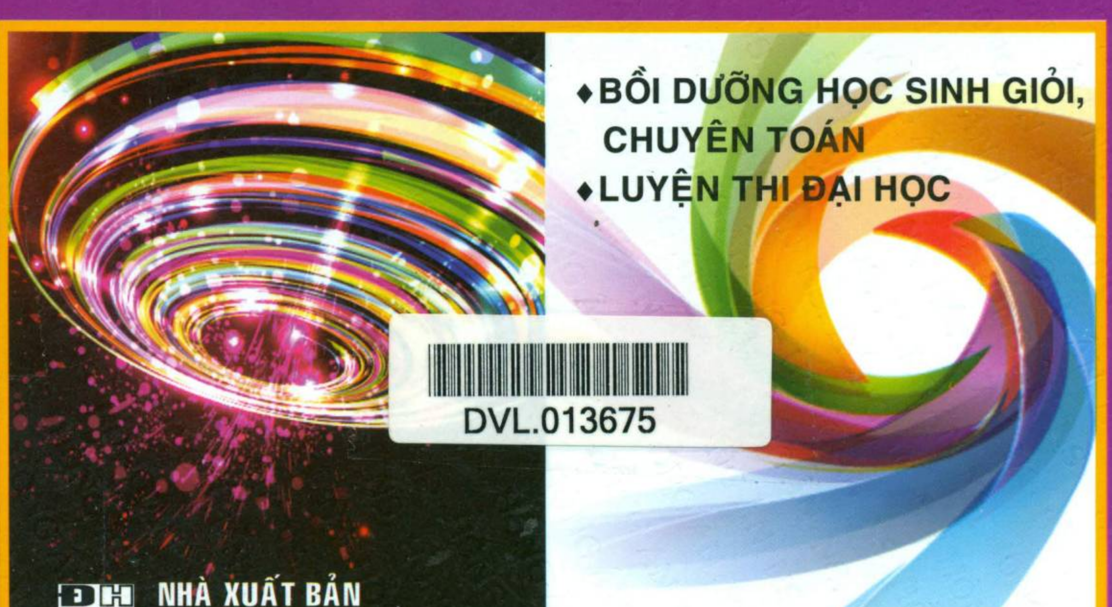
ThS. NGUYỄN DUY HIẾU
Toán, Trường THPT chuyên Lê Hồng Phong - TP. Hồ Chí Minh)

KĨ THUẬT giải nhanh bài toán hay & khó GIẢI TÍCH 12



- BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI, CHUYÊN TOÁN
- LUYỆN THI ĐẠI HỌC

NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ThS. NGUYỄN DUY HIẾU
(GV chuyên Toán, Trường THPT chuyên Lê Hồng Phong - TP. Hồ Chí Minh)

KĨ THUẬT giải nhanh bài toán hay & khó GIẢI TÍCH 12

- BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI, CHUYÊN TOÁN
- LUYỆN THI ĐẠI HỌC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: Biên tập – Chế bản: (04) 39714896;
Hành chính: (04) 39714899; Tổng Biên tập: (04) 39715011;
Fax: (04) 39729436

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc - Tổng biên tập: TS. PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập: ĐẶNG DƯƠNG

Chế bản: NHÀ SÁCH HỒNG ÂN

Trình bày bìa: NHÀ SÁCH HỒNG ÂN

Đối tác liên kết xuất bản:

NHÀ SÁCH HỒNG ÂN

SÁCH LIÊN KẾT

KĨ THUẬT GIẢI NHANH BÀI TOÁN HAY VÀ KHÓ GIẢI TÍCH 12

Mã số: 1L- 444ĐH2014
In 1.000 cuốn, khổ 17 × 24cm tại Công ti Cổ phần Văn hoá Văn Lang.
Số xuất bản: 1431-2014/CXB/17-240/ĐHQGHN, ngày 21/7/2014.
Quyết định xuất bản số: 451LK-TN/QĐ - NXBĐHQGHN ngày 24/7/2014.
In xong và nộp lưu chiểu quý III năm 2014.

Lời nói đầu

Nhằm giúp các em học sinh chuẩn bị tốt cho kì thi tốt nghiệp THPT và tuyển sinh vào các trường Đại học – Cao đẳng. Chúng tôi biên soạn cuốn: "**GIẢI TOÁN GIẢI TÍCH 12**"

Cuốn sách gồm bốn chương:

Chương 1: Ứng dụng của đạo hàm để khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.

Chương 2: Hàm số lũy thừa và hàm số lôgarit.

Chương 3: Nguyên hàm – Tích phân và ứng dụng.

Chương 4: Số phức.

Nội dung của mỗi chương được trình bày theo bố cục bài học như Sách giáo khoa .

Mỗi bài gồm các phần:

A. Tóm tắt Sách giáo khoa.

B. Phương pháp giải các dạng toán: Phần này được trình bày theo từng vấn đề. Mỗi vấn đề là một dạng toán thường gặp liên quan đến kiến thức của bài học tương ứng.

Mỗi dạng toán đều có nêu các phương pháp giải, các ví dụ minh họa và các bài tập luyện tập dành cho người đọc. Các bài tập luyện tập đều có hướng dẫn giải hay đáp số nhằm giúp người đọc tự kiểm tra lại kết quả của mình.

Cuối mỗi chương có các bài tập tổng hợp để giúp người học ôn tập các kiến thức đã học.

Các bài tập được chọn lọc và tổng hợp từ Sách giáo khoa, Các đề thi tốt nghiệp, Các đề thi Đại học và Cao đẳng, Các đề thi thử Đại học, ...

Chúng tôi hy vọng cuốn sách sẽ là một tài liệu tham khảo hữu ích giúp người đọc dễ dàng tiếp cận, nắm vững và trau dồi kiến thức môn Toán 12 để đạt được kết quả tốt nhất trong kì thi tuyển sinh đại học.

Dù đã hết sức cố gắng trong quá trình biên soạn, song chắc khó tránh khỏi những thiếu sót nhất định. Chúng tôi xin đón nhận những ý kiến phản hồi và chân thành cảm ơn mọi sự góp ý của quý độc giả, để lần tái bản sau sách được hoàn thiện hơn.

Tác giả

Chương I: ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM

§1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

I. NHẮC LẠI:

Giả sử K là một khoảng (một đoạn hoặc nửa khoảng) và f là một hàm số xác định trên K.

- f *đồng biến* trên K $\Leftrightarrow$ ($\forall$ $x_1, x_2 \in$ K: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$).
- f *nghịch biến* trên K $\Leftrightarrow$ ($\forall$ $x_1, x_2 \in$ K: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$).

II. ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM ĐỂ XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU:

1. Điều kiện cần:

Định lí 1: Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng K.

a) Nếu hàm số f đồng biến trên khoảng K thì $f'(x) \ge 0$ với mọi $x \in K$.

b) Nếu hàm số f nghịch biến trên khoảng K thì $f'(x) \le 0$ với mọi $x \in K$.

2. Điều kiện đủ:

Định lí 2: (điều kiện đủ để hàm số đơn điệu trên một khoảng)

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng K.

a) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số f đồng biến trên khoảng K.

b) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số f nghịch biến trên khoảng K.

c) Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số f không đổi trênkhoảng K.

Chú ý :

Khoảng K trong định lí trên có thể được thay bởi một **đoạn** hay **nửa khoảng**. Khi đó ta phải bổ sung thêm giả thiết "*Hàm số liên tục f trên đoạn hay nửa khoảng đó*". Tức là ta có:

- Nếu hàm số f *liên tục* trên đoạn [a, b] và có đạo hàm $f'(x) > 0$ trên khoảng (a, b) thì hàm số f đồng biến trên [a, b].
- Nếu hàm số f *liên tục* trên đoạn [a, b] và có đạo hàm $f'(x) < 0$ trên khoảng (a, b) thì hàm số f nghịch biến trên [a, b].

3. Mở rộng:

Trong trường hợp phương trình **y' = 0 có hữu hạn nghiệm**, thì ta có định lí mở rộng sau:

Định lí 3: * f tăng trên K $\Leftrightarrow f'(x) \ge 0, \forall x \in K$

* f giảm trên K $\Leftrightarrow f'(x) \le 0, \forall x \in K$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Tìm khoảng tăng, giảm của hàm số y = f(x)

1. PHƯƠNG PHÁP:

+ Tìm miền xác định.

+ Tìm y′.

+ Tìm các điểm mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hay tại đó hàm số khôngcó đạo hàm.

+ Xét dấu y′ bằng bảng biến thiên.

+ Dựa vào định lí trên để kết luận về tính tăng, giảm của hàm số.

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Xét chiều biến thiên của các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ b) $y = x^4 - 8x^2 + 3$.

Giải

a) Tập xác định: D = R.

$y' = 3x^2 - 12x + 9$

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y		↗		↘		↗	

Vậy hàm số tăng trên $(-\infty; 1)$, $(3; +\infty)$, hàm số giảm trong $(1; 3)$.

b) Tập xác định: D = R.

$y' = 4x^3 - 16x$

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		−	0	+	0	−	0	+	
y		↘		↗		↘		↗	

Vậy hàm số tăng trong $(-2; 0)$, $(2; +\infty)$; giảm trong $(-\infty; -2)$, $(0; 2)$.

Ví dụ 2: Tìm khoảng tăng, giảm của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{2x-3}{x-2}$ b) $y = \dfrac{x^2-4x+4}{x-1}$.

Giải

a) Tập xác định: $D = R\setminus\{2\}$.

$$y' = \frac{-1}{(x-2)^2} < 0 \text{ với mọi } x \in D.$$

Vậy hàm số luôn giảm trên từng khoảng xác định.

b) Tập xác định: $D = R\setminus\{1\}$.

$$y' = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$		$\searrow$	||	$\searrow$		$\nearrow$	

Vậy: Hàm số tăng trong $(-\infty ; 0)$ và $(2 ; +\infty)$,

Hàm số giảm trong $(0 ; 1)$ và $(1 ; 2)$.

Ví dụ 3: Xét chiều biến thiên của các hàm số sau:

a) $y = x + \sqrt{4-x^2}$ b) $y = 2x - \sqrt{x^2-4x-5}$.

Giải

a) $y = x + \sqrt{4-x^2}$

Tập xác định : $D = [-2 ; 2]$;

$$y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}}, \forall x \in (-2 ; 2);$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 4 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \,;$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2		$\sqrt{2}$		2	$+\infty$
y'			$+$	0	$-$		
y			$\nearrow$		$\searrow$		

Vậy: Hàm số tăng trong khoảng $(-2; \sqrt{2})$.

Hàm số giảm trong khoảng $(\sqrt{2}; 2)$.

b) $y = 2x - \sqrt{x^2 - 4x - 5}$.

Tập xác định : $D = (-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$;

$$y' = 2 - \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x-5}} = \frac{2\sqrt{x^2-4x-5} - x + 2}{\sqrt{x^2-4x-5}}, \forall x \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty);$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-4x-5} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \ge 0 \\ 4(x^2 - 4x - 5) = (x-2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ 3x^2 - 12x - 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 + 2\sqrt{3}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		5		$2+2\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		+	||		||	–	0	+	
y		↗	||		||	↘		↗	

Vậy : Hàm số tăng trong khoảng $(-\infty; -1)$, $(2+2\sqrt{3}; +\infty)$

Hàm số giảm trong khoảng $(5; 2+2\sqrt{3})$.

Ví dụ 4. Tìm khoảng tăng, giảm của các hàm số sau:

a) $y = -x^2 + 6|x - 2|$ b) $y = |x^2 + 4x - 5|$.

Giải

a) Tập xác định: $D = R$;

Ta có: $y = \begin{cases} -x^2 + 6x - 12 & \text{khi } x \ge 2 \\ -x^2 - 6x + 12 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$.

Do đó: $y' = \begin{cases} -2x + 6 & \text{khi } x > 2 \\ -2x - 6 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3$. Tại $x = 2$ hàm số không có đạo hàm

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-3		2		3		$+\infty$
y'		+	0	–	||	+	0	–	
y		↗		↘	-1	↗		↘	

Vậy: Hàm số tăng trong $(-\infty\,;-3)$ và $(2\,;3)$,

Hàm số giảm trong $(-3\,;2)$ và $(3\,;+\infty)$.

b) Tập xác định: D = R.

Ta có: $y = \begin{cases} x^2+4x-5 & \text{khi } x \le -5 \text{ hay } x \ge 1 \\ -x^2-4x+5 & \text{khi } -5 < x < 1 \end{cases}$.

Do đó: $y' = \begin{cases} 2x+4 & \text{khi } x < -5 \text{ hay } x > 1 \\ -2x-4 & \text{khi } -5 < x < 1 \end{cases}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = -2$. Tại $x = -5$ hay $x = 1$ hàm số không có đạo hàm.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-5		-2		1		$+\infty$
y'		$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	
y		↘		↗		↘		↗	

Vậy: Hàm số đồng biến trong $(-5\,;-2)$ và $(1\,;+\infty)$,

Hàm số nghịch biến trong $(-\infty\,;-5)$ và $(-2\,;1)$.

3. BÀI TẬP:

1. Tìm các khoảng tăng, giảm của các hàm số sau:

a. $y = x^2 + 2mx + m - 1$ b. $y = -x^3 + 6x^2 - 12x + 8$

c. $y = -\dfrac{1}{4}x^4 - x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + 3x$ d. $y = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}(2m+2)x^2 + (m^2+2m)x$.

2. Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số sau:

a. $y = \dfrac{3x+1}{x+2}$ b. $y = \dfrac{(x-2)^2}{1-x}$ c. $y = \dfrac{x^2-x}{x^2-x-2}$

d. $y = \dfrac{x^3}{9-x^2}$ e. $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ f. $y = \dfrac{x^2+2x+2}{x^2-2x+2}$.

3. Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số sau:

a. $y = \sqrt{x^2-4x+3}$ b. $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}$

c. $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ f. $y = \sqrt{2x-x^2}$.

4. Tìm khoảng tăng, giảm của các hàm số

a. $y = |x-1| + \dfrac{x^2+x+2}{x+1}$ b. $y = x^2 - 2x + 4|x-2| + 3$.

5. Chứng minh các hàm số:

a. $y = (m^2 + 1)x^3 + x^2 + 2x - 10$ luôn tăng trên miền xác định.

b. $y = \dfrac{2x-3}{3x-6}$ luôn giảm trên các khoảng xác định.

c. $y = \dfrac{x^2 - x - 4}{1-x}$ luôn giảm trên các khoảng xác định.

d. $y = \dfrac{(m-2)x - 2m^2 + 2m - 4}{x-m}$ luôn tăng trên các khoảng xác định.

e. $f(x) = x^3 + x - \cos x - 4$ luôn tăng trên các khoảng xác định.

Dạng 2: Chứng minh hàm số tăng (giảm) trên đoạn hay nửa khoảng

1. PHƯƠNG PHÁP:

Để chứng minh hàm số tăng (giảm) trên [a ; b] (hay [a ; b) hay (a ; b]) ta thực hiện các bước sau:

+ *Bước 1:* Chứng minh trong (a; b) hàm số tăng (giảm).

+ *Bước 2:* Chứng minh hàm số liên tục trên đoạn hay nửa khoảng đã cho.

Kết luận: Hàm số tăng (giảm) trên đoạn hay nửa khoảng đã cho.

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x + \sqrt{16 - x^2}$ nghịch biến trên [2; 4].

Giải

Ta có:

* f(x) là hàm số liên tục trên [2; 4] (1)

$$* \; f'(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{x}{\sqrt{16-x^2}} = \frac{\sqrt{16-x^2} - \sqrt{3}x}{\sqrt{3}\sqrt{16-x^2}};$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{16-x^2} = \sqrt{3}x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 16 - x^2 = 3x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Với $x \in (2; 4)$ thì $\sqrt{16-x^2} - \sqrt{3}x < 0$ nên $f'(x) < 0$, do đó hàm số nghịch biến trong (2; 4) (2)

Từ (1) và (2) suy ra f là hàm số nghịch biến trên đoạn [2 ; 4].

3. BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng hàm số $y = f(x) = x\sqrt{8 - x^2}$ đồng biến trên $[-2 ; 2]$.
2. Chứng minh hàm số $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{7-x}$ nghịch biến trên đoạn $[4 ; 7]$.
3. Chứng minh hàm số $y = x^2 + 2\sqrt{5}\sqrt{9-x^2}$ đồng biến trên $[-3; -2]$ và nghịch biến trong $[2; 3]$.

Dạng 3: Định giá trị tham số để hàm số đơn điệu trên tập hợp X cho trước

1. PHƯƠNG PHÁP:

B1: Tìm y'

B2: Đặt điều kiện cho bài toán:

+ Hàm số tăng trên D $\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in D$.

+ Hàm số giảm trên D $\Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in D$.

(**Chú ý**: Trong điều kiện trên dấu bằng xảy ra khi **phương trình y' = 0 có hữu hạn nghiệm**, nếu phương trình y' = 0 có vô hạn nghiệm thì trong điều kiện sẽ không có dấu bằng).

Trong thực hành ta thường sử dụng:

Nếu biểu thức g(x) quyết định dấu của y' *không chứa x* thì trong điều kiện trên *không có dấu bằng*.

B3: Từ điều kiện trên sử dụng các kiến thức về dấu nhị thức, tam thức suy ra giá trị tham số cần tìm.

* ***Chú ý 1:*** Cho $f(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$ ta có:

+ $f(x) \geq 0, \forall x \in R \Leftrightarrow \Delta \leq 0$ và $a > 0$.

+ $f(x) \leq 0, \forall x \in R \Leftrightarrow \Delta \leq 0$ và $a < 0$.

* ***Chú ý 2:*** Đối với hàm số lượng giác ta cần nhớ:

+ $|a\sin x| \leq |a|, \forall x \in R$

+ $|a\sin x + b\cos x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}, \forall x \in R$.

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Tìm m để hàm số : $y = x^3 + (m-3)x^2 + (2m+3)x + m - 4$ luôn tăng trên R.

Giải

Tập xác định: D = R.

$y' = 3x^2 + 2(m-3)x + 2m - 1$.

Hàm số luôn tăng trên R $\Leftrightarrow$ y' ≥ 0 với mọi $x \in R$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow (m-3)^2 - 3(2m+3) \leq 0$

$\Leftrightarrow \quad m^2 - 12m \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 12.$

Vậy m thỏa mãn yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 0 \leq m \leq 12$.

Ví dụ 2: Tìm m để các hàm số sau tăng trên từng khoảng xác định của nó:

a) $y = \dfrac{mx + 7m - 8}{x - m}$; b) $y = \dfrac{2x^2 + x + 3m - 5}{x - 1}$.

Giải

a) Tập xác định: $D = R \setminus \{m\}$.

$y' = \dfrac{-m^2 - 7m + 8}{(x-m)^2}$. Dấu y' là dấu của biểu thức $-m^2 - 7m + 8$.

Hàm số tăng trên từng khoảng xác định

$\Leftrightarrow$ y' > 0 với mọi $x \in D$.

$\Leftrightarrow -m^2 - 7m + 8 > 0$

$\Leftrightarrow -8 < m < 1$.

