

© L<sup>e</sup>P<sub>t</sub>C (萌狸)笔记项目主页: <http://leptc.github.io/lenote>

署名 · 非商用 · 相同方式共享

**精**

赵凯华. 电磁学 (第三版). 高等教育出版社

└ 或: 赵凯华. 新概念物理教程—电磁学 (第二版). 高等教育出版社 (上面那本的精简版)

Purcell. Electricity and Magnetism (2nd ed). McGraw-Hill (高斯单位制的)

└ 中译: 南开大学物理系. 电磁学. 科学出版社

**参**

Feynman. Feynman's Lectures on Physics - Volume 2

└ 中译: 桑兹. 费曼物理学讲义—第二卷. 上海科学技术出版社

**符号约定**国际单位制, 电子电荷量为  $-e$ , 电量  $q$  可正可负,  $\varphi$  为电势,  $U$  为电势差上标 ' 表示极化, 下标 <sub>0</sub> 表示自由, 除注明  $\vec{p}$  为动量外均指电偶极矩, 除注明  $\vec{M}$  为力矩外均指磁化强度**相关笔记**

电路见 〈电路〉 〈模电〉 〈数电〉 电表见 〈实验〉 凶残的数理方法见 〈电动〉 相对论见 〈狭相〉

# 静电

triboelectrification

vitreous positive

resinous negative

repel

attract

**摩擦起电** 丝绸摩擦过的光滑玻璃棒带正电荷, 毛皮摩擦过的橡胶棒带负电荷, 同性相斥, 异性相吸 (正负的区别就是负数的平方是与之反号的正数, 但电荷之积不是电荷, 故对电荷正负的命名是任意的)

electrostatic induction

neutralize

**静电感应** 用带电体感应起电, 金属棒先接触后分开, 带等量异号的电 **中和** 正负电荷完全抵消

**性质** 带电导体 A 靠近孤立不带电导体 N, 则  $N_+$  的电场线都终止于无穷远而不能终止于自己的  $N_-$  [否则沿此电场线积分  $N$  不等势]  $\rightarrow$  电势  $N$  升  $A$  降,  $\varphi_N < \varphi_A$ ,  $N$  感应出的电荷量小于  $A$  所带电量

conductor

insulator

breakdown

**导体** 电荷能迅速传导, **绝缘体** 电荷束缚在产生的地方, 绝缘体可被 **击穿** 成导体 (空气  $\approx 3 \times 10^6 \text{ V/m}$ )

charge

coulomb

elementary charge

Millikan oil-drop experiment

**电荷量**  $q$  单位  $\text{C}$  (库仑) **元电荷**  $e \approx 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$  (密立根油滴实验 1909) (夸克, 准粒子可带分数电荷)

global conservation of charge

**全局电荷守恒** 孤立系统的总电荷量不变 (正负电荷总成对产灭) (电荷量是洛伦兹不变量)

action at a distance

action through medium

ether

field

电磁力非 **超距作用** (不需要媒介或时间) 也非 **近距作用** (接触作用, 弹性媒质以太), 是通过 **场** 来作用的, **电磁场** 可以脱离电荷和电流独立存在, 和物质一样具有能量, 动量等属性 (场论)

**静源动电荷** 施力电荷  $q_1$  相对观察者静止, 则  $q_2$  受力  $F_2$  可用库仑定律 ( $F_1, F_2$  非作用力和反作用力)

Coulomb's law

**库仑定律** (1785) 真空中静源  $q_1$  给  $q_2$  的力  $\vec{F}_2 = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_r$ , 库仑常数  $k_e \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 8.99 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$

( $\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  从 1 指向 2) (电荷自己产生的场不能对自己有作用, 否则违背牛三)

库仑平方反比精确成立  $\Leftrightarrow$  光子静质量严格为零  $\Leftrightarrow$  光在真空中无色散  $\Leftrightarrow$  光速不变 (电动)

**例** 若  $\vec{F} = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \left(1 + \frac{r}{\lambda}\right) \vec{e}_r$  则点电荷  $\varphi(r) = k_e \frac{q}{r} e^{-r/\lambda}$  高斯定理  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} + \frac{1}{\lambda^2} \iiint_V \varphi dV = \frac{q_{(S内)}}{\epsilon}$

## 场强

point charge

**点电荷** 带电体间距离远大于其尺寸, 其形状大小可忽略

test charge

**试探电荷** 电量和线度足够小, 不影响原在电场

对于电场中的固定点, 试探电荷受力与电荷量的比值不变  $\rightarrow$  **电场强度**  $\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}}{q}$ , 单位  $\text{N/C} = \text{V/m}$

superposition principle

compensation method

**场强叠加原理** 各电荷同时存在产生的场强, 等于单独存在时的场强的矢量叠加  $\rightarrow$  **虚构补偿法**

点电荷  $\vec{E} = k_e \frac{q}{r^2} \vec{e}_r$  **例** 两同号电荷在中垂线上  $E = \frac{2k_e q}{(l/\cos\theta)^2} \sin\theta$

$\cos^2\theta \sin\theta$  在  $\tan\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\theta \approx 35.3^\circ$  时取最大值  $\frac{2}{3\sqrt{3}} \approx 0.385$

**例** (不稳定) 平衡  $\left[\frac{b}{(l_1+l_2)^2} = \frac{c}{l_1^2}, \frac{a}{(l_1+l_2)^2} = \frac{c}{l_2^2}\right] a:c:b = l_2^{-2}:(l_1+l_2)^{-2}:l_1^{-2}$

electric dipole

**电偶极子** 等量异号电荷  $\pm q$  相距  $l$ ,

electric dipole moment

$\vec{l}$  由负指向正 **电偶极矩**  $\vec{p} \equiv q\vec{l}$

$\rightarrow$  力偶矩  $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} + \vec{r} \times \vec{F}$

(非均匀电场中受净力  $\vec{F}$ ) (静电能)

设场点  $r \gg l$ , 延长线和中垂线上的解

$E_{//} = k_e q \left[ \left(r - \frac{l}{2}\right)^{-2} - \left(r + \frac{l}{2}\right)^{-2} \right] \approx k_e \frac{2p}{r^3}$

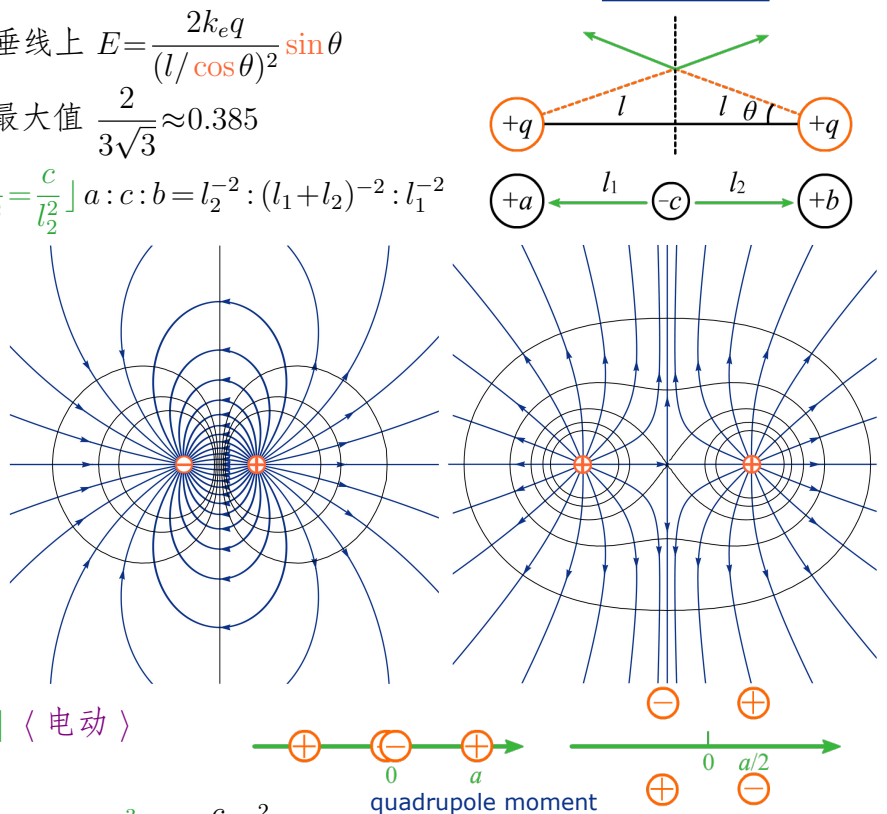
$E_{\perp} = 2k_e \frac{q}{r^2 + l^2/4} \frac{l/2}{\sqrt{r^2 + l^2/4}} \approx k_e \frac{p}{r^3}$

electric quadrupole

**电四极子** 偶极矩为零 [ $\vec{p}$  可矢量叠加] (电动)

正方形,  $E \approx k_e \frac{3ql^2}{r^4}$

共线型, 延长线上  $E = 2k_e qa \left[ \left(r - \frac{a}{2}\right)^{-3} - \left(r + \frac{a}{2}\right)^{-3} \right] \approx k_e \frac{6qa^2}{r^4}$ , 定义 **电四极矩**  $Q = 2qa^2$



## 静电场

electric field line

(矢量场图是在每个点处画有大小和方向的小箭头, 场线图只能从疏密反映场强大小)

**电场线**

曲线每一点的切线方向和该点场强方向一致, 任一点电场线的数密度与该点场强大小成正比

**性质**

静电场的电场线起自正电荷或无穷远, 结束于负电荷或无穷远, 不会在没有电荷处中断

电场线不会相交, 除非该处场强为零, 静电场线不会闭合, 涡旋电场线闭合

electric flux

**电通量**

$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{S}$  对于闭合曲面, 取外法线矢量方向为正 [1. 库仑定律算包围点电荷同心球面

2. 球面通量等于同立体角任意曲面 3. 不包围电荷通量为零 4. 场强叠加原理] →

Gauss theorem

**电场高斯定理**

通过任意闭合曲面  $\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q(S_{内})}{\epsilon}$  (适用于任何平方反比场) (适用于运动电荷)

Earnshaw's theorem

→ **恩绍定理**

(1842) 点电荷集合不可能只靠静电力保持稳定力学平衡 [有向内的电场线就有向外的]

(前例三体平衡点是鞍点) (亦适用于硬磁铁 < 静磁 >)

linear charge density

surface

volume

(宏观上可视电荷为连续分布)

**电荷线密度**

$dq = \eta_e dl$

**电荷面密度**

$dq = \sigma_e dS$

**电荷体密度**

$dq = \rho_e dV$

**例** 无限大平板  $E = \frac{\sigma_e}{2\epsilon_0}$  **例** 均匀带电球壳, 内部  $E = 0$ , 外部  $\equiv$  点电荷 → 均匀带电球体  $E_{内} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3}$

