群

· 为 $G\neq\varnothing$ 上的一个二元代数运算, 满足以下条件的 **代数结构** algebraic structure $(G,\cdot)$ 称为:

① 集合对于乘法是封闭的 closure $\to$ **群胚** groupoid (元素可以是任何东西, 特点: 无序性, 不重复, 不独立)

② 群胚的乘法满足结合律 associativity $(ab)c=a(bc)$ $\to$ **半群** semigroup (为了定义三个元素相乘) (除法, 减法不行)

③ 半群中存在 **单位元** identity e ($\forall a\in G,\ ae=ea=a$) $\to$ **幺半群 / 逆群** monoid **定理** 只有单位元是 **幂等元** idempotent $a^2=a$

④ 幺半群中所有元素存在 **逆元** inverse ($\forall a\in G,\ \exists a^{-1}\in G$ 使 $aa^{-1}=a^{-1}a=e$) $\to$ **群** group **定理** 单位元, 逆元唯一

(拉格朗日 1771 提出四次以上无求根公式, 只有①, 由阿贝尔 1824 用域证明, 伽罗瓦 1831 建立置换群论 (20 岁), 1832 死于决斗, 哈密顿 1843 四元数群, 定义到③, 若尔当 1870 著教材, 凯莱 1878 抽象群)

定理 $(a^{-1})^{-1}=a$ **穿脱原理** $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$ **定理** 方程 $ag=b$ 在 G 中有唯一解 $g=a^{-1}b$, $ga=b$ 有 $g=ba^{-1}$

例 不是群: $(\mathbb{N},+)$, $(\mathbb{N},\times)$, $(\mathbb{Z},\times)$, $(\{\vec{v}\},\cdot)$, 是群: $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C},+)$, $(\mathbb{R}-\{0\},\times)$, $(\mathbb{C}-\{0\},\times)$

群中元素的个数称为群的 **阶** order $|G|$, 无限个元素 $\to$ **无限群** infinite group (克莱因 1879)

若群的乘法可交换 $ab=ba$ $\to$ **阿贝尔群 / 交换群** Abelian group / commutative group (克罗内克 1870)

一些数论

模 m **剩余类加群** $(\mathbb{Z}_m,+)$, $\mathbb{Z}_m=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\dots,\overline{m-1}\}$, $\overline{a}=\{x\in\mathbb{Z}|x\equiv a(\bmod m)\}$, 阿贝尔群

模 m **剩余类乘群 / 单位群** (欧拉 1761) $(U(m),\times)$, $U(m)=\{\overline{a}\in\mathbb{Z}_m|(a,m)=1\}$, 阿贝尔群

封闭性: a,b 和 m 互素, 则 ab 和 m 互质, 乘法有结合律, $\overline{1}$ 为单位元,

$(a,m)=1\to\exists\ x,y$ 使 $ax+my=1$, $(x,m)=1$, $\overline{ax}=\overline{ax}=\overline{ax+my}=\overline{1}$

例 $U(15)=\{1,2,4,7,8,11,13,14\}$, 除单位元外元素阶均为 4, $U(15)\cong U(3)\otimes U(5)$

定理 m 为素数时, $U(p)=\mathbb{Z}_p^*\equiv\{\overline{1},\overline{2},\dots,\overline{p-1}\}$

$|U(m)|=\varphi(m)$ **欧拉函数** $\varphi(m)$ 是 $\leqslant m$ 的与 m 互质的正整数数目

定理 设 $m=\prod p_i^{r_i}$, 则 $\varphi(m)=\prod(p_i^{r_i}-p_i^{r_i-1})=m\prod(1-p_i^{-1})$

n 次 **单位根群** $(U_n,\times)$, $U_n=\{\mathbf{e}^{\frac{2k\pi}{n}}|k=0,1,\dots,n-1\}$, 阿贝尔群 **例** $U_4=\{1,\mathbf{i},-1,-\mathbf{i}\}$

最大公约数 greatest common divisor (a,b) **最小公倍数** least common multiple $[a,b]$ **例** 甲子 60 是 10 天干和 12 地支的 lcm

性质 gcd 和 lcm 运算有结合律 **定理** $\mathrm{gcd}*\mathrm{lcm}=ab$

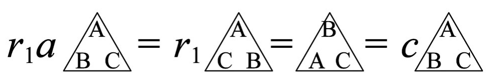
凯莱表

凯莱表 Cayley table 即乘法表, 单位元列最前, 左列乘上排 (上排先做) **性质** 凯莱表对称 $\Leftrightarrow$ 交换群

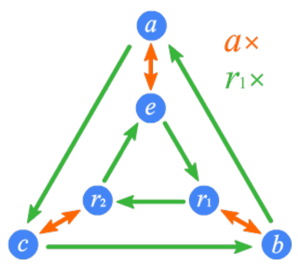
重排定理 $aG=G$, 凯莱表每一行 (列) 都是所有元素的重排 (数独的表不一定是群, 还需验证结合律)

凯莱表	e	r_1	r_2	a	b	c
e	e	r_1	r_2	a	b	c
r_1	r_1	r_2	e	c	a	b
r_2	r_2	e	r_1	b	c	a
a	a	b	c	e	r_1	r_2
b	b	c	a	r_2	e	r_1
c	c	a	b	r_1	r_2	e

D_3 例 正三角形不变操作, a 为绕 a 轴翻转, r_1 为逆时针转



凯莱图 Cayley graph 节点表示元素, 箭头表示生成元乘 (约定全部为左乘)



子群

subgroup

H 是群 G 的非空子集, 若 H 按 G 的运算也构成群, 则称为 子群 $H \leqslant G$

trivial subgroup　　proper subgroup

平凡子群 最小子群 $\{e\}$ 和最大子群 G , 除去 G 的子群称为 真子群 $H<G$

定理 H 的单位元就是 G 的单位元「消去律」

定理 $H \leqslant G \Leftrightarrow \forall a,b \in H, ab^{-1} \in H$ (把封闭 $ab \in H$ 有逆 $a^{-1} \in H$ 合为一个条件)「封闭有逆可推出单位元」

$\to$ 子群之交还是子群「$ab^{-1} \in H_1$, $ab^{-1} \in H_2$」 (之并不一定) (之积不一定, 需 $H_1H_2=H_2H_1$)

定义子集相乘 $AB=\{ab|a\in A,b\in B\}$, $A=\{a\}$ 时可记为 aB **性质** $|AB| \leqslant |A||B|$

定理 ① $(AB)C=A(BC)$ ② $aB=aC \to B=C$ ($AB=AC$ 未必 $B=C$)

③ 子群乘积幂等律 对于有限群 $H \leqslant G \Leftrightarrow H^2=H$ ④ 乘积定理 $A \leqslant G, B \leqslant G$, 则 $AB \leqslant G \Leftrightarrow AB=BA$

推论 $H \leqslant G$, 则对任意 $g \in G$, $gHg^{-1} \leqslant G$

陪集

(陪集是子群概念的延伸)

left coset　　right coset

$H \leqslant G$, $a \in G$, 则 aH 称为 H 的 左陪集, Ha 称为 右陪集 (左右陪集一一对应, 以下只写左陪集)

性质 ① $a \in H \Leftrightarrow aH=H \Leftrightarrow aH \leqslant G$「封闭性, 没单位元」② $|aH|=|H|$「$h \mapsto ah$ 是双射」

③ $(aH)\cap(bH)=\varnothing$「若有公共元 $g=ah_1=bh_2$, 推出 $aH=ah_1H=bH$」$\to$ 各陪集或完全相同或不相交

$\to$ 陪集中任意元素均可作 代表元

结论 群 G 的子群 H 的全体左陪集构成群 G 的一个分类, 各陪集等大不交

index

H 在 G 中不同陪集的个数称为 H 在 G 中的 指数 $[G:H]$

Lagrange theorem

拉格朗日定理 $|G|=|H|[G:H] \to |G/N|=[G:H]$ **推论** 子群的阶是母群的因子

推论 素数阶群必为循环群, 除 e 外所有元素都可作生成元, 无非平凡子群

$\to$ 费马小定理 素数 p 与整数 a 互质, 则 $a^{p-1} \equiv 1 (\bmod p)$「$\overline{a} \in \mathbb{Z}_p^*$, $(\overline{a})^{p-1}=\overline{1}$」

共轭类

relation

关系 对集合 G 中任意有序元素对 a,b, 总能确定是否满足条件 $\sim$, 则称 $\sim$ 是 G 中的一个二元关系

equivalence relation

等价关系 ① 反身性 $\forall a \in G, a \sim a$ ② 对称性 $a \sim b \to b \sim a$ ③ 传递性 $a \sim b, b \sim c \to a \sim c$ (2,3 不能推出 1)

conjugacy class

共轭 $\exists g \in G$, 使 $gag^{-1}=b$, 则 $a \sim b$, 易证共轭是一种等价关系 共轭类 g 取遍群元素,

性质 ① 类或全同或不交 ② 阿贝尔群每个元素自成一类 (讨论类没意思) ③ 单位元总是自成一类

④ 同一共轭类的元素有相同的阶 ⑤ 有限群的每个共轭类的元素个数是群阶数的因子

正规子群

normal subgroup / invariant subgroup

正规子群 / 不变子群 $N \trianglelefteq G$, 对 $\forall g \in G$ 都有 $gN=Ng$ (或 $gNg^{-1}=N$) $\Leftrightarrow$ 包含完整的类的子群

常用 $H \trianglelefteq G \Leftrightarrow \forall g \in G, h \in H$ 有 $ghg^{-1} \in H$ $\to$ 正规子群之交, 之积仍为正规子群

D_3 例 4 个子群: $\tilde{\mathbf{a}}=\{e,a\}$ 等 3 个, 正规子群 $\mathbf{d}_3=\{e,r_1,r_2\}$, $\mathbf{D}_3/\mathbf{d}_3=\{e,a\}$

定理 ① 平凡子群正规 ② $[G:H]=2$ 的 $H \trianglelefteq G$「$eH=He$, 另一个只能相等」③ 阿贝尔群的子群正规

注 子群可传递, 正规子群不一定

定理 $H \leqslant G, N \trianglelefteq G \to HN \leqslant G$ **定理** $H \trianglelefteq G, H \leqslant K \leqslant G \Rightarrow H \trianglelefteq K$ ($H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$ 未必 $H \trianglelefteq G$)

center

群 G 的 中心 $C(G)=\{g \in G|gx=xg, \forall x \in G\}$ **推论** $C(G) \trianglelefteq G$

centralizer
a 在群 G 的 中心化子 $C(a)=\{g\in G|ga=ag\}$ 推论 $C(a)\leqslant G$
normalizer
$H\leqslant G$, 正规化子 $N(H)=\{g\in G|gH=Hg\}$ 推论 $N(H)\leqslant G, H\trianglelefteq N(H)$
commutator
(符号和对易冲突, 仅此处用) 换位子 $[a,b]=a^{-1}b^{-1}ab$ 推论 $[G,G]\trianglelefteq G$, $G/[G,G]$ 是阿贝尔群

正规子群的陪集构成集合, 陪集的乘法 $aN\cdot bN=(ab)N$ (只有正规能保证左右乘无歧义) $\to$
quotient group
商群 $G/N=\{aN|a\in G\}$, a 称为 代表元 (从陪集中任选) , 单位元 N, 逆元 $a^{-1}N$
性质 阿贝尔群的商群仍阿贝尔 定理 $G/C(G)$ 是循环群, 则 G 是阿贝尔群
商群不一定和某个子群同构 (否则就没研究的意思了...)

simple group
若群 G $(\neq\{e\})$ 只有平凡的正规子群, 则称为 单群 (只有平凡子群 $\Leftrightarrow$ 素数阶循环群)
有限单群分类定理 所有有限单群已全部发现: 素阶循环群, 交错群 $\mathbf{A}_n\,(n>4)$, 李型单群, 26 个散在单群

循环群

(相当于谐振子的地位)
cyclic group
循环群 $\mathbf{C}_n=\{a^r|r\in\mathbb{Z}\}$, $a^n=e$, 均为阿贝尔群, 乘法 $a^ia^j=a^{(i+j)\bmod n}$, 逆元 $(a^i)^{-1}=a^{n-i}$
generator
由一个元素 a 生成的循环群 $\langle a\rangle=\{a^r|r\in\mathbb{Z}\}$, a 称为 生成元, 定义群元素 a 的阶 $|a|\equiv|\langle a\rangle|$
推导 $\forall m\in\mathbb{N}, a^m\neq e\to|a|=\infty$ (数学系常用另一种等价的: $\forall m,n\in\mathbb{Z}, a^m\neq a^n$, 可导出更多结论)
循环群结构定理 n 阶循环群同构于 $(\mathbb{Z}_n,+)$, 无限阶同构于 $(\mathbb{Z},+)$
性质 $|a^{-1}|=|a|$ 定理 循环群的子群仍为循环群 推论 对于有限群, $|a|$ 是 $|G|$ 的因子「因为是子群」

生成元组 $S=\{a_{1\sim r}\}$ 是群 G 的非空子集, 生成子群 $\langle S\rangle=\langle a_{1\sim r}\rangle$ 定理 $\langle S\rangle$ 是 G 中包含 S 的最小子群
(不唯一, 必存在, 对于有限群只能用排除法找最少数量) 群元素化简为生成元组可减少群表示工作量
定理 生成元至多需 $\operatorname{lb}|G|$ 个「增加一个额外元素, $|G|$ 至少要翻倍」
$\mathbf{D}_3$ 例 $\mathbf{D}_3$ 的生成元组: $\{a,b\}$ (不唯一) 例 $(\mathbb{Z},+)$ 的生成元组是 $\{1,-1\}$ (有的习惯是逆都省略不写)
定理 无限阶循环群仅有两个生成元 $\{a,a^{-1}\}$
定理 n 阶循环群恰有 $\varphi(n)$ 个生成元, a^r 是生成元 $\Leftrightarrow$ $(n,r)=1$
推论 偶数阶群必含有阶为 2 的元素

