Математический Анализ

Илья Ковалев

2024 год

1 Учебники

- Зорич Владимир Антонович — математический анализ
- Фихтенгольц — Основы математического анализа
- Димедович — Сборник задач по математическому анализу

2 Элементы теории множеств

Множество — набор элементов.
Пустое множество — $\emptyset$.
Универсальное множество — U — элементов рассматриевомого типа.

3 Операции над множествами

3.1 Принадлежность

$x \in A$ — x принадлежит A

3.2 Подмножество

$A \subset B$ если $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$

3.3 Пересечение

$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$

3.4 Объединение

$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$

3.5 Разность

$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$

3.6 Дополнение

$\overline{A} = U \setminus A = \{x : x \notin A\}$

4 Логические высказывания

Логическое высказывание — повествовательное предлжение,
про которое можно сказать, истинно оно или ложно.

Предикат — утверждение, зависящие от переменной (переменных), превращающаяся в логическое высказывание при подстановке вместо переменной (переменных) ее значения.

Область истинности предиката — множество значений переменной (переменных),
при которых этот предикат превращается в истинное высказывание.

5 Операции над лог. высказываниями

5.1 Отрицание

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

6 Область существования и определения функции

6.1

$$y = \sqrt{1+x}$$
$$1 + x \geq 0$$
$$x \geq -1$$
$$x \in [-1; +\infty)$$

6.2

$$y = \sqrt{2 + x - x^2}$$
$$2 + x - x^2 \geq 0$$
$$x^2 - x - 2 \leq 0$$
$$(x-2)(x+1) \leq 0$$
$$x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$$

6.3

$$y = \lg \frac{x^2 - 3x + 2}{x+1}$$
$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x+1} > 0$$
$$\frac{(x-2)(x-1)}{x+1} > 0$$
$$x \in (-1; 1) \cup (2; +\infty)$$

6.4

$$y = \sqrt{sin2x}$$
$$sin2x \geq 0$$
$$x \in [\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z}]$$

7 Четность и нечетность

7.1

$$f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$$
$$f(-x) = \frac{a^{-x} + a^x}{2}$$
$$f(x) = f(-x)$$

функция четная

7.2

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^2}$$
$$f(-x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$$
$$f(x) = f(-x)$$

функция четная

7.3

$$f(x) = \lg\frac{1+x}{1-x}$$
$$f(-x) = \lg\frac{1-x}{1+x} = -\lg\frac{1+x}{1-x}$$
$$f(x) = -f(-x)$$

функция нечетная

8 Периодичность

Период — T

8.1

$$f(x) = 10 \sin 3x$$
$$\sin \alpha : T = 2\pi$$
$$f(x) : T = \frac{2\pi}{3}$$

8.2

$$f(x) = \alpha \sin \lambda x + \beta \cos \lambda x$$
$$T = \frac{2\pi}{\lambda}$$

9 Графики

9.1 Парабола

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

9.2 Кубическая парабола

$$y = a(x - x_0)^3 + y_0$$

9.3 Гипербола

$$y = \frac{a}{x - x_0} + y_0$$

9.4 ДЗ

Демидович: №153, 154, 157, 165, 254, 255

10 Бинарные отношения

10.1 Отношение эквивалентности

1. Рефлексивно

2. Симметрично

3. Транзитивно

10.2 Отношение частичного порядка

1. Рефлексивно

2. Антисимметрично

3. Транзитивно

10.3 Отношение линейного порядка

1. Антирефлексивно

2. Антисимметрично

3. Транзитивно

4. Задано для каждой пары элементов можества

11 Аксиоматика действительных чисел

Действительными числами называется множество $\mathbb{R}$, над элементами которого можно совершать операции сложения и умножения, между которыми установлено отношение линейного порядка, для которых выполнено свойство полноты, подчиняющимися следующему набору аксиом:

11.1 Аксиомы сложения

Сложение: $a + b = c \in \mathbb{R}$

1. **Существование нуля**: $\exists 0, \forall a \in \mathbb{R} : a + 0 = 0 + a = a$
2. **Существование противоположного элемента**: $\forall a \in \mathbb{R}, \exists {-a} : a + (-a) = 0$
3. **Ассоциативность**: $a + (b + c) = (a + b) + c$
4. **Коммутативность**: $a + b = b + a$

Группа — объект, удовлетворяющий аксиомам 1-3
Абелева группа — объект, удовлетворяющий аксиомам 1-4

