Аналитическая геометрия

Илья Ковалев

18 ноября 2024

1 Прямая в плоскости

1.1 Общее уравнение прямой

Прямая l на плоскости Oxy

$$\begin{cases} M_0(x, y) \in l \\ \vec{N} = \{A, B\} \perp l \end{cases} \Rightarrow \forall M(x, y) \in l : \vec{M_0M} \perp \vec{N} \Leftrightarrow \vec{N} \cdot \vec{M_0M} = 0$$

1.2 Параметрическое и каноническое уравнения $l \subset Oxy$

$$\begin{cases} M_0(x_0, y_0) \in l \\ M(x, y) \\ \vec{q} = \{m, n\} \parallel l \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall M(x, y) \in l : \vec{M_0M} \parallel \vec{q} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} : \vec{M_0M} = t\vec{q} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = mt \\ y - y_0 = nt \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n(x - x_0) - m(y - y_0) = 0$$

1.3 Прямая через 2 точки

$$\begin{cases} M_1(x_1, y_1) \in l \\ M_2(x_2, y_2) \in l \end{cases} \Rightarrow \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

1.4 Расстояние от точки до прямой

$$\begin{cases} D(x_d, y_d) \\ l : Ax + By + C = 0 \end{cases} \Rightarrow \rho = \frac{|Ax_d + By_d + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

2 Плоскость в пространстве

2.1 Общее уравнение плоскости

$$\begin{cases} M_0(x_0, y_0, z_0) \in P \\ \vec{N} = \{A, B, C\} \perp P \end{cases} \Rightarrow \forall M(x, y, z) \in P : \vec{M_0 M} \perp \vec{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

2.2 Компланарное уравнение

$$\begin{cases} M(x_0, y_0, z_0) \in P \\ \vec{p} \parallel P \\ \vec{q} \parallel P \\ \vec{p} \nparallel \vec{q} \end{cases} \Rightarrow \forall M(x, y, z) \in P : \vec{M_0 M}, \vec{p}, \vec{q} \text{ — компланарны} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ p_x & p_y & p_z \\ q_x & q_y & q_z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x - x_0)A_{11} + (y - y_0)A_{12} + (z - z_0)A_{13} = 0$$

2.3 Через 3 точки

$$\begin{cases} M_1(x_1, y_1, z_1) \in P \\ M_2(x_2, y_2, z_2) \in P \\ M_3(x_3, y_3, z_3) \in P \\ M_1 \notin M_1\vec{M}_2 \\ M_2 \notin M_2\vec{M}_3 \\ M_3 \notin M_3\vec{M}_1 \end{cases} \Leftrightarrow P : \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

2.4 Расстояние от точки до плоскости

$$\begin{cases} P(x_0, y_0, z_0) \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases} \Rightarrow \rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

2.5 Взаимное расположение 2 плоскостей

$$\begin{cases} P1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ P2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

2.5.1 Параллельные

$$P_1 \parallel P_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$
$$\rho(P_1 \parallel P_2) = \rho(M_1 \in P_1, P_2) = \frac{|D_2C_1 - D_1C_2|}{|C_1|\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

2.5.2 Пересекающиеся

$$P_1 \nparallel P_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \vee \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$
$$\alpha = \angle(P_1, P_2) \in (0; \frac{\pi}{2}] : \cos\alpha = |\cos\phi| = \frac{|\vec{N_1} \cdot \vec{N_2}|}{|\vec{N_1}||\vec{N_2}|}$$

3 Прямая в пространстве

3.1 Общее уравнение

Пересечение плоскостей

$$L: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \vee \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \end{cases}$$

$$\vec{N}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$$

$$\vec{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$$

3.2 Параметрическое и каноническое

$$\begin{cases} M_0(x_0, y_0, z_0) \in L \\ \vec{q} = \{m, n, p\} \parallel L \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = mt \\ y - y_0 = nt \\ z - z_0 = pt \\ m^2 + n^2 + p^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

$$\vec{q} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$$

$$M_0: \begin{cases} A_1x_0 \dots = 0 \\ A_2x_0 \dots = 0 \\ x_0 = 0 \vee y_0 = 0 \vee z_0 = 0 \end{cases} \rightarrow M_0(x_0, y_0, z_0)$$

3.3 Расстояние от точки до прямой

$$\begin{cases} M_1(x_1, y_1, z_1) \\ L: t = \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} \end{cases} \Rightarrow \rho(M_1, L) = \frac{|\vec{M_0M_1} \times \vec{q}|}{|\vec{q}|}$$

