Дискретная математика

Илья Ковалев

2024 год

1 Информация

Профессор — Светлана Олеговна
Почта — svetlana_os@mail.ru
Учебники:

- Нефедов и Осипова – Курс Дискретной Математики
- Лавров и Максимова – Сборник задач по теории множеств, мат. логике и теории алгоритмов

2 Теория Множеств

2.1 Множества

Множеству невозможно дать определение без парадоксов.

2.1.1 Создание множества

$P(x)$ — форма от $x/$.
$A = \{x|P(x)\}$
$x^2 - 1 = 0$
$A = \{1, -1\} = \{x|x^2 - 1 = 0\}$

2.1.2 Равенство

$\{1, 2\} = \{2, 1, 1, 2, 2, 1\}$

2.1.3 Подмножества

$A \subseteq B \Rightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$
$A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$
$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B, B \subseteq A$

Примеры:

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$
Пусть $A = \{1, 2\}, B = \{\{1, 2\}, 3\}, C = \{1, 2, 3\}$
$A \nsubseteq B$

2.1.4 Размер множества

$m(A) = |A|$ — количество элементов множества
$\emptyset$ — пустое множество, $|\emptyset| = 0$

2.1.5 Множество-степень

$P(A)$ — множество-степень — множество всех подмножеств A
Например:
$A = \{1, 2, 3\}$
$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\} \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, A\}$
$|P(A)| = 2^{|A|}$

2.1.6 Абсолютное (универсальное) множество

Универсальное множество — U — множество всех подмножеств

2.1.7 Операции

1. Объединение. $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$
2. Пересечение. $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$
3. Относительное дополнение.
   $A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$
4. Симметрическая разность. $A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
5. Отрицание. $\overline{A} = \{x | x \notin A\}$

Пример:
Пусть $A \subseteq B$
Тогда:

- $A \cap B = A$
- $A \cup B = B$
- $A \setminus B = \emptyset$

Примеры:

Пусть $A = [5; 9), B = [6; 10), C = [4; 8)$
$A \cup B = [5; 10)$
$A \cap C = [5; 8)$
$\overline{B} = (-\infty; 6) \cup [10; +\infty)$
$C \setminus A = \emptyset$
$B \oplus C = [4; 6) \cup [8; 10)$
$\overline{A} \setminus (B \cup \overline{C}) = (4; 9]$
$\overline{(B \setminus A)} \cup \overline{(C \setminus B)} = \mathbb{R}$

2.1.8 Свойства

1. Коммутативность. $A \cup B = B \cup A$
2. Ассоциативность. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
3. Дистрибутивность. $A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. Идемпотентность. $A \cup A = A$
5. Закон Де-Моргана. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
6. Поглощение. $A \cup (A \cap B) = A$
7. Расщепление. $A = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$
8. $\overline{\overline{A}} = A$

2.1.9 Функция ψ

$A \subseteq U, A \to \psi(x) : U \to \{0, 1\}$

$$\psi_A(x) = \begin{cases} 1, \text{если} x \in A \\ 0, \text{если} x \notin A \end{cases}$$

1. $\psi_{A \cap B} = \psi_A \psi_B$
2. $\psi_{A \cup B} = \psi_A + \psi_B - \psi_A \psi_B$

3. $\psi_{A\oplus B} = \psi_A + \psi_B - 2\psi_A\psi_B$
   Заметим, что $\psi_A^2 = \psi_A$, тогда $\psi_{A\oplus B} = (\psi_A - \psi_B)^2 = |\psi_A - \psi_B|$

4. $\psi_{\overline{A}} = 1 - \psi_A$

5. $\psi_{A\setminus B} = \psi_A - \psi_A\psi_B$

2.1.10 Табличный метод

ψ_A	ψ_B	$\psi_{A\cap B}$	$\psi_{A\cup B}$	$\psi_{\overline{A}}$	$\psi_{A\setminus B}$	$\psi_{A\oplus B}$
1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	0	1	0	0

Пример:
$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

ψ_A	ψ_B	ψ_C	$\psi_{B\setminus C}$	$\psi_{A\setminus(B\setminus C)}$	$\psi_{A\setminus B}$	$\psi_{A\cap C}$	$\psi_{\cup}$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	0	1	0	1	1

2.1.11 Доказательство утверждением

Условия:

1. $A \subseteq B$

2. $A \cap B = A$

3. $A \cup B = A$

эквивалентны.

