集合

子集 (subset) $A\subseteq S$，可传递　并集/和集 (union) $A\cup B$　交集 (intersection) $A\cap B$，有交换、结合、无限分配律　直积/笛卡尔积 (direct product, Cartesian product) $A\times B=\{(x\in A,y\in B)\}$

相对补集 (relative complement) $B\setminus A$ 或 $B-A=A^c\cap B$　补集 $A\subseteq$ 全集 S，$S\setminus A=C_S A\overset{\mathbb{R}^n}{=}A^c$　幂集 (power set) $\wp(A)$，A 所有子集构成的集合

德摩根定律 (De Morgan's laws) $(\cup A_i)^c=\cap A_i^c$，$(\cap A_i)^c=\cup A_i^c$

〈函数〉

A、B 非空 ($\varnothing\sim\varnothing$)，若 $\exists f:A\xrightarrow{1-1}B$，则称 A 与 B 等势 (equipotence)，记为 $A\sim B$ (自反,对称,传递性)，它们有相同的基数/势 (cardinal number) $|A|=|B|$

若 $A\sim C\subsetneqq B$，则称 $|A|<|B|$ (<=> 有且只有一个成立)　伯恩斯坦定理 (Bernstein) $|A|\leq|B|$，$|B|\leq|A|$，则 $|A|=|B|$

可数集 (countable set) 和 $\mathbb{N}^*$ 对等的集合，具有所有无限集 (infinite set) 中最小的基数 $\aleph_0$ (Aleph null)

Co. 可数个可数集与有限集的并仍是可数集 $\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$　可数集的无限子集必为可数集

$\Rightarrow\mathbb{Q}$ 是可数集 $\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots\}\right]\Rightarrow$ 有限个可数集的直积是可数集 $\Rightarrow\mathbb{A}$ 是可数集

不可数集 (uncountable set) 不是可数集的无限集 [有限覆盖或三进制] $\mathbb{R}$ 是不可数集　连续基数 $|\mathbb{R}|=\aleph=2^{\aleph_0}$ [直积]

Co. $|$任意区间$|=\aleph$，可数个基数 $\aleph$ 的并、直积仍为基数 $\aleph\Rightarrow|\mathbb{R}^n|=\aleph$，$|$全体实数列 $E_\infty|=\aleph$，$\aleph\cdot\aleph=\aleph$

Th. $|\wp(A)|>|A|$ [假设对等,悖论]　$|\wp(A)|=2^{|A|}$

$\forall x,y\in X$，$\exists!$ 确定实数 $d(x,y)$ 与之对应，且满足 ① $d(x,y)\geq0$ ② $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$

③ 三角不等式 (triangle inequality) $\forall z\in X$，$d(x,y)\leq d(x,z)+d(y,z)\Rightarrow d(x,y)=d(y,x)$

则 d 为定义在 X 上的一个度量/距离 (metric, distance)，称 (X,d) 为度量空间，X 中的元素称为点，子空间 $\varnothing\neq Y\subseteq X$ 也是度量空间

在 n 维欧氏空间 $(\mathbb{R}^n,d)$ 定义内积 $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_i y_i^*$ (y 的坐标的复共轭)　欧几里得距离 (Euclidean distance) $d=\sqrt{\langle(x-y),(x-y)\rangle}$

邻域 (neighborhood) (开区间,开圆,开球) $U(x_0,\delta)=\{x\in X,d(x,x_0)<\delta\}$　若 $n\to\infty$ 时 $d(x_n,x_0)=0$，则称点列 $\{x_n\}$ 收敛 (convergence) 于 x_0，记 $\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$

非空点集的距离 $d(A,B)=\inf_{\substack{x\in A\\ y\in B}}d(x,y)$ (非度量)，非空点集的直径 $\delta(E)=\sup_{\substack{x\in E\\ y\in E}}d(x,y)$　有界点集 $\delta(E)<+\infty$

开区间 (open interval) $a_i<x_i<b_i$ $(i=1\sim n)$　闭区间 (closed interval) $a_i\leq x_i\leq b_i$ $(i=1\sim n)$　体积 (volume) $|X|=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$，每一项称为边长

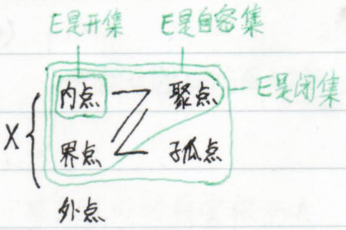
设全空间 (X,d)，$E\subseteq X$，$x_0\in X$，x_0 与 E 的关系有　内点 $\exists U(x_0)\subseteq E$　外点 x_0 是 E^c 的内点

边界点 (boundary point) $\forall U(x_0)$，$\cap E\neq\varnothing$，$\cap E^c\neq\varnothing$ ($x_0\in E$ 或 $x_0\notin E$ 均可)　孤立点 (isolated point) $x_0\in E$ 但不是聚点 $\Leftrightarrow\exists U(x_0)$，$\cap E=\{x_0\}$

聚点 (condensation point) $\forall U(x_0)$，$\exists$ 无限多点 $\in E\Leftrightarrow\forall\mathring{U}(x_0)\cap E\neq\varnothing$ ($\mathring{U}$ 去心邻域) $\Leftrightarrow\exists E$ 中互异点点列 $\{x_n\}$，$\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$

开核/内部 $\mathring{E}$，内点全体　边界 (boundary) ∂E，边界点全体　导集 (derived set) E'，聚点全体

闭包 (closure) $\bar{E}=E\cup\partial E=\mathring{E}\cup\partial E=E'\cup\{$孤立点全体$\}$



Co. $(\mathring{E})^c=\overline{E^c}$，$(\bar{E})^c=\mathring{(E^c)}=\{$外点全体$\}$，$(A\cup B)'=A'\cup B'$ (开核则未必)

$A\subseteq B\Rightarrow A'\subseteq B'$，$\mathring{A}\subseteq\mathring{B}$，$\bar{A}\subseteq\bar{B}$　$E\neq\varnothing$，$E\neq\mathbb{R}^n\Rightarrow\partial E\neq\varnothing$

continuum hypothesis
$\boxed{\text{连续统假设}}$ $\aleph=2^{\aleph_0}$ (已知它和现行集合论公理体系不矛盾)

开集 $G=\mathring{G}$ 闭集 $F'\subseteq F \Leftrightarrow \bar{F}=F \Leftrightarrow \partial F\subseteq F$ (R^n和$\varnothing$既是开集也是闭集)

Co. $\forall E\subseteq R^n$, $\mathring{E}$是开集, E'、$\bar{E}$是闭集　G^c闭, F^c开　$\bigcup^{\infty}$开=开, $\bigcap^{n}$开=开　$\bigcap^{\infty}$闭=闭, $\bigcup^{n}$闭=闭 [数学归纳]

自密集 $E\subseteq E'$, $E\subseteq R^n \Leftrightarrow$ 没有孤立点　perfect set 完备集 $E=E'$, $E\subseteq R^n \Leftrightarrow$ 自密闭集 「$\varnothing$是完备集」

compact set
紧集 度量空间中的点集E，它的任何开覆盖（覆盖它的开集族）都有有限子覆盖（选出有限个开集覆盖E） $\xLeftrightarrow{R^n中}$ 有界闭集

the nested interval theorem
闭区套定理 闭区间序列 $I_n\supseteq I_{n+1}$, $|I_\infty|\to 0$, 则$\exists!$点$\xi\in\bigcap^{\infty}I_i$

Cauchy sequence
柯西序列 数列$\{a_n\}$ 对$\forall\epsilon>0$ (任意小), $\exists N\in N^*$ (仅和ϵ有关的大数), 使$\forall m>N, n>N$ 有 $|a_m-a_n|<\epsilon$

Bolzano-Weierstrass theorem
博尔扎诺-魏尔斯特拉斯定理 / 列紧性定理 欧氏空间有界无限集至少有一个聚点 / 任何有界数列均存在收敛子列

Th. 数列$\{a_n\}$收敛 $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$是柯西序列 [证有界，子列a_{n_k}收敛到a，$|a_n-a|\le|a_n-a_{n_k}|+|a_{n_k}-a|<\epsilon$]

least upper/greatest lower
上/下确界 $\forall x\in E$, $x\le \sup E$ / $x\ge \inf E$, 且$\forall\epsilon>0$ $\exists x_\epsilon\in E$ 使 $x_\epsilon>\sup E-\epsilon$ / $x_\epsilon<\inf E+\epsilon$

确界存在定理 非空有上/下界集合必有上/下确界 [闭区间套] (无界记 $\sup E=+\infty$, $\inf E=-\infty$)

集合序列$\{A_n\}$ superior 上限集 $\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\lim_{n\to\infty}\sup A_n=\{x\mid\exists$无限个$A_i$, 使$x\in A_i\}$ interior 下限集 $\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\lim_{n\to\infty}\inf A_n=\{x\mid$从某一项开始后都有$x\in A_i\}$

Co. $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\subseteq$下限集$\subseteq$上限集$\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$, 上限集$=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m$, 下限集$=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}A_m$　若上限集=下限集, 则称$\{A_n\}$收敛于$\lim_{n\to\infty}A_n$

集合序列满足 $A_n\subseteq/\supseteq A_{n+1}$, 则称$\{A_n\}$为单调集列, 必收敛 $\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcup^{\infty}A_n$ / $=\bigcap^{\infty}A_n$

A是实数集, $\{I_n\}$是开区间序列, 若$A\subseteq\bigcup I_i$, 则$\{I_n\}$是A的一个 open covering 开覆盖 ($i\in$某指标集)

Heine-Borel
海涅-博雷尔有限覆盖定理 $\{I_n\}$为有限闭区间$[a,b]$的一个开覆盖, 则可以从中选出有限个开区间覆盖$[a,b]$

Date

函数 图 sgn 图 <几何>?

A,B 非空，法则 f 使 $\forall x\in A$ $\exists!\, y\in B$ 与之对应，则 f 为 A 到 B 内的映射 (mapping)，记 $f:A\to B$

x 称原像 (自变量?)，y 称像，记 $y=f(x)$ ("f of x")，A 称定义域 (domain) $\mathcal{D}(f)$，$f(A)$ 称值域 (range) $\mathcal{R}(f)$，B 称上域/到达域 (codomain)

恒等映射 $I_A:A\to A,\ a\to a$　复合映射 $A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$，记 $(g\circ f)(x)=g[f(x)]$　逆映射 $f^{-1}:B\to A$

单射 (injection) $\exists g:B\to A$ 使 $g\circ f=I_A$ $(f(x_1)\neq f(x_2))$　满射 (surjection) $\exists g:B\to A$ 使 $f\cdot g=I_B$ $(\mathcal{R}(f)=B)$　双射/一一映射 (bijection) 既单又满，$\exists f^{-1}$

限制映射、倍数映射 没用啊...

函数 (function) $f(x)$，x 称自变量 (independent variable)，$y=f(x)$ 称因变量/函数值 (dependent variable)，若 f 为双射，反函数 (inverse function) $y=f^{-1}(x)$ 的图像与 $y=f(x)$ 关于直线 $y=x$ 对称

严格增/减函数 $\forall x_1<x_2\in A,\ f(x_1)</>f(x_2)$　Th. 若 f 为严格增/减函数，则 f^{-1} 存在，也是严格增/减函数

(定义域关于原点对称) $\forall x\in A$，奇函数 $f(-x)=-f(x)$，偶函数 $f(-x)=f(x)$

函数可分解为奇+偶

函数 $f(x)$ 对 $\forall \epsilon>0$ (任意小)，$\exists \delta>0$ (仅和 ϵ 有关)，使 $\forall\, 0<|x-x_0|<\delta$ (去心 δ 邻域) 有 $|f(x)-A|<\epsilon$ (A 为某实数)

则称 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为极限，记 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \iff \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$

Th. 函数极限存在，则必唯一，存在邻域使 $f(x)$ 局部有界 (local bounded)，局部保号，两函数间有保序性 (order-preserving) → 夹逼定理

海涅原理 (Heine) 函数极限存在 $\iff$ 任何子列的极限都存在且相等

柯西收敛定理 函数极限存在 $\iff \forall\epsilon>0,\ \exists\delta>0$，使 $\forall x_1,x_2\in \mathring{U}(x_0,\delta)$ 有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处连续 (discontinue) $\iff \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$

第一类间断点、$f(x)$ 在 x_0 左右极限都存在　可去间断点 (removable discontinuity)、左极限 = 右极限　跳跃间断点 (jump discontinuity)、左极限 ≠ 右极限

第二类间断点、左右极限至少有一个不存在　无穷间断点 $[y=\frac{1}{x}]$　振荡间断点 $[y=\sin\frac{1}{x}]$

函数 $f(x)$ 对 $\forall\epsilon>0,\ \exists\delta>0$，使 $\forall x_1,x_2\in I$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续 (uniform continuity)

若 $\exists\epsilon_0>0$，对 $\forall\delta>0$，$\exists x_1,x_2\in I$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 但 $|f(x_1)-f(x_2)|\geq\epsilon_0$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上不一致连续

康托尔定理 (Cantor) 函数 $f(x)$ 在有界闭区间上连续，则 $f(x)$ 在该区间上一致连续　Th. 有界闭区间上连续函数必有界

Co. $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上连续 $\iff f(x)$ 在 (a,b) 上连续且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 存在

Th. 有界闭区间上的连续函数必存在最小值最大值　零点定理 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(a)f(b)<0$，则 $f(x)$ 必在 $[a,b]$ 内有

介值定理 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，c 介于 $f(a)$ $f(b)$ 间 (可推广为最值之间)，则 $\exists\xi\in[a,b]$ 使 $f(\xi)=c$

广义介值定理 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$\sum\lambda_i=1$，则 $\exists\xi\in[a,b]$ 使 $f(\xi)=\sum\lambda_i f(x_i)$，$x_i\in[a,b]$

不动点、压缩映射 <数分P87>

实连续函数是可数无穷维, 实函数是不可数无穷维

任意阶导均为零 $e^{-x^{-2}}$ 阶跃 $u(x)$

魏尔斯特拉斯函数(连续,处处不可导)

极坐标积分P221 旋转体体积, 弧长

convex 凸 concave 凹

No.

Date

微积分

连续 $[\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0]$

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ 存在, 则称 $f(x)$ 在 x_0 处 可导 (derivable) $\Longleftrightarrow f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=$ 导数 (derivative) $f'(x_0) \Longleftrightarrow$ 可微 ($f'(x_0)=A$)

$\exists$ 常数 A 使 $f(x+\Delta x)-f(x)=A\Delta x+o(\Delta x)$ ($\Delta x\to 0$), 则称 $f(x)$ 在 x_0 处 可微 (differentiable), 记 微分 $df=A\Delta x$

导函数 (derived function) $f'(x)=\frac{df}{dx}$ (开区间上可导要求每一点可导, 闭区间还要求端点右、左可导)　两侧 f'' 异号

$f'_+=f'_-$　$\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$ 存在, $f'(x)$ 连续

$f_+=f_-$　可导 $\langle$ x_0 是 $f'(x)$ 的第二类间断点 (不可能第一类)

$f(x)$ 在 x_0 处连续 不可导 $\langle$ 尖点, 极限不存在 (无穷, 振荡)

驻点 x_0 处可导且 $f'(x_0)=0$ $\langle$ $f''=0$ 拐点? P... ; $f''\neq 0$, 可导

极值点 $\exists\mathring{U}(x_0,\delta)$, $f(x_0)$ 为最值　不可导

单调 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, (a,b) 内可导, $f'(x)\geq/\leq 0$

(下)凸函数 $\sum\lambda_i=1$, $f(\sum\lambda_i x_i)\leq\sum\lambda_i f(x_i)$ $\Leftrightarrow f''>0$　Jensen 琴生不等式 凸 $f\left(\frac{\sum\lambda x}{\sum\lambda}\right)\leq\frac{\sum\lambda f(x)}{\sum\lambda}$ ($\lambda>$

渐近线 $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax-b)=0$, $a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)$, 水平 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b$, 铅直 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, (a,b) 内可导

- 罗尔定理 (Rolle) $f(a)=f(b)$, 则 $\exists\xi\in(a,b)$ 使 $f'(\xi)=0$　[$f^{(n)}$ 有 m 个根 $\Rightarrow f$ 的根 $\leq n+m$ 个]
- 拉格朗日中值定理 (Lagrange) $\exists\xi\in(a,b)$ 使 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
- 柯西中值定理 (Cauchy) $g'(x)\neq 0$, $\exists\xi\in(a,b)$ 使 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

达布介值定理 (Darboux) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 则 $\forall k$ 介于 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 间, $\exists\xi\in(a,b)$ 使 $f'(\xi)=k$

Stolz 定理 $\{b_n\}$ 单调递增, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$ 存在或为无穷, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$

极限平均值定理 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在或为无穷, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\sum a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}(\prod a_n)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

洛必达法则 (L'Hôpital's rule) $f(x),g(x)$ 在 x_0 (可以是 ∞) 去心邻域可导且 $g'(x)\neq 0$, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$ 或 ∞

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或为无穷 $\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 也存在或为无穷

不定积分 $\exists F'(x)=f(x)$, 记 $\int f(x)dx=F(x)+C$

定积分 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, 记 $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\max\{\Delta x_i\}\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$, 将区间 $[a,b]$ 分割成 n 个子区间,

积分中值定理 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $\exists\xi\in[a,b]$ 使 $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$

$f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $g(x)$ 不变号, 则 $\exists\xi\in[a,b]$ 使 $\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$ [$m\leq\frac{\int fg}{\int g}\leq M$]

微积分基本定理 连续函数必存在原函数 (变上限积分)　连续函数必有原函

牛顿-莱布尼茨公式 $F'(x)=f(x)$, 则 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$, 记 $F(x)\big|_a^b$

广义积分

$$\int_0^\infty \frac{x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+1}=\sum_{n=1}^\infty(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-1}=\int_0^\infty\left(\sum_{n=1}^\infty \mathrm{e}^{-nx}\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n},\ I_n=\int_0^\infty\frac{x^{n-1}\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-1}=\zeta(n)\Gamma(n)$$

$I_2=\frac{\pi^2}{6}\approx 1.645,$

Riemann 黎曼 ζ 函数 $\zeta(p)=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^p}$ PolyLog 多对数函数 $\mathrm{Li}_p(z)=\sum_{n=1}^\infty\frac{z^n}{n^p}$

重积分

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega'}F(u,v,w)|J(u,v,w)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w,\ F=f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))$$

⟨ 微分几何 –⟩ 柱系 $J=r$, 球系 $J=r^2\sin$

勒贝格积分

常微分方程?

参考文献

杨小远. 工科数学分析教程（分上下册）. 科学出版社【待刷，上册 320，下册 228】

丁同仁、李承治编. 常微分方程教程（第二版）. 高等教育出版社