Vậy m thỏa mãn yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -8 < m < 1$.

b) Tập xác định: $D = R \setminus \{1\}$.

$y' = \dfrac{2x^2 - 4x - 3m + 4}{(x-1)^2}$

Dấu của y' chính là dấu của $g(x) = 2x^2 - 4x - 3m + 4$.

Hàm số tăng trên từng khoảng xác định

$\Leftrightarrow$ y' ≥ 0 với mọi $x \in D$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4 - 2(-3m + 4) \leq 0 \Leftrightarrow 6m - 4 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq \dfrac{2}{3}$.

Vậy m thỏa mãn yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \leq \dfrac{2}{3}$.

Ví dụ 3: Định m để hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3mx + 4m - 12}{x - 2}$ đồng biến trên $(-\infty; 0)$.

Giải

Tập xác định: $D = R \setminus \{2\}$; $y' = \dfrac{x^2 - 4x + 2m + 12}{(x-2)^2}$;

Dấu của y' là dấu của $g(x) = x^2 - 4x + 2m + 12$.

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (-\infty; 0)$.

Cách 1:

<u>*TH1*</u>: $\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow -2m - 8 \leq 0 \Leftrightarrow m \geq -4$.

Khi đó do $a = 1 > 0$ nên $y' \geq 0, \forall x \in D$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$. Vậy $m \geq -4$ thỏa yêu cầu bài toán.

<u>*TH2*</u>: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < -4$.

Khi đó $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 0 \leq x_1 < x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 \\ 4 > 0 \\ 2m + 12 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -6 \leq m < -4.$$

Kết luận: m thỏa yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > -4 \\ -6 \leq m < -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow m \geq -6$.

Cách 2: $y' \geq 0, \forall x \in (-\infty; 0)$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 2m + 12 \geq 0, \forall x < 0$

$\Leftrightarrow \quad 2m \geq -x^2 + 4x - 12 = h(x) \quad (*)$

Ta có: $h'(x) = -2x + 4$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
h'(x)		+		+	0	−	
h(x)		↗	−12				

Dựa vào bảng biến thiên của h(x) ta có:

$(*) \Leftrightarrow 2m \geq h(x), \forall x \in (-\infty; 0) \Leftrightarrow 2m \geq -12 \Leftrightarrow m \geq -6$.

Ví dụ 4: Tìm m để hàm số $y = m\sin x + (m - 3)\cos x - 3x$ luôn giảm trên $[0; 4\pi]$.

Giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$;

$y' = m\cos x - (m - 3)\sin x - 3$;

Ta có:

$* \ |m\cos x - (m-3)\sin x| \leq \sqrt{m^2 + (m-3)^2}, \forall x \in [0; 4\pi]$.

$\Rightarrow m\cos x - (m-3)\sin x \leq \sqrt{m^2 + (m-3)^2}, \forall x \in [0; 4\pi]$

$\Rightarrow y' \leq \sqrt{m^2 + (m-3)^2} - 3, \forall x \in [0; 4\pi]$.

* Phương trình $y' = 0$ nếu có nghiệm thì có hữu hạn nghiệm thuộc $(0; 4\pi)$.
* Hàm số đã cho liên tục trên $[0; 4\pi]$.

Do đó: Hàm số nghịch biến trên $[0; \pi]$

$\Leftrightarrow \quad y' \le 0, \forall x \in [0; 4\pi] \Leftrightarrow \sqrt{m^2 + (m-3)^2} - 3 \le 0$

$\Leftrightarrow \quad 2m^2 - 6m \le 0 \Leftrightarrow 0 \le m \le 3.$

Vậy m thỏa YCBT $\Leftrightarrow 0 \le m \le 3$.

3. BÀI TẬP:

1. Định m để hàm số

a. $y = \dfrac{1}{3}x^3 + mx^2 + (4m-3)x + 3$ đồng biến trên R.

b. $y = \left(\dfrac{1-m}{3}\right)x^3 - 2(1-m)x^2 + 2(m-2)x + 5$ nghịch biến trên R.

c. $y = \dfrac{mx - m^2 - 1}{x+2}$ luôn tăng trên từng khoảng xác định.

d. $y = \dfrac{mx^2 - 2x + 1}{x+1}$ luôn giảm trên từng khoảng xác định.

2. Định m để hàm số

a. $y = x^2 - 2(m-4)x + m + 3$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

b. $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2mx^2 - 4mx - 2$ đồng biến trên $(-\infty; 0)$.

c. $y = \dfrac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + 4x - 10$ nghịch biến trên đúng một khoảng có độ dài bằng 2.

d. $y = \dfrac{mx - 8}{x - m - 2}$ nghịch biến trên $(1; +\infty)$.

e. $y = \dfrac{x^2 - 2mx + m^2 + 1}{x - m}$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.

3. Định m để hàm số:

a. $y = x + (m+1)\sin x$ tăng trên $[0; 2\pi]$.

b. $y = m\sin x + 2\cos x + (m+2)x$ tăng trên $(0; 10\pi)$.

Dạng 4: Chứng minh bất đẳng thức $F(x) \ge 0$ với mọi $x \in K$

1. PHƯƠNG PHÁP:

Chứng minh hàm số F(x) liên tục và đơn điệu trên K.

Áp dụng định nghĩa sự đơn điệu suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

2. VÍ DỤ:

Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a. $\sin x < x$ với mọi $x > 0$. b. $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ với mọi $x \neq 0$.

Giải

a) **Cách 1**:

Với mỗi $x > 0$, xét hàm số $f(t) = t - \sin t$ trên $[0; a]$ với $a > x$.

Ta có: * $f(t)$ liên tục trên $[0; a]$.

* $f'(t) = 1 - \cos t \geq 0, \forall t \in (0; a)$.

* Phương trình $f'(t) = 0$ có hữu hạn nghiệm $t \in (0; a)$.

Vậy $f(t)$ đồng biến trên $[0; a]$.

Do đó $f(x) > f(0)$ (vì $x > 0$) $\Rightarrow x - \sin x > 0$ hay $\sin x < x$.

Vậy ta luôn có $\sin x < x$ với mọi $x > 0$.

Cách 2:

* Khi $x \geq \pi$: thì $\sin x \leq 1 < \pi \leq x$ nên $\sin x < x$ với mọi $x \geq \pi$ (1).

* Khi $x \in [0; \pi)$, xét hàm số $f(x) = x - \sin x$ trên $[0; \pi)$ ta có:

+ f liên tục trên $[0; \pi)$.

+ $f'(x) = 1 - \cos x > 0\ \forall x \in (0; \pi)$.

Vậy f đồng biến trên $[0; \pi)$.

Do đó: $\forall x \in (0; \pi)$ thì $f(x) > f(0)$ hay $x - \sin x > 0$ hay $\sin x < x$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\sin x < x$ với mọi $x > 0$.

b) Ta có: $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + \cos x - 1 > 0$ (*).

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2}{2} + \cos x - 1$.

TH1: $x > 0$:

Ta có: + $f'(x) = x - \sin x > 0, \forall x \in (0; +\infty)$ (do câu a).

+ f liên tục trên $[0; +\infty)$.

Do đó: f đồng biến trên $[0; +\infty)$

Suy ra với $x > 0$ thì $f(x) > f(0) \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \cos x - 1 > 0 \Rightarrow$ (*) đúng với mọi $x > 0$.

TH2: $x < 0$, đặt $t = -x$ thì $t > 0$. Áp dụng kết quả của TH1, ta có:

$$\frac{t^2}{2} + \cos t - 1 > 0 \Rightarrow \frac{(-x)^2}{2} + \cos(-x) - 1 > 0 \Rightarrow \frac{x^2}{2} - \cos x - 1 > 0.$$

$\Rightarrow$ (*) đúng với mọi $x < 0$.

Vậy (*) đúng với mọi $x \neq 0$.

3. BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng:

$\sin x > x - \frac{x^3}{6}$ với mọi $x > 0$ và $\sin x < x - \frac{x^3}{6}$ với mọi $x < 0$.

2. Chứng minh:

a. $3x < 2\sin x + \tan x, \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$

b. $2\sin x + \sin 2x \le \frac{3\sqrt{3}}{2}, \forall x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$

3. Cho $a \le 6$, $b \le -8$, $c \le 3$ và $x \ge 1$. Chứng minh rằng $x^4 - ax^2 - bx \ge c$.

4. Chứng minh rằng với mọi $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ ta có $\tan x \le \frac{4x}{\pi}$.

5. Chứng minh rằng với mọi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ta có $\tan x > x + \frac{x^3}{3}$.

Dạng 5: Dùng tính đơn điệu của hàm số để giải phương trình – hệ phương trình.

1. PHƯƠNG PHÁP:

a) Để chứng minh phương trình $F(x) = 0$ có nghiệm duy nhất ta thực hiện:

Bước 1: Chỉ ra một nghiệm của phương trình hay dùng tính chất hàm số liên tục để chứng minh phương trình có nghiệm.

Bước 2: Chứng minh $F(x)$ là hàm số liên tục và luôn tăng hay luôn giảm suy ra phương trình $F(x) = 0$ nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Kết luận: Phương trình $F(x) = 0$ có nghiệm duy nhất.

b) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và tăng (hay giảm) trên X thì với $u, v \in X$ ta có $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$.

2. VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Giải phương trình $9\left(\sqrt{4x+1} - \sqrt{3x-2}\right) = x + 3$ (1).

Giải

Điều kiện: $x \ge \frac{2}{3}$.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{9\left[(4x+1)-(3x-2)\right]}{\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2}} = x+3 \Leftrightarrow \sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2}-9 = 0 \ (2)$$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{4x+1} + \sqrt{3x-2} - 9$

Ta có: $f'(x) = \dfrac{4}{2\sqrt{4x+1}} + \dfrac{3}{2\sqrt{3x-2}} > 0$ với mọi $x > \dfrac{2}{3}$.

$\Rightarrow$ f(x) tăng và liên tục trên $\left[\dfrac{2}{3}; +\infty\right)$

$\Rightarrow$ (2) nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Mặt khác $f(6) = 0$ nên $x = 6$ là một nghiệm của (2).

Vậy (2) có nghiệm duy nhất là $x = 6$.

Do đó (1) có một nghiệm là $x = 6$.

Ví dụ 2: Giải phương trình $8x^3 - 4x - 2 = \sqrt[3]{6x+2}$ (1).

Giải

(1) $\Leftrightarrow (2x)^3 + 2x = 6x + 2 + \sqrt[3]{6x+2}$

Đặt $u = 2x$ và $v = \sqrt[3]{6x+2}$, ta được (1) $\Leftrightarrow u^3 + u = v^3 + v$ (2)

Xét $f(t) = t^3 + t$, ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in R$.

Do đó

(2) $\Leftrightarrow f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow 2x = \sqrt[3]{6x+2}$

$\Leftrightarrow 8x^3 - 6x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(8x^2 + 8x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$. Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x + \sqrt{x^2 - x + 1}} - \sqrt{y + \sqrt{y^2 - y + 1}} = (y - x)(xy + 2) & (1) \\ x^2 + y^2 = 2 & (2) \end{cases}$$

Giải

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{t + \sqrt{t^2 - t + 1}}$:

* Tập xác định: D = R;

$$* \ f'(t) = \frac{1 + \dfrac{2t-1}{2\sqrt{t^2-t+1}}}{2\sqrt{t + \sqrt{t^2-t+1}}} = \frac{2\sqrt{t^2-t+1} + 2t - 1}{4\sqrt{t+\sqrt{t^2-t+1}}.\sqrt{t^2-t+1}}$$

Vì $2\sqrt{t^2-t+1} + 2t - 1 = \sqrt{(2t-1)^2 + 3} + 2t - 1 > |2t-1| + 2t - 1 \ge 0$ nên ta có $f'(t) > 0 \ \forall t \in R$. Suy ra f(t) tăng trên R.

Mặt khác ta có: $2 = x^2 + y^2 \geq 2|xy|$ nên $|xy| \leq 1 \Rightarrow 2 + xy > 1 + xy \geq 0$.

Do đó ta có:

➢ $x > y$ thì $f(x) > f(y)$ và $y - x < 0 \Rightarrow$ Vế trái (1) > 0 > Vế phải (1).

$\Rightarrow$ Hệ không có nghiệm (x; y) thỏa $x > y$.

➢ $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ và $y - x > 0 \Rightarrow$ Vế trái (1) < 0 < Vế phải (1).

$\Rightarrow$ Hệ không có nghiệm (x; y) thỏa $x < y$.

Vậy nếu (x; y) là nghiệm của hệ thì $x = y$.

Khi đó (2) $\Leftrightarrow 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là (1; 1), (–1; –1).

3. BÀI TẬP

1. Giải các phương trình

a) $\sqrt{2x+3} + 3\sqrt{4x+13} = 18$

b) $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} + \sqrt{3x+7} + \sqrt{4x+24} = 15$

c) $\sqrt{x-1} = -x^3 + 3x^2 - 4x + 5$.

2. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x - y = \cos x - \cos y \\ \cos x + \cos y = 1 \end{cases}$ $(x \in (-\pi; 2\pi))$

b) $\begin{cases} \tan x - \tan y = y - x \\ 2x^2 + 6y^2 = \pi^2 \end{cases}$ $\left(x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$

c) $\begin{cases} \sqrt{x+6} + \sqrt{y-9} = 5 \\ \sqrt{x-9} + \sqrt{y+6} = 5 \end{cases}$

3. Chứng minh phương trình $x^5 - x^2 - 2x - 1 = 0$ có nghiệm duy nhất.

4. Chứng minh các phương trình sau có nghiệm duy nhất:

a) $6x + 3\cos x + 2\sin x = 0$ b) $2x = 2a + \sin(x + a)$

c) $x^5 - 5x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 5x + 1 = 0$. d) $x^2\sqrt{x-2} + x = 11\sqrt{30-x}$.

5. Chứng minh rằng với mọi $m \in (-1; 1)$ thì phương trình $\sin^2 x + \cos x = m$ có nghiệm duy nhất thuộc đoạn $[0; \pi]$.

§2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

I. KHÁI NIỆM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Định nghĩa: Giả sử hàm số f xác định trên tập hợp D ($D \subset R$) và $x_0 \in D$.

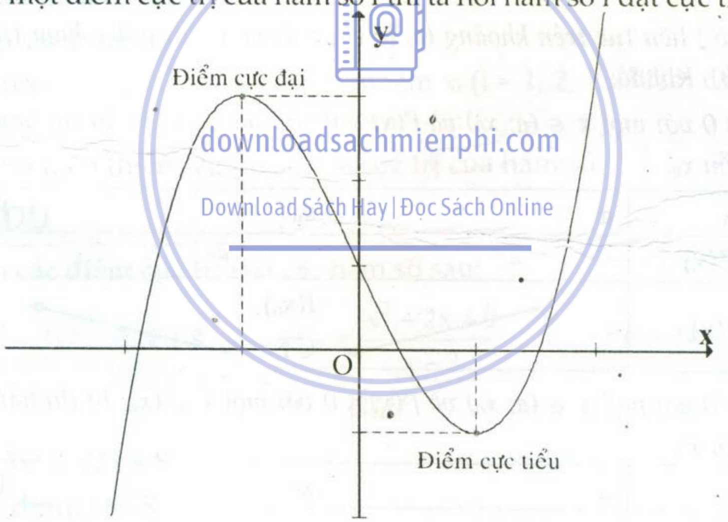
a) x_0 được gọi là **điểm cực đại** của hàm số f nếu tồn tại khoảng (a; b) có chứa điểm x_0 sao cho $(a; b) \subset D$ và $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$.

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại của hàm số f.

b) x_0 được gọi là **điểm cực tiểu** của hàm số f nếu tồn tại khoảng (a; b) có chứa điểm x_0 sao cho $(a; b) \subset D$ và $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$.

Khi đó $f(x_0)$ được gọi **là giá trị cực tiểu** của hàm số f.

* Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị**.
* Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là **giá trị cực trị**.
* Nếu x_0 là một điểm cực trị của hàm số f thì ta nói hàm số f đạt cực trị tại x_0.



Chú ý:

a) Giá trị cực đại (cực tiểu) $f(x_0)$ của hàm số f nói chung không phải là GTLN (GTNN) của hàm số f trên tập xác định D.

b) Một hàm số f có thể đạt cực trị tại nhiều điểm trên tập xác định D và các cực trị nói chung là khác nhau. Hàm số f cũng có thể không có cực trị trên một tập hợp cho trước.

c) Nếu x_0 là một điểm cực trị của hàm số f thì điểm $M(x_0; f(x_0))$ được gọi điểm cực trị của đồ thị hàm số f.

II. ĐIỀU KIỆN CẦN ĐỂ HÀM SỐ ĐẠT CỰC TRỊ

Định lý 1:

Cho hàm số f đạt cực trị tại x_0.

Khi đó: Nếu f có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

Chú ý:

* Từ định lí trên ta suy ra: Hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại các điểm $x_0 \in D$ mà tại x_0 hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc hàm số không có đạo hàm.

* Chiều ngược lại của định lí 1 có thể không đúng.

Chẳng hạn:

➢ Có những hàm số *có đạo hàm bằng 0 tại x_0* nhưng tại x_0 hàm số *không đạt cực trị.*

➢ Có những hàm số f đạt cực trị tại một điểm mà tại điểm đó hàm số không có đạo hàm.

III. ĐIỀU KIỆN ĐỦ ĐỂ HÀM SỐ ĐẠT CỰC TRỊ

Định lý 2:

Cho hàm số f liên tục trên khoảng (a; b) chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$. Khi đó:

*a) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì hàm số f **đạt cực tiểu** tại điểm x_0.*

x	a	x_0	b
f'(x)	–		+
f(x)	↘	$f(x_0)$ CT	↗

*b) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì hàm số f **đạt cực đại** tại điểm x_0.*

x	a	x_0	b
f'(x)	+		–
f(x)	↗	CT $f(x_0)$	↘

Từ định lí 2 ta có quy tắc tìm cực trị sau :

Quy tắc 1:

1) Tìm $f'(x)$

2) Tìm các điểm x_i (i = 1, 2, …) mà tại đó $f'(x_i) = 0$ hoặc tại đó hàm số f liên tục nhưng không có đạo hàm

3) Lập bảng biến thiên. Từ đó suy ra cực trị của hàm số.

Định lý 3:

Cho hàm số f có đạo hàm cấp một trên khoảng (a; b) chứa điểm x_0, $f'(x_0) = 0$ và f có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0.

a) Nếu $f''(x_0) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0.

b) Nếu $f''(x_0) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0.

Từ định lý 3 ta có quy tắc 2 để tìm cực trị sau:

Quy tắc 2:

1) Tìm $f'(x)$;

2) Tìm các nghiệm x_i (i = 1, 2, …) của phương trình $f'(x) = 0$;

3) Tìm $f''(x)$ và tính $f''(x_i)$

** Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại x_i.*

** Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại x_i.*

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: Tìm cực trị của hàm số theo quy tắc 1

1. PHƯƠNG PHÁP

1) Tìm tập xác định; tính $f'(x)$;

2) Giải phương trình y' = 0, tìm các nhiệm x_i (i = 1, 2, …). Tìm các điểm tại đó hàm số f liên tục nhưng không có đạo hàm;

3) Lập bảng biến thiên. Từ đó suy ra cực trị của hàm số.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Tìm các điểm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = 2x^3 - 3x^2 - 72x + 8$ b) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 9}{x - 2}$ c $y = 2x - |x^2 - 1|$.

