Математический Анализ

Илья Ковалев

2024 год

1 Учебники

- Зорич Владимир Антонович — математический анализ
- Фихтенгольц — Основы математического анализа
- Димедович — Сборник задач по математическому анализу

2 Элементы теории множеств

Множество — набор элементов.
Пустое множество — $\emptyset$.
Универсальное множество — U — элементов рассматриевомого типа.

3 Операции над множествами

3.1 Принадлежность

$x \in A$ — x принадлежит A

3.2 Подмножество

$A \subset B$ если $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$

3.3 Пересечение

$A \cap B = \{x : x \in A \land x \in B\}$

3.4 Объединение

$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$

3.5 Разность

$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$

3.6 Дополнение

$\overline{A} = U \setminus A = \{x : x \notin A\}$

4 Логические высказывания

Логическое высказывание — повествовательное предлжение,
про которое можно сказать, истинно оно или ложно.

Предикат — утверждение, зависящие от переменной (переменных), превращающаяся в логическое высказывание при подстановке вместо переменной (переменных) ее значения.

Область истинности предиката — множество значений переменной (переменных),
при которых этот предикат превращается в истинное высказывание.

5 Операции над лог. высказываниями

5.1 Отрицание

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

6 Область существования и определения функции

6.1

$$y = \sqrt{1+x}$$
$$1 + x \geq 0$$
$$x \geq -1$$
$$x \in [-1; +\infty)$$

6.2

$$y = \sqrt{2 + x - x^2}$$
$$2 + x - x^2 \geq 0$$
$$x^2 - x - 2 \leq 0$$
$$(x-2)(x+1) \leq 0$$
$$x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$$

6.3

$$y = \lg \frac{x^2 - 3x + 2}{x+1}$$
$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x+1} > 0$$
$$\frac{(x-2)(x-1)}{x+1} > 0$$
$$x \in (-1; 1) \cup (2; +\infty)$$

6.4

$$y = \sqrt{sin2x}$$
$$sin2x \geq 0$$
$$x \in [\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z}]$$

7 Четность и нечетность

7.1

$$f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$$
$$f(-x) = \frac{a^{-x} + a^x}{2}$$
$$f(x) = f(-x)$$

функция четная

7.2

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^2}$$
$$f(-x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$$
$$f(x) = f(-x)$$

функция четная

7.3

$$f(x) = \lg\frac{1+x}{1-x}$$
$$f(-x) = \lg\frac{1-x}{1+x} = -\lg\frac{1+x}{1-x}$$
$$f(x) = -f(-x)$$

функция нечетная

8 Периодичность

Период — T

8.1

$$f(x) = 10\sin 3x$$
$$\sin\alpha : T = 2\pi$$
$$f(x) : T = \frac{2\pi}{3}$$

8.2

$$f(x) = \alpha\sin\lambda x + \beta\cos\lambda x$$
$$T = \frac{2\pi}{\lambda}$$

9 Графики

9.1 Парабола

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

9.2 Кубическая парабола

$$y = a(x - x_0)^3 + y_0$$

9.3 Гипербола

$$y = \frac{a}{x - x_0} + y_0$$

10 Бинарные отношения

10.1 Отношение эквивалентности

1. Рефлексивно
2. Симметрично
3. Транзитивно

10.2 Отношение частичного порядка

1. Рефлексивно
2. Антисимметрично
3. Транзитивно

10.3 Отношение линейного порядка

1. Антирефлексивно
2. Антисимметрично
3. Транзитивно
4. Задано для каждой пары элементов можества

11 Аксиоматика действительных чисел

Действительными числами называется множество $\mathbb{R}$, над элементами которого можно совершать операции сложения и умножения, между которыми установлено отношение линейного порядка, для которых выполнено свойство полноты, подчиняющимися следующему набору аксиом:

11.1 Аксиомы сложения

Сложение: $a + b = c \in \mathbb{R}$

1. **Существование нуля**: $\exists 0, \forall a \in \mathbb{R} : a + 0 = 0 + a = a$
2. **Существование противоположного элемента**:
   $\forall a \in \mathbb{R}, \exists {-a} : a + (-a) = 0$
3. **Ассоциативность**: $a + (b + c) = (a + b) + c$
4. **Коммутативность**: $a + b = b + a$

