# Математический Анализ

Илья Ковалев

2024 год

# 1 Учебники

- Зорич Владимир Антонович — математический анализ
- Фихтенгольц — Основы математического анализа
- Димедович — Сборник задач по математическому анализу

# 2 Элементы теории множеств

Множество — набор элементов.
Пустое множество — $\emptyset$.
Универсальное множество — $U$ — элементов рассматриевомого типа.

# 3 Операции над множествами

## 3.1 Принадлежность

$x \in A$ — $x$ принадлежит $A$

## 3.2 Подмножество

$A \subset B$ если $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$

## 3.3 Пересечение

$A \cap B = \{x : x \in A \land x \in B\}$

### 3.4 Объединение

$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$

### 3.5 Разность

$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$

### 3.6 Дополнение

$\overline{A} = U \setminus A = \{x : x \notin A\}$

## 4 Логические высказывания

Логическое высказывание — повествовательное предлжение,
про которое можно сказать, истинно оно или ложно.

Предикат — утверждение, зависящие от переменной (переменных), превращающаяся в логическое высказывание при подстановке вместо переменной (переменных) ее значения.

Область истинности предиката — множество значений переменной (переменных),
при которых этот предикат превращается в истинное высказывание.

## 5 Операции над лог. высказываниями

### 5.1 Отрицание

| A | $\overline{A}$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

# 6 Область существования и определения функции

## 6.1

$$y = \sqrt{1+x}$$
$$1 + x \geq 0$$
$$x \geq -1$$
$$x \in [-1; +\infty)$$

## 6.2

$$y = \sqrt{2 + x - x^2}$$
$$2 + x - x^2 \geq 0$$
$$x^2 - x - 2 \leq 0$$
$$(x-2)(x+1) \leq 0$$
$$x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$$

## 6.3

$$y = \lg \frac{x^2 - 3x + 2}{x+1}$$
$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x+1} > 0$$
$$\frac{(x-2)(x-1)}{x+1} > 0$$
$$x \in (-1; 1) \cup (2; +\infty)$$

## 6.4

$$y = \sqrt{sin2x}$$
$$sin2x \geq 0$$
$$x \in [\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z}]$$

# 7 Четность и нечетность

## 7.1

$$f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$$
$$f(-x) = \frac{a^{-x} + a^x}{2}$$
$$f(x) = f(-x)$$

функция четная

## 7.2

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^2}$$
$$f(-x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$$
$$f(x) = f(-x)$$

функция четная

## 7.3

$$f(x) = \lg\frac{1+x}{1-x}$$
$$f(-x) = \lg\frac{1-x}{1+x} = -\lg\frac{1+x}{1-x}$$
$$f(x) = -f(-x)$$

функция нечетная

# 8 Периодичность

Период — $T$

### 8.1

$$f(x) = 10 \sin 3x$$
$$\sin \alpha : T = 2\pi$$
$$f(x) : T = \frac{2\pi}{3}$$

### 8.2

$$f(x) = \alpha \sin \lambda x + \beta \cos \lambda x$$
$$T = \frac{2\pi}{\lambda}$$

# 9 Графики

## 9.1 Парабола

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

## 9.2 Кубическая парабола

$$y = a(x - x_0)^3 + y_0$$

## 9.3 Гипербола

$$y = \frac{a}{x - x_0} + y_0$$

## 9.4 ДЗ

Демидович: №153, 154, 157, 165, 254, 255

# 10 Бинарные отношения

## 10.1 Отношение эквивалентности

1. Рефлексивно
2. Симметрично
3. Транзитивно

## 10.2 Отношение частичного порядка

1. Рефлексивно
2. Антисимметрично
3. Транзитивно

## 10.3 Отношение линейного порядка

1. Антирефлексивно
2. Антисимметрично
3. Транзитивно
4. Задано для каждой пары элементов можества

# 11 Аксиоматика действительных чисел

Действительными числами называется множество $\mathbb{R}$, над элементами которого можно совершать операции сложения и умножения, между которыми установлено отношение линейного порядка, для которых выполнено свойство полноты, подчиняющимися следующему набору аксиом:

## 11.1 Аксиомы сложения

Сложение: $a + b = c \in \mathbb{R}$

1. **Существование нуля**: $\exists 0, \forall a \in \mathbb{R} : a + 0 = 0 + a = a$
2. **Существование противоположного элемента**: $\forall a \in \mathbb{R}, \exists{-a} : a + (-a) = 0$
3. **Ассоциативность**: $a + (b + c) = (a + b) + c$
4. **Коммутативность**: $a + b = b + a$

**Группа** — объект, удовлетворяющий аксиомам 1-3
**Абелева группа** — объект, удовлетворяющий аксиомам 1-4

## 11.2 Аксиомы умножения

Умножение: $a * b = c \in \mathbb{R}$

1. **Существование единицы**: $\exists 1, \forall a \in \mathbb{R} : 1 * a = a * 1 = a$
2. **Существование обратного элемента**: $\forall a \neq 0 \in \mathbb{R}, \exists a^{-1} : a * a^{-1} = 1$
3. **Ассоциотивность**: $a * (b * c) = (a * b) * c$
4. **Коммутативность**: $a * b = b * a$

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ — абелева группа по умножению
**Поле** — алгебраический объект с 2 бинарными операциями, подчиняющийся 8 аксиомам.

## 11.3 Аксиома связи сложения и умножения

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a + b) * c = a * c + b * c$$

## 11.4 Отношение порядка

На $\mathbb{R}$ существует отношение $\geq$, подчиняющееся следущим аксиомам:

1. **Рефлексивность**: $a \geq a$
2. **Антисимметричность**: $a \geq b \wedge b \geq a \Rightarrow a = b$
3. **Транзитивность**: $a \geq b \wedge b \geq c \Rightarrow a \geq c$
4. **Аксиома, определяющая что порядок — линейный**:
   $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \geq b \vee b \geq a$

Замечание:

$$a \geq b \Rightarrow b \geq a$$

$$a \geq b \wedge a \neq b \Rightarrow a > b$$

## 11.5 Аксиома связи сложения и порядка

$$a \geq b \Rightarrow a + c \geq b + c$$

## 11.6 Аксиома связи умножения и порядка

$$a \geq 0 \wedge b \geq 0 \Rightarrow a * b \geq 0$$

## 11.7 Аксиома полноты

Пусть $U, W$ — такие множества, что $\forall x \in U, y \in W : x \leq y$
Тогда $\exists c \in \mathbb{R} : x \leq c \leq y$

# 12 Альтернативные зависимости

## 12.1 Полярная система координат

$r$ — расстояние от начала координат
$\phi$ — угол от оси $Ox$ против часовой стрелки

**Примеры:**

1. Прямая $y = 1$

$$r = \frac{1}{sin\phi}$$

2. Окружность $(x-1)^2 + y^2 = 1$

$$r = 2cos\phi$$

## 12.2 Параметрическая

$$y = \phi(t)$$
$$x = \psi(t)$$

**Примеры:**

1. Окружность $x^2 + y^2 = 1$

$$\begin{cases} x = cos(t) \\ y = sin(t) \end{cases}$$

2. Отрезок $x + y = 2, x \geq 0, y \geq 0$

$$\begin{cases} x = 2cos^2 t \\ y = 2sin^2 t \end{cases}$$

## 12.3 ДЗ

№№

- 369(а, б, ж)
- 371(в, д, ж)

# 13 Натуральные числа

**Индуктивное множество** — множество, обладающие тем свойством, что наряду с элементом $a$, ему принадлежит элемент $a+1$.

## 13.1 Определения

Множество **натуральных чисел** — минимальное индуктивное множество, содержащее единицу. То есть пересечение всех индуктивных множеств,
содержащих единицу.

$$\mathbb{N} = \bigcap M : 1 \in M \land (x \in M \Rightarrow (x+1) \in M)$$

Множество $A$ называется **ограниченным сверху**, если $\exists b \in \mathbb{R} : \forall a \in A, a \leq b$.

