Дискретная математика

Илья Ковалев

2024 год

1 Информация

Профессор — Светлана Олеговна
Почта — svetlana_os@mail.ru
Учебники:

- Нефедов и Осипова – Курс Дискретной Математики
- Лавров и Максимова – Сборник задач по теории множеств, мат. логике и теории алгоритмов

2 Теория Множеств

2.1 Множества

Множеству невозможно дать определение без парадоксов.

2.1.1 Создание множества

$P(x)$ — форма от $x/$.
$A = \{x|P(x)\}$
$x^2 - 1 = 0$
$A = \{1, -1\} = \{x|x^2 - 1 = 0\}$

2.1.2 Равенство

$\{1, 2\} = \{2, 1, 1, 2, 2, 1\}$

2.1.3 Подмножества

$A \subseteq B \Rightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$
$A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$
$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B, B \subseteq A$

2.1.4 Примеры

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$
Пусть $A = \{1,2\}, B = \{\{1,2\},3\}, C = \{1,2,3\}$
$A \nsubseteq B$

2.1.5 Размер множества

$m(A) = |A|$ — количество элементов множества
$\emptyset$ — пустое множество, $|\emptyset| = 0$

2.1.6 Множество-степень

$P(A)$ — множество-степень — множество всех подмножеств A
Например:
$A = \{1,2,3\}$
$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\,\{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{3,1\}, A\}$
$|P(A)| = 2^{|A|}$

2.1.7 Абсолютное (универсальное) множество

Универсальное множество — U — множество всех подмножеств

2.1.8 Операции

1. Объединение. $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$
2. Пересечение. $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$
3. Относительное дополнение.
   $A \setminus B = \{x | x \in B \wedge x \notin B\}$
4. Симметрическая разность. $A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
5. Отрицание. $\overline{A} = \{x | x \notin A\}$

Пример:
Пусть $A \subseteq B$
Тогда:

- $A \cap B = A$
- $A \cup B = B$
- $A \setminus B = \emptyset$

2.1.9 Примеры

Пусть $A = [5; 9), B = [6; 10), C = [4; 8)$
$A \cup B = [5; 10)$
$A \cap C = [5; 8)$
$\overline{B} = (-\infty; 6) \cup [10; +\infty)$
$C \setminus A = \emptyset$
$B \oplus C = [4; 6) \cup [8; 10)$
$\overline{A} \setminus (B \cup \overline{C}) = (4; 9]$
$\overline{(B \setminus A)} \cup \overline{(C \setminus B)} = \mathbb{R}$

2.1.10 Свойства

1. Коммутативность. $A \cup B = B \cup A$
2. Ассоциативность. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
3. Дистрибутивность. $A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. Идемпотентность. $A \cup A = A$
5. Закон Де-Моргана. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
6. Поглощение. $A \cup (A \cap B) = A$
7. Расщепление. $A = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$
8. $\overline{\overline{A}} = A$

2.1.11 Функция ψ

$A \subseteq U, A \to \psi(x) : U \to \{0, 1\}$
$\psi_A(x) = \begin{cases} 1, \text{если} x \in A \\ 0, \text{если} x \notin A \end{cases}$

1. $\psi_{A \cap B} = \psi_A \psi_B$
2. $\psi_{A \cup B} = \psi_A + \psi_B - \psi_A \psi_B$

3. $\psi_{A\oplus B} = \psi_A + \psi_B - 2\psi_A\psi_B$
   Заметим, что $\psi_A^2 = \psi_A$, тогда $\psi_{A\oplus B} = (\psi_A - \psi_B)^2 = |\psi_A - \psi_B|$

4. $\psi_{\overline{A}} = 1 - \psi_A$

5. $\psi_{A\setminus B} = \psi_A - \psi_A\psi_B$

2.1.12 Табличный метод

ψ_A	ψ_B	$\psi_{A\cap B}$	$\psi_{A\cup B}$	$\psi_{\overline{A}}$	$\psi_{A\setminus B}$	$\psi_{A\oplus B}$
1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	0	1	0	0

Пример:
$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

ψ_A	ψ_B	ψ_C	$\psi_{B\setminus C}$	$\psi_{A\setminus(B\setminus C)}$	$\psi_{A\setminus B}$	$\psi_{A\cap C}$	$\psi_{\cup}$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	0	1	0	1	1

2.1.13 Доказательство утверждением

Условия:

1. $A \subseteq B$

2. $A \cap B = A$

3. $A \cup B = A$

эквивалентны.