Группа — объект, удовлетворяющий аксиомам 1-3
Абелева группа — объект, удовлетворяющий аксиомам 1-4

11.2 Аксиомы умножения

Умножение: $a * b = c \in \mathbb{R}$

1. **Существование единицы**: $\exists 1, \forall a \in \mathbb{R} : 1 * a = a * 1 = a$
2. **Существование обратного элемента**:
   $\forall a \neq 0 \in \mathbb{R}, \exists a^{-1} : a * a^{-1} = 1$
3. **Ассоциотивность**: $a * (b * c) = (a * b) * c$
4. **Коммутативность**: $a * b = b * a$

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ — абелева группа по умножению
Поле — алгебраический объект с 2 бинарными операциями, подчиняющийся 8 аксиомам.

11.3 Аксиома связи сложения и умножения

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a + b) * c = a * c + b * c$$

11.4 Отношение порядка

На $\mathbb{R}$ существует отношение $\geq$, подчиняющееся следущим аксиомам:

1. **Рефлексивность**: $a \geq a$
2. **Антисимметричность**: $a \geq b \wedge b \geq a \Rightarrow a = b$
3. **Транзитивность**: $a \geq b \wedge b \geq c \Rightarrow a \geq c$
4. **Аксиома, определяющая что порядок — линейный**:
   $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \geq b \vee b \geq a$

Замечание:

$$a \geq b \Rightarrow b \geq a$$
$$a \geq b \wedge a \neq b \Rightarrow a > b$$

11.5 Аксиома связи сложения и порядка

$$a \geq b \Rightarrow a + c \geq b + c$$

11.6 Аксиома связи умножения и порядка

$$a \geq 0 \wedge b \geq 0 \Rightarrow a * b \geq 0$$

11.7 Аксиома полноты

Пусть U, W — такие множества, что $\forall x \in U, y \in W : x \leq y$
Тогда $\exists c \in \mathbb{R} : x \leq c \leq y$

12 Альтернативные зависимости

12.1 Полярная система координат

r — расстояние от начала координат
ϕ — угол от оси Ox против часовой стрелки

Примеры:

1. Прямая $y = 1$

$$r = \frac{1}{sin\phi}$$

2. Окружность $(x-1)^2 + y^2 = 1$

$$r = 2cos\phi$$

12.2 Параметрическая

$$y = \phi(t)$$
$$x = \psi(t)$$

Примеры:

1. Окружность $x^2 + y^2 = 1$

$$\begin{cases} x = cos(t) \\ y = sin(t) \end{cases}$$

2. Отрезок $x + y = 2, x \geq 0, y \geq 0$

$$\begin{cases} x = 2cos^2 t \\ y = 2sin^2 t \end{cases}$$

13 Натуральные числа

Индуктивное множество — множество, обладающие тем свойством, что наряду с элементом a, ему принадлежит элемент $a + 1$.

13.1 Определения

Множество **натуральных чисел** — минимальное индуктивное множество, содержащее единицу. То есть пересечение всех индуктивных множеств,
содержащих единицу.

$$\mathbb{N} = \bigcap M : 1 \in M \land (x \in M \Rightarrow (x+1) \in M)$$

Множество A называется **ограниченным сверху**, если $\exists b \in \mathbb{R} : \forall a \in A, a \leq b$.

Тогда b — **мажората** A.

Множество A называется **ограниченным снизу**, если $\exists c \in \mathbb{R} : \forall a \in A, a \geq c$.

Тогда c — **минората** A.

d — **максималный элемент** множества A, если $d \in A \land \forall a \in A : a \leq d$.

e — **минимальный элемент** множества A, если $e \in A \land \forall a \in A : a \geq e$.

Точная верхняя грань (супремум) множества A — наименьшая можоранта A

$\sup A$ — супремум A

Любое ограниченное сверху множество имеет супремум.

Доказательство:

$$B = \{b \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A, b \geq a\}$$
$$\forall a \in A, b \in B : a \leq b \overset{A16}{\Rightarrow}$$
$$\overset{A16}{\Rightarrow} \exists c \in \mathbb{R} : \forall a \in A, b \in B \Rightarrow a \leq c \leq b \Rightarrow$$
$$\Rightarrow c \triangleq \sup A$$

Точная нижняя грань (инфимум) множества A — наибольшая минората A

$\inf A$ — инфимум A

Любое ограниченное снизу множество имеет инфимум.