Тогда $b$ — **мажората** $A$.

Множество $A$ называется **ограниченным снизу**, если $\exists c \in \mathbb{R} : \forall a \in A, a \geq c$.

Тогда $c$ — **минората** $A$.

$d$ — **максималный элемент** множества $A$, если $d \in A \land \forall a \in A : a \leq d$.

$e$ — **минимальный элемент** множества $A$, если $e \in A \land \forall a \in A : a \geq e$.

**Точная верхняя грань (супремум)** множества $A$ — наименьшая можоранта $A$

$\sup A$ — супремум $A$

Любое ограниченное сверху множество имеет супремум.

Доказательство:

$$B = \{b \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A, b \geq a\}$$

$$\forall a \in A, b \in B : a \leq b \overset{A16}{\Rightarrow}$$

$$\overset{A16}{\Rightarrow} \exists c \in \mathbb{R} : \forall a \in A, b \in B \Rightarrow a \leq c \leq b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c \overset{\triangle}{=} \sup A$$

**Точная нижняя грань (инфимум)** множества $A$ — наибольшая минората $A$

$\inf A$ — инфимум $A$

Любое ограниченное снизу множество имеет инфимум.

Теорема:

$$\forall x \in \mathbb{R}, x > 0 \exists n \in \mathbb{N} : n - 1 < x \leq n$$

Принцип Архимеда

$$\forall h > 0 \forall x \in \mathbb{R}, x > 0 \exists n \in \mathbb{N} : (n-1)h < x \leq nh$$

# 14 Пределы, последовательности

## 14.1 Последовательности

**Последовательность** — отображение $\mathbb{N}$ в множество любой природы.

**Числовая последовательность** — отображение $\mathbb{N}$ в $\mathbb{R}$.

$$\{a_n\}, a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

Последовательность называется **ограниченной**, если множество ее значений ограниченно.

## 14.2 Покрытие

$$n \to I_n (I_n \text{ — отрезок действительной оси})$$
$$\{I_n\} : \forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} \subset I_n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \{I_n\}$$

Теорема:

Пусть $\{U_n\}, n \in \mathbb{N}$ — система вложенных отрезков.

Тогда $\exists c \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : c \in U_n$.

Кроме того, если $U_n = [a_n, b_n]$ и $\forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} : b_n - a_n < \epsilon$, то $\exists! c$

**Покрытие** $B$ — система множеств $A_1, A_2, \ldots A_n$, если $\forall x \in B, \exists n : x \in A_n$

Или

$$B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Теорема:

Из любого покрытия отрезка интервалами можно выделить конечное подпокрытие

## 14.3 Определение предела

$$\{x_n\}_{n=1,2...}$$
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$
$$\text{if } \forall\epsilon > 0 \exists N(\epsilon) :$$
$$|x_n - a| < \epsilon, n > N(\epsilon)$$

Теорема:
У любой последовательности может быть не более 1 предела
Доказательство:

$$\text{let } \exists lim_{n\to\infty} a_n = A_1 \wedge$$
$$\wedge \exists lim_{n\to\infty} a_n = A_2 \wedge A_1 < A_2$$
$$\text{let } \epsilon = \frac{A_2 - A_1}{3}$$
$$\exists N_1 : \forall n > N_1, |a_N - A_1| < \epsilon \Leftrightarrow A_1 - \epsilon < a_n < A_1 + \epsilon$$
$$\exists N_2 : \forall n > N_2, |a_N - A_2| < \epsilon \Leftrightarrow A_2 - \epsilon < a_n < A_2 + \epsilon$$
$$\text{let } N = \max\{N_1, N_2\} : \forall n > N,$$
$$a_n < A_1 + \epsilon = A_1 + \frac{A_2 - A_1}{3} = \frac{2A_1 - A_2}{3} < \frac{A_1 + 2A_2}{3} = A_2 - \epsilon < a_n$$
$$a_n < a_n$$

Замечание:
Ограниченная последовательность может не иметь предела.