群同构

两个群 $a,b\in(G_1,\cdot)$ 和 $(G_2,*)$, 有映射 $f:G_1\to G_2$, 若映射 保乘 $f(a\cdot b)=f(a)*f(b)$, 则
homomorphism epimorphism isomorphism endomorphism automorphism
同态 $\stackrel{f}{\sim}$, f 为满射称为 满同态, 双射称为 同构 $\simeq$, 群 G 到自身的映射称为 自同态 , 自同构
恒等同构 $\forall g\mapsto g$ 零同构 $\forall g\mapsto e$ 自同构群 $\mathbf{Aut}(G)$, 所有自同构关于变换的乘法构成群
(凯莱表一样则同构) 例 $f(a)=2^a:(\mathbb{R},+)\cong(\mathbb{R}^+,\times)$ 定理 同构是等价关系
性质 同态保单位元, 保逆,$|f(a)|$ 整除 $|a|$, 同构保阶 $|f(a)|=|a|$, 同构群阶相等, 阿贝尔性相同
推论 G 是阿贝尔群 $\Leftrightarrow$ $f:g\mapsto g^{-1}$ 是同构映射
inner automorphism
可以证明 $f:g\mapsto aga^{-1}$ 是同构映射, 称为由 a 导出的 内自同构,
其集合构成 内自同构群 $\mathbf{Inn}(G)\trianglelefteq\mathbf{Aut}(G)$ 定理 $\mathbf{Inn}(G)\cong G/C(G)$

定理 素数阶群必为循环群 定理 阶数为两不同素数积的阿贝尔群都是循环群
给定阶数的不同构的群个数, 尚无通项公式, 见下表, 下标为其中阿贝尔群个数

低阶群的个数	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$
1~20 阶	1_1	1_1	1_1	$\boxed{2_2}$	1_1	2_1	1_1	$\boxed{5_3}$	2_2	2_1	1_1	$\boxed{5_2}$	1_1	2_1	1_1	$\boxed{14_5}$	1_1	5_2	1_1	5_2
21~40 阶	2_1	2_1	1_1	$\boxed{15_3}$	2_2	2_1	5_3	4_2	1_1	4_1	1_1	$\boxed{51_7}$	1_1	2_1	1_1	14_4	1_1	2_1	2_1	14_3
41~60 阶	1_1	6_1	1_1	4_2	2_2	2_1	1_1	$\boxed{52_5}$	2_2	5_2	1_1	5_2	1_1	15_3	2_1	13_3	2_1	2_1	1_1	13_2
61~80 阶	1_1	2_1	4_2	$\boxed{267_{11}}$	1_1	4_1	1_1	5_2	1_1	4_1	1_1	50_6	1_1	2_1	3_2	4_2	1_1	6_1	1_1	52_5
81~100 阶	15_5	2_1	1_1	15_2	1_1	2_1	1_1	12_3	1_1	10_2	1_1	4_2	2_1	2_1	1_1	231	1	5	2	16
101~120 阶	1	4	1	14	2	2	1	45	1	6	2	43	1	6	1	5	4	2	1	47

最多数依次出现在: 128 阶: 2328_{15} , 256 阶: 56092_{22} , 512 阶: 10494213_{30} , 1024 阶: 49487365422_{42}

image　　　　　　　　inverse image

定义同态的 像 $f(H_1)=\{f(a)|a\in H_1\}$ 原像 $f^{-1}(H_2)=\{a\in G_1|f(a)\in H_2\}$ (单射则不一定有原像)

定理 $H_1\leqslant G_1\Rightarrow f(H_1)\leqslant G_2,\ H_2\leqslant G_2\Rightarrow f^{-1}(H_2)\leqslant G_1$, 换成正规子群亦成立

kernel

同态映射的 核 单位元的原像 $\mathbf{Ker}\,f=f^{-1}(\{e_2\})\trianglelefteq G_1$ (单同态 $\Leftrightarrow$ $\mathbf{Ker}\,f=\{e\}$) (以下满单同态均适用)

定理 $f^{-1}(f(a))=a\,\mathbf{Ker}\,f$ 定理 $H\leqslant G,\ f^{-1}(f(H))=H\,\mathbf{Ker}\,f$

群同态基本定理 $(G_1/\mathbf{Ker}\,f)\cong G_2$ 第一同构定理 把 G_2 缩小为 $f(G_1)$ 例 $\mathbb{Z}/\langle m\rangle\cong\mathbb{Z}_m$「取映射 $a\mapsto\bar{a}$」

第二同构定理 $H\leqslant G, N\trianglelefteq G$, 则 $(H\cap N)\trianglelefteq H$ 且 $H/(H\cap N)\cong HN/N$「$f:H\to HN/N, h\mapsto hN$」

第三同构定理 $N\trianglelefteq G, K\trianglelefteq G, K\subseteq N$, 则 $G/N\cong(G/K)/(N/K)$

群直积

external direct product

外直积 $G_1\otimes G_2=\{(g_1,g_2)|g_1\in G_1,g_2\in G_2\}$, 运算 $(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2)=(a_1a_2,b_1b_2)$, 构成群, 单位元 (e_1,e_2)

性质 ① $|G_1\otimes G_2|=|G_1||G_2|$ ② $G_1\otimes G_2\cong G_2\otimes G_1$ ③ $G_1\otimes G_2\otimes G_3\cong G_1\otimes(G_2\otimes G_3)\cong(G_1\otimes G_2)\otimes G_3$

定理 ① $|(g_1,g_2)|=[|g_1|,|g_2|]$ (最小公倍数) ② $G_1\otimes G_2$ 阿贝尔 $\Leftrightarrow$ G_1,G_2 都阿贝尔

③ G_1,G_2 是 m,n 阶循环群, 则 $G_1\otimes G_2$ 是循环群 $\Leftrightarrow$ $(m,n)=1$ ④ $C(G)=C(G_1)\otimes C(G_2)$

internal direct product

$N_1\trianglelefteq G, N_2\trianglelefteq G, N_1N_2=G, N_1\cap N_2=\{e\}$ (否则分解不唯一) , 则称 G 为 N_1,N_2 的 内直积

$\Leftrightarrow\forall g\in G$ 可唯一表为 n_1n_2 的形式, 且全部都有 $n_1n_2=n_2n_1$

$\Rightarrow N_1\otimes N_2\cong G$「$(n_1,n_2)\mapsto n_1n_2$」 性质 $G/N_1\cong N_2,\ G/N_2\cong N_1$

$\Leftarrow$若 $G=H_1\otimes H_2$, 则存在 G 的正规子群 N_1,N_2 与 H_1,H_2 同构, 构成内直积「$h_1\mapsto(h_1,e_2),\ h_2\mapsto(e_1,h_2)$」

(故以后不必区分内外直积)

semidirect product

半直积 改为只有一个是正规子群(约定正规的写前面) , 性质变为只有 $G/N_1\cong H_2$

例 $(\mathbb{C},+)\cong(\mathbb{R},+)\otimes(\mathbb{R},+)$ $\mathbf{D}_3$ 例 $\mathbf{D}_3=\mathbf{d}_3\otimes_s\tilde{\mathbf{a}}$

例 洛仑兹群表示旋转 $\mathbf{O}(3,1)$, 直积上平移群才是所有的间隔不变 $\rightarrow$ 庞加莱群 $\mathbf{P}=\mathbf{O}(3,1)\otimes_s T$

群作用

有群 G 和非空集合 X, 若 $\forall g\in G, x\in X$, $\exists!y=g*x\in X$, 且 ① $e*x=x$ ② $(g_1g_2)*x=g_1*(g_2*x)$

action

则称 $*$ 是 G 在 X 上的一个 作用, 以下记作 $g(x)$

例 共轭变换 $g(x)=gxg^{-1}$ 是 G 在自身上的一个作用

orbit　　　　　　　　transitive

称 X 的子集 $O_x=\{g(x)|g\in G\}$ 为 x 在 G 作用下的 轨道, 若 $O_x=X$ 则称作用是 传递的

定理 O_x 与 O_y 或全同或不交

stabilizer

称 $S_x=\{g|g(x)=x\}$ 为 x 在 G 中的 稳定子 定理 $S_x\leqslant G$ (对于共轭作用,S_x 就是中心化子 $C(x)$)

定理 $f:O_x\to G/S_x,\ gx\mapsto gS_x$ 为双射 例 求正六面体群阶数, $X=6$ 个面, $|G|=|O_1||S_1|=6\times4=24$

the euqation of finite group

群方程 $|G|=\sum_x [G:C(x)]=|C(G)|+\sum_{\text{非中心}}[G:C(x)]$ → 柯西定理 群阶数的素因子必存在该阶的元素

fixed element　　　　　　　　Burnside's lemma　　　Frobenius

不动元素 $F_g=\{x|\forall g, g(x)=x\}$ 伯恩萨德引理 (弗罗贝尼乌斯 1887) X 在 G 作用下轨道数 $n=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|F_g|$

例 求 a 种颜色各 b 个珠子可串成多少种手链 ⇔

ab 颗珠子所有排列为 X, 求它在 ab 边形对称变换群 G 作用下的轨道数

Sylow

p 群 有限群 G 的阶为某素数的幂 $|G|=p^k$, $k\geqslant 1$ 西罗 p 子群 $P\leqslant G$, $|P|=p^n$, 且 p^{n+1} 不能被 $|G|$ 整除

p 为素数, $n\geqslant 1$, 设有限群 $|G|=p^n m$, $(p,m)=1$

西罗第一定理 $0<k\leqslant n$, 则 G 必有 p^k 阶子群 推论 群阶数的素因子必存在该阶的西罗 p 子群

西罗第二定理 H 为 p 子群, P 为西罗 p 子群, 则 $\exists a\in G$ 使 $H\subseteq aPa^{-1}$ 推论 $|G|$ 的任两西罗 p 子群共轭

西罗第三定理 $|G|$ 的西罗 p 子群个数 n_p 是 $|G|$ 的因子且满足 $n_p\equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$

环域

$+,\cdot$ 为 $R\neq\varnothing$ 上的两个二元代数运算, 满足 ① $(R,+)$ 为阿贝尔群 ② $(R,\cdot)$ 为半群 ③ $\cdot$ 对 $+$ 左右分配律

ring

则称 $(R,+,\cdot)$ 为 环 (哈密顿 1843 非交换环, 戴德金 1871 整环, 理想, 1899 格论)

环有单位元指乘法有单位元 (幺元), 加法的改叫 零元 和 负元

division ring　　　　　　　commutative ring

乘半群有单位元 → 幺环 → 幺半群有逆元 → 除环, 乘群满足交换律 → 交换环

例 整数环 $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ 含幺, 交换 偶数环 $(2\mathbb{Z},+,\cdot)$ 不含幺, 交换 剩余类环 $(\mathbb{Z}_m,+,\cdot)$ 含幺, 交换

field　　　　　　　　　　　skew field

域 F 交换的除环 例 $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$　体 非交换的除环 例 $\mathbb{H}$, 全矩阵环 $M_n(F)$

性质 数域之交仍为数域, 之并不一定

性质 ① $a\cdot 0=0\cdot a=0$ ② $-(-a)=a$ ③ $a\cdot(-b)=(-a)\cdot b=-ab$ ④ $(-a)\cdot(-b)=ab$

倍数法则 $m,n\in\mathbb{Z}, a,b\in R$ ① $ma+na=(m+n)a$ ② $m(a+b)=ma+mb$ ③ $m(na)=(mn)a=n(ma)$ ④ $m(ab)=(ma)b=a(mb)$

指数法则 $m,n\in\mathbb{N}, a,b\in R$ ① $(a^m)^n=a^{mn}$ ② $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ ($(a\cdot b)^n$ 未必等于 $a^n\cdot b^n$)

广义分配律 $(\sum a_i)(\sum a_j)=\sum a_i b_j$ (二项式定理未必成立)

*单位群 $U(R)$ 所有可逆元乘群　环 R 的中心 $C(R)=\{r\in R|\ rx=xr, \forall x\in R\}\leqslant R$

S 是环 R 一个非空子集, 若 S 关于 R 的运算也构成环, 则 S 为 R 一个子环, 记 $S\leqslant R$

平凡子环 $\{0\}$ 和 R

定理 $\varnothing\neq S\subseteq$ 环 R, 则 $S\leqslant R$ ⇔ S 是 R 的加法子群, 乘法子半群 [分配律已有, 要乘法封闭 $ab\in S$]

⇔ $\forall a,b\in S$, $a-b\in S$, $ab\in S$

子环之交还是子环

left zero-divisor

$a,b\neq 0\in$ 环 R, 若 $a\cdot b=0$, 称 a 为 R 一个左零因子, b 为 R 一个右零因子

domain

整环 无零因子的(有单位元)交换环 ⇒ 乘法左右消去律成立 $(c\neq 0)$

division ring

除环 每个非零元都可逆的有单位元环 ⇒ 无零因子

p为素数 $\Leftrightarrow \mathbb{Z}_p$ 为整环 $\xleftrightarrow{[\text{费马小定理}]}$ $\mathbb{Z}_p$ 是域

*有限整环必是域 [取 a_i 乘遍环元素，成子集，元素互不同，个数又相同，$a_i a_j$ 必为单位元]

高斯整环 $\mathbb{Z}[i]=\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$ 复数 $+\cdot$

quaternion field

四元数体 $\mathbb{H}=\{a1+bi+cj+dk \mid a,b,c,d\in R\}$ $A=a+bi+cj+dk$

$i^2=j^2=k^2=ijk=-1$, $ij=-ji=k$, $jk=-kj=i$, $ki=-ik=j$

复矩阵形式 $\mathbb{H}=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\bar\beta & \bar\alpha\end{pmatrix} \middle| \alpha,\beta\in\mathbb{C}\right\}$ $A=\begin{pmatrix}a+b\sqrt{-1} & c+d\sqrt{-1}\\ -c+d\sqrt{-1} & a-b\sqrt{-1}\end{pmatrix}$