Теорема:

$$\forall x \in \mathbb{R}, x > 0 \exists n \in \mathbb{N} : n - 1 < x \leq n$$

Принцип Архимеда

$$\forall h > 0 \forall x \in \mathbb{R}, x > 0 \exists n \in \mathbb{N} : (n-1)h < x \leq nh$$

14 Пределы, последовательности

14.1 Последовательности

Последовательность — отображение $\mathbb{N}$ в множество любой природы.

Числовая последовательность — отображение $\mathbb{N}$ в $\mathbb{R}$.

$$\{a_n\}, a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

Последовательность называется **ограниченной**, если множество ее значений ограниченно.

14.2 Покрытие

$$n \to I_n (I_n \text{ — отрезок действительной оси})$$
$$\{I_n\} : \forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} \subset I_n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \{I_n\}$$

Теорема:

Пусть $\{U_n\}, n \in \mathbb{N}$ — система вложенных отрезков.

Тогда $\exists c \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : c \in U_n$.

Кроме того, если $U_n = [a_n, b_n]$ и $\forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} : b_n - a_n < \epsilon$, то $\exists! c$

Покрытие B — система множеств $A_1, A_2, \dots A_n$, если $\forall x \in B, \exists n : x \in A_n$

Или

$$B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Теорема:

Из любого покрытия отрезка интервалами можно выделить конечное подпокрытие

14.3 Определение предела

$$\{x_n\}_{n=1,2\ldots}$$
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$
$$\text{if}\,\forall\epsilon > 0 \exists N(\epsilon) :$$
$$|x_n - a| < \epsilon, n > N(\epsilon)$$

Теорема:
У любой последовательности может быть не более 1 предела
Доказательство:

$$\text{let}\,\exists lim_{n\to\infty} a_n = A_1 \wedge$$
$$\wedge \exists lim_{n\to\infty} a_n = A_2 \wedge A_1 < A_2$$
$$\text{let}\,\epsilon = \frac{A_2 - A_1}{3}$$
$$\exists N_1 : \forall n > N_1, |a_N - A_1| < \epsilon \Leftrightarrow A_1 - \epsilon < a_n < A_1 + \epsilon$$
$$\exists N_2 : \forall n > N_2, |a_N - A_2| < \epsilon \Leftrightarrow A_2 - \epsilon < a_n < A_2 + \epsilon$$
$$\text{let}\,N = \max\{N_1, N_2\} : \forall n > N,$$
$$a_n < A_1 + \epsilon = A_1 + \frac{A_2 - A_1}{3} = \frac{2A_1 - A_2}{3} < \frac{A_1 + 2A_2}{3} = A_2 - \epsilon < a_n$$
$$a_n < a_n$$

Замечание:
Ограниченная последовательность может не иметь предела.

Пример:

Доказать:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2x+3}{n+1} = 2$$
Доказательство:
$$|\frac{2n+3}{n+1} - 2| = |\frac{2n+3-2n-2}{n+1}| = |\frac{1}{n+1}| < \epsilon$$
$$n + 1 > \frac{1}{\epsilon}$$
$$n > \frac{1}{\epsilon} - 1$$
$$N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - 1$$

14.3.1 Бесконечные пределы

$$(\lim_{n\to\infty} a_n) = \infty \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall E > 0 \exists N(E) : \forall n > N : |a_n| > E)$$

$$(\lim_{n\to\infty} a_n) = -\infty \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall E > 0 \exists N(E) : \forall n > N : |a_n| < -E)$$

Бесконечно большая последовательность — последовательность, предел которой — $\pm\infty$.

Сходящаяся последовательность — последовательность, предел которой — конечное число.

Бесконечно малая последовательность — последовательность, предел которой равен нулю.

