

Дискретная математика

Илья Ковалев

2024 год

1 Информация

Профессор — Светлана Олеговна

Почта — svetlana_os@mail.ru

Учебники:

- Нефедов и Осипова – Курс Дискретной Математики
- Лавров и Максимова – Сборник задач по теории множеств, мат. логике и теории алгоритмов

2 Теория Множеств

2.1 Множества

Множеству невозможно дать определение без парадоксов.

2.1.1 Создание множества

$P(x)$ — форма от x .

$$A = \{x | P(x)\}$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$A = \{1, -1\} = \{x | x^2 - 1 = 0\}$$

2.1.2 Равенство

$$\{1, 2\} = \{2, 1, 1, 2, 2, 1\}$$

2.1.3 Подмножества

$$A \subseteq B \Rightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$$

$$A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$$

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B, B \subseteq A$$

Примеры:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

$$\text{Пусть } A = \{1, 2\}, B = \{\{1, 2\}, 3\}, C = \{1, 2, 3\}$$

$$A \not\subseteq B$$

2.1.4 Размер множества

$$m(A) = |A| \text{ — количество элементов множества}$$

$$\emptyset \text{ — пустое множество, } |\emptyset| = 0$$

2.1.5 Множество-степень

$P(A)$ — множество-степень — множество всех подмножеств A

Например:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, A\}$$

$$|P(A)| = 2^{|A|}$$

2.1.6 Абсолютное (универсальное) множество

Универсальное множество — U — множество всех подмножеств

2.1.7 Операции

1. Объединение. $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$

2. Пересечение. $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$

3. Относительное дополнение.

$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

4. Симметрическая разность. $A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

5. Отрицание. $\overline{A} = \{x | x \notin A\}$

Пример:

$$\text{Пусть } A \subseteq B$$

Тогда:

- $A \cap B = A$
- $A \cup B = B$
- $A \setminus B = \emptyset$

Примеры:

Пусть $A = [5; 9)$, $B = [6; 10)$, $C = [4; 8)$

$$A \cup B = [5; 10)$$

$$A \cap C = [5; 8)$$

$$\overline{B} = (-\infty; 6) \cup [10; +\infty)$$

$$C \setminus A = \emptyset$$

$$B \oplus C = [4; 6) \cup [8; 10)$$

$$\overline{A \setminus (B \cup C)} = (4; 9]$$

$$\overline{(B \setminus A) \cup (C \setminus B)} = \mathbb{R}$$

2.1.8 Свойства

1. Коммутативность. $A \cup B = B \cup A$
2. Ассоциативность. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
3. Дистрибутивность. $A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. Идемпотентность. $A \cup A = A$
5. Закон Де-Моргана. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
6. Поглощение. $A \cup (A \cap B) = A$
7. Расщепление. $A = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$
8. $\overline{\overline{A}} = A$

2.1.9 Функция ψ

$$A \subseteq U, A \rightarrow \psi(x) : U \rightarrow \{0, 1\}$$

$$\psi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A \\ 0, & \text{если } x \notin A \end{cases}$$

1. $\psi_{A \cap B} = \psi_A \psi_B$
2. $\psi_{A \cup B} = \psi_A + \psi_B - \psi_A \psi_B$

$$3. \psi_{A \oplus B} = \psi_A + \psi_B - 2\psi_A\psi_B$$

Заметим, что $\psi_A^2 = \psi_A$, тогда $\psi_{A \oplus B} = (\psi_A - \psi_B)^2 = |\psi_A - \psi_B|$

$$4. \psi_{\bar{A}} = 1 - \psi_A$$

$$5. \psi_{A \setminus B} = \psi_A - \psi_A\psi_B$$

2.1.10 Табличный метод

ψ_A	ψ_B	$\psi_{A \cap B}$	$\psi_{A \cup B}$	$\psi_{\bar{A}}$	$\psi_{A \setminus B}$	$\psi_{A \oplus B}$
1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	0	1	0	0

Пример:

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$$

ψ_A	ψ_B	ψ_C	$\psi_{B \setminus C}$	$\psi_{A \setminus (B \setminus C)}$	$\psi_{A \setminus B}$	$\psi_{A \cap C}$	ψ_{\cup}
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	0	1	0	1	1

2.1.11 Доказательство утверждением

Условия:

$$1. A \subseteq B$$

$$2. A \cap B = A$$

$$3. A \cup B = A$$

Эквивалентны.