[ $E_{总} = E_{小面} + E_{其它}$ , 面元自己不能对自己施力, 电场的不连续完全是因小面元两侧  $\pm \frac{\sigma_e}{2\epsilon_0}$  产生的,

$E_{其它}$  在小面处连续] 面电荷元受其它部分的力用  $E_{其它} = E_{外} + \frac{\sigma_e}{2\epsilon_0} = E_{内} - \frac{\sigma_e}{2\epsilon_0} = \frac{1}{2}(E_{外} + E_{内})$  来求

**例** 球面元受排斥力  $dF = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_e}{\epsilon_0} + 0 \right) dq = \frac{\sigma_e^2}{2\epsilon_0} dS$  **静电力** 倾向于把面元吸向电场, 无论  $\sigma_e$  正负

[可等效为圆弧] 无限长均匀带电细棒  $E = \frac{\eta_e}{2\pi\epsilon_0 r}$  (同二维空间), 有限长细棒中垂面  $E = \frac{\eta_e}{2\pi\epsilon_0} \frac{l}{r\sqrt{r^2 + l^2}}$

**例**  $\vec{E} = (ax, 0, 0)$  得全空间电荷密度为常数  $\rho_e \equiv \epsilon_0 a$  → 给出电荷分布不一定能确定电场 (用库仑定律的话积分发散) (微分方程需要结合边界条件才能定解) (以前我们潜意识加了无穷远为零或对称性等) 无对称性则无法只靠高斯定理得出场强分布 (高斯定理对静电场的描述不完备)

## 电势

circuital theorem of electrostatic field

< 矢分 > 静电场力做功与路径无关 (保守力场)  $\Leftrightarrow$  **静电场环路定理** 沿任意闭合环路  $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

[亥姆霍兹定理] 散度 + 旋度 + 无穷远趋于零边界条件  $\Leftrightarrow$  库仑定律

electric potential energy

**电势能**

试探电荷从  $\vec{r}_1$  搬到  $\vec{r}_2$ , 静电场力做的功  $W_{12} = q \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} =$  电势能减少, **电势差**  $U_{12} \equiv \frac{W_{12}}{q}$

$= \varphi_1 - \varphi_2$  (绝对), 单位 **V(伏特) = J/C** 取无穷远电势为零 → **电势**  $\varphi \equiv U_{r\infty} = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l}$  (相对)

(零势点不能选在电荷上, 分布于无穷远的净电荷为零才能选无穷远为零势点, 如单根无限长带电直线, 零势点不能取在直线上也不能取在无穷远, 一对无限长异号带电直线, 零势点可取在中垂面或无穷远)

**例** 点电荷  $\varphi = k_e \frac{q}{r}$ , 无限长带电细棒  $\varphi = \frac{\eta_e}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{1}{r}\right) + \text{常数}$  (同二维空间点电荷)

superposition principle of electric potential

**电势叠加原理**

各电荷同时存在产生的电势, 等于单独存在时的电势的代数和

equipotential surface

**等势面**

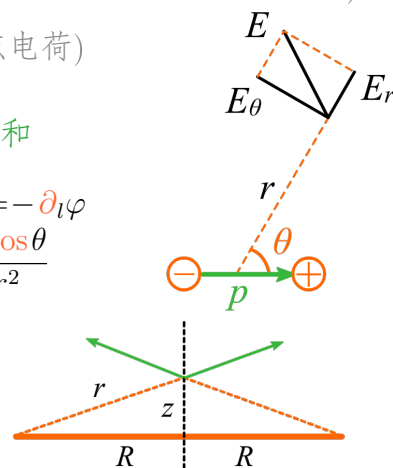
和电场线处处正交, 疏密反映场强大小,  $\vec{E} = -\nabla\varphi$ , 任意方向上  $E_l = -\partial_l\varphi$

**例** 电偶极子  $r \gg l$ ,  $\varphi \approx k_e q \left( \frac{1}{r - \frac{l}{2} \cos\theta} - \frac{1}{r + \frac{l}{2} \cos\theta} \right) \approx k_e q \frac{l \cos\theta}{r^2 - (\frac{l}{2} \cos\theta)^2} \approx k_e \frac{p \cos\theta}{r^2}$

$E_r = -\partial_r \varphi = k_e \frac{2p \cos\theta}{r^3}$ ,  $E_\theta = -\frac{1}{r} \partial_\theta \varphi = k_e \frac{p \sin\theta}{r^3}$ ,  $E_\phi = -\frac{1}{r \sin\theta} \partial_\phi \varphi = 0$

带电圆环轴线上  $\varphi = \frac{\eta_e}{2\epsilon_0} \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}$  (标量和),  $E_z = \frac{\eta_e}{2\epsilon_0} \frac{Rz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$  (矢量加)

均匀带电圆盘 (无限薄单电荷层) 轴线上  $\varphi_z = \frac{\sigma_e}{2\epsilon_0} (\sqrt{R^2 + z^2} - z)$ ,  $E_z = \frac{\sigma_e}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)$



dipole layer

**电偶极层** 厚度为  $l$  的均匀曲面, 两面带相反电荷  $\pm\sigma_e$

$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \sigma_e \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) dS, r_2 \approx r_1 + \cos\theta, \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \approx -\frac{l \cos\theta}{r^2}, \frac{\cos\theta dS}{r^2} = \text{立体角 } d\Omega$ , 两侧立体角跃变  $4\pi$

$\varphi = -\frac{\sigma_e l}{4\pi\epsilon_0} \Omega, \vec{E} = \frac{\sigma_e l}{4\pi\epsilon_0} \nabla \Omega$ , 电偶极层的  $E$  和  $\varphi$  只和它对场点所张立体角有关, 两侧有电势跃变  $\frac{\sigma_e l}{\epsilon_0}$  (电势总连续, 电势跃变意味着有  $\delta$  一样的场强)

## 静电能

electrostatic energy

**静电能**  $W_e$  把带电体系拆成无限分散的状态静电力做的总功 (与次序或路径无关)

self energy

mutual energy

对于多个带电体,  $W_e$  等于各带电体的**自能** (聚成单个带电体) 加带电体间的**互能** (移带电体整体)

**例** 两个点电荷  $W_{\text{互}} = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$ ,  $n$  个点电荷: 所有配对求和  $W_{\text{互}} = k_e \sum_{i \neq j}^n \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{k_e}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_i q_i$

其中  $\varphi_i$  是除  $q_i$  之外其余电荷在  $q_i$  的位置产生的电势 (固体)

对于连续分布 [没有  $\delta$  的电荷,  $\varphi_{\text{其余}} = \varphi_{\text{总}}$ ]  $W_e = \frac{1}{2} \int \varphi dq$  ( $dq$  有 3 种密度的表示)

**例** 均匀带电球壳  $W_{\text{自}} = k_e \frac{q^2}{2R}$ , 球体  $W_{\text{自}} = k_e \frac{3q^2}{5R}$  (用 (电容) 算更简便)

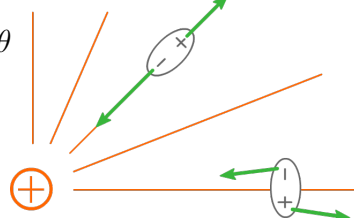
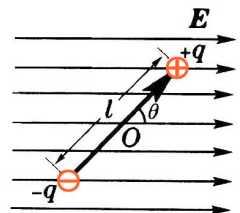
把电子设想为带电球, 取  $m_e c^2 = k_e \frac{e^2}{r_c}$ , 得  $r_c \approx 2.8 \text{ fm}$  称为**电子经典半径** (别当真)

**例** 电偶极子与匀强电场相互作用  $W_{\text{int}} = -\vec{p} \cdot \vec{E}$ , 受力矩  $L_\theta = -\partial_\theta W = pE \sin\theta$

在非均匀电场中, 受净力  $\vec{F} = -\nabla W = \nabla(\vec{p} \cdot \vec{E}) \xrightarrow{p \text{ 不变}} (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}$

(这种记法的含义是  $F_x = \vec{p} \cdot \nabla E_x$ ,  $y, z$  分量同理) (矢分)

→ 摩擦起电后, 碎片被极化, 电场力沿梯度方向, 拉向电场较强区域



## 电容

Isolated conductor

capacitance

farad

① **孤立导体** 电势随电量等比增加, **电容**  $C \equiv \frac{q}{\varphi}$ , 单位 F(法拉) = C/V **例** 孤立导体球(壳)  $C = 4\pi\epsilon_0 R$

② 两靠近的导体, 表面各带电  $\pm q$  (自由电荷), [叠加原理] 电容  $C \equiv \frac{q}{U} > 0$ , 两导体称为**电容器**的**极板**

**注** 充介质后  $C = \epsilon_r C_0$ , 导体相当于  $\epsilon_r = \infty$  (电介质) **例** 平行板电容器 (忽略边缘效应)  $C = \frac{\epsilon S}{d}$  [  $\frac{\sigma_e S}{Ed}$  ]

→ 串联电容 [相当于合  $d$ ]  $C^{-1} = C_1^{-1} + C_2^{-1}$ , 并联电容 [相当于合  $S$ ]  $C = C_1 + C_2$  (电路)

同轴圆柱  $C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln R_2 - \ln R_1}$  [  $\frac{\eta_e l}{2\pi\epsilon \int \frac{1}{r}}$  ] 同心球  $C = 4\pi\epsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$  [  $\frac{1}{k_e \Delta \frac{1}{r}}$  ]

**公式** 电容器储静电能  $W_e = \int_0^q \frac{q}{C} dq = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} Uq = \frac{1}{2} Ed\sigma_e S = \frac{1}{2} ED_n V = \frac{1}{2} \epsilon E^2 V$  (电介质)

**例** 平行板电容, 将电介质层向外拉  $dx$ , 则静电力会将它往里拉 (施力者为边缘电场, 难以计算)

可用虚功原理, 设  $S = xy$ , 则  $dC = \frac{(\epsilon_0 - \epsilon)y dx}{d}$ ,  $F = -\frac{dW_e}{dx} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C^2} \frac{dC}{dx} = -\frac{U^2 \epsilon_0 \chi_e y}{2d}$

(用恒电荷的公式而不是恒电压, 因为那样还有电源做功  $U dq = U^2 dC$  恰为两倍, 最终计算结果相同)

electric field energy

electric energy density

**电场能** 占有体积的电场储藏着电能 (不依赖于电荷) **电能密度**  $\omega_e = \frac{dW_e}{dV} = \frac{1}{2} \epsilon E^2$ , 体积分得电场能

**注** 对于各向异性  $\vec{E}, \vec{D}$  不平行的情况, 一般形式为  $w_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$  推导见 (电动)

**例** 导体球(壳)  $W_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int_R^\infty \left( k_e \frac{q}{r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R} = \frac{q^2}{2C} \xrightarrow{R \rightarrow 0}$  点电荷的静电能发散

