Линейная алгебра

Илья Ковалев

6 сентября 2024

1 Экзамен

Билет — 5 вопросов, 2 теория и 3 практика
1 вопрос = 1 балл
Письменный экзамен, длительность — 90 минут

2 Матрицы и их операции

Матрицей A порядка $m*n$ называют двумерную таблицу, состоящую из m строк и n столбцов.

Прямоугольная матрица — $m * n$.

Квадратная матрица — $n * n$.

Диагональная матрица — $n*n$, где отличны от нуля только элементы главной диагонали.

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

Скалярная — диагональная, где все элементы диагонали равны.

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Единицная — скалярная, где все элементы диагонали $= 1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Нулевая — все элементы $= 0$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3 Вычисление определителей

$detA_{n*m}$

3.1 Младшие порядки

$$n = 2$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} -5 & -6 \\ -7 & -8 \end{vmatrix} = (-5)(-8) - (6)(-7) = 40 + 42 = 82$$

3.1.1 Способ 1. По Саррюсу

$$n = 3$$

№2.13

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 4 \\ 8 & 7 \\ 2 & -1 \end{matrix} =$$

$$= (3)(7)(8) + (4)(-2)(2) + (-5)(8)(-1)-$$

$$-(2)(7)(-5) - (-1)(-2)(3) - (8)(8)(4) =$$

$$168 - 16 + 40 + 70 - 6 - 256 = 0$$

3.1.2 Способ 2. Разложение

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ m & n & k \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{3} a_{i2}A_{i2} = bA_{12} + eA_{22} + nA_{32}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{3} a_{i2}A_{i2} =$$
$$= 4A_{12} + 7A_{22} + (-1)A_{32} = 4(-M_{12}) + 7M_{22} + M_{32}$$

где

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 64 + 4 = 68$$
$$M_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 24 + 10 = 34$$
$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 40 = 34$$

$$4(-68) + 7(34) + 34 = (-8 + 7 + 1) * 34 = 0$$

3.1.3 Контроль

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{matrix} =$$
$$= (3)(5)(2) + (2)(3)(3) + (1)(2)(4) -$$
$$-(3)(5)(1) - (4)(3)(3) - (2)(2)(2) =$$
$$= 30 + 18 + 8 - 15 - 36 - 8 = -3$$

№2.54(a)

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = aA_{31} + bA_{32} + cA_{33} + dA_{34}$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} =$$

$$= \left|\begin{matrix} -3 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{matrix} =$$

$$= (-3)(3)(3) + (4)(2)(-1) + (1)(-2)(4) -$$

$$-(-1)(3)(1) - (4)(2)(-3) - (3)(-2)(4) =$$

$$= -27 - 8 - 8 + 3 + 24 + 24 = 8$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} =$$

$$= - \left|\begin{matrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{matrix} =$$

$$= -(2)(3)(3) - (4)(2)(3) - (1)(4)(4) +$$

$$+(3)(3)(1) + (4)(2)(2) + (3)(4)(4) =$$

$$= -(18 + 24 + 16 - 9 - 16 - 48) = 15$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} =$$

$$= \left|\begin{matrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & -3 \\ 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{matrix} =$$

$$= (2)(-2)(3) + (-3)(2)(3) + (1)(4)(-1) -$$

$$-(3)(-2)(1) - (-1)(2)(2) - (3)(4)(-3) = \ldots$$

3.1.4 Способ 3. С упрощением

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} I \\ II+IV \\ III-3IV \\ IV \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 8 & 0 \\ -6 & -4 & -16 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 0A_{14} + 0A_{24} + 0A_{34} + 1A_{44} = M_{44} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \\ -6 & -4 & -16 \end{vmatrix} = -2 * \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix} = -2 * 0 = 0$$

3.1.5 Контроль

№2.56

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} I-3II \\ II \\ III+II \\ IV \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 8 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -A_{23} = M_{23} = \begin{vmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 8 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 6 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 * (-28) + 12 = -3 * (-16) = 48$$

3.2 Свойства определителей

1. Транспонирование — строки и столбцы равноправны

2. Упрощение

3. Перестановка двух строк/столбцов меняет знак определителя, не меняет модуль

4. Умножение
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

5. Сложение
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -4 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