Доказательство $1 \Rightarrow 2$:

Дано: $A \subseteq B$

Доказать: $A \cap B = A$

$$1. A \cap B \subseteq A$$

Пусть $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$

$$2. A \subseteq A \cap B$$

Пусть $x \in A \xRightarrow{\text{по усл}} x \in B \Rightarrow x \in A \cap B$

Доказательство $2 \Rightarrow 3$:

Дано: $A \cap B = A$

Доказать: $A \cup B = B$

$$A \cup B = (A \cap B) \cup B = B$$

Доказательство $3 \Rightarrow 1$:

Дано: $A \cup B = B$

Доказать: $A \subseteq B$

От противного:

Предположим $A \not\subseteq B \Rightarrow \exists x \in A \wedge x \notin B$

Так как $x \in A \Rightarrow x \in A \cap B \xRightarrow{\text{по усл}} x \in B$ — противоречие

Следовательно, $A \subseteq B$

2.1.12 ДЗ

Лаврова & Максимов: Часть I, ¶ 1, №11, 12, 14

3 Бинарные отношения

$$\rho \subseteq A \times B$$

$$A = B = X$$

$$\langle x, y \rangle \in \rho = x \rho y$$

3.1 Свойства

Бинарное отношение ρ , заданное на множестве X , называется:

1. **Рефлексивным** если $\forall x \in X, x \rho x$

Примеры: $x = x, x \parallel x$

2. **Симметричным** если $\forall x, y \in X, x \rho y \Rightarrow y \rho x$

Примеры: $x = x, x \perp x$

3. **Антисимметричным** если $\forall x, y \in X, x \rho y \wedge y \rho x \Rightarrow x = y$

Примеры: $x \geq y, x \leq y, x > y, X \subseteq Y$

4. **Транзитивным** если $\forall x, y, z \in X, x \rho y \wedge y \rho z \Rightarrow x \rho z$

Примеры: $x = y \wedge y = z, x \parallel y \wedge y \parallel z$

5. **Ассимметричным** если $\forall x, y \in X, x \rho y \Rightarrow \overline{y \rho x}$

3.2 Специальные бинарные отношения

3.2.1 Отношение эквивалентности

1. Рефлексивно
2. Симметрично
3. Транзитивно

Пример:

- $x = x$
- $x = y \Rightarrow y = x$
- $x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z$

3.2.2 Отношение (частичного) порядка

Частично упорядоченное множество — множество, на котором задано отношение частичного порядка.

1. Рефлексивно
2. Антисимметрично
3. Транзитивно

Пример:

- $x \leq x$
- $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$
- $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

Утверждение:

Пусть ρ — эквивалентность на X

Тогда ρ :

1. Задает на X разбиение на классы эквивалентности.
2. Если на X задано разбиение, то отношение ρ , заданное так, что $x\rho y \Leftrightarrow x$ и $y \in$ одном подмножестве

3.3 Разбиение

$A = \bigcup_{i=1}^n A_i$, так что:

1. $\forall i, j \in [1; n], i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$
2. $\forall i \in [1; n], A_i \neq \emptyset$

Разбиение A — $P(A) = \{A_1, A_2 \dots A_n\}$

Наибольший элемент: элемент $a \in X$ — наибольший, если $\forall y \in X : a \leq y$

Максимальный элемент: элемент $a \in X$ — максимальный, если $\nexists y \in X : a \lesssim y$

Наименьший элемент: элемент $a \in X$ — наименьший, если $\forall y \in X : a \geq y$

Минимальный элемент: элемент $a \in X$ — минимальный, если $\nexists y \in X : a \gtrsim y$