Giải

a) $y = 2x^3 - 3x^2 - 72x + 8$

* Tập xác định: D = R;

* $y' = 6x^2 - 6x - 72 = 6(x^2 - x - 12)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = -3 & \Rightarrow y = 143 \\ x = 4 & \Rightarrow y = -200 \end{array}\right.$$

* Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
y'							
y		$\nearrow$	143	$\searrow$	-200	$\nearrow$	

Vậy: Hàm số đạt cực đại tại $x = -3$, $y_{CĐ} = 143$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$, $y_{CT} = -200$.

b) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 9}{x - 2}$

* Tập xác định: $D = R\setminus\{2\}$;

* $y' = \dfrac{x^2 - 4x - 5}{(x-2)^2}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \Rightarrow y = -4 \\ x = 5 \Rightarrow y = 8 \end{array}\right.$$

* Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		2		5		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y		↗	-4	↘	‖	↘	8	↗	

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = -1$, $y_{CĐ} = -4$ và đạt cực tiểu tại $x = 5$, $y_{CT} = 8$.

c) $y = 2x + |x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 + 2x - 4 \text{ khi } x \le -2 \text{ hay } x \ge 2 \\ -x^2 + 2x + 4 \text{ khi } -2 < x < 2 \end{cases}$

* Tập xác định: $D = R$;

* $y' = \begin{cases} 2x + 2 \quad \text{khi } x < -2 \text{ hay } x > 2 \\ -2x + 2 \text{ khi } -2 < x < 2 \end{cases}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 5.$

Tại $x = \pm 2$ hàm số không có đạo hàm.

* Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
y'		−	‖	+	0	−	‖	+	
y		↘	-4	↗	5	↘	4	↗	

Vậy: Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CĐ} = 5$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$, $y_{CT} = -4$ và tại $x = 2$; $y_{CT} = 4$.

3. BÀI TẬP

1. Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ b) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x - 2$

c) $y = \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 2x + 1$

d) $y = 4 - 2x^2 - x^4$

e) $f(x) = x^4 - 4x^2 - 5$

f) $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 2$.

2. Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$

b) $f(x) = x + 3 + \frac{4}{x}$

c) $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

d) $y = \frac{x^2}{x^3 + 1}$

3. Tìm cực trị của hàm số sau:

a) $f(x) = |x|(x + 4)$

b) $y = | x^2 - 6x + 5 | + 2x$

c) $y = x^2 + 3x + \sqrt{x^2 - 6x + 9}$

4. Tìm cực trị của hàm số sau:

a) $y = x\sqrt{4 - x^2}$

b) $y = x + \sqrt{x^2 + 1}$

c) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 12}$

d) $y = \sqrt{5 - 4x - x^2}$

Vấn đề 2: Tìm cực trị của hàm số theo quy tắc 2

1. PHƯƠNG PHÁP

1) Tìm $f'(x)$;

2) Tìm các nghiệm x_i $(i = 1, 2, \ldots)$ của phương trình $f'(x) = 0$;

3) Tìm $f''(x)$ và tính $f''(x_i)$

** Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại x_i.*

** Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại x_i.*

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Tìm các điểm cực trị của các hàm số $y = x^4 - 8x^2 - 6$

Giải

* Tập xác định: $D = \mathbb{R}$;

* $y' = 4x^3 - 16x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = -6 \\ x = \pm 2 \Rightarrow y = -22 \end{array}\right.$

* $y'' = 12x^2 - 16$

Ta có: $y''(0) = -16 < 0 \Rightarrow$ Tại $x = 0$ hàm số đạt cực đại và $y_{CĐ} = 3$;

$y''(\pm 2) = 32 > 0 \Rightarrow$ Tại $x = \pm 2$ hàm số đạt cực tiểu và $y_{CT} = -22$.

Ví dụ 2: Tìm các điểm cực trị của các hàm số $y = \sin 2x + \cos 2x + \sqrt{2}$

Giải

* Tập xác định: D = R;

* $y' = 2\cos 2x - 2\sin 2x$;

$y' = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \cos 2x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$.

* $y'' = -4\sin 2x - 4\cos 2x$

Ta có:

$$y''\left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right) = -4\sin\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) - 4\cos\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = \begin{cases} -4\sqrt{2} & \text{khi } k = 2m \\ 4\sqrt{2} & \text{khi } k = 2m - 1 \end{cases}$$

Suy ra: + Tại $x = \frac{\pi}{8} + m\pi$ hàm số đạt cực đại và $y_{CĐ} = 2\sqrt{2}$;

+ Tại $x = -\frac{7\pi}{8} + m\pi$ hàm số đạt cực tiểu và $y_{CT} = 0$.

3. BÀI TẬP

1. Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = x - \sin 2x + 2$ b) $y = 3 - 2\cos x - \cos 2x$

2. Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = \sin 2x + \cos 2x + \sqrt{2}$ b) $y = \sin^2 x - \sqrt{3}\cos x$

Vấn đề 3: Điều kiện để hàm số đạt cực trị

1. PHƯƠNG PHÁP

1) Tìm tập xác định D và tính $f'(x)$;

2) Hàm số đạt cực trị tại $x_0 \in D \Leftrightarrow f'(x)$ đổi dấu khi qua x_0.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 2: Định giá trị của m để hàm số sau có cực trị

a) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3m - 2}{x - m}$ b) $y = x^3 - 3mx^2 - 3(m^2 - 8)x + m$

Giải

a) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3m - 2}{x - m}$

* Tập xác định: $D = R\backslash\{m\}$.

* $y' = \dfrac{x^2 - 2mx - m + 2}{(x-m)^2}$

* $y' = 0 \Leftrightarrow g(x) = x^2 - 2mx - m + 2 = 0$ (1) $(x \neq m)$.

Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow y'$ đổi dấu trên D

$\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt khác m.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(m) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 2 > 0 \\ -m^2 - m + 2 \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m < -1$ hay $m > 2$.

Vậy m thỏa yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m < -1$ hay $m > 2$.

b) $y = x^3 - 3mx^2 - 3(m^2 - 8)x + m$

* Tập xác định: D = R

* $y' = 3x^2 - 6mx - 3m^2 + 24$

* $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx - 3m^2 + 24 = 0$ (2)

Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow y'$ đổi dấu trên D

$\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' = (3m)^2 + 9m^2 - 72 > 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 4 > 0$

$\Leftrightarrow m < -2$ hay $m > 2$.

3. BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng hàm số $y = \dfrac{x^2 - m(m+1)x + m^3 + 1}{x - m}$ luôn có cực đại và cực tiểu.

2. Định m để hàm số có cực đại, cực tiểu:

a) $y = x^3 + 3x^2 + mx - 10$ b) $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + 3m + 4$

c) $y = \dfrac{x^2 - mx + 3}{x - 1}$ d) $y = \dfrac{x^2 - (m+1)x + 2m - 1}{x - m}$

3. Định m để hàm số $y = -2x + m\sqrt{x^2 + 1}$

a) Có cực trị b) Có cực đại.

Vấn đề 4 : Định giá trị tham số để hàm số đạt cực trị tại x_0 cho trước

1. PHƯƠNG PHÁP

1) Tìm tập xác định D và tính f'(x);

2) Điều kiện cần: Hàm số có cực trị tại $x_0 \Rightarrow y'(x_0) = 0 \Rightarrow$ Giá trị của tham số.

3) Thay giá trị tham số vừa tìm được vào y' thử lại.

Chú ý:

- Khi thử lại ta có thể dùng một trong hai cách: Dùng Quy tắc 1 hay Quy tắc 2.
- Khi phương trình y′ = 0 có thể xác định được nghiệm cụ thể thì ta lập bảng biến thiên và dựa vào bảng biến thiên để suy ra yêu cầu bài toán.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Định m để hàm số $y = \dfrac{x^2 - mx + 1}{x - m}$ đạt cực đại tại x = 10.

Giải

* Tập xác định : D = R\{m}.

* $y' = \dfrac{x^2 - 2mx + m^2 - 1}{(x-m)^2}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m - 1 \\ x = m + 1 \end{array}\right.$$

* Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$m-1$		m		$m+1$		$+\infty$
y′		+	0	−	‖	−	0	+	
y		↗	CĐ	↘	‖	↘	CT	↗	

Dựa vào bảng biến thiên ta có :

Hàm số đạt cực đại tại $x = 10 \Leftrightarrow m - 1 = 10 \Leftrightarrow m = 11$.

Vậy m thỏa bài toán $\Leftrightarrow m = 11$.

Ví dụ 2: Định a để hàm số $y = 2x - a\sin x + \dfrac{1}{3}\sin 3x$ đạt cực tiểu tại $x = \dfrac{\pi}{3}$.

Giải

* Tập xác định : D = R.

* $y' = 2 - a\cos x + \cos 3x$

* Hàm số đạt cực trị tại $x = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow y'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow 2 - a\cos\frac{\pi}{3} + \cos 3.\frac{\pi}{3} = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{a}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 2.$$

* Đảo lại: Với a = 2 ta có $y' = 2 - 2\cos x + \cos 3x \Rightarrow y'' = 2\sin x - 3\sin 3x$.

Ta có : $y''\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 2\sin\dfrac{\pi}{3} - 3\sin\pi = \sqrt{3} > 0 \Rightarrow$ Tại $x = \dfrac{\pi}{3}$ hàm số đạt cực tiểu.

Vậy : Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow a = 2$.

Ví dụ 3: Định m để hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + (3m-4)x + 5$ đạt cực đại tại $x = 1$.

Giải

* Tập xác định: D = R.

* $y' = 3x^2 - 2(m+1)x + 3m - 4$.

* Hàm số đạt cực đại tại $x = 1 \Rightarrow y'(1) = 0$

$$\Leftrightarrow 3 - 2(m+1) + 3m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 3.$$

* Khi m = 3 thì $y' = 3x^2 - 8x + 5 \Rightarrow y'' = 6x - 8$.

Ta có: $y''(1) = -2 < 0 \Rightarrow$ Tại x = 1 hàm số đạt cực đại.

Vậy m = 3 thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m-1)x^2 + (m^2+6m)x + 4$.

Định m để hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $x_1 < x_2 < 1$.

Giải

Tập xác định: D = R;

$y' = x^2 - 2(m-1)x + m^2 + 6m$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m-1)x + m^2 + 6m = 0$ (1)

Đặt $t = x - 1 \Leftrightarrow x = t + 1$.

(1) trở thành $(t+1)^2 - 2(m-1)(t+1) + m^2 + 6m = 0$

$$\Leftrightarrow t^2 + 2t + 1 - 2(m-1)t - 2m + 2 + m^2 + 6m = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 2(m-2)t + m^2 + 4m + 3 = 0 \ (2)$$

YCBT $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1 < x_2 < 1$

$\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm t_1, t_2 sao cho $t_1 < t_2 < 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -8m + 1 > 0 \\ 2(m-2) < 0 \\ m^2 + 4m + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{8} \\ m < 2 \\ m < -3 \text{ hay } m > -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m < -3 \text{ hay } -1 < m < \frac{1}{8}.$$

Chú ý:

Khi cần so sánh nghiệm của một phương trình bậc hai với α, ta đặt $t = x - \alpha$.

3. BÀI TẬP

1. Tìm a, b, c, d của hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sao cho f(x) đạt cực tiểu tại $x = 0$, $f(0) = 0$ và đạt cực đại tại $x = 1$, $f(1) = 1$.

2. Cho hàm số : $y = \dfrac{x^2 - ax + 2b}{x^2 - 2x + 1}$.

   Tìm a, b để hàm số có giá trị cực trị bằng $\dfrac{5}{4}$ khi $x = -3$.

3. Xác định các hệ số a, b, c sao cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ đạt cực trị bằng 0 tại điểm $x = -2$ và đồ thị của hàm số qua điểm A(1; 0).

4. Định m để hàm số $y = x^3 - (m - 3)x^2 + (4m - 1)x - m$ đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $x_1 < -2 < x_2$.

5. Định m để hàm số $y = \dfrac{x^2 + (m+1)x + 2m + 1}{x + 1}$ đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $x_1 < x_2 < 2$.

6. Định m để hàm số $y = \dfrac{mx^2 - 2x + m}{x^2 - x}$

   a) Đạt CĐ, CT tại các điểm có hoành độ dương.

   b) Chỉ có một cực trị.

7. Tìm m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} + mx^2 + (m + 6)x + 2$ có hai điểm cực trị ở về hai phía đối với trục Oy.

8. Tìm m để hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + m^2 - 3m$ đạt CĐ, CT tại x_1, x_2 thỏa $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

Vấn đề 5: Giá trị cực trị của hàm số bậc ba và hàm số dạng phân thức.

1. PHƯƠNG PHÁP:

a) Cho hàm số bậc ba: $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đạt cực trị tại x_0.

Khi đó: Lấy y chia cho y′ ta được thương là T(x) và dư là $D(x) = \alpha x + \beta$.

Ta viết được $y = f(x) = y'.T(x) + D(x)$.

Ta có: Tọa độ điểm cực trị của hàm số thỏa hệ:

$$\begin{cases} y' = 0 \\ y = y'.T(x) + D(x) \end{cases} \Rightarrow y = D(x) = \alpha x + \beta.$$

Do đó ta có $y(x_0) = \alpha x_0 + \beta$.

b) Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ đạt cực trị tại x_0.

Ta có: Tọa độ điểm cực trị của hàm số thỏa hệ:

$$\begin{cases} y' = 0 \\ y = \dfrac{u(x)}{v(x)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x)v(x) = u(x)v'(x) \\ y = \dfrac{u(x)}{v(x)} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u'(x)}{v'(x)}.$$

Do đó ta có $y(x_0) = \dfrac{u'(x_0)}{v'(x_0)}$.

2. VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Định m để hàm số $y = \dfrac{2x^2 + (m+2)x - 4 - m}{2x - m}$ có cực đại, cực tiểu sao cho:

a) Hai giá trị cực trị cùng dấu.

b) Hai điểm cực trị cùng với điểm A(1; 1) tạo thành một tam giác vuông tại A.

Giải

* Tập xác định: $D = R \setminus \{\frac{m}{2}\}$.

* $y' = \dfrac{4x^2 - 4mx - m^2 + 8}{(2x - m)^2}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow g(x) = 4x^2 - 4mx - m^2 + 8 = 0\ (x \neq m)$.

Hàm số có cực đại, cực tiểu

$\Leftrightarrow$ y′ đổi dấu hai lần trên D

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_g > 0 \\ g(m) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8m^2 - 32 > 0 \\ -8m^2 + 32 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -2 \text{ hay } m > 2.$$

Khi đó: Tọa độ điểm cực trị thỏa hệ:

$$\begin{cases} y = \dfrac{u(x)}{v(x)} \\ y' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x)v(x) = u(x)v'(x) \\ y = \dfrac{u(x)}{v(x)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u'(x)}{v'(x)} = \frac{4x + m + 2}{2}.$$

Do đó: $y_{CĐ} = \dfrac{4x_{CT} + m + 2}{2}$; $y_{CT} = \dfrac{4x_{CĐ} + m + 2}{2}$.

$$x_{CĐ}.x_{CT} = \frac{-m^2 + 8}{4} \text{ và } x_{CĐ} + x_{CT} = m.$$

a) $y_{CĐ}$ và y_{CT} cùng dấu

$\Leftrightarrow y_{CĐ}.\, y_{CT} > 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4}[16x_{CĐ}x_{CT} + 4(m + 2)(x_{CĐ} + x_{CT}) + (m + 2)^2] > 0$

$\Leftrightarrow 16.\frac{-m^2+8}{4} + 4(m + 2)(m) + (m + 2)^2 > 0$

$\Leftrightarrow m^2 + 12m + 36 > 0$

$\Leftrightarrow m \neq -6.$

Vậy m thỏa yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m < -2$ hay $m > 2$ và $m \neq -6$.

b) Ta có hai điểm cực trị là $M(x_{CĐ}; y_{CĐ})$ và $N(x_{CT}; y_{CT})$.

Suy ra: $\overrightarrow{AM} = \left(x_{CĐ} - 1; \frac{4x_{CĐ}+m}{2}\right)$ và $\overrightarrow{AN} = \left(x_{CT} - 1; \frac{4x_{CT}+m}{2}\right)$

Do đó: Δ AMN vuông tại A

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = 0$

$\Leftrightarrow (x_{CĐ} - 1)(x_{CT} - 1) + \frac{(4x_{CĐ}+m)(4x_{CT}+m)}{4} = 0$

$\Leftrightarrow 4x_{CĐ}x_{CT} - 4(x_{CĐ} + x_{CT}) + 4 + 16x_{CĐ}x_{CT} + 4m(x_{CĐ} + x_{CT}) + m^2 = 0$

$\Leftrightarrow 20x_{CĐ}x_{CT} + (4m - 4)(x_{CĐ} + x_{CT}) + m^2 + 4 = 0$

$\Leftrightarrow 5(-m^2 + 8) + (4m - 4)(m) + m^2 + 4 = 0$

$\Leftrightarrow -4m + 44 = 0$

$\Leftrightarrow m = 11$ (thỏa điều kiện $m < -2$ hay $m > 2$).

Vậy m thỏa bài toán $\Leftrightarrow m = 11$.

Chú ý: Khi gặp các bài toán đòi hỏi đến tọa độ các điểm cực trị ta thường biến đổi để đưa về áp dụng định lí Viet đối với phương trình bậc hai.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3(4m - 3)x + 3$.

Định m để hàm số có cực đại, cực tiểu và khoảng cách giữa hai tiếp tuyến của đồ thị tại hai điểm cực trị bằng 32.

Giải

Tập xác định: D = R.

$y' = 3x^2 - 6x + 3(4m - 3)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3(4m - 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 4m - 3 = 0$ (1)

* Hàm số có cực đại, cực tiểu

$\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2.

$\Leftrightarrow \Delta' = 1 - 4m + 3 > 0 \Leftrightarrow 4m - 4 < 0 \Leftrightarrow m < 1$

* Chia y cho y' ta viết được:

$y = \frac{x-1}{3}y' + (8m - 8)x + 4m$.

Tọa độ điểm cực trị của đồ thị thỏa hệ:

$$\begin{cases} y' = 0 \\ y = \dfrac{x-1}{3}y' + (8m-8)x + 4m \end{cases}$$

$\Rightarrow y = (8m-8)x + 4m$.

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = (8m-8)x_1 + 4m \\ y_2 = (8m-8)x_2 + 4m \end{cases}.$$

Vì tại điểm cực trị ta có y' = 0 nên:

Tiếp tuyến của đồ thị tại $A(x_1; y_1)$ là d_A: $y = y_1$.

Tiếp tuyến của đồ thị tại $B(x_2; y_2)$ là d_B: $y = y_2$.

