实 矢量与张量分析

(最后编辑于 2015/12/01 - 23:58:00)

http://leptc.github.io/lenote

精

Matthews. Vector Calculus. Springer

黄克智. 张量分析（第二版）. 清华大学出版社 (较全)

参

余天庆. 张量分析及其应用. 清华大学出版社 (较精)

(同高等代数, 微分几何, 电动力学, 狭相广相)

符号约定

上标撇 ' 表示变换后, $\vec{e}_a$ 表示单位矢量 (不用 $\hat{a}$), g_i 表示协变基矢, g^i 表示逆变基矢 (非单位长度)

斜系之后, 矢/张量不再画箭头, (在不致混淆时) 用其分量 A^μ $T^{\mu\nu}$ 来代指整个矢/张量, 撇标在指标上

相关笔记

矢量与张量代数见〈高等代数〉 流形上的张量分析见〈微分几何〉

矢量空间

scalar　vector　magnitude　direction

标量 / 数量 $\varphi\in\mathbb{R}$ **矢量 / 向量** $\vec{A}=A\vec{e_a}$ ① 几何定义：有 **大小** 和 **方向** 且满足 **平行四边形法则**

n 维矢量空间 $V^n=\mathbb{R}^n$ 上定义了两种运算：① 矢量 **加法** 对应分量相加减，满足交换律，结合律 ② 标和矢 **数乘** 每一分量与标量乘，满足结合律，左右分配律 (详见〈高代〉) ② 代数定义：元素 $\vec{A}\in V^n$

V^n 的 **基底** 记为 $\{\vec{e_i}\}$，则任一矢量可唯一地表示为 $\vec{A}=\sum_i a_i\vec{e_i}$，$a_i$ 称为 $\vec{A}$ 在相应基底下的 **坐标**

平移变换

仿射空间 $P^n=\mathbb{R}^n$，区别是其元素视为 **点**

没有定义点和点的加法，定义了点和矢量的运算 $P^n\otimes V^n\to P^n$，$O\mapsto O'=O+\vec{A}$ (详见〈高代〉)

从而 V^n 中每个 $\vec{A}$ 都给出了 P^n 到自身的一个变换，称为由 $\vec{A}$ 决定的 **平行移动**

P^n 中任一点加上 V^n 中任一组基底构成一个 **坐标系** $\{O,\vec{e_i}\}$

free vector　fixed vector　sliding vector

自由矢量 没有作用点 **例** 力偶矩 **固定矢量** 固定作用点 **例** 位矢 $\vec{r}$，速度 $\vec{v}$ **滑移矢量** 固定作用线

例 作用在刚体上的力〈力学〉

内积

定义了 **内积** 的矢量空间称为 **内积空间** (详见〈高代〉)

定义了对称正定内积的实矢量空间称为 **欧氏空间** E^n $\to$ 有了 **长度** 和 **角度** θ 的概念

inner / dot / scalar product　modulus

内积 / 点乘 / 数量积 $\vec{A}\cdot\vec{B}\equiv AB\cos\theta\overset{\text{正交基}}{=\!=\!=}\sum_i a_ib_i$，矢量的 **模** $A=|\vec{A}|\equiv\sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}\overset{\text{正交基}}{=\!=\!=}\sum_i a_i^2$

内积满足交换律，分配律 (不存在结合律，标量不能和矢量点乘叉乘)

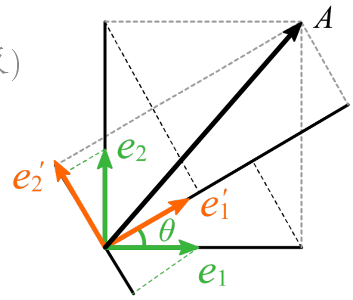
转动变换

contravariant

基底不唯一，记变换后的基底为 $\{\vec{e_i}'\}$，新坐标为 $a_i'=\sum_j R_{ij}a_j$ $\to$ $R_{ij}=\dfrac{\partial a_i'}{\partial a_j}$ 此变换方式称为 **逆变**

由 $\vec{A}=\sum_j a_j\vec{e_j}=\sum_i a_i'\vec{e_i}'$ (被动变换，物不动，基动坐标变)

「代入 $=\sum_i\sum_j R_{ij}a_j\vec{e_i}'$ 对比」得 $\vec{e_j}=\sum_i R_{ij}\vec{e_i}'$ (基底的新旧变换与坐标相反)



rotation

欧氏空间的保内积变换为 **空间转动** $R_{ij}=\vec{e_j}\cdot\vec{e_i}'=\cos\langle j,i'\rangle$ **性质** R 是正交阵

「$\sum_j R_{ij}R^{\mathsf{T}}_{jk}=\sum_j R_{ij}R_{kj}=\delta_{ik}\to\sum_i R_{ij}a_i'=\delta_{ii}a_j$」$\to$ $a_i=\sum_j R_{ji}a_j'$

covariant

$\to$ $R_{ji}=\dfrac{\partial a_i}{\partial a_j'}$，$\vec{e_j}'=\sum_i R_{ji}\vec{e_i}$，基底的这种变换方式称为 **协变**

③ 矢量的分析定义：空间转动下分量按 $a_i'=\sum_j R_{ij}a_j$ 变换的量

$$\begin{bmatrix}a_1'\\a_2'\\a_3'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta&0\\-\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$$

标量则是 $\varphi'=\varphi$ **例** 证矢量的内积是标量 $(\vec{A}\cdot\vec{B})'=\sum_i a_i'b_i'=$

$\sum_i\left(\sum_j R_{ij}a_j\right)\left(\sum_k R_{ik}b_k\right)=\sum_{ijk}R_{ij}R_{ik}a_jb_k=\sum_{jk}\delta_{jk}a_jb_k=\sum_k a_kb_k=\vec{A}\cdot\vec{B}$

矢积

(只有 3 维和 7 维空间能定义矢积，分别用四元数和八元数乘法表示，一般的乘法见〈外积〉)

(注：矢量相除的结果为四元数)

vector / cross product

矢积 / 叉乘 / 向量积 $\vec{A}\times\vec{B}\equiv AB\sin\theta\,\vec{e_n}=\begin{vmatrix}\vec{e_x}&\vec{e_y}&\vec{e_z}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$，$\vec{e_n}$ 按 **右手定则** $\to$ $|\vec{A}\times\vec{B}|=$ 平行四边形面积

(拉格朗日 1773)

性质 有反交换律，左右分配律，雅可比恒等式，不满足结合律 **推论** 平行矢量叉乘为零，$\vec{A}\times\vec{A}=\vec{0}=0$

例 直线方程 $\vec{r}=\vec{r_0}+\lambda\vec{k}$ 又可写成 $\vec{r}\times\vec{k}=\vec{h}$，$\vec{h}$ 为常矢量

「$[\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})]_x=a_y(b_xc_y-b_yc_x)-a_z(b_zc_x-b_xc_z)=b_x(a_yc_y+a_zc_z)+a_xb_xc_x-c_x(a_yb_y+a_zb_z)-a_xb_xc_x$」

Lagrange's identity

拉格朗日恒等式 $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$ (结果在 $\vec{B},\vec{C}$ 面内，中间者系数为正)

$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{A}(\vec{B}\cdot\vec{C})$ **推论** 当 $\vec{B}\times(\vec{A}\times\vec{C})=0$ 时上下两式相等

推论 $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D})=\vec{A}\cdot(\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{D}))=(\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D})-(\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{C})$

triple / mixed product

三重积 / 混合积 $[\vec{A},\vec{B},\vec{C}]\equiv(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}=(\vec{B}\times\vec{C})\cdot\vec{A}=(\vec{C}\times\vec{A})\cdot\vec{B}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=\pm$ 平行六面体体积

例 洛伦兹力 $q\vec{v}\times\vec{B}=m\dot{\vec{v}}$ 两边点乘 $\vec{v}$ 得 $0=m\dot{\vec{v}}\cdot\vec{v}=m\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{v}\cdot\vec{v})=m\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|v|^2)$ 得证速度大小不变

反射变换

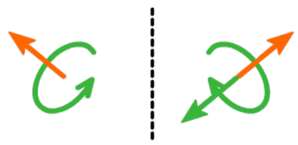
polar vector

极 / 真矢量 空间反射变换下，镜面垂直分量反向，镜面平行分量不变 **例** $\vec{r}$, $\vec{p}$, $\vec{E}$, 电矩 $\vec{p}$

axial / pseudo vector

轴 / 赝矢量 空间反射变换下，镜面垂直分量不变，镜面平行分量反向 **性质** 真矢量叉乘得赝矢量

例 $\vec{\omega}$, $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$, $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$, $\vec{B}\propto I\vec{r}\times\vec{e_r}$, 磁矩 $\vec{m}$, 涡度 $\vec{\zeta}=\nabla\times\vec{B}$



pseudo scalar

「变换时出个负号」矢量点乘赝矢量得 赝标量 **例** 磁通量 Φ_B, 三重积

$\rightarrow$ 赝标量乘矢量得赝矢量

直角坐标系

rectangular coordinate basis vector

直角坐标系 下点的 坐标 记为 (x,y,z)，基矢 记为 $\{\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z}\}$ 右手系 $\vec{e_x}\times\vec{e_y}=\vec{e_z}$，矢量 $\vec{A}=\sum^{xyz}a_x\vec{e_x}$

metric

度规 $g_{ij}\equiv\vec{e_i}\cdot\vec{e_j}=\sum^{xyz}(\vec{e_i}\cdot\vec{e_x})(\vec{e_x}\cdot\vec{e_j})=\sum^{xyz}\frac{\partial x}{\partial u_i}\frac{\partial x}{\partial u_j}$，一般基底下的 内积 为 $\vec{A}\cdot\vec{B}=\sum_{ij}g_{ij}a_ib_j$

性质 欧氏空间 g_{ij} 是正定对称矩阵，存在基底使 $g_{ij}=\delta_{ij}$「施密特正交化」(不唯一，差个转动变换)

曲线坐标系

curvilinear coordinate system coordinate surface coordinate curve

曲线坐标系 下点的 坐标 记为 (u_1,u_2,u_3)，$u_i=$常数 称为 坐标面，曲面的交线称为 坐标线

坐标线的单位切向矢量记为 $\{\vec{e_i}\}$ (不一定是长度的量纲)，指向 u_i 增加的方向，构成 局部标架

假设 坐标变换函数 $x_p=x_p(u_1,u_2,u_3)$ ($p=x,y,z$) 单值连续可微 $\rightarrow$ 存在逆变换 ($J\neq0$) $u_i=u_i(x,y,z)$