6. Спец-свойство
$$i \neq j, \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0$$

7. Произведение
$$detA * detB = detA * B$$

8. Треугольный определитель

$$detU_{4*\times 4} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} * a_{22} * a_{33} * a_{44}$$

4 Обратная матрица

Деление в алгебре:
$ax = b \overset{a \neq 0}{\Rightarrow} x = \frac{b}{a}$
Обратное число для $a \neq 0$ — такое a^{-1}, что $a * a^{-1} = 1$

4.1 Определение

Обратная матрица A^{-1} — такая, что ее произведение и слева, и справа — единичная матрица.

$$AA^{-1} \triangleq E$$
$$A^{-1}A \triangleq E$$

4.2 Свойства

1. **Порядок** — $A_{n \times n} \Rightarrow A^{-1}_{n \times n}$

2. **Единственность** — $A : \exists A^{-1}, \exists! A^{-1}$
Доказательство от противного:
Предположим, что $A : \exists A_1^{-1} \neq A_2^{-1}$
Тогда $AA_1^{-1} - AA_2^{-1} = E - E = 0$
$A(A_1^{-1} - A_2^{-1}) = 0$
$A_1^{-1} - A_2^{-2} = 0 \Rightarrow A_1^{-1} = A_2^{-1}$ — противоречие. ЧТД.

3. **Обратность определителя** — $A : \exists A^{-1} \Rightarrow detA = \frac{1}{detA^{-1}}$
$AA^{-1} = E$
$detAA^{-1} = detE = 1$
$detA = \frac{1}{detA^{-1}}$

4. **Ненулевость определителя** — $detA = 0 \Rightarrow \nexists A^{-1}$
Если $A : \exists A^{-1}$, то $detA \neq 0$

5. $A : detA \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{A^*}{detA}$
$A^* = adj(A) = (A_{ij})^T_{i,j=T,i}$

Вырожденная матрица — $A, detA = 0$

4.3 Алгоритм обращения матрицы

1. $A^{-1} = \frac{A_{ij}^T}{detA}$

2. Вычислить все A_{ij} для a_{ij}.

3. Собрать все A_{ij} в матрицу и транспонировать ее.

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{m1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

4. Разделить. $A^{-1} = \frac{A^*}{detA}$

5. Проверить. $AA^{-1} = E$

4.3.1 Пример — быстрое обращение матрицы 2×2

$n = 2 : A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

1. Пусть $detA = ad - bc \neq 0$

2. Найдем все алгебраические дополнения

$$A_{11} = M_{11} = d$$
$$A_{12} = -M_{12} = -c$$
$$A_{21} = -M_{21} = -b$$
$$A_{22} = M_{22} = a$$

3.
$$A^* = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

4.
$$A^{-1} = \frac{A^*}{detA}$$

4.4 Свойства операций обращения матриц

Примечание: $\forall A \exists A^{-1}$

1. $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
2. $(\lambda B)^{-1} = \lambda^{-1}B^{-1}$
3. $(A^{-1})^{-1} = A$
4. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-T}$

4.5 Примеры:

№2.106

$$n = 2$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$
$$A^{-1} = \frac{1}{4-6}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

Проверка:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} (1)(-2)+(2)(1.5) & (-2)(2)+(1)(4) \\ (3)(-2)+(4)(1.5) & (1.5)(2)+(4)(-0.5) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{2\times 2}$$

№2.109

1. Определитель

$$n = 3$$
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$
$$detA = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \cdots = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

2. Первая строка

$$A_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 8 = -1$$

$$A_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -(-18 + (-20)) = 38$$

$$A_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -12 - 15 = -27$$

3. Вторая строка

$$A_{21} = -M_{21} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -(-15 + 14) = 1$$

$$A_{22} = M_{22} = -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -6 + (-35) = -41$$

$$A_{23} = -M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 - 25) = 29$$

4. Третья строка

$$A_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 21 = -1$$

$$A_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -(8 - 42) = 34$$

$$A_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 30 = -24$$

5. Присоединенная матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} A_1 1 & A_2 1 & A_3 1 \\ A_1 2 & A_2 2 & A_3 2 \\ A_1 3 & A_2 3 & A_3 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix}$$

6. Обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{A^*}{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$$