Suy ra $d = d(d_A; d_B) = |y_1 - y_2| = |(8m-8)(x_1 - x_2)|$

Do đó: YCBT $\Leftrightarrow d^2 = 32^2$

$\Leftrightarrow (8m-8)^2[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2] = 32^2$.

$\Leftrightarrow (8m-8)^2[(2)^2 - 4(4m-3)] = 32^2$

$\Leftrightarrow (m-1)^2[16 - 16m] = 16$

$\Leftrightarrow (m-1)^2(1-m) = 1$

$\Leftrightarrow (m-1)^3 = -1$

$\Leftrightarrow m - 1 = -1 \Leftrightarrow m = 0$.

Vậy m thỏa yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m = 0$.

3. BÀI TẬP

1. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2mx + m + 1}{x-1} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$.

a) Tìm m để hàm số đạt cực đại, cực tiểu tại các điểm có hoành độ dương.

b) Giả sử x_0 là hoành độ cực trị. Chứng minh rằng: $y(x_0) = \dfrac{u'(x_0)}{v'(x_0)}$.

c) Khi hàm số có cực đại và cực tiểu. Tìm m để $y_{CĐ}$ và y_{CT} cùng dấu.

2. Cho hàm số $y = \dfrac{mx^3}{3} - mx^2 + x - 1$.

a) Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu.

b) Giả sử x_0 là hoành độ cực trị; R(x) là biểu thức dư khi chia y cho y'.
Chứng minh rằng: $f(x_0) = R(x_0)$.

c) Khi hàm số có cực đại và cực tiểu. Tìm m để $y_{CĐ}$ và y_{CT} cùng dấu.

3. Cho hàm số $y = \dfrac{-x^2 + 3x + m}{x-4}$.

Định m để hàm số có cực đại và cực tiểu thoả điều kiện: $|y_{CĐ} - y_{CT}| = 4$.

4. Định m để các hàm số sau có cực đại và cực tiểu. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị đó.

a) $y = \dfrac{x^2 - 2x + m + 2}{x + m - 1}$ b) $y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1 - m^2)x + m^3 - m^2$.

5. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + (m+1)x + m + 1}{x + 1}$ (C_m). CMR: Với m bất kỳ, (C_m) luôn có điểm cực đại, điểm cực tiểu và khoảng cách giữa hai điểm đó bằng $\sqrt{20}$.

6. Cho hàm số $y = x + |x^2 - 2x + m|$

a) Tùy theo m hãy lập bảng biến thiên của hàm số

b) Định m để hàm số có cực đại và $y_{CĐ} < 3$.

7. Tìm m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2m^2x + m}{x + 1}$ có hai điểm cực trị ở về hai phía đối với trục Ox.

8. Tìm m để đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3(2m + 1)x^2 + 6m(m + 1)x + 1$ có hai điểm cực trị đối xứng nhau qua đường thẳng (d): $y = x + 4$.

9. Cho $y = \dfrac{x^2 + 2mx + 2}{x + 1}$. Tìm m để đồ thị hàm số có điểm CĐ, CT và khoảng cách từ 2 điểm đó đến đường thẳng $x + y + 1 = 0$ bằng nhau.

10. Tìm m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m}{x + 2}$ có hai điểm cực trị và các điểm cực trị này cùng với gốc tọa độ O tạo thành tam giác vuông tại O.

§3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

Giả sử hàm số f xác định trên tập hợp $X \subset R$

a) Nếu tồn tại một điểm $x_0 \in X$ sao cho $f(x) \le f(x_0)$ với mọi $x \in X$ thì số $M = f(x_0)$ được gọi là *giá trị lớn nhất* của hàm số f trên X.

Kí hiệu: $M = \max\limits_{x \in X} f(x)$.

b) Nếu tồn tại một điểm $x_0 \in X$ sao cho $f(x) \ge f(x_0)$ với mọi $x \in X$ thì số $m = f(x_0)$ được gọi là *giá trị nhỏ nhất* của hàm số f trên X.

Kí hiệu: $m = \min\limits_{x \in X} f(x)$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Tùy theo tập hợp X và hàm số f ta có thể sử dụng một trong các phương pháp sau:

Vấn đề 1: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số f(x) trên X = [a; b].

1. PHƯƠNG PHÁP:

Nếu hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a; b] và f(x) có đạo hàm trên (a; b), có thể tìm GTLN và GTNN của hàm số f(x) trên đoạn [a; b] theo quy tắc sau:

B1. Tìm các điểm x_i $(i = 1, 2,\ldots) \in (a; b)$ mà tại các điểm đó hàm số f(x) có đạo hàm bằng không.

B2. Tính các giá trị $f(x_i)$ (i = 1, 2,…), f(a) và f(b).

B3. Số lớn nhất trong các giá trị trên là GTLN của hàm số f(x) trên đoạn [a; b].

Số nhỏ nhất trong các giá trị trên là GTNN của hàm số f(x) trên đoạn [a; b].

Chú ý: Khi bài toán không chỉ rõ tập hợp X thì ta hiểu tập X chính là tập xác định D của hàm số.

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Tìm GTLN và GTNN của hàm số: $f(x) = x^3 - 3x + 2$ trên đoạn [0; 2]

Giải

* Tập xác định: D = R; X = [0; 2].

* $f'(x) = 3x^2 - 3$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in X \\ x = -1 \notin X \end{array}\right.$$

* Ta có: f(0) = 2; f(1) = 0 và f(2) = 4. Vì f là hàm số liên tục trên [0; 2] nên ta có:

$\max\limits_X f(x) = 4$ đạt tại x = 2; $\min\limits_X f(x) = 0$ đạt tại x = 1.

Ví dụ 2: Tìm GTLN và GTNN của hàm số: $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{9-x}$.

Giải

* Tập xác định: D = [1; 9]; X = D = [1; 9].

* $$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{2\sqrt{9-x}} = \frac{\sqrt{9-x} - \sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}.\sqrt{9-x}}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{9-x} = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 9 - x = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5 \in X.$$

* Ta có: $f(1) = \sqrt{8}$; f(5) = 4 và $f(9) = \sqrt{8}$.

Vì f là hàm số liên tục trên [1; 9] nên ta có:

$\max\limits_X f(x) = 4$ đạt tại x = 5.

$\min\limits_X f(x) = \sqrt{8}$ đạt tại x = 1 hay x = 9.

3. BÀI TẬP:

1. Tìm GTLN và GTNN của các hàm số

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x - 4$ trên $[-4; 0]$.

b) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 5x + 4}{x + 2}$ trên $[-1; 1]$.

c) $f(x) = |x^2 - 3x + 2| - 3$ trên $[-10; 10]$.

d) $f(x) = x - \sin 2x$ trên $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$.

2. Tìm GTLN và GTNN của các hàm số $y = 5\cos x - \cos 5x$ trên $\left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right]$

3. Tìm GTLN và GTNN của các hàm số $y = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ trên $[-1 ; 2]$.

4. Tìm GTLN và GTNN của các hàm số

a) $y = x + \sqrt{4 - x^2}$ b) $y = x + \sqrt{12 - 3x^2}$.

c) $y = \sqrt{4 - x^2}\,(x + 2)$. d) $y = (3 - x)\sqrt{x^2 + 1}$ với $x \in [0; 2]$

5. Tìm GTLN và GTNN của hàm số: $y = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 9x$ trên $[-2; 2]$.

Vấn đề 2. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số f trên tập X không là một đoạn.

1. PHƯƠNG PHÁP:

Phương pháp thường dùng để tìm GTLN và GTNN của hàm số trên một tập hợp $X \neq [a; b]$ ta thực hiện các bước sau:

* Tìm tập xác định D và tập X .
* Tìm y' và giải phương trình y' = 0.
* Tìm các giới hạn khi x dần tới các điểm đầu khoảng của X.
* Lập bảng biến thiên của hàm số trên tập hợp X.
* Dựa vào bảng biến thiên suy ra GTLN hay GTNN của hàm số trên X.

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Tìm GTLN và GTNN của hàm số

$$f(x) = x + \frac{1}{x - 1}$$ trên khoảng $(1; +\infty)$.

Giải

* Tập xác định: $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$; $X = (1; +\infty)$.

* $y' = 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = 2$.

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$.

* Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y		↗		↘	‖ $+\infty$	↘	CT 3	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra:

$\min\limits_{X} f(x) = 3$ đạt tại $x = 2$. Hàm số không đạt giá trị lớn nhất trên X.

3. BÀI TẬP:

1. Tìm GTLN và GTNN của các hàm số

a) $f(x) = \dfrac{15(x^2+1)}{2x^2+x+2}$.   b) $y = \dfrac{2(x^2+3)}{x^2+x+2}$.

2. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = x + \sqrt{2x^2+1}$.

Vấn đề 3. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số f trên X bằng cách dùng ẩn phụ.

1. PHƯƠNG PHÁP:

Một số hàm số là hàm số phụ thuộc biểu thức k(x), ta có thể đổi biến số và thực hiện các bước sau:

B1: Đặt $t = k(x)$.

B2: Xác định điều kiện của t bằng cách tìm tập giá trị của hàm số $t = k(x)$ trên X.

Giả sử ta được: $x \in X \Leftrightarrow t \in T$.

B3: Đưa hàm số f(x) về dạng hàm số của đối số ta được $f(x) = g(t)$.

B4: Tìm GTLN, GTNN của g(t) trên T.

Kết luận: $\max\limits_{x\in X} f(x) = \max\limits_{t\in T} g(t)$ và $\min\limits_{x\in X} f(x) = \min\limits_{t\in T} g(t)$.

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Tìm GTLN và GTNN của hàm số $f(x) = \cos 2x + 2\sin x - 3$ trên $\left[-\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{5\pi}{6}\right]$.

Giải

Đặt t = sinx ;

Ta có: $x \in X = \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right] \Leftrightarrow t \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right] = T$.

Khi đó: $f(x) = -2\sin^2 x + 2\sin x - 2 = -2t^2 + 2t - 2 = g(t)$.

Ta có: $g'(t) = -4t + 2$

$g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

$g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{2}$; $g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$ và $g(1) = -2$.

Vậy $\max\limits_{X} f(x) = \max\limits_{T} g(t) = g(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}$

$\min\limits_{X} f(x) = \min\limits_{T} g(t) = g(-\frac{1}{2}) = -\frac{7}{2}$.

Ví dụ 2 : Tìm GTLN và GTNN của hàm số

$$f(x) = \sqrt{5-x} + \sqrt{x-1} - \sqrt{(x-1)(5-x)} + 5.$$

Giải

* Tập xác định : D = [1; 5]; X = D.

* Đặt $t = \sqrt{5-x} + \sqrt{x-1}$

Ta có: $t' = \frac{-1}{2\sqrt{5-x}} + \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{5-x} - \sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}.\sqrt{5-x}}$

$t' = 0 \Leftrightarrow x = 3$

$t(1) = 2$; $t(3) = 2\sqrt{2}$ và $t(5) = 2$.

Vậy $\max\limits_{[1;5]} t = 2\sqrt{2}$; $\min\limits_{[1;5]} t = 2$.

Do đó : $x \in [1; 5] \Leftrightarrow t \in T = \left[2; 2\sqrt{2}\right]$.

Khi đó $t^2 = 4 + 2\sqrt{(5-x)(x-1)} \Rightarrow \sqrt{(5-x)(x-1)} = \frac{t^2-4}{2}$.

Do đó : $f(x) = t - \frac{t^2-4}{2} + 5 = -\frac{1}{2}t^2 + t + 7 = g(t)$.

Ta có: $g'(t) = -t + 1$; $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \notin \left[2; 2\sqrt{2}\right]$.

$g(2) = 7$; $g(1) = \frac{15}{2}$ và $g\left(2\sqrt{2}\right) = 3 + 2\sqrt{2}$

Vậy $\underset{X}{\text{Max}}\, f(x) = \underset{T}{\text{Max}}\, g(t) = g(1) = \dfrac{15}{2}$

$\underset{X}{\text{Min}}\, f(x) = \underset{T}{\text{Min}}\, g(t) = g(2\sqrt{2}) = 3 + 2\sqrt{2}$.

3. BÀI TẬP:

1. Tìm GTLN và GTNN của các hàm số:

a) $f(x) = \cos^2 2x - 2\sqrt{3}\sin x.\cos x + 6$

b) $f(x) = \sin^4 x + \cos^2 x + 2$

c) $f(x) = \dfrac{9\sin^2 x - \sin x + 1}{9\sin^2 x + \sin x + 1}$ trên $\left[0; \dfrac{\pi}{6}\right]$.

d) $f(x) = \left(\dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}\right)^3 - 3\left(\dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}\right)^2 + 10$.

e) $y = \dfrac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$.

2. Tìm GTLN và GTNN của các hàm số:

a) $y = \dfrac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^6 x + \cos^6 x}$.

b) $y = 2(1 + \sin 2x \cos 4x) - \dfrac{1}{2}(\cos 4x - \cos 8x)$

Vấn đề 4: Giá trị lớn nhất - nhỏ nhất và điều kiện của tham số thỏa mãn điều kiện về nghiệm của phương trình, bất phương trình.

1. PHƯƠNG PHÁP:

a) Để xác định số nghiệm của phương trình f(x) = m (1) trên tập hợp X ta làm như sau:

+ Lập bảng biến thiên của hàm số f(x) trên tập hợp X

+ Dựa vào bảng biến thiên ta xác định được số giao điểm của đồ thị (C): y = f(x) với đồ thị (d): y = m.

+ Từ đó suy ra số nghiệm của phương trình trên tập X.

* (1) có nghiệm $x \in X \Leftrightarrow$ (d) và phần đồ thị (C) trên X có giao điểm.

* (1) có k nghiệm $x \in X \Leftrightarrow$ (d) và phần đồ thị (C) trên X có k giao điểm.

b) Giả sử trên X hàm số đạt giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất.

Khi đó:

* Bất phương trình $f(x) \le m$ có nghiệm $x \in X \Leftrightarrow \underset{x\in X}{\text{Min}}\, f(x) \le m$.

* Bất phương trình $f(x) \le m$ thỏa mãn với mọi $x \in X \Leftrightarrow \underset{x\in X}{\text{Max}}\, f(x) \le m$.

* Bất phương trình f(x) < m có nghiệm x ∈ X ⇔ $\underset{x\in X}{\text{Min}}\, f(x) < m$.

* Bất phương trình f(x) < m thỏa mãn với mọi x ∈ X ⇔ $\underset{x\in X}{\text{Max}}\, f(x) < m$.

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1. Tìm tham số m để phương trình $x^3 - 6x^2 + m = 0$ (*) có ba nghiệm phân biệt.

Giải

Ta có: (*) ⇔ $m = -x^3 + 6x^2$.

Do đó (*) là phương trình hoành độ giao điểm của

(d): y = m và (C): $y = -x^3 + 6x^2$.

Xét hàm số $y = -x^3 + 6x^2$:

* Tập xác định: D = R

* $y' = -3x^2 + 12x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = 4 \Rightarrow y = 32 \end{array}\right.$.

* Bảng biến thiên:

x	−1		0		4		0
y'							
y	7	↘	0 CT	↗	32 CĐ	↘	0

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

(*) có nghiệm ba nghiệm phân biệt thuộc [−1; 6]

⇔ (d) và phần đồ thị (C) với x ∈ [−1; 6] có ba giao điểm phân biệt

⇔ 0 < m ≤ 7.

Ví dụ 2. Tìm tham số m để phương trình

$$x\sqrt{x} + \sqrt{x+16} = m\left(\sqrt{25-x} + \sqrt{9-x}\right) \text{ (1) có nghiệm.}$$

Giải

Điều kiện: $0 \le x \le 9$.

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow m = \frac{x\sqrt{x} + \sqrt{x+16}}{\sqrt{25-x} + \sqrt{9-x}} = F(x).$$

Ta có: $f(x) = x\sqrt{x} + \sqrt{x+16}$ có $f'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x+16}} > 0, \forall x \in [0; 9]$

⇒ f(x) tăng trên [0; 9] và f(x) > 0, ∀ x ∈ [0; 9].

$g(x) = \sqrt{25-x} + \sqrt{9-x}$ có $g'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{25-x}} + \frac{-1}{2\sqrt{9-x}} < 0, \forall x \in [0; 9]$

$\Rightarrow$ g(x) giảm trên [0; 9] và $g(x) > 0, \forall x \in [0; 9]$.

Do đó F(x) là hàm số tăng trên [0; 9].

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	9	$+\infty$
y		$\frac{1}{2}$ $\nearrow$	8	

Do đó (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \frac{1}{2} \le m \le 8$)

Ví dụ 3. Tìm m để bất phương trình $x + \sqrt{2x^2 + 2} > m$ (1) có tập nghiệm là R.

Giải

Xét hàm số $f(x) = x + \sqrt{2x^2 + 2}$.

* Tập xác định: D = R

* $f'(x) = 1 + \frac{4x}{2\sqrt{2x^2 + 2}} = \frac{\sqrt{2x^2 + 2} + 2x}{\sqrt{2x^2 + 2}}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + 2} = -2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ 2x^2 + 2 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x(1 + \sqrt{2 + \frac{2}{x^2}}) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x(1 - \sqrt{2 + \frac{2}{x^2}}) = +\infty$

* Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

(1) có tập nghiệm là R $\Leftrightarrow m < 1$.

Ví dụ 4. Tìm m để bất phương trình $\sqrt{4x - 8} + \sqrt{16 - 4x} \le m$ (1) có nghiệm.

Giải

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{4x - 8} + \sqrt{16 - 4x}$.

* Tập xác định: D = [2; 4].

* $f'(x) = \frac{4}{2\sqrt{4x - 8}} + \frac{-4}{2\sqrt{16 - 4x}} = 2.\frac{\sqrt{16 - 4x} - \sqrt{4x - 8}}{\sqrt{16 - 4x}.\sqrt{4x - 8}}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{16 - 4x} = \sqrt{4x - 8} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \le x \le 4 \\ 16 - 4x = 4x - 8 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$

* Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2		3		4	$+\infty$
y'		0	+	0	−	0	
y		$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$2\sqrt{2}$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

(1) có nghiệm $\Leftrightarrow m \geq 2\sqrt{2}$.

3. BÀI TẬP:

I. Phương trình:

1. Cho phương trình $\sin^6 x + \cos^6 x = m\sin 2x$. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình có nghiệm

2. Tìm tham số m để phương trình $\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} - \sqrt{(1+x)(3-x)} = m$ có nghiệm.

3. Cho phương trình $\sin 2x + 2\sin x = m$. Tìm m để phương trình có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{4}\right]$.

4. Tìm m để phương trình $\dfrac{4\sin x + 2}{\sin x + 2} = m$ có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $[0; \pi]$.

5. Cho phương trình $4\cos x.\cos 2x.\cos 3x + m = 14(\cos^2 x - \sin^2 x)$. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình có nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{6}\right]$.

