

Дискретная математика

Илья Ковалев

2024 год

1 Информация

Введение в авиационную и ракетно-космическую технику Проф – Максим Юрьевич

2 Организация проекта

1. Команда — 3/4 человека в пределах группы (до 16.09). Состав:
 - Тим лид
 - Математик/физик
 - Программист
 - Спикер (представление и оформление результатов)
2. Тема проекта
3. Физическая модель — подобрать законы, удовлетворяющие задаче
4. Математическая модель — уравнения
5. Програмная реализация
6. Валидация — Kerbal Space Program
7. Представление — текстовый отчет, видео-отчет, презентация + доклад на 7 минут.
8. Сдача — 15/16.12

3 Механика

Механика:

- **Как?** — кинематика
- **Почему?** — динамика
- **Равновесие?** — статика

3.1 Движение

Движение:

1. относительно
2. продолжительно во времени

Материальная точка — тело, размером и формой которого можно пренебречь в пределах данной задачи.

Поступательное движение — движение, при котором траектории всех точки параллельны друг другу.

При рассмотрении материальной точки, все движение является поступательным.

3.2 Уравнения движения

$\vec{r}(t)$ — закон движения

$$\vec{r}(t = t_0) = \vec{r}_0$$

$$\vec{v} = \vec{r}'_t = \dot{\vec{r}}$$

Δx — приращение аргумента

Δy — приращение функции

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = y' dx$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}}$$

3.3 Производные

В декартовой системе

$$dS = dx dy$$

$$dV = dx dy dz$$

В сферической системе

$$b = r d\theta$$

$$a = r \sin \theta d\phi$$

$$c = dr$$

$$dS = ab = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$dV = abc = dS \cdot dr$$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\pi r^2 \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} 1 d\phi = \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} d\theta = r^2 \cdot 2\pi \cdot 2 \Rightarrow \\ S &= 4\pi r^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr = \\ &= \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r^2 dr \Rightarrow \\ V &= \frac{4}{3}\pi R^3 \end{aligned}$$

В полярной системе

$$\vec{r} \rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t)$$

$$\vec{v} \rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} = (r \cos \phi)'_t = \dot{r} \cos \phi + r(\cos \phi)'_t = \dot{r} \cos \phi + r \sin \phi \cdot \dot{\phi} \\ v_y = \dot{y} = (r \sin \phi)'_t = \dot{r} \sin \phi + r(\sin \phi)'_t = \dot{r} \sin \phi + r \cos \phi \cdot \dot{\phi} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\Delta t &\rightarrow 0 \\ v_1 &= v_2 = v \\ \vec{a} &= \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \\ \frac{R}{v} = \frac{S}{\Delta v} &\Rightarrow \frac{R}{v} = \frac{v}{a} \Rightarrow a_n = \frac{v^2}{R}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_\tau &= \frac{d|\vec{v}|}{dt} \\ \vec{a} &= \vec{a}_n + \vec{a}_\tau\end{aligned}$$

Полное ускорение — сумма нормального (a_n) и тангенсального (a_τ)

$$\begin{aligned}\omega = \dot{\phi} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta t} \\ \beta = \dot{\omega} = \ddot{\phi} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t}\end{aligned}$$

3.4 Векторное произведение

Скалярное произведение

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Пример: работа

$$A = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$$

Векторное произведение

$$\vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a} \times \vec{b}]$$

Свойства:

$$\begin{aligned}|\vec{a} \times \vec{b}| &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) \\ \vec{a} \times \vec{b} &= -[\vec{a} \times \vec{b}]\end{aligned}$$