11.2 Аксиомы умножения

Умножение: $a * b = c \in \mathbb{R}$

1. **Существование единицы**: $\exists 1, \forall a \in \mathbb{R} : 1 * a = a * 1 = a$
2. **Существование обратного элемента**: $\forall a \neq 0 \in \mathbb{R}, \exists a^{-1} : a * a^{-1} = 1$
3. **Ассоциотивность**: $a * (b * c) = (a * b) * c$
4. **Коммутативность**: $a * b = b * a$

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ — абелева группа по умножению
Поле — алгебраический объект с 2 бинарными операциями, подчиняющийся 8 аксиомам.

11.3 Аксиома связи сложения и умножения

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a + b) * c = a * c + b * c$$

11.4 Отношение порядка

На $\mathbb{R}$ существует отношение $\geq$, подчиняющееся следущим аксиомам:

1. **Рефлексивность**: $a \geq a$
2. **Антисимметричность**: $a \geq b \land b \geq a \Rightarrow a = b$
3. **Транзитивность**: $a \geq b \land b \geq c \Rightarrow a \geq c$
4. **Аксиома, определяющая что порядок — линейный**:
   $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \geq b \lor b \geq a$

Замечание:

$$a \geq b \Rightarrow b \geq a$$

$$a \geq b \land a \neq b \Rightarrow a > b$$

11.5 Аксиома связи сложения и порядка

$$a \geq b \Rightarrow a + c \geq b + c$$

11.6 Аксиома связи умножения и порядка

$$a \geq 0 \land b \geq 0 \Rightarrow a * b \geq 0$$

11.7 Аксиома полноты

Пусть U, W — такие множества, что $\forall x \in U, y \in W : x \leq y$
Тогда $\exists c \in \mathbb{R} : x \leq c \leq y$

12 Альтернативные зависимости

12.1 Полярная система координат

r — расстояние от начала координат
ϕ — угол от оси Ox против часовой стрелки

Примеры:

1. Прямая $y = 1$
$$r = \frac{1}{sin\phi}$$

2. Окружность $(x-1)^2 + y^2 = 1$
$$r = 2cos\phi$$

12.2 Параметрическая

$$y = \phi(t)$$
$$x = \psi(t)$$

Примеры:

1. Окружность $x^2 + y^2 = 1$
$$\begin{cases} x = cos(t) \\ y = sin(t) \end{cases}$$

2. Отрезок $x + y = 2, x \geq 0, y \geq 0$
$$\begin{cases} x = 2cos^2t \\ y = 2sin^2t \end{cases}$$

12.3 ДЗ

№№

- 369(а, б, ж)
- 371(в, д, ж)

12.4 Натуральные числа

Индуктивное множество — множество, обладающие тем свойством, что наряду с элементом a, ему принадлежит элемент $a + 1$.

12.4.1 Определения

Множество **натуральных чисел** — минимальное индуктивное множество, содержащее единицу. То есть пересечение всех индуктивных множеств,
содержащих единицу.

$$\mathbb{N} = \bigcap M : 1 \in M \land (x \in M \Rightarrow (x+1) \in M)$$

Множество A называется **ограниченным сверху**, если $\exists b \in \mathbb{R} : \forall a \in A, a \leq b$.

Тогда b — **мажората** A.

Множество A называется **ограниченным снизу**, если $\exists c \in \mathbb{R} : \forall a \in A, a \geq c$.

Тогда c — **минората** A.

d — **максималный элемент** множества A, если $d \in A \land \forall a \in A : a \leq d$.

e — **минимальный элемент** множества A, если $e \in A \land \forall a \in A : a \geq e$.

Точная верхняя грань (супремум) множества A — наименьшая можоранта A

$\sup A$ — супремум A

Любое ограниченное сверху множество имеет супремум.

Доказательство:

$$B = \{b \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A, b \geq a\}$$

$$\forall a \in A, b \in B : a \leq b \overset{A16}{\Rightarrow}$$

$$\overset{A16}{\Rightarrow} \exists c \in \mathbb{R} : \forall a \in A, b \in B \Rightarrow a \leq c \leq b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c \overset{\triangle}{=} \sup A$$

Точная нижняя грань (инфимум) множества A — наибольшая минората A

$\inf A$ — инфимум A

Любое ограниченное снизу множество имеет инфимум.