<u>Доказательство $1 \Rightarrow 2$:</u>

Дано: $A \subseteq B$
Доказать: $A \cap B = A$

1. $A \cap B \subseteq A$
   Пусть $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$

2. $A \subseteq A \cap B$
   Пусть $x \in A \overset{\text{по усл}}{\Rightarrow} x \in B \Rightarrow x \in A \cap B$

Доказательство $2 \Rightarrow 3$:

Дано: $A \cap B = A$
Доказать: $A \cup B = B$
$A \cup B = (A \cap B) \cup B = B$

Доказательство $3 \Rightarrow 1$:

Дано: $A \cup B = B$
Доказать: $A \subseteq B$
От противного:
Предположим $A \not\subseteq B \Rightarrow \exists x \in A \wedge x \notin B$
Так как $x \in A \Rightarrow x \in A \cap B \overset{\text{по усл}}{\Rightarrow} x \in B$ — противоречие
Следовательно, $A \subseteq B$

2.1.12 ДЗ

Лаврова & Максимов: Часть I, ¶ 1, №11, 12, 14

3 Бинарные отношения

$\rho \subseteq A \times B$
$A = B = X$
$\langle x, y \rangle \in \rho \risingdotseq x \rho y$

3.1 Свойства

Бинарное отношение ρ, заданное на множестве X, называется:

1. **Рефлексивным** если $\forall x \in X, x \rho x$
   Примеры: $x = x$, $x \parallel x$

2. **Симметричным** если $\forall x, y \in X, x \rho y \Rightarrow y \rho x$
   Примеры: $x = x$, $x \perp x$

3. **Антисимметричным** если $\forall x, y \in X, x \rho y \wedge y \rho x \Rightarrow x = y$
   Примеры: $x \geq y$, $x \leq y$, $x > y$, $X \subseteq Y$

4. **Транзитивным** если $\forall x, y, z \in X, x \rho y \wedge y \rho z \Rightarrow x \rho z$
   Примеры: $x = y \wedge y = z$, $x \parallel y \wedge y \parallel z$

5. **Ассимметричным** если $\forall x, y \in X, x \rho y \Rightarrow \overline{y \rho x}$

3.2 Специальные бинарные отношения

3.2.1 Отношение эквивалентности

1. Рефлексивно
2. Симметрично
3. Транзитивно

Пример:

- $x = x$
- $x = y \Rightarrow y = x$
- $x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z$

3.2.2 Отношение (частичного) порядка

Частично упорядоченное множество — множество, на котором задано отношение частичного порядка.

1. Рефлексивно
2. Антисимметрично
3. Транзитивно

Пример:

- $x \leq x$
- $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$
- $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

Утверждение:
Пусть ρ — эквивалентнсть на X
Тогда ρ:

1. Задает на X разбиение на классы эквивалентности.
2. Если на X задано разбиение, то отношение ρ, заданное так, что $x\rho y \Leftrightarrow x$ и $y \in$ одном подмножестве

3.3 Разбиение

$A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, так что:

1. $\forall i, j \in [1; n], i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$
2. $\forall i \in [1; n], A_i \neq \emptyset$

Разбиение A — $P(A) = \{A_1, A_2 \ldots A_n\}$

Наибольший элемент: элемент $a \in X$ — наибольший, если $\forall y \in X : a \leq y$

Максимальный элемент: элемент $a \in X$ — максимальный, если $\nexists y \in X : a \lessapprox y$

Наименьший элемент: элемент $a \in X$ — наименьший, если $\forall y \in X : a \geq y$

Минимальный элемент: элемент $a \in X$ — минимальный, если $\nexists y \in X : a \gtrapprox y$

Два частично упорядоченных множества X и Y называются **изоморфными**, если существует биекция

№13(б)

$$A \subseteq B \cup C \Leftrightarrow A \cap \overline{B} \subseteq C$$

Дано:

$$A \subseteq B \cup C$$

Доказать:

$$A \cap \overline{B} \subseteq C$$

Доказательство:

$$\text{let}\, x \in A \cap \overline{B} \Rightarrow x \in A \land x \notin B$$

$$x \in a \overset{\text{усл}}{\Rightarrow} x \in B \cup C \Rightarrow x \in B \lor x \in C$$

$$\begin{cases} x \in B \lor x \in C \\ x \notin B \end{cases} \Rightarrow x \in C$$

Дано:

$$A \cap \overline{B} \subseteq C$$

Доказать:

$$A \subseteq B \cup C$$

Доказательство:

$$
\begin{gathered}
\operatorname{let} x \in A \\
\text{if } x \in B \Rightarrow x \in B \cup C \\
\text{if } x \notin B \Rightarrow x \in A \cap \overline{B} \overset{\text{усл}}{\Rightarrow} x \in C \Rightarrow x \in B \cup C
\end{gathered}
$$

3.4 Метод доказательства критериев

$$
\begin{gathered}
A \subseteq B \cup C \Leftrightarrow A \cap \overline{B} \subseteq C \\
A \setminus (B \cup C) = \emptyset \Leftrightarrow (A \cap \overline{B}) \setminus C = \emptyset \\
\psi_{A \setminus (B \cup C)} = 0 \Leftrightarrow \psi_{(A \cap \overline{B}) \setminus C} = 0 \\
\psi_{A \setminus (B \cup C)} = \psi_{(A \cap \overline{B}) \setminus C}
\end{gathered}
$$

3.5 Виды бинарных отношений

3.5.1 Функция

$$
\begin{gathered}
f \subseteq X \times Y \\
\forall x \in X, \forall y_1 \in Y, \forall y_2 \in Y, \\
\langle x, y_1 \rangle \in f \wedge \langle x, y_2 \rangle \in f \Rightarrow y_1 = y_2
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\langle x, y \rangle \in f \subseteq A \times B \\
x f y \\
y = f(x) \\
f : A \to B \\
A \mapsto B
\end{gathered}
$$

3.5.2 Сюръекция

$$
\begin{gathered}
f : X \to Y \\
\forall y \in Y \exists x \in X : y = f(x)
\end{gathered}
$$

3.5.3 Инъекция

$$f : X \to Y$$
$$\forall x_1, x_2 \in X, x_1 = x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

3.5.4 Биекция

$$f : X \leftrightarrow Y$$
$$\forall y \in Y \exists x \in X : y = f(x) \land x = f(y)$$

3.6 Функции над множествами

$$f : X \to Y$$
$$A \subseteq X$$
$$f(A) = \{y \mid y = f(x), x \in A\}$$

3.6.1 Свойства

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
2. $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$
3. $f(A \setminus B) \supseteq f(A) \setminus f(B)$
4. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
5. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
6. $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$

3.7 Мощность множества (Кардинальное число множества)

$$f(x) : A \to B \land f \text{ — биекция} \Rightarrow A \sim B$$

A и B равномощны (эквивалентны).
Свойства эквивалентности:

1. Рефлексивность: $A \sim A$
2. Симметричность: $A \sim B \Rightarrow B \sim A$
3. Транзитивность: $A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$

$|A| = [A]_\sim$ — мощность множества A
$\overline{\overline{A}} = |A| = \text{card}A$

$$N_n = \{1, 2, \dots, n\} \wedge A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \Rightarrow A \sim N_n$$

Множество, не являющееся конечным, является **бесконечным**.

3.8 Прямое (Декартово) произведение

$$X, Y$$
$$X \times Y = \{\langle x, y\rangle | x \in X, y \in Y\}$$
$$X \times Y \neq Y \times X$$
$$X \times X = X^2$$
$$D_{X \times Y} = X \text{ — область определения}$$
$$E_{X \times Y} = Y \text{ — область значений}$$

Примеры:

Доказать:

$$L = (A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D) = R$$

Доказательство:

1.
$$L \subseteq R$$
$$\text{let}\langle x, y\rangle \in L \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \in A \\ y \in B \end{cases} \\ \begin{cases} x \in C \\ y \in D \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \cap C \\ y \in B \cap D \end{cases} \Rightarrow \langle x, y\rangle \in R$$

2. $R \subseteq L$ аналогично

3.8.1 Операции

1. $\cup, \cap, \ldots$

2. Обратное отношение

$$\rho^{-1} = \{\langle x, y\rangle | x, y \in X : \langle y, x\rangle \in \rho\}$$

3. Композиция

$$\rho_1 \circ \rho_2 = \{\langle x, y\rangle | \exists z \in X : \langle x, z\rangle \in \rho_2, \langle z, y\rangle \in \rho_1\}$$

То есть

$$f \circ g = f(g(x))$$

$$\begin{cases} \langle x, z\rangle : z = g(x) \\ \langle z, y\rangle : y = f(z) \end{cases} \Rightarrow \langle x, y\rangle : y = f(g(x))$$

Свойства:

1.
$$(\rho^{-1})^{-1} = \rho$$

2.
$$(\rho_1 \circ \rho_2)^{-1} = \rho_2^{-1} \circ \rho_1^{-1}$$

3.9 Условия свойств

$$d = \{\langle x, x\rangle | \forall x \in X\}$$

d — отношение-диагональ

3.9.1 Рефлексивности

$$d \subseteq \rho$$

3.9.2 Симметричности

$$\rho = \rho^{-1}$$

3.9.3 Антисимметричности

$$\rho \cap \rho^{-1} \subseteq d$$

3.9.4 Асимметричности

$$\rho \cap \rho^{-1} = \emptyset$$

3.9.5 Частичный порядок

ρ на X — ЧП, если ρ — рефлексивно, антисимметрично, транзитивно

3.9.6 Транзитивность

$$\rho^2 \subseteq \rho$$

3.10 Специальные бинарные отношения

3.10.1 Частичный порядок

ρ на X — ЧП, если ρ — рефлексивно, антисимметрично, транзитивно
ЧП обозначается символом $\preceq$

Примеры:

1. $\subseteq, U$
2. $\leq, \mathbb{R}$

3.10.2 Полный порядок

ρ на X — ПП, если ρ — ЧП, где $\forall a, b \in X : a\rho b \vee b\rho a$

Приведение к линейному порядку:

$$
\begin{gathered}
X_1 = \min_X \rho \\
X_2 = \min_{X \setminus X_1} \rho \\
X_3 = \min_{X \setminus (X_1 \cup X_2)} \rho \\
\vdots \\
X_k = \min_{X \setminus (\bigcup\limits_{i=1}^{k-1} X_i)} \rho \\
X_{k+1} = \emptyset
\end{gathered}
$$

3.10.3 Отношение эквивалентности

ρ на X — EQ, если ρ — рефлексивно, симметрично, транзитивно

3.10.4 Класс эквивалентности

$$[x]_\rho = y \in X : x \rho y$$

3.11 Диаграммы Хассе

$$
\begin{gathered}
x \prec y \Leftrightarrow x \preceq y \land x \neq y \\
x \text{ покрывает } y \Leftrightarrow \nexists u \in X : x \prec u \prec y
\end{gathered}
$$

3.12 Мощность множеств

$A \sim B$ — равномощны, если $\exists$ биекция $\phi : A \to B$
$\sim$ — отношение эквивалентности

1. $\sim$ рефлективно, $\phi : A \to A, \phi_A$ — биекция
2. $\sim$ симметрично, $\phi : A \to B$ — биекция, ϕ^{-1} — биекция
3. $\sim$ транзитивно, $\phi : A \to B, \psi : B \to C$ — биекции, $\phi \circ \psi$ — биекция

3.12.1 Конечные множества

$$A = \{a_1, a_2 \dots a_m\}$$
$$B = \{b_1, b_2 \dots b_k\}$$
$$A \sim B \Leftrightarrow k = m$$

