# Аналитическая геометрия

Илья Ковалев

18 ноября 2024

# 1 Прямая в плоскости

## 1.1 Общее уравнение прямой

Прямая $l$ на плоскости $Oxy$

$$\begin{cases} M_0(x,y) \in l \\ \vec{N} = \{A,B\} \perp l \end{cases} \Rightarrow \forall M(x,y) \in l : \vec{M_0M} \perp \vec{N} \Leftrightarrow \vec{N} \cdot \vec{M_0M} = 0$$

## 1.2 Параметрическое и каноническое уравнения $l \subset Oxy$

$$\begin{cases} M_0(x_0,y_0) \in l \\ M(x,y) \\ \vec{q} = \{m,n\} \parallel l \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall M(x,y) \in l : \vec{M_0M} \parallel \vec{q} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} : \vec{M_0M} = t\vec{q} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = mt \\ y - y_0 = nt \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n(x - x_0) - m(y - y_0) = 0$$

### 1.3 Прямая через 2 точки

$$\begin{cases} M_1(x_1, y_1) \in l \\ M_2(x_2, y_2) \in l \end{cases} \Rightarrow \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

### 1.4 Расстояние от точки до прямой

$$\begin{cases} D(x_d, y_d) \\ l : Ax + By + C = 0 \end{cases} \Rightarrow \rho = \frac{|Ax_d + By_d + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

## 2 Плоскость в пространстве

### 2.1 Общее уравнение плоскости

$$\begin{cases} M_0(x_0, y_0, z_0) \in P \\ \vec{N} = \{A, B, C\} \perp P \end{cases} \Rightarrow \forall M(x, y, z) \in P : \vec{M_0 M} \perp \vec{N} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

### 2.2 Компланарное уравнение

$$\begin{cases} M(x_0, y_0, z_0) \in P \\ \vec{p} \parallel P \\ \vec{q} \parallel P \\ \vec{p} \nparallel \vec{q} \end{cases} \Rightarrow \forall M(x, y, z) \in P : \vec{M_0 M}, \vec{p}, \vec{q} - \text{компланарны} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ p_x & p_y & p_z \\ q_x & q_y & q_z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x - x_0)A_{11} + (y - y_0)A_{12} + (z - z_0)A_{13} = 0$$

## 2.3 Через 3 точки

$$\begin{cases} M_1(x_1, y_1, z_1) \in P \\ M_2(x_2, y_2, z_2) \in P \\ M_3(x_3, y_3, z_3) \in P \\ M_1 \notin M_1\vec{M}_2 \\ M_2 \notin M_2\vec{M}_3 \\ M_3 \notin M_3\vec{M}_1 \end{cases} \Leftrightarrow P : \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

## 2.4 Расстояние от точки до плоскости

$$\begin{cases} P(x_0, y_0, z_0) \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases} \Rightarrow \rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

## 2.5 Взаимное расположение 2 плоскостей

$$\begin{cases} P1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ P2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

### 2.5.1 Параллельные

$$P_1 \parallel P_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

$$\rho(P_1 \parallel P_2) = \rho(M_1 \in P_1, P_2) = \frac{|D_2C_1 - D_1C_2|}{|C_1|\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

### 2.5.2 Пересекающиеся

$$P_1 \nparallel P_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \vee \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$

$$\alpha = \angle(P_1, P_2) \in (0; \frac{\pi}{2}] : \cos\alpha = |\cos\phi| = \frac{|\vec{N_1} \cdot \vec{N_2}|}{|\vec{N_1}||\vec{N_2}|}$$

# 3 Прямая в пространстве

## 3.1 Общее уравнение

Пересечение плоскостей

$$L: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \vee \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \end{cases}$$

$$\vec{N_1} = \{A_1, B_1, C_1\}$$

$$\vec{N_2} = \{A_2, B_2, C_2\}$$

## 3.2 Параметрическое и каноническое

$$\begin{cases} M_0(x_0, y_0, z_0) \in L \\ \vec{q} = \{m, n, p\} \parallel L \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = mt \\ y - y_0 = nt \\ z - z_0 = pt \\ m^2 + n^2 + p^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

$$\vec{q} = \vec{N_1} \times \vec{N_2}$$

$$M_0: \begin{cases} A_1x_0 \cdots = 0 \\ A_2x_0 \cdots = 0 \\ x_0 = 0 \vee y_0 = 0 \vee z_0 = 0 \end{cases} \rightarrow M_0(x_0, y_0, z_0)$$

## 3.3 Расстояние от точки до прямой

$$\begin{cases} M_1(x_1, y_1, z_1) \\ L: t = \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \end{cases} \Rightarrow \rho(M_1, L) = \frac{|\vec{M_0 M_1} \times \vec{q}|}{|\vec{q}|}$$

## 3.4 Взаимное расположение 2 прямых

$$\begin{cases} L_1 : \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \\ L_2 : \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2} \end{cases}$$

### 3.4.1 Параллельные

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow L_1 \parallel L_2$$

$$\rho(L_1, L_2) = \rho(M_1 \in L_1, L_2) = \frac{|\vec{M_2M_1} \times \vec{q_2}|}{|\vec{q_2}|}$$

### 3.4.2 Непараллельные

$$\begin{cases} \frac{m_1}{m_2} \neq \frac{n_1}{n_2} \vee \frac{n_1}{n_2} \neq \frac{p_1}{p_2} \\ \rho(L_1, L_2) = \frac{|(\vec{M_1M_2}, \vec{q_1}, \vec{q_2})|}{|\vec{q_1} \times \vec{q_2}|} \end{cases}$$

$$\alpha = \angle(L_1, L_2) \in [0; \frac{\pi}{2}]$$

$$\cos\alpha = |\cos\phi| = \frac{|\vec{q_1} \cdot \vec{q_2}|}{|\vec{q_1}| \cdot |\vec{q_2}|}$$

$\rho(L_1, L_2) = 0$ — пересекающиеся
$\rho(L_1, L_2) \neq 0$ — скрещивающиеся

## 3.5 Взаимное расположение прямой и плоскости

$$\begin{cases} L : \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \\ P : Ax + By + Cz + D = 0 \to \vec{N} = \{A, B, C\} \perp P \end{cases}$$

### 3.5.1 Параллельные

$$L \parallel P \Leftrightarrow \vec{q} \perp \vec{N} \Leftrightarrow \vec{q} \cdot \vec{N} \Leftrightarrow Am + Bn + Cp = 0$$

### 3.5.2 Пересекающиеся

$$L \not\parallel P \Leftrightarrow Am + Bn + Cp \neq 0$$
$$\beta = \angle(L, P)$$
$$\sin\beta = |\cos\phi| = \frac{|\vec{N} \cdot \vec{q}|}{|\vec{N}| \cdot |\vec{q}|}$$
$$K = L \cap P : \begin{cases} \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} = t \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$