II. Bất phương trình:

1. Tìm m để bất phương trình $m\sqrt{2x^2+9} < x + m$ có nghiệm.

2. Tìm m để bất phương trình $\sqrt{(1+x)(3-x)} \geq m + (x^2 - 2x - 3)$ (1) nghiệm đúng $\forall x \in [-1; 3]$.

3. Cho bất phương trình $x + 2m \leq \sqrt{4x - x^2}$. Tìm m để bất phương trình có nghiệm.

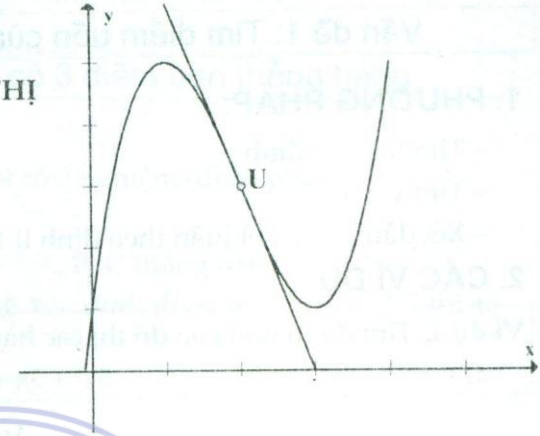
4. Định m để bất phương trình $mx + 2 \geq \sqrt{4x - x^2}$ thỏa mãn với mọi $x \in (0; 4]$.

§4. ĐIỂM UỐN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ TỊNH TIẾN HỆ TRỤC TỌA ĐO

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

I. KHÁI NIỆM ĐIỂM UỐN CỦA ĐỒ THỊ

Điểm $U(x_0; f(x_0))$ được gọi là *điểm uốn* của đồ thị hàm số f(x) nếu tồn tại một khoảng (a; b) chứa điểm x_0 sao cho trên một trong hai khoảng $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$ tiếp tuyến của đồ thị tại điểm U nằm phía trên đồ thị và trên khoảng kia tiếp tuyến nằm phía dưới đồ thị.



Định lý

Nếu hàm số y = f(x) có đạo hàm cấp hai trên một khoảng chứa điểm x_0; $f''(x_0) = 0$ và $f''(x)$ đổi dấu khi x qua điểm x_0 thì điểm $U(x_0; f(x_0))$ là một điểm uốn của đồ thị hàm số y = f(x).

II. TỊNH TIẾN HỆ TỌA ĐỘ

1. Công thức chuyển hệ tọa độ

Giả sử I là một điểm của mặt phẳng và $(x_0; y_0)$ là tọa độ của điểm I đối với hệ tọa độ Oxy.

Gọi IXY là hệ tọa độ mới có gốc là điểm I và hai trục là IX; IY theo thứ tự có cùng các vectơ đơn vị $\vec{i}; \vec{j}$ với hai trục Ox; Oy.

Giả sử M là một điểm bất kỳ của mặt phẳng.

* (x; y) là tọa độ của điểm M đối với hệ tọa độ Oxy;

* (X; Y) là tọa độ của điểm M đối với hệ tọa độ IXY.

Khi đó ta có *công thức chuyển hệ tọa độ* trong phép tịnh tiến theo $\vec{OI}$ là:

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}.$$

2. Phương pháp tìm phương trình của đường cong đối với hệ tọa độ mới

Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho hàm số y = f(x) có đồ thị là (C).

Tịnh tiến hệ trục Oxy về hệ trục IXY theo vectơ $\vec{OI}$, công thức chuyển hệ trục là: $\begin{cases} x = X + x_1 \\ y = Y + y_1 \end{cases}$.

Thay x, y vào phương trình của (C) ta thu được phương trình Y = F(X).
Suy ra trong hệ trục IXY, (C) có phương trình là Y = F(X).

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: Tìm điểm uốn của đồ thị (C) của hàm số y = f(x).

1. PHƯƠNG PHÁP:

– Tìm tập xác định
– Tìm y′ và y″
– Xét dấu y″ và kết luận theo định lí 1:

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Tìm điểm uốn của đồ thị các hàm số:
a) $y = x^3 - 3x^2 + 3$ b) $y = 3x^5 - 5x^4 + 3x + 1$.

Giải

a) Tập xác định: D = R
$y' = 3x^2 - 6x;$
$y'' = 6x - 6$
$y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1.$
Bảng xét dấu

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y″		–	0	+	
Đồ thị			Điểm uốn (1; 1)		

Vậy đồ thị có một điểm uốn là U(1; 1).

b) Tập xác định: D = R
$y' = 15x^4 - 20x^3 + 3$
$y'' = 60x^3 - 60x^2 = 60x^2(x - 1)$
$$y'' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = 1 \Rightarrow y = 2 \end{array}\right. .$$
Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y″		–	0	–	0	+	
Đồ thị					Điểm uốn (1; 2)		

Vậy đồ thị có một điểm uốn là U(1; 2).

3. BÀI TẬP

Tìm điểm uốn của các đồ thị hàm số:

a) $y = x^3 - 6x^2 - 3x + 5$ b) $y = 2x^4 - 12x^2 + 5$

c) $y = -x^4 - 3x^2 + 4$ d) $y = 3x^5 - 5x^4 - 4x + 5$.

Vấn đề 2: Chứng minh đồ thị có 3 điểm uốn thẳng hàng

1. PHƯƠNG PHÁP:

* Tìm y'' và chứng tỏ phương trình y'' = 0 có 3 nghiệm (đơn) phân biệt

$\Rightarrow$ Đồ thị có 3 điểm uốn A, B và C.

Chứng minh $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương $\Rightarrow$ A, B, C thẳng hàng.

* Chú ý nếu phương trình y'' = 0 ***không xác định được nghiệm*** cụ thể thì ta chứng minh A, B, C thẳng hàng như sau:

Tọa độ A, B, C thỏa hệ $\begin{cases} y'' = 0 \\ y = f(x) \end{cases}$.

Từ hệ trên ta suy ra x; y thỏa phương trình y = ax + b. Từ đó suy ra A, B, C cùng thuộc đường thẳng có phương trình y = ax + b.

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Chứng minh rằng đồ thị hàm số sau có 3 điểm uốn thẳng hàng

$$y = \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 3}$$

Giải

Tập xác định: D = R

$$y' = \frac{-2x^2 + 6x - 3}{(x^2 - 3x + 3)^2}$$

$$y'' = \frac{(-4x + 6)(x^2 - 3x + 3)^2 + (2x^2 - 6x + 3)2(2x - 3)(x^2 - 3x + 3)}{(x^2 - 3x + 3)^4}$$

$$= \frac{(4x - 6)(-x^2 + 3x - 3 + 2x^2 - 6x + 3)}{(x^2 - 3x + 3)^3} = \frac{(4x - 6)(x^2 - 3x)}{(x^2 - 3x + 3)^3}$$

$y'' = 0 \Leftrightarrow (2x - 3)(x^2 - 3x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 3$ hoặc $x = 3/2$.

Vậy đồ thị hàm số có ba điểm uốn là A(0; –1), B(3; 1) và $C(\frac{3}{2}; 0)$.

Để chứng minh ba điểm uốn thẳng hàng ta sử dụng một số cách sau:

Cách 1: M(x, y) là điểm uốn $\Rightarrow$ x, y thỏa hệ $\begin{cases} y = \dfrac{2x - 3}{x^2 - 3x + 3} \\ (2x - 3)(x^2 - 3x) = 0 \end{cases}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2x-3+a(2x-3)(x^2-3x)}{x^2-3x+3} = \alpha x+\beta \\ (2x-3)(x^2-3x)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2x-3+a(2x-3)(x^2-3x)}{x^2-3x+3} = \alpha x+\beta \\ x=0 \text{ hay } x=3 \text{ hay } x=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-1 \\ 3\alpha=2 \\ 2a-1=\alpha+\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\dfrac{2}{3} \\ \beta=1 \\ a=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow y = \dfrac{2}{3}x-1$ là phương trình đường thẳng qua ba điểm uốn của đồ thị.

Cách 2: Gọi A, B, C là ba điểm uốn của đồ thị hàm số.

Giả sử A, B, C thuộc đường thẳng y = ax + b. Ta có hoành độ A, B, C thỏa phương trình

$\dfrac{2x-3}{x^2-3x+3} = ax+b \Leftrightarrow (ax+b)(x^2-3x+3) = 2x-3$

$\Leftrightarrow ax^3+(b-3a)x^2+(3a-3b-2)x+3b+3=0$ (1)

Ta có $y''=0 \Leftrightarrow 2x^3-9x^2+9x=0$ (2)

Vì (1) và (2) cùng có ba nghiệm là x_A, x_B và x_C nên ta có (các hệ số tương ứng tỉ lệ):

$a:(b-3a):(3a-3b-2):(3b+3) = 2:(-9):9:0$

$\Rightarrow b=-1$ và $\dfrac{a}{2}=\dfrac{b-3a}{-9}=\dfrac{3a-3b-2}{9} \Rightarrow b=-1;\ a=\dfrac{2}{3}$.

$\Rightarrow y = \dfrac{2}{3}x-1$ là phương trình đường thẳng qua ba điểm uốn của đồ thị.

Cách 3: Ta có đồ thị hàm số có ba điểm uốn là A(0; –1), B(3; 1) và $C(\dfrac{3}{2};0)$.

Do đó: $\overrightarrow{AB}=(3;2)$; $\overrightarrow{AC}=(\dfrac{3}{2};1)$

Suy ra $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC} \Rightarrow$ A; B; C thẳng hàng.

3. BÀI TẬP:

1. Chứng minh rằng đồ thị các hàm số sau có 3 điểm uốn thẳng hàng

a) $y=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ b) $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$. c) $y=\dfrac{x^2-x+2}{x^2-2x+2}$

2. Chứng minh rằng các điểm uốn của đường cong (C): $y = x.\sin x$ nằm trên đường cong (E): $y^2(4 + x^2) = 4x^2$.

Vấn đề 3: Tìm điều kiện của tham số để đồ thị có điểm uốn thỏa mãn điều kiện cho trước.

1. PHƯƠNG PHÁP:

- Tìm y', y''
- Tìm điểm uốn của đồ thị hàm số.
- Đặt điều kiện để điểm uốn thỏa mãn điều kiện cho trước, từ đó suy ra giá trị của tham số.

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Tìm giá trị của tham số để đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 - 3x + 2$ có điểm uốn là I(1; 3).

Giải

* Tập xác định: D = R

* $y' = 3ax^2 + 2bx - 3$

$y'' = 6ax + 2b$

* I là điểm uốn của đồ thị hàm số $\Rightarrow \begin{cases} y''(1) = 0 \\ y(1) = 3 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6a + 2b = 0 \\ a + b - 3 + 2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 6 \end{cases}.$$

Khi đó $y = -2x^3 + 6x^2 - 3x + 2$; $y'' = -12x + 12$

Ta có: $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 3$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y''	−	0	+
Đồ thị		Điểm uốn (1; 3)	

Vậy đồ thị nhận U(1; 3) làm điểm uốn. Suy ra a = −2 và b = 3 thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 2: Tìm m để đồ thị (C) của hàm số $y = f(x) = -\dfrac{x^3}{m} + 3mx^2 - 2$ có điểm uốn nằm trên đường parabol (P): $y = 2x^2 - 2$.

Giải:

Ta chỉ xét $m \neq 0$.

$f'(x) = -\frac{3}{m}x^2 + 6mx$

$f''(x) = -\frac{6x}{m} + 6m$; $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = m^2$.

Với $m \neq 0$, (C) có điểm uốn $U(m^2; 2m^5 - 1)$.

Ta có: $U \in (P) \Leftrightarrow 2m^5 - 1 = 2m^4 - 1 \Leftrightarrow m^4(m-1) = 0 \Leftrightarrow m = 1$ (do $m \neq 0$).

Vậy: Đồ thị (C) của hàm số đã cho có điểm uốn nằm trên (P) $\Leftrightarrow m = 1$.

3. BÀI TẬP

1. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + 3m + 4$ có điểm uốn nằm trên đường thẳng (d): $y = 5x + 9$.
2. Tìm a để đồ thị hàm số $y = x^4 - (a-1)x^2 + 3$.

   a) Có hai điểm uốn. b) Không có điểm uốn.
3. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 6$. Chứng minh rằng trong tất cả các tiếp tuyến với đồ thị hàm số, tiếp tuyến tại điểm uốn có hệ số góc nhỏ nhất.
4. Tìm a, b để đồ thị hàm số :

   a) $y = x^3 - ax^2 + x + b$ nhận điểm I(1; 4) làm điểm uốn.

   b) $y = ax^3 + bx^2$ nhận điểm I(1; 8) là điểm uốn.

   c) $y = ax^3 + bx^2 + x + 1$ nhận điểm I(1; −2) là điểm uốn.

   d) $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + 3m + 4$ nhận điểm I(1, 2) làm điểm uốn.

Vấn đề 4: Công thức chuyển hệ trục và áp dụng

1. PHƯƠNG PHÁP

➢ Công thức chuyển hệ trục Oxy về hệ trục IXY theo vectơ $\vec{OI}$ là:

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}.$$

➢ Phương trình của đường (C): $y = f(x)$ đối với hệ tọa độ mới IXY :

$$Y = f(X + x_0) - y_0$$

Chú ý: * Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

* Đồ thị hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ : Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ có đồ thị là (C)

a) Tìm điểm uốn I của đồ thị hàm số.

b) Viết công thức chuyển hệ trục trong phép tịnh tiến theo $\vec{OI}$ và tìm phương trình của (C) đối với hệ tọa độ IXY.

c) Từ đó suy ra rằng I là tâm đối xứng của (C).

Giải

a) Tập xác định: D = R

$y' = 3x^2 - 6x$

$y'' = 6x - 6$

$y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2.$

Ta có y'' đổi dấu khi qua x = 1 nên đồ thị có điểm uốn là I(1; 2).

b) ➢ Công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{OI}$ là

$$\begin{cases} x = X + x_1 = X + 1 \\ y = Y + y_1 = Y + 2 \end{cases}.$$

➢ Phương trình của (C) đối với hệ tọa độ IXY là:

$Y = f(X + x_I) - y_I = f(X + 1) - 2$

$\Leftrightarrow \quad Y = (X + 1)^3 - 3(X + 1)^2 + 4 - 2$

$\Leftrightarrow \quad Y = X^3 - 3X = F(X).$

c) Hàm số $Y = F(X) = X^3 - 3X$ có :

* Tập xác định là $D_F = R$ nên $X \in D_F \Rightarrow -X \in D_F$.

* $F(-X) = -X^3 + 3X = -F(X) \ \forall \ X \in D_F$.

Vậy F(X) là hàm số lẻ. Suy ra đồ thị (C) nhận I làm tâm đối xứng.

3. BÀI TẬP

1. Cho đường cong (C): $y = 3 - \dfrac{1}{x-2}$ và điểm I(2; 3). Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{OI}$ và viết phương trình của đường cong (C) đối với hệ tọa độ IXY. Từ đó suy ra I là tâm đối xứng của đường cong (C).

2. Chứng minh đồ thị :

a) Hàm số $y = \dfrac{5x-2}{x-1}$ nhận điểm I(1; 5) làm tâm đối xứng.

b) Hàm số $y = x^4 - 4x^3 - x^2 + 10x + 5$ có trục đối xứng vuông góc với Ox.

c) Hàm số $y = (x - 2a)^2(x + 2)^2$ có trục đối xứng vuông góc trục Ox.

§5. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

I. TIỆM CẬN ĐỨNG

Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là *tiệm cận đứng* của đồ thị hàm số y = f(x) nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$

II. TIỆM CẬN NGANG

Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là *tiệm cận ngang* của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$\lim\limits_{x \to +\infty} y = y_0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} y = y_0$

III. TIỆM CẬN XIÊN

Đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ được gọi là *tiệm cận xiên* của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

Chú ý: Để xác định các hệ số a, b trong phương trình của tiệm cận xiên ta có thể áp dụng các công thức sau:

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad (a \neq 0)\ ;\ b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax]$$

hoặc $$a = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \quad (a \neq 0)\ ;\ b = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - ax]$$

Nếu $a = 0$ thì ta có tiệm cận ngang.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

1. PHƯƠNG PHÁP:

* Tìm tập xác định

* Tìm các giới hạn: $\lim\limits_{x \to x_0^+ (x_0^-)} f(x)$ trong đó x_0 *là các điểm đầu khoảng* xác định.

* Nếu một trong giới hạn trên bằng $\pm\infty$ thì đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ: Tìm tiệm cận đứng của đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{3x - 7}{4x - 4}$ b) $y = \dfrac{3x - 8}{x^2 - 3x + 2}$ c) $y = \dfrac{2x + 5}{\sqrt{x} - 3}$

d) $y = \dfrac{x - 3}{x^2 + 9}$ e) $y = \dfrac{x - 2}{x^2 - 3x + 2}$

Giải

a) * Tập xác định: D = R\{1}.

* $\lim\limits_{x\to 1^+} y = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{3x-7}{4x-4} = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to 1^-} y = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{3x-7}{4x-4} = +\infty$

Vậy đồ thị có tiệm cận đứng là x = 1.

b) * Tập xác định: D = R\{1; 2}.

* $\lim\limits_{x\to 1^+} y = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{3x-8}{(x-1)(x-2)} = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to 1^-} y = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{3x-8}{(x-1)(x-2)} = +\infty$

$\Rightarrow$ x = 1 là một tiệm cận đứng của đồ thị.

* $\lim\limits_{x\to 2^-} y = \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{3x-8}{(x-1)(x-2)} = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to 2^+} y = \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{3x-8}{(x-1)(x-2)} = -\infty$

$\Rightarrow$ x = 1 là một tiệm cận đứng của đồ thị.

Vậy đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng là x = 1 và x = 2.

c) * Tập xác định: D = (3; +∞)

* $\lim\limits_{x\to 3^+} y = \lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2x+5}{\sqrt{x-3}} = +\infty \Rightarrow x = 3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Chú ý: vì tập xác định là (3; +∞) nên ta chỉ xét giới hạn khi $x \to 3^+$)

d) * Tập xác định: D = R.

* Vì tập xác định của hàm số là R nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

e) * Tập xác định: D = R\{1; 2}.

* $\lim\limits_{x\to 1^+} y = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-2}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^-} y = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-2}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x-1} = -\infty$

nên x = 1 là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

* $\lim\limits_{x\to 2} y = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-1} = 1$

nên x = 2 không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là x = 1.

Vấn đề 2: Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

1. PHƯƠNG PHÁP:

* Tìm tập xác định

* Tìm các giới hạn: $\lim\limits_{x\to+\infty(-\infty)} f(x)$.

* Nếu một trong giới hạn trên bằng b thì đường thẳng y = b là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

2. VÍ DỤ:

Ví dụ: Tìm các tiệm cận ngang của đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{5 - 4x - x^2}$ b) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1} + 5x + 3}{2x + 2}$.

Giải

a) * Tập xác định : $D = R \setminus \{1; -5\}$.

* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 + 2x + 3}{5 - 4x - x^2} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^2}}{\dfrac{5}{x^2} - \dfrac{4}{x} - 1} = -1$

$\Rightarrow$ Đường $y = -1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

b) * Tập xác định : $D = (-\infty ; -1) \cup [1 ; +\infty)$.