14.3.2 Критерий Коши

14.4 Геометрическая прогрессия

$$x_n = a \cdot q^{n-1}$$
$$\lim_{n\to\inf} = \frac{a}{1-q}$$

Примеры:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k-1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k - 1 =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \frac{(1+(n-1))(n-1)}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{2n^2} =$$
$$\frac{1}{2} + \lim_{n\to\infty} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3} =$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(1+\frac{1}{n}) \cdot n(1+\frac{2}{n}) \cdot n(1+\frac{3}{n})}{n^3} =$$
$$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})(1+\frac{3}{n}) = 1$$

14.5 Фундаментальная последовательность. Критерий Коши

Последовательность $\{a_n\}$ называется **фундаментальной**, если

$$\forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) : \forall m > n > N : |a_m - a_n| < \epsilon$$

14.5.1 Критерий коши

Последовательность является фундаментальной $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ последовательность является сходящейся

Доказательство $1 \Rightarrow 2$:

$$\exists \lim_{n \to \infty} a_n = A, A \in \mathbb{R}$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) \forall n > N, n \in \mathbb{N} : |a_n - A| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) \forall m > N, m \in \mathbb{N} : |a_m - A| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$|a_n - a_m| = |a_n - A - (a_m - A)| \leq |a_n - A| + |a_m - A| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Доказательство $1 \Leftarrow 2$:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) : \forall m > n > N : |a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{3}$$

$$\text{let}\, x_n = \inf_{m \geq n} a_m$$

$$\text{let}\, y_n = \sup_{m \geq n} a_m$$

$$x_n \leq x_{n+1} \leq y_{n+1} \leq y_n$$

$\{[x_n, y_n]\}$ — система вложенных отрезков $\Rightarrow \exists c : \forall n \in \mathbb{N}, c \in [x_n, y_n]$

$$m > n$$

$$a_n - \frac{\epsilon}{3} < a_m < a_n + \frac{\epsilon}{3}$$

$$a_n - \frac{\epsilon}{3} \leq x_m \leq c \leq y_m \leq a_n + \frac{\epsilon}{3}$$

$$|a_n - c| \leq \frac{\epsilon}{3}$$

$$|a_m - a_n| < \frac{\epsilon}{3}$$

$$|x_m - a_n| \leq \frac{\epsilon}{3}$$

$$|y_m - a_n| \leq \frac{\epsilon}{3}$$

$$|a_m - c| \leq |a_m - a_n + a_n - c| \leq |a_m - a_n| + |a_n - c| \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon$$

14.6 Алгебраические свойства пределов

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A$$
$$\lim_{n\to\infty} b_n = B$$

14.6.1 Сложение

$$(\lim_{n\to\infty} a_n = A) \Leftrightarrow (\forall\epsilon > 0 \exists N_1(\epsilon) : \forall n > N_1, n \in \mathbb{N} : |a_n - A| < \frac{\epsilon}{2})$$
$$(\lim_{n\to\infty} b_n = B) \Leftrightarrow (\forall\epsilon > 0 \exists N_2(\epsilon) : \forall n > N_2, n \in \mathbb{N} : |b_n - B| < \frac{\epsilon}{2})$$
$$\text{let } N = \max\{N_1, N_2\}$$
$$\forall n > N : |a_n + b_n - (A + B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$$

14.6.2 Умножение

$$a_n \cdot b_n = (a_n - A + A)(b_n - B + B) =$$
$$= (a_n - A)(b_n - B) + A(b_n - B) + B(a_n - A) + AB$$
$$\forall\epsilon > 0 \exists N_1(\epsilon) : \forall n > N_1 : |a_n - A| < \epsilon$$
$$\forall\epsilon > 0 \exists N_2(\epsilon) : \forall n > N_2 : |b_n - B| < \epsilon$$
$$\forall\epsilon > 0 \exists N_3(\epsilon) : \forall n > N_3 : |b_n - B| < \frac{\epsilon}{3|A|}$$
$$\forall\epsilon > 0 \exists N_4(\epsilon) : \forall n > N_4 : |a_n - A| < \frac{\epsilon}{3|B|}$$
$$\text{let } N = \max\{N_1, N_2, N_3, N_4\}$$
$$\forall n > N : |a_n b_n - AB| \leq |a_n - A||b_n - B| + |A||b_n - B| + |B||a_n - A| <$$
$$< \epsilon^2 + |A|\frac{\epsilon}{3|A|} + |B|\frac{\epsilon}{3|B|} < 3 \cdot \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$
$$(\epsilon^2 < \frac{\epsilon}{3} \Leftarrow \epsilon < \frac{1}{3})$$

14.6.3 Деление

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B} = \frac{a_nB - b_nA}{b_nB} =$$
$$= \frac{(a_n - A)B - (b_n - B)A}{b_nB} = \frac{a_n - A}{b_n} - \frac{b_n - B}{b_n} \cdot \frac{A}{B}$$
$$\exists N_1 : \forall n > N_1 : |b_n| > \frac{B}{2}$$
$$\forall \epsilon > 0 \exists N_2 : \forall n > N_2 : |a_n - A| < \frac{\epsilon |B|}{4}$$
$$\forall \epsilon > 0 \exists N_3 : \forall n > N_3 : |b_n - B| < \frac{\epsilon |B|^2}{4|A|}$$
$$\text{let}\, N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$$
$$\forall n > N : |\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}| \leq \frac{|a_n - A|}{|b_n|} + \frac{|b_n - B|}{|b_n|} \cdot \frac{|A|}{|B|} <$$
$$< \frac{2\epsilon|B|}{4|B|} + \frac{2\epsilon|B|^2}{4|A||B|} \cdot \frac{|A|}{|B|} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

14.7 Принцип двух полицейских

$$\begin{cases} \exists \lim_{n\to\infty} a_n = A \\ \exists \lim_{n\to\infty} b_n = A \\ \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq c_n \leq b_n \end{cases} \Rightarrow \lim_{c\to\infty} c_n = A$$

14.8 Возрастающие и убывающие посл.

Последовательность $\{a_n\}$ называется **возрастающей**, если $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$

Последовательность $\{a_n\}$ называется **неубывающей**, если $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$

Последовательность $\{a_n\}$ называется **убывающей**, если $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$

Последовательность $\{a_n\}$ называется **невозрастающей**, если $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$

14.9 Теорема Вейерштрасса

Монотонная ограниченная последовательность имеет конечный предел.

Доказательство:

$$\text{let}\, a_n : \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n$$
$$\exists A : \forall n \in \mathbb{N} : a_n < A$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$
$$\exists c = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n : c - \epsilon < a_n \leq c$$
$$\forall m > n : c - \epsilon < a_n \leq a_m \leq c \overset{\triangle}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} a_n = c$$

14.9.1 Условие существования предела.

Для того, чтобы монотонная последовательность имела предел, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена.

15 Пределы функции

$$\lim_{n\to a} f(x) = A = \text{const} \vee \pm\infty \vee \neg\exists$$

Примеры:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} sinx = 1$$
$$\lim_{x\to\infty} sinx = \neg\exists$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+5x}{x+1} \overset{:x^2}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{5}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+0}{0+0} = \infty$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}} \overset{:x^2}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+0+0}{\sqrt{1+0}} = 2$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{x}+x^2}{x\sqrt{x}+x} \overset{:x^2}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}+1}{\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}} = \frac{1}{0} = \infty$$

15.1 Правило старшей степени

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\begin{cases}0, m<n\\ \infty, m>n\\ A, m=n\end{cases}$$

15.2 Неопределенность $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{(x-a)P'(x)}{(x-a)Q'(x)}=\frac{P'(x)}{Q'(x)}=A$$

15.3 Неопределенность $\infty-\infty$

$$\lim_{x\to a}[P(x)-Q(x)]=[\infty-\infty]\to\lim_{x\to a}\left[\frac{0}{0}\right]\dots$$

15.4 Иррациональность

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}&=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\\&=\{t=\sqrt{x}\}=\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{t^2-1}\end{aligned}$$

15.5 Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Пример:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\frac{1}{2}$$

15.6 Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$$

$$\lim_{x\to a} u(x)^{v(x)} = \begin{cases} A^B, \text{if} \lim_{x\to a} u(x) = A, \lim_{x\to a} v(x) = B \\ 0, \text{if} \mid \lim_{x\to a} u(x) \mid < 1, \lim_{x\to a} v(x) = \infty \\ \infty, \text{if} \mid \lim_{x\to a} u(x) \mid > 1, \lim_{x\to a} v(x) = \infty \end{cases}$$