**注** 电场能恒正, 静电能可能为负 (例如电偶极子) 是因为未算单个点电荷无穷大的电场能

**性质** 电场能不遵从叠加原理 (所有电荷加倍, 电场能变为 4 倍), 电场能变化与静电能一致

**例** 收缩带电球壳做功  $dW = \left( \frac{\sigma_e^2}{2\epsilon_0} \right) dS dr$  等于新增电场的电能  $\frac{1}{2} \epsilon_0 \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \right)^2 dV$

**例** 均匀带电球体, 同理  $\frac{\epsilon_0}{2} k_e^2 \left[ \int_0^R \left( \frac{qr}{R^3} \right)^2 + \int_R^\infty \left( \frac{q}{r^2} \right)^2 \right] 4\pi r^2 dr$ , 第一项是第二项的  $\frac{1}{5}$  → 球壳乘  $\frac{6}{5}$  即可



## 静电平衡

uniqueness theorem

**唯一性定理** 边界条件可将电场的恒定分布唯一确定 → 若静电屏蔽接地, 则内对外, 外对内均无影响  
electrostatic equilibrium

**静电平衡** 自由电荷静止, 电场分布不随时间变化 [必要性: 反证法, 充分性: 唯一性定理 (电动)]

均匀(质料, 温度等) 导体 **静电平衡条件**  $\vec{E}_{\text{内}} \equiv 0 \Leftrightarrow$  感应电荷产生的电场  $\vec{E} = -\vec{E}_0 \xrightarrow{\text{高斯}} q_{\text{内}} \equiv 0 \Leftrightarrow \vec{E} = \frac{\sigma_e}{\epsilon_0} \vec{e}_n$

(电场线垂直于表面)  $\Leftrightarrow$  平方反比精确成立 **结论** 导体是等势体, 表面是等势面, 电荷只分布于导体表面

**例** 将带电导体球与不带电导体球用细导线链接, 「两球等势」得电荷的重新分配为  $q_1:q_2 = R_1:R_2$

**注** 自由动力学体系总寻找使电势能最小的分布 **例** 均匀带电球电场能大于带电球壳

静电平衡导体的  $\sigma_e$  一般难以求解析解 **公式** 椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  的  $\sigma_e = \frac{q}{4\pi abc} \left( \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{-1/2}$

[代入椭球方程消  $z$ ,  $c=0$ , 乘 2 因为两面] 导体圆盘  $\sigma_e(r) = \frac{q}{2\pi R} \frac{1}{\sqrt{R^2 - r^2}}$ , 导体线段  $\eta_e(x) = \frac{q}{2a}$  (常数)  
(二维和一维下的带电导体, 电荷并非只分布在边界)

electrostatic screening / shielding

**静电屏蔽** ① 导体壳内部电场不受外界影响 (无论导体是否带电或接地), 电势有影响

② 内部带电体位置不影响腔外 (电量会感应到外表面), 若外壳接地则完全不影响腔外

Van de Graaff generator

**范德格拉夫起电机** 电势低的导体可不断接触高电势导体壳内部使其电势不断升高

导体表面尖端 (曲率较大) 处  $\sigma_e$  较大, 凹处 (曲率为负)  $\sigma_e$  更小 → **尖端放电** →  
electric wind corona

**电晕** 尖端的强电场电离空气, 吸引同号离子中和, 异号离子受排斥远离 → **电晕**

离子与空气分子碰撞产生光辐射, 消耗电能 (高压电线不能太细, 高压电极要极光滑) → **特里切尔脉冲**

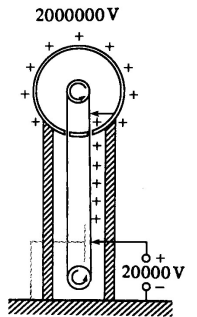
若电晕放电电压恒定, 电流会做周期性脉冲 (阴极  $10^4$  Hz, 阳极  $10^6$  Hz) → **静电放电** → **电磁脉冲**

lightning rod

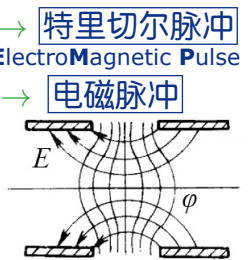
**避雷针** 在建筑物上安装尖端导体并良好接地, 带电云层接近时通过避雷针持续放电

electrostatic lens

**静电透镜** 带孔金属板, 可聚焦电子束



Trichel



## 电流

current charge carrier

**电流** 电荷 (载流子) 的定向运动, 规定为正电荷移动方向, 导体中电流方向同电场方向, 高电势向低电势  
(电子平均漂移速率  $\sim 10^{-5}$  m/s, 电子热运动速率  $\sim 10^5$  m/s, 电场传播速率为光速  $\sim 3 \times 10^8$  m/s)

current intensity

**电流强度** 单位时间通过导体任一横截面的电荷量  $I \equiv \frac{dq}{dt}$  A (安培) = C/s, 标量 (电路)

linear charge density

**线电流密度**  $\vec{I} \equiv \eta_e \vec{v}$ , 大小等于  $I$  **面电流密度** 单位宽度电流强度  $\vec{i} \equiv \frac{d\vec{I}}{dl_{\perp}} = \sigma_e \vec{v}$

current density

**(体) 电流密度**  $\vec{j} \equiv \frac{d\vec{I}}{dS_{\perp}} = \rho_e \vec{v}$  A/m<sup>2</sup>, 电流场是矢量场,  $I$  是其通量  $I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$   $(\sum q \vec{v} = \int \vec{I} d\vec{l} = \int \vec{i} dS = \int \vec{j} dV)$

local conservation of charge

equation of continuity

**局域电荷守恒** 的数学表述: **电流连续性方程**  $\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt}$ , 流出闭合面的通量等于电荷减少

[代入  $q(t) = \int_V \rho_e(\vec{r}, t) dV \rightarrow \int_V \nabla \cdot \vec{j} dV = -\int_V \partial_t \rho_e dV$  对任意  $V$  都成立] 微分形式  $\nabla \cdot \vec{j} = -\partial_t \rho_e$

criterion of steadiness

**电流恒定条件**  $\Leftrightarrow$  环路定理  $\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$ , 电流线不会中断, 恒定电路必然闭合 → 故可引入 **电压**  $U$

Ohm law

**欧姆定律** (1827) 宏观:  $I = \frac{U}{R} = \frac{El}{\rho l/S} \rightarrow \vec{j} = \sigma \vec{E}$  微观: 载流子速度和受力正比, 说明存在阻力 (固体)

→  $\vec{j} = \sigma \vec{f} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$  (导线中  $v$  很小可忽略, 等离子体不可) **理想导体**  $\sigma = \infty$ , 内部  $\vec{E} = \vec{j} / \sigma = 0$

**电阻**  $R \equiv \frac{U}{I}$  ohm  $\Omega$  (欧姆) **电导**  $G \equiv \frac{1}{R}$  siemens S (西门子) **电阻率** (恒温)  $R = \rho \frac{l}{S}$   $\Omega \cdot m$  **电导率**  $\sigma \equiv \frac{1}{\rho}$  S/m

$\rho_{\text{银}} \approx 1.59 \times 10^{-8}$ ,  $\rho_{\text{铜}} \approx 1.68 \times 10^{-8}$ ,  $\rho_{\text{水银}} \approx 9.6 \times 10^{-7}$ ,  $\rho_{\text{石墨}} \approx 1.4 \times 10^{-5}$ ,  $\rho_{\text{饱和盐水}} \approx 4.4 \times 10^{-2}$ ,  $\rho_{\text{纯水}} \approx 2.5 \times 10^5$

→ 串联电阻 [相当于合  $l$ ]  $R=R_1+R_2$ , 并联电阻 [相当于合  $S$ ]  $R^{-1}=R_1^{-1}+R_2^{-1}$  (电路)

**例** 同轴圆柱间的电阻  $I=\int \vec{j} \cdot d\vec{S}=\sigma \int \vec{E} \cdot d\vec{S}=\sigma \frac{\eta_e L}{\epsilon_0}$ ,  $U=-\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}=\frac{\eta_e}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \rightarrow R=\frac{\ln(b/a)}{2\pi\sigma L}$

**推论** [电高斯]  $I=\sigma \frac{q}{\epsilon_0}=\frac{\sigma}{\epsilon_0} CIR \rightarrow$  把导体嵌在均匀电阻材料中, 有  $R=\frac{\epsilon_0}{\sigma C}$

**例** 同心球间的电阻  $R=\frac{1}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$ , 当  $b \gg a$  时电阻与大球无关, 即主要的电阻都源于小球附近

**性质** 横截面保持不变的均匀电阻器, 内部电势线性变化 [拉普拉斯方程, 满足边界条件, 唯一性定理]

→ 若导线有电阻, 内部为匀强电场  $\vec{E}=\frac{I\rho}{S} \vec{e}_l$ , 外部电场取决于如何使电路完整 (Merzbacher 难题)

volt-ampere characteristics nonlinear

**伏安特性 (曲线)**  $I-U$  图 **非线性元件** 伏安特性不为线性 **电阻温度系数**  $\rho=\rho_0(1+\alpha t)$ , 纯金属  $\alpha \approx 0.004$

electric power

**电功率** 电场单位时间做功  $P=UI \geq P_{\text{热}}$  (W) **热功率**  $P_{\text{热}}=I^2 R=\frac{U^2}{R}=\sigma E^2 \Delta V$  (电路)

thermal power density

**热功率密度** 单位体积热功率  $p=\vec{j} \cdot \vec{E} \leftrightarrow$  **焦耳定律** (1841)  $p=\frac{j^2}{\sigma}=\sigma E^2$

## 电源

电场力沿闭合回路做功为零, 只有静电场不能维持恒定电流 (除了超导体) → 必须有 **非静电力** 做功  
power source

**电源** 提供非静电力的装置, 记非静电力场强为  $\vec{K}$ , 方向由 **负极** (低电势) 指向 **正极** (高电势)

ElectroMotive Force

记  $\vec{E}_{\text{总}}=\vec{K}+\vec{E}$ , **电动势**  $\mathcal{E} \equiv \oint \vec{K} \cdot d\vec{l}=\oint \vec{E}_{\text{总}} \cdot d\vec{l}$  (V) (标量) (静电场  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l}=0$ , 注意边缘电场, 没有永动机) 等于把单位正电荷从负极通过电源内部移到正极时非静电力做的功

对于闭合电路, 电源外部  $\vec{K}=0$ , 公式可写成  $\mathcal{E}=\int_{-}^{+} \vec{K} \cdot d\vec{l}$ ,  
(电源内)

欧姆定律改为  $\vec{j}=\sigma \vec{E}_{\text{总}}$

internal resistance terminal voltage

实际电源有 **内阻**  $r$ , **路端电压**  $U=\mathcal{E}-Ir$ , 放电取减充电取加

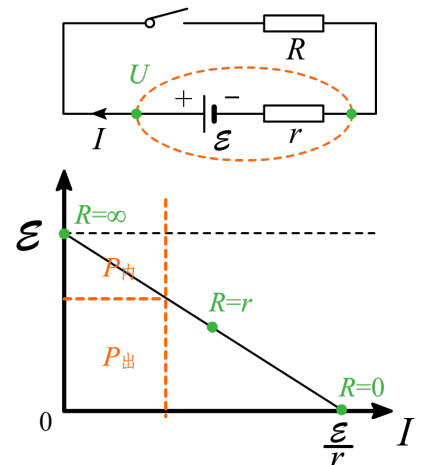
$P_{\text{总}}=\mathcal{E} I \stackrel{\text{纯电阻}}{=} I^2(R+r)=\frac{\mathcal{E}^2}{R+r}$ , 电源内消耗  $P_{\text{内}}=I^2 r$

输出功率  $P_{\text{出}}=UI=(\mathcal{E}-Ir)I \stackrel{\text{纯电阻}}{=} I^2 R=\frac{\mathcal{E}^2 R}{(R+r)^2}=\frac{\mathcal{E}^2}{R+2r+\frac{r^2}{R}}$

impedance matching

**阻抗匹配** 当  $R=r$  时电源输出功率最大  $P_{\text{max}}=\frac{\mathcal{E}^2}{4r}$

电流源等见 (电路)



## 效应

Thomson effect

**汤姆孙效应** 金属棒两端温度不等, 则加电流时 (除了产生焦耳热外) 冷  $\xrightleftharpoons[\text{放热}]{\text{吸热}}$  热

Thomson e.m.f.