### 14.3.1 Пример

Доказать:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2x + 3}{n + 1} = 2$$

Доказательство:
$$|\frac{2n + 3}{n + 1} - 2| = |\frac{2n + 3 - 2n - 2}{n + 1}| = |\frac{1}{n + 1}| < \epsilon$$
$$n + 1 > \frac{1}{\epsilon}$$
$$n > \frac{1}{\epsilon} - 1$$
$$N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - 1$$

### 14.3.2 Бесконечные пределы

$$(\lim_{n\to\infty} a_n) = \infty \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall E > 0 \exists N(E) : \forall n > N : |a_n| > E)$$

$$(\lim_{n\to\infty} a_n) = -\infty \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall E > 0 \exists N(E) : \forall n > N : |a_n| < -E)$$

**Бесконечно большая** последовательность — последовательность, предел которой — $\pm\infty$.

**Сходящаяся** последовательность — последовательность, предел которой — конечное число.

**Бесконечно малая** последовательность — последовательность, предел которой равен нулю.

### 14.3.3 Критерий Коши

## 14.4 Геометрическая прогрессия

$$x_n = a \cdot q^{n-1}$$
$$\lim_{n\to\inf} = \frac{a}{1-q}$$

### 14.4.1 Примеры

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k-1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k - 1 =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \frac{(1+(n-1))(n-1)}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{2n^2} =$$
$$\frac{1}{2} + \lim_{n\to\infty} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3} =$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(1+\frac{1}{n}) \cdot n(1+\frac{2}{n}) \cdot n(1+\frac{3}{n})}{n^3} =$$
$$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})(1+\frac{3}{n}) = 1$$

## 14.5 Фундаментальная последовательность. Критерий Коши

Последовательность $\{a_n\}$ называется **фундаментальной**, если

$$\forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) : \forall m > n > N : |a_m - a_n| < \epsilon$$

### 14.5.1 Критерий коши

Последовательность является фундаментальной $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ последовательность является сходящейся

Доказательство $1 \Rightarrow 2$:

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = A, A \in \mathbb{R}$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) \forall n > N, n \in \mathbb{N} : |a_n - A| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) \forall m > N, m \in \mathbb{N} : |a_m - A| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$|a_n - a_m| = |a_n - A - (a_m - A)| \leq |a_n - A| + |a_m - A| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Доказательство $1 \Leftarrow 2$:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) : \forall m > n > N : |a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{3}$$

$$\text{let } x_n = \inf_{m\geq n} a_m$$

$$\text{let } y_n = \sup_{m\geq n} a_m$$

$$x_n \leq x_{n+1} \leq y_{n+1} \leq y_n$$

$$\{[x_n, y_n]\} \text{ — система вложенных отрезков} \Rightarrow \exists c : \forall n \in \mathbb{N}, c \in [x_n, y_n]$$

$$m > n$$

$$a_n - \frac{\epsilon}{3} < a_m < a_n + \frac{\epsilon}{3}$$

$$a_n - \frac{\epsilon}{3} \leq x_m \leq c \leq y_m \leq a_n + \frac{\epsilon}{3}$$

$$|a_n - c| \leq \frac{\epsilon}{3}$$

$$|a_m - a_n| < \frac{\epsilon}{3}$$

$$|x_m - a_n| \leq \frac{\epsilon}{3}$$

$$|y_m - a_n| \leq \frac{\epsilon}{3}$$

$$|a_m - c| \leq |a_m - a_n + a_n - c| \leq |a_m - a_n| + |a_n - c| \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon$$

## 14.6 Алгебраические свойства пределов

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A$$
$$\lim_{n\to\infty} b_n = B$$