5 Решение линейных уравнений

Тип 1

$$\begin{aligned} A_{m\times n}X_{n\times P} &= B_{m\times P} \\ A^{-1}_{n\times m}A_{m\times n}X_{n\times P} &= A^{-1}_{n\times m}B_{m\times P} \\ X_{n\times P} &= A^{-1}_{n\times m}B_{m\times P} \end{aligned}$$

Тип 2

$$\begin{aligned} YA &= B \\ YAA^{-1} &= BA^{-1} \\ Y &= BA^{-1} \end{aligned}$$

Тип 3

$$\begin{aligned} A_1XA_2 &= B \\ A_1^{-1}A_1XA_2A_2^{-1} &= A_1^{-1}BA_2^{-1} \\ Y &= A_1^{-1}BA_2^{-1} \end{aligned}$$

Тип 4

$A_1X + XA_2 = B$ — не вычисляется с помощью обратных матриц

5.1 Значения матриц

$X = \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — переменные

$B = \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ — свободные члены

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ — коэффициенты}$$

5.2 Упражнения

№2.121

1.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

2.
$$\begin{gathered} X = A^{-1}B = \\ = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} = \\ = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} = \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \end{gathered}$$

3. Проверка
$$AX \stackrel{?}{=} B$$
$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

   Верно

№3.122

$$X \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$$

1.
$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

2. $X = \dots$ — мне лень

5.3 Нахождение решений

$$\Delta = detA$$
$$m = n \wedge \Delta \neq 0 \Rightarrow x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$$
$$\Delta_j = D(a_1, \dots a_{j-1}, b, a_{j+1}, \dots a_n)$$

Пример:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4 \\ 5x_1 - 7x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$
$$\Delta = -29 \neq 0$$
$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & -7 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{46}{29}$$
$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{8}{29}$$

5.4 Линейная зависимость

Елси $c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \dots + c_k\vec{a}_k = \vec{0}$ только при $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$, то уравнение Линейно НеЗависимо (ЛНЗ)

Иначе, при $c_1 = c_2 \neq 0 \Rightarrow c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_1 = \frac{c_2}{c_1}\vec{a}_2$

5.4.1 Свойства ЛЗ и ЛНЗ

1. При сужении ЛНЗ, система остается ЛНЗ

2. При расширении ЛЗ, система остается ЛЗ

5.5 Необходимое и достаточное условие $detA = 0$

$$detA_{m \times n} = 0 \Leftrightarrow \exists \text{ЛЗ}$$
$$\vec{a}_n = \alpha_1\vec{a}_k + \alpha_2\vec{a}_l \Rightarrow \vec{a}_n - \alpha_1\vec{a}_k - \alpha_2\vec{a}_l = \vec{0} \Rightarrow detA = 0$$

5.6 Минор прямоугольной матрицы

Минором прямоугольной матрицы $A_{m\times n}$ порядка $k \leq \min(m, n)$ называется любой определитель M_k, составленный из элементов на пересечении k различных строк и столбцов.

Пример:

$$A_{3\times 5} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}$$

$$k = 1 \Rightarrow$$
$$M_1^{'} = M_{II}^{II} = 7$$
$$M_2^{'} = M_{III}^{I} = 11$$

$$k = 2 \Rightarrow$$
$$M_1^{''} = M_{II,III}^{II,III} = \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 12 & 13 \end{vmatrix}$$
$$M_2^{''} = M_{I,V}^{I,III} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 11 & 15 \end{vmatrix}$$

5.7 Базис минора матрицы

$$M_{\text{баз}} = M_r \neq 0 : \forall M_{r+1} = 0 \vee \nexists$$

5.8 Ранг матрицы

$\operatorname{Rg} A$ — ранг матрицы A

Ранг матрицы — количество ее линейно независимых строк или столбцов

Свойство ранга

$$\operatorname{Rg} A = \dim M_{\text{баз}}$$

5.9 Нахождение $\operatorname{Rg} A$ и $M_{\text{баз}}$

$$A_{3\times 5} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}$$

Пусть $r = 1$

$$M_1^{'} = 8 \neq 0 \to \operatorname{Rg} A \geq 1, M_{\text{баз}} = 8$$

Пусть $r = 2$

$$M_2^{''} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \to \operatorname{Rg} A \geq 2, M_{\text{баз}} = 5$$

