

# Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Илья Ковалев

6 сентября 2024

## 1 Экзамен

Билет — 5 вопросов, 2 теория и 3 практика

1 вопрос = 1 балл

Письменный экзамен, длительность — 90 минут

## 2 Матрицы и их операции

Матрицей  $A$  порядка  $m \times n$  называют двумерную таблицу, состоящую из  $m$  строк и  $n$  столбцов.

Прямоугольная матрица —  $m \times n$ .

Квадратная матрица —  $n \times n$ .

Диагональная матрица —  $n \times n$ , где отличны от нуля только элементы главной диагонали.

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

Скалярная — диагональная, где все элементы диагонали равны.

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Единицная — скалярная, где все элементы диагонали = 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Нулевая — все элементы = 0.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### 3 Вычисление определителей

$$\det A_{n \times m}$$

#### 3.1 Младшие порядки

$$n = 2$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} -5 & -6 \\ -7 & -8 \end{vmatrix} = (-5)(-8) - (6)(-7) = 40 + 42 = 82$$

##### 3.1.1 Способ 1. По Саррюсу

$$n = 3$$

№2.13

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 7 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (3)(7)(8) + (4)(-2)(2) + (-5)(8)(-1) -$$

$$- (2)(7)(-5) - (-1)(-2)(3) - (8)(8)(4) =$$

$$168 - 16 + 40 + 70 - 6 - 256 = 0$$

### 3.1.2 Способ 2. Разложение

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ m & n & k \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^3 a_{i2} A_{i2} = bA_{12} + eA_{22} + nA_{32}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^3 a_{i2} A_{i2} =$$

$$= 4A_{12} + 7A_{22} + (-1)A_{32} = 4(-M_{12}) + 7M_{22} + M_{32}$$

где

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 64 + 4 = 68$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 24 + 10 = 34$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 40 = 34$$

$$4(-68) + 7(34) + 34 = (-8 + 7 + 1) * 34 = 0$$

### 3.1.3 Контроль

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= (3)(5)(2) + (2)(3)(3) + (1)(2)(4) -$$

$$- (3)(5)(1) - (4)(3)(3) - (2)(2)(2) =$$

$$= 30 + 18 + 8 - 15 - 36 - 8 = -3$$

**№2.54(a)**

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = aA_{31} + bA_{32} + cA_{33} + dA_{34}$$

$$\begin{aligned}
A_{31} &= (-1)^{3+1} M_{31} = \\
&= \begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = \\
&= (-3)(3)(3) + (4)(2)(-1) + (1)(-2)(4) - \\
&\quad -(-1)(3)(1) - (4)(2)(-3) - (3)(-2)(4) = \\
&= -27 - 8 - 8 + 3 + 24 + 24 = 8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{32} &= (-1)^{3+2} M_{32} = \\
&= - \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = \\
&= -(2)(3)(3) - (4)(2)(3) - (1)(4)(4) + \\
&\quad + (3)(3)(1) + (4)(2)(2) + (3)(4)(4) = \\
&= -(18 + 24 + 16 - 9 - 16 - 48) = 15
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{33} &= (-1)^{3+3} M_{33} = \\
&= \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = \\
&= (2)(-2)(3) + (-3)(2)(3) + (1)(4)(-1) - \\
&\quad - (3)(-2)(1) - (-1)(2)(2) - (3)(4)(-3) = \dots
\end{aligned}$$

### 3.1.4 Способ 3. С упрощением

$$\begin{aligned}
 & \left| \begin{array}{cccc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} I \\ II + IV \\ III - 3IV \\ IV \end{array} = \\
 & = \left| \begin{array}{cccc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 8 & 0 \\ -6 & -4 & -16 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{array} \right| = \\
 & = 0A_{14} + 0A_{24} + 0A_{34} + 1A_{44} = M_{44} = \\
 & = \left| \begin{array}{ccc} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \\ -6 & -4 & -16 \end{array} \right| = -2 * \left| \begin{array}{cc} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{array} \right| = -2 * 0 = 0
 \end{aligned}$$

### 3.1.5 Контроль

№2.56

$$\begin{aligned}
 & \left| \begin{array}{cccc} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{array} \right| \begin{array}{l} I - 3II \\ II \\ III + II \\ IV \end{array} = \\
 & = \left| \begin{array}{cccc} -4 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 8 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \end{array} \right| = \\
 & = -A_{23} = M_{23} = \left| \begin{array}{ccc} -4 & 0 & -2 \\ 8 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \end{array} \right| = \\
 & = \left| \begin{array}{ccc} -4 & 0 & -2 \\ 6 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & -5 \end{array} \right| = -3 \left| \begin{array}{cc} -4 & -2 \\ 6 & 7 \end{array} \right| = \\
 & = -3 * (-28) + 12 = -3 * (-16) = 48
 \end{aligned}$$