3.4 Взаимное расположение 2 прямых

$$\begin{cases} L_1 : \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \\ L_2 : \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2} \end{cases}$$

3.4.1 Параллельные

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow L_1 \parallel L_2$$

$$\rho(L_1, L_2) = \rho(M_1 \in L_1, L_2) = \frac{|\vec{M_2 M_1} \times \vec{q_2}|}{|\vec{q_2}|}$$

3.4.2 Непараллельные

$$\begin{cases} \frac{m_1}{m_2} \neq \frac{n_1}{n_2} \vee \frac{n_1}{n_2} \neq \frac{p_1}{p_2} \\ \rho(L_1, L_2) = \frac{|(\vec{M_1 M_2}, \vec{q_1}, \vec{q_2})|}{|\vec{q_1} \times \vec{q_2}|} \end{cases}$$

$$\alpha = \angle(L_1, L_2) \in [0; \frac{\pi}{2}]$$

$$\cos\alpha = |\cos\phi| = \frac{|\vec{q_1} \cdot \vec{q_2}|}{|\vec{q_1}| \cdot |\vec{q_2}|}$$

$\rho(L_1, L_2) = 0$ — пересекающиеся
$\rho(L_1, L_2) \neq 0$ — скрещивающиеся

3.5 Взаимное расположение прямой и плоскости

$$\begin{cases} L : \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \\ P : Ax + By + Cz + D = 0 \to \vec{N} = \{A, B, C\} \perp P \end{cases}$$

3.5.1 Параллельные

$$L \parallel P \Leftrightarrow \vec{q} \perp \vec{N} \Leftrightarrow \vec{q} \cdot \vec{N} = Am + Bn + Cp = 0$$

3.5.2 Пересекающиеся

$$L \nparallel P \Leftrightarrow Am + Bn + Cp \neq 0$$
$$\beta = \angle(L, P)$$
$$\sin\beta = |\cos\phi| = \frac{|\vec{N} \cdot \vec{q}|}{|\vec{N}| \cdot |\vec{q}|}$$
$$K = L \cap P : \begin{cases} \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} = t \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

4 Кривые II порядка на плоскости Oxy

4.1 Общее уравнение

$$K_2 : Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

4.2 Канонический вид

4.2.1 $B \neq 0$

Поворот системы координат на $\alpha : \operatorname{ctg}\alpha = \frac{A-C}{2B}$

4.2.2 $B = 0$

Сдвиг начала системы координат в точку $M_0(x_0, y_0)$

4.2.3 Способ приведения

Выделение полных квадратов $(x - x_0)^2, (y - y_0)^2$

$$\begin{cases} u = x - x_0 \\ v = y - y_0 \end{cases}$$

$$(Ax^2 + Dx) + (Cy^2 + Ey) = -F$$
$$A(x^2 + \frac{D}{A}x) + C(y^2 + \frac{E}{C}y) = -F$$
$$A((x - x_0)^2 - x_0^2) + C((y - y_0)^2 - y_0^2) = -F$$
$$A(x - x_0)^2 + C(y - y_0)^2 = -F + Ax_0^2 + Cy_0^2 = H$$
$$\frac{u^2}{\frac{H}{A}} + \frac{v^2}{\frac{H}{C}} = 1$$

Нет x^2 — парабола

$$A = 0, C \neq 0$$
$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$
$$C((y - y_0)^2 - y_0^2) = -Dx - F$$
$$C(y - y_0)^2 = -Dx - F + Cy_0^2$$
$$C(y - y_0)^2 = -D(x - x_0)$$
$$Cv^2 = -Du$$
$$v^2 = -\frac{D}{C}u$$

4.3 Канонические уравнения и сами кривые

4.3.1 Эллипс

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$$

Если $a^2 > b^2$, эллипс вытянут вертикально, фокусы на Oy.
Если $a^2 < b^2$, эллипс вытянут горизонтально, фокусы на Ox.

4.3.2 Гипербола

$$\frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} = \pm 1$$

Если $+1$, ветви гиперболы вправо и влево.
Если -1, ветви гиперболы вверх и вниз.

4.3.3 Парабола

$$v^2 = 2pu$$

Если $p > 0$, ветви параболы вправо.
Если $p < 0$, ветви параболы влево.