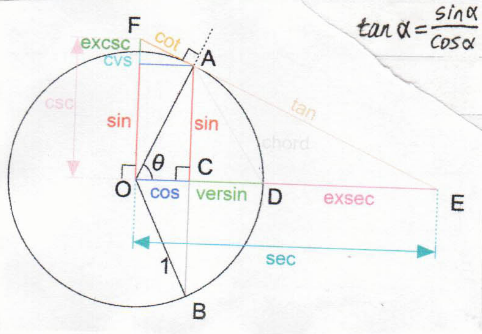
$\mathrm{Im}[e^{i(\alpha+\beta)}] = \mathrm{Im}\left((C_\alpha + iS_\alpha)(C_\beta + iS_\beta)\right)$

No. 基数
Date 三角

特殊值	$0°$	$15°$	$18°$	$22.5°$	$30°$	$36°$	$45°$	奇变偶不变,符号看象限
sin	0	$\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$	$\frac{\sqrt5-1}{4}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt2}}{2}$	$\frac12$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt5}}{4}$	$\frac{\sqrt2}{2}$	$\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$
cos	1	$\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt5}}{4}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt2}}{2}$	$\frac{\sqrt3}{2}$	$\frac{\sqrt5+1}{4}$	$\frac{\sqrt2}{2}$	$\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$
tan	0	$2-\sqrt3$			$\frac{\sqrt3}{3}$		1	$\tan(90°-\alpha)=\cot\alpha$



$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $\tan^2\alpha+1=\sec^2\alpha$, $\cot^2\alpha+1=\csc^2\alpha$

二倍角

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

降幂

$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2}$

$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2}$

$\tan^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{1+\cos2\alpha}$

三倍角

$\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$

$\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$

$\tan3\alpha=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$

半角

$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

基本公式

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

四倍角

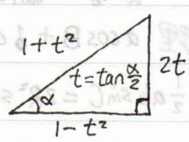
$\sin4\alpha=4\sin\alpha\cos\alpha-8\sin^3\alpha\cos\alpha$

$=4\cos^3\alpha\sin\alpha-4\sin^3\alpha\cos\alpha$

$\cos4\alpha=8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1$

$\tan4\alpha=\frac{4\tan\alpha-4\tan^3\alpha}{1-6\tan^2\alpha+\tan^4\alpha}$

万能



和差化积

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

五倍角 [欧拉公式]

$\sin5\alpha=16\sin^5\alpha-20\sin^3\alpha+5\sin\alpha$

$\cos5\alpha=16\cos^5\alpha-20\cos^3\alpha+5\cos\alpha$

$\tan5\alpha=\frac{5\tan\alpha-10\tan^3\alpha+\tan^5\alpha}{1-10\tan^2\alpha+5\tan^4\alpha}$

其它 ☺

$\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=-\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$

$\tan^2\alpha\sin^2\alpha=\tan^2\alpha-\sin^2\alpha$

$(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2=1\pm\sin2\alpha$

$\sin3\alpha=4\sin\alpha\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)\sin(\frac{\pi}{3}+\alpha)$

积化和差

$\sin\alpha\sin\beta=\frac12[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$

$\cos\alpha\cos\beta=\frac12[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$

$\sin\alpha\cos\beta=\frac12[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha\sin\beta=\frac12[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$

两角和差

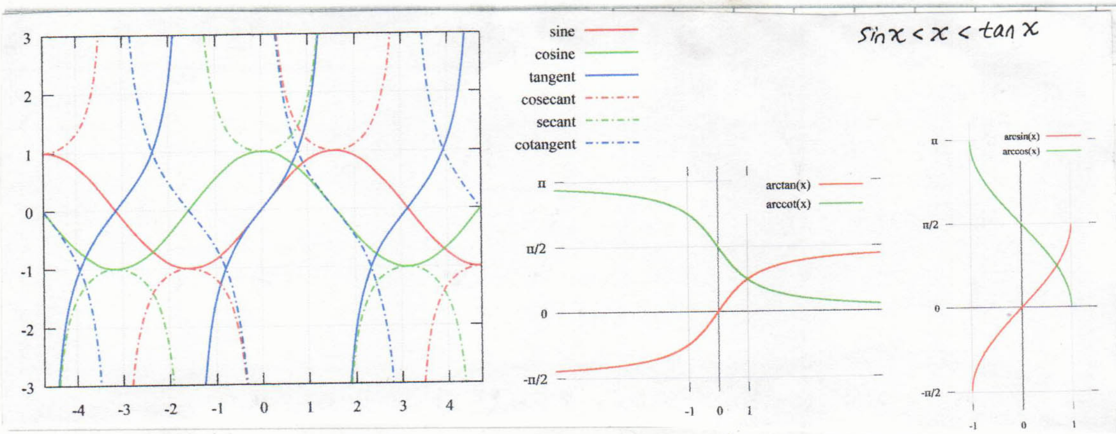
$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$

