电

电动力学

E

笔记项目主页：http://leptc.github.io/lenote

精

Griffiths, Introduction to Electrodynamics (3rd ed). Pearson
└ 中译: 贾瑜. 电动力学导论. 机械工业出版社

参

俞允强. 电动力学简明教程. 北京大学出版社 (会讲推导的思路)
虞福春. 电动力学（修订版）. 北京大学出版社 (讲的很全)

符号约定

源点 $\vec{r}'$, 场点 $\vec{r}$, 相对位矢 $\vec{\mathscr{r}} \equiv \vec{r} - \vec{r}'$ (源点指向场点) 单位相对位矢 $\vec{e_{\mathscr{r}}}$, 不再特别写重积分号
$\vec{\Sigma}$ 为矢量面积, 引入能流 S 后用 Σ 表示普通面积

相关笔记

相对论见〈狭相〉 波动光学见〈经典光 A〉 电磁辐射应用见〈现光〉〈核物〉

(Last compiled on 2015/11/16 at 21:20:00)

静电学

库仑定律 $\vec F=k_e\frac{q_1q_2}{\mathscr{r}^2}\vec e_{\mathscr{r}}$ **电场强度** $\vec E(\vec r)=k_e\int\frac{\vec e_{\mathscr r}}{\mathscr r^2}\mathrm dq$ 其中 $\mathrm dq=\eta_e(\vec r\,')\mathrm dl'=\sigma_e(\vec r\,')\mathrm dS'=\rho_e(\vec r\,')\mathrm dV'$

($\vec e_{\mathscr r}$ 中含 $\vec r\,'$, 不能拿到积分号外)

「$\vec{\mathscr r}=\sum(x-x')\vec e_x$，若 $\vec r\,'$ 固定, $\partial_x(x-x')^n=n(x-x')^{n-1}$, 故 $\mathscr r$ 的散度公式就是把 r 的都换成 $\mathscr r$」

$\to\nabla\cdot\vec E(\vec r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{有电荷}\nabla_r\cdot\left(\frac{\vec e_{\mathscr r}}{\mathscr r^2}\right)\rho_e(\vec r\,')\mathrm dV'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{全空间}4\pi\delta^3(\vec r-\vec r\,')\rho_e(\vec r\,')\mathrm dV'=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho_e(\vec r)$

「中心场无旋」$\to\nabla\times\vec E=0$ 「$\vec E=-\nabla\varphi$」 **泊松方程** $\nabla^2\varphi=-\rho_e/\varepsilon_0\xrightarrow{\rho_e=0}$ **拉普拉斯方程** $\nabla^2\varphi=0$

电势 $\varphi(\vec r)=k_e\int\frac{1}{\mathscr r}\mathrm dq$ 是局域电荷分布时泊松方程的解 (需预知电荷分布, 否则还是用微分方程)

静电能 W_e 「$=\int_V\varphi\rho_e\mathrm dV=\frac{\varepsilon_0}{2}\int_V\varphi(\nabla\cdot\vec E)\mathrm dV\overset{分部}{=\!=}\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\oint_S\varphi\vec E\cdot\mathrm d\vec S-\int_V\vec E\cdot\nabla\varphi\mathrm dV\right)$, 后者 $\nabla\varphi=-\vec E$, 积分原为有电荷存在区域, 但可扩大到全空间, 体积分项增大, 面积分减少到零, 总和不变」$=\frac{\varepsilon_0}{2}\int_\infty E^2\mathrm dV$

由线性均匀电介质填充后的静电能 $\frac{\varepsilon}{2}\int_V E^2\mathrm dV=\frac12\int_V\vec E\cdot\vec D\mathrm dV$

注 上式不适用于非线性电介质, 因做功不仅和最终状态有关, 还和如何到达它的过程有关

电偶极子

记 $\vec{\mathscr r}_\pm=\vec r\mp\vec l/2$, **电偶极子** $\varphi(\vec r)=k_eq(\mathscr r_+^{-1}-\mathscr r_-^{-1})=-k_eq\vec l\cdot\nabla\left(\frac1r\right)=k_e\frac{\vec p\cdot\vec e_r}{r^2}$ 〈电磁〉

电介质 「总电势是小偶极子的做体积分」 $\varphi(\vec r)=k_e\int_V\frac{\vec P(\vec r\,')\cdot\vec e_{\mathscr r}}{\mathscr r^2}\mathrm dV'=k_e\int_V\vec P\cdot\nabla_{r'}\left(\frac1{\mathscr r}\right)\mathrm dV'\overset{分部}{=\!=}k_e\left(\oint_S\frac1{\mathscr r}\vec P\cdot\mathrm d\vec S'-\int_V\frac1{\mathscr r}\nabla_{r'}\cdot\vec P\mathrm dV'\right)\equiv k_e\left(\oint_S\frac{\sigma_e}{\mathscr r}\mathrm dS'+\int_V\frac{\rho_e}{\mathscr r}\mathrm dV'\right)$, 面电荷 $\sigma_e\equiv\vec P\cdot\vec e_n$, 体电荷 $\rho_e\equiv-\nabla\cdot\vec P$

〈矢分〉$\to\vec E_{偶极}(\vec r)=\frac{k_e}{r^3}[3(\vec p\cdot\vec e_r)\vec e_r-\vec p]$ 「零点发散」还要加一项 $-\frac{\vec p}{3\varepsilon_0}\delta^3(\vec r)$ 才满足平均场定理

「一个偶极子的静电能 $W_e=-\vec p\cdot\vec E$」 两个偶极子相互作用能 $W_互=-\vec{p_1}\cdot\vec{E_2}=\frac{k_e}{r^3}\left[\vec{p_1}\cdot\vec{p_2}-3(\vec{p_1}\cdot\vec e_r)(\vec{p_2}\cdot\vec e_r)\right]$

例 电偶极子位于原点方向朝 $\vec e_z$, 从 xy 平面静止释放一点电荷, 则电荷将在半圆弧上做单摆运动

「$q\vec E=k_e\frac{qp}{r^3}(2\cos\theta\,\vec e_r+\sin\theta\,\vec e_\theta)$, 而单摆的合力 $-mg\vec e_z-T\vec e_r=mg(2\cos\theta\,\vec e_r+\sin\theta\,\vec e_\theta)$」

另外在半顶角 $\theta_c=\tan^{-1}(\sqrt2)$ 的锥面, $\vec E$ 和 xy 面平行, 电荷可做匀速圆周运动

电偶极矩 概念推广 $\vec p=\sum q_i\vec{r_i}$ (纯的电偶极子应使 $l\to0$, $q\to\infty$, p 不变, 才无多极矩)

(若总电量为零, 则偶极矩与原点选择无关, 否则有关, 总电势不受原点影响)

引理 球 R 内 $\vec r$ 处点电荷 q 产生的平均电场, 等于球内均匀分布 $\rho_e\equiv-q/(\frac43\pi R^3)$ 在 $\vec r$ 处产生的电场,

均为 $\vec E_{平均}=k_e(-\rho_e)\int\frac{\vec e_{\mathscr r}}{\mathscr r^2}\mathrm dV'$ (负号是因源点场点互换角色) **平均场定理**

球内所有电荷产生的 $\vec E_{平均}=-k_e\frac{\vec p_{总}}{R^3}$, 球外电荷在球内产生的 $\vec E_{平均}$ 等于其在球心处产生的电场

例 中性原子在静电场中受力 $\vec F=\frac12\alpha\nabla(E^2)$, 而 E^2 亦无局域极值, 故不能用静电场来稳定束缚

边值问题

boundary value problem　　boundary condition

静电场 **边值问题** 给出各带电导体几何形状与位置, 和各导体电荷量或电势 (边界条件)

first uniqueness theorem

第一唯一性定理 区域 V 拉普拉斯方程的解由 V 的边界上的电势唯一确定

「若有两种 φ, 则 $\varphi_3\equiv\varphi_1-\varphi_2$ 满足边界 $\varphi_3=0$ 的拉方程, 拉方程无局域极值, 故 φ_3 为恒零场」

(可推广为泊松方程, 作差亦得拉方程)

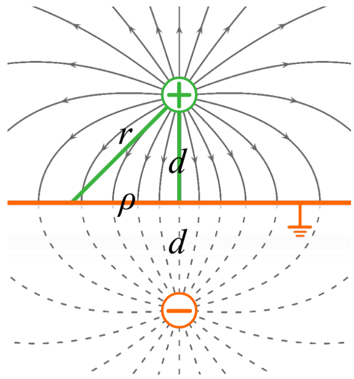
第二唯一性定理 区域 V 中每个导体上总电荷给定, 则电场唯一确定 (可推广到电介质, 换成 $\nabla\cdot(\varphi_3\vec D_3)$)

「$\vec E_3\equiv\vec E_1-\vec E_2$, 则在导体间区域 $\nabla\cdot\vec E_3=0$, 由矢分公式得 $\nabla\cdot(\varphi_3\vec E_3)=-E_3^2$, 边界面 $\oiint_S\vec E_3\cdot\mathrm d\vec S=0$, 高斯定理 $\iiint_V\nabla\cdot(\varphi_3\vec E_3)\mathrm dV=\oiint_S\varphi_3\vec E_3\cdot\mathrm d\vec S$, 已知导体为等势体, 故 φ_3 可提到积分号外, 得 $-\iiint_V E_3^2\mathrm dV=0$」

「开头亦可用第一格林定理 $\iiint_V(\varphi_3\nabla^2\varphi_3+\nabla\varphi_3\cdot\nabla\varphi_3)\mathrm dV=\oiint_S\varphi_3\nabla\varphi_3\cdot\mathrm d\vec S$, 代入 $\nabla^2\varphi_3=0$, $\nabla\varphi_3=-\vec E_3$」

method of image charges

→ 电像法 若能使边界条件适应于解, 则由唯一性它就是解 (以解求题法)



例 导体板一侧的电场, 等于没有导体板而在另一侧有像电荷所共同产生的

$\varphi=k_e q\left[\dfrac{1}{\sqrt{\rho^2+(z-d)^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{\rho^2+(z+d)^2}}\right]$, 导体板表面 $\sigma_e=-\varepsilon_0\partial_z\varphi|_{z=0}=\dfrac{-qd}{2\pi r^3}$,

其中 $r=\sqrt{\rho^2+d^2}$, 或用偶极子场强公式〈电磁〉$\sigma_e=\varepsilon_0(-E_\theta)|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=-\varepsilon_0 k_e\dfrac{p}{r^3}$

可验证总感应电荷 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{-qd}{2\pi(\rho^2+d^2)^{3/2}}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi=\frac{qd}{\sqrt{r^2+d^2}}\Big|_0^{\infty}=-q$

导体板对电荷吸引力亦同点电荷, 半空间的电场能为全空间的一半

性质 像电荷不能放在要求解 φ 的区域 (会改变泊松方程的源)

像电荷的电量必与被替代区域中的总电荷量相等

例 导体板换成 $z<0$ 下半空间充满 ε_r 电介质, $z=d$ 处放点电荷 q「$\sigma_e'=P_z=\varepsilon_0\chi_e E_z$, 电介质内的 E_z 由 q 和 σ_e' 共同产生, 得 $E_z=-k_e\dfrac{q}{r^2}\dfrac{d}{r}-\dfrac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}$, 解出 $\sigma_e'=-\dfrac{\chi_e}{\chi_e+2}\dfrac{qd}{2\pi r^3}$, 和导体板结果对比」得 $q'=-\dfrac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+1}q$

