Méthode

On considère par exmeple une dynamique non linéaire de la forme suivante :

$$\ddot{x}(t) = f\left(x(t), \dot{x}(t), u(t)\right) \tag{1}$$

Notez que la méthode présentée ci-dessous ce généralise à une fonction quelconque dépendant de n'importe quel nombre de variables ou de leurs dérivées (sous réserve que la fonction soit dérivable).

<u>Etape n°1 :</u> On cherche le ou les points d'équilibres. On pose $\left(u_f, x_f\right)$ un point d'équilibre. A l'équilibre, le système « ne bouge pas » et donc toutes les dérivées sont nulles : $\ddot{x}(t) = \dot{x}(t) = 0$.

Pour trouver la relation entre les variables qui définissent le point d'équilibre (ici entre x_f et u_f), on résouds donc :

$$0 = f\left(x_f, 0, u_f\right) \tag{2}$$

Nb : Si le système n'a pas d'entrée, on obtiendra juste les valeurs possibles de x_f.

<u>Etape n°2 :</u> On définit les petites variations de chaque variable autour de $\left(u_f, x_f\right)$

$x(t) = x_f + \Delta x(t)$ et $u(t) = u_f + \Delta u(t)$

On calcule les dérivées qui apparaissent dans l'équation (1). Ici il faut calculer $\dot{x}(t)$ et . $\ddot{x}(t)$.

Donc : $\dot{x}(t) = 0 + \Delta\dot{x}(t)$ (NB : x_f étant constant, sa dérivée est nulle)

On calcule également : $\ddot{x}(t) = \Delta\ddot{x}(t)$ (3)

<u>Etape n°3 :</u> On linéarise f autour du point de fonctionnement $\left(u_f, x_f\right)$.

La formule de Taylor – Young à l'ordre 1 donne (cf. slides du cours) :

$$f\left(x_f + \Delta x(t), \Delta\dot{x}(t), u_f + \Delta u(t)\right) \approx f\left(x_f, 0, u_f\right) + \Delta x(t) \cdot \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x = x_f \\ \dot{x} = 0 \\ u = u_f}} + \Delta\dot{x}(t) \cdot \left.\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right|_{\substack{x = x_f \\ \dot{x} = 0 \\ u = u_f}} + \Delta u(t) \cdot \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x = x_f \\ \dot{x} = 0 \\ u = u_f}} \tag{4}$$

- $f\left(x_f, 0, u_f\right)$ vaut nécessairement 0 par la définition du point d'équilibre (cf equation (2))
- Le reste du membre droit de l'équation (4) dépends des dérivées partielles de f par rapport à tous ses arguments évaluées au point d'équilibre.

Comment calculer $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x = x_f \\ \dot{x} = 0 \\ u = u_f}}$? C'est simple : calculer la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ puis remplacer x par x_f, u par u_f et remplacer toutes les dérivées par 0. Le résultat est une constante

Au final, vous devez obtenir une formule de la sorte :

$$f\left(x_f + \Delta x(t), \Delta\dot{x}(t), u_f + \Delta u(t)\right) \approx \Delta x(t) \cdot Cte_1 + \Delta\dot{x}(t) \cdot Cte_2 + \Delta u(t) \cdot Cte_3 \tag{5}$$

Etape n°4 : Ecrire l'équation différentielle qui lie les petites variations entre-elles

Reprendre le membre de gauche (1) et le remplacer par son approximation (3)

$$\Delta\ddot{x}(t) \approx \Delta x(t)\cdot Cte_1 + \Delta\dot{x}(t)\cdot Cte_2 + \Delta u(t)\cdot Cte_3 \tag{6}$$

Exemple :

Soit le système suivant :

$$\ddot{x}(t) = (\dot{x}(t)+1)u(t) + 2x(t)^2 \tag{7}$$

Donc : $f(x(t),\dot{x}(t),u(t)) = (x(t)+1)u(t) + 2x(t)^2$

Etape n°1 : Point d'équilibre

Soit (u_f, x_f) un point d'équilibre. On a :

$$f(x_f, 0, u_f) = 0 \Leftrightarrow (x_f+1)u_f + 2x_f^{\ 2} = 0 \tag{8}$$

$$\Leftrightarrow u_f = \frac{-2x_f^{\ 2}}{x_f+1} \tag{9}$$

On peut maintenant calculer u_f en fonction de x_f.

Etape n°2 : Point d'équilibre

On définit les petites variations de chaque variable autour de (u_f, x_f)

$x(t) = x_f + \Delta x(t)$ et $u(t) = u_f + \Delta u(t)$

Les dérivées sont $\dot{x}(t) = \Delta\dot{x}(t)$ et $\ddot{x}(t) = \Delta\ddot{x}(t)$

Etape n°3 : On linéarise f autour du point de fonctionnement (u_f, x_f).

$$\frac{\partial f}{\partial x} = u(t) + 4x(t) \tag{10}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = u(t) \tag{11}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \dot{x}(t) + 1 \tag{12}$$

A titre d'illustration, on peut détailler la valeur des dérivées partielles évaluées au point d'équilibre :

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_f\\ \dot{x}=0\\ u=u_f}} = u_f + 4x_f \tag{13}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_f\\ \dot{x}=0\\ u=u_f}} = u_f \tag{14}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x=x_f\\ \dot{x}=0\\ u=u_f}} = 0+1 \tag{15}$$

NB : on rappelle qu'au point d'équilibre $\dot{x}=0$

Finalement :

$$f\left(x_f+\Delta x(t),\Delta\dot{x}(t),u_f+\Delta u(t)\right)\approx \Delta x(t)\cdot\left(u_f+4x_f\right)+\Delta\dot{x}(t)\cdot u_f+\Delta u(t)\cdot 1 \tag{16}$$

<u>Etape n°4 :</u> Ecrire l'équation différentielle qui lie les petites variations entre-elles

$$\Delta\ddot{x}(t)\approx \Delta x(t)\cdot\left(u_f+4x_f\right)+\Delta\dot{x}(t)\cdot u_f+\Delta u(t)\cdot 1$$