$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta=\cos^2\beta-\sin^2\alpha$

$\tan(\alpha+\beta)\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan^2\alpha-\tan^2\beta}{1-\tan^2\alpha\tan^2\beta}$

$\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$, $\tan\alpha-\cot\alpha=-\frac{2}{\tan2\alpha}$

$\sin x < x < \tan x$



[向量] $a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x+\varphi)$, $\tan\varphi = \frac{b}{a}$

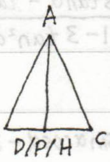
$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$ $\quad \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \arctan 1$

球面 $\cos C = \cos a\cos b + \sin a \sin b \cos C$

正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (外接圆半径) 球面 $\frac{\sin a}{\sin A} = \cdots = \frac{\sin a \sin b \sin c}{[\vec{OA},\vec{OB},\vec{OC}]}$

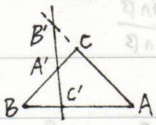
余弦定理 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ 中线长 $AB^2 + AC^2 = \frac{1}{2}BC^2 + 2AD^2$

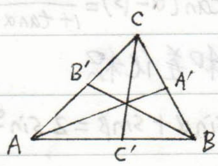


正切定理 $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$ 角平分线 $\frac{AB}{AC} = \frac{BP}{PC}$

射影定理 $a\cos B + b\cos A = c$ 直角三角形射影定理 $AH^2 = BH\cdot HC$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = 2R^2 \sin A \sin B \sin C = \frac{abc}{4R} = \frac{r}{2}(a+b+c) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$



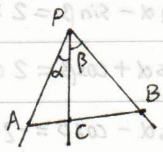


梅涅劳斯定理 A', B', C' 共线 $\Leftrightarrow \frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CA'}{A'B}\cdot\frac{BC'}{C'A} = 1$

塞瓦定理 AA', BB', CC' 共点或平行 $\Leftrightarrow \frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A} = 1$

托勒密定理 $AB\cdot CD + AD\cdot BC \geq AC\cdot BD$, 当且仅当 A,B,C,D 共圆时取等号

西姆松定理 过三角形外接圆上一点作三边垂线, 三垂足点共线 (西姆松线)



张角定理 A, C, B 共线 $\Leftrightarrow \frac{\sin(\alpha+\beta)}{PC} = \frac{\sin\alpha}{PB} + \frac{\sin\beta}{PA}$ $(\alpha+\beta<\pi)$

欧拉公式 内心外心距离满足 $d^2 = R^2 - 2Rr$ ($I\ r$ 内心, $O\ R$ 外心, G 重心, H 垂心, $I_A\ r_A$ 旁心)

解析法常用三角恒等式 [和差化积, 限二留一]

$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ $\quad \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A\cos B\cos C$

$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ $\quad \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A\cos B\cos C$

$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C$ $\quad \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$

勾股定理 Pythagorean Theorem 垂直 orthogonal

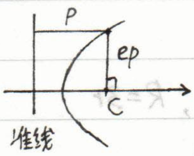
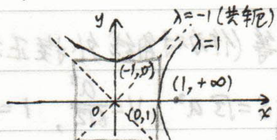
平面几何

Date 平几

斜截式	$y=kx+b$	$k\neq\infty$	点到直线距离 $d=\frac{\lvert Ax_0+By_0+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$
点斜式	$y-y_1=k(x-x_1)$	$k\neq\infty$	
两点式	$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$	$k\neq0,\ k\neq\infty$	线关于点对称 $A(2x_0-x)+B(2y_0-y)+C=0$
截距式	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$	$a\neq0, b\neq0$	点关于线对称 ①中点在线上 ② $B\Delta x=A\Delta y$
一般式	$Ax+By+C=0$	A,B不同为零	线关于线对称 ①取一点 ②到角 $\tan\theta=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$
法线式	$x\cos\theta+y\sin\theta=r$	圆切线方程	

(原点圆)切点弦方程 $x_0x+y_0y=r^2$　　圆切线长 $\sqrt{x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F}$

两交点连线：交点圆系方程 $\lambda=-1$　　由直径写圆方程 $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$

	椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	抛物线 $y^2=2px$
半焦距 c	$c^2=a^2-b^2$	$c^2=a^2+b^2$	
离心率 $e=\frac{c}{a}$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$	1
准线 ↲$+c$	 $x=\pm\frac{a^2}{c}$		$x=-\frac{p}{2}$
焦参数 焦点准线距离	$p=\frac{b^2}{c}$		p
半通径长 ↲$\times e$	$l=\frac{b^2}{a}$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda$	p
焦半径长	$a\pm ex_0$	$e\lvert x_0\rvert\pm a$	$x_0+\frac{p}{2}$
焦点弦长 直角系	$2a\pm e(x_A+x_B)$		x_A+x_B+p
焦点弦长 极系	[锥曲极系方程 $\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$] $\frac{2ep}{1-e^2\cos^2\theta}$ (θ为焦射线与半径夹角)		
点差法结论	$(\frac{x^2}{X}+\frac{y^2}{Y}=1)$ $k_{弦}k_{O中}=-\frac{Y}{X}$ (双曲需中点不在(0,1)区		$[k_{弦}=y'_x]$ $k_{弦}\cdot y_{中}=p$
切点弦方程	$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$	$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$	$y_0y=p(x+x_0)$
焦点△面积 $\theta=\angle F_1PF_2$	$b^2\tan\frac{\theta}{2}$	$b^2\cot\frac{\theta}{2}$	
	到 C_1C_2 和为 $2a$	到 C_1C_2 差为 $2a$	

统计分布

$S_{斜棱柱侧} = C_{直截面} \cdot l_{母线}$

$S_{正棱台侧} = \frac{1}{2}(c+c')h'$ ，$c\ c'$ 底面边长，h' 斜高

$S_{圆台侧} = \pi(r+r')l \left[= \frac{1}{2}(c+c')l\right]$

$S_{球} = 4\pi R^2$　$V_{球} = \frac{4}{3}\pi R^3$　$V_{锥} = \frac{1}{3}V_{柱}$

$V_{台体} = \frac{1}{3}h(S+\sqrt{SS'}+S')$

APB三点共线　$\overrightarrow{OP} = \lambda_1\overrightarrow{OA} + \lambda_2\overrightarrow{OB}$　且 $\lambda_1+\lambda_2=1$

ABCP四点共面　$\overrightarrow{OP} = \lambda_1\overrightarrow{OA} + \lambda_2\overrightarrow{OB} + \lambda_3\overrightarrow{OC}$　且 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$

$d_{点面} = \left|\overrightarrow{斜线} \cdot \overrightarrow{单法}\right|$

欧拉公式 无洞多面体 顶点V、面数F、棱数E 满足 $V+F-E=2$　有洞变零

正四面体 六条棱相等(作为对角线外接正方体)

记边长为a，表面积 $S=\sqrt{3}a^2$，$V=\frac{a^3}{6\sqrt{2}}$，$r=\frac{a}{2\sqrt{6}}$，$h=4r$，$R=3r$

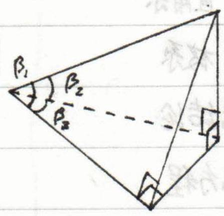
直角四面体 有一个三面角是直三面角(长方体的一角)

$S_P^2 = S_A^2 + S_B^2 + S_C^2$，$V=\frac{1}{6}abc$，$r=\frac{abc}{2S}=\frac{S_A+S_B+S_C-S_P}{a+b+c}$，$R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$

等面四面体 三组对棱分别相等 (作为对角线外接长方体)

$R=\frac{1}{4}\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}=\frac{k}{2}$，$V=\frac{1}{3}\sqrt{(k^2-a^2)(k^2-b^2)(k^2-c^2)}=\frac{4}{3}S_x \cdot r$

直棱四面体 三条相连棱形成三边直角折线



$\cos\beta_1 = \cos\beta_2 \cdot \cos\beta_3$

垂心四面体 四条高线交于一点(作为对角线外接平行六面体各面是菱形)

对棱互相垂直

莱布尼茨公式 三角形 $AP^2+BP^2+CP^2 = 3PG^2 + \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$

四面体 (P到4顶点距离平方和) $= 4PG^2 + \frac{1}{4}$(6棱长平方和)

四面体的立体角 $\tan^2\left(\frac{\Omega}{4}\right) = \tan\left(\frac{s}{2}\right)\tan\left(\frac{s-\alpha}{2}\right)\tan\left(\frac{s-\beta}{2}\right)\tan\left(\frac{s-\gamma}{2}\right)$　$s=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)$