**汤姆孙电动势** 汤姆孙系数  $\sigma(T)$ , 热扩散力  $\vec{K}_T=\sigma(T)\frac{dT}{dl}$ ,  $\mathcal{E}(T_1, T_2)=\int_{T_1}^{T_2} \sigma(T) dT$

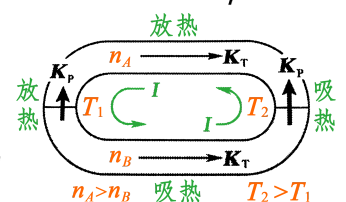
Peltier effect

**佩尔捷效应** 外加电流通过不同金属接触面时,  $\vec{K}_p$  与  $I$  同向吸热反向放热, 电动势  $\Pi_{AB}(T)$ , 半导体较强

thermoelectric effect

**温差电效应** (塞贝克 1821) 同时存在温度和电子数密度梯度, 故不违反热二 **温差电偶** 用电势测温度

thermocouple



## 静磁

north pole

south pole

称小磁针指北一端为 **北极** N, 指南为 **南极** S (故地磁 N 极位于地理南极附近) 铁磁性 (凝态)

Gilbert

magnetic charge / monopole

**吉尔伯特模型** 历史上先以为有 **磁荷 / 磁单极子**  $F=\frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{q_{m1}q_{m2}}{r^2}$ , 后面和电场同理

oersted

magnetic scalar potential

定义 **磁场强度**  $\vec{H}=\frac{\vec{F}}{q_m}=-\nabla\varphi_m$  A/m= $4\pi \times 10^{-3}$  Oe(奥斯特)

引入 **磁标势** 的前提: 只能在没有自由电流分布的单连通区域内定义 (否则势函数不单值) (分子电流可以, 永磁体全空间都可以)

**例** 无限长直导线的磁标势  $\varphi_m = -\frac{\mu_0 I \phi}{2\pi}$ , 限制  $0 \leq \phi < 2\pi$

magnetic dipole

**磁偶极子**  $\vec{p}_m = q_m \vec{l}$  (S 指向 N) 磁偶极子受力矩  $\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{H}$ , 磁偶极层  $\vec{H} = \frac{\sigma_m l}{4\pi\mu_0} \nabla \Omega$

电流环受力矩  $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$ ,  $W_{\text{int}} = -\vec{m} \cdot \vec{B}$ , 受力  $\vec{F} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}) = (\vec{m} \cdot \nabla) \vec{B} + \mu_0(\vec{m} \times \vec{j})$   
(和电的区别源于  $\nabla \times \vec{B} \neq 0$ )

magnetic moment

**磁矩**  $\vec{m} \equiv IS \vec{e}_n$  (故小磁针  $\vec{m}$  总要转向  $\vec{B}$  的方向)

**例** 均匀带电旋转圆盘  $m = S v q = \int_0^R (\pi r^2) (\omega r) (\sigma_e dr) = \frac{1}{4} \pi \sigma_e \omega R^4$

**例** 均匀带电旋转圆环, 质量记作  $m_0$  [ $\vec{m} = \frac{q\omega}{2\pi} \pi R^2 \vec{e}_z$ ,  $\vec{L} = m_0 v R \vec{e}_z$ ] **旋磁比** 磁矩除以角动量  $g = \frac{q}{2m_0}$

**「结果与 R 无关」** 同样结果适用于任何旋转体 **〈量子〉** 电子自旋  $\frac{\hbar}{2}$  磁矩  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$  比正常大 2 倍

**「安培力」** 任意形状载流线圈在均匀磁场中受力矩  $\vec{M} = IS(\vec{e}_n \times \vec{B})$ ,  $\vec{e}_n$  为右手定则法向

电流环磁场公式  $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \nabla \Omega$ ,  $\Omega$  为线圈对场点所张立体角

**「使磁偶极层和电流环等价」**  $\rightarrow \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ ,  $\vec{p}_m = \mu_0 \vec{m}$  **〈磁介质〉**

geomagnetic field

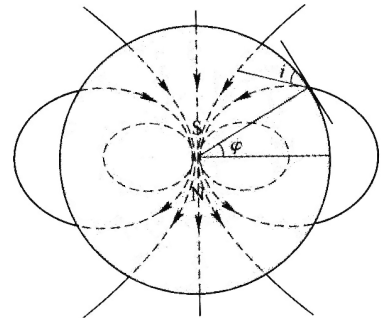
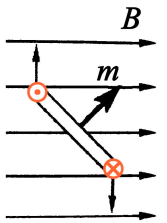
**地磁场** 来源于地核外核铁镍流体的涡电流, 强度约 0.25~0.65 Gs

可近似看作位于地心磁偶极子产生的  $\rightarrow$

磁倾角和地磁纬度的关系为  $\tan i = \frac{-H_r}{H_\theta} = \frac{-k_m 2 p_m \cos(\pi/2 + \varphi)/r^3}{k_m p_m \sin(\pi/2 + \varphi)/r^3} = 2 \tan \varphi$

已知纬度 45° 的地磁水平分量约 0.23 Oe

**「 $H_\theta = k_m \frac{p_m \sin \theta}{r^3} = \frac{1}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^3}$ 」**  $\rightarrow$  地球的磁矩约  $8.4 \times 10^{22} \text{ Am}^2$  (相当于赤道上  $6.6 \times 10^8 \text{ A}$  电流)



## 感强

Oersted experiment

**奥斯特实验** (1820.07) 载流导线能偏转小磁针  $\rightarrow$  电荷总有库仑作用, 但只有运动电荷才有磁相互作用 (安培 1820.09) 同向载流导线相吸引, 反向载流导线相排斥 (故有转到同向趋势), 插金属板不能屏蔽

pinch effect

**箍缩效应** 等离子体柱受自身电流的磁场的作用有向中心收缩的趋势 (导线中此效应极弱)

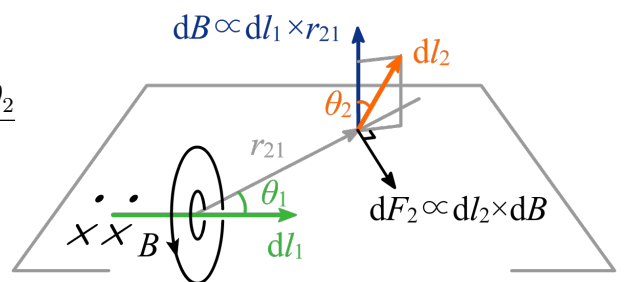
Ampère law

**安培定律** (1820.12) 稳恒线电流元  $I_1$  给  $I_2$  的力

$d\vec{F}_2 = k_m \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{e}_{r_{12}})}{r_{12}^2}$  大小  $= k_m \frac{I_1 dl_1 \sin \theta_1 I_2 dl_2 \sin \theta_2}{r^2}$

$k_m \equiv \frac{\mu_0}{4\pi}$ , 取  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  **〈磁介质〉** 然后定义 **A 〈实验〉**

(不满足牛三, 闭合回路积分才满足) **「安培定律拆开」**  $\rightarrow$



Biot-Savart law

**毕奥萨伐尔定律** (1820.10)  $d\vec{B} = k_m \frac{I d\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2}$  ( $\vec{e}_r$  由电流元指向场点), 另有  $I d\vec{l} = \vec{I} d\vec{l} = \vec{i} dS = \vec{j} dV$

magnetic induction

tesla

gauss

**磁感应强度**  $\vec{B} = \oint_L d\vec{B}$  T(特斯拉) = Wb/m<sup>2</sup> = N/(Am) = 10<sup>4</sup> Gs(高斯) 电流集合有磁的 **场强叠加原理**

Ampère force

**安培力**  $d\vec{F}_2 = I_2 d\vec{l}_2 \times d\vec{B}$ , 另有  $\vec{F} = \int \vec{v} \times \vec{B} dq = \int \vec{I} \times \vec{B} dl = \iint \vec{i} \times \vec{B} dS = \iiint \vec{j} \times \vec{B} dV$

(均匀磁场中, 安培力只与起点终点有关) **推论** 安培力冲量  $m\Delta v = F\Delta t = BIl\Delta t = Bl\Delta q$

**例** 两根平行的无限长均匀带电直线 (不是导线, 导线中性), 以  $v$  沿线方向运动, 要使单位长度磁吸引力  $\frac{\mu_0 \eta_e^2 v^2}{2\pi d}$  和电排斥力  $\frac{\eta_e^2}{2\pi \epsilon_0 d}$  平衡, 得  $v$  为光速 ( $\eta_e$  和  $v$  均在实验室系测, 不必考虑相对论)

**例** 运动电荷磁场 (非稳恒电流, 此为低速近似)  $\vec{B} = \frac{\mu_0 q \vec{v} \times \vec{e}_r}{4\pi r^2} = \mu_0 \epsilon_0 \vec{v} \times \frac{k_e q \vec{e}_r}{r^2} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}$  **〈狭相〉**

Lorentz force

**「 $I d\vec{l} \rightarrow q \vec{v}$ 」** **洛伦兹力**  $\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$  (总与带电粒子速度方向垂直, 故不对粒子做功)

(洛伦兹力的作用是传递, 宏观导体上的安培力可以做功, 原因是自由电子的冲量传递给了金属晶格)



