

# Математический Анализ

Илья Ковалев

2024 год

## 1 Учебники

- Зорич Владимир Антонович — математический анализ
- Фихтенгольц — Основы математического анализа
- Димедович — Сборник задач по математическому анализу

## 2 Элементы теории множеств

Множество — набор элементов.

Пустое множество —  $\emptyset$ .

Универсальное множество —  $U$  — элементов рассматриваемого типа.

## 3 Операции над множествами

### 3.1 Принадлежность

$x \in A$  —  $x$  принадлежит  $A$

### 3.2 Подмножество

$A \subset B$  если  $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$

### 3.3 Пересечение

$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$

### 3.4 Объединение

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

### 3.5 Разность

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

### 3.6 Дополнение

$$\overline{A} = U \setminus A = \{x : x \notin A\}$$

## 4 Логические высказывания

Логическое высказывание — повествовательное предложение, про которое можно сказать, истинно оно или ложно.

Предикат — утверждение, зависящие от переменной (переменных), превращающаяся в логическое высказывание при подстановке вместо переменной (переменных) ее значения.

Область истинности предиката — множество значений переменной (переменных), при которых этот предикат превращается в истинное высказывание.

## 5 Операции над лог. высказываниями

### 5.1 Отрицание

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

## 6 Область существования и определения функции

### 6.1

$$\begin{aligned}y &= \sqrt{1+x} \\1+x &\geq 0 \\x &\geq -1 \\x &\in [-1; +\infty)\end{aligned}$$

### 6.2

$$\begin{aligned}y &= \sqrt{2+x-x^2} \\2+x-x^2 &\geq 0 \\x^2-x-2 &\leq 0 \\(x-2)(x+1) &\leq 0 \\x &\in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)\end{aligned}$$

### 6.3

$$\begin{aligned}y &= \lg \frac{x^2-3x+2}{x+1} \\\frac{x^2-3x+2}{x+1} &> 0 \\\frac{(x-2)(x-1)}{x+1} &> 0 \\x &\in (-1; 1) \cup (2; +\infty)\end{aligned}$$

### 6.4

$$\begin{aligned}y &= \sqrt{\sin 2x} \\\sin 2x &\geq 0 \\x &\in [\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z}]\end{aligned}$$

## 7 Четность и нечетность

### 7.1

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{a^x + a^{-x}}{2} \\f(-x) &= \frac{a^{-x} + a^x}{2} \\f(x) &= f(-x)\end{aligned}$$

функция четная

### 7.2

$$\begin{aligned}f(x) &= \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^2} \\f(-x) &= \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2} \\f(x) &= f(-x)\end{aligned}$$

функция четная

### 7.3

$$\begin{aligned}f(x) &= \lg \frac{1+x}{1-x} \\f(-x) &= \lg \frac{1-x}{1+x} = -\lg \frac{1+x}{1-x} \\f(x) &= -f(-x)\end{aligned}$$

функция нечетная

## 8 Периодичность

Период —  $T$

## 8.1

$$\begin{aligned}f(x) &= 10 \sin 3x \\ \sin \alpha : T &= 2\pi \\ f(x) : T &= \frac{2\pi}{3}\end{aligned}$$

## 8.2

$$\begin{aligned}f(x) &= \alpha \sin \lambda x + \beta \cos \lambda x \\ T &= \frac{2\pi}{\lambda}\end{aligned}$$

# 9   Графики

## 9.1   Парабола

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

## 9.2   Кубическая парабола

$$y = a(x - x_0)^3 + y_0$$

## 9.3   Гипербола

$$y = \frac{a}{x - x_0} + y_0$$

## 9.4   ДЗ

Демидович: №153, 154, 157, 165, 254, 255

## **10 Бинарные отношения**

### **10.1 Отношение эквивалентности**

1. Рефлексивно
2. Симметрично
3. Транзитивно

### **10.2 Отношение частичного порядка**

1. Рефлексивно
2. Антисимметрично
3. Транзитивно

### **10.3 Отношение линейного порядка**

1. Антирефлексивно
2. Антисимметрично
3. Транзитивно
4. Задано для каждой пары элементов множества