Теорема:

$$\forall x \in \mathbb{R}, x > 0 \exists n \in \mathbb{N} : n - 1 < x \leq n$$

Принцип Архимеда

$$\forall h > 0 \forall x \in \mathbb{R}, x > 0 \exists n \in \mathbb{N} : (n-1)h < x \leq nh$$

13 Пределы, последовательности

13.1 Последовательности

Последовательность — отображение $\mathbb{N}$ в множество любой природы.

Числовая последовательность — отображение $\mathbb{N}$ в $\mathbb{R}$.

$$\{a_n\}, a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

Последовательность называется **ограниченной**, если множество ее значений ограниченно.

13.2 Покрытие

$$n \to I_n (I_n \text{ — отрезок действительной оси})$$
$$\{I_n\} : \forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} \subset I_n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \{I_n\}$$

Теорема:

Пусть $\{U_n\}, n \in \mathbb{N}$ — система вложенных отрезков.

Тогда $\exists c \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : c \in U_n$.

Кроме того, если $U_n = [a_n, b_n]$ и $\forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} : b_n - a_n < \epsilon$, то $\exists! c$

Покрытие B — система множеств $A_1, A_2, \dots A_n$, если $\forall x \in B, \exists n : x \in A_n$

Или

$$B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Теорема:

Из любого покрытия отрезка интервалами можно выделить конечное подпокрытие

13.3 Определение предела

$$\{x_n\}_{n=1,2...}$$
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$
$$\text{if } \forall\epsilon > 0 \exists N(\epsilon) :$$
$$|x_n - a| < \epsilon, n > N(\epsilon)$$

Теорема:
У любой последовательности может быть не более 1 предела
Доказательство:

$$\text{let } \exists lim_{n\to\infty} a_n = A_1 \wedge$$
$$\wedge \exists lim_{n\to\infty} a_n = A_2 \wedge A_1 < A_2$$
$$\text{let } \epsilon = \frac{A_2 - A_1}{3}$$
$$\exists N_1 : \forall n > N_1, |a_N - A_1| < \epsilon \Leftrightarrow A_1 - \epsilon < a_n < A_1 + \epsilon$$
$$\exists N_2 : \forall n > N_2, |a_N - A_2| < \epsilon \Leftrightarrow A_2 - \epsilon < a_n < A_2 + \epsilon$$
$$\text{let } N = maxN_1, N_2 : \forall n > N,$$
$$a_n < A_1 + \epsilon = A_1 + \frac{A_2 - A_1}{3} = \frac{2A_1 - A_2}{3} < \frac{A_1 + 2A_2}{3} = A_2 - \epsilon < a_n$$
$$a_n < a_n$$

Замечание:
Ограниченная последовательность может не иметь предела.

13.3.1 Пример

Доказать:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2x+3}{n+1} = 2$$
Доказательство:
$$|\frac{2n+3}{n+1} - 2| = |\frac{2n+3-2n-2}{n+1}| = |\frac{1}{n+1}| < \epsilon$$
$$n + 1 > \frac{1}{\epsilon}$$
$$n > \frac{1}{\epsilon} - 1$$
$$N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - 1$$

13.3.2 Бесконечные пределы

$$(\lim_{n\to\infty} a_n) = \infty \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall E > 0 \exists N(E) : \forall n > N : |a_n| > E)$$

$$(\lim_{n\to\infty} a_n) = -\infty \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall E > 0 \exists N(E) : \forall n > N : |a_n| < -E)$$

Бесконечно большая последовательность — последовательность, предел которой — $\pm\infty$.

Сходящаяся последовательность — последовательность, предел которой — конечное число.

Бесконечно малая последовательность — последовательность, предел которой равен нулю.

13.3.3 Критерий Коши

Утверждение:

$$lim_{n\to\infty} a_n = c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) : \forall n, m \in N, n > m > N : |a_n - a_m| < \epsilon$$

13.4 Геометрическая прогрессия

$$x_n = a \cdot q^{n-1}$$
$$\lim_{n\to\inf} = \frac{a}{1-q}$$

13.4.1 Примеры

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k-1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k - 1 =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \frac{(1+(n-1))(n-1)}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{2n^2} =$$
$$\frac{1}{2} + \lim_{n\to\infty} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(1+\frac{1}{n}) \cdot n(1+\frac{2}{n}) \cdot n(1+\frac{3}{n})}{n^3} =$$

$$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})(1+\frac{3}{n}) = 1$$