有 $\mathrm{d}\vec{r}=\sum\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_i}\mathrm{d}u_i$，定义 协变基矢 $\vec{g_i}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_i}$ (有长度的量纲，不一定归一)

cylindrical

柱系 $\begin{cases} x=r\cos\phi \\ y=r\sin\phi \\ z=z \end{cases}$ $\begin{cases} \vec{e_x}=\cos\phi\,\vec{e_r}-\sin\phi\,\vec{e_\phi} \\ \vec{e_y}=\sin\phi\,\vec{e_r}+\cos\phi\,\vec{e_\phi} \\ \vec{e_z}=\vec{e_z} \end{cases}$ $\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \phi=\arctan(y/x) \\ z=z \end{cases}$ $\begin{cases} \vec{e_r}=\cos\phi\,\vec{e_x}+\sin\phi\,\vec{e_y} \\ \vec{e_\phi}=-\sin\phi\,\vec{e_x}+\cos\phi\,\vec{e_y} \\ \vec{e_z}=\vec{e_z} \end{cases}\Bigg\}$ polar 极系

radial angular azimuthal angle polar angle

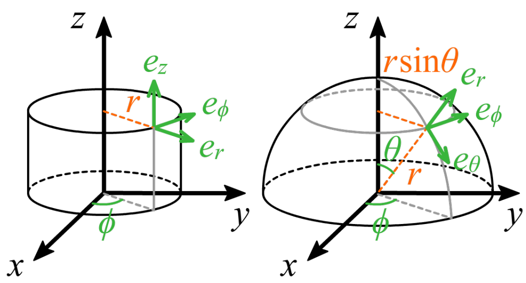
径向 $\vec{e_r}$ 横向 $\vec{e_\phi}$ 方位角 (经度) ϕ (逆时针为正向) 极角 (余纬度) θ

spherical

球系 $\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\phi \\ y=r\sin\theta\sin\phi \\ z=r\cos\theta \end{cases}$ $\begin{cases} \vec{e_x}=\cos\phi(\sin\theta\,\vec{e_r}+\cos\theta\,\vec{e_\theta})-\sin\phi\,\vec{e_\phi} \\ \vec{e_y}=\sin\phi(\sin\theta\,\vec{e_r}+\cos\theta\,\vec{e_\theta})+\cos\phi\,\vec{e_\phi} \\ \vec{e_z}=\cos\theta\,\vec{e_r}-\sin\theta\,\vec{e_\theta} \end{cases}$

$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta=\arctan(\sqrt{x^2+y^2}/z) \\ \phi=\arctan(y/x) \end{cases}$ $\begin{cases} \vec{e_r}=\sin\theta(\cos\phi\,\vec{e_x}+\sin\phi\,\vec{e_y})+\cos\theta\,\vec{e_z} \\ \vec{e_\theta}=\cos\theta(\cos\phi\,\vec{e_x}+\sin\phi\,\vec{e_y})-\sin\theta\,\vec{e_z} \\ \vec{e_\phi}=-\sin\phi\,\vec{e_x}+\cos\phi\,\vec{e_y} \end{cases}$

局部标架



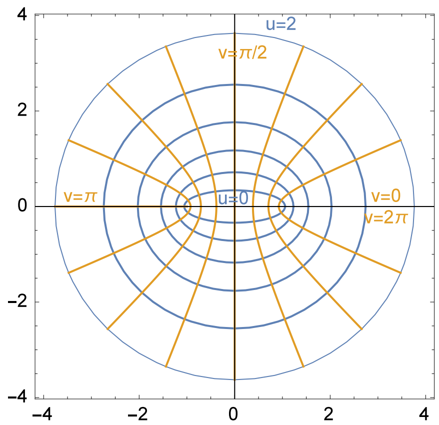
elliptic

椭圆系 $x=\cosh u\cos v$，$y=\sinh u\sin v$

椭球系 (u_c,u_b,u_a)

满足 $\frac{x^2}{a^2-u_a^2}+\frac{y^2}{b^2-u_a^2}+\frac{z^2}{c^2-u_a^2}=1$ $(c^2<b^2<u_a<a^2)$ 等 3 式

$h_{u_a}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(u_b-u_a)(u_c-u_a)}{(a^2-u_a)(b^2-u_a)(c^2-u_a)}}$ 等 3 式

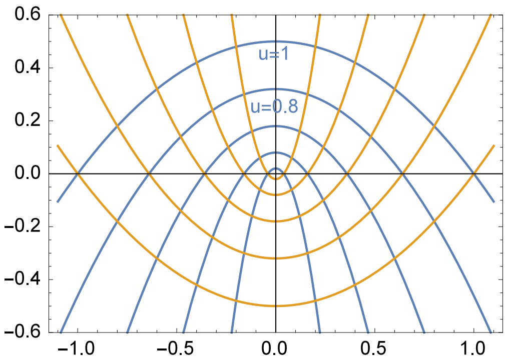


parabolic

抛物线系 $x=uv\cos\phi$，$y=uv\sin\phi$，(旋转型) $z=\frac{1}{2}(u^2-v^2)$

正交曲线系

坐标系	u_1	u_2	u_3	h_1	h_2	h_3
直角系	$x\in\mathbb{R}$	$y\in\mathbb{R}$	$z\in\mathbb{R}$	1	1	1
极/柱系	$0\leqslant r<\infty$	$0\leqslant\phi<2\pi$	$z\in\mathbb{R}$	1	r	1
球系	$0\leqslant r<\infty$	$0\leqslant\theta<\pi$	$0\leqslant\phi<2\pi$	1	r	$r\sin\theta$
椭圆系	$u>0$	$0\leqslant v<2\pi$	$z\in\mathbb{R}$	$\sqrt{\sinh^2 u+\sin^2 v}$		1
抛物线	u	v	z	$\sqrt{u^2+v^2}$		uv



orthogonal curvilinear coordinates

正交曲线坐标系 过任一点的各坐标线相互垂直 正交条件 $g_{ij}=0\ (i\neq j)$ 右手系惯例 $\vec{e_1}\times\vec{e_2}=\vec{e_3}$

Lamé coefficient

定义 拉梅系数 $h_i\equiv\sqrt{g_{ii}}$，则 $h_i=|\vec{g_i}|$，单位基矢 $\vec{e_i}=\vec{g_i}/h_i$

$\rightarrow$ 线元 $\mathrm{d}\vec{l}=\sum h_i\vec{e_i}\,\mathrm{d}u_i$，沿基矢的分量 $\mathrm{d}l_i=h_i\,\mathrm{d}u_i$，模长 $\mathrm{d}l^2=\sum\sum g_{ij}\,\mathrm{d}u_i\,\mathrm{d}u_j\overset{\text{正交}}{=\!=}\sum h_i^2\,\mathrm{d}u_i^2$

u_1 面上的 面元 $\mathrm{d}S=h_2h_3\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_3$ 体积元 $\mathrm{d}V=J\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_3$，雅可比行列式 $J=h_1h_2h_3=\sqrt{|g|}\neq0$

［行列式可视作其行矢量或列矢量的三重积 $J=\left|\dfrac{\partial x_p}{\partial u_i}\right|=\left[\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u_1},\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u_2},\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u_3}\right]=[h_1\vec{e_1},h_2\vec{e_2},h_3\vec{e_3}]$］〈微积分〉

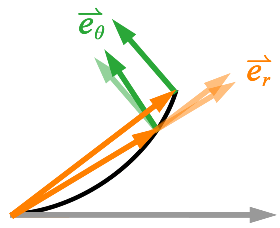
矢函数微分

设 位矢 函数 $\vec{r}=\vec{r}(t)$，极限 连续 导数 偏导数 等的定义均和〈微积分〉类似

导矢 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\equiv\dot{\vec{r}}=\lim\limits_{\Delta t\to0}\dfrac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}$ 是一个矢量 **定理** 其方向沿 $\vec{r}(t)$ 矢端曲线 的切线〈微几〉

矢量加减, 数乘的导数公式均同理, 内积, 矢积, 混合积的莱布尼茨法则亦同理, 注意顺序勿变

直角系 $\vec{r}=x\vec{e_x}+y\vec{e_y}+z\vec{e_z}$ 速度 $\vec{v}\equiv\dot{\vec{r}}=\dot{x}\vec{e_x}+\dot{y}\vec{e_y}+\dot{z}\vec{e_z}$ 加速度 $\vec{a}\equiv\dot{\vec{v}}=\ddot{\vec{r}}=\ddot{x}\vec{e_x}+\ddot{y}\vec{e_y}+\ddot{z}\vec{e_z}$〈力学〉



微分 $\mathrm{d}\vec{r}=\mathrm{d}x\,\vec{e_x}+\mathrm{d}y\,\vec{e_y}+\mathrm{d}z\,\vec{e_z}$，$|\mathrm{d}\vec{r}|^2=(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2$

弧长 $\mathrm{d}s\equiv\pm|\mathrm{d}\vec{r}|$（相对于正方向） 速率 $v\equiv|\vec{v}|=\dot{s}$

极系 $\vec{r}=r\cos\phi\,\vec{e_x}+r\sin\phi\,\vec{e_y}=r\vec{e_r}$ 径向 $\vec{e_r}=\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial r}=\cos\phi\,\vec{e_x}+\sin\phi\,\vec{e_y}$，

$\dot{\vec{e_r}}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{e_r}}{\mathrm{d}\phi}\dot{\phi}=\dot{\phi}\vec{e_\phi}$ 横向 $\vec{e_\phi}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}=-\sin\phi\,\vec{e_x}+\cos\phi\,\vec{e_y}$，$\dot{\vec{e_\phi}}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{e_\phi}}{\mathrm{d}\phi}\dot{\phi}=-\dot{\phi}\vec{e_r}$

$\vec{v}=\left[\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial r}\dot{r}+\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}\dot{\phi}\text{ 或 }\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\vec{e_r})\right]=\dot{r}\vec{e_r}+r\dot{\phi}\vec{e_\phi}$，$\vec{a}=(\ddot{r}-r\dot{\phi}^2)\vec{e_r}+(2\dot{r}\dot{\phi}+r\ddot{\phi})\vec{e_\phi}$ 或 $a_\phi=\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\phi})$

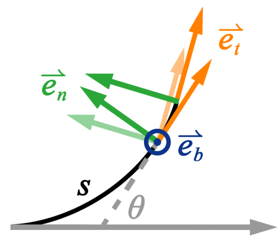
trajectory　natural

参数方程消去 t 即为质点的 轨迹，当轨迹已知时选用 自然坐标系 较方便

arc length　tangential　normal

弧长 $s=s(t)$，$\vec{r}=\vec{r}(s)$ 切向 $\vec{e_t}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}$，$\dfrac{\mathrm{d}\vec{e_t}}{\mathrm{d}\theta}=\vec{e_n}$ 法向（指向曲线凹侧）