平面几何

微分表

等价无穷小 $x\to0$ 的比值的极限为1　　$\lim\limits_{x\to0^+}x^x=1$

$\sin x\sim x$　$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$　$\arcsin x\sim x$　$\tan x\sim x$　$\arctan x\sim x$

$e^x-1\sim x$　$a^x-1\sim x\ln a$　$(1+x)^\alpha\sim1+\alpha x$ $(\alpha\in\mathbb{R})$　$\ln(1+x)\sim x$　$\log_a(1+x)\sim\frac{x}{\ln a}$

无穷大的速度 $(\alpha,\beta,\gamma>0)$　$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}=1$　$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x!}=\infty$　〈数理斯特林〉$\propto\sqrt{x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$

$\lim\limits_{x\to0^+}x^\alpha(\ln x)^\beta=0$　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac1x\right)^x=e$　$x\to\infty$　$\ln^\alpha x\ll x^\beta\ll e^{\gamma x}\ll x!\ll x^x\ll(x!)^2$

导函数　$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$　$(a^x)'=a^x\ln a$　$(\log_a|x|)'=\frac{1}{x\ln a}$

$(\sin x)'=\cos x$　$(\cos x)'=-\sin x$　$(\tan x)'=\sec^2x$　$(\mathrm{sh}\,x)'=\mathrm{ch}\,x$　$(\mathrm{ch}\,x)'=\mathrm{sh}\,x$　$(\mathrm{th}\,x)'=\mathrm{sech}^2x$

$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　$(\arccos x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$　$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$　$(\mathrm{arsh}\,x)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$　$(\mathrm{arch}\,x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$　$(\mathrm{arth}\,x)'=\frac{1}{1-x^2}$

$(\csc x)'=-\csc x\cot x$　$(\sec x)'=\sec x\tan x$　$(\cot x)'=-\csc^2x$

$(\mathrm{arccsc}\,x)'=\frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$　$(\mathrm{arcsec}\,x)'=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$　$(\mathrm{arccot}\,x)'=-\frac{1}{1+x^2}$

法则　$(f\pm g)'=f'\pm g'$　$(fg)'=f'g+fg'$　$\left(\frac fg\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$　(可推广到有限个)

$d(f\pm g)=df\pm dg$　$d(cf)=cdf$　$d(fg)=gdf+fdg$　$d\left(\frac fg\right)=\frac{gdf-fdg}{g^2}$ $(g\neq0)$　$\frac{d^nf}{dx^n}=\frac{d^nf}{du^n}\left(\frac{du}{dx}\right)^n$

反函数求导　$[f^{-1}(y)]'_y=\frac{1}{f'(x)}$　　微分形式不变性 $df=f'(u)du$，无论u是自变量还是中间变量 (高阶则不然)

高阶导数 $(a^x)^{(n)}=a^x\ln^na$ $(a>0)$　$(e^{kx})^{(n)}=k^ne^{kx}$　$\left(\frac{1}{x\pm1}\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{(x\pm1)^{n+1}}$

$(\sin kx)^{(n)}=k^n\sin(kx+n\cdot\frac\pi2)$　$(\cos kx)^{(n)}=k^n\cos(kx+n\cdot\frac\pi2)$

Leibniz formula
莱布尼兹公式　$(fg)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^nC_n^kf^{(n-k)}g^{(k)}$

Euler's homogeneous function theorem
欧拉齐次函数定理 k次齐次n元函数 $f(\lambda x_{1\sim n})=\lambda^kf(x_{1\sim n})$，有 $\sum\limits_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}x_i=kf$

行列式求导　一行/列求导其它行/列不动，所有行/列的单独求导的求和

Jacobian matrix
雅可比矩阵　$J=\frac{\partial(f_1,\cdots,f_m)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ &\ddots&\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{bmatrix}$

Jacobian determinant
雅可比行列式　$m=n$

Wronskian determinant
朗斯基行列式　$W(x)=W(f_{1\sim n})=\begin{vmatrix}f_1(x)&\cdots&f_n(x)\\ f_1'(x)&\cdots&f_n'(x)\\ &\ddots&\\ f_1^{(n-1)}(x)&\cdots&f_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}$

($f_{1\sim n}$有公共定义域，n-1次可微)

隐函数求导

积分表

$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$ $\quad \int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C$ $\quad \int \operatorname{th} x\,dx = \ln(\operatorname{ch} x) + C$

$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$ $\quad \tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})$ $\quad \int \csc x\,dx = \ln|\csc x - \cot x| + C = \ln|\tan\frac{x}{2}|$