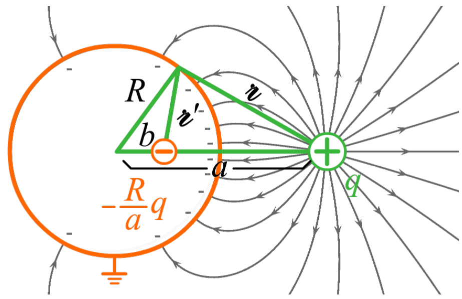
则算 $z>0$ 区域电势时, 像电荷 q' 放在 $z=-d$, 算 $z<0$ 时, 像电荷 $q+q'$ 放在 $z=d$ (均用的是 $1/(4\pi\varepsilon_0)$)

若上半空间为 ε_r' 电介质, 则 $q'=\left(\dfrac{\varepsilon_r'-\varepsilon_r}{\varepsilon_r'+\varepsilon_r}\right)q$, 算 $z>0$ 时, 原 $\dfrac{q}{\varepsilon_r'}$ 像 q' , 算 $z<0$ 时, 像 $\dfrac{q}{\varepsilon_r'}+q'=\dfrac{2q}{(\varepsilon_r'+\varepsilon_r)}$

两平面夹角为 180° 的整数分之一倍亦可用电像法

少数其它形状可以用电像法 **例** 球面「使三角形相似」→ $ab=R^2$

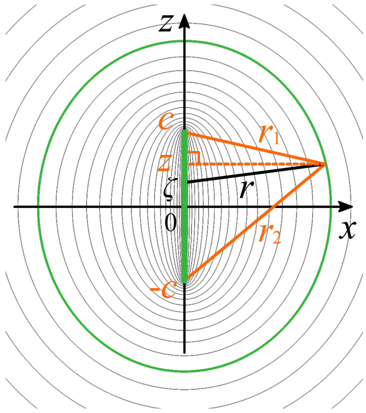
→ $\mathscr{r}:\mathscr{r}'=a:R=R:b=q:|q'|$　二维空间或圆柱面: 换成 $\ln\mathscr{r}$



格林定理

Green's equivalent layer theorem

「唯一性定理」格林等效层定理 等势面包围体积 V 内电荷在 V 外产生的电势, 等价于把等势面换成带同样电荷的导体产生的电势 → 反之, 导体产生的电势亦可用能产生同样等势面的电荷分布代替



例 导体椭球可用其焦点间的均匀带电线段来代替, $\eta_e=q/2c$

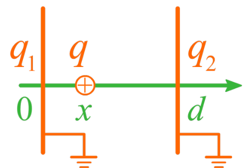
$\varphi=k_e\dfrac{q}{2c}\displaystyle\int_{-c}^{c}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{x^2+(z-\zeta)^2}}=k_e\frac{q}{2}\ln\frac{r_2+z+c}{r_1+z-c}=$常数 记 $(r_2+z_+)=k(r_1+z_-)$

$r_1^2-z_-^2=r_2^2-z_+^2\to(r_1-z_-)=k(r_2-z_+)\to r_1+r_2=$常数 $\dfrac{2c(k+1)}{k-1}\equiv 2a$

Green's reciprocity theorem

格林互易定理 设电荷分布 ρ_{e1} 产生了 φ_1, 另一种分布 ρ_{e2} 产生了 φ_2 (两种情况可以完全不相关) , 则 $\int_\infty\rho_{e1}\varphi_2\,\mathrm{d}V=\int_\infty\rho_{e2}\varphi_1\,\mathrm{d}V$「等式两边都等于 $\varepsilon_0\int(\nabla\varphi_1)\cdot(\nabla\varphi_2)\,\mathrm{d}V$, 因为 $(\nabla\varphi_1)\cdot(\nabla\varphi_2)=\nabla\cdot(\varphi_1\nabla\varphi_2)-\varphi_1(\nabla^2\varphi_2)$, 前者变面积分, 因无穷远 $\varphi\to0$ 积分为零, 后者 $-\nabla^2\varphi_2=\rho_{e2}/\varepsilon_0$」

推论 两个导体, A 带电 q, B 不带电, 电势 φ, 则若 B 带电 q, A 不带电, A 电势亦为 φ

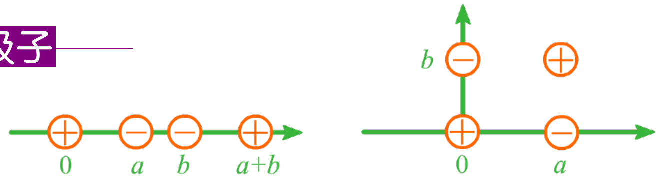


例 两接地无限大导体板相距 d, 在 $0<x<d$ 处放电荷 q, 求感应电荷

构造情况 2: 左板 $\varphi=0$, 右板为 φ_0, 板间没电荷「$\rho_1\varphi_2=0+q\dfrac{x}{d}\varphi_0+q_2\varphi_0=\rho_2\varphi_1=0$」

$q_2=-\dfrac{x}{d}q$, $q_1+q_2=-q$, 同理同心接地导体球壳 $q_a=-\dfrac{qa}{b-a}\left(\dfrac{b}{r}-1\right)$, $q_b=-\dfrac{qb}{b-a}\left(1-\dfrac{a}{r}\right)$

电多极子



〈电磁〉偶极矩为零的 $\boxed{\text{电四极子}}$

〈矢分〉「$|\vec r-\vec r_0|^{-1}$ 的泰勒展开」两种表达式均为

$$\varphi(\vec r)=k_e q\Big(r^{-1}-|\vec r-\vec a|^{-1}-|\vec r-\vec b|^{-1}+|\vec r-(\vec a+\vec b)|^{-1}\Big)=k_e\frac{q(\vec a\,\vec b+\vec b\,\vec a):(3\vec e_r\vec e_r-\overleftrightarrow{I})}{2r^3}=k_e\frac{\overleftrightarrow{\mathscr{D}}:(3\vec e_r\vec e_r-\overleftrightarrow{I})}{2r^3}$$

其中 $\overleftrightarrow{\mathscr{D}}\equiv\sum q_i\vec r_i\vec r_i$ 为二阶对称张量, $\vec r_i$ 为电荷 q_i 的位矢 **例** 共线型只有 $\mathscr{D}_{xx}=2qab$, 方型 $\mathscr{D}_{xy}=\mathscr{D}_{yx}=qab$

由公式可见 $\mathrm{tr}\,\overleftrightarrow{\mathscr{D}}$ 对 φ 没影响, 故定义零迹对称张量 $\boxed{\text{电四极矩}}$ $\overleftrightarrow{D}\equiv3\overleftrightarrow{\mathscr{D}}-(\mathrm{tr}\,\overleftrightarrow{\mathscr{D}})\overleftrightarrow{I}$ (剩 5 个独立分量)

(若总电量, 偶极矩均为零, 则四极矩与原点选取无关) **例** 球对称系统, $\overleftrightarrow{\mathscr{D}}$ 三个对角元相等, $\overleftrightarrow{D}=0$

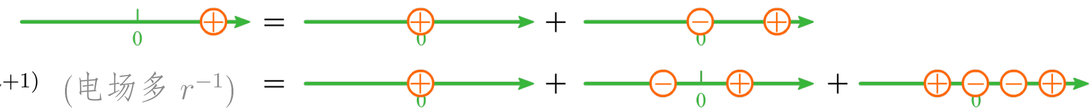
例 z 轴均匀带电椭球, 仅 1 个独立量, $\overleftrightarrow{D}=\begin{bmatrix}-D_{zz}/2 & 0 & 0\\ 0 & -D_{zz}/2 & 0\\ 0 & 0 & D_{zz}\end{bmatrix}$, 四极势 $\varphi_2=k_e\dfrac{D_{zz}}{4r^3}(3\cos^2\theta-1)$

对于形状 $\dfrac{x^2+y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{a^2}=1$, 电四极矩 $Q\equiv\frac{1}{q}\int\big(3(z')^2-(r')^2\big)\,\mathrm{d}q=\frac{2}{5}(a^2-b^2)$, $Q>0$ 长椭球, $Q<0$ 扁椭球

〈核物〉原子核看作 $q=Ze$ 均匀分布于椭球内, 基态空间反射对称, 故没有电偶极矩, 只有零, 四, 十六等

multipole expansion

$\boxed{\text{电多极展开}}$



电 2^n 极势衰减 $\propto r^{-(n+1)}$ (电场多 r^{-1})

张量表示 $\varphi=k_e\Big(\dfrac{q}{r}+\dfrac{\vec p\cdot\vec e_r}{r^2}+\dfrac{\overleftrightarrow{D}:\vec e_r\vec e_r}{2r^3}+\dots\Big)\xlongequal{\text{分量表示}}k_e\Big(\dfrac{q}{r}+\dfrac{\sum p_i\,\vec e_i}{r^2}+\dfrac{\frac12\sum Q_{ij}\,\vec e_i\vec e_j}{r^3}+\dots\Big)$

记 $\mathrm{d}q=\rho_e(\vec r\,')\,\mathrm{d}V'$, 电极矩的积分表示为 $q=\int\mathrm{d}q$, $\vec p=\int\vec r\,'\mathrm{d}q$, $\overleftrightarrow{D}=\int\vec r\,'\vec r\,'\mathrm{d}q$

〈偏微〉「母函数」$\dfrac{1}{\mathscr{r}}=\dfrac{1}{\sqrt{r^2-2rr'\cos\theta+(r')^2}}=\dfrac{1}{r}\sum\limits_{l=0}^{\infty}\Big(\dfrac{r'}{r}\Big)^l\mathrm{P}_l(\cos\theta)$

$\to$ 勒让德多项式表示 $\varphi=k_e\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{r^{n+1}}\displaystyle\int(r')^n\mathrm{P}_n(\cos\theta')\,\mathrm{d}q$ **例** $\varphi_1=\dfrac{k_e}{r^2}\int r'\cos\theta'\,\mathrm{d}q=\dfrac{1}{r^2}\vec p\cdot\vec e_r$

$\varphi_2=\dfrac{k_e}{r^3}\int(r')^2\frac12(3\cos^2\theta'-1)\,\mathrm{d}q\to Q_{ij}=\int\big[3\vec r_i\,'\vec r_j\,'-(r')^2\delta_{ij}\big]\,\mathrm{d}q$

例 均匀带电线段 $\varphi=k_e\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{r^{n+1}}\displaystyle\int_{-a}^{a}z^n\mathrm{P}_n(\cos\theta)\frac{q}{2a}\,\mathrm{d}z$, 而 $\dfrac{z^{n+1}}{n+1}\Big|_{-a}^{a}=\dfrac{2a^{n+1}}{n+1}\Big|_{n\text{ 为偶数}}$, n 为奇数时等于零

分离变量

〈偏微〉分离变量法解拉普拉斯方程

直角系: $\varphi_x''=k^2x\to\varphi(x)=A\,\mathrm{e}^{kx}+B\,\mathrm{e}^{-kx}$, $\varphi_y''=-k^2y\to\varphi(y)=C\sin ky+D\cos ky$, 若边界为零 $k=\dfrac{n\pi}{L}$