$\dfrac{\mathrm{d}\vec{e_n}}{\mathrm{d}\theta}=-\vec{e_t}$，$\dot{\vec{e_t}}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{e_t}}{\mathrm{d}\theta}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\dot{s}=\vec{e_n}\dfrac{v}{\rho}$　$\vec{v}=\dot{s}\vec{e_t}$，$\vec{a}=\ddot{s}\vec{e_t}+\dfrac{v^2}{\rho}\vec{e_n}$，$\tan\theta=\dfrac{a_n}{a_t}$



curvature radius

曲率半径 $\rho=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}=\dfrac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$〈微几〉 **常用** $a_t=\dot{v}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}v$

柱系 $\vec{e_r},\vec{e_\theta}$ 同极系, $\vec{e_z}$ 同直角系 球系 $\vec{r}=r\vec{e_r}$，$\vec{v}=\dot{r}\vec{e_r}+r\dot{\theta}\vec{e_\theta}+r\dot{\phi}\sin\theta\,\vec{e_\phi}$

$\vec{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\sin^2\theta\dot{\phi}^2)\vec{e_r}+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}-r\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2)\vec{e_\theta}+(r\ddot{\phi}\sin\theta+2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta+2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta)\vec{e_\phi}$

矢函数积分

不定积分 $\vec{r}=\int\vec{v}(t)\,\mathrm{d}t+\vec{r_0}$，基本性质均成立 $\int(\varphi\vec{A}\pm\vec{k}\cdot\vec{B})\,\mathrm{d}t=\varphi\int\vec{A}\,\mathrm{d}t\pm\vec{k}\cdot\int\vec{B}\,\mathrm{d}t$，$\vec{k}$ 为常矢量

定积分 $\int_{t_0}^{t}\vec{v}(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)$ 分部积分 $\int\varphi\dot{\vec{r}}\,\mathrm{d}t=\varphi\vec{r}-\int\dot{\varphi}\vec{r}\,\mathrm{d}t$，内积, 矢积公式同理

矢量场

(时变) 标量场 $\varphi(x,y,z,t)$ 矢量场 $\vec{A}(x,y,z,t)=\sum^{xyz} a_x(x,y,z,t)\,\vec{e_x}$ 静态场 不含时

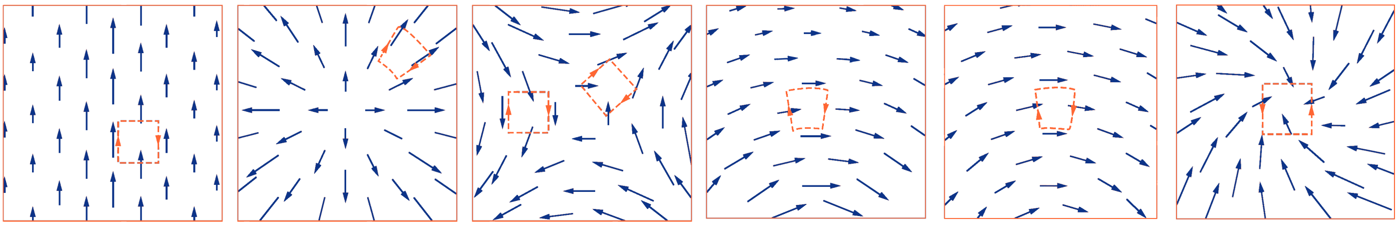
flux
通量 矢量流过闭合曲面的分量的面积分 $\Phi\equiv\oiint_S a_\perp\,\mathrm{d}S$, 表示有 源 (source) 或 汇 (sink) (流入和流出的不一样多)

circulation
环量 矢量沿闭合环路的分量的线积分 $\Gamma\equiv\oint_L a_{/\!/}\,\mathrm{d}l$, 表示有 涡旋 (vortex) (流体自转)

无散场 / 管场 $\nabla\cdot\vec{B}=0 \Leftrightarrow \vec{B}=\nabla\times\vec{A} \Leftrightarrow \iint_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$ 与所选面无关 $\Leftrightarrow \oiint=0$

连续性方程 $\partial_t\rho+\nabla\cdot(\rho\vec{v})=0$ 不可压缩流体 ρ 为常数 $\to \nabla\cdot\vec{v}=0$〈流力〉

无旋场 / 势场 $\nabla\times\vec{E}=0 \Leftrightarrow \vec{E}=-\nabla\varphi \Leftrightarrow \int_a^b \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$ 与路径无关 $\Leftrightarrow \oint=0$



无散有旋 有散无旋 无散无旋 无散无旋 无散有旋 有散有旋

harmonic field
谐和场 无散无旋 $\to$ 势函数满足 拉普拉斯方程 (Laplace's equation) $\nabla^2\varphi=0$ 例 常矢量场无散无旋

一般矢量场总可表示为无旋场和无散场之和 $\vec{F}=-\nabla\varphi+\nabla\times\vec{A}$ (分解不唯一, 可相差任意的谐和场)

Helmholtz theorem
加边界条件 $\to$ 亥姆霍兹定理 若场在无限远处(比 $\frac{1}{r^2}$ 更快地) 趋于零, 则场可由其散度和旋度唯一确定

「拉方程无局域极值, 不存在无限远趋于零的非零谐和场」

矢量场微分

nabla / del operator
矢微算符 / 劈形算符 ∇ 或 $\vec{\nabla}$ (视作矢量, 向右作用) 例「拉恒」$(\nabla\times\vec{A})\times\vec{A}=(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{A}-\frac{1}{2}\nabla(A^2)$

$\mathrm{d}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathrm{d}z=[(\vec{e_x}\partial_x+\vec{e_y}\partial_y+\vec{e_z}\partial_z)\varphi]\cdot(\mathrm{d}x\,\vec{e_x}+\mathrm{d}y\,\vec{e_y}+\mathrm{d}z\,\vec{e_z})\equiv\nabla\varphi\cdot\mathrm{d}\vec{l} \to \nabla\varphi\perp\mathrm{d}\vec{l}\,\big|_{\mathrm{d}\varphi=0}$

gradient
梯度 $\nabla\varphi$ 方向为该点处 φ 增速最大的方向 (垂直于等值面), 大小等于在这个方向上的斜率 例 $\nabla r=\vec{e_r}$

梯度为零可能是极大点(山顶), 极小点(山谷), 鞍点(某方向极大, 另方向极小), 肩点(升或降的平坦处)

$$\nabla\cdot\vec{A}=(\vec{e_x}\partial_x+\vec{e_y}\partial_y+\vec{e_z}\partial_z)\cdot(a_x\vec{e_x}+a_y\vec{e_y}+a_z\vec{e_z})=\partial_x a_x+\partial_y a_y+\partial_z a_z$$ (结果为标量场)

divergence
散度 $\nabla\cdot\vec{A}$ 无限小闭合曲面围成空间中的通量除以围成空间体积, 描述矢量场中某点处是否有源或汇

$$\nabla\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{e_x}&\vec{e_y}&\vec{e_z}\\ \partial_x&\partial_y&\partial_z\\ a_x&a_y&a_z\end{vmatrix}$$ (结果为矢量场)

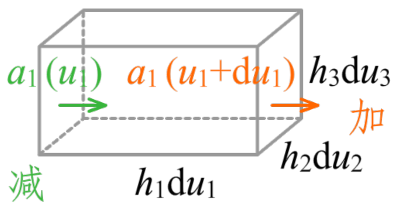
例 流体整体以 ω 旋转, $\vec{v}=\omega(-y\vec{e_x}+x\vec{e_y})$, 则 $\nabla\times\vec{v}=2\omega\vec{e_z}$
流体绕轴旋转 $\omega\propto\frac{1}{r}$, 则 $\nabla\times\vec{v}=0$

curl / rotation
旋度 $\nabla\times\vec{A}$ 无限小闭合曲线围成面积中的环量除以围成范围面积, 描述矢量场中某点处是否有涡旋

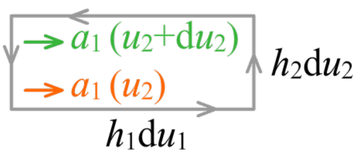
分量形式

$$\nabla\varphi=\left(\frac{\vec{e_1}}{h_1}\partial_1+\frac{\vec{e_2}}{h_2}\partial_2+\frac{\vec{e_3}}{h_3}\partial_3\right)\varphi$$ 「$\mathrm{d}\vec{l}=\sum h_i\vec{e_i}\,\mathrm{d}u_i$」

$$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\Big[\partial_1(h_2h_3a_1)+\partial_2(h_1h_3a_2)+\partial_3(h_1h_2a_3)\Big]$$ 「$=\lim\limits_{V\to0}\frac{1}{V}\oiint\vec{A}\cdot\vec{S}$」



$$\nabla\times\vec{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix}h_1\vec{e_1}&h_2\vec{e_2}&h_3\vec{e_3}\\ \partial_1&\partial_2&\partial_3\\ h_1a_1&h_2a_2&h_3a_3\end{vmatrix}$$ 「$=\vec{e_n}\lim\limits_{S\to0}\frac{1}{S}\oint\vec{A}\cdot\vec{l}$」



(第 2 行的偏导是作用在第 3 行整体的, 不可化简)

例 柱系 $\nabla\cdot\vec{A}=\frac{1}{r}\partial_r(ra_r)+\frac{1}{r}\partial_\phi a_\phi+\partial_z a_z$ 球系 $\nabla\cdot\vec{A}=\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2a_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta a_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi a_\phi$

推论 中心场 $\nabla f(r)=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\vec{e_r} \to \nabla\frac{1}{r}=-\frac{\vec{e_r}}{r^2}$, $\nabla\cdot\vec{A}(r)=\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2A_r) \to \nabla\cdot\vec{r}=3$, $\nabla\cdot\vec{e_r}=\frac{2}{r}$, $\nabla\cdot\left(\frac{\vec{e_r}}{r^2}\right)=-\nabla^2\frac{1}{r}=$
$4\pi\delta(\vec{r})$「奇点要单独积分来求 $\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}\frac{1}{r^2}r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$」, $\nabla\times f(r)\vec{e_r}=0$ (中心场必无旋)

