Đề bài: Hills

Lời giải: Bài toán Quy hoạch động cơ bản

Nhận xét:

- Có thể xem $a[0] = a[n+1] = 0$.
- Không tồn tại 2 hills nằm cạnh nhau.
- Để có được chính xác k hills trong vị trí $[1; i]$, cần thỏa mãn điều kiện $k \leq \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil$ hay $i \geq 2k+1$.
- Gọi $f(x, y, z)$ là chi phí để vị trí i có hill, với x, y, z lần lượt là độ cao tại vị trí $i-1, i, i+1$ Khi đó:

$$f(x, y, z) \ = max(x - y + 1, 0) + max(z - y + 1, 0)$$

Gọi $dp[i][j]$ là chi phí nhỏ nhất để có được chính xác j hills trong đoạn $[1; i]$.

Cơ sở QHĐ: Dễ dàng tính được $dp[i][1]$, với $1 \leq i \leq n$.

Công thức QHĐ tính $dp[i][j]$:

- Nếu tại vị trí $i-2$ đã tồn tại hill, khi đó tối ưu $dp[i][j]$ với:

$$dp[i-2][j-1] + f(min(a[i-1], a[i-2]-1), a[i], a[i+1])$$

- Nếu tại vị trí k, $k \leq i-3$, đã tồn tại hill, khi đó tối ưu $dp[i][j]$ với:

$$dp[k][j-1] + f(a[i-1], a[i], a[i+1]) \text{ (*)}$$

Mỗi $dp[i][j]$ được tính trong $O(n)$, dẫn đến tổng ĐPT $O(n^3)$. Tối ưu về $O(n^2)$ bằng cách: Với mỗi giá trị j, trong quá trình tính các $dp[i][j]$, duy trì một biến $Min = min(dp[k][j-1])$, với $k \leq i-3$, từ đó mỗi $dp[i][j]$ được tính trong $O(1)$.