$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$ $\quad \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$ $\quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C = \operatorname{arsh}\frac{x}{a} + C$ $\quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C = \frac{x}{|x|}\operatorname{arch}\frac{|x|}{a} + C$

有理函数分解因式 $\frac{A_n}{(x-a)^n}$ $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m}$，三角函数拆奇次凑多项式，三角换元画辅助三角形换回

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \frac{(n-1)!!}{n!!} \to$ 奇 $I_1 = 1$，偶 $I_0 = \frac{\pi}{2}$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx = \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x(\sec^2 x - 1)\,dx =\right] \frac{1}{n-1} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x\,dx$

凑微分 $\int_0^1 f(y)\,dy \int_0^y f(t)\,dt = \int_0^1 d\left(\int_0^y f(x)\,dx\right) \int_0^y f(t)\,dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^y f(t)\,dt\right)^2 \Big|_0^1$

凑全微分 $y\,dx + x\,dy = d(xy)$ $\quad x\,dx + y\,dy = d\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)$ $\quad \frac{1}{y^2}(y\,dx - x\,dy) = d\left(\frac{x}{y}\right)$

$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\,dx + y\,dy) = d\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad \frac{1}{x^2+y^2}(x\,dx + y\,dy) = d\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right]$ $\quad \frac{1}{(x-y)^2}(y^2\,dx - x^2\,dy) = d\left(\frac{xy}{x-y}\right)$

$\frac{1}{xy}(y\,dx - x\,dy) = d\left(\ln\left|\frac{x}{y}\right|\right)$ $\quad \frac{1}{x^2+y^2}(y\,dx - x\,dy) = d\left(\arctan\frac{x}{y}\right)$ $\quad \frac{1}{x^2-y^2}(y\,dx - x\,dy) = \frac{1}{2}d\left(\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right|\right)$

分部积分 $\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$

配e积分 $\int [f'(x) + f(x)g'(x)]e^{g(x)}\,dx = e^{g(x)}f(x) + C$

变限积分 $\frac{d}{dt}\left(\int_{v(t)}^{u(t)} f(x)\,dx\right) = f(u(t))u'(t) - f(v(t))v'(t)$ （常数限求导为零）

换元必换限 $\int_a^b f(x)\,dx \xlongequal{x=u(t)} \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t))u'(t)\,dt$

$\int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)\,dt \xlongequal{\text{配元不换限}} \int_\alpha^\beta f(u(t))\,du(t) \xlongequal{\text{换元必换限}} \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)\,dx$

Improper Integral
反常积分 $\int_a^\infty \frac{dx}{x^p} = \frac{a^{1-p}}{p-1}$ $(a>0, p>1)$ $\quad \int_0^b \frac{dx}{x^p} = \frac{b^{1-p}}{1-p}$ $(p<1)$

$I = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ $\left[(2I)^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty e^{-r^2} r\,dr = \pi\right]$ error function 误差函数 $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$

$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)!$ $\quad \Gamma(\frac{1}{2}) = \left[2\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt =\right]\sqrt{\pi}$

$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x+1} = \int_0^\infty \left(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}e^{-kx}\right)x\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$

$I_n = \int_0^\infty \frac{x^{n-1}\,dx}{e^x-1} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^n}\Gamma(n)$ $\quad I_2 = \frac{\pi^2}{6} \approx 1.645$ $\quad I_{\frac{3}{2}} \approx 2.315$ $\quad I_3 \approx 2.404$ $\quad I_{\frac{5}{2}} \approx 1.783$ $\quad I_4 = \frac{\pi^4}{15} \approx 6.494$

$I_n = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2}x^n\,dx = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}x^{n-2}\,dx$ $\quad I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\alpha^{-\frac{1}{2}}$ $\quad I_1 = \frac{1}{2}\alpha^{-1}$ $\quad I_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\alpha^{-\frac{3}{2}}$ $\quad I_3 = \frac{1}{2}\alpha^{-2}$ $\quad I_4 = \frac{3\sqrt{\pi}}{8}\alpha^{-\frac{5}{2}}$

级数表 傅里叶〈信号〉

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$$

$$\left(e^{(x-x_0)\frac{d}{dx}}\right)f(x)\Big|_{x_0} \;?$$

Taylor formula
泰勒公式 $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \begin{cases} \text{Peano 佩亚诺余项 } o((x-x_0)^n) \\ \text{Lagrange 拉格朗日余项 } \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (x_0 \le \xi \le x) \\ \text{Cauchy 柯西余项 } \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-\xi)^n \quad (x_0 \le \xi \le x) \end{cases}$