* $\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 1} + 5x + 3}{2x + 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}} + 5 + \dfrac{3}{x}}{2 + \dfrac{2}{x}} = 3$

$\Rightarrow$ Đường $y = 3$ là tiệm cận ngang của đồ thị khi $x \to +\infty$.

* $\lim\limits_{x \to -\infty} y = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 1} + 5x + 3}{2x + 2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-\sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}} + 5 + \dfrac{3}{x}}{2 + \dfrac{2}{x}} = 2$

$\Rightarrow$ Đường $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị khi $x \to -\infty$.

Vấn đề 3: Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số

1. PHƯƠNG PHÁP:

* Tìm tập xác định
* Tìm các giới hạn:

➢ Nếu $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{mx + n}$ thì $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ nên $y = ax + b$ là tiệm cận (xiên hay ngang) của đồ thị hàm số.

➢ Nếu f(x) chưa viết được như trên thì ta tìm a, b theo cách sau:

$a = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ $(a \neq 0)$; $b = \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - ax]$

hoặc $a = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ $(a \neq 0)$; $b = \lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - ax]$

Chú ý : Nếu $a = 0$ thì ta có đường tiệm cận tìm được là tiệm cận ngang.

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ: Tìm các tiệm cận xiên của đồ thị các hàm số sau:

a) $y = 4x + 5 + \dfrac{7}{2x-8}$ b) $y = \sqrt{x^2 - 4x} + 4x$

Giải

a) * Tập xác định: $D = R \setminus \{4\}$.

* $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[y - (4x+5)] = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{7}{2x-8} = 0$

⇒ Đường thẳng y = 4x + 5 là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

b) * Tập xác định: $D = (-\infty\,;0] \cup [4\,;+\infty)$.

* Giả sử y = ax + b là tiệm cận của đồ thị.

➢ Khi $x \to +\infty$:

$$a = \lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-4x}+4x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1-\frac{4}{x}}+4\right) = 5$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(y-5x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4x-x^2}{\sqrt{x^2-4x}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{\sqrt{1-\frac{4}{x}}+1} = -2$$

Vậy khi $x \to +\infty$ thì đồ thị có tiệm cận xiên là y = 5x − 2.

➢ Khi $x \to -\infty$:

$$a = \lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-4x}+4x}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1-\frac{4}{x}}+4\right) = 3$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}(y-3x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}+x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4x-x^2}{\sqrt{x^2-4x}-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{-\sqrt{1-\frac{4}{x}}-1} = 2$$

Vậy khi $x \to -\infty$ thì đồ thị có tiệm cận xiên là y = 3x + 2.

3. BÀI TẬP

1. Tìm các tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{2x+3}{4-x^2}$ b) $y = \dfrac{3x^2+9x-12}{x^2+x-2}$

c) $y = 2x - 5 + \dfrac{2}{3-x}$ d) $y = \dfrac{3x^2+4x-4}{x-3}$

2. Tìm các tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

a) $y = 2x - 4 + \sqrt{x^2-4x+3}$ b) $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

3. Cho $(C_m): y = \dfrac{2x^2+(m+1)x-3}{x+m}$

a) Định m để tiệm cận xiên của (C_m) đi qua A(1; 5).

b) Tìm m để giao điểm 2 tiệm cận của (C_m) thuộc (P): $y = x^2 - 3$.

4. Cho (C): $y = \dfrac{x^2 - 2x - 15}{x - 3}$.

Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ điểm M bất kỳ trên (C) đến hai tiệm cận của (C) bằng một hằng số.

5. Cho $(C_m): y = \dfrac{x^2 + mx - 1}{x - 1}$.

Tìm m sao cho tiệm cận xiên của (C_m) tạo với 2 trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng 2.

6. Tìm những điểm trên (C): $y = \dfrac{2x^2 + x - 1 + 4\sqrt{5}}{x + 1}$ sao cho tổng khoảng cách từ điểm đó đến hai tiệm cận là nhỏ nhất.

§6. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA MỘT SỐ HÀM ĐA THỨC

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

CÁC BƯỚC KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA MỘT HÀM SỐ

1. Tìm tập xác định của hàm số

2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số

a. Tìm các giới hạn của hàm số: giới hạn tại vô cực và giới hạn vô cực.

Tìm các tiệm cận của đồ thị.

b. Lập bảng biến thiên của hàm số:

– Tìm đạo hàm y′ của hàm số.

– Xét dấu y′. Từ đó suy ra chiều biến thiên và tìm cực trị của hàm số.

– Ghi các kết quả vào bảng biến thiên.

3. Tìm điểm uốn của đồ thị hàm số (đối với hàm đa thức):

Tìm đạo hàm y″; Xét dấu y″, từ đó suy ra điểm uốn của đồ thị hàm số.

4. Vẽ đồ thị của hàm số:

– Vẽ các đường tiệm cận của đồ thị (nếu có).

– Tìm các điểm đặc biệt của đồ thị (giao điểm của đồ thị với các trục toạ độ, …).

– Vẽ đồ thị của hàm số.

– Nhận xét về đồ thị: chỉ ra trục hay tâm đối xứng của đồ thị.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: Khảo sát hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$

1. PHƯƠNG PHÁP:

1. Tập xác định: D = R.

2. Khảo sát sự biến thiên

➢ Giới hạn: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \pm\infty$ khi $a > 0$; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \mp\infty$ khi $a < 0$

➢ $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ có $\Delta' = b^2 - 3ac$.

$\Delta' > 0 \Leftrightarrow$ Hàm số có hai cực trị.

$\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow$ Hàm số không có cực trị.

➢ Lập bảng biến thiên: Có 6 dạng bảng biến thiên sau:

* y' = 0 có 2 nghiệm phân biệt và a > 0 (đồ thị dạng 1)

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	CĐ	↘	CT	↗	$+\infty$

* y' = 0 có 2 nghiệm phân biệt và a < 0 (đồ thị dạng 2)

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		−	0	+	0	−	
y	$+\infty$	↘	CT	↗	CĐ	↘	$-\infty$

* y' = 0 có nghiệm kép và a > 0 (đồ thị dạng 3)

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
y'		+	0	+	
y	$-\infty$		↗		$+\infty$

* y' = 0 có nghiệm kép và a < 0 (đồ thị dạng 4)

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
y'		−	0	−	
y	$+\infty$		↘		$-\infty$

* y' = 0 vô nghiệm a > 0 (đồ thị dạng 5)

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		+	
y	$-\infty$	↗	$+\infty$

* $y' = 0$ vô nghiệm $a < 0$ (đồ thị dạng 6)

x	$-\infty$	$+\infty$
y'	$-$	
y	$+\infty$ $\searrow$	$-\infty$

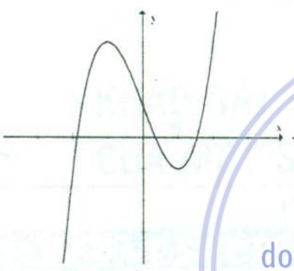
3. Điểm uốn

$y'' = 6ax + 2b$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{3a}$.

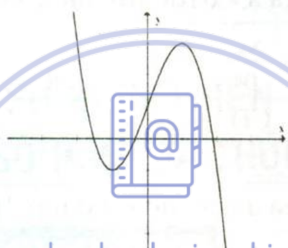
Lập bảng xét dấu y''. Suy ra đồ thị có một điểm uốn $I(-\dfrac{b}{3a}; f(-\dfrac{b}{3a}))$

4. Đồ thị :

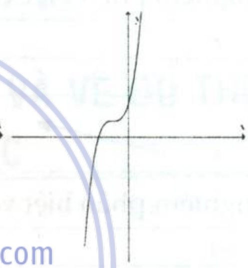
Có 6 dạng đồ thị tương ứng với 6 bảng biến thiên:



Dạng 1

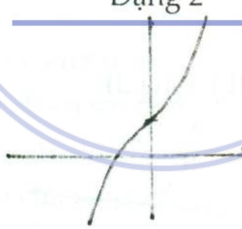


Dạng 2

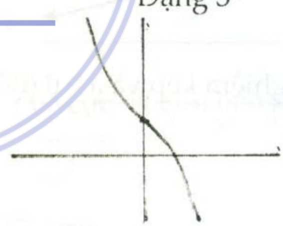


Dạng 3

Dạng 4



Dạng 5



Dạng 6

<u>**Nhận xét**</u>: Đồ thị hàm số bậc ba luôn nhận điểm uốn làm tâm đối xứng.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = x^3 - 3x^2 + 4$.

Giải

1. Tập xác định: D = R.
2. Khảo sát chiều biến thiên:

   * Giới hạn: $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$.

* Chiều biến thiên:

$$y' = 3x^2 - 6x; \quad y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \rightarrow y = 4 \\ x = 2 \rightarrow y = 0 \end{array}\right.$$

* Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y		↗	4	↘	CT	↗	$+\infty$
	$-\infty$		CĐ		0		

Vậy: Hàm số tăng trong $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$.

Hàm số giảm trong $(0; 2)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CĐ} = 4$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$, $y_{CT} = 0$.

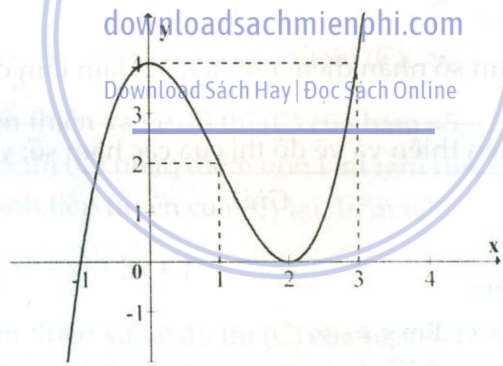
3. Điểm uốn: $y'' = 6x - 6$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2$. Đồ thị có điểm uốn $I(1; 2)$.

4. Đồ thị:

* Giá trị đặc biệt:

x	−1	0	1	2	3
y	0	4	2	0	4

* Đồ thị:



Nhận xét: Đồ thị hàm số nhận điểm uốn $I(-1; -2)$ làm tâm đối xứng.

Ví dụ 2: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = -x^3 + 3x^2 - 3x - 1$.

Giải

1. Tập xác định: D = R.
2. Khảo sát sự biến thiên:

* Giới hạn: $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$.

* Chiều biến thiên:

$y' = -3x^2 + 6x - 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = -2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		–	0	–	
y	$+\infty$		↘		$-\infty$

Vậy: Hàm số giảm trong $(-\infty ; +\infty)$.

Hàm số không đạt cực trị.

3. Điểm uốn: $y'' = -6x + 6$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = -2$.

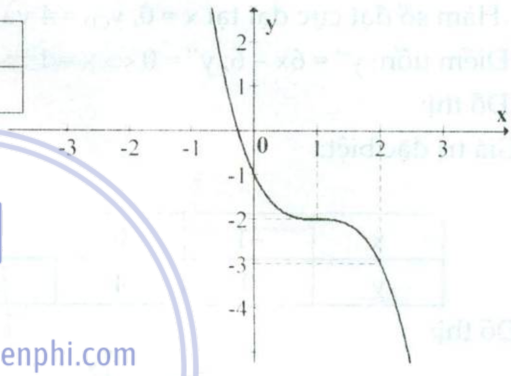
Đồ thị có điểm uốn là $I(1; -2)$

4. Đồ thị:

* Giá trị đặc biệt:

x	0	1	2
y	–1	–2	–3

* Đồ thị:



Nhận xét: Đồ thị hàm số nhận điểm uốn $I(1; -2)$ làm tâm đối xứng.

Ví dụ 3: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số: $y = x^3 + 3x^2 + 4x + 2$.

Giải

1. Tập xác định: $D = R$.

2. Khảo sát sự biến thiên:

* Giới hạn: $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$.

* Chiều biến thiên: $y' = 3x^2 + 6x + 4 > 0$ với mọi $x \in R$.

* Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		+	
y	$-\infty$	↗	$+\infty$

Vậy: Hàm số tăng trong $(-\infty ; +\infty)$. Hàm số không đạt cực trị.

3. Điểm uốn: $y'' = 6x + 6$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = 0$.

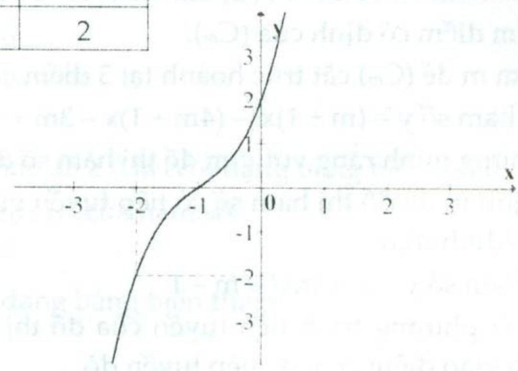
Đồ thị có điểm uốn là $I(-1; 0)$

4. Đồ thị:

* Giá trị đặc biệt:

x	−2	−1	0
y	−2	0	2

* Đồ thị:



Nhận xét: Đồ thị hàm số nhận điểm uốn I(−1; 0) làm tâm đối xứng.

3. BÀI TẬP

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số:

a) $y = -x^3 - 3x^2 + 2$ b) $y = 2x^3 + 3x^2 + 2$

c) $y = x^3 - 3x^2 + 5x - 2$ d) $y = -\frac{8}{3}x^3 + 4x^2 - 2x + \frac{1}{3}$

2. Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x - \frac{1}{3}$ có đồ thị (C).

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b. Chứng minh đồ thị (C) nhận điểm uốn làm tâm đối xứng.

c. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm uốn.

3. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1$

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b. Tìm điểm trên (C) có hệ số góc của tiếp tuyến nhỏ nhất.

c. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết vuông góc với đường thẳng

(d): $y = \frac{1}{3}x + 10$.

4. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m - 1$

a. Định m để hàm số có cực trị. Viết phương trình đường thẳng qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số.

b. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi m = 1.

5. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + 1 + m$ (C_m).

a. Định m để hàm số đạt cực tiểu tại x = 3.

b. Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số với m = 1.

6. Cho hàm số $y = x^3 - mx^2 + (2m + 1)x - m - 2$ (C_m)

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi m = 0.

b. Tìm điểm cố định của (C_m).

c. Tìm m để (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm có hoành độ dương.

7. Cho hàm số $y = (m + 1)x^3 - (4m + 1)x - 3m + 1$ có đồ thị (C_m)

a. Chứng minh rằng với ∀ m đồ thị hàm số đi qua 3 điểm cố định thẳng hàng.

b. Định m để đồ thị hàm số có tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng đi qua 3 điểm cố định trên.

8. Cho hàm số $y = x^3 + mx^2 - m - 1$

a. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại các điểm cố định. Tìm quỹ tích giao điểm của các tiếp tuyến đó.

b. Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi m = -3

c. Định a để điểm CĐ và CT của đồ thị (C) ở về 2 phía khác nhau của đường tròn (T): $x^2 + y^2 - 2ax - 4ay + 4a^2 - 4 = 0$.

9. Cho hàm số $y = x^3 - (2m + 1)x^2 + (m^2 - 4m + 3)x + 3$.

a. Khảo sát hàm số khi m = 1.

b. Xác định tất cả các giá trị m để hàm số có điểm CĐ và điểm CT ở về hai phía của trục tung.

10. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + 1$.

a. Khảo sát hàm số khi m = 0.

b. Trong tất cả các tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã khảo sát, hãy tìm tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất.

c. Chứng rằng với: ∀m hàm số đã cho có CĐ, CT. Hãy định m để khoảng cách giữa điểm CĐ, CT nhỏ nhất.

Vấn đề 2: Khảo sát hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ $(a \neq 0)$.

I. PHƯƠNG PHÁP

1. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

2. Khảo sát sự biến thiên

* Giới hạn: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = +\infty$ khi $a > 0$.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = -\infty$ khi $a < 0$.

* $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$.

+ Nếu $ab < 0$: $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = \pm\sqrt{\dfrac{-b}{2a}}$

$\Rightarrow$ hàm số có ba cực trị.

+ Nếu $ab \geq 0$: y' chỉ đổi dấu tại $x = 0$

$\Rightarrow$ hàm số có một cực trị, đạt tại $x = 0$

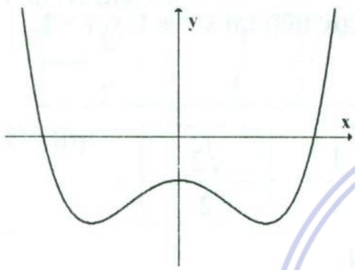
* Lập bảng biến thiên:

Tùy theo dấu của a và tích $ab < 0$ hay $ab \geq 0$ ta có 4 dạng bảng biến thiên.

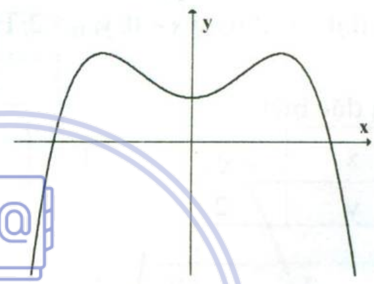
Kết luận các khoảng đơn điệu và cực trị của hàm số.

3. Đồ thị

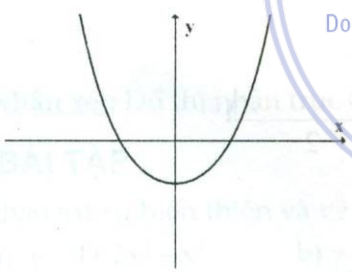
Có 4 dạng đồ thị tương ứng với 4 dạng bảng biến thiên:



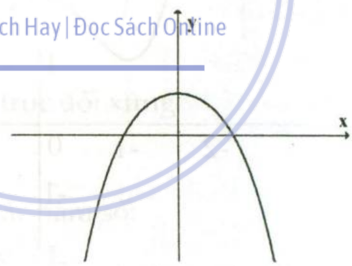
$a > 0$ và y có 3 cực trị



$a < 0$ và y có 3 cực trị



$a > 0$ và y có 3 cực trị



$a < 0$ và y có 3 cực trị

<u>Nhận xét</u>: Hàm số trùng phương là hàm chẵn nên đồ thị nhận Oy làm trục đối xứng.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = x^4 - 2x^2 + 2$.

Giải

1. Tập xác định: D = R
2. Khảo sát sự biến thiên:

* Giới hạn: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = +\infty$

* Sự biến thiên:

$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 2 \\ x = \pm 1 \Rightarrow y = 1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	1 (CT)	↗	2 (CĐ)	↘	1 (CT)	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trong $(-1; 0)$, $(1; +\infty)$; nghịch biến trong $(-\infty; -1)$, $(0; 1)$.

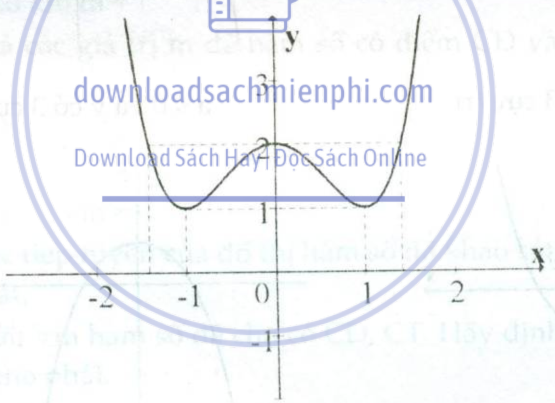
Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CĐ} = 2$; Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm 1$, $y_{CT} = 1$.