## 3.2 Свойства определителей

1. Транспонирование — строки и столбцы равноправны

2. Упрощение

3. Перестановка двух строк/столбцов меняет знак определителя, не меняет модуль

4. Умножение

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

5. Сложение

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -4 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

6. Спец-свойство

$$i \neq j, \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = 0$$

7. Произведение

$$\det A * \det B = \det A * B$$

8. Треугольный определитель

$$\det U_{4* \times 4} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} * a_{22} * a_{33} * a_{44}$$

## 4 Обратная матрица

Деление в алгебре:

$$ax = b \stackrel{a \neq 0}{\Rightarrow} x = \frac{b}{a}$$

**Обратное число** для  $a \neq 0$  — такое  $a^{-1}$ , что  $a * a^{-1} = 1$

### 4.1 Определение

Обратная матрица  $A^{-1}$  — такая, что ее произведение и слева, и справа — единичная матрица.

$$AA^{-1} \triangleq E$$

$$A^{-1}A \triangleq E$$

### 4.2 Свойства

1. **Порядок** —  $A_{n \times n} \Rightarrow A_{n \times n}^{-1}$

2. **Единственность** —  $A : \exists A^{-1}, \exists! A^{-1}$

Доказательство от противного:

Предположим, что  $A : \exists A_1^{-1} \neq A_2^{-1}$

Тогда  $AA_1^{-1} - AA_2^{-1} = E - E = 0$

$$A(A_1^{-1} - A_2^{-1}) = 0$$

$A_1^{-1} - A_2^{-1} = 0 \Rightarrow A_1^{-1} = A_2^{-1}$  — противоречие. ЧТД.

3. **Обратность определителя** —  $A : \exists A^{-1} \Rightarrow \det A = \frac{1}{\det A^{-1}}$

$$AA^{-1} = E$$

$$\det AA^{-1} = \det E = 1$$

$$\det A = \frac{1}{\det A^{-1}}$$

4. **Ненулевость определителя** —  $\det A = 0 \Rightarrow \nexists A^{-1}$

Если  $A : \exists A^{-1}$ , то  $\det A \neq 0$

5.  $A : \det A \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{A^*}{\det A}$

$$A^* = \text{adj}(A) = (A_{ij})_{i,j=T,i}^T$$

**Вырожденная матрица** —  $A, \det A = 0$

### 4.3 Алгоритм обращения матрицы

1.  $A^{-1} = \frac{A_{ij}^T}{\det A}$
2. Вычислить все  $A_{ij}$  для  $a_{ij}$ .
3. Собрать все  $A_{ij}$  в матрицу и транспонировать ее.

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{m1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

4. Разделить.  $A^{-1} = \frac{A^*}{\det A}$
5. Проверить.  $AA^{-1} = E$

#### 4.3.1 Пример — быстрое обращение матрицы $2 \times 2$

$$n = 2 : A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

1. Пусть  $\det A = ad - bc \neq 0$
2. Найдем все алгебраические дополнения

$$\begin{aligned} A_{11} &= M_{11} = d \\ A_{12} &= -M_{12} = -c \\ A_{21} &= -M_{21} = -b \\ A_{22} &= M_{22} = a \end{aligned}$$

3.

$$A^* = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

4.

$$A^{-1} = \frac{A^*}{\det A}$$



## 4.4 Свойства операций обращения матриц

Примечание:  $\forall A \exists A^{-1}$

1.  $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
2.  $(\lambda B)^{-1} = \lambda^{-1}B^{-1}$
3.  $(A^{-1})^{-1} = A$
4.  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-T}$

## 4.5 Примеры

№2.106

$$\begin{aligned} n &= 2 \\ A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ A^{-1} &= \frac{1}{4-6} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \\ A^{-1} &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Проверка:

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \begin{pmatrix} (1)(-2) + (2)(1.5) & (-2)(2) + (1)(4) \\ (3)(-2) + (4)(1.5) & (1.5)(2) + (4)(-0.5) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{2 \times 2} \end{aligned}$$

№2.109

1. Определитель

$$\begin{aligned} n &= 3 \\ A &= \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \\ \det A &= \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \dots = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \end{aligned}$$