积的微分

矢量场加减数乘的微分公式简易, 标量场的公式和函数同理 $\nabla(fg)=f\nabla g+g\nabla f$, $\nabla\left(\frac{f}{g}\right)=(g\nabla f-f\nabla g)/g^2$

① 散度公式 「$\partial_x(fa_x)=\dfrac{\partial f}{\partial x}a_x+f\dfrac{\partial a_x}{\partial x}$」 $\nabla\cdot(f\vec{A})=(\nabla f)\cdot\vec{A}+f(\nabla\cdot\vec{A})\to\nabla\cdot\left(\frac{\vec{A}}{f}\right)=\left(f(\nabla\cdot\vec{A})-(\nabla f)\cdot\vec{A}\right)/f^2$

「$\partial_x(a_yb_z-a_zb_y)=(b_z\partial_xa_y-b_y\partial_xa_z)-(a_z\partial_xb_y-a_y\partial_xb_z)$」 $\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A})-\vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B})$

② 旋度公式 $\nabla\times(f\vec{A})=(\nabla f)\times\vec{A}+f(\nabla\times\vec{A})$, $\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{A}(\nabla\cdot\vec{B})-\vec{B}(\nabla\cdot\vec{A})+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}-(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$

「$\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})=\vec{A}\times(\nabla_B\times\vec{B})\xlongequal{\text{拉恒}}\nabla_B(\vec{A}\cdot\vec{B})-\vec{B}(\vec{A}\cdot\nabla_B)$, 而 $\vec{B}(\vec{A}\cdot\nabla_B)=(\vec{A}\cdot\nabla_B)\vec{B}=(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$」

③ 梯度公式 $\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B})=(\nabla_A+\nabla_B)(\vec{A}\cdot\vec{B})=\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})+\vec{B}\times(\nabla\times\vec{A})+(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}$

注 $(\vec{A}\cdot\nabla)$ 整体视为一个算符, $\vec{F}=(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$ 是指 $F_x=\vec{A}\cdot\nabla B_x$, y,z 分量同理

$\to$ 若 $\vec{k}$ 为常矢量, 则 $(\vec{k}\cdot\nabla)\vec{r}=\vec{k}\to\nabla(\vec{k}\cdot\vec{r})=\vec{k}\to\ \nabla(\vec{k}\cdot\vec{e_r})=(\vec{k}\cdot\nabla)\vec{e_r}=\frac{1}{r}[\vec{k}-\vec{e_r}(\vec{k}\cdot\vec{e_r})]=\frac{1}{r}\vec{k_\perp}$

$$\to\nabla\left(\vec{k}\cdot\left(\frac{1}{r}\right)\right)=-\nabla\left(\frac{\vec{k}\cdot\vec{e_r}}{r^2}\right)=\frac{1}{r^3}\left[2(\vec{k}\cdot\vec{e_r})-r\nabla(\vec{k}\cdot\vec{e_r})\right]=\frac{1}{r^3}\left[3(\vec{k}\cdot\vec{e_r})\vec{e_r}-\vec{k}\right]\to\nabla\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r^3}(3\vec{e_r}\vec{e_r}-\vec{I})$$

$u(x,y,z)$ 连续可微, 则复合函数求导 $\nabla f(u)=\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\nabla u$, $\nabla\cdot\vec{A}(u)=\nabla u\cdot\dfrac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}u}$, $\nabla\times\vec{A}(u)=\nabla u\times\dfrac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}u}$

例 $\vec{k},\vec{E}$ 为常矢量 $\to\nabla\cdot[\vec{E}\sin(\vec{k}\cdot\vec{r})]=\nabla\sin(\vec{k}\cdot\vec{r})\cdot\vec{E}=\vec{E}\cdot\nabla(\vec{k}\cdot\vec{r})\cos(\vec{k}\cdot\vec{r})=\vec{E}\cdot\vec{k}\cos(\vec{k}\cdot\vec{r})$

$\nabla\times[\vec{E}\sin(\vec{k}\cdot\vec{r})]=\nabla\sin(\vec{k}\cdot\vec{r})\times\vec{E}=\vec{k}\times\vec{E}\cos(\vec{k}\cdot\vec{r})$

二阶微分

① 梯度的散度 $\nabla\cdot(\nabla\varphi)\equiv\nabla^2\varphi$ (或记作 Δ, 不推荐) 拉普拉斯算符 (Laplace operator) $\nabla^2=\nabla\cdot\nabla$ (可视作标量)

对标量场 $\nabla^2\varphi=(\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2)\varphi$ 对矢量场 (直角系) $(\nabla^2\vec{A})_x=\nabla^2A_x$, y,z 分量同理

正交曲线系下 $$\nabla^2\varphi=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\partial_1\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\partial_1\right)+\partial_2\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\partial_2\right)+\partial_3\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\partial_3\right)\right]$$

例 柱系 $\nabla^2=\dfrac{1}{r}\partial_r(r\partial_r)+\dfrac{1}{r^2}\partial_\phi^2+\partial_z^2$ 球系 $\nabla^2=\dfrac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r)+\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\,\partial_\theta)+\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\phi^2$

注 算符恒等式 (需作用在连续可微函数上才有意义) $\dfrac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r)\equiv\dfrac{1}{r}\partial_r^2r$ 「都等于 $\dfrac{2}{r}\partial_r+\partial_r^2$」

② 梯度的旋度 $\nabla\times(\nabla\varphi)=0$ 「$\partial_x(\partial_y\varphi)=\partial_y(\partial_x\varphi)$」 ④ 旋度的散度 $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})=0$ 「$\partial_x(\partial_ya_z)=\partial_y(\partial_xa_z)$」

③ 散度的梯度 $\nabla(\nabla\cdot\vec{A})\neq\nabla^2\vec{A}$, 很少用到 ⑤ 旋度的旋度 $\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}$ 「拉恒」

推论 $\nabla\times(\nabla^2\vec{A})=-\nabla\times(\nabla\times(\nabla\times\vec{A}))=\nabla^2(\nabla\times\vec{A})$ (旋度算符和拉普拉斯对易)

矢量场积分

矢场线积分 $\int_L\varphi\,\mathrm{d}\vec{r}$ 和 $\int_L\vec{A}\times\mathrm{d}\vec{r}$ 型的积分结果是个矢量, 计算时先对积分路径参数化再算各分量

例 沿 $y=x^2$ 积分, 设 $x=t$, $y=t^2$, 则 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x+y^2)\,\mathrm{d}\vec{r}=\int_0^1(t+t^4)(1,2t)\,\mathrm{d}t=(0.7,1)$

例 沿 $y=\sin x$ 积分, 设 $x=t$, $y=\sin t$, 则 $\int_{(0,0,0)}^{(\pi,0,0)}(y,x,0)\times\mathrm{d}\vec{r}=\vec{e_z}\int_0^\pi(\sin t\cos t-t)\,\mathrm{d}t=-\dfrac{\pi^2}{2}\vec{e_z}$

矢场面积分 $\iint_S\varphi\,\mathrm{d}\vec{S}$ 和 $\iint_S\vec{A}\times\mathrm{d}\vec{S}$ 型的积分结果是个矢量

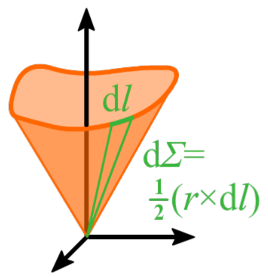
矢量面积 $\vec{\Sigma}\equiv\iint_S\mathrm{d}\vec{S}$ $(=\iint_S\vec{e_n}\,\mathrm{d}S$, $\vec{e_n}$ 为外法线方向) **推论** $\vec{\Sigma}=\frac{1}{2}\oint\vec{r}\times\mathrm{d}\vec{l}$

(若 S 为平面, 则 $|\vec{\Sigma}|$ 等于标量面积)

例 半球面 $\vec{\Sigma}=\iint\cos\theta(r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi)\vec{e_z}=2\pi r^2\vec{e_z}\int_0^{\pi/2}\sin\theta(\mathrm{d}\sin\theta)=\pi r^2\vec{e_z}$, 球面为零

「梯度体积分公式 $\varphi=1$」 $\to$ 任何闭合曲面 $\vec{\Sigma}=0\to$ 有相同边界的曲面的 $\vec{\Sigma}$ 相同

设 $\vec{k}$ 为常矢量 「梯度线积分公式 $\varphi\to\vec{k}\cdot\vec{r}$」 $\to\oint(\vec{k}\cdot\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{l}=\vec{\Sigma}\times\vec{k}$



积分定理

〈微积分〉 **微积分基本定理** $\int_a^bf'\,\mathrm{d}x=f(b)-f(a)\to$ **梯度定理** $\int_a^b(\nabla\varphi)\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\varphi(b)-\varphi(a)$ (与路径无关)

高斯定理 散度体积分 $\iiint_V\nabla\cdot\vec{A}\,\mathrm{d}V=\oiint_S\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$ **斯托克斯定理** 旋度线积分 $\iint_S\nabla\times\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\oint_L\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$

「高斯定理中 $\vec{A}\to\varphi\vec{k}$，$\vec{k}$ 为常矢量」梯度体积分 $\iiint_V \nabla\varphi\,\mathrm{d}V=\oiint_S \varphi\,\mathrm{d}\vec{S}$
「高斯定理 $\vec{A}\to\vec{A}\times\vec{k}$」旋度体积分 $\iiint_V \nabla\times\vec{A}\,\mathrm{d}V=\oiint_S \mathrm{d}\vec{S}\times\vec{A}$
「斯托克斯定理 $\vec{A}\to\varphi\vec{k}$」梯度线积分 $\iint_S \mathrm{d}\vec{S}\times(\nabla\varphi)=\oint_L \varphi\,\mathrm{d}\vec{l}$