柱系: 柱对称 $\varphi(r,\phi)=A_0+B_0\ln r+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\Big[r^k(A_k\cos k\phi+B_k\sin k\phi)+r^{-k}(C_k\cos k\phi+D_k\sin k\phi)\Big]$

球系: 轴对称 $\varphi(r,\theta)=\sum\limits_{l=0}^{\infty}\Big(A_lr^l+\dfrac{B_l}{r^{l+1}}\Big)\mathrm{P}_l(\cos\theta)$ 球对称 $\varphi(r)=A_0+\dfrac{B_0}{r}$

例 不带电导体球放入匀强电场 $\vec E=E_0\vec e_z$ 中, 取球面为零势点, 边界条件 $\varphi(R)=0$, $\varphi(\infty)\to-E_0r\cos\theta$

$\to\varphi(r,\theta)=-E_0\Big(r-\dfrac{R^3}{r^2}\Big)$ 第一项为外场, 第二项为诱导电荷 $\to\sigma_e(\theta)=-\varepsilon_0\,\partial_r\varphi_2\big|_{r=R}=3\varepsilon_0E_0\cos\theta$

(对于带电导体球放入匀强电场, 电势加上真空中的带电导体球即可, 零势点在赤道面无限远处)

对于介质球放入匀强电场, 电势分球内 $\varphi_{内}=\sum A_lr^l\mathrm{P}_l(\cos\theta)$ 和 $\varphi_{外}=-E_0r\cos\theta+\sum\dfrac{B_l}{r^{l+1}}\mathrm{P}_l(\cos\theta)$ 来求

边界条件 $\varphi_{内}(R)=\varphi_{外}(R)$ $\to$ $A_1R=-E_0R+B_1R^{-2}$, 其它 $A_lR^l=B_lR^{-(l+1)}$

电介质表面无自由电荷要求 $\varepsilon\,\partial_r\varphi_{内}=\varepsilon_0\,\partial_r\varphi_{外}$ $\to$ $\varepsilon_rA_1=-E_0-2B_1R^{-3}$, 其它 $\varepsilon_rlA_lR^{l-1}=-(l+1)B_lR^{-(l+2)}$

得 $A_1=\dfrac{-3}{\varepsilon_r+2}E_0$, $B_1=\dfrac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+2}R^3E_0$, 其它 $=0$ $\to$ 介质球内部为均匀电场 $\vec E=\dfrac{3}{\varepsilon_r+2}\vec E_0$

「 $I_{流出}=\oint_S \vec{j}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\int_V \nabla\cdot\vec{j}\,\mathrm{d}V=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho_e \,\mathrm{d}V=-\int_V \partial_t\rho_e\,\mathrm{d}V$ 」 连续性方程 $\nabla\cdot\vec{j}=-\partial_t\rho_e \overset{稳恒电流}{=\!=\!=} 0$

「 $\nabla\cdot(x\vec{j})=x(\nabla\cdot\vec{j})+j_x$，等式左边换成面积分为零，因为 $\vec{j}$ 只在 V 内，故 $\int_V(\nabla\cdot\vec{j})x\,\mathrm{d}V=-\int_V j_x\,\mathrm{d}V$ 」

推论 对体积 V 内的电荷电流分布，总电偶极矩为 $\vec{p}$，有 $\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho_e\vec{r}\,\mathrm{d}V=-\int(\nabla\cdot\vec{j})\vec{r}\,\mathrm{d}V=\int_V \vec{j}\,\mathrm{d}V$

安培定律 $\vec{F}=k_m\frac{I_2\,\mathrm{d}\vec{l_2}\times(I_1\,\mathrm{d}\vec{l_1}\times\vec{e_{\mathscr{r}}})}{\mathscr{r}^2}$ $\to$ 洛伦兹力 体密度 $\vec{f}=\vec{j}\times\vec{B}$

可以证明闭合回路积分满足牛三 $\vec{F_2}=-k_mI_1I_2\oint\oint\frac{\vec{e_{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}}\mathrm{d}l_1\,\mathrm{d}l_2$ 互换 $_{12}$ 时 $\vec{e_{\mathscr{r}}}$ 反号

毕萨定律 $\vec{B}(\vec{r})=k_m\int\frac{I\,\mathrm{d}\vec{l'}\times\vec{e_{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}$ 另有 $I\,\mathrm{d}\vec{l'}=\vec{I}\,\mathrm{d}l'=\vec{i}(\vec{r}')\,\mathrm{d}S'=\vec{j}(\vec{r}')\,\mathrm{d}V'$

$\nabla\cdot\vec{B}=0$ 「 $=k_m\int\nabla_r\cdot\left(\vec{j}\times\frac{\vec{e_{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}\right)\mathrm{d}V'$，矢分公式出两项，自变量不一样，$\nabla_r\times\vec{j}=0$，另一项中心场无旋」

「同理 $\nabla_r\cdot\vec{j}=0$，矢分公式 $\nabla_r\times\left(\vec{j}\times\frac{\vec{e_{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}\right)=\vec{j}\left(\nabla\cdot\frac{\vec{e_{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}\right)-(\vec{j}\cdot\nabla_r)\frac{\vec{e_{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}$，后者用 $\nabla_r f(\mathscr{r})=-\nabla_{r'}f(\mathscr{r})$ 用到稳恒电流无散，换成全空间面积分为零」 $\nabla\times\vec{B}=k_m\int\vec{j}(\vec{r}')4\pi\delta^3(\mathscr{r})\,\mathrm{d}V'=\mu_0\vec{j}(\vec{r})$

「$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$，$\nabla\times\vec{B}=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}$，选择 $\nabla\cdot\vec{A}=0$」 泊松方程 $\nabla^2\vec{A}=-\mu_0\vec{j}$

磁矢势 $\vec{A}(\vec{r})=k_m\int\frac{1}{\mathscr{r}}\vec{j}(\vec{r}')\,\mathrm{d}V'$ 是无穷远处 $\vec{j}=0$ 时泊松方程的解（$\vec{B}$ 生成 $\vec{A}$ 可类比 $\vec{j}$ 生成 $\vec{B}$）

(选择库仑规范后，我们还可以定义矢势的矢势 $\vec{A}=\nabla\times\vec{\Lambda}\to\vec{\Lambda}=\frac{1}{4\pi}\int\frac{1}{\mathscr{r}}\vec{B}\,\mathrm{d}V'$，乃至无限地做下去)

静磁能 W_m 「$=\int_V\vec{A}\cdot\vec{j}\,\mathrm{d}V=\frac{1}{2\mu_0}\int_V\vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B})\,\mathrm{d}V\overset{分部}{=\!=\!=}\frac{1}{2\mu_0}\left(-\oint_S(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{S}+\int_V\vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A})\,\mathrm{d}V\right)$，后者 $\nabla\times\vec{A}=\vec{B}$，积分原为有电流存在区域，同理可扩大到全空间，总和不变」 $=\frac{1}{2\mu_0}\int_\infty B^2\,\mathrm{d}V$

唯一性定理 区域 V 中 $\vec{j}$ 给定，再给定 V 的边界上的 $\vec{A}$ 或 $\vec{B}$，则磁场唯一确定

磁偶极子

「一切都和电偶极子类似」 $\vec{B}_{偶极}(\vec{r})=\frac{k_m}{r^3}[3(\vec{m}\cdot\vec{e_r})\vec{e_r}-\vec{m}]$ 还要加一项 $+\frac{2\mu_0}{3}\vec{m}\delta^3(\vec{r})$ 才满足 平均场定理

球内所有稳恒电流产生的 $\vec{B}_{平均}=k_m\frac{2\vec{m}_{总}}{R^3}$，球外稳恒电流在球内产生的 $\vec{B}_{平均}$ 等于其在球心产生的磁场

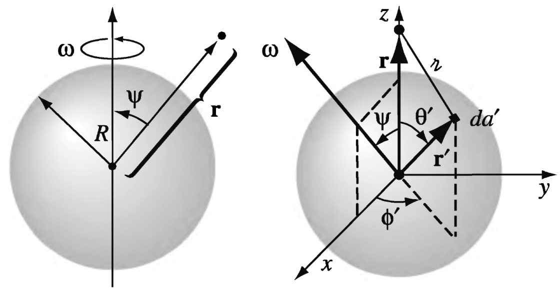
磁介质 「总矢势是小偶极子的做体积分」 $\vec{A}(\vec{r})=k_m\int_V\frac{\vec{M}(\vec{r}')\times\vec{e_{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}\mathrm{d}V'=k_m\int_V\vec{M}\times\nabla_{r'}\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right)\mathrm{d}V'\overset{分部}{=\!=\!=}k_m$ $\left(\oint_S\frac{1}{\mathscr{r}}\vec{M}\times\mathrm{d}\vec{S}'+\int_V\frac{1}{\mathscr{r}}\nabla_{r'}\times\vec{M}\,\mathrm{d}V'\right)\equiv k_m\left(\oint_S\frac{\vec{i}}{\mathscr{r}}\mathrm{d}S'+\int_V\frac{\vec{j}}{\mathscr{r}}\mathrm{d}V'\right)$，面电流 $\vec{i}\equiv\vec{M}\times\vec{e_n}$，体电流 $\vec{j}\equiv\nabla\times\vec{M}$

例 均匀带电球面自转 为了便于积分，先以 $\vec{r}$ 为 z 轴，

$\vec{A}(\vec{r})=k_m\int\frac{1}{\mathscr{r}}\vec{i}(\vec{r}')\,\mathrm{d}S'$，$\vec{i}=\sigma_e\vec{v}$，$\mathscr{r}=\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta'}$，

$\mathrm{d}S'=R^2\sin\theta'\,\mathrm{d}\theta'\,\mathrm{d}\phi'$，$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}'=$

$$\begin{vmatrix}\vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z}\\ \omega\sin\psi & 0 & \omega\cos\psi\\ R\sin\theta'\cos\phi' & R\sin\theta'\sin\phi' & R\cos\theta'\end{vmatrix}$$



含 $\sin\phi'$，$\cos\phi'$ 的项 $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi'$ 为零，只剩下 $\vec{A}(\vec{r})=-\frac{\mu_0}{2}\sigma_eR^3\omega\sin\psi\,\vec{e_y}\int_0^\pi\frac{\cos\theta'\sin\theta'\,\mathrm{d}\theta'}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta'}}$

而 $-\omega r\sin\psi\,\vec{e_y}=\vec{\omega}\times\vec{r}$，$\int_{-1}^{1}\frac{u\,\mathrm{d}u}{\sqrt{R^2+r^2-2Rru}}=\frac{2r}{3R^2}\,(r<R)\;=\frac{2R}{3r^2}\,(r>R)$

得 $\vec{A}=\frac{\mu_0\sigma_eR}{3}\vec{\omega}\times\vec{r}$（球内） $=\frac{\mu_0\sigma_eR^4}{3r^3}\vec{\omega}\times\vec{r}$（球外） 以 ω 为 z 轴的话 $\vec{\omega}\times\vec{r}=\omega r\sin\theta\,\vec{e_\phi}$