### 14.6.1 Сложение

$$(\lim_{n\to\infty} a_n = A) \Leftrightarrow (\forall\epsilon > 0 \exists N_1(\epsilon) : \forall n > N_1, n \in \mathbb{N} : |a_n - A| < \frac{\epsilon}{2})$$
$$(\lim_{n\to\infty} b_n = B) \Leftrightarrow (\forall\epsilon > 0 \exists N_2(\epsilon) : \forall n > N_2, n \in \mathbb{N} : |b_n - B| < \frac{\epsilon}{2})$$
$$\text{let } N = \max\{N_1, N_2\}$$
$$\forall n > N : |a_n + b_n - (A + B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$$

### 14.6.2 Умножение

$$a_n \cdot b_n = (a_n - A + A)(b_n - B + B) =$$
$$= (a_n - A)(b_n - B) + A(b_n - B) + B(a_n - A) + AB$$
$$\forall\epsilon > 0 \exists N_1(\epsilon) : \forall n > N_1 : |a_n - A| < \epsilon$$
$$\forall\epsilon > 0 \exists N_2(\epsilon) : \forall n > N_2 : |b_n - B| < \epsilon$$
$$\forall\epsilon > 0 \exists N_3(\epsilon) : \forall n > N_3 : |b_n - B| < \frac{\epsilon}{3|A|}$$
$$\forall\epsilon > 0 \exists N_4(\epsilon) : \forall n > N_4 : |a_n - A| < \frac{\epsilon}{3|B|}$$
$$\text{let } N = \max\{N_1, N_2, N_3, N_4\}$$
$$\forall n > N : |a_n b_n - AB| \leq |a_n - A||b_n - B| + |A||b_n - B| + |B||a_n - A| <$$
$$< \epsilon^2 + |A|\frac{\epsilon}{3|A|} + |B|\frac{\epsilon}{3|B|} < 3 \cdot \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$
$$(\epsilon^2 < \frac{\epsilon}{3} \Leftarrow \epsilon < \frac{1}{3})$$

### 14.6.3 Деление

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B} = \frac{a_nB - b_nA}{b_nB} =$$
$$= \frac{(a_n - A)B - (b_n - B)A}{b_nB} = \frac{a_n - A}{b_n} - \frac{b_n - B}{b_n} \cdot \frac{A}{B}$$
$$\exists N_1 : \forall n > N_1 : |b_n| > \frac{B}{2}$$
$$\forall \epsilon > 0 \exists N_2 : \forall n > N_2 : |a_n - A| < \frac{\epsilon |B|}{4}$$
$$\forall \epsilon > 0 \exists N_3 : \forall n > N_3 : |b_n - B| < \frac{\epsilon |B|^2}{4|A|}$$
$$\text{let } N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$$
$$\forall n > N : |\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}| \leq \frac{|a_n - A|}{|b_n|} + \frac{|b_n - B|}{|b_n|} \cdot \frac{|A|}{|B|} <$$
$$< \frac{2\epsilon|B|}{4|B|} + \frac{2\epsilon|B|^2}{4|A||B|} \cdot \frac{|A|}{|B|} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

## 14.7 Принцип двух полицейских

$$\begin{cases} \exists \lim_{n\to\infty} a_n = A \\ \exists \lim_{n\to\infty} b_n = A \\ \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq c_n \leq b_n \end{cases} \Rightarrow \lim_{c\to\infty} c_n = A$$

## 14.8 Возрастающие и убывающие посл.

Последовательность $\{a_n\}$ называется **возрастающей**, если $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$

Последовательность $\{a_n\}$ называется **неубывающей**, если $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$

Последовательность $\{a_n\}$ называется **убывающей**, если $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$

Последовательность $\{a_n\}$ называется **невозрастающей**, если $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$

## 14.9 Теорема Вейерштрасса

Монотонная ограниченная последовательность имеет конечный предел.

Доказательство:

$$\text{let } a_n : \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n$$
$$\exists A : \forall n \in \mathbb{N} : a_n < A$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$
$$\exists c = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n : c - \epsilon < a_n \leq c$$
$$\forall m > n : c - \epsilon < a_n \leq a_m \leq c \overset{\triangle}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} a_n = c$$

### 14.9.1 Условие существования предела.

Для того, чтобы монотонная последовательность имела предел, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена.