1

TD4 Algèbre

Fiche 2

Exercice 1 : On teste la Def 1.1

Pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$, $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$

$f(x+x', y) = 2$

1) $f(x+x', y) = 2(x+x')y - (x+x')$

$f(x, y) + f(x', y) = (2xy - x) + (2x'y - x')$

3) $f(\lambda x, y) = 2\lambda xy - \lambda x$

$\lambda f(x, y) = \lambda(2xy - x)$

$f(x, \lambda y) = 2x(\lambda y) - x$

On n'a pas la même chose par exemple pour $x = y = 1$ et $\lambda = 2$

Remarque : 2) est faux aussi, par exemple avec $x = y = y' = 1$

En fait f est linéaire en x mais pas en y.

f n'est donc pas bilinéaire

et pas $\mathbb{R}^2$

Exercice 3 1) Il faudrait que ϕ soit une application bilinéaire de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R} = \mathbb{K}$

comme → arrive chez scalaires

Ceci dit, c'est une application linéaire, puisque pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$

$x, x' \in \mathbb{R}^2$ et $y, y' \in \mathbb{R}^2$

$f(\lambda x + x, y) = \dots = \lambda f(x, y) + f(x', y)$

$f(x, \lambda y + y') = \dots = \lambda f(x, y) + f(x, y')$

à détailler

2) Il s'agit de prouver que

- $(0,0,0,0) \in \phi(\mathbb{R}^4)$
- Pour tous $\vec{u} = (x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4$ $\quad \phi(\vec{u} + \vec{u}') = \lambda\phi(\vec{u}) + \phi(\vec{u}')$

  $\vec{u}' = (x_1', x_2', y_1', y_2') \in \mathbb{R}^4$ — ça, c'est la caractérisation

  $\lambda \in \mathbb{R}$ — de φ linéaire, ce qui a rien à voir avec la question.

•• Pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ $\vec{u} \in \phi(\mathbb{R}^4)$

$\vec{v} \in \phi(\mathbb{R}^4)$ $\lambda\vec{u} + \vec{v} \in \phi(\mathbb{R}^4)$

Ça ne paraît pas évident à décider

$\phi((1,0),(1,0)) = (1,0,0,0) \in \phi(\mathbb{R}^4)$

$\phi((1,0),(0,1)) = (0,1,0,0) \in \phi(\mathbb{R}^4)$

$\phi((0,1),(1,0)) = (0,0,1,0) \in \phi(\mathbb{R}^4)$

$\phi((0,1),(0,1)) = (0,0,0,1) \in \phi(\mathbb{R}^4)$

Si $\phi(\mathbb{R}^4)$ est un sev de $\mathbb{R}^4$, c'est $\mathbb{R}^4$ sauf que

$(1,1,1,0) = \phi((x_1,x_2),(y_1,y_2))$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = x_1 y_1 \\ 1 = x_1 y_2 \\ 1 = x_2 y_1 \\ 0 = x_2 y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \neq 0 \text{ et } y_1 \neq 0 \\ x_1 \neq 0 \text{ et } y_2 \neq 0 \\ x_2 \neq 0 \text{ et } y_1 \neq 0 \\ x_2 = 0 \text{ ou } y_2 = 0 \end{cases}$$

IMPOSSIBLE

c-à-d $\phi(\mathbb{R}^4) \neq \mathbb{R}^4$

Finalement, $\phi(\mathbb{R}^4)$ n'est pas un sev de $\mathbb{R}^4$

Exercice 5 1) Méthode 1 : Détailler encore une fois le fastidieux calcul

Pour tous $x = (x_1,x_2,x_3)$, $x' = (x_1',x_2',x_3')$, $y = (y_1,y_2,y_3)$, $y' = (y_1',y_2',y_3') \in \mathbb{R}^3$

$\lambda \in \mathbb{R}$

a) $f(x,y) = f(y,x)$

b) $f(\lambda x + x', y) = \cdots = \lambda f(x,y) + f(x',y)$

$= (\lambda x_1 + x_1')y_1 + (\lambda x_2 + x_2')y_2 + (\lambda x_3 + x_3')y_3 - \frac{1}{2}\left[(\lambda x_1 + x_1')y_2 + (\lambda x_2 + x_2')y_1 + \cdots\right]$

et on regroupe

f est linéaire à gauche

c) $f(x, \lambda y + y') = f(\lambda y + y', x) = \lambda f(y,x) + f(y',x) = \lambda f(x,y) + f(x,y')$

f est linéaire à droite

On a prouvé que f est bilinéaire symétrique

2

Méthode 2 : On voit que $f(x,y)$ est une combinaison linéaire des $x_i y_j$ c-à-d que f est une combinaison linéaire des f_{ij} (cf 1.2)

Donc f est une forme bilinéaire

2) On écrit directement $A = \underset{B}{\mathrm{mat}}\, f = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$ coef en $x_1 y_3$

coef en $x_3 y_3$

$f(e_1, e_1) = f((\overset{x_1}{1}, \overset{x_2}{0}, \overset{x_3}{0}), (\overset{y_1}{1}, \overset{y_2}{0}, \overset{y_3}{0})) = 1$

A est symétrique donc (cf 1.2) f aussi.

3) (cf ajout du 1.11)

$\det A = 0$ car $C_1 + C_2 + C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc f est dégénérée

4) On a $P := \mathrm{Pass}(B, B') = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

De sorte que (cf 1.6)

$A' = \mathrm{mat}_{B'}\, f = {}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$