$1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $i=\begin{pmatrix}\sqrt{-1}&0\\0&\sqrt{-1}\end{pmatrix}$ $j=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ $k=\begin{pmatrix}0&\sqrt{-1}\\ \sqrt{-1}&0\end{pmatrix}$

相当于正规子环 $I \trianglelefteq R$

左理想(子环) $I\le R$, $\forall r\in R$, $a\in I$, 有 $ra\in I$ 右理想(子环) $ar\in I$ (双边)理想 ideal $\forall a,b\in I$, $r\in R$, 有 $a-b\in I$, $ra\in I$, $ar\in I$

零理想 $\{0\}$ 平凡理想 trivial $I=\{0\}$ 和 $I=R$ 真理想 proper $I\subsetneqq R$

理想之交 $I\cap J$、之和 $I+J=\{a+b \mid a\in I, b\in J\}$ 还是理想，有限个和、任意个交还是理想

[$\mathbb{Z}_8$的非平凡不重复理想 $\langle 2\rangle\langle 3\rangle\langle 6\rangle\langle 9\rangle$]

生成理想 R中包含S的最小的理想 $\langle a_1,\dots a_n\rangle=\{\Sigma xay+xa+ay+ma \mid x,y\in R, m\in\mathbb{Z}\}$

若R为含单位元交换环，$S=\{a\}$，由a生成的主理想 $\langle a\rangle=\{ra \mid r\in R\}$

$\mathbb{Z}$的任何理想都是主理想 [取I中最小正整数，带余除法余0]

主理想整环 任何理想都是主理想的整环，记PID *$\mathbb{Z}[x]$不是PID

$F[x]$是主理想整环 [取I中次数最低首1多项式，带余除法余0] *多元$F[x,y]$未必

I为R的理想，记陪集 $\bar r=r+I$，则阿贝尔加群的商群 $R/I=\{\bar r \mid r\in R\}$

商环 $R/I=\{r+I \mid r\in R\}$ 陪集的加法 $(r_1+I)+(r_2+I)=(r_1+r_2)+I$ 乘法 $(r_1+I)\cdot(r_2+I)=(r_1\cdot r_2)+I$ [要证无歧义]

商环含幺交换 $\Leftarrow R$含幺交换 (单位元 $\bar e=e+I$ 零元 $\bar 0=0+I=I$) $i\in I$, $\bar i=\bar 0=I$

P是含幺交换环R的真理想，$\forall a,b\in R$，$ab\in P\Rightarrow a$或$b\in P$，称P是R的一个素理想 (逆否同理)

$\langle n\rangle$为$\mathbb{Z}$的素理想 $\Leftrightarrow n$为素数

(R是含幺交换环) R/I是整环 $\Leftrightarrow I$是R的素理想 (R是整环未必R/I是整环)

M是含幺交换环R的真理想，$\forall$理想$M'\supsetneqq M\Rightarrow M'=R$，称$M$是$R$的一个极大理想

(R是含幺交换环) R/I是域 $\Leftrightarrow I$是R的极大理想 (极大理想 $\Rightarrow$ 素理想)

环$(R,+,\circ)$和$(R',\oplus,*)$，$f:R\to R'$，满足$f(a+b)=f(a)\oplus f(b)$，$f(a\circ b)=f(a)*f(b)$，$\forall a,b\in G$

f单射称单同态，f满射称满同态，f一一对应称同构，记$f: R\cong R'$

零同态 $f:R\to R'$，$a\mapsto 0'$，$\forall a\in R$

性质 同态 ① $f(0)=0'$ [加法幂等元] ② $f(na)=nf(a)$，$n\in\mathbb{Z}$ ③ $f(a^n)=[f(a)]^n$，$n\in\mathbb{N}$

RR'含幺 ④ f满，则$f(e)=e'$ ⑤ R'无零因子，$f(e)\ne 0'$，则$f(e)=e'$

⑥ $f(e)=e'$，则左/右逆元对应到左/右逆元

环同态f的核 $\operatorname{Ker} f = \{a\in R \mid f(a)=0'\}$ 　　$\operatorname{Ker} f \trianglelefteq R$

$I\trianglelefteq R$，商环R/I，则$\pi: R\to R/I$，$r\mapsto \bar{r}=r+I$ 是满射，构成自然同态 　$\operatorname{Ker}\pi = I$

环同态基本定理 $R/\operatorname{Ker} f \cong f(R)$ （推广到第一同构）［同构映射 $\bar{r}\mapsto f(r)$］

环的第二同构定理 $S\leq R$，$I\trianglelefteq R$ 则 $S\cap I\trianglelefteq S$ 且 $S/(S\cap I)\cong (S+I)/I$ （分子分母同时扩大！）

Characteristic

特征 使$(\forall a\in R)$ $na=0$ 的最小正整数n 　　若不存在，记 $\operatorname{Char} R=0$

定理 R为含幺环，则 $\operatorname{Char} R = |e|$，若$e$关于加法的阶为无穷，则 $\operatorname{Char} R=0$

整环的特征只能是0或一个素数 　「$\operatorname{Char}\mathbb{Z}_m = m$ 　$\operatorname{Char}\mathbb{Z}_m[x]=m$」

R为含幺环，则 $f:\mathbb{Z}\to R$，$n\mapsto ne$ 是环同态（未必单/满）［保持运算］

若 $\operatorname{Char} R = n>0$，则$R$包含一个与$\mathbb{Z}_n$同构的子环 $[\{me \mid m\in\mathbb{Z}\}]$

若 $\operatorname{Char} R = 0$ 　，则R包含一个与$\mathbb{Z}$同构的子环

prime field

素域 不含任何真子域的域

F为域
- 若 $\operatorname{Char} F=0$，则F包含一个与$\mathbb{Q}$同构的素域
- 若 $\operatorname{Char} F=$素数p，则F包含一个与$\mathbb{Z}_p$同构的素域

*交换环R的特征为素数p，则 $(\sum a)^p = \sum a^p$ ［系数都有因子p］ 如布尔环 $\mathbb{Z}_2$

- $\mathbb{Q}[x]$ 一元有理多项式
- $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$
- $\mathbb{Q}(x) = \{\frac{f(x)}{g(x)} \mid f,g\in\mathbb{Q}[x], g\neq 0\}$ 有理函数域

次数 $\deg f(x)=n$，$a_n\neq 0$，$\deg 0 = -\infty$

R为含幺环，作 $R[x]=\{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \mid n\geq 0, a_i\in R\}$ 称为R上的以x为未定元的（一元）多项式环

定义 $\sum a_ix^i + \sum b_ix^i = \sum(a_i+b_i)x^i$ 　$(\sum_{i=0}^{n} a_ix^i)(\sum_{j=0}^{m} b_jx^j) = \sum_{k=0}^{m+n}(\sum_{i+j=k} a_ib_j)x^k$

性质 ① 若 $R\cong R'$ 则 $R[x]\cong R'[x]$

② R的零元、单位元、可逆元就是$R[x]$的零多项式、有单位元、可逆元

③ R无零因子、交换、整环 $\Rightarrow R[x]$ 也是

*形式幂级数环 $R[[x]]$ n无限制 　　$R[x]\leq R[[x]]$ 性质同理

D为整环，$D\times D^* = \{(a,b) \mid a,b\in D, b\neq 0\}$，定义等价关系 $(a,b)\sim(c,d) \Leftrightarrow ad=bc$

D的商域（分式域）$F = D\times D^*/\sim = \{\frac{a}{b} \mid a,b\in D, b\neq 0\}$，$\frac{a}{b}+\frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$，$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

定理 每一个整环都可扩充为一个域 　*域的商域就是本身

唯一分解整环（数论）

主理想整环 $\Leftrightarrow$ 任一理想可由一元素生成 $\Leftrightarrow$ 任一理想 $I=\{ra \mid r\in R\}$ 「整环 $\mathbb{Z}[x]$ 不是PID」

D为整环，$\exists\phi: D-\{0\}\to\mathbb{N}$，使$\forall a,b\in D\ (b\neq 0)$，带余除法存在（$\exists q,r\in D$ 使 $a=bq+r$ 且 $\phi(r)<\phi(b)$ 或 $r=0$）

则称D为欧几里得整环，记ED 　　$\phi(r)$不能$<\phi(d)$

推论 ED必为PID 　设$I=(d)$，取最小的$\phi(d)$，$\forall a\in I$，$a=dq+r$，$\because d$最小

$\mathbb{Z}$是ED，ϕ为绝对值 　　$\therefore r=0$

$\mathbb{Z}[i]$是ED，ϕ为模方 　　$\because (2,x) = \{xf+2g \mid f,g\in\mathbb{Z}[x]\}$

群表示

对于抽象群 $\{g\}$, 寻找一个矩阵群 $\{A(g)\}$ 与之同态, 称 A 是群 G 的一个 线性表示 (linear representation)

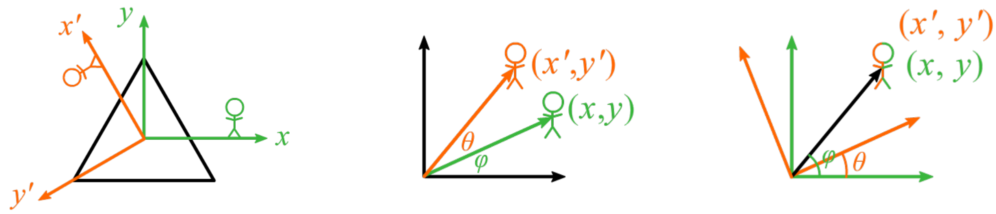
若同构则称为 忠实表示 (faithful representation), 通常映射可多对一, 如 恒等表示 (identity representation) 所有群元素都映射到单位算符

性质 表示必为方阵, 单位元必表为单位阵, 迹 $\mathrm{tr}\,A(e)=$ 表示空间 V 的维数, 保逆 $A(g^{-1})=[A(g)]^{-1}$

若已知群元素 g 表示的是对向量 $\vec{r}$ 的某种变换 $\vec{r}'=\hat{A}(g)\vec{r}$, 则有 选基求表示法 : 取线性空间 V 中一组基 $\{\vec{e}_i\}$「要求完备」, 群元素作用上去 $\hat{A}(g)\vec{e}_i=\sum_j A_{ji}(g)\vec{e}_j$「可证保乘」$\xrightarrow{\text{正交基}}$ $A_{ji}(g)=\langle\vec{e}_j,\hat{A}(g)\vec{e}_i\rangle$

D$_3$ 例 已知群元素对应的变换含义, 在欧氏空间做群表示 $A(e)=I_3,\ A(r_2)=A^{-1}(r_1)=A^T(r_1)$

$$A(r_1)=\begin{bmatrix}-1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0\\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, A(a)=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}, A(b)=\begin{bmatrix}1/2 & \sqrt{3}/2 & 0\\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}, A(c)=\begin{bmatrix}1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0\\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$



① 用基表示的主动变换 (物动, 基动坐标不变) $\hat{A}(r_1)\vec{x}=\vec{x}'=\cos\theta\,\vec{x}+\sin\theta\,\vec{y}+0\vec{z}$, 系数竖写第一列

② 用坐标表示的主动变换 (物动, 基不动坐标变) $x'=r\cos(\theta+\varphi)=\cos\theta\ x-\sin\theta\ y$, 系数横写第一行

③ 被动变换 (物不动, 基动坐标变) $x'=r\cos(\varphi-\theta)=\cos\theta\ x+\sin\theta\ y$, 系数横写第一行

不可约表示

等价表示 (equivalent representation) 对于矩阵: $\exists$ 同阶非奇异阵 X, 使 $\forall g,\ A'(g)=X^{-1}A(g)X$ (维数不同显然不等价)

对于空间: $(e_i')=X(e_i)$

可约表示 (reducible) 对于矩阵: 有零块　　　有三角块结构称为 可分表示 (decomposable) $\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & C\end{pmatrix}$

(不可能有三个零块, 没有逆, 不是群)　　有对角块结构 (block-diagonalized structure) 称为 完全可约表示 (completely reducible) $A=\bigoplus m_i A_i^{(\mathrm{IR})}$ $\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & C\end{pmatrix}$

所有矩阵能同时对角化 (通过相似变换同时化三角型) 的充要条件是对易 (可交换)〈高代〉

对于空间: 存在非平凡不变子空间 W, $V=W\oplus\overline{W}$

在所有等价表示(基) 都没有零块则称 不可约表示 (**I**rreducible **R**epresentation) (一维的都是不可约表示)

例 $(\mathbb{R}^*,+)$ 有表示 $A(x)=\mathrm{e}^{mx}$, 不同的 m 都是不等价表示, 还可有二维不可分表示 $A(x)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ x & 1\end{bmatrix}$

幺正表示 $A^\dagger=A^{-1}$, 荷载表示的空间 V 为复内积空间 **定理** 幺正表示可约则完全可约(不存在可分)

全部 即完备 (以下把「全部不等价不可约幺正表示」简记为 $\forall\neq$IUR)

马施克定理 (Maschke's theorem) 有限群的任何表示都等价于一个幺正表示 (有限群不存在可分表示)

幺正 $\Leftrightarrow$ 保内积, 设在某基下有非幺正表示 $\langle A(g)x_1|A(g)x_2\rangle\neq\langle x_1|x_2\rangle$, 用群平均定义新内积 $\langle\!\langle x_1|x_2\rangle\!\rangle\equiv\frac{1}{n}\sum_g\langle A(g)x_1|A(g)x_2\rangle$, 根据重排定理 $\langle\!\langle A(g_i)x_1|A(g_i)x_2\rangle\!\rangle=\langle\!\langle x_1|x_2\rangle\!\rangle$ (选了非正交基, 导致所见不幺正)

舒尔引理 I (Schur's lemma 1) A 为 IR, 若 $\exists X\in V$ 和 $\forall A(g)$ 对易 (维数必相同), 则 $X=\lambda I$ (常用其逆否判断不可约)