3. Đồ thị:

* Giá trị đặc biệt:

x	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$
y	2	1	2	1	2

* Đồ thị:



* **Nhận xét:** Đồ thị nhận trục Oy làm trục đối xứng

Ví dụ 2: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = -\frac{x^4}{2} - x^2 + \frac{3}{2}$.

Giải

1. Tập xác định: D = R

2. Khảo sát sự biến thiên:

* Giới hạn: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = -\infty$

* Sự biến thiên: $y' = -2x^3 - 2x = -2x(x^2 + 1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		+	0	–	
y	$-\infty$	↗	3/2 CĐ	↘	$-\infty$

Hàm số đồng biến trong $(-\infty; 0)$;

Hàm số nghịch biến trong $(0; +\infty)$.

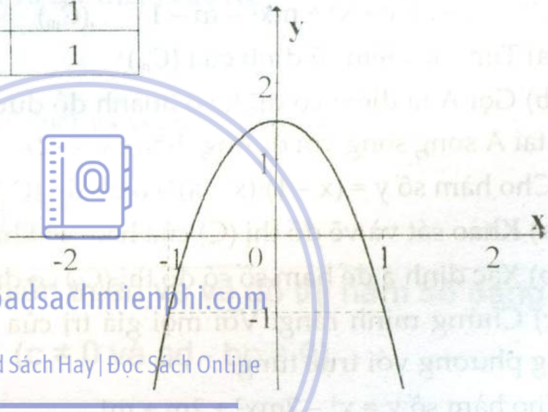
Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CĐ} = 3/2$;

3. Đồ thị:

* Giá trị đặc biệt:

x	–1	0	1
y	1	2	1

*Đồ thị:



<u>Nhận xét:</u> Đồ thị nhận trục Oy làm trục đối xứng

III. BÀI TẬP

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số:

a) $y = 1 + 2x^2 - x^4$. b) $y = x^4 + 4x^2 - 1$.

c) $y = -x^4 - x^2 + 2$. d) $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1$.

2. Cho hàm số $y = x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 6m$ (C_m).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 1$.

b) Định m để (C_m) cắt Ox tại 4 điểm phân biệt.

3. Cho hàm số $y = (1-m)x^4 + mx^2 + 2m - 1$

a) Định m để hàm số có đúng một cực trị.

b) Định m để hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

4. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - m - 1$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = -1$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến (d) của (C) biết (d) song song với đường thẳng (Δ): $8x + y = 0$.

5. Cho hàm số $y = f(x) = -\frac{x^4}{2} + ax^2 + \frac{b}{2}$.

a) Tìm a, b để hàm số đạt cực trị bằng 2 khi $x = 1$.

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số với a, b tìm được ở câu a.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại các giao điểm của (C) và trục hoành.

6. Cho hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 1$ (C_m)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = -1$.

b) Tìm các giá trị của tham số m để (C_m) có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua ba điểm này có bán kính bằng 1.

7. Cho hàm số $y = x^4 + mx^2 - m - 1$ (C_m)

a) Tìm các điểm cố định của (C_m)

b) Gọi A là điểm cố định có hoành độ dương, hãy tìm m để tiếp tuyến với đồ thị tại A song song với đường thẳng $y = -2x$.

8. Cho hàm số $y = (x - 1)^2(x - a)^2$ có đồ thị (C_a)

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $a = 0$

b) Xác định a để hàm số có đồ thị (C_a) có điểm cực đại.

c) Chứng minh rằng: Với mọi giá trị của a đồ thị (C_a) luôn có trục đối xứng cùng phương với trục tung.

9. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$

a) Với giá trị m nào thì hàm số có cực đại, cực tiểu đồng thời các điểm cực đại cực tiểu lập thành một tam giác đều.

b) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = 1$.

10. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m + 1)x^2 + m$ (1). (Khối B – 2011)

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = 1$.

b. Tìm m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị A, B, C sao cho OA = BC trong đó O là gốc tọa độ, A là điểm cực trị thuộc trục tung và B, C là hai điểm cực trị còn lại.

§7. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA MỘT SỐ HÀM PHÂN THỨC HỮU TỈ

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

Các bước để khảo sát hàm số dạng phân thức hữu tỉ:

1) Tìm tập xác định.

2) Tìm các giới hạn và tiệm cận.

3) Xét chiều biến thiên:

+ Tìm y'; Giải phương trình y' = 0;

+ Lập bảng biến thiên

+ Suy ra các khoảng đơn điệu và các điểm cực trị.

4) Vẽ đồ thị:

+ Lấy các giá trị đặc biệt;

+ Vẽ các tiệm cận, các điểm đặc biệt và vẽ đồ thị hàm số.

+ Nhận xét đặc điểm của đồ thị.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số dạng

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \ (c \neq 0 \text{ và } ad - bc \neq 0)$$

1. PHƯƠNG PHÁP:

1. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.

2. Giới hạn và tiệm cận:

* TCĐ : $x = -\frac{d}{c}$.

* TCN : $y = \frac{a}{c}$.

3. Khảo sát sự biến thiên

* $y' = \frac{ad - bc}{(cx+d)^2}$. Dấu y' là dấu của hằng số T = ad – bc.

➢ T > 0: Hàm số tăng trên từng khoảng xác định.

➢ T < 0: Hàm số giảm trên từng khoảng xác định.

Hàm số không có cực trị.

* Bảng biến thiên có 2 dạng sau:

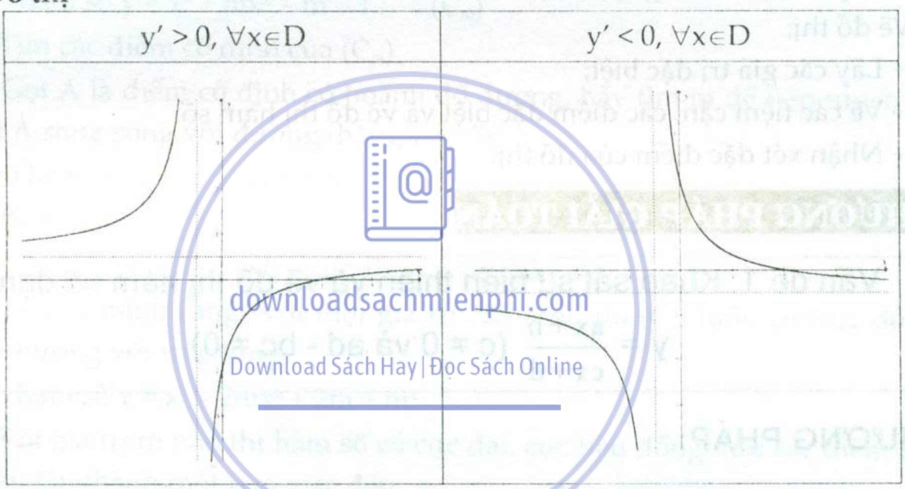
* ad – bc > 0

x	$-\infty$		$-d/c$		$+\infty$
y'		+	‖	+	
y	a/c	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	a/c

* ad – bc <0

x	$-\infty$		$-d/c$		$+\infty$
y'		–	‖	–	
y	a/c	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	a/c

4. Đồ thị



Nhận xét: Đồ thị nhận giao điểm $I(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c})$ của 2 tiệm cận làm tâm đối xứng.

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = \dfrac{x-3}{x+1}$.

Giải

1. Tập xác định: D = R\{–1}.
2. Khảo sát sự biến thiên:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} y = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x-3}{x+1} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} y = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x-3}{x+1} = -\infty \end{cases} \Rightarrow x = -1 \text{ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.}$$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x-3}{x+1} = 1 \Rightarrow y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$y' = \dfrac{4}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in D.$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên các khoảng xác định.

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		+	||	+	
y	1	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	1

Hàm số không có cực trị.

* Giá trị đặc biệt :

x	−3	−2	−1	0	1
y	3	5	||	−3	−1

* Đồ thị :

Nhận xét: Đồ thị (C) nhận giao điểm I(−1; −1) của hai tiệm cận làm tâm đối xứng.

Ví dụ 2: a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

b) Chứng minh đồ thị (C) nhận giao điểm của hai tiệm cận làm tâm đối xứng.

Giải

a) Khảo sát hàm số:

1. Tập xác định: $D = R\setminus\{1\}$.

2. Khảo sát sự biến thiên:

* Giới hạn và tiệm cận:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} y = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} y = -\infty \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ là tiệm cận đứng của đồ thị.}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} y = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2 \Rightarrow y = 2 \text{ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.}$$

* Sự biến thiên: $y' = \dfrac{-3}{(x-1)^2} < 0, \forall x \in D$

$\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định.

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	2

Hàm số không có cực trị.

* Giá trị đặc biệt :

x	-1	0	1	2	3
y	1/2	-1	‖	5	7/2

* Đồ thị :

<u>Nhận xét:</u> Đồ thị (C) nhận giao điểm I(1; 2) của hai tiệm cận làm tâm đối xứng.

b) Chứng minh đồ thị (C) nhận giao điểm hai tiệm cận làm tâm đối xứng.

– Tịnh tiến hệ trục Oxy về hệ trục IXY. Công thức chuyển hệ trục là

$$\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + 2 \end{cases}.$$

– Đối với hệ trục IXY thì đồ thị (C) có phương trình

$$Y + 2 = \frac{2(X+1)+1}{X+1-1} \Leftrightarrow Y = \frac{3}{X} = F(X).$$

– Ta có : F(X) có tập xác định là $D_F = R\setminus\{0\}$ nên $X \in D_F$ thì $-X \in D_F$.

$$F(-X) = -\frac{3}{X} = -F(X)$$

Vậy F(X) là hàm số lẻ. Suy ra đồ thị (C) nhận I làm tâm đối xứng.

3. BÀI TẬP

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số:

a) $y = \dfrac{2x-1}{x+2}$ b) $y = \dfrac{2x+3}{x-1}$.

2. Cho hàm số $y = \dfrac{-mx-5m-2}{x-2m}$

a) Định m để hàm số tăng trong các khoảng xác định.

b) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi m = –1.

c) Tìm hai điểm M, N lần lượt thuộc hai nhánh của (C) sao cho độ dài của đoạn MN nhỏ nhất.

d) Viết phương trình đường thẳng (d), biết (d) tiếp xúc (C) tại M và (d) vuông góc với IM (I là giao điểm hai tiệm cận của (C)).

3. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (H) của hàm số $y = \dfrac{3x-1}{x-2}$.

b) Tìm những điểm trên (H) có tọa độ nguyên.

c) Cho điểm M tùy ý thuộc (H). Chứng minh tích các khoảng cách từ M đến hai tiệm cận của (H) là hằng số.

4. a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{x+2}{2x-2}$.

b) Tìm trên (C) những điểm cách đều hai trục tọa độ.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng (Δ): $y = -\dfrac{3}{2}x + 10$.

5. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-3}$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Chứng minh giao điểm I của hai tiệm cận là tâm đối xứng của (C).

c) Tìm những điểm M trên (C) sao cho khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng bằng bốn lần khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang.

6. Cho hàm số $y = \dfrac{x+2}{2x+3}$ (1) (Khối A – 2009)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1)

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B và tam giác OAB cân tại gốc tọa độ O.

Vấn đề 2 : Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số dạng $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$

I. PHƯƠNG PHÁP:

Hàm số $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(am \neq 0,\ -\dfrac{n}{m}$ không là nghiệm của tử số)

1. Tập xác định: $D = R \setminus \{-\dfrac{n}{m}\}$.

2. Giới hạn và tiệm cận:

+) TCĐ : $x = -\dfrac{n}{m}$ +) $y = Ax + B + \dfrac{C}{mx+n} \Rightarrow$ TCX : $y = Ax + B$.

3. Khảo sát sự biến thiên

* $y' = \dfrac{amx^2 + 2anx + bn - cm}{(mx+n)^2}$.

Dấu y′ là dấu của $g(x) = amx^2 + 2anx + bn - cm$.

$\Delta_g > 0$: Hàm số có 2 cực trị.

$\Delta_g \leq 0$: Hàm số không có cực trị.

Bảng biến thiên:

➢ Hàm số có 2 cực trị và a.m > 0.

x	$-\infty$	x_1		$-n/m$		x_2	$+\infty$
y′	+	0	−	‖	−	0	+
y	$-\infty$ ↗	CĐ	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	CT	↗ $+\infty$

➢ Hàm số có 2 cực trị và a.m < 0.

x	$-\infty$	x_1		$-n/m$		x_2	$+\infty$
y′	−	0	+	‖	+	0	−
y	$+\infty$ ↘	CT	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	CĐ	↘ $-\infty$

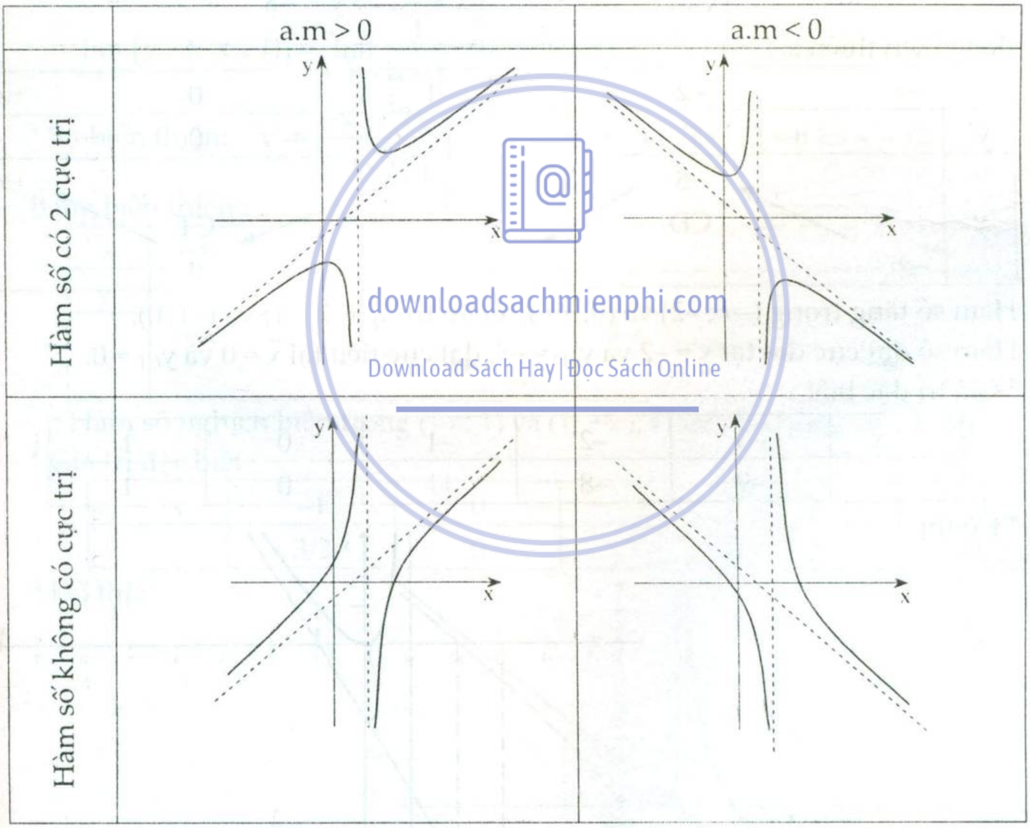
➢ Hàm số không có cực trị và a.m > 0.

x	$-\infty$		$-n/m$		$+\infty$
y'		+	‖	+	
y	$-\infty$ ↗	$+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

➢ Hàm số không có cực trị và a.m < 0.

x	$-\infty$		$-n/m$		$+\infty$
y'		−	‖	−	
y	$+\infty$ ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$-\infty$

4. Đồ thị



Nhận xét: Đồ thị nhận giao điểm của hai tiệm cận làm tâm đối xứng.

II. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = \dfrac{2x^2}{x+1}$

Giải

Ta có $y = \dfrac{2x^2}{x+1} = 2x - 2 + \dfrac{2}{x+1}$.

* Tập xác định : $D = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

* Giới hạn và tiệm cận:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} y = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} y = +\infty \end{cases} \Rightarrow x = -1 \text{ là tiệm cận đứng của đồ thị.}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} [y - (2x-2)] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x+1} = 0 \Rightarrow y = 2x - 2 \text{ là tiệm cận xiên của đồ thị.}$$

* Sự biến thiên : $y' = \dfrac{2x^2 + 4x}{(x+1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = -2 \Rightarrow y = -8 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	-8 CĐ	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0 CT	↗	$+\infty$

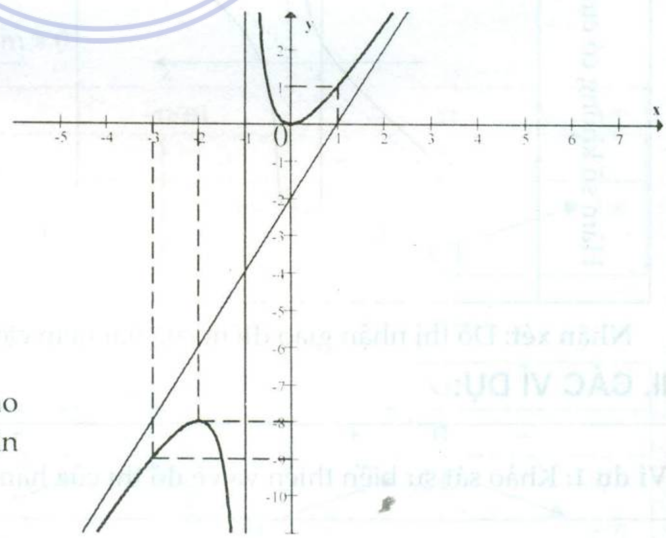
Hàm số tăng trong $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$; giảm trong $(-2; -1)$ và $(-1; 0)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$ và $y_{CĐ} = -8$, đạt cực tiểu tại $x = 0$ và $y_{CT} = 0$.

* Giá trị đặc biệt :

x	−3	−2	−1	0	1
	−9	−8	‖	0	1

* Đồ thị :



Nhận xét: Đồ thị nhận giao điểm $I(-1; -3)$ của hai tiệm cận làm tâm đối xứng.

Ví dụ 2: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$.

Giải

Ta có $y = -x + 1 + \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{-x^2 + 2x}{x-1}$.

* Tập xác định : $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

* Giới hạn và tiệm cận:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} y = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{-x^2 + 2x}{x-1} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} y = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{-x^2 + 2x}{x-1} = +\infty \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ là tiệm cận đứng của đồ thị.}$$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} [y - (-x + 1)] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0 \Rightarrow y = -x + 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị.

* Sự biến thiên: $y' = \dfrac{-x^2 + 2x - 2}{(x+1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$.