$\to$ 球内磁场均匀 $\nabla\times(r\sin\theta\,\vec{e_\phi})=2(\cos\theta\,\vec{e_r}-\sin\theta\,\vec{e_\theta})=2\vec{e_z}$ 康登希帕磁场 Condon-Hipple 将导线平行密绕在球面上

球外偶极 $\nabla\times(r^{-2}\sin\theta\,\vec{e_\phi})=\frac{1}{r}(2\cos\theta\,\vec{e_r}+\sin\theta\,\vec{e_\theta})$

磁多极子

闭合电流圈的 磁多极展开 $\vec{A}=k_m I\int\frac{1}{r}\mathrm{d}\vec{l}'=k_m I\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\oint(r')^n \mathrm{P}_n(\cos\theta')\vec{l}'$ (另有换成 $\vec{j}\,\mathrm{d}V'$ 等)

例 磁单极 $\oint\mathrm{d}\vec{l}'=0$ 不存在 (注意以上磁矢势理论是基于 $\nabla\cdot\vec{B}=0$ 假设的) → 磁偶极矩总不依赖于原点

(对于体电流分布, 单极不存在用 $\vec{A}_0=\frac{k_m}{r}\int\vec{j}\,\mathrm{d}V=\frac{k_m}{r}\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\overset{\text{静磁}}{=\!=}0$ 证)

〈矢分〉「$\oint r'\cos\theta'\mathrm{d}\vec{l}'=\oint\vec{e_r}\cdot\vec{r}'\mathrm{d}\vec{l}'\overset{\vec{e_r}\text{为常矢}}{=\!=\!=}\vec{\Sigma}\times\vec{e_r}$」 磁偶极矢势 $\vec{A}_1(\vec{r})=k_m\frac{\vec{m}\times\vec{e_r}}{r^2}$

磁偶极矩 $\vec{m}\equiv I\vec{\Sigma}\overset{\text{体分布}}{=\!=\!=}\frac{1}{2}I\oint\vec{r}\times\mathrm{d}\vec{l}=\frac{1}{2}\int\vec{r}\times\vec{j}\,\mathrm{d}V$

磁单极子

假设存在 磁荷〈电磁〉(有的教材设 $F=k_m\frac{g_1 g_2}{r^2}$, 它和 q_m 差个常数 $q_m=\mu_0 g$)

一种实验探测方法 (Cabrera 1982) 当磁单极子通过自感 L 的无电阻回路时, 会感应出 $I=q_m/L$

「电磁感应例子的类比, $\nabla\times\vec{E}=-\vec{j}_m-\partial_t\vec{B}$, $\mathscr{E}=\oint\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int(\nabla\times\vec{E})\cdot\mathrm{d}\vec{S}=-I_m-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi$, 又 $\mathscr{E}=-L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I$, 故 $I=(\Delta q_m+\Delta\Phi)/L$, 结果与积分面的选取无关, 选平面则 $\Delta\Phi=0$, 选无穷远面则 $\Delta g=0,\Delta\Phi=q_m$」

Thomson's dipole

汤姆森偶极子 电荷 q 产生电场 $\vec{E}=k_e\frac{q}{r^2}\vec{e_r}$, 磁荷 q_m 产生磁场 $\vec{B}=k_m\frac{g}{r^2}\vec{e_r}$, 电磁场总角动量为 $\frac{q\,q_m}{4\pi}$ 方向由 q 指向 q_m (尽管结果与间距 d 无关) 「$\vec{L}=\int_\infty\mathrm{d}V\,\vec{r}\times(\varepsilon_0\vec{E}\times\vec{B})$」

〈量子〉「角动量为半整数倍 $\hbar$」 $q\,q_m=2\pi n\hbar$

故全宇宙只要有一个磁荷存在, 便可解释电荷量子化 $q=\frac{2\pi\hbar}{q_m}n$ (狄拉克 1931)

例 质量为 m 的电荷在磁单极子的磁场中运动, 则速度的大小不变

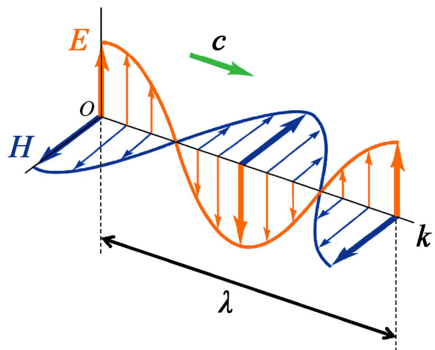
极坐标下可以证明 θ 也不变, 电荷在一个圆锥面上沿测地线运动 (庞加莱 1896)

轨迹方程为 $r(\phi)=\frac{C}{\cos[(\phi-\phi_0)\sin\theta]}$, $C=-k_m\frac{q\,q_m\tan\theta}{mv}$

电磁波

在 ρ_e 和 $\vec{j}=0$ 的空间, 电磁波能够独立存在 (赫兹 1888 实验证实) 设 (线性介质中) 以 v_p 传播

对 $\nabla\times\vec{E}=-\partial_t\vec{B}$ 两边取 $\nabla\times$, 左边 $\nabla\times(\nabla\times\vec{E})=\nabla(\nabla\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E}=-\nabla^2\vec{E}$, 右边 $-\partial_t(\nabla\times\vec{B})=-\mu\varepsilon\,\partial_t^2\vec{E}$



得波动方程 $v_p^2\nabla^2\vec{E}=\partial_t^2\vec{E}$ (对 $\vec{H}$ 形式相同), 其中 $v_p=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

电磁波是横波 $E_z,H_z=0$,〈光学〉设线偏振 $E_y=0$,

得 $\partial_t H_x$, $\partial_z H_x=0$, 故只剩 H_y, 有 $\partial_z E_x=-\mu\,\partial_t H_y$, $\partial_z H_y=-\varepsilon\,\partial_t E_x$

基本解 $E_x(z,t)=E_0\cos(kz-\omega t+\theta)$, $H_y(z,t)=H_0\cos(kz-\omega t+\theta)$

其中 频率 $\omega\equiv\frac{2\pi}{T}$ 波数 $k\equiv\frac{2\pi}{\lambda}$ 为常数 → 相速度 $v_p=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\omega}{k}=\frac{\lambda}{T}$

结论 $\vec{E}\vec{H}\vec{k}$ 右手正交, 电场磁场同相位, $\sqrt{\mu}H_0=\sqrt{\varepsilon}E_0\to E_0=ZH_0$

wave impedance　characteristic impedance of vacuum

波阻抗 $Z\equiv\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$, 自由空间的 真空特征阻抗 $Z_0\overset{\mu\approx1}{\approx}Z|n|\approx377\ \Omega$

〈光学〉折射率 $n\equiv\frac{c}{v_p}=\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}\overset{\text{非铁磁}}{\approx}\sqrt{\varepsilon_r}$ (需测光频下的 ε)

能流

对于线性介质「全微分的一半」电磁场的能量密度为 $w=\frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{H}\cdot\vec{B})=w_e+w_m$

电磁场总能量 $W=\frac{1}{2}\iiint_\infty(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{H}\cdot\vec{B})\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\iiint_\infty(\rho\varphi+\vec{j}\cdot\vec{A})\mathrm{d}V$

(前者认为能量存储在电场里, 后者认为能量存储在电荷里, 两者结果相等, 一般不认为后者是能量密度)

由 洛伦兹力 (体) 密度 $\vec{f}=\rho_e\vec{E}+\vec{j}\times\vec{B}$, 得电磁场做功的 功率密度 $P_{\text{机}}=\vec{f}\cdot\vec{v}\overset{\text{磁力不做功}}{=\!=\!=}\rho_e\vec{E}\cdot\vec{v}=\vec{E}\cdot\vec{j}$

目标: 用场量 $\vec{E},\vec{H}$ 来表示 $P_{\text{机}}$ (不含 $\rho_e,\vec{j}$) → 用非静磁环路换掉 $\vec{j}$ 得 $P_{\text{机}}=\vec{E}\cdot\nabla\times\vec{H}-\vec{E}\cdot\partial_t\vec{D}$, 矢分公式 $\vec{E}\cdot\nabla\times\vec{H}=-\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H})+\vec{H}\cdot(\nabla\times\vec{E})$, 用非静电环路换 $\nabla\times\vec{E}=-\partial_t\vec{B}$ 最终得 $P_{\text{机}}=$

$-\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H})-(\vec{E}\cdot\partial_t\vec{D}+\vec{H}\cdot\partial_t\vec{B})\equiv-\nabla\cdot\vec{S}-\partial_t w$，记 $P_{机}=\partial_t w_{机}$，有 能量守恒公式 $\partial_t(w_{机}+w)=-\nabla\cdot\vec{S}$

Poynting vector / energy-flux density
坡印廷矢量 / 能流密度矢量 $\vec{S}\equiv\vec{E}\times\vec{H}$，大小 $S=\dfrac{1}{Z}E^2$ $\mathrm{W/m^2}$，对于电磁波 $S=wv_p$

light intensity
光强 $I\equiv\overline{S}=\frac{1}{t}\int_t S(t)\,\mathrm{d}t$ $(t\gg T)$ 对于单色平面波 $I=\dfrac{1}{2Z}E_0^2$

① 低频 (直流电路) 例 用电阻线连接正负电荷，电流产生 $\vec{B}$，$\vec{E}\times\vec{B}$ 垂直指向电阻
$\rightarrow$ 能流沿导线表面输送，遇到电阻时从侧面空间输入负载内部

② 高频 (交流电路) 「静磁环路，代入欧姆定律 $\nabla\times\vec{H}=\sigma\vec{E}$，分量形式 (设线偏振) $\partial_z H_y=\sigma E_x$，静电环路 $\partial_z E_x=-\mu\partial_t H_y$，消掉 H_y 得 $\partial_z^2 E_x=-\mu\sigma\partial_t E_x$，试探解 $E_x=E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-kz)}$ $\rightarrow k=\sqrt{-\mathrm{i}\mu\sigma\omega}$ 」

skin effect
记 趋肤深度 $d_s\equiv\sqrt{\dfrac{2}{\mu\sigma\omega}}$ 则 $k=\dfrac{1-\mathrm{i}}{d_s}\rightarrow E_x=E_0\,\mathrm{e}^{-z/d_s}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-z/d_s)}$ 趋肤效应 高频交流电流趋于导线表面

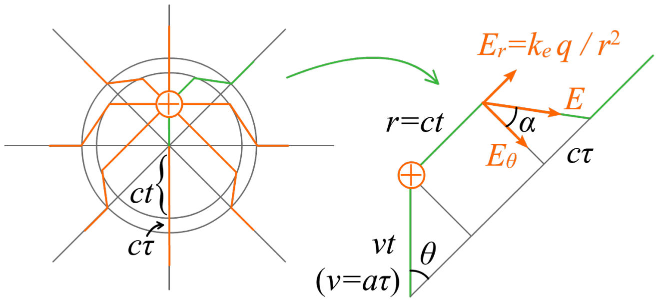
③ 射频 例 非相对论加速带电粒子的辐射

「$\tan\alpha=\dfrac{c\tau}{vt\sin\theta}=\dfrac{c}{at\sin\theta}$」 $E_\theta=k_e\dfrac{qa\sin\theta}{c^2r}$ $\rightarrow S\propto\dfrac{a^2}{r^2}\sin^2\theta$