设 $X\vec{r}=\lambda\vec{r}$, 因 $X(A\vec{r})=A(X\vec{r})=\lambda(A\vec{r})$, 则 $A(g)\vec{r}$ 也是 λ 下的本征矢, $A(G)$ 构成不变子空间, 又 A 不可约, 故 $A(G)$ 就是整个 V, 即对 V 中任意向量 $\vec{R}=\sum c_i\vec{r}_i$ 都有 $X\vec{R}=\lambda\vec{R}$, 只能为常数阵

定理 阿贝尔群 (包括无限群) 的 IR 都是一维的

舒尔引理 II (Schur's lemma 2) A,B 为不等价 IR (维数可不同), 若 $\forall g$ 有 $XA(g)=B(g)X$, 则 $X=0$ (常用逆否, 不为零则必等价)

群函数

group representation function

群函数 $\varphi{:}G\to\mathbb{C}$, 群表示函数 $\varphi{:}A(G)\to\mathbb{C}$ (例如矩阵元 $A_{ij}(g)$, 特征标, 都是群函数)

每行可视作 n 维矢量 → 记 群函数空间 V_G 的基为 $\{\varphi_k\}$

定理 n 阶有限群只有 n 个线性独立的群函数

→ 群函数值表 $\{\varphi_k\}$ 是个方阵

D₃ 例 前面的欧氏三维表示可轻易约为 χ^Γ, χ^A

(以下括号 (A) 表示 IR, n 为群维数, S_A 为 A 的维数)

群函数内积 用 群平均 定义 $\langle\varphi_1,\varphi_2\rangle\equiv\frac{1}{n}\sum_i^n\varphi_1^*(g_i)\varphi_2(g_i)$

群函数表	e	r_1	r_2	a	b	c
S	1	1	1	1	1	1
A	1	1	1	-1	-1	-1
Γ_{11}	1	$-1/2$	$-1/2$	-1	$1/2$	$1/2$
Γ_{12}	0	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$	0	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$
Γ_{21}	0	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$	0	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$
Γ_{22}	1	$-1/2$	$-1/2$	1	$-1/2$	$-1/2$

orthogonality theorem

正交性定理 群函数值表各行正交(列没有) , $\langle A_{ij}^{(p)},A_{i'j'}^{(q)}\rangle\equiv\frac{1}{n}\sum_g A_{ij}^{(p)*}(g)A_{i'j'}^{(q)}(g)=\frac{1}{S_p}\delta_{pq}\delta_{ii'}\delta_{jj'}$

矢量长度的平方 (分量的平方和) 为 $\frac{1}{S}$ → $\{\sqrt{S}\varphi_k\}$ 构成正交归一基

D₃ 例 验证 Γ_{11} 行内积 Γ_{11} 行归一: $\frac{1}{n}\sum_g^n\Gamma_{11}^*\Gamma_{11}=\frac{1}{6}[1^2+(-\frac{1}{2})^2+(-\frac{1}{2})^2+1^2+(-\frac{1}{2})^2+(-\frac{1}{2})^2]=\frac{1}{2}$

completeness theorem

完备性定理 有限群的 $\forall\neq$IUR 产生的群表示函数($\sum S^2$ 个) 集合, 构成空间 V_G (n 维) 的完备基

Burnside's theorem

→ 伯恩萨德定理 $\sum_{i=1}^{r}S_i^2=n$, 其中 r 为 $\forall\neq$IUR 的个数

推论 所有群都有一个恒等表示, 故 5 阶及以下群只有一维 IR

D₃ 例 6 阶群, 3 个类, 只有 $6=2^2+1^2+1^2$ 这种分解

(类数多的伯恩萨德分解可能不唯一, 如狄拉克群 $32=1\cdot4^2+16\cdot1^2=5\cdot2^2+12\cdot1^2$)

特征标

class function

在同一个共轭类上取常值的函数称为 类函数

character

与基的选择无关的矩阵函数, 如矩阵的迹在相似变换下不变 → 特征标 $\chi^A(g)\equiv\mathrm{tr}\,A(g)$ **性质** $\chi^A(e)=S_A$

判断可约 IUR 的特征标的模 $\langle\chi^{(A)},\chi^{(A)}\rangle=\frac{1}{n}\sum_g|\chi(g)|^2=1$, 可约则 $\langle\chi^A,\chi^A\rangle>1$

判断等价 不等价 IUR 的特征标正交 → $\langle\chi^{(A)},\chi^{(B)}\rangle=\delta_{AB}$ **定理** 等价表示 ⇔ 特征标相等

约化 可约表示 $A=\bigoplus m_i(A)_i$ 的特征标, 等于它所包含的 IR 的特征标之和 $\chi^A=\sum m_i\chi^{(A)_i}$

$m_i=\langle\chi^{(A)},\chi^A\rangle$ 为该类中元素个数, 即重复次数, m_i 确定即表明 A 的约化完成 (不用确定顺序)

性质 同类元素的特征标相等 (记类中元素个数为 n_i, 求和公式中可合并)

群的 $\forall\neq$IUR 的个数等于群中类的个数 r → 特征标表是方阵

第一正交性关系 特征标各行正交 $\frac{1}{n}\sum^r n_i\chi^{(p)*}(g)\chi^{(q)}(g)=\delta_{pq}$

第二正交性关系 特征标各列正交 $\frac{n_i}{n}\sum_p^r\chi^{(p)*}(g_i)\chi^{(p)}(g_{i'})=\delta_{ii'}$

特征标	e	r_1,r_2	a,b,c
χ^S	1	1	1
χ^A	1	1	-1
χ^Γ	2	-1	0

(以上讲的性质都是对同一个群, 不同构的群也可能碰巧有相同的特征标表)

D₃ 例 验证 χ^Γ 行归一 $\langle\chi^\Gamma,\chi^\Gamma\rangle=\frac{1}{n}\sum^r n_i\chi^{\Gamma*}\chi^\Gamma=\frac{1}{6}[1\cdot2\cdot2+2\cdot(-1)\cdot(-1)+3\cdot0\cdot0]=1$

D₃ 例 验证第 2 列归一 $\frac{n_2}{n}\sum_p^3\chi^{p*}(g_2)\chi^p(g_2)=\frac{2}{6}[1\cdot1+1\cdot1+(-1)\cdot(-1)]=1$

群表示直积

(一个群的两个表示直积, 不是两个群直积)

① 群的两个表示的直积也是该群的表示 「证保乘」 ② $\chi^{A\otimes B}=\chi^A\chi^B$ 「迹的乘法」

Clebsch-Gordan reduction coefficient

CG 展开 $(A)_i\otimes(A)_j=\bigoplus_k a_{ijk}(A)_k$, 利用特征标定 约化系数 (求出出现次数就约化完工了)

$$a_{ijk}=\langle\chi^{(A)_k},\chi^{(A)_i\otimes(A)_j}\rangle=\frac{1}{n}\sum_g^n\chi^{(A)_k*}(g)\chi^{(A)_i}(g)\chi^{(A)_j}(g)=\frac{1}{n}\sum^r n_i\chi^{(A)_k*}\chi^{(A)_i}\chi^{(A)_j}$$

性质 任何表示与恒等表示的直积等于该表示, IR 与一维表示的直积等于该 IR

结论 当且仅当两个互为共轭表示的直积表示中, 才会出现且只出现一次恒等表示
「恒等表示的特征标都是 1, 按定义计算 $a_{ij,S}=\langle\chi^{(A)_i},\chi^{(A)_j*}\rangle=\delta_{ij}$」
D₃ 例 求 A 在 $\Gamma\otimes\Gamma$ 中的次数 $a_{\Gamma\otimes\Gamma,A}=\langle\chi^A,\chi^{\Gamma\otimes\Gamma}\rangle=\frac{1}{n}\sum^r n_i\chi^{A*}\chi^\Gamma\chi^\Gamma=$
simple reducibility
$\frac{1}{6}[1\cdot1\cdot2\cdot2+2\cdot1\cdot(-1)\cdot(-1)+3\cdot(-1)\cdot0\cdot0]=1$ **结论** $\Gamma\otimes\Gamma=S\oplus A\oplus\Gamma$ 简单可约 所有约化系数均不超过 1
〈高量〉 CG 系数 本质: 耦合分解, 好量子数: 提炼不可约表示

函数基

设 $g\in G$ 表示 $\vec{r}$ 的向量空间中的旋转 (如由 $\vec{r_0}$ 转到 $\vec{r_1}$), 另外又定义个函数空间 $\psi(\vec{r})$ (如空间 $\vec{r}$ 处的温度), 则 $\hat{T}(g)\psi(\vec{r})=\psi'(\vec{r})=\psi(g^{-1}\vec{r})$ (旋转后 $\vec{r_1}$ 处的温度 $\psi'(\vec{r_1})$ 是旋转前 $\vec{r_0}$ 处的温度 $\psi(g^{-1}\vec{r_1})$)
「可以证明 $\hat{T}(g_2)\hat{T}(g_1)\psi(\vec{r})=\psi(g_1^{-1}g_2^{-1}\vec{r})=\psi((g_2g_1)^{-1}\vec{r})$」
induced
注意 $\hat{T}$ 代表的是对函数 $\hat{T}\psi=\psi'$ 变换, 和 g 表示对矢量 $g\vec{r_0}=\vec{r_1}$ 变换不一样, 称为由 g 诱导 出的 $\hat{T}$
把 ψ 写成坐标(基的分量) 的函数 $\hat{T}(g)\psi(r_{1\sim s})=\psi(r'_{1\sim s})$, 则 $r'_j=\sum_i A_{ij}(g^{-1})r_i$
由函数基 ψ_i 得矩阵表示 $\hat{T}(g)\psi_i(\vec{r})=\psi_i(g^{-1}\vec{r})=\sum_j A_{ji}(g)\psi_j(\vec{r})$
D₃ 例 取函数基 $\psi_{1\sim6}=\{x^2,y^2,z^2,xy,yz,zx\}$, (线性无关, 但不正交归一)
$T(r_1)\psi_1=x'^2$, $x'=x\cos(\frac{2}{3}\pi)+y\sin(\frac{2}{3}\pi)=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\to T(r_1)\psi_1=\frac{1}{4}\psi_1+\frac{3}{4}\psi_2+\frac{\sqrt{3}}{2}\psi_4$, 竖写第一列
$A(e)=I_6$, $A(r_2)=A^T(r_1)$, $A(a)=\mathrm{diag}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$

$$A(r_1)=\begin{bmatrix}1/4 & 3/4 & 0 & -\sqrt{3}/2 & 0 & 0\\ 3/4 & 1/4 & 0 & \sqrt{3}/4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2\end{bmatrix},\quad A(b,c)=\begin{bmatrix}1/4 & 3/4 & 0 & \pm\sqrt{3}/2 & 0 & 0\\ 3/4 & 1/4 & 0 & \mp\sqrt{3}/4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ \pm\sqrt{3}/2 & \mp\sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & \mp\sqrt{3}/2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mp\sqrt{3}/2 & -1/2\end{bmatrix}$$

广义投影

从荷载可约表示的基中把荷载 IR 的基挑选出来方法 ① 算 CG 系数, 麻烦 ② 广义投影算符
设 A,B 是两个 IR, A 表示的函数基为 $\{\psi_{1\sim s}\}$, 前面有 $\hat{T}_g\psi_i=\sum_j A_{ji}(g)\psi_j$
两边左乘 B^*_{kl} 对群元素求和, 用正交性定理,
$\sum_g B^*_{kl}(g)\hat{T}_g\psi_i=\sum_g\sum_j B^*_{kl}(g)A_{ji}(g)\psi_j=\sum_j\frac{n}{s}\delta_{AB}\delta_{kj}\delta_{li}\psi_j=\frac{n}{s}\delta_{AB}\delta_{li}\psi_k$
generalized projection operator / transfer operator
记 广义投影算符 / 转移算符 $P^{(B)}_{kl}=\frac{s}{n}\sum_g B^*_{kl}(g)\hat{T}_g$, 则有 $P^{(B)}_{kl}\psi^{(A)}_i=\delta_{AB}\delta_{li}\psi^{(A)}_k$
若 $A=B,l=i$, 则 P_{ki} 就是把第 i 个基分量 ψ_i 变成同一 IR 的第 k 个基分量 ψ_k
有 s^2 个矩阵元就有 s^2 个投影算符, 故 n 阶有限群有 n 个广义投影算符
下标相同的话记为一个指标 $P_k\equiv P_{kk}$, 自身到自身的, 作用上去之后没有转动, 幂等 $P_k^2=P_k$
D₃ 例 现要把 2 维的 Γ 从那个 6 维表示函数基中投影出来
用一个 $s=2$ 维 IR 可构造 s^2 个投影算符, 但只需选取 s 个就够了,
先选投影算符 $P^{(\Gamma)}_{11}=\frac{s}{n}\sum_g\Gamma^*_{11}(g)T_g=\frac{2}{6}[T_e-\frac{1}{2}T_{r_1}-\frac{1}{2}T_{r_2}-T_a+\frac{1}{2}T_b+\frac{1}{2}T_c]$
(虽然 T_g 的表达式不知道, 但它作用在 ψ_1 上的结果是知道的, 结果就写在 $A_{6\times6}$ 的第一列)

$$P^{(\Gamma)}_{11}\psi_1=P^{(\Gamma)}_1\psi_1=\frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1/4\\3/4\\0\\\sqrt{3}/2\\0\\0\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1/4\\3/4\\0\\-\sqrt{3}/2\\0\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1/4\\3/4\\0\\\sqrt{3}/2\\0\\0\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1/4\\3/4\\0\\-\sqrt{3}/2\\0\\0\end{bmatrix}\right)=0$$

