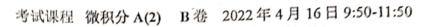
## 清华大学本科生考试试题专用纸



系名	班级	姓名	学号
----	----	----	----

- 一. 填空题 (每空3分,共30分)
- 1. 曲面  $e^x = xy + yz + zx$  在点 (1,1,0) 处的切平面方程为\_\_\_\_\_\_
- 2. 写出曲面  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ , z = v 在点  $(x_0, y_0, z_0) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$  处的一个单位法向量:
- 3.  $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{xy} = \underline{\hspace{1cm}}.$
- 5.  $\Re f(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} e^{t^2 + xt} dt$ ,  $\Re f'(0) = \underline{\phantom{\operatorname{\operatorname{II}}}}$
- 6.  $\forall z = x \sin(xy), \text{ } \exists dz (1, \frac{\pi}{2}) = \underline{\hspace{1cm}}$
- 8. (x+1)<sup>2</sup> 在点(0,0)处带 Peano 余项的二阶 Taylor 展开式为\_\_\_\_
- 9. 可微函数 z = f(x,y) 在 (0,0) 点沿  $\bar{\mathbf{u}} = (-1,2)$  的方向导数  $\frac{\partial z}{\partial \bar{\mathbf{u}}}(0,0) = 0$ ,沿  $\bar{\mathbf{v}} = (3,4)$  的方向导数  $\frac{\partial z}{\partial \bar{\mathbf{v}}}(0,0) = 2$ ,则  $\operatorname{grad} f|_{(0,0)} = \underline{\qquad}$
- 10. 已知  $\begin{cases} x = e^{v} + u^{3} \\ y = e^{u} v^{3} \end{cases}$  将点  $(u_{0}, v_{0}) = (1, 0)$  映为  $(x_{0}, y_{0}) = (2, e)$ , 则其逆映射  $\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$  在点

$$(x_0, y_0) = (2, e)$$
 处的 Jacobi 矩阵的行列式  $\det \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\Big|_{(x, y)=(2, e)} = \underline{\qquad}$ 

- 二、解答题 (请写出详细的解答过程和必要的根据!)
- 11. (10 分)证明方程 $1+xy=\arctan(x+y)$ 在点 $(x_0,y_0)=(-1,1)$ 的邻域中确定了一个任意次连续可撒的隐函数y=y(x),并求y'(-1)和y''(-1).
- 12. (12 分)已知  $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$  试回答以下问题,并说明理由。
  - (1) 函数 f(x,y) 在原点 (x,y) = (0,0) 处是否连续?
  - (2) 偏导数  $f'_{x}(0,0)$  和  $f'_{y}(0,0)$  是否存在? 如果存在,求出它们。
  - (3) 函数 f(x,y) 在原点 (x,y) = (0,0) 处是否可微? 如果可微,求出这个微分。
- 13. (10 分)请用 Lagrange 乘子法求函数  $f(x,y) = e^{xy} \sin(x+y)$  在曲线  $x^2 + y^2 = 1$  上的最大值和最小值。
- 14. (8 分) 已知  $(axy^3 y^2 \cos x) dx + (1+by \sin x + 3x^2y^2) dy$  为某一函数 f(x,y) 的全微分, 求a,b 的值及 f(x,y).
- 15. (10 分) 求函数  $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}(x+y)$  的极值和值域。
- 16. (15 分) 已知  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, I(t) = \int_0^{+\infty} \frac{1 e^{-tx^2}}{x^2} dx, t \in [0, +\infty).$ 
  - (1) 证明:  $f(t,x) = \begin{cases} \frac{1 e^{-tx^2}}{x^2}, & x \neq 0, t \in \mathbb{R} \\ t, & x = 0, t \in \mathbb{R} \end{cases}$  在  $\mathbb{R}^2$  上连续。
  - (2) 证明 *I*(t) 在 [0,+∞) 上连续。
  - (3) 证明 I(t) 在  $(0,+\infty)$  上可导并计算 I'(t).
  - (4)  $\,$  求  $I(t), t \in [0, +\infty).$
- 17. (5 分)已知函数 f(x,y) 对每个变量 x,y 分别连续;且对每个固定的 x,函数 f(x,y) 对变量 y 单调。求证: f(x,y) 作为二元函数是连续函数。