

Đề bài: [Complicated Computations](#)

Lời giải: Sử dụng CTDL Truy vấn đoạn – **Segment Tree**

Xét bài toán tổng quát : Cho mảng A gồm N phần tử với $1 \leq A_i \leq N$. Có Q truy vấn, mỗi truy vấn có dạng (l_j, r_j) , yêu cầu tính MEX của đoạn $[l_j; r_j]$. Giới hạn: $N, Q \leq 10^5$.

Lời giải cho bài toán tổng quát :

- Xử lý truy vấn **offline** : Sắp xếp các đoạn truy vấn $[l_j; r_j]$ theo thứ tự tăng dần r_j .
- Gọi $last[i]$ là vị trí xuất hiện cuối cùng của giá trị i . Duyệt mảng A từ 1 đến N , với mỗi vị trí i , cập nhật $last[A_i] = i$ (tính đến vị trí i , phần tử A_i xuất hiện lần cuối cùng tại i) .
- Đồng thời tại vị trí i , ta có thể tính được MEX của truy vấn có $r_j = i$ bằng cách tìm giá trị k nhỏ nhất thỏa mãn $last[k] < l_j$. Từ đó, có thể sử dụng cấu trúc Segment Tree để lưu mảng $last$ và thực hiện truy vấn bằng cách tìm kiếm nhị phân trên Segment Tree.
- Tổng đpt: $O((N + Q)\log N)$.

Từ bài toán tổng quát trên, ta có thể đưa bài toán ban đầu về bài toán tổng quát bằng cách tìm được các đoạn $[l_j; r_j]$ và tìm MEX của từng đoạn, từ đó có được kết quả.

Nhận xét : Với một đoạn $[l; r]$ bất kỳ, giả sử $MEX = x$, khi đó nếu bổ sung thêm các phần tử khác x vào đoạn (mở rộng đoạn $[l; r]$ với các phần tử thêm vào khác x) sẽ không làm thay đổi giá trị $MEX = x$. Vì vậy, các đoạn có $MEX = x$ phải nằm giữa các giá trị x , cụ thể :

$$.....] \ x[.....] \ x[.....] \ x[.....] \ x[.....]$$

Với mỗi giá trị x , ta có thể tìm được các đoạn $[l; r]$ và tổng số đoạn không quá $2N$.

Từ đó, bài toán được giải quyết với đpt $O(N\log N)$.