Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Илья Ковалев

6 сентября 2024

1 Экзамен

Билет — 5 вопросов, 2 теория и 3 практика
1 вопрос = 1 балл
Письменный экзамен, длительность — 90 минут

2 Матрицы и их операции

Матрицей A порядка $m*n$ называют двумерную таблицу, состоящую из m строк и n столбцов.

Прямоугольная матрица — $m*n$.

Квадратная матрица — $n*n$.

Диагональная матрица — $n*n$, где отличны от нуля только элементы главной диагонали.

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

Скалярная — диагональная, где все элементы диагонали равны.

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Единицная — скалярная, где все элементы диагонали $= 1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Нулевая — все элементы $= 0$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3 Вычисление определителей

$detA_{n*m}$

3.1 Младшие порядки

$n = 2$

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$\begin{vmatrix} -5 & -6 \\ -7 & -8 \end{vmatrix} = (-5)(-8) - (6)(-7) = 40 + 42 = 82$

3.1.1 Способ 1. По Саррюсу

$n = 3$

№2.13

$\left|\begin{matrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 3 & 4 \\ 8 & 7 \\ 2 & -1 \end{matrix} = (3)(7)(8) + (4)(-2)(2) + (-5)(8)(-1) - (2)(7)(-5) - (-1)(-2)(3) - (8)(8)(4) = 168 - 16 + 40 + 70 - 6 - 256 = 0$

3.1.2 Способ 2. Разложение

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ m & n & k \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{3} a_{i2}A_{i2} = bA_{12} + eA_{22} + nA_{32}$

$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{3} a_{i2}A_{i2} = 4A_{12} + 7A_{22} + (-1)A_{32} = 4(-M_{12}) + 7M_{22} + M_{32}$

где

$M_{12} = \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 64 + 4 = 68$

$M_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 24 + 10 = 34$

$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 40 = 34$

$4(-68) + 7(34) + 34 = (-8 + 7 + 1) * 34 = 0$

3.1.3 Контроль

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{matrix} = (3)(5)(2)+(2)(3)(3)+(1)(2)(4)-(3)(5)(1)-(4)(3)(3)-$$
$$(2)(2)(2) = 30+18+8-15-36-8=-3$$

№2.54(a)

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = aA_{31}+bA_{32}+cA_{33}+dA_{34}$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}M_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{matrix} = (-3)(3)(3)+(4)(2)(-1)+$$
$$(1)(-2)(4)-(-1)(3)(1)-(4)(2)(-3)-(3)(-2)(4) = -27-8-8+3+24+24=8$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{matrix} = -(2)(3)(3)-(4)(2)(3)-(1)(4)(4)+$$
$$(3)(3)(1)+(4)(2)(2)+(3)(4)(4) = -(18+24+16-9-16-48)=15$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & -3 \\ 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{matrix} = (2)(-2)(3)+(-3)(2)(3)+$$
$$(1)(4)(-1)-(3)(-2)(1)-(-1)(2)(2)-(3)(4)(-3) = ...$$

3.1.4 Способ 3. С упрощением

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} I \\ II+IV \\ III-3IV \\ IV \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 8 & 0 \\ -6 & -4 & -16 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0A_{14}+0A_{24}+0A_{34}+$$
$$1A_{44} = M_{44} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \\ -6 & -4 & -16 \end{vmatrix} = -2*\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix} = -2*0=0$$

3.1.5 Контроль

№2.56

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}\begin{matrix} I-3II \\ II \\ III+II \\ IV \end{matrix} = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 8 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -A_{23} = M_{23} =$$

$= \begin{vmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 8 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 6 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -3 * (-28) + 12 = -3 * (-16) = 48$

3.1.6 ДЗ

№№

- 2.1
- .50
- .52
- .54(б)
- .57
- 61*