Пусть $r = 3$

$$M_3^{'''} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \\ 11 & 12 & 13 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \to \operatorname{Rg} A \geq 2, M_{\text{баз}} = 5$$

5.10 Операции

1. Перестановка строк/столбцов
2. Умножение строки/столбца на $c \neq 0$
3. Сложение строк/столбцов

5.11 Ступенчатая матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & * & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

где $*$ — не нуль

Ступенчатая матрица — матрица, в которой можно провести ломаную линию, отделяющую все ненулевые элементы от остальных, при этом граничные элементы не могут быть нулями.

5.12 Правило крамера

$$n \times n \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{b}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\det A \neq 0 \Rightarrow \exists! A^{-1} \Rightarrow \exists \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

$$x_j = \frac{\Delta j}{\Delta}, \Delta = \det A, \Delta_j = D(\vec{a}_1, \dots \vec{a}_{j-1}, \vec{b}, \vec{a}_{j+1}, \dots \vec{a}_n)$$

№2.191

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 3z = 16 \\ 5y - z = 10 \end{cases} \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = -29 \neq 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 3 \\ 10 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -29$$

$$\frac{\Delta_1}{\Delta} = 1$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 16 & 3 \\ 0 & 10 & -1 \end{vmatrix} = -87$$

$$\frac{\Delta_2}{\Delta} = 3$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 16 \\ 0 & 5 & 10 \end{vmatrix} = -145$$

$$\frac{\Delta_2}{\Delta} = 5$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

5.13 Метод окаймляющих миноров матрицы

$$A_{3\times 5} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$k=1: M_{II}^{III}=5\neq 0 \Rightarrow r\geq 1$$
$$k=2: M_{I,II}^{II,III}=\begin{vmatrix}-1 & 3\\ -2 & 5\end{vmatrix}=-5+6=1\neq 0\Rightarrow r\geq 2$$
$$k=3: M'=M_{I,II,III}^{I,II,III}=\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 4 & -2 & 5\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=0 \text{ — не подходит на } M_{\text{баз}}$$
$$M''=M_{I,II,III}^{II,III,IV}=\begin{vmatrix}-1 & 3 & -2\\ -2 & 5 & 1\\ -1 & 1 & 8\end{vmatrix}=0 \text{ — не подходит на } M_{\text{баз}}$$
$$M'''=M_{I,II,III}^{III,IV,V}=\begin{vmatrix}-1 & 3 & 4\\ -2 & 5 & 7\\ -1 & 1 & 2\end{vmatrix}=0 \text{ — не подходит на } M_{\text{баз}}$$

Итого:

$$M_{\text{баз}}=M_2=M_{I,II}^{II,III}$$
$$\operatorname{Rg} A_{3\times 5}=2$$

№2.151

$$A_{4\times 4}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & -1\\ 2 & -1 & -3 & 4\\ 5 & 1 & -1 & 7\\ 7 & 7 & 9 & 1\end{pmatrix}$$

$$k=2$$
$$M_2=M_{II,III}^{II,III}=\begin{vmatrix}-1 & -3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=4\neq 0\Rightarrow r\geq 2$$

$$k = 3$$

$$M_3' = M_{I,II,III}^{I,II,III} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -3 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \cdots = 0$$

$$M_3'' = M_{I,II,III}^{II,III,IV} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 5 & 1 & -1 \\ 7 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \cdots = 0$$

$$M_3' = M_{II,III,IV}^{II,III,IV} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 7 \\ 7 & 9 & 1 \end{vmatrix} = -16 \neq 0 \Rightarrow r \geq 3$$

$$k = 4$$

$$M_4 = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 0 \wedge \exists! M_4 \Rightarrow M_{\text{баз}} = M_3$$

5.14 Метод элементарных преобразований матрицы. Приведение к ступенчатому виду.