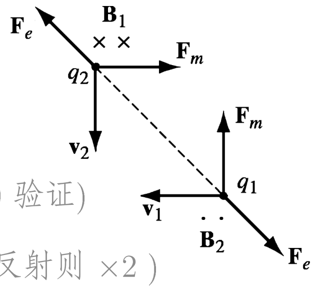
对于偶极子，位移 $\propto\cos\omega t$，则 $a\propto\omega^2\cos\omega t$ $\rightarrow S\propto\omega^4$

例 飞机的雷达散射截面 (垂直入射) $\sigma_r=\dfrac{4\pi}{\lambda^2}\Sigma^2$

「被飞机接收 $S_0\Sigma$，再辐射出去 $\propto\Sigma/\lambda^2$ 」



动量



例 牛三律在静电和静磁中成立，但在电动力学中，需把电磁场动量加入机械动量

momentum density　　light pressure
〈狭相〉$w=gc$ $\rightarrow$ 电磁波的 动量密度 $\vec{g}\equiv\vec{D}\times\vec{B}=\vec{S}/c^2$ $\rightarrow$ 光压 (列别捷夫 1900 验证)

radiation pressure
「当光打在面积 Σ 上被吸收时，传递的动量为 $\Delta\vec{p}=\vec{g}\Sigma c\Delta t$」 辐射压 $P=gc$ (全反射则 $\times2$)

用场量 $\vec{E},\vec{H}$ 来表示 $\vec{f}=(\nabla\cdot\vec{D})\vec{E}+(\nabla\times\vec{H}-\partial_t\vec{D})\times\vec{B}$，而 $\partial_t(\vec{D}\times\vec{B})=\partial_t\vec{D}\times\vec{B}-\vec{D}\times(\nabla\times\vec{E})$，

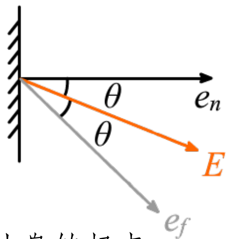
为了对称补一项 $\nabla\cdot\vec{B}=0$，得 $\vec{f}=(\nabla\cdot\vec{D})\vec{E}-\vec{D}\times(\nabla\times\vec{E})+(\nabla\cdot\vec{B})\vec{H}-\vec{B}\times(\nabla\times\vec{H})-\partial_t(\vec{D}\times\vec{B})$，矢分公式

$\nabla(E^2)=\nabla(\vec{E}\cdot\vec{E})=2(\vec{E}\cdot\nabla)\vec{E}+2\vec{E}\times(\nabla\times\vec{E})$，最后用并矢梯度公式 $\nabla\cdot(\vec{D}\vec{E})=(\nabla\cdot\vec{D})\vec{E}+(\vec{D}\cdot\nabla)\vec{E}$ 化简

最终得 $\vec{f}=(\nabla\cdot\vec{D})\vec{E}+(\vec{E}\cdot\nabla)\vec{D}+(\nabla\cdot\vec{B})\vec{H}+(\vec{H}\cdot\nabla)\vec{B}-\frac{1}{2}\nabla(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{H}\cdot\vec{B})-\partial_t(\vec{D}\times\vec{B})\equiv\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}-\partial_t\vec{g}$

momentum current density
记 $\vec{f}=\partial_t\vec{g}_{机}$ (机械动量(体)密度)，有 动量守恒公式 $\partial_t(\vec{g}_{机}+\vec{g})=\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}$ $\rightarrow$ $-\overleftrightarrow{T}$ 表示 动量流密度

Maxwell's stress tensor
麦克斯韦应力张量 $\overleftrightarrow{T}\equiv\vec{E}\vec{D}+\vec{H}\vec{B}-w\overleftrightarrow{I}$，分量形式 $T_{ij}=E_iD_j+H_iB_j-\frac{1}{2}\delta_{ij}\sum_k^3(E_kD_k+H_kB_k)$ 〈狭相〉



$\vec{e_n}\cdot\overleftrightarrow{T}$ 表示电磁场作用在单位表面积上的应力 (对角元为正应力，非对角元为剪应力)

① 正入射电磁波被完全吸收，则单位面积受力 $\vec{e_n}\cdot\overleftrightarrow{T}=E_n\vec{D}+H_n\vec{B}-w\vec{e_n}\xlongequal{横波}-w\vec{e_n}$

② 静电场与法线夹角 θ，介质单位表面受力 $\vec{e_n}\cdot\overleftrightarrow{T}=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2(2\cos\theta\,\vec{e_E}-\vec{e_n})=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2\,\vec{e_f}$

故 $\theta=45°$ 时为切应力，小于为张力 (例如导体 $\theta=0$)，大于为压力 (例 ① $\theta=90°$)

费曼圆盘佯谬 悬空圆盘上固定有通电线圈和带电小球，则断电时涡旋电场会驱动小球让盘转起来
「断电前 $\vec{g}$ 沿涡旋向，电磁场具有角动量」 $\rightarrow$ 类似 $q\varphi$ 存储电势能，$q\vec{A}$ 相当于存储磁势动量

带电粒子在电磁场中 $\vec{F}=q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})=-q[\nabla\varphi+\partial_t\vec{A}-\vec{v}\times(\nabla\times\vec{A})]=-q[\nabla\varphi+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{A}-\nabla(\vec{v}\cdot\vec{A})]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v})$

注：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{A}(\vec{r},t)=\partial_t\vec{A}+(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{A}$，若沿粒子轨道 $\vec{A}$ 不变则后项为零，矢分 $\vec{v}\times(\nabla\times\vec{A})=\nabla(\vec{v}\cdot\vec{A})-(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{A}$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}+q\vec{A})=-q\nabla(\varphi-\vec{v}\cdot\vec{A})$ $\rightarrow$ 广义势 $U=\varphi-\vec{v}\cdot\vec{A}$，拉氏量 $L=\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2-q\varphi+q\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}}$，哈 $H=\dfrac{p^2}{2m}+q\varphi$

canonical momentum　　kinematical momentum
$\nabla U=0$ 时 正则动量 $\vec{\pi}=m\vec{v}+q\vec{A}$ 守恒 (满足正则对易关系) 而 $m\vec{v}$ 改叫作 动力学动量 $\vec{p}=\vec{\pi}-q\vec{A}$

例 仅有 $E_{势}$ 时能量守恒 $H=\frac{1}{2}mv^2+q\varphi=$常数，仅有 $E_{旋}$ 时正则动量守恒「$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv)=qE_{旋}=-q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A$」

波导

(低频电力用双线传输, 中频用同轴电缆, 高频 (微波) 时用 →) wave guide 波导 空心金属管道

(高频时电路不集总, 需考虑空间分布, 需解场方程) 「设截面为 $l_x\times l_y$ 矩形, 波导沿 z 方向, 则 x,y 面上形成驻波, 合成波沿 z 方向行进, 设频率单一 $\vec{E}=\vec{E}_0(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)}$, 分离变量法 $k_x^2+k_y^2+k_z^2=\omega^2/c^2$, 由驻波条件得 $k_y l_y=m\pi$, $k_x l_x=n\pi$, $m,n\in\mathbb{N}$, $E_{0i}(x,y)=(C_{i1}\cos k_x x+C_{i2}\sin k_x x)(C_{i3}\cos k_y y+C_{i4}\sin k_y y)$, 由 ① $y=0,l_y$ 时 $E_x=E_z=\partial_y E_y=0$, ② $x=0,l_x$ 时 $E_y=E_z=\partial_x E_x=0$ 减少待定系数」

$$\begin{cases} E_{0x}=C_x\cos k_x x\sin k_y y \\ E_{0y}=C_y\sin k_x x\cos k_y y \\ E_{0z}=C_z\sin k_x x\sin k_y y \end{cases}\qquad \begin{cases} B_{0x}=\frac{1}{\omega}(C_y k_z+\mathrm{i}C_z k_y)\sin k_x x\cos k_y y \\ B_{0y}=\frac{1}{\omega}(C_x k_z+\mathrm{i}C_z k_x)\cos k_x x\sin k_y y \\ B_{0z}=\frac{\mathrm{i}}{\omega}(C_y k_x-C_x k_y)\cos k_x x\cos k_y y \end{cases}$$

「再由横波条件 $\nabla\cdot\vec{E}=0$ (注: 此时 $\nabla\neq\vec{k}$) 得」 $C_x k_x+C_y k_y-\mathrm{i}C_z k_z=0$ 「当 ω,m,n 确定后 k_z 也定了, 横波条件还剩两个复数的自由度, 代表两个独立波模的振幅和相位」 可引入两种基本波型作为基

「磁波形式也为 $\vec{B}=\vec{B}_0(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)}$, 可由 $\partial_t\vec{B}=-\nabla\times\vec{E}\to \mathrm{i}\omega\vec{B}=\nabla\times\vec{E}$ 得出」

$C_z=0\Leftrightarrow E_z=0$ 称为 **横电波** (Transverse Electric), $C_y k_x=C_x k_y\Leftrightarrow B_z=0$ 称为 **横磁波** (Transverse Magnetic), 均为横波的称为 TEM 波

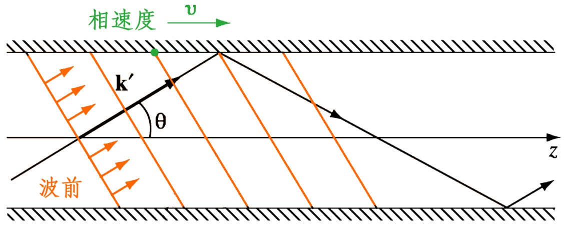
「$\vec{E}$ 无散无旋, 拉普拉斯方程无极值, 边界条件要求势为常数」 中空波导中不存在 TEM 波 (如 TE_{00})

(虚数时电磁波衰减) $k_z=\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-\left(\frac{m\pi}{l_x}\right)^2-\left(\frac{n\pi}{l_y}\right)^2}$ 为实数 → $\left(\frac{\omega}{\pi c}\right)^2>\left(\frac{m}{l_x}\right)^2+\left(\frac{n}{l_y}\right)^2\equiv\frac{1}{l_{mn}^2}$

cutoff frequency **截止频率** 一定尺寸的波导, 能传输的最低频率为 $\omega_{mn}\equiv\frac{\pi c}{l_{mn}}$ 「$\lambda=\frac{2\pi c}{\omega}$」 **截止波长** $\lambda_{\max}=2l_{mn}$

例 $l_x\times l_y=3\times 7$, 则 $\lambda>14$ 的波无法传输, 7~14 只能以 TE_{01} 传输, $\lambda_{02}=7$, $\lambda_{10}=6$, $\lambda_{11}\approx 5.5$, $\lambda_{20}=3$

注 TM_{0n}, TM_{m0} 对应的电磁场全为零, 最低模式为 TM_{11}



(波导中的电磁波是合成的结果, 不是真的纵波)

$k_z=\sqrt{\omega^2-\omega_{mn}^2}/c$, $\cos\theta=k_z/k'=\sqrt{1-(\omega_{mn}/\omega)^2}$

相速度 $v_p=\frac{\omega}{k_z}=\frac{c}{\cos\theta}>c$, 群速度 $v_g=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k_z}=c\cos\theta<c$

