Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Илья Ковалев

6 сентября 2024

1 Экзамен

Билет — 5 вопросов, 2 теория и 3 практика
1 вопрос = 1 балл
Письменный экзамен, длительность — 90 минут

2 Матрицы и их операции

Матрицей A порядка $m*n$ называют двумерную таблицу, состоящую из m строк и n столбцов.

Прямоугольная матрица — $m*n$.

Квадратная матрица — $n*n$.

Диагональная матрица — $n*n$, где отличны от нуля только элементы главной диагонали.

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

Скалярная — диагональная, где все элементы диагонали равны.

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Единицная — скалярная, где все элементы диагонали $= 1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Нулевая — все элементы = 0.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3 Вычисление определителей

$detA_{n*m}$

3.1 Младшие порядки

$$n = 2$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} -5 & -6 \\ -7 & -8 \end{vmatrix} = (-5)(-8) - (6)(-7) = 40 + 42 = 82$$

3.1.1 Способ 1. По Саррюсу

$$n = 3$$

№2.13

$$\left|\begin{matrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 3 & 4 \\ 8 & 7 \\ 2 & -1 \end{matrix} =$$
$$= (3)(7)(8) + (4)(-2)(2) + (-5)(8)(-1) -$$
$$-(2)(7)(-5) - (-1)(-2)(3) - (8)(8)(4) =$$
$$168 - 16 + 40 + 70 - 6 - 256 = 0$$

3.1.2 Способ 2. Разложение

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ m & n & k \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{3} a_{i2}A_{i2} = bA_{12} + eA_{22} + nA_{32}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{3} a_{i2}A_{i2} =$$
$$= 4A_{12} + 7A_{22} + (-1)A_{32} = 4(-M_{12}) + 7M_{22} + M_{32}$$

где

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 64 + 4 = 68$$
$$M_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 24 + 10 = 34$$
$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 40 = 34$$

$$4(-68) + 7(34) + 34 = (-8 + 7 + 1) * 34 = 0$$

3.1.3 Контроль

$\left|\begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{matrix} = (3)(5)(2)+(2)(3)(3)+(1)(2)(4)-(3)(5)(1)-(4)(3)(3)-(2)(2)(2) = 30 + 18 + 8 - 15 - 36 - 8 = -3$

№2.54(a)

$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = aA_{31} + bA_{32} + cA_{33} + dA_{34}$

$A_{31} = (-1)^{3+1}M_{31} = \left|\begin{matrix} -3 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{matrix} = (-3)(3)(3) + (4)(2)(-1) + (1)(-2)(4) - (-1)(3)(1) - (4)(2)(-3) - (3)(-2)(4) = -27 - 8 - 8 + 3 + 24 + 24 = 8$

$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{matrix} = -(2)(3)(3) - (4)(2)(3) - (1)(4)(4) + (3)(3)(1) + (4)(2)(2) + (3)(4)(4) = -(18 + 24 + 16 - 9 - 16 - 48) = 15$

$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & -3 \\ 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{matrix} = (2)(-2)(3) + (-3)(2)(3) + (1)(4)(-1) - (3)(-2)(1) - (-1)(2)(2) - (3)(4)(-3) = ...$

3.1.4 Способ 3. С упрощением

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} I \\ II + IV \\ III - 3IV \\ IV \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 8 & 0 \\ -6 & -4 & -16 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0A_{14} + 0A_{24} + 0A_{34} + 1A_{44} = M_{44} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \\ -6 & -4 & -16 \end{vmatrix} = -2 * \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix} = -2 * 0 = 0$$

3.1.5 Контроль

№2.56

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} I - 3II \\ II \\ III + II \\ IV \end{matrix} = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 8 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -A_{23} = M_{23} =$$

$$= \begin{vmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 8 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 6 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -3 * (-28) + 12 = -3 * (-16) = 48$$

3.1.6 ДЗ

№№

- 2.1
- .50
- .52
- .54(б)
- .57

- 61*

3.2 Свойства определителей

1. Транспонирование — строки и столбцы равноправны
2. Упрощение
3. Перестановка двух строк/столбцов меняет знак определителя, не меняет модуль
4. Умножение
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$
5. Сложение
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -4 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$
6. Спец-свойство
$$i \neq j, \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0$$
7. Произведение
$$detA * detB = detA * B$$
8. Треугольный определитель

$$detU_{4*\times 4} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} * a_{22} * a_{33} * a_{44}$$

