Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Илья Ковалев

6 сентября 2024

1 Экзамен

Билет — 5 вопросов, 2 теория и 3 практика
1 вопрос = 1 балл
Письменный экзамен, длительность — 90 минут

2 Матрицы и их операции

Матрицей A порядка $m*n$ называют двумерную таблицу, состоящую из m строк и n столбцов.

Прямоугольная матрица — $m*n$.

Квадратная матрица — $n*n$.

Диагональная матрица — $n*n$, где отличны от нуля только элементы главной диагонали.

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

Скалярная — диагональная, где все элементы диагонали равны.

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Единицная — скалярная, где все элементы диагонали $= 1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Нулевая — все элементы $= 0$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3 Вычисление определителей

$detA_{n*m}$

3.1 Младшие порядки

$$n = 2$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} -5 & -6 \\ -7 & -8 \end{vmatrix} = (-5)(-8) - (6)(-7) = 40 + 42 = 82$$

3.1.1 Способ 1. По Саррюсу

$$n = 3$$

№2.13

$$\left|\begin{matrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 3 & 4 \\ 8 & 7 \\ 2 & -1 \end{matrix} =$$
$$= (3)(7)(8) + (4)(-2)(2) + (-5)(8)(-1) -$$
$$-(2)(7)(-5) - (-1)(-2)(3) - (8)(8)(4) =$$
$$168 - 16 + 40 + 70 - 6 - 256 = 0$$

3.1.2 Способ 2. Разложение

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ m & n & k \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{3} a_{i2}A_{i2} = bA_{12} + eA_{22} + nA_{32}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{3} a_{i2}A_{i2} =$$
$$= 4A_{12} + 7A_{22} + (-1)A_{32} = 4(-M_{12}) + 7M_{22} + M_{32}$$

где

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 64 + 4 = 68$$
$$M_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 24 + 10 = 34$$
$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 40 = 34$$

$$4(-68) + 7(34) + 34 = (-8 + 7 + 1) * 34 = 0$$

3.1.3 Контроль

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{matrix} =$$
$$= (3)(5)(2) + (2)(3)(3) + (1)(2)(4) -$$
$$-(3)(5)(1) - (4)(3)(3) - (2)(2)(2) =$$
$$= 30 + 18 + 8 - 15 - 36 - 8 = -3$$

№2.54(a)

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = aA_{31} + bA_{32} + cA_{33} + dA_{34}$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} =$$

$$= \left|\begin{matrix} -3 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{matrix} =$$

$$= (-3)(3)(3) + (4)(2)(-1) + (1)(-2)(4) -$$

$$-(-1)(3)(1) - (4)(2)(-3) - (3)(-2)(4) =$$

$$= -27 - 8 - 8 + 3 + 24 + 24 = 8$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} =$$

$$= - \left|\begin{matrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{matrix} =$$

$$= -(2)(3)(3) - (4)(2)(3) - (1)(4)(4) +$$

$$+(3)(3)(1) + (4)(2)(2) + (3)(4)(4) =$$

$$= -(18 + 24 + 16 - 9 - 16 - 48) = 15$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} =$$

$$= \left|\begin{matrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & -3 \\ 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{matrix} =$$

$$= (2)(-2)(3) + (-3)(2)(3) + (1)(4)(-1) -$$

$$-(3)(-2)(1) - (-1)(2)(2) - (3)(4)(-3) = \ldots$$

3.1.4 Способ 3. С упрощением

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} I \\ II+IV \\ III-3IV \\ IV \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 8 & 0 \\ -6 & -4 & -16 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 0A_{14} + 0A_{24} + 0A_{34} + 1A_{44} = M_{44} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \\ -6 & -4 & -16 \end{vmatrix} = -2 * \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix} = -2 * 0 = 0$$

3.1.5 Контроль

№2.56

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} I-3II \\ II \\ III+II \\ IV \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 8 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -A_{23} = M_{23} = \begin{vmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 8 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 6 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 * (-28) + 12 = -3 * (-16) = 48$$

3.1.6 ДЗ

№№

- 2.1
- .50
- .52
- .54(б)
- .57
- 61*

3.2 Свойства определителей

1. Транспонирование — строки и столбцы равноправны
2. Упрощение
3. Перестановка двух строк/столбцов меняет знак определителя, не меняет модуль
4. Умножение
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$
5. Сложение
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -4 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$
6. Спец-свойство
$$i \neq j, \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0$$
7. Произведение
$$det A * det B = det A * B$$
8. Треугольный определитель
$$det U_{4*\times 4} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} * a_{22} * a_{33} * a_{44}$$

4 Обратная матрица

Деление в алгебре:
$ax = b \overset{a \neq 0}{\Rightarrow} x = \frac{b}{a}$
Обратное число для $a \neq 0$ — такое a^{-1}, что $a * a^{-1} = 1$

4.1 Определение

Обратная матрица A^{-1} — такая, что ее произведение и слева, и справа — единичная матрица.

$$AA^{-1} \overset{\triangle}{=} E$$
$$A^{-1}A \overset{\triangle}{=} E$$

4.2 Свойства

1. **Порядок** — $A_{n \times n} \Rightarrow A^{-1}_{n \times n}$

2. **Единственность** — $A : \exists A^{-1}, \exists! A^{-1}$
   Доказательство от противного:
   Предположим, что $A : \exists A_1^{-1} \neq A_2^{-1}$
   Тогда $AA_1^{-1} - AA_2^{-1} = E - E = 0$
   $A(A_1^{-1} - A_2^{-1}) = 0$
   $A_1^{-1} - A_2^{-2} = 0 \Rightarrow A_1^{-1} = A_2^{-1}$ — противоречие. ЧТД.