5.14.1 Правило

Ранг ступенчатой матрицы равен числу ненулевых строк

№2.150

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \to 6 \\ \to 15 \\ \to 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ II - 2I \sim \\ II - I \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \to 6 \\ \to 3 \\ \to 6 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \to 6 \\ \to 3 \\ \to 0 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{Rg} A_{3\times 5} = 2$$

5.15 Количество решений

1. Если количество неизвестных равно рангу матрицы, существует единственное решение

2. Если количество неизвестных больше ранга матрицы, $\tilde{A}_{n\times r}\tilde{x}^{\text{баз}}_{r+1} = \tilde{b}_{r\times 1} = \tilde{A}_{n\times(r-1)}\tilde{x}^{\text{баз}}_{(r+1)\times 1}$

3. Если количество неизвестных меньше ранга матрицы, то бесконечное количество решений, зависящих от $r-n$ параметров.

5.16 Метод Гаусса

СЛАУ 4×4

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=1\\ x_1-x_2+x_3+2x_4=5\\ 3x_1+5x_2+5x_3-4x_4=-3\\ x_1+2x_2+7x_3-7x_4=-7 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 2 & 5\\ 3 & 5 & 5 & -4 & -3\\ 1 & 8 & 7 & -7 & -7 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 4 & -1 & -6\\ 0 & -3 & -2 & 3 & 4\\ 0 & 6 & 4 & -6 & -8 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 4 & -1 & -6\\ 0 & 0 & -14 & 6 & 22\\ 0 & 0 & 28 & -12 & -44 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 4 & -1 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\operatorname{Rg} A = 2$$

$$n-r=4-2=2 \text{ — число параметров}$$

5.16.1 Алгоритм метода Гаусса

1. Привести расширенную матрицу $(A|b)$ к ступенчатому виду
   с помощью элементарных преобразований только строк матрицы.

2. Определить ранги расширенной матрицы и матрицы коэффициентов
   и совместность системы.

3. Разделить переменные на базисные колонны, выбрав подходящий
   базисный минор.

4. Выразить базисные переменные через свободные.
   Если свободных переменных нет, одно решение.

5. Записать ответ.

5.17 Однородные СЛАУ и их ФСР

$$A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \exists \vec{x} = \vec{0}$$
$$r = \mathrm{Rg}\,(A|\vec{0})$$

Есть $\vec{x} \neq \vec{0}$

№2.226

1. Лестничный вид

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$(A|\vec{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} I \\ II - 2I \\ III - 3I \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Rg}\, A = r = 2 < 3 = n$$

2. Обратный ход

(a) Скалярный

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ M_{\text{баз}} = & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} \neq 0 \end{array}$$

x_1, x_2 — базисные, x_3 — свобод.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -x_3 \\ -5x_2 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -0.2x_3 \\ x_1 = -0.8x_3 \end{cases}$$

(b) Матричный

$$(A|\vec{b}) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} I + II \\ II \\ III \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - 4x_2 = 0 \\ -5x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4x_2 \\ x_3 = -5x_2 \end{cases}$$

3. Подстановка

$$\begin{cases} x_1 = -0.8c \\ x_2 = -0.2c \\ x_3 = c \in \mathbb{R} \end{cases}$$

4. ФСР

Перем.	Знач.
x_1	-0.8
x_2	-0.2
x_3	1

$$\vec{\phi}_1 = \begin{pmatrix} -0.8 \\ -0.2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} = c\vec{\phi}_1$$

5.18 Связь однородной и неоднородной соответствующих систем

$$A\vec{x} = \vec{b} \neq \vec{0} \leftrightarrow A\vec{x} = \vec{0}$$

$$\vec{x}_{\text{одн}} = c_1\vec{\phi}_1 + \dots + c_{n-r}\vec{\phi}_{n-r}$$

№2.210

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$$

1. Лестничный вид

$$(A|\vec{b}) = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} I \\ 2II - 3I \\ III - 3II \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \end{pmatrix} \begin{matrix} I \\ II \\ III - II \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Rg} A = r = 2 < 4 = n$$

2. Обратный ход

$$M_{\text{баз}} = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

x_1, x_4 — базисные, x_2, x_3 — свободные

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} I - II \\ II \\ III \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 18 & 8 & 0 & 16 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 18x_2 + 8x_3 = 16 \\ -11x_2 - 5x_3 + x_4 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 8 - 9x_2 - 4x_3 \\ x_4 = -10 + 11x_2 + 5x_3 \end{cases}$$

3. Общее решение

$$\begin{cases} x_1 = 8 - 9c_1 - 4c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_2 \\ x_4 = -10 + 11c_1 + 5c_2 \end{cases}$$

$$\vec{x} = \vec{\phi}_0 + c_1\vec{\phi}_1 + c_2\vec{\phi}_2$$

4. Декомпозиция (разложение)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -9c_1 & -4c_2 \\ 0 & +c_1 & 0 \\ 0 & 0 & +c_2 \\ -10 & +11c_1 & +5c_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

5. Проверка...