2. Первая строка

$$\begin{aligned}A_{11} &= M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 8 = -1 \\A_{12} &= -M_{12} = -\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -(-18 + (-20)) = 38 \\A_{13} &= M_{13} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -12 - 15 = -27\end{aligned}$$

3. Вторая строка

$$\begin{aligned}A_{21} &= -M_{21} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -(-15 + 14) = 1 \\A_{22} &= M_{22} = -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -6 + (-35) = -41 \\A_{23} &= -M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 - 25) = 29\end{aligned}$$

4. Третья строка

$$\begin{aligned}A_{31} &= M_{31} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 21 = -1 \\A_{32} &= -M_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -(8 - 42) = 34 \\A_{33} &= M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 30 = -24\end{aligned}$$

5. Присоединенная матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix}$$

6. Обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{A^*}{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$$

## 5 Решение линейных уравнений

### Тип 1

$$\begin{aligned}A_{m \times n} X_{n \times P} &= B_{m \times P} \\ A_{n \times m}^{-1} A_{m \times n} X_{n \times P} &= A_{n \times m}^{-1} B_{m \times P} \\ X_{n \times P} &= A_{n \times m}^{-1} B_{m \times P}\end{aligned}$$

### Тип 2

$$\begin{aligned}YA &= B \\ YAA^{-1} &= BA^{-1} \\ Y &= BA^{-1}\end{aligned}$$

### Тип 3

$$\begin{aligned}A_1 X A_2 &= B \\ A_1^{-1} A_1 X A_2 A_2^{-1} &= A_1^{-1} B A_2^{-1} \\ Y &= A_1^{-1} B A_2^{-1}\end{aligned}$$

### Тип 4

$A_1 X + X A_2 = B$  — не вычисляется с помощью обратных матриц

## 5.1 Значения матриц

$$\begin{aligned}X = \vec{x} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ — переменные} \\ B = \vec{b} &= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ — свободные члены}\end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} - \text{коэффициенты}$$

## 5.2 Упражнения

### №2.121

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{aligned} X &= A^{-1}B = \\ &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} = \\ &\quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Проверка

$$\begin{aligned} &AX \stackrel{?}{=} B \\ AX &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Верно

### №3.122

$$X \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$$

1.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

2.  $X = \dots$  — мне лень

### 5.3 Нахождение решений

$$\Delta = \det A$$

$$m = n \wedge \Delta \neq 0 \Rightarrow x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$$

$$\Delta_j = D(a_1, \dots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \dots, a_n)$$

**Пример**

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4 \\ 5x_1 - 7x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = -29 \neq 0$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & -7 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{46}{29}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{8}{29}$$

### 5.4 Линейная зависимость

Если  $c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 + \dots + c_k \vec{a}_k = \vec{0}$  только при  $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$ , то уравнение Линейно Независимо (ЛНЗ)

Иначе, при  $c_1 = c_2 \neq 0 \Rightarrow c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_1 = \frac{c_2}{c_1} \vec{a}_2$

#### 5.4.1 Свойства ЛЗ и ЛНЗ

1. При сужении ЛНЗ, система остается ЛНЗ
2. При расширении ЛЗ, система остается ЛЗ

### 5.5 Необходимое и достаточное условие $\det A = 0$

$$\det A_{m \times n} = 0 \Leftrightarrow \exists \text{ЛЗ}$$

$$\vec{a}_n = \alpha_1 \vec{a}_k + \alpha_2 \vec{a}_l \Rightarrow \vec{a}_n - \alpha_1 \vec{a}_k - \alpha_2 \vec{a}_l = \vec{0} \Rightarrow \det A = 0$$

## 5.6 Минор прямоугольной матрицы

Минором прямоугольной матрицы  $A_{m \times n}$  порядка  $k \leq \min(m, n)$  называется любой определитель  $M_k$ , составленный из элементов на пересечении  $k$  различных строк и столбцов.