15.7 Неопределенность 1^∞

$$\begin{cases} \lim_{x\to a} u(x) = 1 \\ \lim_{x\to a} v(x) = \infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to a} u(x)^{v(x)} = 1^\infty$$

$$\text{let}\, u(x) = 1 + \phi(x)$$

$$\lim_{x\to a}\left[(1+\phi(x))^{\frac{1}{\phi(x)}}\right]^{\phi(x)\cdot v(x)} = e^{\lim_{x\to a}\phi(x)\cdot v(x)}$$

Пример:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{x+3}\right)^{x+2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-4}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{-4}}\right]^{\frac{-4(x+2)}{x+3}} = e^{-4}$$

15.8 Натуральный логарифм

$$\lim_{x\to a}\ln f(x) = \ln\lim_{x\to a} f(x)$$

Пример:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \ln e = 1$$

16 Односторонние пределы

Стремление справа — $\lim_{x\to a^+}$
Стремление слева — $\lim_{x\to a^-}$

Примеры:

$$\lim_{x\to+0}\frac{|\sin x|}{x^{>0}}=1$$
$$\lim_{x\to-0}\frac{|\sin x|}{x^{<0}}=-1$$

$$\lim_{x\to2^+}\frac{x}{x-2}=-\infty$$
$$\lim_{x\to2^-}\frac{x}{x-2}=\infty$$

16.1 Точки разрыва

Точка разрыва a функции $f(x)$ — такая, что $\lim_{x\to a^+}f(x)=A\neq\lim_{x\to a^-}f(x)=B$

16.1.1 Порядки точек разрыва

1. $A=B=\mathrm{const}$
2. $\nexists A\vee\nexists B\vee A=\pm\infty\vee B=\pm\infty$

17 Сравнение бесконечно малых

$$f(x), g(x)$$
$$\lim_{x\to a} f(x) = 0$$
$$\lim_{x\to a} g(x) = 0$$
$$\text{if} \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = C = \text{const} \Rightarrow f(x) = O(g(x))$$
$$\text{if} \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Rightarrow f(x) = o(g(x))$$
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = C = \text{const} \neq 0 \Rightarrow f(x) \sim C \cdot x^n$$

Примеры:

$$x \to 0$$
$$f(x) = 1 - \cos x$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^n(1+\cos x)} = \frac{1}{2}$$
$$\begin{cases} C = \frac{1}{2} \\ n = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) \sim \frac{x^2}{2}$$

$$x \to 0$$
$$f(x) = \sqrt{x - \sqrt{x}}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x-\sqrt{x}}}{x^n} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt{\sqrt{x}+1}}{x^n} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{x} \cdot 1}{x^{\frac{1}{4}}} = 1$$
$$\begin{cases} C = 1 \\ n = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow f(x) \sim \sqrt[4]{x}$$

18 База

База — такой набор множеств $\mathbb{B}$, обладающий следующими свойствами:

1. $$\emptyset \notin \mathbb{B}$$

2. $$\forall B_1, B_2 \in \mathbb{B} \exists B_3 \in \mathbb{B} : B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$$

18.0.1 Примеры баз

1. База $x \to x_0$
$$B = (a, b) \setminus \{x_o\}, a < b$$

2. База $x \to \infty$
$$B = \mathbb{R} \setminus [a, b], a < 0 < b$$

3. База $x \to +\infty$
$$B = (a, +\infty)$$

4. База $x \to -\infty$
$$B = (-\infty, a)$$

5. База $x \to x_0^+$
$$B = (x_0, x_0 + a), a > 0$$

6. База $x \to x_0^-$
$$B = (x_0 - a, x_0), a > 0$$

18.0.2 Окрестность точки

$\mathrm{V}(A)$ — **окрестность точки** A

$$(\lim_{\mathbb{B}} f(x) = A) \overset{\triangle}{\Leftrightarrow} (\forall \mathrm{V}(A) \exists B \in \mathbb{B} : f(B) \subseteq \mathrm{V}(A))$$

$$(\lim_{x \to a} = A) \overset{\triangle}{\Leftrightarrow}$$
$$(\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 : \forall x \neq a : |x - a| < \delta, |f(x) - A| < \epsilon)$$