「推导略」 圆柱形波导, 最低模式为 TM_{01} ($\lambda\approx 2.613r$) 和 TE_{11} ($\lambda\approx 3.413r$)

(TM_{01} 有 E_z 且 $E(x,y)$ 轴对称, 故常应用于直线加速器)

把 z 方向也封起来即为 **谐振腔** (resonant cavity) 用来产生电磁振荡 (高频时 LC 振荡品质因数降低)

电磁势

「非静态时 $\vec{E}=-\nabla\varphi-\partial_t\vec{A}$，电高斯」$-\nabla^2\varphi-\partial_t(\nabla\cdot\vec{A})=\rho/\varepsilon_0$ $\to$ 库仑规范 $\nabla\cdot\vec{A}=0$

(库仑规范中 φ 超距地响应 ρ 的变化, 但 φ 不能直接观测, 还需 $\vec{A}$ 才知道 $\vec{E}$)

「磁环路 $\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\mu_0\vec{j}-\mu_0\varepsilon_0\partial_t(\nabla\varphi+\partial_t\vec{A})$ 矢分公式 $=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}$」$\nabla\Lambda+(\frac{1}{c^2}\partial_t^2-\nabla^2)\vec{A}=\mu_0\vec{j}$

记 $\Lambda\equiv\frac{1}{c^2}\partial_t\varphi+\nabla\cdot\vec{A}$〈狭相〉有 $\Box^2\varphi-\partial_t\Lambda=\rho/\varepsilon_0$, $\Box^2\vec{A}+\nabla\Lambda=\mu_0\vec{j}$ $\to$ 洛伦兹规范 $\Lambda=0$

例 $\varphi=0$, $\vec{A}=A_0\cos(kz-\omega t)\vec{e_x}$，既是库仑规范又是洛伦兹规范

规范变换 设 θ 为任意标量函数, 则共同做变换 $\vec{A}+\nabla\theta$, $\varphi-\partial_t\theta$ 对 $\vec{B},\vec{E}$ 均无影响

推迟势

「泊松方程的解为 $\varphi(\vec{r})=k_e\int\frac{1}{\mathscr{r}}\mathrm{d}q$，$\vec{A}(\vec{r})=k_m\int\frac{1}{\mathscr{r}}\vec{j}(\vec{r}')\mathrm{d}V'$ 推广到非静止源」记 $t_r=t-\frac{\mathscr{r}}{c}$ 则

retarded potential

推迟势 $\varphi(\vec{r},t)=k_e\int\frac{1}{\mathscr{r}}\rho(\vec{r}',t_r)\mathrm{d}V'$，$\vec{A}(\vec{r},t)=k_m\int\frac{1}{\mathscr{r}}\vec{j}(\vec{r}',t_r)\mathrm{d}V'$

「可以证明, 它满足势的波动方程, 洛伦兹规范」(对库仑, 毕萨定律的推广还有别的项)

〈偏微〉波动方程 $\partial_z^2U=v^{-2}\partial_t^2U$ 的一般解为 $U(z,t)=U_+(z-vt)+U_-(z+vt)$

advanced potential

超前势 $t_a=t+\frac{\mathscr{r}}{c}$ 同样满足麦方程 ($\Box^2$ 含 t^2，故理论本身时间反演不变, 不用超前势是因为违反因果)

Jefimenko

杰斐缅柯方程 (1966) $\vec{E}(\vec{r},t)=k_e\int\left[\frac{\vec{e_{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}\rho(\vec{r}',t_r)+\frac{\vec{e_{\mathscr{r}}}}{c\mathscr{r}}\dot{\rho}(\vec{r}',t_r)-\frac{1}{c^2\mathscr{r}}\dot{\vec{j}}(\vec{r}',t_r)\right]\mathrm{d}V'$

$\vec{B}(\vec{r},t)=k_m\int\left[\frac{1}{\mathscr{r}^2}\vec{j}(\vec{r}',t_r)+\frac{1}{c\mathscr{r}}\dot{\vec{j}}(\vec{r}',t_r)\right]\times\vec{e_{\mathscr{r}}}\mathrm{d}V'$「证它可回到静态, 用 $\vec{j}(t_r)\approx\vec{j}(t)+(t_r-t)\dot{\vec{j}}(t)$」

点电荷辐射

retarded position

设点电荷的运动轨迹为 $\vec{r}'(t)$，推迟时间含在方程 $|\vec{r}-\vec{r}'(t_r)|=c(t-t_r)$ 中, 推迟位置 $\vec{\mathscr{r}}\equiv\vec{r}-\vec{r}'(t_r)$

推论 若带电粒子 $v<c$，则任何时刻至多有一个推迟点对势有贡献 (若超出视野则没有, 如双曲线运动)

「点电荷的推迟势并非只是 $k_e\frac{q}{\mathscr{r}}$，体积分差个因子 $\int\rho(\vec{r}',t_r)\mathrm{d}V'=q/(1-\vec{e_{\mathscr{r}}}\cdot\vec{v}/c)$，无关狭相, 多普勒」

Liénard–Wiechert potential

李纳维谢尔势 (1898) $\varphi(\vec{r},t)=\frac{k_e q}{\mathscr{r}-\vec{\mathscr{r}}\cdot\vec{v}/c}$, $\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\vec{v}}{c^2}\varphi(\vec{r},t)$

例 匀速运动 $\vec{r}'(t)=\vec{v}t$，对 $|\vec{r}-\vec{v}t|=c(t-t_r)$ 两边平方, 求根公式求 t_r，用 $v=0$ 判断一下, 应取减号,

得 $t_r=\left[(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})-\sqrt{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}\right]/(c^2-v^2)$，便得 $\mathscr{r}=c(t-t_r)$, $\vec{e_{\mathscr{r}}}=(\vec{r}-\vec{v}t_r)/\mathscr{r}$

计算 $\mathscr{r}(1-\vec{e_{\mathscr{r}}}\cdot\vec{v}/c)=\frac{1}{c}\sqrt{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}$ 代入便得 $\varphi,\vec{A}$ (可验证满足洛伦兹规范)

注 分母亦可写成 $R\sqrt{1-(v\sin\theta/c)^2}$，$\vec{R}\equiv\vec{r}-\vec{v}t$ 由粒子的当前位置指向场点, θ 是 $\vec{R},\vec{v}$ 夹角〈狭相〉

对任意运动,「推导很长」记 $\vec{u}\equiv c\vec{e_{\mathscr{r}}}-\vec{v}$，有

$\vec{E}(\vec{r},t)=k_eq\frac{\mathscr{r}}{(\vec{\mathscr{r}}\cdot\vec{u})^3}\left[(c^2-v^2)\vec{u}+\vec{\mathscr{r}}\times(\vec{u}\times\vec{a})\right]$, $\vec{B}(\vec{r},t)=\frac{1}{c}\vec{e_{\mathscr{r}}}\times\vec{E}(\vec{r},t)$，即总垂直于 $\vec{E}$

「球面积 $4\pi\mathscr{r}^2$，故系数 $\geqslant\mathscr{r}^{-2}$ 才不衰减」第一项称为 速度场 / 自有场，第二项为 加速场 / 辐射场

$\vec{S}=\frac{1}{\mu_0c}\left[E^2\vec{e_{\mathscr{r}}}-(\vec{e_{\mathscr{r}}}\cdot\vec{E})\vec{E}\right]$ (第一项是运动粒子携带的场能, 第二项才是辐射能)

例 (再次推导加速点电荷的〈能流〉) 设电荷在 t_r 时刻静止, 则近似有 $\vec{u}=c\vec{e_{\mathscr{r}}}$

辐射场 $\vec{E_2}=\frac{k_eq}{c^2\mathscr{r}}[\vec{e_{\mathscr{r}}}\times(\vec{e_{\mathscr{r}}}\times\vec{a})]=k_m\frac{q}{\mathscr{r}}[(\vec{e_{\mathscr{r}}}\cdot\vec{a})\vec{e_{\mathscr{r}}}-\vec{a}]$

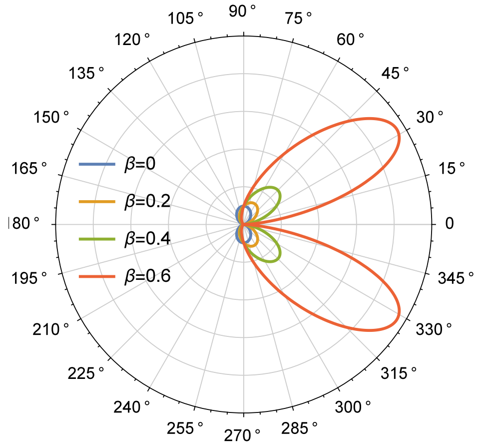
辐射能流 $\vec{S_2}=\frac{1}{\mu_0c}\left(k_m\frac{q}{\mathscr{r}}\right)^2\left[a^2-(\vec{e_{\mathscr{r}}}\cdot\vec{a})^2\right]\vec{e_{\mathscr{r}}}=\frac{k_m^2}{\mu_0c}\left(qa\frac{\sin\theta}{\mathscr{r}}\right)^2\vec{e_{\mathscr{r}}}$ 辐射功率 $\mathrm{d}P=\vec{S}\,\mathrm{d}\vec{\Sigma}$

Larmor

「面积 $\mathrm{d}\Sigma=\mathrm{d}\Omega\ r^2$」辐射角分布 $\frac{\mathrm{d}P(t_r)}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{k_m^2}{\mu_0c}(qa\sin\theta)^2$，积分得 拉莫尔公式 $P(t_r)=\frac{\mu_0}{6\pi c}q^2a^2$

辐射角分布

「拉莫尔公式仅适用于低速, 加入多普勒因子」$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{\vec{e_{\mathscr{r}}}\cdot\vec{u}}{\mathscr{r}c}\frac{1}{\mu_0c}E_2^2\mathscr{r}^2=\frac{\mu_0q^2}{16\pi^2c^2}\frac{|\vec{e_{\mathscr{r}}}\times(\vec{u}\times\vec{a})|^2}{(\vec{e_{\mathscr{r}}}\cdot\vec{u})^5}$



「很难的积分」得 Liénard **李纳公式** $P=\dfrac{\mu_0}{6\pi c}\gamma^6 q^2\left(a^2-\left|\dfrac{\vec v\times\vec a}{c}\right|^2\right)$〈狭相〉

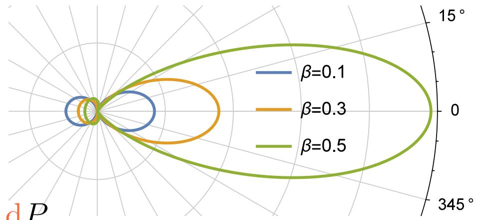
bremsstrahlung
韧致辐射 加速度与速度平行，产生的辐射谱连续

「$\vec u\times\vec a=c(\vec e_z\times\vec a)$，矢分，以 $\vec v$ 为极轴」$\dfrac{\mathrm dP}{\mathrm d\Omega}=\dfrac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c}\dfrac{\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5}$