### Пример

$$A_{3 \times 5} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}$$

$$k = 1 \Rightarrow$$

$$M'_1 = M_{II}^{II} = 7$$

$$M'_2 = M_{III}^I = 11$$

$$k = 2 \Rightarrow$$

$$M''_1 = M_{II,III}^{II,III} = \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 12 & 13 \end{vmatrix}$$

$$M''_2 = M_{I,V}^{I,III} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 11 & 15 \end{vmatrix}$$

## 5.7 Базис минора матрицы

$$M_{\text{баз}} = M_r \neq 0 : \forall M_{r+1} = 0 \vee \nexists$$

## 5.8 Ранг матрицы

$\text{Rg } A$  — ранг матрицы  $A$

**Ранг матрицы** — количество ее линейно независимых строк или столбцов

### Свойство ранга

$$\text{Rg } A = \dim M_{\text{баз}}$$

## 5.9 Нахождение $\text{Rg } A$ и $M_{\text{баз}}$

$$A_{3 \times 5} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}$$

Пусть  $r = 1$

$$M_1' = 8 \neq 0 \rightarrow \text{Rg } A \geq 1, M_{\text{баз}} = 8$$

Пусть  $r = 2$

$$M_2'' = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \rightarrow \text{Rg } A \geq 2, M_{\text{баз}} = 5$$

Пусть  $r = 3$

$$M_3''' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \\ 11 & 12 & 13 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \rightarrow \text{Rg } A \geq 2, M_{\text{баз}} = 5$$

## 5.10 Операции

1. Перестановка строк/столбцов
2. Умножение строки/столбца на  $c \neq 0$
3. Сложение строк/столбцов

## 5.11 Ступенчатая матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & * & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

где  $*$  — не нуль

**Ступенчатая матрица** — матрица, в которой можно провести ломаную линию, отделяющую все ненулевые элементы от остальных, при этом граничные элементы не могут быть нулями.

## 5.12 Правило крамера

$$n \times n \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{b}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\det A \neq 0 \Rightarrow \exists! A^{-1} \Rightarrow \exists \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \Delta = \det A, \Delta_j = D(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{j-1}, \vec{b}, \vec{a}_{j+1}, \dots, \vec{a}_n)$$



$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 3z = 16 \\ 5y - z = 10 \end{cases} \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = -29 \neq 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 3 \\ 10 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -29$$

$$\frac{\Delta_1}{\Delta} = 1$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 16 & 3 \\ 0 & 10 & -1 \end{vmatrix} = -87$$

$$\frac{\Delta_2}{\Delta} = 3$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 16 \\ 0 & 5 & 10 \end{vmatrix} = -145$$

$$\frac{\Delta_2}{\Delta} = 5$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

### 5.13 Метод окаймляющих миноров матрицы

$$A_{3 \times 5} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$k = 1 : M_{II}^{III} = 5 \neq 0 \Rightarrow r \geq 1$$

$$k = 2 : M_{I,II}^{II,III} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 6 = 1 \neq 0 \Rightarrow r \geq 2$$

$$k = 3 : M' = M_{I,II,III}^{I,II,III} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ — не подходит на } M_{\text{баз}}$$

$$M'' = M_{I,II,III}^{II,III,IV} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 0 \text{ — не подходит на } M_{\text{баз}}$$

$$M''' = M_{I,II,III}^{III,IV,V} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \text{ — не подходит на } M_{\text{баз}}$$

Итого:

$$M_{\text{баз}} = M_2 = M_{I,II}^{II,III}$$

$$\text{Rg } A_{3 \times 5} = 2$$

**№2.151**

$$A_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k = 2$$

$$M_2 = M_{II,III}^{II,III} = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow r \geq 2$$

$$\begin{aligned}
& k = 3 \\
M'_3 = M_{I,II,III}^{I,II,III} &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -3 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \dots = 0 \\
M''_3 = M_{I,II,III}^{II,III,IV} &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 5 & 1 & -1 \\ 7 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \dots = 0 \\
M'_3 = M_{II,III,IV}^{II,III,IV} &= \begin{vmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 7 \\ 7 & 9 & 1 \end{vmatrix} = -16 \neq 0 \Rightarrow r \geq 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& k = 4 \\
M_4 = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 0 \wedge \exists! M_4 \Rightarrow M_{\text{баз}} = M_3
\end{aligned}$$

## 5.14 Метод элементарных преобразований матрицы. Приведение к ступенчатому виду.

### 5.14.1 Правило

Ранг ступенчатой матрицы равен числу ненулевых строк

№2.150

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \rightarrow 6 \\ \rightarrow 15 \\ \rightarrow 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} II - 2I \sim \\ II - I \end{matrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \rightarrow 6 \\ \rightarrow 3 \\ \rightarrow 6 \end{bmatrix} \sim \\
&\sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \rightarrow 6 \\ \rightarrow 3 \\ \rightarrow 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\text{Rg } A_{3 \times 5} = 2$$

## 5.15 Количество решений

1. Если количество неизвестных равно рангу матрицы, существует единственное решение
2. Если количество неизвестных больше ранга матрицы,  $\tilde{A}_{n \times r} \tilde{x}_{r+1}^{\text{баз}} = \tilde{b}_{r \times 1} = \tilde{A}_{n \times (r-1)} \tilde{x}_{(r+1) \times 1}^{\text{баз}}$
3. Если количество неизвестных меньше ранга матрицы, то бесконечное количество решений, зависящих от  $r - n$  параметров.