18.0.3 Свойства баз

Утверждение:

$$\exists \lim_{\mathbb{B}} f(x) = a$$
$$\exists \lim_{\mathbb{B}} g(x) = b$$
$$b > a$$

Доказать:

$$\exists B_1 \in \mathbb{B}, \forall x \in B_1 : f(x) < g(x)$$

Доказательство:

$$\text{let}\, \epsilon = \frac{b-a}{2}$$
$$\begin{cases} \exists B_2 \in \mathbb{B}, \forall x \in B_2 : |f(x) - a| < \epsilon \Rightarrow f(x) < a + \epsilon = \frac{a+b}{2} \\ \exists B_3 \in \mathbb{B}, \forall x \in B_3 : |g(x) - b| < \epsilon \Rightarrow g(x) > b - \epsilon = \frac{a+b}{2} \end{cases}$$
$$\text{let}\, B_1 = B_2 \cap B_3, B_1 \in \mathbb{B} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall x \in B_1 : f(x) < \frac{a+b}{2} < g(x)$$

Утверждение:

$$\exists \lim_{\mathbb{B}} f(x) = a$$
$$\exists \lim_{\mathbb{B}} g(x) = a$$
$$\exists B_1 \in \mathbb{B}, \forall x \in B_1 : f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

Доказать:

$$\exists \lim_{\mathbb{B}} h(x) = a$$

Доказательство:

$$\forall \epsilon > 0$$
$$\exists B_2 \in \mathbb{B}, \forall x \in B_2 : a - \epsilon < f(x)$$
$$\exists B_3 \in \mathbb{B}, \forall x \in B_3 : g(x) < a + \epsilon$$
$$\text{let}\, B_4 = B_1 \cap B_2 \cap B_3, B_4 \in \mathbb{B}, \forall x \in B_4 :$$
$$a - \epsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < a + \epsilon$$
$$a - \epsilon < h(x) < a + \epsilon \Rightarrow |h(x) - a| < \epsilon \Rightarrow \lim_{\mathbb{B}} h(x) = a$$

18.0.4 Критерий Коши существования придела функции

$$\omega(f, B) = \sup_{B} |f(x_1) - f(x_2)| \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

Утверждение:

$$\left(\exists \lim_{\mathbb{B}} f(x) = a \in \mathbb{R}\right) \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \exists B \in \mathbb{B}, \omega(f, B) < \epsilon)$$

19 Производная

$$f'(x) \triangleq \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

19.1 Производная сложной функции

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

19.2 Логарифмическая производная

$$(x^x)' = e^{x \ln x} \cdot (\ln x + x \cdot \frac{1}{x}) = (\ln x + 1)x^x$$
$$y' = y \cdot (lny)'$$

19.3 Неявно заданная функция

$$\operatorname{tg} y = xy \Rightarrow (\operatorname{tg} y)' = (xy)' \Rightarrow \frac{y'}{cos^2 y} = xy' + y$$

19.4 Параметрическая функция

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

20 Свойства

20.1

$$f(x) \in C([a;b]), ab \leq 0, \exists x_0 \in [a;b] : f(x_0) = 0$$
$$\text{let } a_1 = a, b_1 = b$$
$$\text{let } x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$$
$$a_{k+1} = \begin{cases} a_k \text{ if } a_k x_k > 0 \\ x_k \text{ if } a_k x_k \leq 0 \end{cases} \quad b_{k+1} = \begin{cases} b_k \text{ if } b_k x_k > 0 \\ x_k \text{ if } b_k x_k \leq 0 \end{cases}$$
$$\{[a_k; b_k]\} \text{ — множество вложенных отрезков}$$
$$\forall k \in \mathbb{N} \exists c \in [a_k; b_k]$$
$$x_0 = \begin{cases} x_k \text{ if } f(x_k) = 0 \\ x_{k+1} \text{ if } f(x_k) \neq 0 \end{cases}$$