4 Обратная матрица

Деление в алгебре:
$ax = b \overset{a\neq 0}{\Rightarrow} x = \frac{b}{a}$
Обратное число для $a \neq 0$ — такое a^{-1}, что $a * a^{-1} = 1$

4.1 Определение

Обратная матрица A^{-1} — такая, что ее произведение и слева, и справа — единичная матрица.

$$AA^{-1} \stackrel{\triangle}{=} E$$
$$A^{-1}A \stackrel{\triangle}{=} E$$

4.2 Свойства

1. **Порядок** — $A_{n\times n} \Rightarrow A^{-1}_{n\times n}$
2. **Единственность** — $A : \exists A^{-1}, \exists! A^{-1}$
   Доказательство от противного:
   Предположим, что $A : \exists A_1^{-1} \neq A_2^{-1}$
   Тогда $AA_1^{-1} - AA_2^{-1} = E - E = 0$
   $A(A_1^{-1} - A_2^{-1}) = 0$
   $A_1^{-1} - A_2^{-2} = 0 \Rightarrow A_1^{-1} = A_2^{-1}$ — противоречие. ЧТД.
3. **Обратность определителя** — $A : \exists A^{-1} \Rightarrow detA = \frac{1}{detA^{-1}}$
   $AA^{-1} = E$
   $detAA^{-1} = detE = 1$
   $detA = \frac{1}{detA^{-1}}$
4. **Ненулевость определителя** — $detA = 0 \Rightarrow \nexists A^{-1}$
   Если $A : \exists A^{-1}$, то $detA \neq 0$
5. $A : detA \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{A^*}{detA}$
   $A^* = adj(A) = (A_{ij})^T_{i,j=T,i}$

   Вырожденная матрица — $A, detA = 0$

4.3 Алгоритм обращения матрицы

1. $A^{-1} = \frac{A^T_{ij}}{detA}$
2. Вычислить все A_{ij} для a_{ij}.
3. Собрать все A_{ij} в матрицу и транспонировать ее.

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{m1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

4. Разделить. $A^{-1} = \frac{A^*}{detA}$

5. Проверить. $AA^{-1} = E$

4.3.1 Пример — быстрое обращение матрицы 2×2

$n = 2 : A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

1. Пусть $detA = ad - bc \neq 0$

2. Найдем все алгебраические дополнения $A_{11} = M_{11} = d$
   $A_{12} = -M_{12} = -c$
   $A_{21} = -M_{21} = -b$
   $A_{22} = M_{22} = a$

3. $A^* = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

4. $A^{-1} = \frac{A^*}{detA}$

4.4 Свойства операций обращения матриц

Примечание: $\forall A \exists A^{-1}$

1. $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

2. $(\lambda B)^{-1} = \lambda^{-1}B^{-1}$

3. $(A^{-1})^{-1} = A$

4. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-T}$

4.5 Решение линейных уравнений

Тип 1

$$\begin{aligned} A_{m\times n}X_{n\times P} &= B_{m\times P} \\ A^{-1}_{n\times m}A_{m\times n}X_{n\times P} &= A^{-1}_{n\times m}B_{m\times P} \\ X_{n\times P} &= A^{-1}_{n\times m}B_{m\times P} \end{aligned}$$

Тип 2

$$
\begin{aligned}
YA &= B \\
YAA^{-1} &= BA^{-1} \\
Y &= BA^{-1}
\end{aligned}
$$

Тип 3

$$
\begin{aligned}
A_1XA_2 &= B \\
A_1^{-1}A_1XA_2A_2^{-1} &= A_1^{-1}BA_2^{-1} \\
Y &= A_1^{-1}BA_2^{-1}
\end{aligned}
$$

Тип 4

$A_1X + XA_2 = B$ — не вычисляется с помощью обратных матриц

4.5.1 Переменные

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — переменные

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ — свободные члены

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ — коэффициенты