Дискретная математика

Илья Ковалев

2024 год

1 Информация

Введение в авиационную и ракетно-космическую технику Проф – Максим Юрьевич

2 Организация проекта

1. Команда — 3/4 человека в пределах группы (до 16.09). Состав:
   - Тим лид
   - Математик/физик
   - Программист
   - Спикер (представление и оформление результатов)
2. Тема проекта
3. Физическая модель — подобрать законы, удовлетворяющие задаче
4. Математическая модель — уравнения
5. Програмная реализация
6. Валидация — Kerbal Space Program
7. Представление — текстовый отчет, видео-отчет, презентация + доклад на 7 минут.
8. Сдача — 15/16.12

3 Механика

Механика:

- **Как?** — кинематика
- **Почему?** — динамика
- **Равновесие?** — статика

3.1 Движение

Движение:

1. относительно
2. продолжительно во времени

Материальная точка — тело, размером и формой которого можно пренебречь в пределах данной задачи.

Поступательное движение — движение, при котором траектории всех точки параллельны друг другу.

При рассмотрении материальной точки,все движение является поступательным.

3.2 Уравнения движения

$\vec{r}(t)$ — закон движения
$\vec{r}(t = t_0) = \vec{r_0}$
$\vec{v} = \vec{r_t}' = \dot{\vec{r}}$
Δx — приращение аргумента
Δy — приращение функции

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = y'dx$$

$\vec{a} = \dot{\vec{v}}$

3.3 Производные

В декартовой системе

$$dS = dxdy$$
$$dV = dxdydz$$

В сферической системе

$$\begin{aligned}
b &= r d\theta \\
a &= r \sin\theta d\phi \\
c &= dr
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dS = ab = r^2 \sin\theta d\theta d\phi \\
dV = abc = dS \cdot dr
\end{aligned}$$

$$S = \int_0^{\pi} r^2 \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} 1 d\phi =$$
$$= r^2 \int_0^{2\pi} d\theta = r^2 \cdot 2\pi \cdot 2 \Rightarrow$$
$$S = 4\pi r^2$$

$$V = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{R} r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr =$$
$$= \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{R} r^2 dr \Rightarrow$$
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

В полярной системе

$$\begin{aligned}
\vec{r} \to \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) \\
\vec{v} \to \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} = (r\cos\phi)'_t = \dot{r}\cos\phi + r(\cos\phi)'_t = \dot{r}\cos\phi + r\sin\phi \cdot \dot{\phi} \\ v_x = \dot{y} = (r\sin\phi)'_t = \dot{r}\sin\phi + r(\sin\phi)'_t = \dot{r}\sin\phi + r\cos\phi \cdot \dot{\phi} \end{cases}$$

$$\Delta t \to 0$$
$$v_1 = v_2 = v$$
$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$
$$\frac{R}{v} = \frac{S}{\Delta v} \Rightarrow \frac{R}{v} = \frac{v}{a} \Rightarrow a_n = \frac{v^2}{R}$$

$$a_\tau = \frac{d|\vec{v}|}{dt}$$
$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$$

Полное ускорение — сумма нормального (a_n) и тангенсального (a_τ)

$$\omega = \dot{\phi} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta t}$$
$$\beta = \dot{\omega} = \ddot{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$$

3.4 Векторное произведение

Скалярное произведение

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Пример: работа

$$A = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$$

Векторное произведение

$$\vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a} \times \vec{b}]$$

Свойства:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$$
$$\vec{a} \times \vec{b} = -[\vec{a} \times \vec{b}]$$

4 Диинамика

В динамике есть материальная точка

4.1 Силы

1. Контактные
2. Полевые

4.2 Законы Ньютона

1. $$\sum \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$$

2. $$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m}$$
$$m\vec{a} = \sum \vec{F}$$

3. При применении силы F_{12}, всегда есть такая сила F_{21}, что:
    - Силы равны по модулю $|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}|$
    - Противоположны по напровлению $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$
    - Лежат на одной прямой
    - Имеют одну природу

4.3 Смыслы массы

- Инертный
- Гравитационный
- mc^2

4.4 Интегрирование

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow d\vec{v} = \vec{a}(t)dt$$
$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t)dt + C_1$$
$$C_1 = \vec{v}(t = 0) = \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$$
$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)dt + C_2$$
$$C_2 = \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$$
$$\int_{v_0}^{v(t)} d\vec{v} = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)dt \Rightarrow$$
$$\begin{cases} \vec{v}(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)dt \\ \vec{r}(t) = r_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)dt \end{cases}$$

4.5 Законы Кеплера

1. Все тела двигаются по эллипсу, гиперболе, или параболе
2. При движении по эллипсу, $S(\Delta t) = \text{const}$ при $\Delta t = \text{const}$
3. $$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3$$

   где T — период обращения, a — ускорение