第七周习题课 导数与微分

一阶导数与微分

1. 设 y = f(x) 在 $B(x_0)$ 有定义,则与 $f'(x_0)$ 存在等价的是

(A)
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}$$
存在;

(B)
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x^3)}{\Delta x^3}$$
存在;

(C)
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + 2\Delta x) - f(x_0 + \Delta x)}{\Delta x}$$
存在;

(D)
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x^2) - f(x_0)}{\Delta x^2}$$
存在。

2. 设 y = f(x) 在 $B(x_0)$ 有定义,则与 $f'(x_0)$ 存在不等价的是)。

(A)
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x_0 + kx) - f(x_0)}{x}$$
 $(k \neq 0,1)$

(B)
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x_0 + \alpha(x)) - f(x_0)}{\alpha(x)} \quad (\alpha(x) > 0, \quad \lim_{x \to 0} \alpha(x) = 0)$$

(C)
$$\lim_{x \to \infty} x \left[\left(f\left(x_0 - \frac{1}{x}\right) - f(x_0) \right) \right]$$
存在

(D)
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x_0-x)-f(x_0)}{\sin x}$$
 存在

3. 设
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos}{\sqrt{x}} & x > 0 \\ x^2 g(x) & x \le 0 \end{cases}$$
 其中 $g(x)$ 是有界函数,则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处有(D)。

- (A) 极限不存在;
- (B) 极限存在, 但不连续
- (C) 连续, 但不可导;
- (D) 可导

设 f(x) 可导, $F(x) = f(x)(1+|\sin x|)$, 若使 F(x) 在 x=0处可导,则必有(A)。

- (A) f(0) = 0, (B) f'(0) = 0
- (C) f(0) + f'(0) = 0, (D) f(0) f'(0) = 0

5.
$$f(x) = (x^2 - x - 2)|x^3 - x|$$
有几个不可导点?

6. 设函数
$$g(x)$$
 在 $(-1,1)$ 上连续。 定义 $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$

若函数 f(x) 在 x = 0 连续,

- (I) 求函数 g(x) 在点 x = 0处的值;
- (II) 问函数 g(x) 在点 x = 0 处是否可导?若可导,求出导数值。

7.
$$f(x)$$
 在 $x = a$ 可导, $f(a) \neq 0$, 求 $\lim_{x \to \infty} \left[\frac{f\left(a + \frac{1}{x}\right)}{f(a)} \right]^x$

8. 讨论
$$f(x) = \begin{cases} x(1-x), & x \in \mathbb{Q}; \\ x(1+x), & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$
 的连续性与可微性。

- 设 g(x) 在 x=0 点连续,问 $f(x)=g(x)\sin 2x$ 在 x=0 点是否连续,是否可导,若可导, 求其导数。

$$(1) \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - f(x)}{x}$$

(2)
$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x f(x) - 1}{x}$$

(1)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - f(x)}{x}$$
 (2) $\lim_{x\to 0} \frac{2^x f(x) - 1}{x}$ (3) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}g(x) - 2}{x - 1}$

- **11.** 设函数 f(x) 在 x = 0 点连续,且 $\lim_{x \to 0} \frac{f(2x) f(x)}{x} = A$,求证: f(x) 在 x = 0 点可导,且 $f'(0) = A_{\circ}$
- **12.** 设 $f(x) = (x-a)^2 g(x)$, 其中 g'(x) 在 x = a 的某个邻域连续,求 f''(a) 。
- 二.隐函数,反函数,参数函数,高阶导数
- 13. 设 y = y(x) 由方程 $e^{x+y} \sin(x+y) = x^3$ 所确定的二次可导函数。求 y = y(x) 的一阶 导数和二阶导数。
- 14. 设函数 y = f(x) 的三次可导,并且 $f'(x) \neq 0$,其反函数记 x = g(y)。试用函数 y = f(x) 的前三阶导数来表示反函数 x = g(y) 的前三阶导数。(本题本质上同第三章 总复习题题 15)

- **15.** 求函数 $y = x + \ln(1+x)$ 反函数的二阶导数。
- 16. 求参数函数 $\begin{cases} x = t + e^t \\ y = t + \ln(1+t) \end{cases}$ 的二阶导数。
- 17. $f(x) = (x+1)^2 \ln(1-x)$, $Rightarrow f^{(n)}(-1)$
- 18. 设 $y = (\arcsin x)^2$
- (a) 求证: $(1-x^2)y'' xy' = 2$;
- (b) 求 $y^{(n)}(0)$ 。