**例** 圆形区域中心对称的磁场  $\vec{B}(r)$ , 若总磁通量为零, 则从圆心出发的粒子(若能脱离磁场区)必沿径向射出, 反之, 瞄准圆心的入射粒子最后必击中圆心 [粒子获得总角动量  $\vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{F} dt = q \int \vec{r} \times (\vec{v} \times \vec{B}) = q[\int (\vec{r} \cdot \vec{B}) d\vec{l} - \int \vec{B}(\vec{r} \cdot d\vec{l})]$ , 而  $\vec{r} \cdot \vec{B} = 0$ ,  $\vec{r} \cdot d\vec{l} = \vec{r} \cdot d\vec{r} = r dr$ , 得  $\vec{L} = -\frac{q}{2\pi} \int_0^R \vec{B} 2\pi r dr = -\frac{q}{2\pi} \Phi_B$ ]

Larmor radius

**拉莫尔半径**  $r = \frac{mv_{\perp}}{Bq}$

**回旋周期**  $T = \frac{2\pi m}{Bq}$

与  $v, r$  无关  $\rightarrow$  **磁透镜** 磁聚焦

magnetic lens

velocity selector

**速度选择器**  $Eq = qvB \rightarrow$

**MagnetoHydrodynamic generator**

**磁流体发电机**

等离子体通过平行板电极,  $\mathcal{E} = Bvd$

mass spectrometer

**质谱仪** 先平衡后断电, 由回旋半径得荷质比  $\frac{q}{m} = \frac{E_{\text{选}}}{rB_{\text{选}}B_{\text{偏}}}$  (非相对论)

相同电流 (同时改变电性和速度方向) 一般结论相同, **霍尔效应** 是例外 (固体)

cyclotron

**回旋加速器**

每圈的半径  $\propto \sqrt{n}$ ,  $v_{\text{max}} = \omega R$  **回旋频率**  $\omega = \frac{qB}{m}$

**例** 静止粒子放在正交的电场磁场中, 记  $R \equiv E/\omega B$

(微几) 解得运动轨迹为圆摆线  $(y - R\omega t)^2 + (z - R)^2 = R^2 \rightarrow v = E/B$

磁场越强半径越小, 磁矩不变  $|\vec{m}| = IS = \frac{q}{T} \pi r^2 = \frac{mv_{\perp}^2}{2B} = \frac{E_{k\perp}}{B} \rightarrow$

magnetic mirror

**磁镜** 带电粒子由弱磁场向强磁场运动,  $v_{\perp}$  增加导致  $v_{\parallel}$  减小乃至反弹

**例** 两个同向载流线圈  $\rightarrow$  托卡马克装置, 约束等离子体 (核物)

Van Allen radiation belts

以及地磁场约束会形成 **范艾伦辐射带**

## 静磁场

line of magnetic induction

**磁感线** 磁铁外部从 N 走向 S, 磁铁内部从 S 走向 N, 不相交

steady current

**稳恒电流**  $\partial_t \rho_e = 0$ ,  $\vec{j}$  无散, 电流闭合或为无限场 (永磁体满足)

Ampère circuital theorem

**静磁场安培环路定理** 通过任意闭合环路  $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{(L\text{内})}$

穿过回路面的电流与回路右手定则方向同向为正, 反向为负

( $\vec{B}$  为全空间电流产生的磁场, 不通过  $L$  的电流的环路积分为零)

**例** 载流直导线对磁场的贡献,  $l = R \cot \theta$ ,  $\frac{dl}{d\theta} = \frac{R}{\sin^2 \theta}$ ,  $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}$

$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\sin \theta}{(R/\sin \theta)^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$ , 无限长  $\frac{\mu_0 I}{2\pi R}$ , 方向右手螺旋

**例** 无限大载流平面, 两侧  $B = \frac{1}{2} \mu_0 i$ , 方向相反 (右手定则)

均匀带电球面自转,  $[dI = \frac{q}{T} \sigma_e \omega r dx]$  转轴上, 球内  $B_z = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma_e \omega R$  (匀强), 外  $B_z = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma_e \omega \frac{R^4}{x^3}$  (偶极)

载流圆线圈在轴线, 记  $r = \sqrt{R^2 + x^2}$ ,  $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dl R}{r^2} = \frac{\mu_0 I R^2}{2r^3}$ ,  $x=0 \rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2R}$ ,  $x \gg R \rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{m}}{2\pi x^3}$

Helmholtz coils

**亥姆霍兹线圈** 间距等于半径的一对共轴载流圆线圈 [设间距  $2d$ , 记  $r_{\pm} = \sqrt{R^2 + (x \pm d)^2}$ , 则

$B \propto r_+^{-3} + r_-^{-3}$ ,  $B' \propto (x+d)r_+^{-5} + (x-d)r_-^{-5}$ ,  $B'' \propto [4(x+d)^2 - R^2]r_+^{-7} + [4(x-d)^2 - R^2]r_-^{-7}$  中点处  $B''_x = 0$

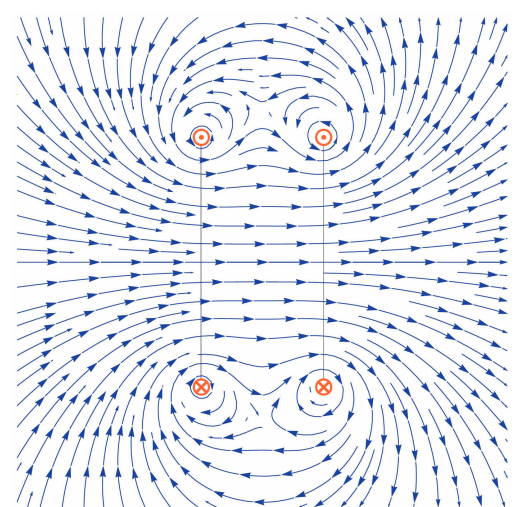
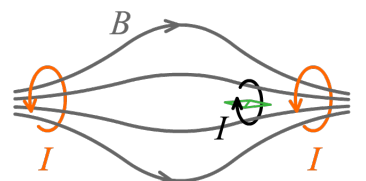
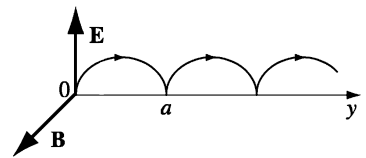
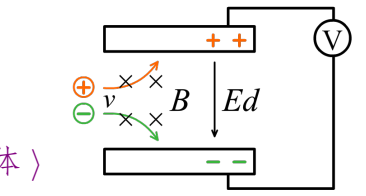
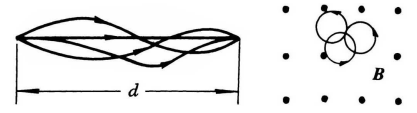
(由于偶函数, 奇次导亦都为零) 可方便地获得均匀磁场,  $B = \frac{8\mu_0 I}{5\sqrt{5}R}$

solenoid

载流**螺线管**在轴线  $B = \mu_0 n I \frac{\cos \theta_2 - \cos \theta_1}{2}$ , 方向右手螺旋,  $n$  为单位长度匝数

无限长密绕螺线管在轴线  $B = \frac{\mu_0 I R^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n dx}{r^3} = \mu_0 n I$  **螺绕环**  $\vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi R} \vec{e}_{\phi}$  (任意形状截面均适用)

**性质** 整个螺线管内部磁场都是均匀的 [矩形安培环路, 另一边在无限远], 管外  $B=0$





## 磁矢势

magnetic flux

weber

Gauss theorem of magnetic field

**磁通量**  $\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{S}$  Wb(韦伯) = Vs = CΩ

**磁场高斯定理** 通过任意闭合曲面  $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

无旋场是某标量场的梯度  $\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$ , 无散场是某矢量场的旋度  $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$  (矢分)

magnetic vector potential

**磁矢势**  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ , 即  $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \Phi_B$  (很像  $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$ , 故  $\vec{B}$  生成  $\vec{A}$  就像  $\vec{j}$  生成  $\vec{B}$ )  
电势可以加个任意无梯度场(常数)而不影响  $\vec{E}$ , 矢势可以加个任意无旋场(梯度)而不影响  $\vec{B}$

**库仑规范** 取矢势散度为零  $\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$  (电动)

**例** 对于匀强磁场  $\vec{B} = B\vec{e}_z$  [ $B\pi r^2 = 2\pi r A$ ]  $\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r}$

$\vec{A} \cdot \vec{p} = [\frac{1}{2}(\vec{B} \times \vec{r})] \cdot \vec{p} = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{1}{2} BL_z$

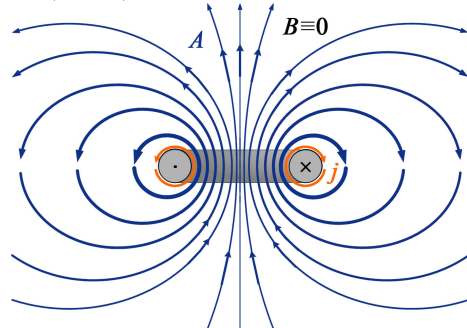
**例** 无限长载流直导线,  $\vec{A}$  与导线平行, [取长为  $l$  的矩形环路,

$\Delta A_z l = \Phi_B = l \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int \frac{dr}{r}$ ]  $A_z(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{1}{r} + \text{常数}$

(零势点不能取在无穷远)

对一般的载流回路  $L$ , 取无穷远矢势为零, 产生的矢势为  $k_m \oint_L \frac{I d\vec{l}}{r}$  (表达式不唯一) (电动)

**例** 无限长密绕螺线管, 矢势和电流同向, 只有  $A_\varphi$  分量,  $A_\varphi(r) = \mu_0 n I \frac{r}{2} (r < R), = \mu_0 n I \frac{R^2}{2r} (r > R)$



## 电磁感应

Faraday's law of electromagnetic induction

**法拉第电磁感应定律** (法拉第 1831 实验发现, 诺埃曼 1845 给出公式)  $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$  **磁通链**  $\Psi = N\Phi_B$

标量的正负是相对于标定方向而言的: 若  $\Phi_B$  与  $\vec{e}_n$  同向并增大, 则感应电动势逆着右手定则方向  $\rightarrow$

Lenz's law

**楞次定律** (1834) 感应电流的效果总是反抗激发感应电流的原因 (产生焦耳热要付出功, 符合能量守恒)

**注** 因  $\vec{B}$  无散, 故同一边界用任意面求通量都可以, 对变化的磁场适用静磁学的范围: 准静态, 类空间隔

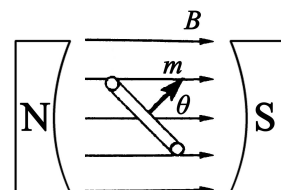
**例** 用感应电动势驱动有负载的回路,  $\Delta\Phi_B = \mathcal{E} \Delta t = \frac{I \Delta t}{R} = \Delta q R$

**例** 均匀磁场中的滑动矩形导线框  $\mathcal{E} = Blv$ , 绕一端旋转的棒  $\mathcal{E} = \frac{1}{2} Bl^2 \omega$

**动生电动势**  $\vec{K} = \frac{\vec{F}_{洛}}{-e} = \vec{v} \times \vec{B}$  导体切割磁感线  $\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} = U_{12}$

alternating current generator (alternator)

**交流发电机**  $\mathcal{E} = 2Blv \sin \theta \stackrel{\text{或}}{=} -\frac{d}{dt}(BS \cos \omega t) = BS\omega \sin \omega t$



## 涡旋电场

induced e.m.f.

