$, 若沿粒子轨道 \vec{A} 不变则后项为零, 矢分 $\vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{A}$

$\frac{d}{dt} (m \vec{v} + q \vec{A}) = -q \nabla (\varphi - \vec{v} \cdot \vec{A}) \rightarrow$ **广义势** $U = \varphi - \vec{v} \cdot \vec{A}$, 拉氏量 $L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - q\varphi + q \vec{A} \cdot \dot{\vec{r}}$, 哈 $H = \frac{\Pi^2}{2m} + q\varphi$

canonical momentum

kinematical momentum

$\nabla U = 0$ 时 **正则动量** $\vec{p} = m \vec{v} + q \vec{A}$ 守恒 (满足正则对易关系) 而 $m \vec{v}$ 改叫作 **动力学动量** $\vec{\Pi} = \vec{p} - q \vec{A}$

例 仅有 $E_{势}$ 时能量守恒 $H = \frac{1}{2} m v^2 + q\varphi = \text{常数}$, 仅有 $E_{旋}$ 时正则动量守恒 $\left[\frac{d}{dt} (m \vec{v}) = q \vec{E}_{旋} = -q \frac{d}{dt} \vec{A} \right]$