$\Psi=\sum^S\phi_i$, 若 $P_1\Psi=0$, 说明 Ψ 中不含 ψ_1, 换成其它的广义投影算符

$$P^{(\Gamma)}_{12}\psi_1=\frac{2}{6}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{bmatrix}1/4\\3/4\\0\\\sqrt{3}/2\\0\\0\end{bmatrix}+\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{bmatrix}1/4\\3/4\\0\\-\sqrt{3}/2\\0\\0\end{bmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{bmatrix}1/4\\3/4\\0\\\sqrt{3}/2\\0\\0\end{bmatrix}+\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{bmatrix}1/4\\3/4\\0\\-\sqrt{3}/2\\0\\0\end{bmatrix}\right)=xy$$

同理可计算 $P_2^{(\Gamma)}\psi_1=\frac{2}{6}[T_e-\frac{1}{2}T_{r_1}-\frac{1}{2}T_{r_2}+T_a-\frac{1}{2}T_b-\frac{1}{2}T_c]=\frac{1}{2}(x^2-y^2)$

对称群

使图形不变形地变到与自身重合的操作，关于变换的乘法构成 对称群 (symmetry group)
(注：物理上找某量子体系的对称群是指 $[G,\hat{H}]=0$)
平面正 n 边形对称群称为 $2n$ 阶 二面体群 (dihedral group) $\mathbf{D}_n$ (二面体是强调无厚度)
保持正 n 边形不变的全部操作：1不动$+(n-1)$转动$+n$翻转$=2n$，除了 $n=2$ 外均为非阿贝尔群
定义关系 $W_i(g_1\dots g_m)=e$，乘法表的化简方式 (i 需要多少目前尚无定论，已证明肯定存在)

$\mathbf{D}_n=\langle r,s|r^n=s^2=(sr)^2=e\rangle$， $r\doteq\begin{bmatrix}\cos\frac{2\pi}{n} & -\sin\frac{2\pi}{n}\\ \sin\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n}\end{bmatrix}$， $s\doteq\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ (空间旋转和 x 轴翻转)

一般地 a 表示欧氏空间中旋转 $2\pi/n$ 度 $\to$ 生成循环群 $\mathbf{C}_n$，「相同的转动角 (正转或反转) 属于一个共轭类」 ① n 为偶数: $\mathbf{C}_n$ 有 $(\frac{n}{2}+1)$ 个共轭类 (含单位元) ② n 为奇数: $\mathbf{C}_n$ 有 $(\frac{n+1}{2})$ 个共轭类
$\mathbf{C}_n\triangleleft\mathbf{D}_n$ 「由 $bab=a^{-1}$ 得 $ba^kb=a^{-k}$」 $\to$ 除 a^k 之外的元素构成陪集，可写成 ba^k 的形式，阶均为 2 「$(ba^k)^2=e$」，表示欧氏空间中的翻转. 「$a^j(ba^k)a^{-j}=(a^jba^j)a^{k-2j}=b^{-1}a^{k-2j}$」 $\to ba^k\sim ba^{k-2j}$

① 若 n 为偶数，则所有反射操作构成 2 个共轭类 (k 为奇数或偶数，分别代表对称轴过顶点或边中点) . 令 ±1 按一切可能方式和 a,b 对应，可得 4 个 1 维表示. 欧氏空间的旋转变换可表示为:

$$a\doteq\begin{bmatrix}\cos\frac{2\pi m}{n} & -\sin\frac{2\pi m}{n}\\ \sin\frac{2\pi m}{n} & \cos\frac{2\pi m}{n}\end{bmatrix},\quad b\doteq\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

(由于 ba^k 的存在，上面的旋转矩阵表示不可约)
$m\in\mathbb{Z}$ ，由于 χ^m 和 χ^{n-m} 同构，故 $0<m<\frac{n}{2}$ ，共有 $(\frac{n}{2}-1)$ 个均为 2 维表示. 由伯恩斯坦定理 $2n=4\cdot1^2+(\frac{n}{2}-1)\cdot2^2$ 知已找出全部不同构 UIRs.
② 若 n 为奇数，则所有反射操作构成 1 个共轭类，1 维表示只有 2 个. 2 维表示同偶数情形，由伯恩斯坦定理 $2n=2\cdot1^2+(\frac{n-1}{2})\cdot2^2$，故已找出全部不同构 UIRs.

特征标	a^k	ba^k
χ^1	1	1
χ^2	1	-1
χ^3	$(-1)^k$	$(-1)^k$
χ^4	$(-1)^k$	$-(-1)^k$
χ^m	$2\cos\frac{2\pi mk}{n}$	0

特征标	a^k	ba^k
χ^1	1	1
χ^2	1	-1
χ^m	$2\cos\frac{2\pi mk}{n}$	0

圆群 (circle group) 圆的对称群是 $\mathbf{T}\cong\mathbf{SO}(2,\mathbb{R})$〈 线性群 〉

点群

3 维 $\to$ 点群 (point group) $\mathbf{O}(3)$ 的有限子群，$\mathbf{SO}(3)$ 的叫 第一类点群，有反演的叫 第二类点群
第一类点群基本方程 $\sum_{i=1}^{l}(1-\frac{1}{n_i})=2(1-\frac{1}{n})$ 「只可能有 $l=2,3$」 5 个解穷尽第一类点群：循环群 $\mathbf{C}_n$，二面体群 $\mathbf{D}_n$ $(2n)$ ，四面体群 (tetrahedral group) $\mathbf{T}\cong\mathbf{A}_4$ (12) ，八面体群 (octahedral group) $\mathbf{O}\cong\mathbf{S}_4$ (24) ，二十面体群 (icosahedral group) $\mathbf{Y}\cong\mathbf{A}_5$ (60)
(部分符号冲突，仅限点群使用) 点群已研究完，查表即可

$\mathbf{T}$ $(\omega=e^{i\frac{2}{3}\pi})$	e	(12)(34)	(123)	(132)
元素个数	1	3	4	4
χ^1	1	1	1	1
χ^2	1	1	ω	ω^2
χ^3	1	1	ω^2	ω
χ^4	3	1	0	0

$\mathbf{O}$	e	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
元素个数	1	6	8	6	3
χ^1	1	1	1	1	1
χ^2	1	-1	1	-1	1
χ^3	2	0	-1	0	2
χ^4	3	-1	0	1	-1
χ^5	3	1	0	-1	-1

$\mathbf{Y}$	e	(12)(34)	(123)	(12345)	(12354)
元素个数	1	15	20	12	12
χ^1	1	1	1	1	1
χ^2	3	-1	0	$\frac{1+\sqrt5}{2}$	$\frac{1-\sqrt5}{2}$
χ^3	3	-1	0	$\frac{1-\sqrt5}{2}$	$\frac{1+\sqrt5}{2}$
χ^4	4	0	1	-1	-1
χ^5	5	1	-1	0	0

直积上反演群即相应第二类点群，去掉同构的剩 9 种：熊夫利记号 (Schoenflies) $S_{2n},C_{nv},C_{nh},D_{nh},D_{nd},T_h,T_d,O_h,Y_h$

置换群

symmetric group　　　　　　　　transformation group

非空集合 X 的全体可逆变换构成 全变换群 / 对称群 $\mathbf{S}_X$, 其子群称为 变换群 , $\xrightarrow{X\text{有限}}$ 置换群

permutation group

n 阶 置换群 $\mathbf{S}_n$, $|\mathbf{S}_n|=n!$, $n\geqslant 3$ 均非阿贝尔, 置换相乘先右后左 (最右有波函数) **例** $\mathbf{S}_3\cong\mathbf{D}_3$

cycle notation　　　　　　　　transposition

置换记法 $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ f(1) & f(2) & f(3)\end{pmatrix}$, 轮换记法 $(a_1a_2\ldots a_m)$, $f(a_i)=a_{i+1}$, 对换 2 轮换, 邻换 相邻元素对换

恒等置换 1 轮换 $(a)=e$, **例** $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=(132)$, $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=(13)$, $(132)(123)=(1)$

定理 ① 不相交的轮换可交换顺序 ② 任一置换可唯一表为不相交轮换之积「数学归纳」

性质 轮换的长度就是该元素的阶 鲁菲尼定理 不相交轮换之积的阶为最小公倍数

③ 任一置换可表为对换之积 $(a_1a_2\ldots a_m)=(a_1a_m)(a_1a_{m-1})\ldots(a_1a_2)=(a_1a_2)(a_2a_3)\ldots(a_{m-1}a_m)$

(不唯一, 但轮换结构不变) **推论** $(a_1a_2\ldots a_m)^{-1}=(a_ma_{m-1}\ldots a_1)$

odd / even permutation

奇 / 偶置换 奇/偶数个对换之积 (奇数阶轮换 ⇔ 偶置换) **定理** 逆置换的奇偶性相同

alternating group

定理 $n>1$ 的 $\mathbf{S}_n$ 有各 $\frac{n!}{2}$ 个奇偶置换, 全体偶置换构成 $\mathbf{S}_n$ 正规子群 → 交错群 $\mathbf{A}_n$, $\mathbf{S}_n/\mathbf{A}_n=\mathbf{C}_2$

④ 任一对换都可写成邻换之积 **结论** 生成元就是 $(n-1)$ 个邻换

Cayley

凯莱定理 任一群都同构于一个变换群, 有限群 ($|G|=n$) 都同构于一个置换群 ($\mathbf{S}_n$ 的一个子群)

left translation

取 $a\in G$, 定义 左平移变换 $\phi_a(g)=ag$, 可证明

left regular representation

左正则表示 $G_l=\{\phi_a|a\in G\}$ 是 $\mathbf{S}_G$ 的一个子群

同理可定义 右平移变换 $\psi_a(g)=ga^{-1}$ 和 右正则表示

$\mathbf{D}_3$ 例 $a\cdot\{e,r_1,r_2,a,b,c\}=\{a,c,b,e,r_2,r_1\}\rightarrow A(a)=$

$$\begin{bmatrix}0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e\\r_1\\r_2\\a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\c\\b\\e\\r_2\\r_1\end{bmatrix}$$

结论 ① 忠实 ② 除了 $\chi(e)=n$ 外其它 $\chi(g)=0$ ③ IR 在正则表示中出现次数等于其维数(→ 伯恩萨德)

杨图

cycle structure

某一置换的 轮换结构 $(i^{v_i}\ldots)$, 分解出 v_i 个长度为 i 的轮换之积, $i=1,\ldots,k$

定理 共轭运算保持轮换结构不变 → 具有相同轮换结构的置换属于同一个类

总长度 $n=v_1+2v_2+\cdots+kv_k$, 重组 $\lambda_i\equiv v_i+\cdots+v_k$ $((1^n)\rightarrow[n],\ (n^1)\rightarrow[1\ldots1])$

$n=v_1+v_2\quad+v_3+\ldots+v_k$
$+v_2\quad+v_3+\ldots+v_k$
$+v_3+\ldots+v_k$
$\ldots+v_k$

partition

则有 $n=\lambda_1+\cdots+\lambda_k$ 且 $\lambda_1\geqslant\ldots\geqslant\lambda_k>0$, 称为 n 的一个 划分, 记作 $[\lambda_1\ldots\lambda_k]$

定理 n 的划分的个数等于 $\mathbf{S}_n$ 的共轭类个数

「排列组合」每个类中元素个数为 $\rho^{[\lambda]}=\dfrac{n!}{\prod i^{v_i}\prod(v_i!)}$

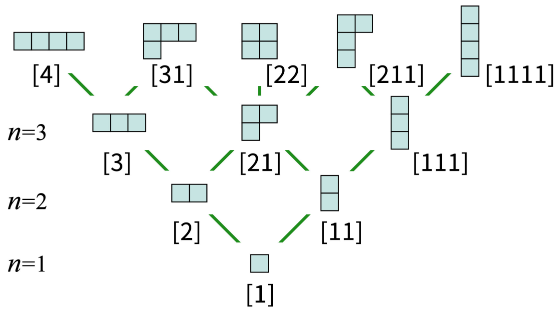
例 $\rho^{[n]}=1$ (只有单位元) $\rho^{[1\ldots1]}=(n-1)!$ (1 个长度为 n)

Young diagram　　　　　　　　dual Young diagram

杨图 $[\lambda]$, 第 i 行有 λ_i 个格, 互为转置的称为 对偶杨图

Young tableau

在杨图中填入正整数 (表示单粒子态) → 杨盘



Weyl

(n 表示粒子个数) 外尔盘 ① 行 (全对称态) 从左到右不减小 ② 列 (反对称态) 从上到下严格增

standard Young tableau　dictionary order

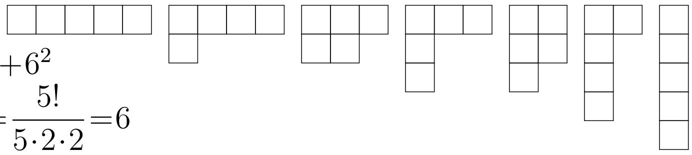
每格的数字都不重复 → 标准杨盘 $T_i^{[\lambda]}$, 字典顺序 逐格比较, 数小的在前

$T_1^{[21]}=\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}$, $T_2^{[21]}=\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}$

「排列组合数学归纳」**定理** 给定杨图的标盘个数 $f^{[\lambda]}=\dfrac{n!}{\prod g_{ij}}$

hook length
钩长 g_{ij} 该格子及其右方和下方的格子数 **性质** 对偶杨图的标盘个数相等 **例** $f^{[n]}=f^{[1\dots1]}=1$