积分得 $P=\dfrac{\mu_0}{6\pi c}\dfrac{q^2a^2}{(1-\beta^2)^3}$ 和李纳公式一致

「$\dfrac{\mathrm d}{\mathrm d\theta}$ 为零，二次方程」辐射最强的方向角 $\cos\theta_{\max}=\dfrac{\sqrt{1+15\beta^2}-1}{3\beta}$

(粒子速度增大，质量增大，加速度减小，故直线加速器辐射损失很小)



synchrotron radiation
同步辐射 (Schoot 1912 专著，1947 首次在电子同步加速器上观测)

带电粒子以 ω_0 做匀速圆周运动，加速度与速度垂直

$\dfrac{\mathrm dP}{\mathrm d\Omega}=\dfrac{\mu_0 q^2a^2}{16\pi^2 c}\dfrac{(1-\beta\cos\theta)^2-(1-\beta)^2\sin^2\theta\cos^2\phi}{(1-\beta\cos\theta)^5}$，$P=\dfrac{\mu_0}{6\pi c}\gamma^4q^2a^2$

轨道平面内「$\phi=0,\pi$」$\dfrac{\mathrm dP}{\mathrm d\Omega}=\dfrac{\mu_0q^2a^2}{16\pi^2c}\dfrac{(\cos\theta-\beta)^2}{(1-\beta\cos\theta)^5}$ $\rightarrow\theta=\pm\arccos\beta$ 时 $\dfrac{\mathrm dP}{\mathrm d\Omega}=0$

同步辐射发射角 $\frac12\Delta\theta=\arccos\beta\xrightarrow{\beta\to1}1/\gamma$「若固定探测器，则 Δt 很小，频谱很宽」近似为连续谱

「$\Delta t_r=\dfrac{\theta}{\omega_0}\approx\dfrac{\sin\theta}{\omega_0}=\dfrac{\sqrt{1-\beta^2}}{\omega_0}$，$\dfrac{\partial t}{\partial t_r}=1-\dfrac{v}{c}\cos\theta\approx1-\beta^2$」频谱上限 $\omega_c=\dfrac{1}{\Delta t}=\dfrac{\partial t}{\partial t_r}\Delta t_r=\omega_0\gamma^3$ (定量 $\frac32\omega_0\gamma^3$)

同步辐射光源〈激光物理〉 **切伦科夫辐射**〈核物理〉

电磁场反作用

电磁场带有动量，故 ① 自有场表现为电子的 **电磁质量** ② 辐射场表现为 **辐射阻尼**

① 「匀速直线运动，$\beta\ll1$ 展开到二次 $\vec E\approx\vec E_0\left[1+\dfrac12\beta^2-\dfrac32(\vec\beta\cdot\vec e_r)^2\right]$，$\vec E_0$ 为点电荷电场，$\vec B=\dfrac1c\vec\beta\times\vec E_0$」

自有场动量 $\vec g=\varepsilon_0\displaystyle\int(\vec E\times\vec B)\,\mathrm dV=\dfrac{\varepsilon_0}{c}\int\left[E_0^2\vec\beta-(\vec\beta\cdot\vec E_0)\vec E_0\right]\mathrm dV=\dfrac{4\vec\beta}{3c}\left(\dfrac{\varepsilon_0}{2}\int E_0^2\,\mathrm dV\right)=\dfrac{4\vec v}{3c^2}w_0$

其中 w_0 为静止点电荷的电场能「同理求积分可得」自有场能量 $w_e=w_0$，$w_m=\dfrac23\beta^2w_0$

→ 电子运动时表现出的惯性质量为 $m=m_0+m_2$，其中 m_0 为 **机械质量**，低速下 **电磁质量** $m_2=\dfrac{4w_0}{3c^2}$

〈电磁〉点电荷模型有 **电场能发散疑难**

→ 经典电动力学的适用范围下至 **电子经典半径** r_c (实验证明至 10×10^{-17} m 电子还可看成点粒子)

我们观察的是总 m，故也许 $m_0\to-\infty$ (量子电动力学依然有此疑难，那里用 **质量重整** 掩盖了此问题)

② 记 $m\tau\equiv\dfrac{\mu_0q^2}{6\pi c}$，低速下有 Abraham-Lorentz **阿伯拉罕洛伦兹方程** $\vec F_2=m\tau\dot{\vec a}$，相对论版见〈狭相〉

「由拉莫尔公式，损失能量的功率 $\vec F_2\cdot\vec v=-m\tau a^2$，该式在瞬时是不对的，取时间平均才成立 $\int_{t_1}^{t_2}\vec F_2\cdot\vec v\,\mathrm dt=-m\tau\int_{t_1}^{t_2}a^2\,\mathrm dt$，后者分部积分 $=(\dot{\vec v}\cdot\vec v)\big|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\ddot{\vec v}\cdot\vec v\,\mathrm dt$，边界不变 $\rightarrow\int_{t_1}^{t_2}\left(\vec F_2-m\tau\dot{\vec a}\right)\cdot\vec v\,\mathrm dt=0$」

例 连在弹簧上的带电粒子 $m\ddot x=-m\omega_0^2x+m\tau\dddot x+F_{\text{驱动}}$，设受迫为 ω，由 $\dddot x=-\omega^2\dot x$ 得 **阻尼系数** $\Gamma=\omega^2\tau$ (对于简谐振动，正比于 $\ddot v$ 和正比于 v 效果一样) **推论** 电子在均匀磁场中，回旋半径按 $\mathrm e^{-\Gamma t}$ 减小

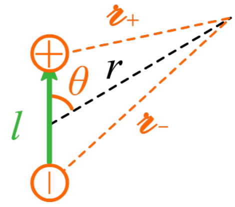
「前面的推导并非充要，严格推导：由于场在点粒子处发散，需先假设粒子有限大，然后取无限小极限，推出的公式相同」自作用力源于牛三律的打破，电荷的不同部分产生的场对彼此施加的力不抵消

加速度自发增加疑难 若粒子不受外力，由 $F_2=ma$ 解得 $a(t)=a_0\mathrm e^{t/\tau}$ (对于电子 $\tau\approx6\times10^{-24}$ s)

(若令 $a_0=0$ 则会导致粒子在施力前就开始反应，相对论版依然有此疑难) → 经典电动不适用于微观

总结 带电粒子的波动性 (玻尔原子) 和光的粒子性 (光电效应) 都不明显的电磁过程，才适用经典电动

电偶极辐射



电量振荡（位置固定）的电偶极子模型 $\vec{p}(t)=ql\cos(\omega t)\vec{e_z}$，记 $t_{\mathscr{r}\pm}\equiv t-\mathscr{r}_\pm/c$

则推迟势 $\varphi(\vec{r},t)=k_e q\left[\cos(\omega t_{\mathscr{r}+})/\mathscr{r}_+-\cos(\omega t_{\mathscr{r}-})/\mathscr{r}_-\right]$

「余弦定理 $\mathscr{r}_\pm=\sqrt{r^2\mp rl\cos\theta+(l/2)^2}$，理想偶极子 $l\ll r$ 有 $\mathscr{r}_\pm\approx r(1\mp\frac{l}{2r}\cos\theta)$，

$t_{\mathscr{r}\pm}\approx t_r\pm\frac{l}{2c}\cos\theta$，展开 $\cos(\omega t_{\mathscr{r}\pm})=\cos\cos\mp\sin\sin$，理想 $l\ll\frac{c}{\omega}=\lambda$，

第 2 个 $\cos\approx1$，第 2 个 $\sin x\approx x$，乘上 $\frac{1}{\mathscr{r}_\pm}\approx\frac{1}{r}(1\pm\frac{l}{2r}\cos\theta)$」 $\varphi(r,\theta,t)=k_e\frac{p\cos\theta}{r}\left[\frac{1}{r}\cos(\omega t_r)-\frac{\omega}{c}\sin(\omega t_r)\right]$

（满足洛伦兹规范） ① 近区 $r\ll\lambda=\frac{c}{\omega}$ ⇔ 静态极限 $\omega\to0$，$\varphi=k_e\frac{p\cos\theta}{r^2}$，相当于电偶极子 $\vec{p}(t)$ 产生的

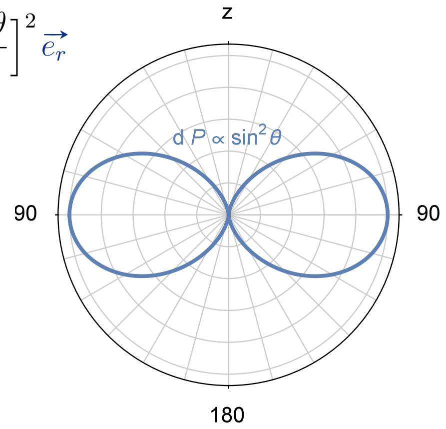
似稳电磁场，$\overline{\vec{S}}\propto\overline{\cos(\omega t_r)\sin(\omega t_r)}=0$，即没有能量辐射出去 ② 远场区 $r\gg\lambda$，$\varphi=-k_e\frac{p}{\lambda}\frac{\cos\theta}{r}\sin(\omega t_r)$

「$\vec{I}(t)=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\vec{e_z}=-q\omega\sin(\omega t)\vec{e_z}$，$\vec{A}=k_m\int_{-l/2}^{l/2}\frac{1}{\mathscr{r}}\vec{I}(t_r)\,\mathrm{d}z$」 $\vec{A}(r,\theta,t)=-k_m\frac{p\omega}{r}\sin(\omega t_r)\vec{e_z}$ （满足洛伦兹规范）

$\vec{E}=-k_m p\omega^2\frac{\sin\theta}{r}\cos(\omega t_r)\vec{e_\theta}$，$\vec{B}=-\frac{k_m}{c}p\omega^2\frac{\sin\theta}{r}\cos(\omega t_r)\vec{e_\phi}$，即电场磁场同相位，单色波沿径向光速传播

能流 $\vec{S}=\frac{k_m^2}{\mu_0 c}\left[p\omega^2\frac{\sin\theta}{r}\cos(\omega t_r)\right]^2\vec{e_r}$，在一个周期平均 $\overline{\vec{S}}=\frac{k_m^2}{2\mu_0 c}\left[p\omega^2\frac{\sin\theta}{r}\right]^2\vec{e_r}$

$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{k_m^2}{2\mu_0 c}(p\omega^2\sin\theta)^2$，总辐射功率 $P=\frac{k_m}{3c}p^2\omega^4$ 与半径无关，符合能守



radiation resistance

因辐射损耗的功率在〈电路〉中等效为 **辐射电阻** R

「$P=IR^2$，$I=q\omega\sin(\omega t)\to\overline{P}=\frac{1}{2}q^2\omega^2R$」 $R=\frac{\mu_0}{6\pi c}l^2\omega^2=80\pi^2\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$ (Ω)

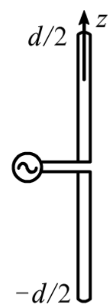
天线基础

linear wire antenna

直线天线 长为 d 的导体，中间开缝，高频电流从中央同相馈送（电流分布中心对称）

「$\vec{j}(\vec{r}',t_r)=I_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_r}\sin(kd/2-k|z|)\vec{e_z}$，远场区 $r-\vec{r}\cdot\vec{e_r}\approx r-z\cos\theta$，$\vec{A}(\vec{r})=\frac{k_m}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\int\vec{j}(\vec{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz\cos\theta}\mathrm{d}V'$