(φ,ψ 在有界的 V 中有连续二阶偏导, 在 V 的边界 S 上有连续一阶偏导)
「高斯定理 $\vec{A}\to\psi\nabla\varphi$」第一标量格林定理 $\oiint_S \psi\nabla\varphi\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\iiint_V(\nabla\psi\cdot\nabla\varphi+\psi\nabla^2\varphi)\,\mathrm{d}V$ (亦可写成 $\nabla\cdot(\psi\nabla\varphi)$)
$\to$ 第二标量格林定理 $\oiint_S(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n})\,\mathrm{d}S=\iiint_V(\psi\nabla^2\varphi-\varphi\nabla^2\psi)\,\mathrm{d}V$ ($\nabla\varphi\cdot\vec{e_n}\,\mathrm{d}S=\frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}S$, n 为外法线向)
矢量格林定理 $\oiint_S(\vec{A}\times\nabla\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\iiint_V[(\nabla\times\vec{A})\cdot(\nabla\times\vec{B})-\vec{A}\cdot\nabla\times\nabla\times\vec{B}]\,\mathrm{d}V$
$\to \oiint_S(\vec{A}\times\nabla\times\vec{B}-\vec{B}\times\nabla\times\vec{A})\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\iiint_V(\vec{B}\cdot\nabla\times\nabla\times\vec{A}-\vec{A}\cdot\nabla\times\nabla\times\vec{B})\,\mathrm{d}V$
函数和另一个函数导数乘积的积分可以用 分部积分
「$\nabla\cdot(\varphi\vec{A})=\varphi(\nabla\cdot\vec{A})+\vec{A}\cdot(\nabla\varphi)$」$\iiint_V \varphi(\nabla\cdot\vec{A})\,\mathrm{d}V=\oiint_S \varphi\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}-\iiint_V \vec{A}\cdot(\nabla\varphi)\,\mathrm{d}V$
常用 $\iint_S \varphi(\nabla\times\vec{A})\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\iint_S[\vec{A}\times(\nabla\varphi)]\cdot\vec{S}+\oint_L \varphi\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$
$\iiint_V \vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A})\,\mathrm{d}V=\iiint_V \vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B})\,\mathrm{d}V+\oiint_S(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{S}$

指标表示

suffix notation 指标表示 $\vec{A}=\sum_i a_i\vec{e_i}$ summation convention 求和约定 (爱因斯坦) 某项中有指标变量成对出现, 表示对该指标的所有可能值求和, 省略 $\sum$ 号 (物理惯例 i,j 表示求和 3 个, μ,ν 表示求和 4 个)
dummy index 哑指标 作和的指标对, 可替换为其它相同取值范围的字母 free index 自由指标 不作和的指标, 要替换必须全部替换 **例** 证明 $\mathrm{tr}(AB)=A_{jk}B_{kj}\xlongequal{\text{换符号}}A_{kj}B_{jk}\xlongequal{\text{标量可换序}}B_{jk}A_{kj}=\mathrm{tr}(BA)$
内积的指标表示 $\vec{A}\cdot\vec{B}=a_ib_i=\delta_{ij}a_ib_j$ **注** 哑指标不能重复, 属于不同内积的要改用不同指标符号区分
例 $u_i+a_jb_jc_i=a_ja_jb_kc_ka_i$ 表示 $\vec{U}+(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}=|A|^2(\vec{B}\cdot\vec{C})\vec{A}$
全微分 $(\mathrm{d}\varphi)_i=\mathrm{d}x_j\,\partial_j\varphi_i$ 梯度 $(\nabla\varphi)_i=\partial_i$ **例** $(\nabla r)_i=\partial_i\sqrt{x_jx_j}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_jx_j}}\partial_i(x_jx_j)=\dfrac{1}{2r}2x_j\,\partial_ix_j=\dfrac{1}{r}x_j\delta_{ij}=\dfrac{x_i}{r}$
散度 $\nabla\cdot\vec{A}=\partial_ia_i$ **例** $\nabla\cdot\vec{r}=\partial_ix_i=\delta_{ii}=3$ 拉普拉斯 $\nabla^2\varphi=\partial_i^2\varphi$ 散度的梯度 $[\nabla(\nabla\cdot\vec{A})]_i=\partial_i\,\partial_ja_j$

符号

Kronecker symbol
克罗内克符号 $\delta_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ (行 $i=1,2,3$ 列 $j=1,2,3$)
substitution tensor
性质 $\delta_{ij}=\delta_{ji}$, $\delta_{ii}=3$, $\delta_{ij}a_i=a_j$, $\delta_{ij}a_j=a_i$ (故又称 替换张量), $\delta_{ij}\delta_{jk}=\delta_{ik}$
Levi-Civita symbol
列维－奇维塔符号 $\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}0 & (\text{有相同})\\ 1 & (\text{偶排列})\\ -1 & (\text{奇排列})\end{cases}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}_{i=1}\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}_{i=2}\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}_{i=3}$ (行 j 列 k)
alternating tensor
(又称 交错张量) **性质** $\varepsilon_{ijk}=\varepsilon_{jki}=\varepsilon_{kij}=-\varepsilon_{jik}$, $\varepsilon_{iik}=0$, $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}=$所有项平方和$=6$
矢积指标表示 $(\vec{A}\times\vec{B})_i=\varepsilon_{ijk}a_jb_k$ 三重积 $[\vec{A},\vec{B},\vec{C}]_i=a_i(\vec{B}\times\vec{C})_i=\varepsilon_{ijk}a_ib_jc_k$
旋度 $(\nabla\times\vec{A})_i=\varepsilon_{ijk}\,\partial_ja_k$ **例** $(\nabla\times\vec{r})_i=\varepsilon_{ijk}\,\partial_jx_k=\varepsilon_{ijk}\delta_{jk}=0$ **例** 证拉格朗日恒等式 $(\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}))_i=\varepsilon_{ijk}a_j(\vec{B}\times\vec{C})_k=\varepsilon_{ijk}a_j\varepsilon_{klm}b_lc_m=(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})a_jb_lc_m=a_mb_ic_m-a_jb_jc_i=b_i(\vec{A}\cdot\vec{C})_i-c_i(\vec{A}\cdot\vec{B})_i$
广义列奇符号 $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta\ldots}$, 有相同 $=0$, 偶排列 $=1$, 奇排列 $=-1$
例 2 阶 $\varepsilon_{ij}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$, $\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn}=\begin{vmatrix}\delta_{im}&\delta_{in}\\\delta_{jm}&\delta_{jn}\end{vmatrix}\to\varepsilon_{ij}\varepsilon_{in}=\delta_{jn}\to\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}=3$ (4 阶见〈伪欧〉)
广义克罗内克符号 $\delta^{ijk}_{lmn}=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}=\begin{vmatrix}\delta_{il}&\delta_{im}&\delta_{in}\\\delta_{jl}&\delta_{jm}&\delta_{jn}\\\delta_{kl}&\delta_{km}&\delta_{kn}\end{vmatrix}$ 当 i,j,k 和 l,m,n 都奇排列或偶排列时 $=1$ 一奇一偶时 $=-1$, 其它非序排列 $=0$
(6 阶张量)
「缩并」$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn}=\delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{km}\equiv\delta^{jk}_{mn}\to\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn}=2\delta_{kn}\to\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}=3!$

并矢

dyadic
并矢 两矢量并列 (省略张量积 $\otimes$ 符号) $\vec{A}\vec{B}=a_ib_j\vec{e_i}\vec{e_j}$, 其中 $\vec{e_i}\vec{e_j}$ 称为 **并矢基元** (共 9 个)
代表对矢量的线性映射 $\vec{A}\vec{B}\cdot\vec{r}=\vec{A}(\vec{B}\cdot\vec{r})$, $\vec{r}\cdot\vec{A}\vec{B}=(\vec{r}\cdot\vec{A})\vec{B}$ (只作用于最近邻) **例** $\vec{e_x}\cdot\vec{A}\vec{B}\cdot\vec{e_y}=a_xb_y$
性质 并矢运算以及数乘, 满足结合律, 分配律, $\vec{A}\vec{B}\neq\vec{B}\vec{A}$ **定义** 并矢的转置 $(\vec{A}\vec{B})^{\mathsf{T}}=\vec{B}\vec{A}$
单位并矢 $\overleftrightarrow{I}=\delta_{ij}\vec{e_i}\vec{e_j}$ **性质** $\overleftrightarrow{I}\cdot\vec{A}=\vec{A}\cdot\overleftrightarrow{I}=\vec{A}$, $\overleftrightarrow{I}\cdot\overleftrightarrow{T}=\overleftrightarrow{T}\cdot\overleftrightarrow{I}=\overleftrightarrow{T}$
二阶张量 ① 张量的代数定义 $\overleftrightarrow{T}=T_{kl}\vec{e_k}\vec{e_l}=T'_{ij}\vec{e_i}'\vec{e_j}'$ $\Leftrightarrow$ ② 分析定义: 分量按 $T'_{ij}=R_{ik}R_{jl}T_{kl}$ 变换
$\Leftrightarrow$ ③ 多重线性函数定义 $f:(\vec{A},\vec{B})\mapsto y\in\mathbb{R}$, $f=T_{ij}a_ib_j$ 对每个变量均线性, 则其系数构成张量
triadics
三并矢 $\vec{A}\vec{B}\vec{C}=a_ib_jc_k\vec{e_i}\vec{e_j}\vec{e_k}$ (共 27 个基元) **三阶张量** $\overleftrightarrow{T}=T_{ijk}\vec{e_i}\vec{e_j}\vec{e_k}$ 变换方式 $T'_{ijk}=R_{il}R_{jm}R_{kn}T_{lmn}$
性质 同阶的张量可以相加减, 结果仍为同阶张量, 有交换律 **张量相等** 所有分量都相等

并矢内积

张量内积 $\overleftrightarrow{T}\cdot\vec{A}=T_{ij}a_k\vec{e_i}(\vec{e_j}\cdot\vec{e_k})=T_{ij}a_j\vec{e_i}$, $\overleftrightarrow{T}\cdot\overleftrightarrow{S}=T_{ij}S_{jl}\vec{e_i}\vec{e_l}$, 不可交换
double dot
双点乘 $\overleftrightarrow{T}:\vec{A}\vec{B}=(\overleftrightarrow{T}\cdot\vec{A})\vec{B}\to\overleftrightarrow{T}:\overleftrightarrow{S}=T_{ij}S_{ji}$ **例** $\overleftrightarrow{I}:\overleftrightarrow{T}=T_{ii}=\mathrm{tr}\,\overleftrightarrow{T}$, $\overleftrightarrow{I}:\vec{A}\vec{B}=\vec{A}\cdot\vec{B}$, $\overleftrightarrow{I}:\nabla\nabla=\nabla^2$
矢积的并矢表示 $\vec{A}\times\vec{B}=\varepsilon:\vec{A}\vec{B}=\vec{A}\vec{B}:\varepsilon$ **例** $\overleftrightarrow{T}\times\vec{k}=-\overleftrightarrow{T}\cdot\varepsilon\cdot\vec{k}$, $\vec{k}\times\overleftrightarrow{T}=-\vec{k}\cdot\varepsilon\cdot\overleftrightarrow{T}$, $\overleftrightarrow{T}\times\overleftrightarrow{S}=-\overleftrightarrow{T}\cdot\varepsilon\cdot\overleftrightarrow{S}$
并矢 (即张量积) 运算的阶: 直接相加, 叉乘: 再减 1 阶, 点乘减 2 阶, 双点乘减 4 阶
例 $\vec{A}\vec{B}\cdot\vec{C}\vec{D}=(\vec{B}\cdot\vec{C})\vec{A}\vec{D}$, **串联** $\vec{A}\vec{B}\cdot\cdot\vec{C}\vec{D}=(\vec{B}\cdot\vec{C})(\vec{A}\cdot\vec{D})$ **并联** $\vec{A}\vec{B}:\vec{C}\vec{D}=(\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D})$