Young
杨定理 $\mathbf{S}_n$ 的对应杨图 $[\lambda]$ 的 IR 的维数等于 $f^{[\lambda]}$ **例**



$\mathbf{S}_5$, 有 7 个类, 伯恩萨德验证: $5!=120=2\cdot(1^2+4^2+5^2)+6^2$

$f^{[41]}=f^{[2111]}=\dfrac{5!}{5\cdot3\cdot2}=4,\ f^{[32]}=f^{[221]}=\dfrac{5!}{4\cdot3\cdot2}=5,\ f^{[311]}=\dfrac{5!}{5\cdot2\cdot2}=6$

row permutation
行置换 $\hat{R}(T)\leqslant\mathbf{S}_n$, 包含标盘 T 中同行数字间的置换及它们的乘积,

column permutation
列置换 $\hat{C}(T)\leqslant\mathbf{S}_n$, 同理

例 对标盘 $\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&4\\\hline\end{array}$ 有 $\hat{R}=\{e,(12),(34),(12)(34)\}$, $\hat{C}=\{e,(13),(24),(13)(24)\}$

symmetrizing operator
对称化算符 $\hat{P}(T)=\sum g\in\hat{R}$

antisymmetrizing operator
反对称化算符 $\hat{Q}(T)=\sum \pm g\in\hat{C}$, 奇置换取负, 偶置换取正

Young operator
杨算符 $\hat{E}(T)=\hat{P}(T)\hat{Q}(T)$ **结论** 同一杨图不同杨盘算出的杨算符不独立, 标盘的才独立

性质 若有两个数字既在杨盘 T_1 的同一行, 又在杨盘 T_2 的同一列, 则 $\hat{E}(T_1)\hat{E}(T_2)=0$

置换群表示

定理 同一杨图 $[\lambda]$ 的不同标盘间必存在置换 σ_{ij} 使 $\sigma_{ij}T_j^{[\lambda]}=T_i^{[\lambda]}$ **例** $(23)T_1^{[21]}=T_2^{[21]}$

任意设函数 ψ_i 与标盘 T_i 对应, 然后由 $T_j=\sigma_{ji}T_i$ 得 $\psi_j=\sigma_{ji}\psi_i$, 由此得到 $f^{[\lambda]}$ 个基函数

定理 用杨算符可构造一组具有确定置换对称性的函数基 $\varPsi_i=\hat{E}(T_i^{[\lambda]})\psi_i$ 来荷载不可约表示 $[\lambda]$

最后把 $(n-1)$ 个生成元 $(12)\sim(k-1\ k)$ 作用到基 $\varPsi_i(1,2,\dots,n)$, $i=1\sim f^{[\lambda]}$ 即可得 IR

$\mathbf{S}_3$ 例 $T^{[3]}=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline\end{array}$, $T^{[111]}=\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 3\\\hline\end{array}$, 表示均为 1 维, 设基函数为 $\psi=\psi(123)$, 则

$\hat{E}(T^{[3]})\psi(123)=[(1)+(12)+(13)+(23)+(13)(12)+(12)(13)]\psi(123)$ (全对称)

$\varPsi=\psi(123)+\psi(213)+\psi(321)+\psi(132)+\psi(231)+\psi(312)$ 元素作用在基上, 得恒等表示

$\hat{E}(T^{[111]})\psi(123)=[(1)-(12)-(13)-(23)+(13)(12)+(12)(13)]\psi(123)$ (同斯莱特行列式, 全反对称)

$\varPsi=\psi(123)-\psi(213)-\psi(321)-\psi(132)+\psi(231)+\psi(312)$ $(12)\varPsi=-\varPsi\rightarrow A(12)=-1$

$\{T_1^{[21]},T_2^{[21]}\}$ 对应 2 维表示, 设 T_1 对应基函数为 $\psi_1=\psi(123)$, 由 $T_2=(23)T_1$ 得 $\psi_2=\psi(132)$,

$\varPsi_1=\hat{E}(T_1^{[21]})\psi_1=[(1)+(12)][(1)-(13)]\psi(123)=\psi(123)+\psi(213)-\psi(321)-\psi(312)$

$\varPsi_2=\hat{E}(T_2^{[21]})\psi_2=[(1)+(13)][(1)-(12)]\psi(132)=\psi(132)+\psi(312)-\psi(231)-\psi(213)$

元素作用到基 $\varPsi_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $\varPsi_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 上推出矩阵表示: $(12)\varPsi_1=\varPsi_1$, $(12)\varPsi_2=-\varPsi_1-\varPsi_2\rightarrow A(12)=\begin{bmatrix}1&-1\\0&-1\end{bmatrix}$

求出 $(n-1)$ 个生成元的表示即可 $A(23)=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ (然后还得幺正化)

后来马后炮总结出了 $\mathbf{S}_n$ 的 $A_{ij}^{[\lambda]}(k-1,k)$ 的 UIR 的规律: 若 $k-1$ 和 k

① 在标盘 $T_i^{[\lambda]}$ 同一行, 则 $A_{ii}=1$ ② 在标盘 $T_i^{[\lambda]}$ 同一列, 则 $A_{ii}=-1$

③ 不同行列, 且 $(k-1,k)T_i^{[\lambda]}=T_j^{[\lambda]}$, 则 $\begin{bmatrix}A_{ii}&A_{ij}\\A_{ji}&A_{jj}\end{bmatrix}^{[\lambda]}=\begin{bmatrix}-\rho&\sqrt{1-\rho^2}\\\sqrt{1-\rho^2}&\rho\end{bmatrix}$ ④ 其它 $A_{ij}=0$

axial distance
ρ 是轴距离的倒数 ρ^{-1}, 向左向下数 $+1$, 向右向上数 -1 (如相邻格子距离 ±1)

$\mathbf{S}_3$ 例 $A^{[21]}(12)=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$, $A^{[21]}(23)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&\sqrt{3}\\\sqrt{3}&1\end{bmatrix}$

分支律

用轮换结构 $(i^{\nu_i}\dots)$ 来标记类 (便于数元素数)

$\mathbf{S}_3$ 特征标	(111)	(21)		(3)	
$\chi^{[3]}$	1	1		1	
$\chi^{[21]}$	2	0		-1	
$\chi^{[111]}$	1	-1		1	
$\mathbf{S}_4$ 特征标	(1111)	(211)	(22)	(31)	(4)
元素个数	1	6	3	8	6
$\chi^{[4]}$	1	1	1	1	1
$\chi^{[31]}$	3	1	-1	0	-1
$\chi^{[22]}$	2	0	2	-1	0
$\chi^{[211]}$	3	-1	-1	0	1
$\chi^{[1111]}$	1	-1	1	1	-1

分支律 $\mathbf{S}_4 \downarrow \mathbf{S}_3$

「 $\mathbf{S}_4$ 中含有 $\mathbf{S}_3$ 元素的就那 3 个类 」

$\chi^{[4]}=\chi^{[3]}$ $\ytableaushort{{}{}{}\times}$

$\chi^{[31]}=\chi^{[3]}+\chi^{[21]}$ $\ytableaushort{{}{}\times,\times}$

$\chi^{[22]}=\chi^{[21]}$ $\ytableaushort{{}{},{}\times}$

$\chi^{[211]}=\chi^{[21]}+\chi^{[111]}$ $\ytableaushort{{}\times,{},\times}$

$\chi^{[1111]}=\chi^{[111]}$ $\ytableaushort{{},{},{},\times}$

branching rule

分支律 就是对量子数取值的约束

例 ($\vec{L}\perp\vec{A}$ 限制了 $n_2=0$) 给定 n_1，则 $l=0,1,\dots,(n_1-1)$

给定 l，则 $m=-l,\dots,l$ → 由群链给出氢原子波函数 $|nlm\rangle$

	$\mathbf{SO}(4)$	$\supset$	$\mathbf{SO}(3)$	$\supset$	$\mathbf{SO}(2)$
IR	(n_1,n_2)		$D^{(l)}$		$\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}$

置换群直积

同一群的不同 IR 直积的分解尚无规律, 只有一个 **定理** $[\lambda_1]$ 和 $[\lambda_2]$ 对偶 ⇔ 直积分解包含一次 $[1^n]$

两个群 $\mathbf{S}_{n_1},\mathbf{S}_{n_2}$ 的 IR 的直积, 记为 $[\lambda]\otimes[\mu]=\bigoplus a_\nu[\nu]$, 其中 $[\nu]$ 是 $\mathbf{S}_{n_1+n_2}$ 的不可约表示

设各自的基为 $\Psi^{[\lambda]}_{1\sim n_\lambda},\Phi^{[\mu]}_{1\sim n_\mu}$, 则新的基由 $\{\Psi_i\Phi_j\}$ 组成, 且还要考虑两组粒子 n_1+n_2 之间的置换 →

共需 $\dfrac{(n_1+n_2)!}{n_1!n_2!}n_\lambda n_\mu$ 个基分量

Littlewood

利特伍德规则 不同群的 IR 直积分解规律 ① 在杨图 $[\mu]$ 的第 i 行都标上数字 i

② 杨图 $[\nu]$ 由在杨图 $[\lambda]$ 上添加杨图 $[\mu]$ 的方格构成

③ 原来同行的不能同列(⇔ 同列标号严格增) , 原来同列的也不能同行 「否则对称性反了」

④ 从右往左从上往下数, 无论数到哪, 小的数出现的次数总不少于大的数出现次数

例 两个双态直积分解为三重态和单态 $[2]\otimes[2]=[3]\oplus[1]$ $\ydiagram{1}\otimes\ytableaushort{1}=\ytableaushort{{}1}\oplus\ytableaushort{{},1}$

对于 $\mathbf{SU}(3)$, 一个方格表示夸克基本三重态 →

3 味夸克 +3 味反夸克 = 介子 8 重态 + 单态 $[3]\otimes[\bar{3}]=[8]\oplus[1]$

重子有十重态, 两种不同对称性的八重态, 单态 $[3]\otimes[3]\otimes[3]=[10]\oplus[8]_1\oplus[8]_2\oplus[1]$

$\left(\ydiagram{2}\oplus\ydiagram{1,1}\right)\otimes\ytableaushort{1}=\ytableaushort{{}{}1}\oplus\ytableaushort{{}{},1}\oplus\ytableaushort{{}1,{}}\oplus\ytableaushort{{},{},1}$

外尔盘

外尔盘的个数就是 $V_r^{[\lambda]}$ 中基矢量个数, 即 $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ 的 IR 的维数 **罗宾逊公式** (Robinson) $\dim[\lambda]=\dfrac{\prod_{i,j}(n+j-i)}{g_{ij}}$

例 对于 $\mathbf{SU}(2)$, 分子为 $\ytableaushort{23,1}$, 钩长为 $\ytableaushort{31,1}$, 维数 $=2$ 对于 $\mathbf{SU}(3)$, 分子为 $\ytableaushort{34,2}$, 维数 $=8$

$\ytableaushort{11}=\psi(11)$, $\ytableaushort{22}=\psi(22)$, $\ytableaushort{12}=\frac{1}{\sqrt{2}}[\psi(12)+\psi(21)]$, $\ytableaushort{1,2}=\frac{1}{\sqrt{2}}[\psi(12)-\psi(21)]$

应用: 经典李群的张量表示

结论 投影算符就是杨算子

$V_r^{[\lambda]}=\hat{E}(T_r^{[\lambda]})V^{(k)}$ 是 $\mathbf{GL}(n)$ 的不变子空间

$\mathbf{GL}$ 的 IR 可用 $[\lambda]$ 标记 (表示还没做出来, 但名字能起出来了)

general linear group

一般线性群 $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R}\text{或}\mathbb{C})$, 要求 $|M|\neq 0$, 即 n 阶可逆矩阵乘群

special linear group

特殊线性群 $\mathbf{SL}(n)$, 要求 $|M|=1$

$\mathbf{SL}(n,\mathbb{R})\trianglelefteq\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$, $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})/\mathbf{SL}(n,\mathbb{R})\cong\mathbb{R}^*$

orthogonal group

(本笔记均指实数域) **正交群** $\mathbf{O}(n)$ 需 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 个独立参数「约束方程 $O^TO=I$, 上下三角的 $=0$ 对称」
$\mathbf{O}(n)=\mathbf{SO}(n)\otimes\{I,-I\}$「$|O|=\pm 1$」 **例** $\mathbf{O}(1)=\{\pm 1\}$, $\mathbf{SO}(1)=\{1\}$

二维空间转动群 $\mathbf{SO}(2)=\{R_z(\theta)|-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi\}$ **例** $\mathbf{D}_n$ 是 $\mathbf{O}(2)$ 的离散子群 (反射对应行列式 -1)
(参数群可用数学分析方法) 由于 $\mathbf{SO}(2)$ 阿贝尔, 表示一维, 设 $A=\{a(\theta)\}$, 已知乘法关系为 $a(\theta_1+\theta_2)=a(\theta_1)a(\theta_2)$, 两边对 θ_1 求导后令 $\theta_1=0$, 得 $a'(\theta_2)=a(\theta_2)a'(0)$, 为使幺正取 $a'(0)=\mathbf{i}m$ 纯虚, 解得 $a(\theta)=\mathrm{e}^{\mathbf{i}m\theta}$, 由周期性 $a(\theta)=a(\theta+2\pi)$ (费米子是 $+4\pi$), 得 $m\in\mathbb{Z}$, 证不可约 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\chi^{m*}\chi^{m'}\,\mathrm{d}\theta=\delta_{mm'}$
「特征标就是本身」 群表示的直积 $\mathbf{T}^{(m_1)}\otimes\mathbf{T}^{(m_2)}=\mathbf{T}^{(m_1+m_2)}$

three dimensional rotation group

三维空间转动群 $\mathbf{SO}(3)\trianglelefteq\mathbf{O}(3)$, 均由 3 个**群参数**表示 (独立, 实数), 群元素写法:
定理 $\forall g\in\mathbf{SO}(3)$, $\exists\vec{n}\in E^3$, 使 $g\vec{n}=\vec{n}$「本征方程 $|g-I|=0$」$\to$ 定义 $\vec{n}$ 为**转轴**
$\mathbf{SO}(3)$ 的 3 种表示方法:
① $R_{(\theta,\varphi)}(\psi)$, $0\leqslant\psi\leqslant\pi$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, $0\leqslant\varphi<2\pi$ $\to$ 映射到半径 π 球面上 (ψ,θ,φ)
(球面上的点是二对一 $R_n(\pi)=R_{-n}(\pi)$ $\to$ 在四维空间连起来〈拓扑〉)
② 固定系, $R_{(\theta,\varphi)}(\psi)=R_z(\varphi)R_y(\theta)R_z(\psi)R_y^{-1}(\theta)R_z^{-1}(\varphi)$, 其中 $R_z=\begin{bmatrix}\cos & -\sin & 0\\ \sin & \cos & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $R_y=\begin{bmatrix}\cos & 0 & \sin\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin & 0 & \cos\end{bmatrix}$ $\to$ 矩阵
(展开表达式很长, 此处略) **结论** 迹为 $2\cos\psi+1$
共轭为 $gR_{\vec{n}}(\psi)g^{-1}$, ① 求其轴, $(gRg^{-1}g)\vec{n}=g\vec{n}$ $\to$ 轴为 $g\vec{n}$ ② 求转角, 相似保迹, 特征标 $=2\cos\psi+1$
$\to$ 转角还是 ψ ③ $gR_{\vec{n}}(\psi)g^{-1}=R_{g\vec{n}}(\psi)$, g 遍取 $\to$ **定理** 转角 ψ 相同的构成一类
③ 欧拉角 $g(\alpha,\beta,\gamma)=R_{z''}(\gamma)R_{y'}(\beta)R_z(\alpha)$, $0\leqslant\alpha<2\pi, 0\leqslant\beta\leqslant\pi, 0\leqslant\gamma<2\pi$「见理力」$=R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)$
$\to$ 同②写出矩阵形式 (缺点: $\beta=0$ 时, $\alpha+\gamma$ 相同的都对应同一旋转, $\beta=\pi$ 时, $\alpha-\gamma$ 都对应同一旋转)

rotations about a fixed point in four-dimensional Euclidean space

四维空间转动群 $\mathbf{SO}(4)\cong\mathbf{SO}(3)\otimes\mathbf{SO}(3)$ 是一个非阿贝尔紧致 6 维李群
氢原子, $\frac{1}{r}$ 势特殊, 有角动量守恒和龙格矢守恒

