

# Дискретная математика

Илья Ковалев

2024 год

## 1 Информация

Введение в авиационную и ракетно-космическую технику Проф – Максим Юрьевич

## 2 Организация проекта

1. Команда — 3/4 человека в пределах группы (до 16.09). Состав:
  - Тим лид
  - Математик/физик
  - Программист
  - Спикер (представление и оформление результатов)
2. Тема проекта
3. Физическая модель — подобрать законы, удовлетворяющие задаче
4. Математическая модель — уравнения
5. Програмная реализация
6. Валидация — Kerbal Space Program
7. Представление — текстовый отчет, видео-отчет, презентация + доклад на 7 минут.
8. Сдача — 15/16.12

## 3 Механика

### Механика:

- **Как?** — кинематика
- **Почему?** — динамика
- **Равновесие?** — статика

### 3.1 Движение

#### Движение:

1. относительно
2. продолжительно во времени

**Материальная точка** — тело, размером и формой которого можно пренебречь в пределах данной задачи.

**Поступательное движение** — движение, при котором траектории всех точки параллельны друг другу.

При рассмотрении материальной точки, все движение является поступательным.

### 3.2 Уравнения движения

$\vec{r}(t)$  — закон движения

$$\vec{r}(t = t_0) = \vec{r}_0$$

$$\vec{v} = \vec{r}'_t = \dot{\vec{r}}$$

$\Delta x$  — приращение аргумента

$\Delta y$  — приращение функции

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = y' dx$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}}$$

### 3.3 Производные

В декартовой системе

$$dS = dx dy$$

$$dV = dx dy dz$$

**В сферической системе**

$$b = r d\theta$$

$$a = r \sin \theta d\phi$$

$$c = dr$$

$$dS = ab = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$dV = abc = dS \cdot dr$$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\pi r^2 \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} 1 d\phi = \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} d\theta = r^2 \cdot 2\pi \cdot 2 \Rightarrow \\ S &= 4\pi r^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr = \\ &= \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r^2 dr \Rightarrow \\ V &= \frac{4}{3}\pi R^3 \end{aligned}$$

**В полярной системе**

$$\vec{r} \rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t)$$

$$\vec{v} \rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} = (r \cos \phi)'_t = \dot{r} \cos \phi + r(\cos \phi)'_t = \dot{r} \cos \phi + r \sin \phi \cdot \dot{\phi} \\ v_y = \dot{y} = (r \sin \phi)'_t = \dot{r} \sin \phi + r(\sin \phi)'_t = \dot{r} \sin \phi + r \cos \phi \cdot \dot{\phi} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\Delta t &\rightarrow 0 \\ v_1 &= v_2 = v \\ \vec{a} &= \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \\ \frac{R}{v} = \frac{S}{\Delta v} &\Rightarrow \frac{R}{v} = \frac{v}{a} \Rightarrow a_n = \frac{v^2}{R}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_\tau &= \frac{d|\vec{v}|}{dt} \\ \vec{a} &= \vec{a}_n + \vec{a}_\tau\end{aligned}$$

Полное ускорение — сумма нормального ( $a_n$ ) и тангенсального ( $a_\tau$ )

$$\begin{aligned}\omega = \dot{\phi} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta t} \\ \beta = \dot{\omega} = \ddot{\phi} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t}\end{aligned}$$

### 3.4 Векторное произведение

#### Скалярное произведение

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Пример: работа

$$A = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$$

#### Векторное произведение

$$\vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a} \times \vec{b}]$$

Свойства:

$$\begin{aligned}|\vec{a} \times \vec{b}| &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) \\ \vec{a} \times \vec{b} &= -[\vec{a} \times \vec{b}]\end{aligned}$$

## 4 Динамика

В динамике есть материальная точка

### 4.1 Силы

1. Контактные
2. Полевые

### 4.2 Законы Ньютона

1.

$$\sum \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$$

2.

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m}$$
$$m\vec{a} = \sum \vec{F}$$

3. При применении силы  $F_{12}$ , всегда есть такая сила  $F_{21}$ , что:

- Силы равны по модулю  $|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}|$
- Противоположны по направлению  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$
- Лежат на одной прямой
- Имеют одну природу

### 4.3 Смыслы массы

- Инертный
- Гравитационный
- $mc^2$

## 4.4 Интегрирование

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow d\vec{v} = \vec{a}(t)dt$$

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t)dt + C_1$$

$$C_1 = \vec{v}(t=0) = \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$$

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)dt + C_2$$

$$C_2 = \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$$

$$\int_{v_0}^{v(t)} d\vec{v} = \int_{t_0}^t \vec{a}(t)dt \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \vec{v}(t) = v_0 + \int_{t_0}^t \vec{a}(t)dt \\ \vec{r}(t) = r_0 + \int_{t_0}^t \vec{v}(t)dt \end{cases}$$