Два частично упорядоченных множества X и Y называются **изоморфными**, если существует биекция

№13(б)

$$A \subseteq B \cup C \Leftrightarrow A \cap \overline{B} \subseteq C$$

Дано:

$$A \subseteq B \cup C$$

Доказать:

$$A \cap \overline{B} \subseteq C$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \text{let } x \in A \cap \overline{B} &\Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \\ x \in a &\stackrel{\text{усл}}{\Rightarrow} x \in B \cup C \Rightarrow x \in B \vee x \in C \\ \begin{cases} x \in B \vee x \in C \\ x \notin B \end{cases} &\Rightarrow x \in C \end{aligned}$$

Дано:

$$A \cap \overline{B} \subseteq C$$

Доказать:

$$A \subseteq B \cup C$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} & \text{let } x \in A \\ & \text{if } x \in B \Rightarrow x \in B \cup C \\ & \text{if } x \notin B \Rightarrow x \in A \cap \overline{B} \xrightarrow{\text{усл}} x \in C \Rightarrow x \in B \cup C \end{aligned}$$

3.4 Метод доказательства критериев

$$\begin{aligned} A \subseteq B \cup C & \Leftrightarrow A \cap \overline{B} \subseteq C \\ A \setminus (B \cup C) = \emptyset & \Leftrightarrow (A \cap \overline{B}) \setminus C = \emptyset \\ \psi_{A \setminus (B \cup C)} = 0 & \Leftrightarrow \psi_{(A \cap \overline{B}) \setminus C} = 0 \\ \psi_{A \setminus (B \cup C)} & = \psi_{(A \cap \overline{B}) \setminus C} \end{aligned}$$

3.5 Виды бинарных отношений

3.5.1 Функция

$$\begin{aligned} f & \subseteq X \times Y \\ \forall x \in X, \forall y_1 \in Y, \forall y_2 \in Y, \\ \langle x, y_1 \rangle \in f \wedge \langle x, y_2 \rangle \in f & \Rightarrow y_1 = y_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle \in f & \subseteq A \times B \\ xfy \\ y & = f(x) \\ f & : A \rightarrow B \\ A & \mapsto B \end{aligned}$$

3.5.2 Сюръекция

$$\begin{aligned} f & : X \rightarrow Y \\ \forall y \in Y \exists x \in X : y & = f(x) \end{aligned}$$

3.5.3 Инъекция

$$f : X \rightarrow Y$$
$$\forall x_1, x_2 \in X, x_1 = x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

3.5.4 Биекция

$$f : X \leftrightarrow Y$$
$$\forall y \in Y \exists x \in X : y = f(x) \wedge x = f(y)$$

3.6 Функции над множествами

$$f : X \rightarrow Y$$
$$A \subseteq X$$
$$f(A) = \{y \mid y = f(x), x \in A\}$$

3.6.1 Свойства

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
2. $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$
3. $f(A \setminus B) \supseteq f(A) \setminus f(B)$
4. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
5. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
6. $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$

3.7 Мощность множества (Кардинальное число множества)

$$f(x) : A \rightarrow B \wedge f \text{ — биекция} \Rightarrow A \sim B$$

A и B равномощны (эквивалентны).

Свойства эквивалентности:

1. Рефлексивность: $A \sim A$
2. Симметричность: $A \sim B \Rightarrow B \sim A$
3. Транзитивность: $A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$

$|A| = [A]_{\sim}$ — мощность множества A
 $\overline{\overline{A}} = |A| = \text{card} A$

$$N_n = \{1, 2, \dots, n\} \wedge A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \Rightarrow A \sim N_n$$

Множество, не являющееся конечным, является **бесконечным**.