5.19 Собственные векторы и значения матриц

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — собственный, если $\vec{x} \neq \vec{0}, A\vec{x} = \lambda\vec{x}$

Тогда λ — собственное значение, пара $\{\lambda, \vec{x} \neq \vec{0}\}$

1.

$$\det(A - \lambda E) = 0$$
$$\phi(\lambda) = (-\lambda)^n + \operatorname{tr} A \cdot (-\lambda)^{n-1} + \cdots + \det A$$
$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} A_{ii} \text{ — след матрицы}$$

Тогда $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ — спектр A

2.

$$\forall \lambda_x : (A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0} \overset{\text{Гаусс}}{\rightarrow} \vec{x}^{(k)} = c_1 \vec{\phi}_1^{(k)} + \cdots + c_{n-r_k} \vec{\phi}_{n-r_k}^{(k)}$$
$$r_k = \operatorname{Rg} B_k$$
$$c_1^2 + \cdots + c_{n-r_k}^2 \neq 0$$

№3.135

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \{\lambda \in \mathbb{C}, \vec{x} \neq \vec{0}\}$$

1. Характерестическая матрица

$$B(\lambda) \stackrel{\triangle}{=} A - \lambda E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Характеристический многочлен

$$\phi(\lambda) = \det B(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 8) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8$$

Проверки:

(a) Коэффициент при $(-\lambda)^{3-1} = \lambda^2 : \operatorname{tr} A = 0 + 4 + 2 = 6$

(b) Свободный член $\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8$

2. Характеристическое уравнение

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = 0$$
$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0$$

Если есть $\lambda_1 \in \mathbb{Z} = \{\pm 1, \pm 2 \cdots \pm 8\}$, то он является делителем свободного члена $\det A$.

(a) Подбор λ_1 среди делителей $\det A = b : \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$
$\lambda_1 = 2$, т.к. $2^3 - 6 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 - 8 = 0$

(b) Понижение степени уравнения

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (\lambda - 2)^3 = 0$$

(c) Собственные значения: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$

3. Нахождение ненулевого столбца для $\lambda_1 = 2 : (A - \lambda_1 E)\vec{x} = \vec{0}$ Метод Гаусса:

(a) Ступенчатый вид

$$(B(2)|\vec{0}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\operatorname{Rg} B(2) = 1$$
$$M_{\text{баз}} = 1$$

(b) Обратный ход

$$\begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

(c) Замена свободных переменных

$$\begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = 2c_1 \\ x_3 = c_2 \end{cases}$$

(d) Декомпозиция

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c_1^2 + c_2^2 \neq 0$$

(e) Проверка

i.

$$\{\lambda = 2, \vec{\phi}_1\}$$
$$\lambda_1 \vec{\phi}_1 = 2\phi_1 = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$A\vec{\phi}_1 = \cdots = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\lambda_1 \vec{\phi}_1 = A\vec{\phi}_1$$

ii. $\{\lambda = 2, \vec{\phi}_2\}$ аналогично

5.19.1 Упрощенный вариант

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \lambda \in \{-1, 3\}$$

1. Подбор $\det(A-\lambda E) = B(\lambda) = 0$

$$B(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$B(-1) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

$$B(3) = \begin{vmatrix} 2-3 & -1 & 2 \\ 5 & -3-3 & 3 \\ -1 & 0 & 2-3 \end{vmatrix} = -64 \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 3$$

2. Гаусс

(a) Ступенчатый вид

$$(B(-1)|\vec{0}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Обратный ход

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

(c) Подстановка

$$\begin{cases} x_1 = -c \\ x_2 = -c \\ x_3 = c \end{cases}$$

(d) Декомпозиция

$$\vec{x} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, c_1 \neq 0$$

$$\vec{\phi}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(e) Проверка ...