(正交群是实数版的幺正群, 是子群) 物理上, 正交群用于欧氏空间, 幺正群用于内禀空间

unitary group

(本笔记均指复数域) **幺正群** $\mathbf{U}(n)$ 需 n^2 个独立实参数「$2n^2-$ 对角线 $-2\times$ 上三角」
「$|U|^2=1\to|U|=\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}$, 要求 $\theta=0$ $\to$」 $\mathbf{SU}(n)$ 需 (n^2-1) 个群参数
$\mathbf{U}(n)=\mathbf{SU}(n)\otimes\mathbf{U}(1)$, 如 QCD 引入 $\lambda_0=I_3\to$ $\mathbf{U}(3)=\mathbf{SU}(3)\otimes\mathbf{U}(1)$
例 $\mathbf{SU}(1)=\{e\}$ **例** $\mathbf{U}(1)=\{\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}\}\cong\mathbf{T}\cong\mathbf{SO}(2)\cong\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\theta\in\mathbb{R}$, 描述轻子、重子数守恒,
局部 $\mathbf{U}(1)$ 描述 QED (生成元是电荷/弱超荷 Y)

two dimensional special unitary group

Cayley-Klein

二维特殊幺正群 群元素写法: $u=\begin{bmatrix}a & b\\ -b^* & a^*\end{bmatrix}$, $|a|^2+|b|^2=1$ (亦为一个忠实表示), $a,b\in\mathbb{C}$ 称为 **CK 参数**

$\mathbf{SU}(2)\overset{2:1}{\sim}\mathbf{SO}(3)$ 定义零迹厄米矩阵 $h\equiv\vec{r}\cdot\hat{\vec{\sigma}}=\begin{bmatrix}z & x-\mathbf{i}y\\ x+\mathbf{i}y & -z\end{bmatrix}$, 在 $\mathbf{SU}(2)$ 中的变换 $uhu^\dagger=h'=\vec{r}'\cdot\hat{\vec{\sigma}}$, 对应到 $\mathbf{SO}(3)$ 中的变换 $\vec{r}'=R_u\vec{r}$, 因 $|h|=-x^2-y^2-z^2=|h'|$ 矢长不变, 故 R_u 是正交变换, 再证保乘, $|R_u|=+1$

$$R_u=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(a^2+a^{*2}-b^2-b^{*2}) & \frac{\mathbf{i}}{2}(-a^2+a^{*2}-b^2+b^{*2}) & -(ab+a^*b^*)\\ \frac{\mathbf{i}}{2}(a^2-a^{*2}-b^2+b^{*2}) & \frac{1}{2}(a^2+a^{*2}+b^2+b^{*2}) & -\mathbf{i}(ab-a^*b^*)\\ (a^*b+ab^*) & \mathbf{i}(a^*b-ab^*) & (aa^*-bb^*)\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{a=\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\alpha},\ b=0}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\alpha/2} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{\mathbf{i}\alpha/2}\end{bmatrix}\to R_z(\alpha)$$

$$\xrightarrow{a=\cos\frac{\beta}{2},\ b=-\sin\frac{\beta}{2}}\begin{bmatrix}\cos\beta/2 & -\sin\beta/2\\ \sin\beta/2 & \cos\beta/2\end{bmatrix}\to R_y(\beta)$$

CK 关系 $a=\cos\frac{\beta}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\mathbf{i}}{2}(\alpha+\gamma)}$, $b=-\sin\frac{\beta}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\mathbf{i}}{2}(\alpha-\gamma)}$ 证满射

研究同态核, $\alpha=0,2\pi$ 对 $\mathbf{SU}(2)$ 来说不一样 $\to$ $\mathbf{SO}(3)$ 单位元的原像有两个: $\pm I_2$

求其它 IR 可以从已知 IR (那个忠实表示) 做直积然后分解直和得新 IR, 矩阵分解难, 用空间分解, 可用基 $(\vec{e_1},\vec{e_2})$ 或坐标 (x_1,x_2) 做, 选后者吧, $(x_1,x_2)\otimes(x_1,x_2)=(x_1^2,x_1x_2,x_2x_1,x_2^2)$, 规律: 齐次单项式, 故 选基函数 $f_m^j=x_1^{j+m}x_2^{j-m}$, $m=-j,\ldots,j$ (方便以后解释为角动量) 为使表示幺正还需除常数 $\sqrt{(j+m)!(j-m)!}$

作用上去, 把 $(ax_1+bx_2)^{j+m}(-b^*x_1+a^*x_2)^{j-m}$ 展开, 之后都是机械活 得 $\forall\neq$IUR 为

$$A^{(j)}_{mm'}(u)=\sum_k\frac{(-1)^{k-m+m'}\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{(j+m-k)!(j-m'-k)!(k-m+m')!k!}\times a^{j+m-k}(a^*)^{j-m'-k}b^k(b^*)^{k-m+m'}$$

$A^{(j)}(u)$, $j=0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},\ldots$, $\max(0,m-m')\leqslant k\leqslant\min(j+m,j-m')$

① 证不等价: j 不同维数不同, ② 幺正: 后来除的常数, ③ 证完备: 先对角化成 $\mathrm{diag}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi\cdots}\right]$ 再求特征标 $\chi^{(j)}(\varphi)=1+2(\cos\frac{1}{2}\varphi+\cos\varphi+\cos\frac{3}{2}\varphi+\cdots+\cos j\varphi)$,

当 j 遍取时 $\{1,\cos\frac{1}{2}\varphi,\cos\varphi,\cos\frac{3}{2}\varphi,\ldots\}$ 是傅氏变换基, 故 $\chi^{(j)}(\varphi)=\sum_{m=-j}^{j}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}\xlongequal{\text{等比数列}}\frac{\sin(2j+1)\varphi/2}{\sin\varphi/2}$

定理 特征标是类函数空间完备系 $\Leftrightarrow$ 全部的 UIR

④ 证不可约: 特征标内积正交归一, 群平均为积分 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\chi^{(j_1)}\chi^{(j_2)}(1-\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi=\delta_{j_1j_2}$ (双值需积到 4π)

例 $j=0$, 基 $f_0^0=1$, $A^{(0)}(u)=1$ $\quad j=\frac{1}{2}$, 基 $f_{1/2}^{1/2}=x_1$, $f_{-1/2}^{1/2}=x_1$, $A^{(1/2)}(u)=u=\begin{bmatrix}a & b\\ -b^* & a^*\end{bmatrix}$

$$j=1,\ \text{基}\ f_1^1=\frac{x_1^2}{\sqrt{2}},\ f_0^1=x_1x_2,\ f_{-1}^1=\frac{x_2^2}{\sqrt{2}},\ A^{(1)}(u)=\begin{bmatrix}a^2 & \sqrt{2}ab & b^2\\ -\sqrt{2}ab^* & a^*a-b^*b & \sqrt{2}a^*b\\ b^{*2} & -\sqrt{2}a^*b^* & a^{*2}\end{bmatrix},\ \chi^{(1)}(\varphi)=\frac{\sin\frac{3}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}=2\cos\varphi+1$$

单位元的特征标等于维数 $\lim\limits_{\varphi\to0}\chi^{(j)}(\varphi)=2j+1$

性质 奇偶性 $A^j(-u)=(-1)^{2j}A^j(u)$ (还可用球谐函数基, 后来的事了)

用 CK 关系换参数即得 $\mathbf{SO}(3)$ 的表示 $D^{(j)}$, ⟨ 高量 ⟩ 还可分解为 $D^{(j)}_{mm'}(\alpha,\beta,\gamma)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\alpha}d^{(j)}_{mm'}(\beta)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m'\gamma}$

single-value representation

① j 取整数, $\pm u$ 对应同一个旋转, $D^{(j)}$ 是 $\mathbf{SO}(3)$ 的 单值表示

double-value representation

② j 取半奇数, $g(\alpha)$ 和 $g(\alpha+2\pi)$ 为同一旋转, 却对应不同矩阵 $D^{(j)}(\alpha)=-D^{(j)}(\alpha+2\pi)$, 推广 双值表示

$$d^{(j)}_{mm'}(\beta)=\sum_k\frac{(-1)^k\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{(j+m-k)!(j-m'-k)!(k-m+m')!k!}\times\left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{2j+m-m'-2k}\left(\sin\frac{\beta}{2}\right)^{2k-m+m'}$$

性质
$$d^{(j)}_{mm'}(\beta)=(-1)^{m-m'}d^{(j)}_{m'm}(\beta)\qquad d^{(j)}_{mm'}(\beta)=d^{(j)}_{-m',-m}(\beta)$$
$$d^{(j)}_{mm'}(-\beta)=d^{(j)}_{m'm}(\beta)\qquad d^{(j)}_{mm'}(\pi-\beta)=(-1)^{j-m'}d^{(j)}_{-m'm}(\beta)$$

$\ulcorner\ \chi^{(j_1)}(\varphi)\chi^{(j_2)}(\varphi)=\sum_{m_1=-j_1}^{j_1}\sum_{m_2=-j_2}^{j_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(m_1+m_2)\varphi}\xlongequal{\text{重组}}\sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2}\sum_{m=-j}^{j}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}\ \lrcorner$

Clebsch-Gordon

CG 定理 $D^{(j_1)}\otimes D^{(j_2)}=\bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2}D^{(j)}$ **例** $D^{(2)}\otimes D^{(3)}=D^{(1)}\oplus D^{(2)}\oplus\cdots\oplus D^{(5)}$ $(5\times7=3+5+\cdots+11)$

描述双态都是 $\mathbf{SU}(2)$, 分别自旋和同位旋 $\mathbf{SU}_s(2)\otimes\mathbf{SU}_T(2)$

自旋-轨道耦合是 $\mathbf{SU}(2)\otimes\mathbf{SO}(3)$

$\mathbf{SU}(1,1)\sim\mathbf{SO}(2,1)$

$\mathbf{SU}(3)$, 8 个生成元, 可描述谐振子, 夸克的 3 色 $\lambda_{1\sim8}$ 或 3 味 u,d,s

$$\lambda_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}_{g\leftrightarrow r}\quad\lambda_4=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}_{r\leftrightarrow b}\quad\lambda_6=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}_{b\leftrightarrow g}\quad\lambda_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{array}{c|c}& r\quad g\quad b\\ \hline & \begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\end{array}\ \begin{array}{c}\bar{r}\\ \bar{g}\\ \bar{b}\end{array}$$

$$\lambda_2=\begin{bmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\quad\lambda_5=\begin{bmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{bmatrix}\quad\lambda_7=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{bmatrix}\quad\lambda_8=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$$

单态 $\lambda_9=\frac{1}{\sqrt{3}}(r\bar{r}+g\bar{g}+b\bar{b})$ 无色, 实验证明无色重子不互相作用, 故 $r\bar{r}+g\bar{g}+b\bar{b}=0$

9 种组合 $r\bar{r},r\bar{g},r\bar{b},g\bar{r},g\bar{g},g\bar{b},b\bar{r},b\bar{g},b\bar{b}$, 加上上面的条件, 只有 8 种线性独立的胶子

$\mathbf{SU}(4)\cong\mathbf{O}(6)$, 15 个生成元, 狄拉克群

$\mathbf{SU}(6)=3$味$\otimes 2$自旋

Interacting Boson Model

相互作用玻色子模型 振动谱, 转动谱, γ 不稳定可用一个群描述

子群链为: $\mathbf{U}(6)\supset\left\{\begin{array}{c}\mathbf{U}(5)\\ \mathbf{U}(3)\\ \mathbf{O}(6)\end{array}\right\}\supset\mathbf{O}(3)\supset\mathbf{O}(2)$

张量算符

张量: ① 多分量, 分量数目叫 秩 ② 变换(逆变, 协变) 用途: ① 分类 ② 简化 $\langle jm|T|jm\rangle$ 的计算

P 是和坐标旋转变换 g 相联系的函数变换算符 $\psi(\vec{r})\xrightarrow{\text{坐标旋转}}\psi'(\vec{r})=P_g\psi(\vec{r})$, 幺正, T 是某算符

