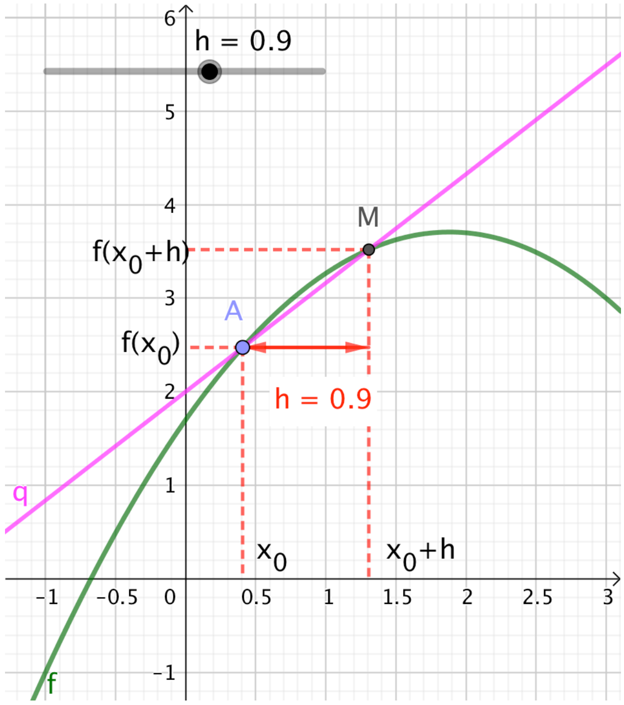
Chapitre 8 : Dérivation

I. Taux de variation et nombre dérivé

Dans cette section, f est une fonction définie sur un intervalle réel $I = [a; b]$, x_0 est un réel appartenant à I et h réel tel que : $h > 0$.



1) Taux de variation

voir activité 1 p 102

Définition :

Le taux de variation de la fonction f au point A d'abscisse x_0 est le nombre :

$$\tau(x_0; x_0 + h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} .$$

On le note $\tau_{x_0}(h)$.

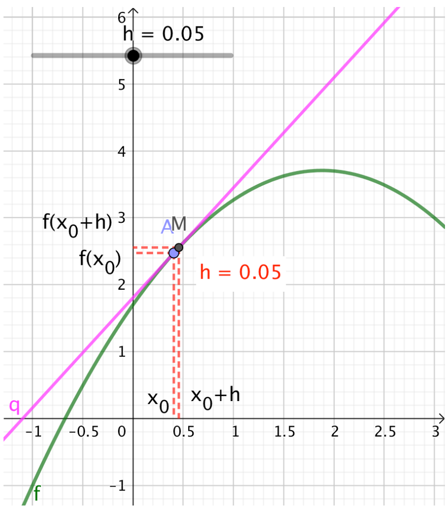
Rem : Il s'agit du taux de variation entre le point A et le point M comme vu au chapitre 2.

Exemple : Calculer le taux de variation de la fonction $f(x) = 2x + 3$ pour $x_0 = 1$.

2) Nombre dérivé

Définition : Le nombre dérivé de la fonction f en x_0 est la limite du taux de variation en x_0 quand h tend vers 0. On le note $f'(x_0)$ et il est égal à :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \tau_{x_0}(h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} .$$



Rem : Dans certains cas (que nous ne verrons pas cette année), le taux d’accroissement de la fonction en $x_0$est infini ou n’existe pas : le nombre dérivé n'est alors pas défini.

Méthode : Calculer un nombre dérivé

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 4$.

a. Calculer le taux de variation de f en $x_0 = 1$.

b. En déduire le nombre dérivé $f'(1)$.

1) On commence par calculer $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ *avec* $h \neq 0$ *.*

$$\begin{aligned}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \frac{\left[(1+h)^2+4\right]-\left[1^2+4\right]}{h}\\ &= \frac{\left[1+2h+h^2+4\right]-5}{h}\\ &= \frac{5+2h+h^2-5}{h}\\ &= \frac{2h+h^2}{h} = 2+h\end{aligned}$$

On en déduit : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(2+h) = 2$ *.*

*Ainsi, f est dérivable en $x = 1$. Le **nombre dérivé** de f en 1 vaut 2 : $f'(1) = 2$.*

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 4x$. En utilisant la même méthode, calculer $f'(0)$.