# 11 Аксиоматика действительных чисел

Действительными числами называется множество  $\mathbb{R}$ , над элементами которого можно совершать операции сложения и умножения, между которыми установлено отношение линейного порядка, для которых выполнено свойство полноты, подчиняющимися следующему набору аксиом:

## 11.1 Аксиомы сложения

Сложение:  $a + b = c \in \mathbb{R}$

1. **Существование нуля:**  $\exists 0, \forall a \in \mathbb{R} : a + 0 = 0 + a = a$
2. **Существование противоположного элемента:**  
 $\forall a \in \mathbb{R}, \exists -a : a + (-a) = 0$
3. **Ассоциативность:**  $a + (b + c) = (a + b) + c$
4. **Коммутативность:**  $a + b = b + a$

**Группа** — объект, удовлетворяющий аксиомам 1-3

**Абелева группа** — объект, удовлетворяющий аксиомам 1-4

## 11.2 Аксиомы умножения

Умножение:  $a * b = c \in \mathbb{R}$

1. **Существование единицы:**  $\exists 1, \forall a \in \mathbb{R} : 1 * a = a * 1 = a$
2. **Существование обратного элемента:**  
 $\forall a \neq 0 \in \mathbb{R}, \exists a^{-1} : a * a^{-1} = 1$
3. **Ассоциотивность:**  $a * (b * c) = (a * b) * c$
4. **Коммутативность:**  $a * b = b * a$

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$  — абелева группа по умножению

**Поле** — алгебраический объект с 2 бинарными операциями, подчиняющийся 8 аксиомам.

## 11.3 Аксиома связи сложения и умножения

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a + b) * c = a * c + b * c$$

## 11.4 Отношение порядка

На  $\mathbb{R}$  существует отношение  $\geq$ , подчиняющееся следующим аксиомам:

1. **Рефлексивность:**  $a \geq a$
2. **Антисимметричность:**  $a \geq b \wedge b \geq a \Rightarrow a = b$
3. **Транзитивность:**  $a \geq b \wedge b \geq c \Rightarrow a \geq c$
4. **Аксиома, определяющая что порядок — линейный:**  
 $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \geq b \vee b \geq a$

Замечание:

$$\begin{aligned} a \geq b &\Rightarrow b \geq a \\ a \geq b \wedge a \neq b &\Rightarrow a > b \end{aligned}$$

## 11.5 Аксиома связи сложения и порядка

$$a \geq b \Rightarrow a + c \geq b + c$$

## 11.6 Аксиома связи умножения и порядка

$$a \geq 0 \wedge b \geq 0 \Rightarrow a * b \geq 0$$

## 11.7 Аксиома полноты

Пусть  $U, W$  — такие множества, что  $\forall x \in U, y \in W : x \leq y$   
Тогда  $\exists c \in \mathbb{R} : x \leq c \leq y$



## 12 Альтернативные зависимости

### 12.1 Полярная система координат

$r$  — расстояние от начала координат

$\phi$  — угол от оси  $Ox$  против часовой стрелки

**Примеры:**

1. Прямая  $y = 1$

$$r = \frac{1}{\sin\phi}$$

2. Окружность  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$

$$r = 2\cos\phi$$

### 12.2 Параметрическая

$$y = \phi(t)$$

$$x = \psi(t)$$

**Примеры:**

1. Окружность  $x^2 + y^2 = 1$

$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}$$

2. Отрезок  $x + y = 2, x \geq 0, y \geq 0$

$$\begin{cases} x = 2\cos^2 t \\ y = 2\sin^2 t \end{cases}$$

### 12.3 ДЗ

№№

- 369(а, б, ж)
- 371(в, д, ж)