Maclaurin
麦克劳林公式 $(0 < \xi < x)$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \qquad x \in \mathbb{C}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n\frac{x^n}{n} + o(x^n) \qquad x \in (-1,1]$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}) \qquad x \in \mathbb{R}$$

求导

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \qquad x \in \mathbb{R}$$

牛顿二项式公式 $(x+y)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^{\alpha-k}y^k \qquad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + \cdots$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-x)^n + \cdots \qquad x \in (-1,1)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n + \cdots \qquad x \in [-1,1]$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \cdots + (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n + \cdots \qquad x \in (-1,1]$$

$$\left[\text{积 } \frac{1}{1+x^2}\right] \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \quad x \in [-1,1] \longrightarrow \pi = 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad x \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{arth} x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad x \in (-1,1)$$

级数表

No.

Date

常微表

初等积分法 将微分方程的解用初等函数或其积分表示

① $\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$ 分离变量 $\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx$ 若 $g(y_0)=0$ 的 $y=y_0$ 不在通解里，要补上这个特解

② $\frac{dy}{dx}=f(\frac{x}{y})$ 令 $\frac{y}{x}=u$，$y'=(ux)'=u'x+u=f(u)\to$ ① 若 $f(u_0)=u_0$ 要补上特解 $u=u_0$

③
$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)\begin{cases}c_1=c_2=0\to ②\\ \begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}=0\to f\left(\frac{u+c_1}{\lambda u+c_2}\right)\to ①\\ \begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}\neq 0\to f\left(\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}\right)\to ③\end{cases}$$

④ $\frac{dy}{dx}=xf\left(\frac{y}{x^2}\right)$ 令 $\frac{y}{x^2}=u$

⑤ $\frac{dy}{dx}=x^{-2}f(xy)$ 令 $xy=u$

⑥ $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}f(xy)$ 令 $xy=u$

⑦ $\frac{dy}{dx}=f(ax+by+c)$ 令 $ax+by+c=u$

first-order homogeneous

一阶线性微分方程 齐次 $\frac{dy}{dx}=P(x)y$ [①] $y=Ce^{\int P(x)dx}$

nonhomogeneous

非齐次 $\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)$ [常数变易法] $y=e^{\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx+C\right)$

Bernoulli differential equation

伯努利微分方程 $\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)y^n$ (P, Q连续, $n\neq 0,1$) $\frac{1}{1-n}\frac{dy^{1-n}}{dx}=P(x)y^{1-n}+Q(x)$ ($n>0$时补上$y=0$)

total differential equation

全微分方程 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0=du(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy \Longleftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

(P, Q有连续偏导) 通解 $u(x,y)=C$

积分与路径无关法 $u=\int_{x_0}^{x}P(t,y_0)dt+\int_{y_0}^{y}Q(x,t)dt=\int_{y_0}^{y}Q(x_0,t)dt+\int_{x_0}^{x}P(t,y)dt$

不定积分法 $\partial u=P\partial x\to u=\int Pdx+\varphi(y)\to\frac{\partial u}{\partial y}=Q\to$ 对比得 φ

integrating factor

积分因子 $\mu(x,y)\neq 0$ 连续可微，使 $\mu(Pdx+Qdy)=du$

一阶隐式微分方程 f有连续偏导，不能显式地解出 $\frac{dy}{dx}$ 或 $\frac{dx}{dy}$ 的表达式

① $y=f(x,y')\xrightarrow[\text{两边对}x\text{求导}]{y'=p} p=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dx}\xrightarrow{\text{通解}}$
- ① $p=\varphi(x,C)$，$y=f(x,\varphi(x,C))$
- ② $x=\psi(p,C)$，$y=f(\psi(p,C),p)$ (参数形式的通解)
- ③ $\Phi(x,p,C)=0$，$y=f(x,p)$ (p为参数，C为常数)

(导掉的常数最后化回原方程求)

② $x=f(y,y')\xrightarrow[\text{两边对}y\text{求导}]{y'=p}\frac{1}{p}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dy}\xrightarrow{\text{通解}}\Phi(y,p,C)=0$，$x=f(y,p)$

③ $F(x,y')=0\xrightarrow[F(x,p)\text{化参数式}]{dy=pdx}\begin{cases}x=\varphi(t)\\p=\psi(t)\end{cases}\to\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\int\psi(t)\varphi'(t)dt+C\end{cases}$

然后验证分母=0是否是奇解

④ $F(y,y')=0\xrightarrow[F(y,p)\text{化参数式}]{dx=\frac{1}{p}dy}\begin{cases}y=\varphi(t)\\p=\psi(t)\end{cases}\to\begin{cases}y=\varphi(t)\\x=\int\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt+C\end{cases}$

若$F(y,0)=0$有实根$y=k$ 则$y=k$是奇解

〈简化?〉 $F(\lambda)=0$ 有k重根 λ_1 [因子 $(\lambda-\lambda_1)^k$] 则 $F^{(i)}(\lambda_1)=0$ (i从0到k-1) 且 $F^{(k)}(\lambda_1)\neq 0$

No.

Date

给定单参数曲线族 $\Phi(x,y,c)=0$ 包络 不属于曲线族，过曲线每一点有曲线族中一曲线和它在这点相切

C-判别曲线 $\Phi=0$ 和 $\Phi'_c=0$ 消去C得到的曲线 $\supseteq$ 包络 (需画草图检验)

注 微分方程奇解上每一点都至少还有方程的另外一个解存在 [否则不存在一个 唯一定理]

P-判别曲线 $F(x,y,p)=0$ 连续可微，奇解 $\subseteq$ $F=0$ 和 $F'_p=0$ 消去P得到的曲线 (需代回原方程检验)

注 一阶 [其它阶无几何意义] 微分方程通解的包络 $\Longleftrightarrow$ 微分方程的奇解

克莱罗微分方程 $y=xp+f(p)$，$p=y'$，f连续可微 [两边对x求导 $0=y''(x+f'_p)$] 通解是p换成C的直线族

n阶齐次线性微分方程 $y^{(n)}+\sum_1^n a_i(x)y^{(n-i)}=0$ 有n个解 $y_{1\sim n}$，则 $W[y_{1\sim n}(x)]=W[y_{1\sim n}(x_0)]e^{-\int_{x_0}^{x}a_1(t)dt}$ $\left[W'+a_1(t)W=0\right]$

Liouville formula

刘维尔公式 → 若 $y_1(x)$ 是 $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$ 的解，则 $y_2(x)=y_1(x)\left(C_1\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int_{x_0}^{x}a_1(t)dt}dx+C_2\right)$ 也是方程的解

n阶常系数齐次线性微分方程 $y^{(n)}+\sum_1^n a_i y^{(n-i)}=0$ [设 $y=e^{\lambda x}$，方程化为 $(\lambda^n+\sum_1^n a_i\lambda^{n-i})e^{\lambda x}=0$] 解特征方程

k重根 $\begin{cases}\text{实重根}\ \lambda\ \text{对应k个} \rightarrow y=x^j e^{\lambda x},\ j=0,\dots,(k-1) \\ \text{复重根}\ \alpha\pm\beta i\ \text{对应2k个} \rightarrow y=x^j e^{\alpha x}\sin\beta x,\ y=x^j e^{\alpha x}\cos\beta x\end{cases}$ [范德蒙] 各基本解线性无关 [复值解性质实] 乘 C_i 线性组合即通解

$y^{(n)}+\sum_1^n a_i y^{(n-i)}=f(x)$，f为连续函数 (非齐次可用常数变易法，但有两种特殊形式用比较系数法更简便)

$\begin{cases} f(x)=P_m(x)e^{\lambda x} \rightarrow y^*=x^k Q_m(x)e^{\lambda x} \\ f(x)=(A_{m_1}(x)\cos\beta x+B_{m_2}(x)\sin\beta x)e^{\alpha x} \rightarrow y^*=x^k(P_{n_1}(x)\cos\beta x+Q_{n_2}(x)\sin\beta x)e^{\alpha x}\end{cases}$

(k为λ的重根数，不是根取k=0，下标m表示m次多项式) $\xrightarrow{\text{复系数}}$ $(n_1,n_2\le\max\{m_1,m_2\})$

欧拉方程 $x^n y^{(n)}+\sum_1^n a_i x^{n-i}y^{(n-i)}=0$ $\xrightarrow{\text{令}t=\ln|x|}$ $x^i y^{(i)}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}-1\right)\cdots\left(\frac{d}{dt}-i+1\right)y$

[解出 $y=e^{\lambda t}\rightarrow y=x^\lambda$] 特征方程为 $\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)+\sum_{i=1}^n a_i\lambda\cdots(\lambda-n+i+1)=0$

实重根 → $y=\ln^j|x|\,x^\lambda$，复重根 → $\ln^j|x|\,x^\alpha\sin(\beta\ln|x|)$，$\ln^j|x|\,x^\alpha\cos(\beta\ln|x|)$