20.2

$$f(x) \in C([a;b])$$
$$\forall \epsilon > 0 \forall x \in [a;b], \exists \delta(x, \epsilon) > 0 : \forall \tilde{x}, |x - \tilde{x}| < \delta : |f(\tilde{x}) - f(x)| < \delta$$
$$\left\{U_{\delta(x)}(x), x \in [a;b]\right\} \text{ — покрытие отрезка}$$
$$\left\{U_{\frac{\delta}{2}}(x), x \in [a;b]\right\} \text{ — тоже покрытие отрезка}$$
$$\text{Выберем конечное подпокрытие}$$
$$\left\{U_{\frac{\delta_1}{2}}(x_1), U_{\frac{\delta_2}{2}}(x_2), \dots U_{\frac{\delta_n}{2}}(x_n), \right\}$$
$$\tilde{\delta} = \min \frac{\delta_1}{2}, \frac{\delta_2}{2}, \dots \frac{\delta_n}{2}$$
$$x', x'' : |x' - x''| < \delta$$
$$\exists k : x' \in U_{\frac{\delta_k}{2}}(x_k) : |x' - x_k| < \frac{\delta_k}{2}$$
$$|x'' - x_k| \leq |x'' - x'| + |x' - x_k| = \tilde{\delta} + \frac{\delta_k}{2} \leq \delta_k$$
$$x', x'' \in U_{\frac{\delta_k}{2}}(x_k)$$

20.3 Непрерывная на $[a;b]$ инъективная $f(x)$ является монотонной

$$\text{let}\, x_1 < x_2 < x_3, f(x_2) < f(x_1) < f(x_3)$$
$$\exists c \in [x_2; x_3] : f(c) = f(x_1) \text{ — противоречие инъекции}$$

20.4 Монотонная $f(x)$ может иметь разрывы только I порядка

$$f(x) : E \to \mathbb{R}, f(x) \text{ — монотонная на E}$$
$$\text{let}\, a \text{ — точка разрыва } f(x), a \in E$$
$$a \text{ — предельная точка } E$$
$$E^- = \{x | x \in E, x < a\}$$
$$E^+ = \{x | x \in E, x > a\}$$
$$a \text{ — предельная точка хотя бы одного из } E^-, E^+$$
$$\text{Пусть для определенности } f(x) \text{ — неубывающая}$$
$$\text{Пусть это } E^-$$
$$f(x) \text{ — ограничена сверху на } E^-(f(a) \text{ или } \forall f(x), x \in E^-)$$
$$\exists \lim x \to a^-, x \in E f(x) = A^- \text{Пусть это } E^+$$
$$f(x) \text{ — ограничена снизу на } E^+(f(a) \text{ или } \forall f(x), x \in E^+)$$
$$\exists \lim x \to a^+, x \in E f(x) = A^+$$
$$A^- \leq f(x) < A^+ \vee A^- < f(x) \leq A^+$$

21 Дифференцирование

21.1 Производная и дифференциал

$f(x) \in D(x_0)$ — функция дифференциерума в точке

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

$$f(x) \in D(x_0) \Leftrightarrow \exists f'(x_0)$$

21.2 Диффереціал

Дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0 называется линейная функция вида $d_{x_0}f = f(x_0)\Delta x$, где $\Delta x = x - x_0$ — приращение аргумента

$\Delta f = f(x) - f(x_0)$ — приращение функции

Отсюда

$$\Delta f = d_{x_0}\Delta x + o(\Delta x), \Delta x \to 0$$

21.3 Теорема

Утверждение:

$$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow f(x) \in C(x_0)$$

Доказательство:

$$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) + 0 + 0 \Rightarrow f(x_0)$$

21.4 Дифференциерумость на множестве

$$f(x) \in D(A) \Leftrightarrow \forall a \in A : f(x) \in D(a)$$
$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

21.5 Свойства производной

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Доказательство:

$$
\begin{gathered}
(f(x)\cdot g(x))' = \\
\lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} = \\
\lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} = \\
\lim_{x\to 0}\frac{g(x+h)(f(x+h)-f(x))+f(x)(g(x+h)-g(x))}{h} = \\
\lim_{x\to 0}\frac{g(x+h)(f(x+h)-f(x))}{h}+\lim_{x\to 0}\frac{f(x)(g(x+h)-g(x))}{h} = \\
f(x)g'(x)+g(x)f'(x)
\end{gathered}
$$

21.6 Ряд Тэйлора

$$
\begin{gathered}
f(x), x_0 = a \\
f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}
\end{gathered}
$$