3.12.2 Счетные множества $A \sim \mathbb{N}$

$$\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$$
$$z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$$
$$\phi : Z \to N$$
$$n = \phi(z) = \begin{cases} -2z + 1, \text{if } z \leq 0 \\ 2z, \text{if } z > 0 \end{cases}$$

3.12.3 Континуум $A \sim [0, 1]$

Теорема Кантора: $[0, 1]$ — несчетно

$$[0, 1] \sim (0, 1) \sim [0, 1) \sim (0, 1]$$

$$\mathbb{R} \sim [0, 1]$$
$$r \in \mathbb{R}$$
$$\phi(r) = \frac{\arctan(r)}{\pi} + \frac{1}{2}$$
$$E(\phi(r)) = (0, 1) \sim [0, 1]$$

$$\begin{cases} \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} \\ \mathbb{R} \sim [0, 1] \\ \mathbb{Q} \sim \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \mathbb{I} \sim [0, 1]$$

4 Математическая логика

4.1 Логика высказываний

Высказывание — языковое предложение, о котором осмысленно говорить, истинно оно или ложно.

Высказывательная перем. — буквенная замена высказывания, принимающая значение истины или лжи. $x, y, z, x_1, \ldots$

4.1.1 Языковые средства

Операции:

1. Отрицание: "не". $\neg x, \overline{x}$
2. Конъюнкция: "и". $x \wedge y, x \& y$
3. Дизъюнкция: "или". $x \wedge y, x | y$
4. Импликация: "если то". $x \supset y, x \to y$

4.1.2 Полные системы функций

$F = \{f_1 = \&, f_2 = \neg\}$ — полная
Тогда система
$G = \{g_1 = +, g_2 = \cdot, g_3 = 1\}$

X	Y	$X + Y$	$X \cdot Y$	1
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1

может быть выражена через F таким образом:

$$f_1(x, y) = x \& y = g_2(x, y)$$
$$f_2(x) = \neg x = x + 1 = g_1(x, g_3(x))$$

Следовтельно G — полная

4.1.3 Многочлен Жегалкина

Многочленом Жегалкина называется формула логики выскаызваний, записанная в системе функций $\{+, \cdot, 1\}$, и приведенная к виду многочлена.

4.1.4 Тавтология. Правильные рассуждения

$$A : \langle x_1 \ldots x_n \rangle$$

A — тождественно истинна (тавтология), если A — истина на любой оценке

A — выполнима, если A — истина на хотя бы одной оценке

A — опровержима, если A — ложь на хотя бы одной оценке

A — тождественно ложна, если A — ложь на любой оценке

4.2 Независимые системы булевых функций

$$T_0$$
$$\neg \notin T_0$$
$$\neg x \neq \dots \&, \vee, +, \dots \in T_0$$

$$\{\&, \vee, \neg\} \text{ — полная}$$
$$x \& y = \equiv \neg(\neg x \vee \neg y) \text{ — система зависима}$$

Независимая система булевых функций — система, в которой никакая из функций не может быть выражена через остальные.

T — разделяющий класс, если $f_i \notin T, \forall j \neq i : f_j \in T$

	T_0	T_1	S	L	M
&	+	+	-	-	+
+	+	-	-	+	-
1	-	+	-	+	+

Система полная:

$$1 \notin T_0, + \notin T_1, + \notin S, \& \notin L, + \notin M$$

Система независимая:

$$\& \notin L, \{+, 1\} \subset L$$
$$+ \notin T_1, \{\&, 1\} \subset T_1$$
$$1 \notin T_0, \{\&, +\} \subset T_0$$

4.3 Минимальная ДНФ

4.3.1 Сокращенная ДНФ

Элементарная конъюнкция C — **допустимая**, если $F \vee C \equiv F$.

Допустимая конъюнкция — **простая**, если после удаления или отрицания одного из x_i, она становится недопустимой.

Дизъюнкция всех простых допустимых конъюнкций — сокращенная ДНФ.

$\forall f \not\equiv 0 \exists!$ сокращенная ДНФ.

Пример

1. $f \to F$ в СДНФ
2. К $F \to F_1$ применяем закон общего распределения, пока возможно
3. К $F_1 \to F_2$ применяем закон поглощения