无阻尼自由振动 $\frac{d^2x}{dt^2}+w^2x=0$ (微小振动 $\sin\theta\approx\theta$) 通解 $x=A\sin(wt+\theta)$，$A=\sqrt{C_1^2+C_2^2}$，$\theta=\arctan\frac{C_1}{C_2}$

有阻尼自由振动 $\frac{d^2x}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}+w^2x=0$ (小阻尼) $x=Ae^{-nt}\sin(w_1t+\theta)$，$w_1^2=w^2-n^2$ ($n\ge w$ 则至多过一次平衡位置)

小阻尼强迫振动 $\frac{d^2x}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}+w^2x=H\sin pt$ → $x=$ 齐通 $+\frac{H\sin(pt+\theta_2)}{\sqrt{(p^2-w^2)^2+4n^2p^2}}$ ($p=\sqrt{w^2-2n^2}$ 时共振)

累级数〈数理〉

$s=\sigma+j\omega$

Fourier transform 傅里叶变换 / Laplace transform 拉普拉斯变换	$\mathcal{F}[f(t)]=F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$ $\xleftarrow[\sigma=0]{\text{双边拉氏}}$	$\mathcal{L}[f(t)]=F(s)=\int_{0-}^{\infty}f(t)e^{-st}dt$
inverse Fourier transform 傅里叶逆变换 / inverse Laplace transform 拉普拉斯逆变换	$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$ (绝对可积)	$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds$
对称	$\mathcal{F}[\mathcal{F}[f(t)]]=2\pi f(-t)$	
线性	$\mathcal{F}[\sum af(t)]=\sum aF(\omega)$	$\mathcal{L}[\sum af(t)]=\sum aF(s)$
延迟	$\mathcal{F}[f(at-t_0)]=\frac{1}{\lvert a\rvert}F(\frac{\omega}{a})e^{-j\omega\frac{t_0}{a}}$ $(a\neq 0)$	$\mathcal{L}[f(at-t_0)u(t-t_0)]=\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})e^{-s\frac{t_0}{a}}$
频移	$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega+\omega_0)]=f(t)e^{-j\omega_0 t}$	$\mathcal{L}^{-1}[F(s+a)]=f(t)e^{-at}$
微分	$\mathcal{F}[f^{(n)}(t)]=(j\omega)^nF(\omega)$	$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0_-)-\cdots-s^0f^{(n-1)}(0_-)$
	$\mathcal{F}^{-1}[F^{(n)}(\omega)]=(-jt)^nf(t)$	$\mathcal{L}^{-1}[F^{(n)}(s)]=(-t)^nf(t)$
卷积	$\mathcal{F}[f_1*f_2]=F_1\cdot F_2$ 可推广到n个	$\mathcal{L}[f_1*f_2]=F_1\cdot F_2$
	$\mathcal{F}[f_1\cdot f_2]=\frac{1}{2\pi}F_1*F_2$	$\mathcal{L}[f_1\cdot f_2]=\frac{1}{2\pi j}F_1*F_2$ $\mathcal{L}[1*f]=$
积分	$\mathcal{F}[\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau]=\frac{1}{j\omega}F(\omega)+\pi F(0)\delta(\omega)$	$\mathcal{L}[\int_0^t f(\tau)d\tau]=\frac{1}{s}[F(s)+f^{(-1)}(0_-)]$
		$\mathcal{L}^{-1}[\int_s^{\infty}F(\sigma)d\sigma]=\frac{1}{t}f(t)$

$\mathcal{F}[1]=2\pi\delta(\omega)$

$\mathcal{F}[\delta(t)]=1$ $\quad\mathcal{F}[u(t)]=\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$ $\qquad\mathcal{L}[\delta^{(n)}(t)]=s^n$

$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}]=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$ $\quad\mathcal{F}[e^{-at}u(t)]=\frac{1}{j\omega+a}$ $\qquad\mathcal{L}[t^ne^{-at}]=\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$ $(\sigma>-a)$

$\mathcal{F}[\cos(\omega_0 t)]=\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$ $\qquad(\sigma>$

$\mathcal{F}[\sin(\omega_0 t)]=j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$ $\qquad\mathcal{L}[\cos+j\sin=e^{j\omega t}]\rightarrow\frac{s+j\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{1}{s-j\omega}$

$\mathcal{F}[\Pi_\tau]=\tau S_a(\frac{\omega\tau}{2})$

编者：LePtC 笔记项目主页：http://leptc.github.io/lenote

Last compiled on 2015/06/30 at 18:09:00