实验发现 **感生电动势** 与导体的性质无关  $\rightarrow$  即使不存在导体, 变化的磁场也会激发出 **涡旋电场**

$[\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = -\oint \frac{d\vec{A}}{dt} \cdot d\vec{l}]$   $\vec{E}_{旋} = \vec{K} = -\frac{d\vec{A}}{dt} \rightarrow \nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$ , 为无源有旋场

总电场  $\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{d\vec{A}}{dt}$  ( $\vec{l}$  与  $\vec{S}$  以右手定则为正)

**注** 当  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \neq 0$  时电势不能良好定义 **例** 电路中有一线性增加的磁通量  $\Phi_B = \alpha t$ , 则  $I = \frac{\alpha}{R_1 + R_2}$ ,  $U_1 = IR_1$ ,  $U_2 = IR_2$ , 高低如图

两(理想)电压表读数不等, 即使连在相同点上

betatron

**电子感应加速器** 用  $E_{旋}$  加速回旋电子, 由  $mv = Bqr$ , 只要  $B \propto p$  就可维持电子在固定轨道运动

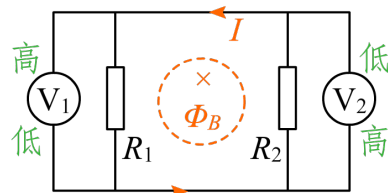
$[\frac{d(mv)}{dt} = -eE_{旋} = \frac{e}{2\pi r} \frac{d\Phi_B}{dt}]$ , 左边  $v$  和右边  $\Phi_B$  均从零开始积分, 得  $mv = \frac{e}{2\pi r} \Phi_B$ , 而  $\Phi_B = \pi r^2 \bar{B}$

条件: 轨道上的  $B(r) = \frac{1}{2} \bar{B}$  (轨道内平均感强的一半), 加速不受相对论限制, 受同步辐射限制

eddy current

**涡流** 金属内部的感应涡电流  $\rightarrow$  变压器采用多片与磁感线平行的硅钢片, 高频交流电可用于冶炼金属

**电磁阻尼** 阻碍相对运动, 可用于让电磁仪表指针快速稳定, 亦可用于驱动, 如转速表, 感应式异步电机



## 电感

mutual inductance

mutual induction e.m.f.

**互感**  $\Psi_{12}=M_{12}I_1, \Psi_{21}=M_{21}I_2$  **互感电动势**  $\mathcal{E}_2=-M_{12}\frac{dI_1}{dt}$  (负号表示反抗电流变化)

Neumann

**纽曼公式**

[准静态,  $\Psi_2=\oint \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2, \vec{A}_1=k_m \oint \frac{I_1 d\vec{l}_1}{r}$ ]  $M_{12}=M_{21}=k_m \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r_{12}} \equiv M$

[ $M=\frac{N_2\Phi_1}{I_1}=\frac{N_1\Phi_2}{I_2}$ ]  $M \leq \sqrt{L_1 L_2}$ , 无漏磁时取等号 **例** 嵌套螺线管  $B=\mu_0 \frac{N_1 I_1}{l}, M=\frac{\Psi_{12}}{I_1}=\mu_0 \frac{N_1 N_2 S}{l}$

相距  $d$  有限长为  $l$  的平行导线  $M=k_m(l \ln[(l+\sqrt{l^2+d^2})/d]-\sqrt{l^2+d^2}+d)$

**例** 相距  $d$  共轴平行的一大一小载流圆环, 记  $r=\sqrt{d^2+R_2^2}$ , 大对小, 近似匀场  $\Phi_B=\frac{\mu_0 I R_2^2}{2r^3} \pi R_1^2$ , 小对大, 近似偶极子, 选球冠做积分  $\Phi_B=k_m \frac{I \pi R_1^2}{r^3} \int_0^{\sin^{-1}(d/r)} (2 \cos \theta)(r^2 2\pi \sin \theta d\theta)$ , 而  $\sin^2 \theta|_0^{\sin^{-1}}=\frac{R_2^2}{r^2}$ , 两结果一致

self inductance

henry

self-induction e.m.f.

**自感**  $\Psi=LI$  **电感**  $L>0$  H(亨利)=Vs/A 与回路形状有关 (若有铁芯还和  $I$  有关) **自感电动势**  $\mathcal{E}=-L\frac{dI}{dt}$

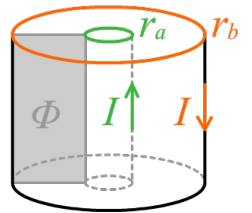
**例** 螺线管或螺绕环  $B=\mu_0 n I, L=NBS/I=\mu_0 n^2 V$ , 其中  $V=LS$  **注** 充介质后  $L=\mu_r L_0$

**例** 同轴传输线  $B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \rightarrow \Phi_B=\int B dS=\frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{b}{a}, L=\frac{\Phi_B}{I}$

magnetic circuit

**磁路** 由铁芯构成磁感应管可类比电路,  $I \rightarrow \Phi_B, \sigma \rightarrow \mu, \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_m=N I_0, R \rightarrow R_m=\frac{l}{\mu S}$

空气高磁阻  $\rightarrow$  在铁芯上开一条缝, 电感大幅下降, 但可提高  $Q$  值 (电路)



## 静磁能

串联电感的总自感, 其中的互感顺接取加反接取减, 如图

自感磁能  $W_L=\int_0^I LI dI=\frac{1}{2}LI^2$ , 互感磁能  $W_{12}=M_{12}I_1I_2$

总磁能  $W_m=\frac{1}{2}\sum_i L_i I_i^2+\frac{1}{2}\sum_{i \neq j} M_{ij} I_i I_j$

[ $LI=\Phi_B=\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} \rightarrow W_m=\frac{1}{2}\int \vec{A} \cdot (I d\vec{l})$ ]

用  $w_m$  计算两线圈总磁能:  $w_m=\frac{1}{2}(\vec{B}_1+\vec{B}_2) \cdot (\vec{H}_1+\vec{H}_2)=\frac{1}{2}\mu(H_1^2+H_2^2+2\vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2) \rightarrow w_{自} \geq 0, w_{互}$  可正可负

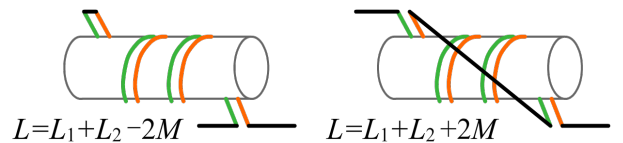
**公式** 电感储静磁能  $W_m=\frac{1}{2}\mu n^2 V I^2=\frac{1}{2}BH_t V=\frac{1}{2}\mu H^2 V$ , 一般形式为  $w_m=\frac{1}{2}\vec{H} \cdot \vec{B}$  (电动)

总结:  $L$  可用磁能  $=\frac{1}{2}LI^2$  求或  $\Psi/I$  求,  $\Psi$  可用平均磁链  $\iint I d\Phi/I$  或  $\iint \Phi dI/I$  求

**例** 反向平行载流直导线, 设粗细为  $r$  (否则导线外  $\Phi_B$  无穷大), 间距  $d \gg r$ , 则单位长度  $l$  的自感为

[ $\Phi_B=\int B l dr=\int_r^{d-r} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{1}{r}+\frac{1}{d-r}\right] l dr=\frac{\mu_0 I l}{2\pi} [\ln r - \ln(d-r)] \Big|_r^{d-r} \approx \left(\frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d}{r}\right) I$ ]  $L=\frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d}{r}$

将导线拉远磁能增加, 它加上磁场做的功 (导线相斥), 等于电源维持电流恒定做的功 (感应电流反抗)



## 电介质

dielectric

free charge

polarization

bound charge

**电介质** 绝缘介质, 无**自由电荷**  $q_0$  (以下用下标  $0$  表示与极化无关), 因**极化**产生**束缚电荷**  $q'$

displacement polarization

orientation polarization

无极性分子为电子的**位移极化**, 极性分子还有**取向极化**, 效应比前者强 (但高频电场下仅前者能跟上)

[视电子云为均匀分布, 其偏离原子核  $d$  产生的电场  $E_e=k_e \frac{qd}{R^3}$  与外场  $E$  平衡, 得  $qd=4\pi\epsilon_0 R^3 E$ ]

atomic polarizability

**原子极化率**  $\vec{p}=\alpha\vec{E}$ , 初阶近似  $\alpha=3\epsilon_0 V$  (预测氢原子  $k_e\alpha \approx 0.12 \times 10^{-30} \text{ m}^3$ , 实验值  $0.67 \times 10^{-30}$ )

polarizability tensor

对于分子  $\alpha_{ij}$  为**极化张量** (碳原子  $k_e\alpha \approx 1.76 \times 10^{-30}$ ,  $\text{CO}_2$  分子轴向  $4.0 \times 10^{-30}$ , 垂直于轴  $1.8 \times 10^{-30}$ )

polar molecules

permanent dipole moment

**极性分子** 例如水分子, 无需外电场就有**固有电偶极矩**  $\vec{p}_0 \approx 6.17 \times 10^{-30} \text{ Cm}$  (很大, 所以是个好溶剂)

electric polarization intensity

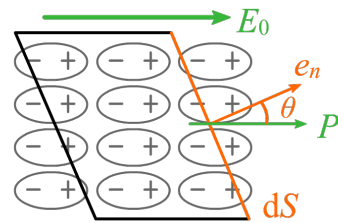
定义**电极化强度**  $\vec{P} \equiv \frac{\vec{p}_{\text{分子}}}{dV}=nq\vec{l} \text{ C/m}^2$ , 分子数体密度  $n=\frac{N}{V}$  [ $q_{剩}=qn l dS \cos \theta=\vec{P} \cdot d\vec{S}$ ]

面内外  $q_{剩}$  等大反号  $\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = -q'_{(S内)} \rightarrow$  **极化电荷体密度**  $\rho'_e = -\nabla \cdot \vec{P}$

$\rightarrow q_{剩}$  仅存在于界面或自由电荷附近, 均匀极化  $\rho'_e = 0$ , 总束缚电荷为零

**极化电荷面密度**  $\sigma'_e = \frac{q_{剩}}{dS} = \vec{P} \cdot \vec{e}_n \equiv P_n$  **退极化场**  $\sigma'_e$  产生的  $E'$

**例** 平行板电介质, 均匀极化  $\vec{P}$ , 则  $\pm\sigma'_e = \pm P$ ,  $E' = P/\epsilon_0$  方向与  $P$  相反



## 电极化率

总电场  $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$  (注: 对一般形状,  $\vec{E}'$  不一定总严格和  $\vec{E}_0$  反向, 即使介质和  $E_0$  都均匀)