$T(\vec{r})\psi_1(\vec{r})=\psi_2(\vec{r})$ 「旋转后 $T'(\vec{r})\psi_1'(\vec{r})=\psi_2'(\vec{r})$ 成立 $\to T'P\psi_1=PT\psi_1$」 结论 $T'(\vec{r})=PT(\vec{r})P^\dagger$

Irreducible Tensor Operator

$\mathbf{SO}(3)$ 群的 j 秩 不可约张量算符 $\{T^j_m\}$, $m=-j,-j+1,\ldots,j$, 满足:

① 群视角: 在 $P(\alpha,\beta,\gamma)$ 作用下它的 $(2j+1)$ 个分量按 $D^{(j)}(\alpha,\beta,\gamma)$ 变换: $PT^j_mP^\dagger=\sum_{m'}D^{(j)}_{m'm}T^j_{m'}$

(如果定义成 $\sum_{m'}D^{(j)*}_{m'm}T^j_{m'}$ 则为逆变 ITO)

② 代数: $[J_z,T^j_m]=mT^j_m$, $[J_\pm,T^j_m]=\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}T^j_{m\pm1}$, 其中 $J_\pm\equiv J_x\pm\mathbf{i}J_y$, ($j$ 为整数, 否则双值)

两种定义等价「分别取参数 $(\alpha,-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),(0,\beta,0),(0,0,\gamma)$, 求偏导, 再取它 $=0$」

标量算符 按 $D^{(0)}$ 变换, 即空间旋转不变 例 各向同性的 $\hat{H}$, 自旋轨道相互作用 $\vec{\hat{S}}\cdot\vec{\hat{L}}$

矢量算符 $\begin{bmatrix}r'_{-1}\\ r'_0\\ r'_1\end{bmatrix}=\left(D^{(1)}\right)\begin{bmatrix}r_{-1}\\ r_0\\ r_1\end{bmatrix}$ 例 $\vec{\hat{L}}$ (必须用球谐形式)

其中球谐分量 $J_0=J_z$, $J_{\pm1}=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}J_\pm$ (用笛卡尔分量的话就是个和 $D^{(1)}$ 相似的矩阵)

例 电多极跃迁 $er^lY_{lm}(\theta)$ 是 l 秩 ITO

厄米 ITO $\{T^j\}^\dagger=\{T^j\}$ ($\Leftrightarrow\forall m$, $\{T^j\}^\dagger_m=T^j_m$) 要求 $(T^j_m)^\dagger=(-1)^mT^j_{-m}$

(对一般的 ITO 直接取厄米变成的是逆变的)

Wigner-Eckart

维格纳定理 ITO 在角动量表象 $|jm\rangle$ 下的矩阵元可分为 $\langle j'm'|T^k_q|jm\rangle=\langle j'||T^k||j\rangle\langle j'm'|kqjm\rangle$

(原 CG 系数的符号是 $\langle(j_1j_2)jm|j_1m_1j_2m_2\rangle$, 是实的所以反序也一样)

reduced matrix element　dynamical property

约化矩阵元 $\langle j'||T^k||j\rangle$ 旋转不变, 包含系统的 动力学性质 (CG 系数反映几何性质)

例 标量算符 $\langle j'm'|T^0_0|jm\rangle=\delta_{j'j}\langle j'||T^0||j\rangle$

「取迹, 求和项为 $\sum_{jm}\langle j||T^k||j\rangle\langle jm|kqjm\rangle\to k=0$」 推论 只有标量算符的迹才可能不为零

例 γ 跃迁(电多极辐射) 的选择定则 $\langle j_2m_2|Y_{lm}(\theta,\varphi)|j_1m_1\rangle=\langle j_2||Y_l||j_1\rangle\langle j_2m_2|lmj_1m_1\rangle$

CG 系数非零条件 $\to$ $|j_1-j_2|\leqslant l\leqslant j_1+j_2$, $m=m_1-m_2$? (体现角动量守恒)

李群

continuous group

连续群 (李 1874) 群的元素是连续变量的函数

connected

连续且 连通群 群参数的连续变化可导致从群的任一元素到其它元素

Lie group

李群 群元素是有限个群参数的解析函数 (一致收敛/实光滑/连续可导)

generators

群元素 $g\in G$ 可写成 生成元 T^α 的线性组合 $g=g(\theta_{1\sim N})=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum\theta_\alpha\cdot T^\alpha}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{\theta}\cdot\vec{T}}$, $\theta_\alpha\in\mathbb{R}$

(一般选择参数使 $g(0)=I$ 便于展开)

classical

经典李群 保内积不变的线性群 $\mathbf{U}(n)(\mathrm{A}_n)$, $\mathbf{O}(n)(\mathrm{B}_n,\mathrm{D}_n)$, $\mathbf{Sp}(2n)(\mathrm{C}_n)$

compact　　　　　　　　non-compact

紧致 内积的形式为 $\sum x_i^2$ 非紧致 内积的形式为 $\sum x_i^2-\sum x_j^2$

$\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$	n^2	非连通	非紧
$\mathbf{SL}(n,\mathbb{R})$	n^2-1	连通	非紧
$\mathbf{O}(n,\mathbb{R})$	$\frac{1}{2}n(n-1)$	非连通	紧
$\mathbf{SO}(n,\mathbb{R})$	$\frac{1}{2}n(n-1)$	连通	紧
$\mathbf{Sp}(2n,\mathbb{R})$	$n(2n+1)$	连通	非紧

$\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$	$2n^2$	连通	非紧
$\mathbf{SL}(n,\mathbb{C})$	$2(n^2-1)$	连通	非紧
$\mathbf{O}(n,\mathbb{C})$	$n(n-1)$	非连通	非紧
$\mathbf{SO}(n,\mathbb{C})$	$n(n-1)$	连通	非紧
$\mathbf{U}(n,\mathbb{C})$	n^2	连通	紧
$\mathbf{SU}(n,\mathbb{C})$	n^2-1	连通	紧
$\mathbf{Sp}(2n,\mathbb{C})$	$2n(2n+1)$	连通	非紧

semisimple

单李群 没有非平凡的连续(李的) 正规子群 $\Rightarrow$ 半单李群 没有非平凡的连续阿贝尔正规子群

例外李群 $\mathbf{G}_2$, $\mathbf{F}_4$, $\mathbf{E}_6$, $\mathbf{E}_7$, $\mathbf{E}_8$

Lie algebra　　　　　　　Lie product / commutator

李代数 是一线性空间, 定义 李积 / 对易子 $[x,y]=xy-yx$, 该运算需满足:

closure　bi-linearity　anti-commutation　Jacobi identity

① 封闭性 ② 双线性 ③ 反对易 ④ 雅可比恒等式

(代数就是有乘也有加) 例 向量积 $(\{\vec{v}\},+,\times)$ 满足李代数

structure constant

只要知道所有生成元的李积 $[T_i,T_j]=\sum C_{ij}^k T_k$ 就可确定任意元素李积 $\rightarrow$ 结构常数 C_{ij}^k

性质 反对易 $\rightarrow C_{ij}^k=-C_{ji}^k$, 雅可比 $\rightarrow \sum_{k=1}^n [C_{ij}^k C_{kq}^p + C_{jq}^k C_{ki}^p + C_{qi}^k C_{kj}^p]=0$

李代数的维数是指生成元的个数, 等于相应李群的群参数个数

例 平移群, 阿贝尔, 实际上是 3 个 1 维李群之积

单李代数 除了零和本身之外没有其它理想 半单李代数 能表为单李代数的直和

infinitesimal group element

李氏定理 李群的 无穷小群元素 满足上述李代数的定义 (李代数刻画李群在单位元邻域的性质)

设无穷小群元素 $\delta_U=I-\mathbf{i}T$, 由 $U^{-1}=U^\dagger$, 得 $T=T^\dagger$「$\mathbf{e}^T=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T^n}{n!}$」$\rightarrow U=\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta T}$

(如果设 $U=I+\mathbf{i}T$ 就是 $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta T}$, 即被动变换, 数学上甚至设 $U=I+T$ 因为不管厄米)

群 $\rightarrow$ 代数: 微扰展开到一阶, 代数 $\rightarrow$ 群: 指数映射 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{T}{n})^n=\mathbf{e}^T$

例 二阶矩阵可用泡利阵展开 $T=r_0 I_2+\vec{r}\cdot\hat{\vec{\sigma}}$,「$(\hat{\vec{\sigma}}\cdot\vec{a})(\hat{\vec{\sigma}}\cdot\vec{b})$ 公式可证完备」$\mathbf{SU}(2)$ $r_0=0$,

$$\rightarrow U=\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\vec{r}\cdot\hat{\vec{\sigma}}}=\sum_{n=0}\frac{(-\mathbf{i}\vec{r}\cdot\hat{\vec{\sigma}})^n}{n!}=\begin{bmatrix}\cos r-\mathbf{i}\frac{z}{r}\sin r & -\mathbf{i}\frac{x}{r}\sin r-\frac{y}{r}\sin r\\ -\mathbf{i}\frac{x}{r}\sin r+\frac{y}{r}\sin r & \cos r+\mathbf{i}\frac{z}{r}\sin r\end{bmatrix}$$「证幺正, $\det=1$」$\in\mathbf{SU}(2)$

3 个生成元: $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$, 结构为 $[\sigma_x,\sigma_y]=2\mathbf{i}\sigma_z$

例 设 $\delta_O=I_3+\mathbf{i}J$「$O^{-1}=O^T$」$J^T=-J$ 反对称, 可用角动量基展开:

$$J_x=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-\mathrm{i}\\0&\mathrm{i}&0\end{bmatrix}, J_y=\begin{bmatrix}0&0&\mathrm{i}\\0&0&0\\-\mathrm{i}&0&0\end{bmatrix}, J_z=\begin{bmatrix}0&-\mathrm{i}&0\\\mathrm{i}&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$ $\rightarrow$ 可得 SO(3) 的表示之②

结构为 $[J_x,J_y]=\mathbf{i}J_z$, $\vec{J}=\frac{1}{2}\vec{\sigma}$ $\rightarrow$ $\mathfrak{su}(2)\cong\mathfrak{so}(3)$ 局部同构 李代数相同, 则在单位元附近一一对应 (种子一样), 但群参数空间不同 (SU(2) 是半径 2π 的球) (生长不一样), 结果群不同构

$\mathfrak{so}(n)\cong\mathfrak{o}(n)$「因为单位元不在 $\det=-1$ 那一叶里」

3 种求代数表示方法:

Casimir operator　　　　　　　　　　　　　　Cartan

① 构造 卡西米尔算符 和所有生成元都对易 (必存在) 剩下的两两重组成 嘉当算符 $J^{\pm}$

recurrence equation　　　　　　　highest weight　　lowest weight

得 递推关系, 由于是有限维不可约表示空间, 故 m 必有最大值 最高权 最小值 最低权

例 $[J^2,J_i]=0$, 和 J_z 标记基函数 $|jm\rangle$, 用球谐形式 $J_{\pm1}=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}(J_x\pm\mathbf{i}J_y)$, 最高低权记为 $\pm j$

Conden-Shortley
CS 惯例 J^- 开根号取正 $J^-|jm\rangle=\sqrt{\frac{1}{2}(j+m)(j-m+1)}$, J^+ 开根号取负 $J^+|jm\rangle=-\sqrt{\frac{1}{2}(j-m)(j+m+1)}$
(未来可保证 CG 的 S 矩阵实幺正)

boson realization
② 玻色子实现 角动量算符 $\vec{J}$ 的三个分量可用两组玻色子算符描述 $\vec{J}=\frac{1}{2}A^\dagger\vec{\sigma}A$, $A=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}$
可验证 $J^+=a_1^\dagger a_2$, $J^-=a_1a_2^\dagger$, $J_z=\frac{1}{2}(n_1-n_2)$, $J^2=\frac{1}{4}(n_1+n_2)(n_1+n_2+2)$ 满足李代数结构
基函数天然就是 $|n_1,n_2\rangle=\dfrac{(a_1^\dagger)^{n_1}(a_2^\dagger)^{n_2}}{\sqrt{n_1!n_2!}}|00\rangle$ 得递推式同①
(一个玻色子也可以, 方法有无数种, 链接凝聚态中的 HP 变换)

③ 微分实现 $[\hat{a},\hat{a}^\dagger]=1\leftrightarrow[\frac{\partial}{\partial x},x]=1$, $J^+=x\frac{\partial}{\partial y}, J^-=y\frac{\partial}{\partial x}, J_z=\frac{1}{2}(x\frac{\partial}{\partial x}-y\frac{\partial}{\partial y})$ 作用到坐标函数空间
用同②的基函数 $|jm\rangle=\dfrac{x^{j+m}y^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}$

反对易的叫 泊松代数
李积加上 $\{x,y\}$ 叫 超代数, 数学叫超群, 物理叫超对称
$[x,y]_q=xy-qyx\rightarrow$ 量子群
去掉有限条件 $\rightarrow$ 无限维李代数

参考文献

精

韩世安. 近世代数（第二版）. 科学出版社 (数学专业, 讲群环域, 推导很详细)
Elliott. Symmetries in Physics. Macmillan (完整讲群和群表示论以及物理应用)
└ 中译: 仝道荣. 物理学中的对称性. 科学出版社
清华大学群论课程讲义

参

Serre. Linear Representation of Finite Groups
└ 中译: 郝錡新. 有限群的线性表示. 科学出版社
Greiner. Quantum Mechanics Symmetries. Springer (讲李群)
└ 中译: 钱裕昆. 量子力学: 对称性. 北京大学出版社 (不确定这本书是放数学还是放粒子物理里…)
韩其智. 群论. 北京大学出版社 (不适合初学)

编者：LePtC　笔记项目主页：http://leptc.github.io/lenote

Last compiled on 2015/07/07 at 13:12:00