并矢的矢场微分 $\nabla\cdot(\vec{A}\vec{B})=(\nabla\cdot\vec{A})\vec{B}+(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$, $\nabla\times(\vec{A}\vec{B})=(\nabla\times\vec{A})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$
(若微分算符后没有括号, 则表示只对紧邻张量进行)
梯度升一阶, 散度降一阶, 旋度不变 **例** $\nabla\vec{r}=\overleftrightarrow{I}$, $\nabla\cdot(\varphi\overleftrightarrow{I})=\nabla\varphi$
$\nabla\cdot(\vec{A}r^2)=r^2\nabla\cdot\vec{A}+2\vec{r}\cdot\vec{A}$, $\nabla\cdot(\vec{A}\vec{r})=(\nabla\cdot\vec{A})\vec{r}+\vec{A}$, $\nabla\cdot(\vec{A}\vec{r}\vec{r})=(\nabla\cdot\vec{A})\vec{r}\vec{r}+\vec{A}\vec{r}+\vec{r}\vec{A}$

场量的泰勒展开 $f(\vec{r})=f(\vec{r_0})+\nabla f(\vec{r_0})\cdot(\vec{r}-\vec{r_0})+\frac{1}{2!}\nabla\nabla f(\vec{r_0}):(\vec{r}-\vec{r_0})(\vec{r}-\vec{r_0})+\dots$
例 $f(\vec{r}-\vec{r_0})=f(\vec{r})-\nabla f(\vec{r})\cdot\vec{r_0}+\frac{1}{2!}\nabla\nabla f(\vec{r}):\vec{r_0}\vec{r_0}+\dots$ $\dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r_0}|}=\dfrac{1}{r}+\dfrac{\vec{r_0}\cdot\vec{e_r}}{r^2}+\dfrac{\vec{r_0}\vec{r_0}:(3\vec{e_r}\vec{e_r}-\overleftrightarrow{I})}{2r^3}+\dots$
「 $\vec{e_r}\vec{e_r}:\overleftrightarrow{I}=\vec{e_r}\cdot\vec{e_r}=1$, $\vec{r_0}\vec{r_0}:\overleftrightarrow{I}=r_0^2$ 」 第三项分子亦可写成 $(3\vec{r_0}\vec{r_0}-r_0^2\overleftrightarrow{I}):\vec{e_r}\vec{e_r}$

张量

「引入矢量乃至高阶张量, 是为了使物理学定律写成与坐标系无关的形式」
tensor rank indices
张量 (里奇 1890) 多重线性量 (广义的数量) , r **阶**张量有 r 组**指标**, n 维空间的张量共有 n^r 个分量
例 标量为零阶张量, 矢量为一阶张量, 矩阵为二阶张量
不同基下像张量一样变换即为张量 **例** 证 $\partial_j a_i$ 是 2 阶张量 $\dfrac{\partial a_i'}{\partial x_j'}\overset{A\text{是矢量}}{=\!=\!=}R_{ik}\dfrac{\partial a_k}{\partial x_j'}=R_{ik}\dfrac{\partial a_k}{\partial x_l}\dfrac{\partial x_l}{\partial x_j'}=R_{ik}R_{jl}\dfrac{\partial a_k}{\partial x_l}$
quotient rule
商法则 若 $a_i=T_{ij}b_j$ 在任何坐标系对任意矢量 $\vec{B}$ 成立, 则 T_{ij} 是张量
「 $a_i'\overset{A\text{是矢量}}{=\!=\!=}R_{ik}a_k=R_{ik}T_{kj}b_j\overset{B\text{是矢量}}{=\!=\!=}R_{ik}T_{kj}R_{mj}b_j'\overset{\text{任何系}}{=\!=\!=}T'_{im}b_m'\to(T'_{im}-R_{ik}T_{kj}R_{mj})b_m'\overset{\text{任何}B}{=\!=\!=}0$ 」
可推广为: 若 m 阶张量 A 和 n 阶张量 B 通过 $(m+n)$ 个指标的量 T 线性联系, 则 T 是 $(m+n)$ 阶张量
isotropic tensor
各向同性张量 其分量在所有坐标系都不变 **例** $\delta'_{ij}=R_{ik}R_{jm}\delta_{km}=R_{ik}R_{jk}=\delta_{ij}$, 而 δ 的确在任何坐标系定义都一样, 故 δ 是 (2 阶对称) 张量, 同理可证 $\varepsilon'_{ijk}=\varepsilon_{ijk}$ 是 (3 阶反对称赝) 张量 **定理** 1 阶各向同性只有零矢量, 2 阶都是 δ 的倍数, 3 阶都是 ε 的倍数, 4 阶各向同性张量可表示成 $T_{ijkl}=\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu\delta_{ik}\delta_{jl}+\nu\delta_{il}\delta_{jk}$
symmetric tensor
对称张量 $T_{ij}=T_{ji}$, 一般为 6 个独立分量 (主轴坐标系下剩 3 个, 即 **主值**) (对 n 维有 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 个)
性质 $\varepsilon_{ijk}T_{jk}=0$ 「 $0=\varepsilon_{mni}\varepsilon_{ijk}T_{jk}=(\delta_{mj}\delta_{nk}-\delta_{mk}\delta_{nj})T_{jk}=T_{mn}-T_{nm}$ 」

张量的 对称化 对选中指标的所有排列取算数平均 例 $T_{(ij)k(l)}=\frac{1}{3!}(T_{ijkl}+T_{jlki}+T_{likj}+T_{ilkj}+T_{ljki}+T_{jikl})$
若已对称则不变 $T_{(ij)}=T_{ij}$，若做对称化的指标是哑标则有 传染性 $T^{(ij)}F_{ij}=T^{(ij)}F_{(ij)}$

antisymmetric tensor
反对称张量 $T_{ij}=-T_{ji}$，3 个独立分量 (对于 n 维有 $\frac{1}{2}(n-1)n$ 个) 性质 $\mathrm{tr}\,(T)=0$

例 刚体的角速度张量 $\vec{\omega}=\begin{bmatrix}0 & \omega_z & -\omega_y\\ -\omega_z & 0 & \omega_x\\ \omega_y & -\omega_x & 0\end{bmatrix}=*\vec{\omega}$ 〈星算符〉

张量的 反对称化 同理, 但奇排列变减号 例 $T_{[ij]k[l]}=\frac{1}{3!}(T_{ijkl}+T_{jlki}+T_{likj}-T_{ilkj}-T_{ljki}-T_{jikl})$
记 T 的 全反对称化张量 为 $[T]=\frac{1}{p!}\delta^{j\cdots}_{i\cdots}T_{j\dots}=\frac{1}{p!}\sum\pm T_{j\dots}$，偶排列为加, 奇排列为减, p 为选中的指标个数
性质 [] 对加法和数乘有线性性, 对张量积有结合律

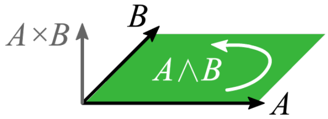
定理 任何张量可表示成对称和反对称之和 $T_{ij}=\frac{1}{2}(T_{ij}+T_{ji})+\frac{1}{2}(T_{ij}-T_{ji})=T_{(ij)}+T_{[ij]}$ (3 指标无此公式)
性质 坐标变换不改变对称性 (混合张量除外)「已知 $T_{ij}=T_{ji}$ 则 $T'_{ij}=R_{ik}R_{jm}T_{km}=R_{jm}R_{ik}T_{mk}=T'_{ji}$」

外积

V^n 中的 p 阶张量, 构成线性空间 V^n_p，其维数为 n^p，V^n 中的 p 阶反对称张量, 称为 p 次外形式, 简称
p-form
p 形式 $[T]\in V^n_{[p]}$，子空间 $V^n_{[p]}$ 称为 外形式空间，维数为 C^p_n，$V^n_{[0]}=\mathbb{R}$, $V^n_{[p>n]}=\{0\}$

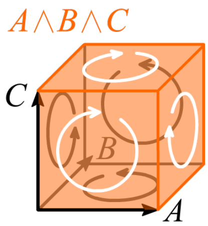
exterior / wedge product
设 $T\in V^n_p$, $F\in V^n_q$，定义 外积 / 楔积 $T\wedge F=\dfrac{(p+q)!}{p!q!}[T\otimes F]\in V^n_{[p+q]}$，分量形式 $(T\wedge F)_{i\dots j\dots}=\dfrac{(p+q)!}{p!q!}T_{[i\dots}F_{j\dots]}$
(若 $p+q>n$ 则 $T\wedge F=0$)

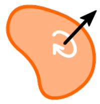
Grassmann
V^n 上有 $n+1$ 个 $V^n_{[p]}$，做直和, $\{\bigoplus_{p=0}^n V^n_{[p]},+,\wedge\}$ 构成 格拉斯曼代数 (1844)



性质 $\varphi\wedge T=\varphi T$，线性性, 结合律, 分配律, 斜交换律 $T\wedge F=(-1)^{pq}F\wedge T$

例 两矢量外积 $\vec{A}\wedge\vec{B}=\dfrac{2!}{1!1!}a_{[i}b_{j]}=(a_ib_j-a_jb_i)\,\vec{e_i}\wedge\vec{e_j}=\vec{A}\vec{B}-\vec{B}\vec{A}=-\vec{B}\wedge\vec{A}$
$\rightarrow$ $\vec{A}\wedge\vec{A}=0$ 定理 线性相关 $\Leftrightarrow$ 外积为零
几何意义: $\vec{A}\wedge\vec{B}=$ 有向面积，$\vec{A}\wedge\vec{B}\wedge\vec{C}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}\vec{e_1}\wedge\vec{e_2}\wedge\vec{e_3}$ 为有向体积