$=\frac{k_m I_0\vec{e_z}}{2r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\int_0^{d/2}\sin(kd/2-kz)\cos(kz\cos\theta)\,\mathrm{d}z$，$\vec{B}=\mathrm{i}k\vec{e_r}\times\vec{A}$，$\vec{E}=c\vec{E}\times\vec{e_r}$」

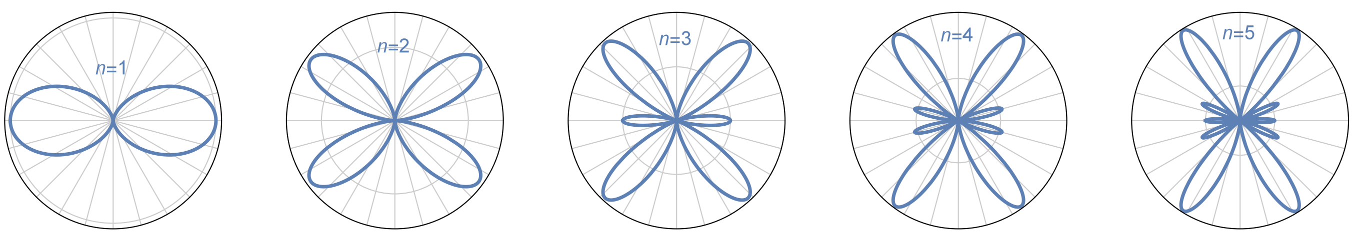


$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}=\overline{\vec{S}\cdot\vec{e_r}}r^2=\frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}(\vec{E}^*\times\vec{B})\cdot\vec{e_r}r^2=\frac{c}{2\mu_0}k^2\sin^2\theta|\vec{A}|^2r^2=\frac{\mu_0 cI_0^2}{8\pi^2}\left[\frac{\cos(kd/2\cos\theta)-\cos(kd/2)}{\sin\theta}\right]^2$

取 $d=n\frac{\lambda}{2}=\frac{n\pi}{k}$，**半波天线** $n=1$，角分布因子 $\frac{\cos^2(\pi/2\cos\theta)}{\sin^2\theta}$，数值积分 2.44，$R\approx73.2\ \Omega$

全波天线 $n=2$，角分布 $\frac{4\cos^4(\pi/2\cos\theta)}{\sin^2\theta}$，积分 6.64，$R\approx199\ \Omega$（比 **短天线** $l\ll\lambda$ 辐射强）

对于反相馈送（$\vec{j}$ 里的 z 不加绝对值），n 为奇数的角分布相同，偶数的为 $\frac{\sin^2(n\pi/2\cos\theta)}{\sin^2\theta}$



antenna array

以上均只对 θ 有方向性（侧视图），要对 ϕ 也有方向性（俯视图） 可用 **天线阵**

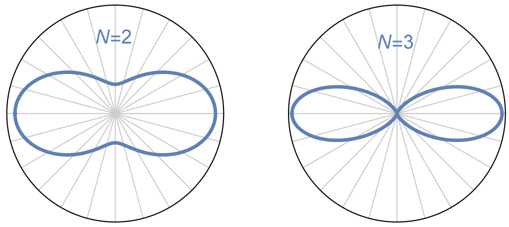
设有 N 个线天线，间距 l 〈光学〉「相邻两个有光程差 $l\cos\theta$，

$\vec{E}_{总}=\sum_{m=0}^{N-1}\vec{E_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}mkl\cos\theta}$」 **角分布阵因子** $f(\alpha)=\left|\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}Nkl\cos\theta}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}kl\cos\theta}}\right|^2=\frac{\sin^2(N\alpha/2)}{\sin^2(\alpha/2)}$

线性排列称为 $\boxed{\text{边射阵}}$ $\alpha=kl\sin\phi$ (右图为 $kl=2$ 情况)

横向排列称为 $\boxed{\text{端射阵}}$ $\alpha=kl\sin\theta\cos\phi$

(形似鱼骨, 例如电视接收用的八木宇田天线)



利用导体面, 单极天线可和其镜像构成对称振子

(例如手机多为 $\lambda/4$ 单极天线) $\rightarrow$ $\boxed{\text{面天线 / 口径天线}}$ aperture antenna

Carson reciprocity theorem

$\boxed{\text{卡森互易定理}}$ 设线性介质中分别由源 $\vec{j_1},\vec{j_2}$ 产生了同频的电磁场, 则有 $\int_{V_1}(\vec{E_2}\cdot\vec{j_1}-\vec{H_2}\cdot\vec{j_{m1}})\,\mathrm{d}V=\int_{V_2}(\vec{E_1}\cdot\vec{j_2}-\vec{H_1}\cdot\vec{j_{m2}})\,\mathrm{d}V$ **推论** 一个天线用作发射和接收时, 角分布, 增益, 输入阻抗均相同

磁偶极辐射

通有交变电流的圆环 $\vec{m}(t)=\pi r_0^2 I\cos(\omega t)\vec{e_z}$, 环不带电 $\varphi=0$, 推迟矢势 $\vec{A}(\vec{r},t)=k_m I\int\cos(\omega t_{\mathscr{r}})/\mathscr{r}\,\mathrm{d}\vec{l}'$

「推导略」 理想磁偶极子 $\vec{A}(r,\theta,t)=k_m m\dfrac{\sin\theta}{r}\left[\dfrac{1}{r}\cos(\omega t_r)-\dfrac{\omega}{c}\sin(\omega t_r)\right]\vec{e_\phi}$

① 静态 $\vec{A}(r,\theta)=k_m\dfrac{m\sin\theta}{r^2}\vec{e_\phi}$ ② 远场 $\vec{A}(r,\theta,t)=-k_m\dfrac{m\omega}{c}\dfrac{\sin\theta}{r}\sin(\omega t_r)\vec{e_\phi}$

$\vec{E}=-\partial_t\vec{A}=k_m\dfrac{m\omega^2}{c}\dfrac{\sin\theta}{r}\cos(\omega t_r)\vec{e_\phi}$, $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=-k_m\dfrac{m\omega^2}{c^2}\dfrac{\sin\theta}{r}\cos(\omega t_r)\vec{e_\theta}$, 同相位, 振幅比 $E_0/B_0=c$

$\vec{S}=\dfrac{k_m^2}{\mu_0 c^3}\left[m\omega^2\dfrac{\sin\theta}{r}\cos(\omega t_r)\right]^2\vec{e_r}$, $\overline{\vec{S}}=\dfrac{k_m^2}{2\mu_0 c^3}\left[m\omega^2\dfrac{\sin\theta}{r}\right]^2\vec{e_r}$, $P=\dfrac{k_m}{3c^3}m^2\omega^4$, $\dfrac{P_{\text{磁}}}{P_{\text{电}}}=\left(\dfrac{m}{pc}\right)^2\overset{l=\pi r_0}{\underset{I=q\omega}{=\!=\!=}}\left(\dfrac{\omega r_0}{c}\right)^2$ 很小 (以上结论亦可由电磁对称性从电偶极类比得出)

定理 对于单一的 m 有 $\dfrac{\text{辐射带走的角动量}\,l_z}{\text{单位时间辐射的能量}}=\dfrac{m}{\omega}$ (场的能量量子化必导致角动量量子化) 〈量子〉

多极辐射

任意源的远场辐射「多极展开」 ① 电荷守恒, 故没有电单极场 ② 取 $\dot{r}$ 最低阶则为电偶极辐射 ③ 取到 $\ddot{r}$ 则包含磁偶极和电四极 $\rightarrow$ $\vec{A}(\vec{r},t)=k_m\left[\dfrac{1}{r}\dot{\vec{p}}(t_r)+\dfrac{1}{cr}\dot{\vec{m}}(t_r)\times\vec{e_r}+\dfrac{1}{6cr}\vec{e_r}\cdot\ddot{\vec{D}}(t_r)\right]$

「 因只保留 $1/kr$ 最低次项, 故作用在相因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}$ 上相当于做替换 $\nabla\leftrightarrow\mathrm{i}k\vec{e_r}$, $\partial_t\leftrightarrow-\mathrm{i}\omega$ 」

公式 $\vec{B}=\mathrm{i}k\vec{e_r}\times\vec{A}=\dfrac{1}{c}(\dot{\vec{A}}\times\vec{e_r})$, $\vec{E}=c\vec{B}\times\vec{e_r}=\vec{e_r}\times(\vec{e_r}\times\dot{\vec{A}})$

② $\vec{E}(\vec{r},t)\approx\dfrac{k_m}{r}\left[(\vec{e_r}\cdot\ddot{\vec{p}})\vec{e_r}-\ddot{\vec{p}}\right]=\dfrac{k_m}{r}\left[\vec{e_r}\times(\vec{e_r}\times\ddot{\vec{p}})\right]$, $\vec{B}(\vec{r},t)\approx\dfrac{k_m}{rc}(\ddot{\vec{p}}\times\vec{e_r})$, 其中 $\ddot{\vec{p}}$ 取 t_r 时的值

若用球坐标, 以 $\ddot{\vec{p}}(t_r)$ 为 z 轴, 则 $\vec{E}(r,\theta,t)\approx k_m\ddot{\vec{p}}(t_r)\dfrac{\sin\theta}{r}\vec{e_\theta}$, $\vec{B}(r,\theta,t)\approx\dfrac{k_m}{c}\ddot{\vec{p}}(t_r)\dfrac{\sin\theta}{r}\vec{e_\phi}$

$\overline{\vec{S}}=\dfrac{k_m^2}{\mu_0 c}\left(\ddot{\vec{p}}(t_r)\dfrac{\sin\theta}{r}\right)^2\vec{e_r}$, $P=\dfrac{\mu_0}{6\pi c}\ddot{\vec{p}}^2$ **例** 点电荷 $p(t)=qr'(t)$, $\ddot{p}(t)=qa(t)$, 亦得 $\boxed{\text{拉莫尔公式}}$

电偶极子 $p(t)=p_0\cos(\omega t)$, $\ddot{p}(t)=-\omega^2 p_0\cos(\omega t)$ 结论一致

③ $\boxed{\text{电四极辐射}}$ $\vec{A}=-k_m\dfrac{\omega^2}{6cr}\vec{e_r}\cdot\vec{D}$, $\overline{\vec{S}}=\dfrac{k_m}{288c^3r^2}D_\theta^2\omega^6\vec{e_r}$

$\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}=\dfrac{k_m}{288c^3}D_\theta^2\omega^6$ 其中 $\boxed{\text{角分布因子}}$ $D_\theta^2=|\vec{e_r}\cdot\vec{D}\times\vec{e_r}|^2$

例 共线型电四极子, $\vec{\mathscr{D}}=2qab\vec{e_z}\vec{e_z}$, $\vec{e_r}\cdot(\vec{e_z}\vec{e_z})=\cos\theta\vec{e_z}$,

$\vec{e_z}\times\vec{e_r}=\sin\theta\vec{e_\phi}$ $\rightarrow$ $D_\theta^2=\sin^2\theta\cos^2\theta$

$P=\dfrac{k_m}{360c^3}\vec{D}:\vec{D}\omega^6$, 其中 $\vec{D}:\vec{D}=\sum\limits_{i,j}|D_{ij}|^2$