<u>Доказательство $1 \Rightarrow 2$:</u>

Дано: $A \subseteq B$
Доказать: $A \cap B = A$

1. $A \cap B \subseteq A$
   Пусть $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$

2. $A \subseteq A \cap B$
   Пусть $x \in A \overset{\text{по усл}}{\Rightarrow} x \in B \Rightarrow x \in A \cap B$

<u>Доказательство 2 ⇒ 3:</u>
Дано: $A \cap B = A$
Доказать: $A \cup B = B$
$A \cup B = (A \cap B) \cup B = B$
<u>Доказательство 3 ⇒ 1:</u>
Дано: $A \cup B = B$
Доказать: $A \subseteq B$
От противного:
Предположим $A \nsubseteq B \Rightarrow \exists x \in A \land x \notin B$
Так как $x \in A \Rightarrow x \in A \cap B \overset{\text{по усл}}{\Rightarrow} x \in B$ — противоречие
Следовательно, $A \subseteq B$

2.1.14 ДЗ

Лаврова & Максимов: Часть I, ¶ 1, №11, 12, 14

3 Бинарные отношения

$\rho \subseteq A \times B$
$A = B = X$
$\langle x, y \rangle \in \rho \doteq x\rho y$

3.1 Свойства

Бинарное отношение ρ, заданное на множестве X, называется:

1. **Рефлексивным** если $\forall x \in X, x\rho x$
   Примеры: $x = x$, $x \parallel x$

2. **Симметричным** если $\forall x, y \in X, x\rho y \Rightarrow y\rho x$
   Примеры: $x = x$, $x \perp x$

3. **Антисимметричным** если $\forall x, y \in X, x\rho y \land y\rho x \Rightarrow x = y$
   Примеры: $x \geq y$, $x \leq y$, $x > y$, $X \subseteq Y$

4. **Транзитивным** если $\forall x, y, z \in X, x\rho y \land y\rho z \Rightarrow x\rho z$
   Примеры: $x = y \land y = z$, $x \parallel y \land y \parallel z$

5. **Ассимметричным** если $\forall x, y \in X, x\rho y \Rightarrow \overline{y\rho x}$

3.2 Специальные бинарные отношения

3.2.1 Отношение эквивалентности

1. Рефлексивно
2. Симметрично
3. Транзитивно

Пример:

- $x = x$
- $x = y \Rightarrow y = x$
- $x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z$

3.2.2 Отношение (частичного) порядка

Частично упорядоченное множество — множество, на котором задано отношение частичного порядка.

1. Рефлексивно
2. Антисимметрично
3. Транзитивно

Пример:

- $x \leq x$
- $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$
- $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

Утверждение:
Пусть ρ — эквивалентнсть на X
Тогда ρ:

1. Задает на X разбиение на классы эквивалентности.
2. Если на X задано разбиение, то отношение ρ, заданное так, что $x \rho y \Leftrightarrow x$ и $y \in$ одном подмножестве

3.3 Разбиение

$A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, так что:

1. $\forall i, j \in [1; n], i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$
2. $\forall i \in [1; n], A_i \neq \emptyset$

Разбиение A — $P(A) = \{A_1, A_2 \ldots A_n\}$

Наибольший элемент: элемент $a \in X$ — наибольший, если $\forall y \in X : a \leq y$

Максимальный элемент: элемент $a \in X$ — максимальный, если $\nexists y \in X : a \lessapprox y$

Наименьший элемент: элемент $a \in X$ — наименьший, если $\forall y \in X : a \geq y$

Минимальный элемент: элемент $a \in X$ — минимальный, если $\nexists y \in X : a \gtrapprox y$

Два частично упорядоченных множества X и Y называются **изоморфными**, если существует биекция

№13(б)

$$A \subseteq B \cup C \Leftrightarrow A \cap \overline{B} \subseteq C$$

Дано:

$$A \subseteq B \cup C$$

Доказать:

$$A \cap \overline{B} \subseteq C$$

Доказательство:

$$\text{let } x \in A \cap \overline{B} \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B$$

$$x \in a \overset{\text{усл}}{\Rightarrow} x \in B \cup C \Rightarrow x \in B \vee x \in C$$

$$\begin{cases} x \in B \vee x \in C \\ x \notin B \end{cases} \Rightarrow x \in C$$

Дано:

$$A \cap \overline{B} \subseteq C$$

Доказать:

$$A \subseteq B \cup C$$

Доказательство:

$$\text{let } x \in A$$
$$\text{if } x \in B \Rightarrow x \in B \cup C$$
$$\text{if } x \notin B \Rightarrow x \in A \cap \overline{B} \overset{\text{усл}}{\Rightarrow} x \in C \Rightarrow x \in B \cup C$$

3.4 Метод доказательства критериев

$$A \subseteq B \cup C \Leftrightarrow A \cap \overline{B} \subseteq C$$
$$A \setminus (B \cup C) = \emptyset \Leftrightarrow (A \cap \overline{B}) \setminus C = \emptyset$$
$$\psi_{A \setminus (B \cup C)} = 0 \Leftrightarrow \psi_{(A \cap \overline{B}) \setminus C} = 0$$
$$\psi_{A \setminus (B \cup C)} = \psi_{(A \cap \overline{B}) \setminus C}$$