星算符

Hodge duality / star operator
霍奇对偶 / 星算符 $*:V^n_{[p]}\to V^n_{[n-p]}$ (维数相同哦)，$T\mapsto *T\equiv\frac{1}{p!}\sqrt{|g|}\,\delta^{i_1\dots i_n}_{1\dots n}T_{i_1\dots i_n}$ $(0\leqslant p\leqslant n)$
性质 (对加法和数乘) 线性性, 对偶性 $**T=(-1)^{p(n-p)}T$
例 E^3 中有 4 种对偶: $*\varphi=\varphi\,\vec{e_1}\wedge\vec{e_2}\wedge\vec{e_3}$，$*(\sum a_i\,\vec{e_i})=\sum a_1\,\vec{e_2}\wedge\vec{e_3}$，$*(\sum T_{12}\,\vec{e_1}\wedge\vec{e_2})=\sum T_{12}\,\vec{e_3}$
($\sum$ 表示指标轮换, 求和 3 项) $*(\varphi\,\vec{e_1}\wedge\vec{e_2}\wedge\vec{e_3})=\varphi$ 推论 $\vec{A}\times\vec{B}=*(\vec{A}\wedge\vec{B})$ $\rightarrow$ E^3 中外积和矢积同构
(V^n 中, $(n-1)$ 个矢量外积, 得 1 个和它们都垂直矢量的矢量, 故称外积为矢积的推广)
〈斜系〉 公式 $*1=\sqrt{g}\,e^1\wedge\cdots\wedge e^n=\frac{1}{\sqrt{g}}\,e_1\wedge\cdots\wedge e_n$
例 在 E^2 中 $*\vec{e_x}=\vec{e_y}$, $*\vec{e_y}=-\vec{e_x}$, $*1=\vec{e_x}\wedge\vec{e_y}$，在二维闵氏空间中 $*e_t=-e_x$, $*e_x=-e_t$, $*1=e_t\wedge e_x$

微分形式

将 p 次外形式中的基矢 $\vec{e_i}$ 换成分量的微分 $\mathrm{d}x_i$，称为 p 次 **外微分形式** $\omega=\sum f\,\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_p\in\Lambda_p$

构造方法：从 n 个 $\mathrm{d}x$ 中选 p 个外积，这 C_n^p 种外积设上系数（f,φ,a_x,a_y,a_z 均为坐标的函数）作和

p	$n=1$	$n=2$	$n=3$	物理意义
0	$f(x)$	$f(x,y)$	$f(x,y,z)$	标量场
1	$\varphi\,\mathrm{d}x$	$a_x\,\mathrm{d}x+a_y\,\mathrm{d}y$	$a_x\,\mathrm{d}x+a_y\,\mathrm{d}y+a_z\,\mathrm{d}z$	做功 $\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$
2		$\varphi\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$	$a_x\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+a_y\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+a_z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$	通量 $\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$
3			$\varphi\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$	质量 $\rho\,\mathrm{d}V$

微分形式的外积 **例** $(1\wedge1\to2)$

$$(a_x\,\mathrm{d}x+a_y\,\mathrm{d}y+a_z\,\mathrm{d}z)\wedge(b_x\,\mathrm{d}x+b_y\,\mathrm{d}y+b_z\,\mathrm{d}z)=\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

$(1\wedge2\to3$，超过 3 次则外积为零)

$$(a_x\,\mathrm{d}x+a_y\,\mathrm{d}y+a_z\,\mathrm{d}z)\wedge(b_x\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+b_y\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+b_z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)=(a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$$

例 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=(\frac{\partial x}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial x}{\partial v}\mathrm{d}v)\wedge(\frac{\partial y}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial y}{\partial v}\mathrm{d}v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v$（引入外积后可自然包含雅可比的 $\pm$）

外微分

exterior derivative

外微分 系数（对所有的基）做全微分，和原来的基外积 $\mathrm{d}\omega=\sum\left(\sum^n\frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x^i\right)\wedge\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_p\in\Lambda_{p+1}$

例 $\omega=a_x\,\mathrm{d}x+a_y\,\mathrm{d}y$，则 $\mathrm{d}\omega=\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial a_x}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\wedge\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial a_y}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\wedge\mathrm{d}y=\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$

分量形式 $(\mathrm{d}\omega)_{ij\ldots}=(p+1)\,\partial_{[i}\omega_{j\ldots]}$

例 0 次形式的外微分就是普通微分（梯度）$(\mathrm{d}\varphi)_i=\partial_i\varphi$

性质 线性性，**斜微分**（莱布尼茨法则）

$\omega_p\in\Lambda_p$，$\mathrm{d}(\omega_p\wedge\omega_q)=(\mathrm{d}\omega_p)\wedge\omega_q+(-1)^p\omega_p\wedge(\mathrm{d}\omega_q)$

庞加莱引理 $\mathrm{d}\,\mathrm{d}\omega=0$「讨论单项式 $\omega=f\,\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_p$，则 $\mathrm{d}\,\mathrm{d}\omega=\mathrm{d}[(\sum f_i\,\mathrm{d}x_i)\wedge\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_p]=\sum f_{ij}\,\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_p$，$i=j$ 的项为零，$i\neq j$ 的项成对出现，因偏导可交换 $f_{ij}=f_{ji}$ 」

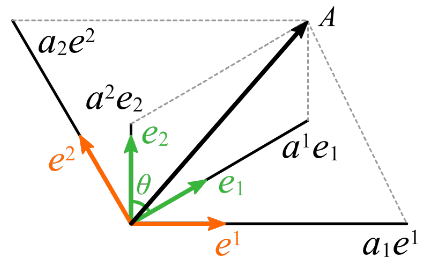
$p+1$	$n=1$	$n=2$
1	$f'\,\mathrm{d}x$	$\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$
2	0	$\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$
3		0

积分公式

generalized Stokes' theorem

广义斯托克斯定理 $\int_G\mathrm{d}\omega=\int_{\partial G}\omega$（高维区域积分等于低一次形式在区域边界上的积分）

n	p	$\int_{(p+1)\text{维}}(p+1)\text{形式}=\oint_{(p)\text{维}}(p)\text{形式}$	名称
1	0	$\int_a^b f'\,\mathrm{d}x=f(b)-f(a)$	微积分基本定理
3	0	$\int_a^b(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathrm{d}z)=\varphi(b)-\varphi(a)$	梯度定理
2	1	$\iint_S(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$	格林公式
3	1	$\iint_S(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$	斯托克斯定理
3	2	$\iiint_V(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\oiint_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$	高斯定理



oblique
斜角坐标系 设有非正交非归一基 g_1,g_2，夹角为 θ，$\vec A=a^1g_1+a^2g_2$
a^i 称为 $\vec A$ 的 **逆变分量** (投影 $\neq$ 分量)，g_i 称为 **协变基矢**
引入另一组 **对偶基** $g^2\perp g_1$, $g^1\perp g_2$ (详见〈高代〉)，有 $\vec A=a_1g^1+a_2g^2$
a_i 称为 $\vec A$ 的 **协变分量**，g^i 称为 **逆变基矢**，取其长度 $|g^i|=\dfrac{1}{|g_i|\sin\theta}$
从而满足 **对偶条件** $g^i\cdot g_j=\delta^i_j$ → **内积** 用逆变乘协变来表示较简便 $\vec A\cdot\vec B=(a^ig_i)(b_jg^j)=a^ib_j\delta^j_i=a^ib_i$

对于三维斜角系, 取三个斜交的 g_i，为右手系时混合积为正, 记 $[g_1,g_2,g_3]=\sqrt g$
对偶基矢 的构造方式为 $g^1=\frac{1}{\sqrt g}(g_2\times g_3)$，有 $g^1\cdot g_1=1$，从而满足对偶条件
推论 $[g^1,g^2,g^3]=\frac{1}{\sqrt g}$ 故也为右手系, $g_1=\sqrt g(g^2\times g^3)$

度规张量 $g_{ij}\equiv g_i\cdot g_j$, $g^{ij}\equiv g^i\cdot g^j$ **性质** 均为对称矩阵,「$\delta^i_j=g^{ik}g_k\cdot g_j=g^{ik}g_{kj}$」互为逆矩阵, $|g_{ij}|=g$
→ **基矢分解** $g^i=g^{ij}g_j$, $g_i=g_{ij}g^j$ **指标升降** $a^i=\vec A\cdot g^i=(a_jg^j)\cdot g^i=g^{ij}a_j$, $a_i=g_{ij}a^j$
从而 **内积** 可表示为 $\vec A\cdot\vec B=a^ib_i=a_ib^i=g^{ij}a_ib_j=g_{ij}a^ib^j$
(直角系有 **自对偶性** $a^i=a_i$「$g_{ij}=\delta_{ij}$」, 故此前未区分逆变和协变, 指标均写在下方)

斜系转动变换

g_i 和直角系的转换关系为 $g_i=\sum^{xyz}\frac{\partial x}{\partial u^i}e_x$「$g_i\cdot(\nabla u^j)=\frac{\partial x^k}{\partial u^i}\frac{\partial u^j}{\partial x^k}=\delta^j_i$」**推论** $g^i=\nabla u^i$
对于曲线系, $\mathrm d\vec r=g_i\,\mathrm du^i=g^i\,\mathrm du_i$，$g_i=\frac{\partial\vec r}{\partial u^i}$，基矢变换方式为 $g_{i'}=\frac{\partial\vec r}{\partial u^{i'}}=\frac{\partial\vec r}{\partial u^j}\frac{\partial u^j}{\partial u^{i'}}=J^j_{i'}g_j$
雅可比矩阵 $J^j_{i'}\equiv\frac{\partial u^j}{\partial u^{i'}}$ (移项, 撇号在一起为协变: (新)'∂u'$=\partial u$(旧) 否则为逆变: (新)'$\partial u=\partial u$'(旧))
「$\vec A=a^jg_j=a^{i'}g_{i'}=a^{i'}J^j_{i'}g_j$」某一分量的变换方式和基矢相反 $a^{i'}=J^{i'}_ja^j$，逆变基矢同理 $g^{i'}=J^{i'}_jg^j$
例 分量 u^i 的全微分 $\mathrm du^i$ 是逆变矢量「$\mathrm du^{i'}=\frac{\partial u^{i'}}{\partial u^j}\mathrm du^j$」
梯度 $\partial_i\varphi$ 是协变矢量「$\frac{\partial\varphi}{\partial u^{i'}}=\frac{\partial\varphi}{\partial u^j}\frac{\partial u^j}{\partial u^{i'}}$」亦可用商法则来证「$\mathrm d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial u^i}\mathrm du^i$，而 $\mathrm du^i$ 是任意逆变矢量」
度规张量的变换方式为 $(g')_{ij}\equiv g_{i'j'}=g_{i'}\cdot g_{j'}=J^k_{i'}g_k\cdot J^l_{j'}g_l=J^k_{i'}J^l_{j'}g_{kl}$，同理可证 $g_{ij}=J^{k'}_iJ^{l'}_jg_{k'l'}$