对各向同性线性介质,  $\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$  (不是  $\vec{E}_0$ ) 成正比 **电极化率**  $\chi_e$ , 量纲为 1

对各向异性材料 (如晶体)  $\chi_e$  为二阶张量, 高强光场下为非线性  $\vec{P} = \epsilon_0 (\chi^{(1)} \vec{E} + \chi^{(2)} \vec{E}^2 + \dots)$  (现光)

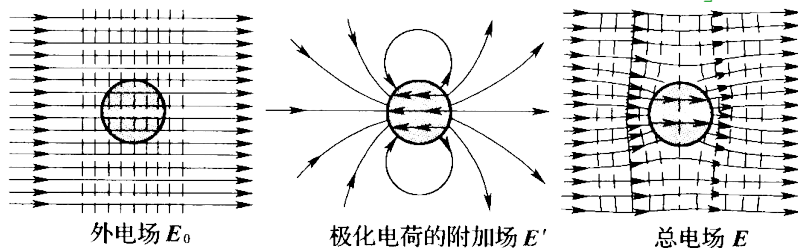
**例** 均匀极化的电介质球, 表面  $\sigma'_e = P \cos \theta$  [由叠加原理, 可视为两个各带正负电的球错开  $l$  距离]

$\vec{P} = \rho_e \vec{l}$ ,  $\vec{p}_{总} = \vec{P}V$ ,  $V$  为球体积 (电动)

$E'_{外}$  和处于球心偶极子的外电场完全相同

$$q = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_e, E_{内} = k_e \frac{qr}{R^3}, E' = \frac{\rho_e}{3\epsilon_0} (-l) = -\frac{P}{3\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \frac{\chi_e}{3} \vec{E} \rightarrow \vec{E}_{内} = \left(1 + \frac{\chi_e}{3}\right)^{-1} \vec{E}_0$$



Clausius-Mossotti

Lorentz-Lorenz

若介质由原子(或非极性分子)组成  $\vec{P} = n\vec{p}$ , 有 **克劳修斯-莫索提公式** 光学称 **洛伦兹-洛伦茨方程** (用  $\chi_e = n\alpha/\epsilon_0$  不够精确, 因为  $\vec{p} = \alpha\vec{E}$  中的电场是除原子自身的  $\vec{E}_{其他}$ ,  $\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$  中是总的宏观电场)

$$\left[ \vec{E}_{自} = -\frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 R^3} \rightarrow \vec{E} = \left(1 - \frac{n\alpha}{3\epsilon_0}\right) \vec{E}_{其他} \rightarrow \chi_e = \frac{n\alpha/\epsilon_0}{1 - n\alpha/3\epsilon_0} \right] \alpha = \frac{3\epsilon_0 \epsilon_r - 1}{n \epsilon_r + 2} \quad (\text{最适合气体, } \epsilon_r \approx 1 \text{ 回到原式})$$

对于极性分子  $\vec{p}_0$  [分子在电场中势能  $U = -\vec{p}_0 \cdot \vec{E}$ , 按玻耳兹曼分布, 分子有能量  $u$  的概率  $\propto e^{-u\beta}$ ,

$$\text{故平均能量 } \langle u \rangle = \frac{\int_{-pE}^{pE} u e^{-u\beta} du}{\int_{-pE}^{pE} e^{-u\beta} du} = k_B T - p_0 E \coth\left(\frac{p_0 E}{k_B T}\right), \vec{P} = n \langle p_0 \cos \theta \rangle \vec{e}_E = n \langle -\langle u \rangle \rangle \frac{\vec{e}_E}{E}, \text{ 高温弱场下}$$

$$\coth x - \frac{1}{x} \approx \frac{x}{3} \quad \text{朗之万方程} \quad \chi_e = \frac{np_0^2}{3\epsilon_0 k_B T} \rightarrow \text{实验分别测定气体的两类极化 } \chi_e \approx \frac{n}{\epsilon_0} \left( \alpha + \frac{p_0^2}{3k_B T} \right)$$

## 介电常量

$$\vec{E}_0 \rightarrow \vec{P}_0 = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}_0 \rightarrow \sigma'_e \rightarrow \vec{E}'_1 = -\frac{\chi_e}{3} \vec{E}_0 \rightarrow \vec{P}_1 = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}_1 \rightarrow \vec{E}'_2 = -\frac{\chi_e}{3} \vec{E}_1 \rightarrow \dots \text{求级数和 } \vec{E} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\chi_e}{3}\right)^n \vec{E}_0$$

$\downarrow$  引入  $\vec{D}$  可避免无限递推地求总电场

$$\left[ \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} (q_0 + q')_{(S内)}, \text{联立 } \vec{P} \text{ 的高斯定理消去 } q' \right] \rightarrow \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_{0(S内)}$$

electric displacement

dielectric constant / electric permittivity

**电位移矢量 / 电感应强度**  $\vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} \equiv \epsilon \vec{E}$ , 介质的 **介电常量 / 电容率**  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$

**例** 介质中的点电荷  $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r = k_e \frac{q/\epsilon_r}{r^2} \vec{e}_r$  (介质能部分屏蔽, 导体则完全抵消)

vacuum

**真空介电常量**  $\epsilon_0 = (\mu_0 c^2)^{-1} \approx 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$  **相对介电常量**  $\epsilon_r = 1 + \chi_e$ ,  $20^\circ\text{C}$  下  $\epsilon_{r, \text{空气}} \approx 1.0005$   $\epsilon_{r, \text{水}} \approx 80$

[ $\vec{E}_0$  和  $\vec{D}$  散度相同, 若旋度也相同, 即  $\nabla \times \vec{D} = 0 + \nabla \times \vec{P}$  为零的话]  $\rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_0 \rightarrow \vec{E} = \vec{E}_0 / \epsilon_r \rightarrow C = \epsilon_r C_0$

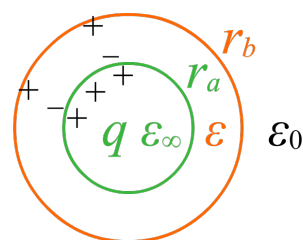
**注** 不能认为  $\vec{D}$  和  $q'$  无关, 上式成立的条件: 均匀电介质充满电场所在空间, 或表面沿等势面填充

**例** 带电导体球外包裹一层电介质壳, 球内  $\vec{E}, \vec{P}, \vec{D} = 0$ , 球外  $\vec{D}_{r>a} = \frac{q}{4\pi r^2} \vec{e}_r \rightarrow$

$$\vec{E}_{a \sim b} = \vec{D} / \epsilon, \vec{E}_{r>b} = \vec{D} / \epsilon_0, \vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}, \rho_e = 0, \sigma_e = P_n$$

$$\text{记 } k = \frac{1 - \epsilon_r^{-1}}{4\pi}, \text{内表面 } \sigma_e = -k \frac{q}{a^2} \text{ 外表面 } \sigma_e = k \frac{q}{b^2} \text{ 总感应电荷 } \sigma'_e = \frac{\chi_e}{\epsilon_r} q$$

$$W_e = \frac{1}{2} \int E D dV = \left(\frac{q}{4\pi}\right)^2 \frac{24\pi}{2} \left(\epsilon^{-1} \int_a^b + \epsilon_0^{-1} \int_b^\infty\right) \frac{r^2 dr}{r^4} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon} \left(\frac{1}{a} + \frac{\chi_e}{b}\right)$$





# 磁介质

Ampère molecular current hypothesis

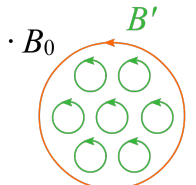
magnetization current

**安培分子电流假说** 分子环流定向排列形成宏观 **磁化电流 / 束缚电流** (无热效应)

magnetizing current magnetizing field magnetic medium magnetized

外加 **励磁电流** 产生 **磁化场**  $\vec{B}_0$  将 **磁介质** (如铁芯) **磁化**

被磁化后  $\vec{B}'$  与  $\vec{B}_0$  同向, 故铁芯能使线圈的磁通增加



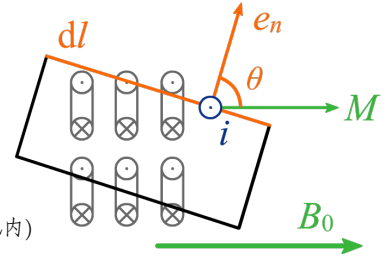
① 环流观点: 定义 **磁化强度**  $\vec{M} \equiv \frac{\vec{m}_{\text{分子}}}{dV} = nI\vec{S}$  A/m, 环流体密度  $n = \frac{N}{V}$   $[I_{\text{剩}} = InS d\vec{l} \sin \theta = \vec{M} \cdot d\vec{l}]$

$\oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l} = I'_{(L\text{内})} \rightarrow$  **磁化电流密度**  $\vec{j}' = \nabla \times \vec{M}$

$\rightarrow I_{\text{剩}}$  仅存在于界面或自由电流附近, 均匀磁化  $\vec{j}' = 0$

**面磁化电流密度**  $\vec{i}' = \frac{I_{\text{剩}}}{dl} = \vec{M} \times \vec{e}_n \equiv M_t$  总磁场  $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$

$[\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0(I_0 + I')_{(L\text{内})}]$ , 联立  $\vec{M}$  的环路定理消去  $I'$   $\rightarrow \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{0(L\text{内})}$



辅助矢量 **磁场强度**  $\vec{H} \equiv \mu_0^{-1} \vec{B} - \vec{M}$  **真空磁导率**  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  N/A<sup>2</sup> = H/m

$[\vec{B}_0$  和  $\vec{H}$  旋度相同, 若散度也相同, 即  $\nabla \cdot \vec{H} = 0 - \nabla \cdot \vec{M}$  为零的话]  $\rightarrow$  若充满磁介质,  $\vec{H} = \mu_0^{-1} \vec{B}_0$ ,  $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = B_0 + \mu_0 M$  (即使是线性介质, 分界面处  $\vec{M}$  的散度可以为无穷大) 泊松方程  $\nabla^2 \varphi_m = \nabla \cdot \vec{M}$

② 磁荷观点: 定义 **磁极化强度**  $\vec{P}_m \equiv \frac{\vec{p}_{m\text{分子}}}{dV}$  Wb/m<sup>2</sup>