3. **Обратность определителя** — $A : \exists A^{-1} \Rightarrow detA = \frac{1}{detA^{-1}}$
   $AA^{-1} = E$
   $detAA^{-1} = detE = 1$
   $detA = \frac{1}{detA^{-1}}$

4. **Ненулевость определителя** — $detA = 0 \Rightarrow \nexists A^{-1}$
   Если $A : \exists A^{-1}$, то $detA \neq 0$

5. $A : detA \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{A^*}{detA}$
   $A^* = adj(A) = (A_{ij})^T_{i,j=T,i}$

Вырожденная матрица — $A, detA = 0$

4.3 Алгоритм обращения матрицы

1. $A^{-1} = \frac{A_{ij}^T}{detA}$

2. Вычислить все A_{ij} для a_{ij}.

3. Собрать все A_{ij} в матрицу и транспонировать ее.

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{m1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

4. Разделить. $A^{-1} = \frac{A^*}{detA}$

5. Проверить. $AA^{-1} = E$

4.3.1 Пример — быстрое обращение матрицы 2×2

$n = 2 : A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

1. Пусть $detA = ad - bc \neq 0$

2. Найдем все алгебраические дополнения

$$A_{11} = M_{11} = d$$
$$A_{12} = -M_{12} = -c$$
$$A_{21} = -M_{21} = -b$$
$$A_{22} = M_{22} = a$$

3. $$A^* = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

4. $$A^{-1} = \frac{A^*}{detA}$$

4.4 Свойства операций обращения матриц

Примечание: $\forall A \exists A^{-1}$

1. $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
2. $(\lambda B)^{-1} = \lambda^{-1}B^{-1}$
3. $(A^{-1})^{-1} = A$
4. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-T}$

4.5 Примеры

№2.106

$$n = 2$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$
$$A^{-1} = \frac{1}{4-6}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

Проверка:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} (1)(-2)+(2)(1.5) & (-2)(2)+(1)(4) \\ (3)(-2)+(4)(1.5) & (1.5)(2)+(4)(-0.5) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{2\times 2}$$

№2.109

1. Определитель

$$n = 3$$
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$
$$detA = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \cdots = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

2. Первая строка

$$A_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 8 = -1$$

$$A_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -(-18 + (-20)) = 38$$

$$A_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -12 - 15 = -27$$

3. Вторая строка

$$A_{21} = -M_{21} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -(-15 + 14) = 1$$

$$A_{22} = M_{22} = -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -6 + (-35) = -41$$

$$A_{23} = -M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 - 25) = 29$$

4. Третья строка

$$A_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 21 = -1$$

$$A_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -(8 - 42) = 34$$

$$A_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 30 = -24$$

5. Присоединенная матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} A_1 1 & A_2 1 & A_3 1 \\ A_1 2 & A_2 2 & A_3 2 \\ A_1 3 & A_2 3 & A_3 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix}$$

6. Обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{A^*}{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$$

5 Решение линейных уравнений

Тип 1

$$
\begin{aligned}
A_{m\times n}X_{n\times P} &= B_{m\times P}\\
A^{-1}_{n\times m}A_{m\times n}X_{n\times P} &= A^{-1}_{n\times m}B_{m\times P}\\
X_{n\times P} &= A^{-1}_{n\times m}B_{m\times P}
\end{aligned}
$$

Тип 2

$$
\begin{aligned}
YA &= B\\
YAA^{-1} &= BA^{-1}\\
Y &= BA^{-1}
\end{aligned}
$$

Тип 3

$$
\begin{aligned}
A_1XA_2 &= B\\
A_1^{-1}A_1XA_2A_2^{-1} &= A_1^{-1}BA_2^{-1}\\
Y &= A_1^{-1}BA_2^{-1}
\end{aligned}
$$

Тип 4

$A_1X + XA_2 = B$ — не вычисляется с помощью обратных матриц

5.1 Значения матриц

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — переменные

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ — свободные члены

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ — коэффициенты}$$

5.2 Примеры

№2.121

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{gathered} X = A^{-1}B = \\ = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} = \\ = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} = \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \end{gathered}$$

3. Проверка

$$AX \stackrel{?}{=} B$$

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Верно

№3.122

$$X\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$$

1.

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

2. $X = \dots$ — мне лень

5.2.1 ДЗ

№№

1. 2.107
2. .110
3. .123
4. .125