混合张量

张量总可用并矢基表示 $T=T^i{}_j{}^k e^i e_j e^k$ (并矢不可交换, 故每个指标需明确占一列以区分前后 $T^i{}_j\neq T_i{}^j$)
逆变张量 $T^{i'j'}=J^{i'}_kJ^{j'}_lT^{kl}$ **协变张量** $T_{i'j'}=J^k_{i'}J^l_{j'}T_{kl}$ **混合张量** $T^{i'}{}_{j'}=J^{i'}_kJ^l_{j'}T^k{}_l$ $T_{i'}{}^{j'}=J^l_{i'}J^{j'}_kT_l{}^k$
例 克罗内克符号是混合张量 $\delta^{i'}_{j'}=J^{i'}_kJ^l_{j'}\delta^k_l=J^{i'}_kJ^k_{j'}=\frac{\partial u^{i'}}{\partial u^{j'}}=\delta^i_j$

高阶张量 依此类推 **推论** 若某个坐标系下, 张量的所有分量在某点为零, 则任何坐标系下该点都恒为零
张量的 **指标升降** 不可变前后顺序 **例** $T_{ij}=T_i{}^lg_{lj}=g_{ik}T^k{}_j=g_{ik}T^{kl}g_{lj}$
交换指标的前后顺序 (不改变上下) 称为张量的 **转置**，对不同指标, 转置的结果不同
→ **对称张量** 可以不区分前后顺序 (混合指标一般不定义对称性, 克罗内克符号是特例)
张量积 **例** $T\otimes F=U\Leftrightarrow T^{ij}F_k{}^l=U^{ij}{}_k{}^l$，一般不可交换 **张量内积** **例** $T^{ij}{}_kF^k{}_{jl}=U^i{}_l$
contraction
缩并 同一张量中一上一下指标相同, 按求和约定应视为内积并消掉「可以证明结果是降两阶的张量」
例 $T^{ilj}{}_{kl}=F^{ij}{}_k$，顺序不同张量不同 $T^{ilj}{}_{kl}\neq T^{ijl}{}_{kl}$
注 同为上标或下标不可缩并或做内积, 因为求和结果不一定是张量
Eddington
爱丁顿张量 $\varepsilon_{ijk}\equiv[g_i,g_j,g_k]=\pm\sqrt g,0$，$\varepsilon^{ijk}=\pm1/\sqrt g,0$ (偶/奇排列规则同列奇符号)
「$\varepsilon_i{}^{jk}=g_{il}\varepsilon^{ljk}$」$\varepsilon_i{}^{jk}=\pm g_{ii}/\sqrt g,0$，另有 $=\pm g_{li}/\sqrt g$ (当 $i=j$ 或 $j=k$，且 ljk 是偶/奇排列时)

伪欧空间

不要求内积正定 → 伪欧氏空间 (详见〈高代〉) 性质 g_{ij} 是不定对称矩阵, 存在基底使 $g_{ij}=\pm\delta_{ij}$

Minkowski Space

号差 三个维度同号, 一个维度异号的四维伪欧空间称为 闵氏空间 (以下均以闵氏空间为例)

(伪欧必须区分逆变协变) 仿射 (平直) 闵氏空间的 度规 记作 $\eta_{\mu\nu}=\eta^{\mu\nu}=\mathrm{diag}\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & -1\end{bmatrix}$〈狭相〉

内积 $a^\mu b_\mu=a_\mu b^\mu=\eta_{\mu\nu}a^\mu b^\nu=\eta^{\mu\nu}a_\mu b_\nu=a^0b^0-\vec{a}\cdot\vec{b}$ (上标指第 0 分量) 例 $\eta_\mu^\rho=\eta_{\mu\nu}\eta^{\nu\rho}=\delta_\mu^\rho$

逆变坐标 $x^\mu=(ct,x,y,z)$ (列矢量) 协变坐标 $x_\mu=(ct,-x,-y,-z)$, $(\mathrm{d}s)^2=\eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu$

单位张量 (四维) $\delta_\nu^\mu x^\nu=x^\mu$, 迹 $\delta_\mu^\mu=4$ 性质 η,δ,ε 均为各向同性张量

Ricci tensor density

里奇符号 (实际上是张量密度 $\tilde{\varepsilon}$, 此处懒得区分) $\varepsilon^{0123}=+1$, $\varepsilon_{0123}=-1$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\tau\omega}=-\begin{vmatrix}\delta_\alpha^\mu & \delta_\beta^\mu & \delta_\tau^\mu & \delta_\omega^\mu\\ \delta_\alpha^\nu & \delta_\beta^\nu & \delta_\tau^\nu & \delta_\omega^\nu\\ \delta_\alpha^\rho & \delta_\beta^\rho & \delta_\tau^\rho & \delta_\omega^\rho\\ \delta_\alpha^\sigma & \delta_\beta^\sigma & \delta_\tau^\sigma & \delta_\omega^\sigma\end{vmatrix}$$

公式 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\tau\omega}=-2(\delta_\tau^\rho\delta_\omega^\sigma-\delta_\omega^\rho\delta_\tau^\sigma)$, $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\tau}=-6\delta_\tau^\sigma$, $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}=-4!$

若 $F^{\mu\nu}$ 是反对称张量, 则它的 对偶 是赝张量 $*F^{\mu\nu}=\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ (几何上表示垂直的面) 内积 $F^{\mu\nu}*F_{\mu\nu}$ 是赝标量, 矢量的对偶是三阶反对称赝张量 $*F^\mu=\frac{1}{3!}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\nu\rho\sigma}$ (几何上表示法向量) , $*F^{\mu\nu\rho}=\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_\sigma$

推动变换

boost

伪欧空间的保内积变换为 推动 / 伪转动 (〈狭相〉中称为 洛伦兹变换 LT) (μ 行 ν 列)

$$\Lambda_\nu^\mu=\begin{bmatrix}\gamma & -\beta\gamma & 0 & 0\\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cosh\xi & -\sinh\xi & 0 & 0\\ -\sinh\xi & \cosh\xi & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

公式 $\Lambda_\nu^\mu\Lambda_\rho^\nu=\delta_\rho^\mu$ → $\Lambda_\nu^\mu\Lambda_\mu^\nu=4$ 注 $\Lambda_\nu{}^\mu=(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu$

标量 不随坐标系的推动变换 例 内积, 固有量, 电量, 4 体积元 d^4x 等

4 矢量 分量变换方式为: 矩阵写法 $\vec{x}\,'=\overleftrightarrow{\Lambda}\vec{x}$, 指标表示 $x^{\mu'}=\Lambda_\nu^{\mu'}x^\nu$, 对偶的变换方式相反 $x_{\mu'}=\Lambda_{\mu'}^\nu x_\nu$

「 $V=V^\nu e_\nu=V^{\mu'}e_{\mu'}=\Lambda_\nu^{\mu'}V^\nu e_{\mu'}$ → $e_\nu=\Lambda_\nu^{\mu'}e_{\mu'}$ 」 基矢和分量的变换方式相反 $e_{\mu'}=\Lambda_{\mu'}^\nu e_\nu$, $e^{\mu'}=\Lambda_\nu^{\mu'}e^\nu$

张量 分量变换方式为: 矩阵写法 (不能换序) $\eta=\Lambda^\mathsf{T}\eta\Lambda$, 指标表示 $(\eta')^{\mu\nu}=\Lambda_\rho^\mu\Lambda_\sigma^\nu\eta^{\rho\sigma}$

「间隔不变 $(\Delta s)^2=(\Delta x)^\mathsf{T}\eta(\Delta x)=(\Delta x')^\mathsf{T}\eta(\Delta x')=(\Delta x)^\mathsf{T}\Lambda^\mathsf{T}\eta\Lambda(\Delta x)$, 狭相中称为相对性原理」

伪欧中的微分

contragradient cogradient

逆变导数 $\partial^\mu\equiv\sum\frac{\partial}{\partial x_\mu}=(\frac{1}{c}\partial_t,-\nabla)$ 协变导数 $\partial_\mu\equiv\sum\frac{\partial}{\partial x^\mu}=(\frac{1}{c}\partial_t,\nabla)$ 「 $\frac{\partial}{\partial x^{\mu'}}=\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}=\Lambda_{\mu'}^\nu\frac{\partial}{\partial x^\nu}$ 」

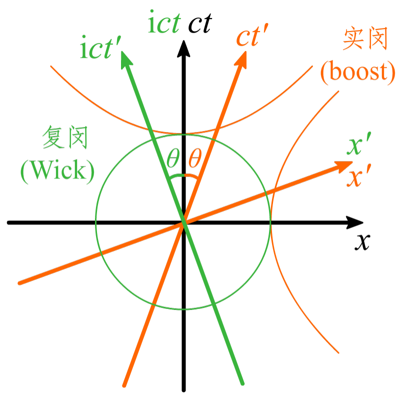
例 标量的 4 梯度是 4 矢量 $\partial_\mu\phi=(\frac{1}{c}\partial_t\phi,\nabla\phi)$, 4 矢量的散度是标量 $\partial_\mu x^\nu=\delta_\mu^\nu$ → $\partial_\mu x^\mu=4$

性质 $\partial^\mu x^\nu=\eta^{\mu\nu}$, $\partial_\mu x_\nu=\eta_{\mu\nu}$, $\partial^\mu=\eta^{\mu\nu}\partial_\nu$, $\partial_\mu\partial_\nu=\partial_\nu\partial_\mu$ (是对称张量)

d'Alembert operator

达朗贝尔算符 $\Box^2=\partial^\mu\partial_\mu=\frac{1}{c^2}\partial_t^2-\nabla^2$ (或记作 $\Box$, 不推荐) (是标量算符) (东岸度规与此相反)

复欧空间



注 实伪欧空间可等效地表示成复真欧空间

例 复闵氏空间 取 $x_\mu=x^\mu=(\mathrm{i}ct,x,y,z)$ 亦可实现非正定内积

(此为泡利度规, 已弃用, 把 t 换成 $\mathrm{i}t$ 的 trick 仅限狭相, 不适用于广相)

「 $\cos\vartheta=\gamma$, $\sin\vartheta=\mathrm{i}\gamma\beta$, $\tan\vartheta=\mathrm{i}\beta=\mathrm{i}\tan\theta=\tanh(\mathrm{i}\theta)$ 」

Wick rotation

LT 表现为复闵空间的 维克转动 → LT 构成 $\mathbf{SO}(4)$ 群〈群论〉