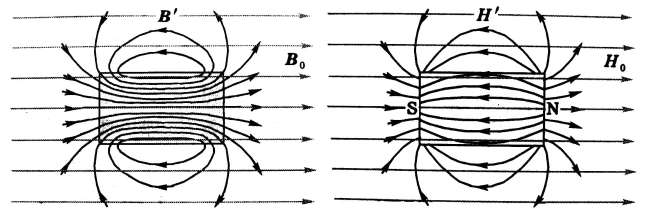
demagnetization field

**退磁场**  $\sigma'_m$  产生的  $\vec{H}'$ , 总  $\vec{H} = \vec{H}_0 - \vec{H}'$ ,  $\vec{P}_m = \chi_m \mu_0 \vec{H}$

辅助矢量 **磁感应强度**  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{P}_m = \mu_0(1 + \chi_m) \vec{H} \equiv \mu \vec{H}$

magnetic susceptibility magnetic permeability

**磁化率**  $\chi_m$ , 量纲为 1 **磁导率**  $\mu = \mu_r \mu_0$  **相对磁导率**  $\mu_r = 1 + \chi_m$ ,  $\chi_{m,\text{铁}} \approx 10^5$ ,  $\chi_{m,\text{铝}} \approx 10^{-5}$ ,  $\chi_{m,\text{铜,水}} \approx -10^{-5}$



③ 两种观点计算结果相同, 联系 (各向同性线性介质)  $\vec{P}_m = \mu_0 \vec{M}$ ,  $\vec{M} = \chi_m \vec{H} \rightarrow \vec{j}' = \chi_m \vec{j}_0$

**例** 均匀磁化介质球的磁场, 取  $\vec{e}_z$  与  $\vec{M}$  同向, 体内电流  $\vec{j}' = \nabla \times \vec{M} = 0$ ,

表面束缚电流  $\vec{i}' = \vec{M} \times \vec{e}_n = M \sin \theta \vec{e}_\phi$ , 形同均匀带电旋转球壳  $\vec{i} = \sigma_e \vec{v} = \sigma_e \omega R \sin \theta \vec{e}_\phi$  (电动)

故球内为均匀磁场  $\vec{B} = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}$ , 球外同纯磁偶极子  $\vec{m} = \vec{M} V$

## 效应

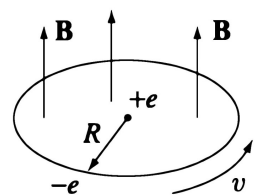
**弱磁质**  $B' \ll B_0$ , 同向为 **顺磁质** paramagnetic substance

源于力矩将磁偶极子拽向平行于外场方向, 因电子一般成对自旋反平行排列, 故通常出现在奇数电子的原子或分子中 (铜, 氢是例外)

diamagnetic substance

反向为 **抗磁质** (定性解释) 源于诱导轨道磁矩和磁场方向相反

最弱, 只能在没有顺磁性的偶数电子的原子中才能观察到



**强磁质**  $B' \gg B_0$ , 自旋平行的为 **铁磁质** ferromagnetic substance, 有 **磁滞回线** hysteresis loop

hysteresis loss

**磁滞损耗** 因磁滞消耗的能量,  $W = \oint H d\vec{B}$  磁滞回线包围面积

**矫顽力**  $H_c$  使介质完全退磁所需反向磁化场大小, 小的叫 **软磁材料** soft magnetic material

**硬磁材料** hard magnetic material, 即 **永磁体** permanent magnet

**永磁体** (钕铁硼合金  $\sim 10^4 \sim 10^6$  A/m)

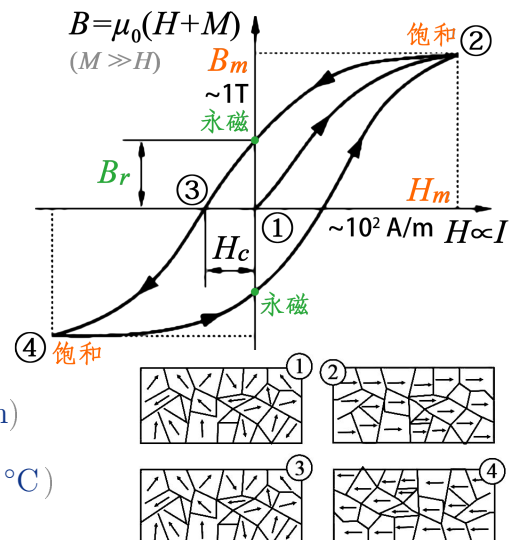
magnetic domain

**磁畴** 无外磁场铁磁质中, 自旋磁矩的小范围自发磁化区 ( $\mu\text{m} \sim \text{mm}$ )

Curie point

**居里点** 铁磁顺磁相变点, 高于此温度磁畴瓦解 (铁  $770^\circ\text{C}$  钴  $1131^\circ\text{C}$ )

(小磁针会因相吸同向排列, 但真正导致铁磁性的是量子的交换力)



自旋反平行, 且磁矩等强为 **反铁磁性** (FeO), 不等强为 **亚铁磁性** (Fe<sub>3</sub>O<sub>4</sub>) (凝态)  
 magnetic material with rectangular hysteresis loop gyromagnetic material  
**矩磁材料** 磁滞回线接近矩形, 适合做信息存取 **旋磁材料** 微波技术中用于抑制反射波  
 magnetostriction

**磁致伸缩** 铁磁质磁畴磁化方向改变引起晶格间距改变 ( $\sim 10^{-5}$ )

ferroelectrics

**铁电体**  $\vec{P}, \vec{E}$  间有电滞效应, 类似磁滞, 有很强的极化和压电效应 (如石英, 酒石酸钾钠, 钛酸钡)  
 electret

**驻极体** 在极化后能将极化冻结起来, 类似永磁体 (如石蜡)

piezoelectric effect

**压电效应** 晶体发生机械形变时会极化, 在相对两面产生异号极化电荷  $\rightarrow$  话筒, 晶体振荡器

**逆压电效应** 晶体上加电场会发生机械形变  $\rightarrow$  耳机, 超声波发生

magnetostatic shielding

**静磁屏蔽** 用高磁导率的铁磁材料做成屏蔽罩以屏蔽外磁场 (效果不如静电屏蔽, 可采用多层铁壳屏蔽)

**理想导体** 内部磁场恒定  $\partial_t \vec{B} = -\nabla \times \vec{E} = 0$ , 通过理想导体回路的磁通量恒定  $\left[ \frac{d\Phi_B}{dt} = -\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \right]$

superconductor

Meissner effect

**超导体** 除电导无穷外还有 **迈斯纳效应 / 完全抗磁性** 内部  $\vec{B} \equiv 0$ ,  $\chi_m = -1$  (凝态)

超导体电流只存在于表面  $\left[ \vec{j} = \mu_0^{-1} \nabla \times \vec{B} - 0 = 0 \right]$

## 边界条件

$\vec{E}$  线终止于电荷,  $\vec{D}$  线终止于自由电荷, 介质分界面上各分量的连续性:

若无自由电荷,  $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = (D_{2n} - D_{1n})S = 0$ ,  $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = (E_{2t} - E_{1t})l = 0$

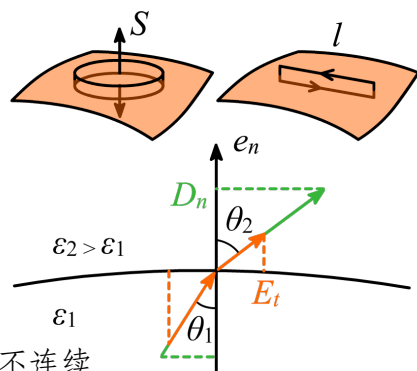
若无传导电流,  $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = (B_{2n} - B_{1n})S = 0$ ,  $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = (H_{2t} - H_{1t})l = 0$

$D = \epsilon E \rightarrow$  电场线折射  $\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$ ,  $B = \mu H \rightarrow$  磁感应线折射  $\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$

与光线相反 (电介质凸透镜会使电场线发散)

有自由电荷  $\Delta D_n = q_0 / S = \sigma_0$ , 电势在边界连续, 电势的梯度继承了  $E_n$  的不连续

有传导电流  $\Delta H_t = I_0 / l = i_0$ , 磁矢势在边界连续, 矢势的旋度继承  $B_t$  的不连续 (矢势散度取决于规范)



## 全电流

(麦克斯韦 1861)  $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \vec{j}$ , 等式左边须为零, 但对非稳恒电流  $\vec{j}$  并非无散

$\left[ \nabla \cdot \vec{j}_0 = -\partial_t \rho_0 = -\partial_t (\nabla \cdot \vec{D}) = -\nabla \cdot (\partial_t \vec{D}) \right]$  把它和  $\vec{j}_0$  合一起可消除散度 非静磁下  $\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_0 + \partial_t \vec{D}$

displacement current

称新增项为 **位移电流密度**  $\vec{j}_D = \partial_t \vec{D}$ , 包括了  $\mu_0^{-1} \nabla \times \vec{B} = \vec{j}_0 + \nabla \times \vec{M} + \partial_t \vec{P} + \epsilon_0 \partial_t \vec{E}$  中的最后两项

conducting current

total current

加上 **传导电流**  $\vec{j}_0$  称为 **全电流**  $\vec{j} = \vec{j}_0 + \vec{j}_D$  在所有情况下连续

## 麦方程

Linear Isotropic Homogeneous constitutive relations

对于 **线性各向同性均匀介质**, **结构方程**  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ ,  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ , **欧姆定律**  $\vec{j}_0 = \sigma \vec{E}$

麦方程组	积分形式 (强调散度旋度)	微分形式 (场由电荷电流产生)	边界条件
电高斯	$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0$	$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_0$	$\Delta D_n = \sigma_0$
非静电环路	$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\oint \partial_t \vec{B} \cdot d\vec{S}$	$\nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0 - \vec{j}_m$	$\Delta E_t = 0$
磁高斯	$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	$\nabla \cdot \vec{B} = 0 + \rho_m$	$\Delta B_n = 0$
非静磁环路	$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_0 + \oint \partial_t \vec{D} \cdot d\vec{S}$	$\nabla \times \vec{H} - \partial_t \vec{D} = \vec{j}_0$	$\Delta H_t = i_0$

Maxwell equations

**麦克斯韦方程组** (1864) (绿色为若存在磁单极子) 以及洛伦兹力公式  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) + q_m(\vec{H} - \vec{v} \times \vec{D})$

构成电动力学基本方程 (连续性方程  $\nabla \cdot \vec{j} = -\partial_t \rho_e$ ,  $\nabla \cdot \vec{j}_m = -\partial_t \rho_m$  可以推出来) (对于微分形式还需边界条件才能定解) 加上牛二律, 构成完整的带电粒子和电磁场相互作用的经典描述

麦方程的 **电磁对称性** 可将电的结论直接类比成磁的

① 对于自由空间:  $\vec{p} \rightarrow \vec{m}/c$ ,  $\vec{E} \rightarrow c\vec{B}$ ,  $c\vec{B} \rightarrow -\vec{E}$  ② 对于静态问题:  $\vec{P} \rightarrow \mu_0 \vec{M}$ ,  $\vec{D} \rightarrow \vec{B}$ ,  $\epsilon \vec{E} \rightarrow \mu \vec{H}$