3.8 Прямое (Декартово) произведение

$$\begin{aligned} X, Y \\ X \times Y &= \{\langle x, y \rangle | x \in X, y \in Y\} \\ X \times Y &\neq Y \times X \\ X \times X &= X^2 \\ D_{X \times Y} &= X \text{ — область определения} \\ E_{X \times Y} &= Y \text{ — область значений} \end{aligned}$$

Примеры:

Доказать:

$$L = (A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D) = R$$

Доказательство:

1.

$$\begin{aligned} L \subseteq R \\ \text{let } \langle x, y \rangle \in L \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ y \in B \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} x \in C \\ y \in D \end{array} \right\} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in A \cap C \\ y \in B \cap D \end{array} \right. \Rightarrow \langle x, y \rangle \in R \end{aligned}$$

2. $R \subseteq L$ аналогично

3.8.1 Операции

1. \cup, \cap, \dots

2. Обратное отношение

$$\rho^{-1} = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in X : \langle y, x \rangle \in \rho\}$$

3. Композиция

$$\rho_1 \circ \rho_2 = \{\langle x, y \rangle \mid \exists z \in X : \langle x, z \rangle \in \rho_2, \langle z, y \rangle \in \rho_1\}$$

То есть

$$\begin{aligned} f \circ g &= f(g(x)) \\ \left\{ \begin{array}{l} \langle x, z \rangle : z = g(x) \\ \langle z, y \rangle : y = f(z) \end{array} \right. &\Rightarrow \langle x, y \rangle : y = f(g(x)) \end{aligned}$$

Свойства:

1.

$$(\rho^{-1})^{-1} = \rho$$

2.

$$(\rho_1 \circ \rho_2)^{-1} = \rho_2^{-1} \circ \rho_1^{-1}$$

3.9 Условия свойств

$$d = \{\langle x, x \rangle \mid \forall x \in X\}$$

d — отношение-диагональ

3.9.1 Рефлексивности

$$d \subseteq \rho$$

3.9.2 Симметричности

$$\rho = \rho^{-1}$$

3.9.3 Антисимметричности

$$\rho \cap \rho^{-1} \subseteq d$$

3.9.4 Асимметричности

$$\rho \cap \rho^{-1} = \emptyset$$

3.9.5 Частичный порядок

ρ на X — ЧП, если ρ — рефлексивно, антисимметрично, транзитивно

3.9.6 Транзитивность

$$\rho^2 \subseteq \rho$$

3.10 Специальные бинарные отношения

3.10.1 Частичный порядок

ρ на X — ЧП, если ρ — рефлексивно, антисимметрично, транзитивно
ЧП обозначается символом \preceq

Примеры:

1. \subseteq, U

2. \leq, \mathbb{R}

3.10.2 Полный порядок

ρ на X — ПП, если ρ — ЧП, где $\forall a, b \in X : a\rho b \vee b\rho a$

Приведение к линейному порядку:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \min_X \rho \\
 X_2 &= \min_{X \setminus X_1} \rho \\
 X_3 &= \min_{X \setminus (X_1 \cup X_2)} \rho \\
 &\vdots \\
 X_k &= \min_{X \setminus (\bigcup_{i=1}^{k-1} X_i)} \rho \\
 X_{k+1} &= \emptyset
 \end{aligned}$$

3.10.3 Отношение эквивалентности

ρ на X — EQ, если ρ — рефлексивно, симметрично, транзитивно

3.10.4 Класс эквивалентности

$$[x]_\rho = \{y \in X : x \rho y\}$$

3.11 Диаграммы Хассе

$$x \prec y \Leftrightarrow x \preceq y \wedge x \neq y$$

$$x \text{ покрывает } y \Leftrightarrow \nexists u \in X : x \prec u \prec y$$

4 Математическая логика

4.1 Логика высказываний

Высказывание — языковое предложение, о котором осмысленно говорить, истинно оно или ложно.

Высказывательная перем. — буквенная замена высказывания, принимающая значение истины или лжи. x, y, z, x_1, \dots

4.1.1 Языковые средства

Операции:

1. Отрицание: "не". $\neg x, \bar{x}$
2. Конъюнкция: "и". $x \wedge y, x \& y$
3. Дизъюнкция: "или". $x \vee y, x | y$
4. Импликация: "если то". $x \supset y, x \rightarrow y$