## 5.16 Метод Гаусса

СЛАУ  $4 \times 4$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ 3x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -3 \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 7x_4 = -7 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & -4 & -3 \\ 1 & 8 & 7 & -7 & -7 \end{array} \right) \sim$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 4 & -6 & -8 \end{array} \right) \sim$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -14 & 6 & 22 \\ 0 & 0 & 28 & -12 & -44 \end{array} \right) \sim$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{Rg } A = 2$$

$n - r = 4 - 2 = 2$  — число параметров

### 5.16.1 Алгоритм метода Гаусса

1. Привести расширенную матрицу  $(A|b)$  к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований только строк матрицы.
2. Определить ранги расширенной матрицы и матрицы коэффициентов и совместность системы.
3. Разделить переменные на базисные колонны, выбрав подходящий базисный минор.
4. Выразить базисные переменные через свободные.  
Если свободных переменных нет, одно решение.
5. Записать ответ.

## 5.17 Однородные СЛАУ и их ФСР

$$A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \exists \vec{x} = \vec{0}$$
$$r = \text{Rg}(A|\vec{0})$$

Есть  $\vec{x} \neq \vec{0}$

### №2.226

1. Лестничный вид

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$
$$(A|\vec{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} I \\ II - 2I \\ III - 3I \end{matrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\text{Rg } A = r = 2 < 3 = n$$

2. Обратный ход

(a) Скалярный

$$M_{\text{баз}} = \begin{matrix} & x_1 & x_2 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \end{matrix} \neq 0$$

$x_1, x_2$  — базисные,  $x_3$  — свобод.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -x_3 \\ -5x_2 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -0.2x_3 \\ x_1 = -0.8x_3 \end{cases}$$

(b) Матричный

$$\begin{aligned} (A|\vec{b}) &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} I + II \\ II \\ III \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} x_1 - 4x_2 = 0 \\ -5x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4x_2 \\ x_3 = -5x_2 \end{cases} \end{aligned}$$

3. Подстановка

$$\begin{cases} x_1 = -0.8c \\ x_2 = -0.2c \\ x_3 = c \in \mathbb{R} \end{cases}$$

4. ФСР

Перем.	Знач.
$x_1$	-0.8
$x_2$	-0.2
$x_3$	1

$$\vec{\phi}_1 = \begin{pmatrix} -0.8 \\ -0.2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} = c\vec{\phi}_1$$

## 5.18 Связь однородной и неоднородной соответствующих систем

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= \vec{b} \neq \vec{0} \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{0} \\ \vec{x}_{\text{одн}} &= c_1\vec{\phi}_1 + \dots + c_{n-r}\vec{\phi}_{n-r} \end{aligned}$$

## №2.210

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$$

1. Лестничный вид

$$\begin{aligned} (A|\vec{b}) &= \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} I \\ 2II - 3I \\ III - 3II \end{matrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \end{pmatrix} \begin{matrix} I \\ II \\ III - II \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\text{Rg } A = r = 2 < 4 = n \end{aligned}$$

2. Обратный ход

$$M_{\text{баз}} = \begin{matrix} x_1 & x_4 \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{matrix}$$

$x_1, x_4$  — базисные,  $x_2, x_3$  — свободные

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} I - II \\ II \\ III \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 18 & 8 & 0 & 16 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 18x_2 + 8x_3 = 16 \\ -11x_2 - 5x_3 + x_4 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 8 - 9x_2 - 4x_3 \\ x_4 = -10 + 11x_2 + 5x_3 \end{cases} \end{aligned}$$

3. Общее решение

$$\begin{cases} x_1 = 8 - 9c_1 - 4c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_2 \\ x_4 = -10 + 11c_1 + 5c_2 \end{cases} \\ \vec{x} = \vec{\phi}_0 + c_1 \vec{\phi}_1 + c_2 \vec{\phi}_2$$

4. Декомпозиция (разложение)

$$\begin{aligned}\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 8 & -9c_1 & -4c_2 \\ 0 & +c_1 & 0 \\ 0 & 0 & +c_2 \\ -10 & +11c_1 & +5c_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

5. Проверка...