Bảng biến thiên :

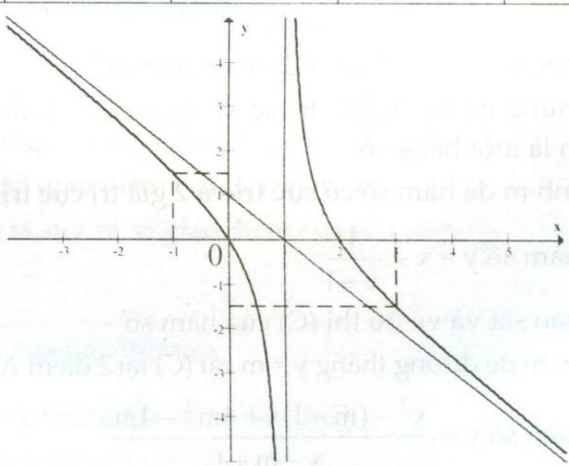
x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	$-$	||	$-$
y	$+\infty \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow -\infty$

Hàm số nghịch biến trong $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$. Hàm số không có cực trị.

* Giá trị đặc biệt :

x	-1	0	1	2	3
	3/2	0	||	0	$-3/2$

* Đồ thị :



<u>**Nhận xét:**</u> Đồ thị nhận giao điểm $I(1; 1)$ của hai tiệm cận làm tâm đối xứng.

III. BÀI TẬP:

1. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2mx + 3m^2 - 3}{x - 2m}$

a) Định m để hàm số đồng biến trên các khoảng xác định.

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi m = 2.

2. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - x - 1}{2 - x}$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Tìm điểm trên (C) có tọa độ nguyên.

c) Tìm điểm trên (C) cách đều hai trục tọa độ.

3. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + (2m + 3)x + m^2 + 4m}{x + m}$ (H_m)

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi m= –1.

b) Tìm m để hàm số có 2 cực trị và 2 giá trị cực trị trái dấu nhau.

4. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Tìm hai điểm A, B thuộc 2 nhánh khác nhau của (C) sao cho AB nhỏ nhất.

5. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - (m + 1)x - m^2 + 4m - 2}{x - 1}$

a) Định m để hàm số có cực trị. Tìm m để tích các giá trị cực trị đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi m = 0.

c) Tìm các điểm nguyên trên đồ thị (C).

6. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + (m + 1)x - m + 1}{x - m}$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi m = 2.

b) Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ điểm M tuỳ ý thuộc (C) đến hai tiệm cận là một hằng số.

c) Định m để hàm số có cực trị và 2 giá trị cực trị cùng dấu.

7. Cho hàm số $y = x - \dfrac{1}{x + 1}$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số

b) Tìm m để đường thẳng y = m cắt (C) tại 2 điểm A, B sao cho OA vuông góc OB.

8. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - (m + 1)x + 4m^2 - 4m}{x - m + 1}$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi m = 2.

b) Định m để hàm số xác định và luôn tăng trong khoảng $(0, +\infty)$.

9. Cho $y = \dfrac{x^2 + mx - 1}{x - 1}$.

a) Khảo sát hàm số khi m = 1.

b) Tìm các giá trị m để tiệm cận xiên của đồ thị hàm số cắt hai trục toạ độ tại hai điểm A, B sao cho $S_{OAB} = 18$.

§8. MỘT SỐ BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP VỀ ĐỒ THỊ

Vấn đề 1: Sự tương giao của hai đồ thị

1. PHƯƠNG PHÁP

a. Giao điểm của hai đồ thị

Cho hai đồ thị (C): y = f(x) và (C′): y = g(x).

Ta có: (C) và (C′) cắt nhau tại $M(x_0; y_0) \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = f(x_0) \\ y_0 = g(x_0) \end{cases}$.

Tức là $(x_0; y_0)$ là một nghiệm của hệ: $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$

Như vậy hoành độ giao điểm của (C) và (C′) là nghiệm của phương trình:

f(x) = g(x) (1).

Số nghiệm của phương trình (1) bằng số giao điểm của (C) và (C′).

b) Phương pháp biện luận số giao điểm của hai đồ thị:

Cho hai đồ thị (C): y = f(x) và (C′): y = g(x).

Để biện luận số giao điểm của (C) và (C′) ta thực hiện như sau:

* Viết phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (C′): f(x) = g(x) (1)
* Số nghiệm của (1) chính là số giao điểm của (C) và (C′).
* Tùy theo số nghiệm của (1) ta suy ra số giao điểm của (C) và (C′).

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Biện luận số giao điểm của hai đường

(C): $y = \dfrac{x^2 + x - 1}{x - 1}$ và đường thẳng (d) : y = –3x + m.

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường (C) và (d) là :

$$\frac{x^2+x-1}{x-1} = -3x + m \qquad (1)$$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + x - 1 = (x-1)(-3x+m)\ (x \neq 1)$

$\Leftrightarrow \quad g(x) = 4x^2 - (2+m)x - 1 + m = 0 \quad (2)$

Ta có : $\Delta = (2+m)^2 - 4.4(-1+m) = m^2 - 12m + 20$.

Vì $g(1) = 1 \neq 0$, $\forall$ m nên nếu (2) có nghiệm thì nghiệm đó luôn khác 1 nên nó là nghiệm của (1).

Do đó ta có:

* $\Delta < 0 \Leftrightarrow 2 < m < 10$: (1) vô nghiệm nên (C) và (d) không có giao điểm.

* $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 2$ hay $m = 10$: (1) có một nghiệm nên (C) và (d) có một giao điểm.

* $\Delta > 0 \Leftrightarrow m < 2$ hay $m > 10$: (1) có hai nghiệm nên (C) và (d) có hai giao điểm.

Kết luận: +) $2 < m < 10$: (C) và (d) không có giao điểm.

+) $m = 2$ hay $m = 10$: (C) và (d) có một giao điểm.

+) $m < 2$ hay $m > 10$: (C) và (d) có hai giao điểm phân biệt.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = \frac{2x+2}{x-3}$ có đồ thị (C).

Chứng minh rằng với mọi m, đường thẳng (d): $y = x + m$ luôn cắt (C) tại hai điểm lần lượt thuộc hai nhánh của (C).

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là:

$$\frac{2x+2}{x-3} = x + m \Leftrightarrow x^2 + (m-5)x - 3m - 2 = 0$$

(vì x = 1 không là nghiệm của phương trình).

Đặt $t = x - 3$. Phương trình (1) trở thành:

$(t+3)^2 + (m-5)(t+3) - 3m - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad t^2 + (m+1)t - 8 = 0 \quad (2)$.

Ta thấy: (2) có $P = -8 < 0$ nên phương trình (2) luôn có 2 nghiệm t_1, t_2 sao cho $t_1 < 0 < t_2$

$\Leftrightarrow$ (1) luôn có 2 nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1 < 3 < x_2$.

$\Leftrightarrow$ (C) luôn cắt (d) tại hai điểm lần lượt thuộc hai nhánh của (C).

3. BÀI TẬP

1. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$. (Khối D – 2011)

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b. Tìm k để đường thẳng (d): $y = kx + 2k + 1$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho khoảng cách từ A và B đến trục hoành bằng nhau.

2. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$. (Khối B – 2010)

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b. Tìm m để đường thẳng (d): $y = -2x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng $\sqrt{3}$ (O là góc tọa độ).

3. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số: $y = \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$.

b) Với các giá trị nào của m, đường thẳng d: $y = m + \dfrac{3}{4}x$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt.

4. Tìm m để (C_m): $y = x^3 + mx^2 - (2m-1)x + m - 2$ cắt trục hoành tại 3 điểm có hoành độ dương.

5. Định m để (C_m): $y = 4x^3 - 3(2m+4)x^2 + 2(m^2+8m+4)x - 2m(2m+4)$ cắt Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn 1.

6. Cho hàm số $y = -x^4 + mx^2 - m + 1$ (C_m)

a) Biện luận theo m số cực trị của hàm số.

b) Định m để (C_m) cắt Ox tại 4 điểm có hoành độ lập thành cấp số cộng. Xác định các số hạng của cấp số cộng này.

7. Cho (C): $y = \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$. Viết phương trình đường thẳng (d) qua A(3; 0) và có hệ số góc m. Định m để (d) và (C) có 2 giao điểm phân biệt.

8. Cho (C) : $y = (x-1)^2(4-x)$.

a) Gọi I là giao điểm của (C) với trục Oy. Viết phương trình đường thẳng (d) qua I và có hệ số góc k

b) Định k để (d) cắt (C) tại 3 điểm phân biệt.

9. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2+5x+7}{2-x}$

a) Khảo sát hàm số. Gọi (C) là đồ thị hàm số.

b) Tìm trên (C) những điểm cách đều hai trục toạ độ.

c) Biện luận theo m vị trí tương đối của (C) và đường thẳng (d): $y = 3x + m$.

Vấn đề 2 : Điều kiện tiếp xúc của hai đường

1. PHƯƠNG PHÁP

➢ **Định nghĩa**

Cho hai hàm số f và g có đạo hàm tại điểm x_0.

Ta nói rằng hai đường cong (C): y = f(x) và (C′): y = g(x) tiếp xúc nhau tại điểm $M(x_0;\ y_0)$ nếu M là một điểm chung của chúng và hai đường cong đó có tiếp tuyến chung tại M.

Điểm M được gọi là tiếp điểm của hai đường cong đã cho.

➢ **Điều kiện tiếp xúc**

Hai đường cong (C): y = f(x) và (C′): y = g(x) tiếp xúc nhau

⇔ Hệ phương trình $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ có nghiệm.

Nghiệm của hệ phương trình là hoành độ tiếp điểm của hai đường cong đó.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Chứng minh rằng đường cong (C): $y = x^3 - 2x^2$ tiếp xúc với parabol (P): $y = -x^2 + x - 1$. Tìm tiếp điểm và viết phương trình tiếp tuyến chung của chúng tại điểm đó.

Giải

Xét hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 2x^2 = -x^2 + x - 1 \\ 3x^2 - 4x = -2x + 1 \end{cases}$ (1).

Ta có (1) ⇔ $\begin{cases} (x-1)(x^2-1) = 0 \\ 3x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ hay } x = -1 \\ x = 1 \text{ hay } x = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$

Vậy hệ (1) có một nghiệm là x = 1. Suy ra (C) và (P) tiếp xúc nhau.

Hoành độ của tiếp điểm là x = 1 ⇒ y = −1. Do đó tiếp điểm là M(1; −1).

Phương trình tiếp tuyến chung (d) của (C) và (P) tại M chính là phương trình tiếp tuyến của (P) tại M.

Do đó (d): $y + 1 = y'(1)(x - 1) = -1(x - 1) \Leftrightarrow$ (d): $y = -x$.

Ví dụ 2: Định m để (C): $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ và (d): $y = 3x + m$ tiếp xúc nhau.

Giải

(C) và (d) tiếp xúc nhau ⇔ $\begin{cases} y_C = y_d \\ y'_C = y'_d \end{cases}$ có nghiệm

⇔ $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{x+1} = 3x + m \\ \dfrac{3}{(x+1)^2} = 3 \end{cases}$ có nghiệm. ⇔ $\begin{cases} m = \dfrac{2x-1}{x+1} - 3x \\ (x+1)^2 = 1 \end{cases}$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ m = -1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = -2 \\ m = 11 \end{cases}.$$

Vậy m thỏa mãn yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ m = –1 hay m = 11.

3. BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng đồ thị của các hàm số $f(x) = -3x^2 + 4x + 4$; $g(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$ và $h(x) = -x^2 + 8x + 6$ tiếp xúc nhau tại điểm A(–1; –3).

2. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 2}$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Tìm m để đường thẳng (d): y = –3x + m tiếp xúc (C), hãy tìm toạ độ tiếp điểm.

3. Cho hàm số $y = \dfrac{(m-1)x + m}{x - m}$ $(m \neq 0)$

a) Chứng minh khi m thay đổi đồ thị (C_m) của hàm số luôn tiếp xúc nhau tại một điểm cố định.

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi m = 2.

4. Định m để đồ thị (C) của hàm số :

a) $y = \dfrac{3x - 3}{x + 2}$ tiếp xúc với đường thẳng (d): y = x + m.

b) $y = 4x^3 + (m - 3)x + 1$ tiếp xúc với đường thẳng (d): y = m(2x – 1) + 2.

c) $y = \dfrac{x^2 - mx + 1}{x + 1}$ tiếp xúc trục Ox.

d) $y = x^3 - 3x^2 + mx - 4 + m$ tiếp xúc với (d): y = 5x – 3.

Vấn đề 3: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C): y = f(x)

1. PHƯƠNG PHÁP

1. Một số kiến thức cơ bản cần nắm vững:

Cho hàm số y = f(x) có đồ thị (C), f(x) có đạo hàm tại x_0.

Khi đó :

a) $f'(x_0)$ chính là hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại $M(x_0, f(x_0))$.

b) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(x_0, y_0)$ có dạng: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

c) Điều kiện để đường thẳng (D): y = kx + b tiếp xúc (C) là hệ phương trình sau có nghiệm x:

$$\begin{cases} f(x) = kx + b \\ f'(x) = k \end{cases}.$$

2. *Các bài toán thường gặp về lập phương trình tiếp tuyến :*

Bài toán 1: Lập phương trình tiếp tuyến của (C) ***tại điểm*** M.

+ Tìm $x_0 = x_M$, $y_0 = y_M$

+ Tìm $y' \Rightarrow y'(x_0) = ?$

+ Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$

Bài toán 2: Lập phương trình của tiếp tuyến khi biết hệ số góc k.

Cách 1: + Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm. Ta có $f'(x_0) = k$ (1)

+ Giải phương trình (1) ta được x_0 , thay vào y ta được y_0.

Khi đó: Phương trình tiếp tuyến cần tìm có dạng : $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Cách 2: + Vì tiếp tuyến (d) có hệ số góc k $\Rightarrow$ (d): $y = kx + b$

+ Từ điều kiện tiếp xúc suy ra b

Từ đó ta có phương trình tiếp tuyến (d) : $y = kx + b$

Chú ý:

Có thể xác định *hệ số góc k của tiếp tuyến* dựa vào các nhận xét sau :

+ (d) // (D) $\Leftrightarrow k_d = k_D$

+ (d) $\perp$ (D) $\Leftrightarrow k_d . k_D = -1$

+ Nếu (D): $y = ax + b$ thì $k_D = a$.

+ $k_d = \tan(Ox,d)$

Bài toán 3: Phương trình tiếp tuyến của (C) ***đi qua*** điểm A cho trước.

Cách 1: + Gọi (d) là đường thẳng qua A và có hệ số góc là k

$\Rightarrow$ (d): $y - y_A = k(x - x_A)$ (*)

+ Bằng cách cho (d) tiếp xúc (C) ta tìm được k.

Thay k vào (*) ta thu được phương trình tiếp tuyến cần tìm.

Cách 2: + Gọi $M(x_0, y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến (d) và (C)

$\Rightarrow$ (d): $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ (a)

+ Vì (d) qua A $\Rightarrow y_A - y_0 = f'(x_0)(x_A - x_0)$ (b)

+ Giải (b) ta được x_0 và y_0. Thay vào (a) ta được phương trình tiếp tuyến cần lập.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C): $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

a) Tại điểm có hoành độ $x_0 = 3$.

b) Biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng (D): $x - 3y + 1 = 0$.

Giải

a) Ta có $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = \dfrac{7}{2}$.

$$y' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \Rightarrow y'(3) = \frac{3}{4}.$$

Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là:

(d): $y - \frac{7}{2} = \frac{3}{4}(x-3) \Leftrightarrow$ (d) : $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$.

b) (D): $x - 3y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$. Do đó hệ số góc của (D) là $k_D = \frac{1}{3}$.

Tiếp tuyến (d) vuông góc với (D) nên $k_d.k_D = -1 \Rightarrow k_d = -3$.

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của (d) và (C), ta có :

$$y'(x_0) = k_d = -3 \Leftrightarrow \frac{x_0^2 - 2x_0}{(x_0-1)^2} = -3$$

$$\Leftrightarrow 4x_0^2 - 8x_0 + 3 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2} \text{ hay } x_0 = \frac{3}{2}.$$

Với $x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow y_0 = -\frac{3}{2} \Rightarrow$ (d) : $y = -3(x - \frac{1}{2}) - \frac{3}{2} = -3x$.

Với $x_0 = \frac{3}{2} \Rightarrow y_0 = \frac{7}{2} \Rightarrow$ (d) : $y = -3(x - \frac{3}{2}) + \frac{7}{2} = -3x + 8$

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa mãn bài toán là d_1 : $y = -3x$ và d_2 : $y = -3x + 8$.

Ví dụ 2: Cho đồ thị (C): $y = x^3 - 3x^2 + 2$

a) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến qua A(2; –2).

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng (Δ): $y = 9x + 2$.

Giải

a) Gọi (d) là tiếp tuyến của (C) qua A và có hệ số góc k

$\Rightarrow$ (d) : $y = k(x-2) - 2 = kx - 2k - 2$.

(d) tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2 = kx - 2k - 2 & (1) \\ 3x^2 - 6x = k & (2) \end{cases}$ có nghiệm.

Thay (2) vào (1) ta được :

$$x^3 - 3x^2 + 2 = x(3x^2 - 6x) - 2(3x^2 - 6x) - 2$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(2x^2 - 5x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ hay } x = \frac{1}{2}.$$

Khi $x = 2$ thì (2) $\Rightarrow k = 0 \Rightarrow$ (d) : $y = -2$.

Khi $x = \frac{1}{2}$ thì (2) $\Rightarrow k = -\frac{9}{4} \Rightarrow$ (d) : $y = -\frac{9}{4}x + \frac{5}{2}$.

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán.

3. BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng các đồ thị của hai hàm số $f(x) = x^2 + 3x$ và $g(x) = \dfrac{6x}{x+2}$ tiếp xúc với nhau. Xác định tiếp điểm của hai đường cong trên và viết phương trình tiếp tuyến chung của chúng tại điểm đó.

2. Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$

   a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

   b) Tìm giao điểm của (C) và parabol (P): $y = g(x) = x^2 + 1$.

   c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) và (P) tại mỗi giao điểm của chúng.

3. Cho (C): $y = \dfrac{3x-2}{x-1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $(\Delta): 4x + y - 3 = 0$.

4. a) Khảo sát hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 2$, gọi (C) là đồ thị hàm số.

   b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) vẽ từ điểm $A(0; -2)$.

5. Cho (C): $y = \dfrac{x-2}{x-3}$. Lập phương trình tiếp tuyến của (C):

   a) Tại điểm có hoành độ bằng 4.

   b) Tại điểm có tung độ bằng 1/2

   c) Biết tiếp tuyến song song với đường thẳng (Δ): $y = -4x + 5$.

   d) Biết tiếp tuyến đi qua $A(-2; 1)$.

6. Cho (C): $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 20$. Lập phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến:

   a) Vuông góc với đường thẳng (Δ): $x - 9y - 1 = 0$.

   b) Phát xuất từ điểm $A(3, -7)$.

7. Viết phương trình tiếp tuyến của (C): $y = \dfrac{x^2 + 3x + 3}{x+2}$ vuông góc với đường thẳng (d): $3y - x + 6 = 0$.

8. Cho (C): $y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x+1}$.

   a) $A \in (C)$ có $x_A = a$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại A.

   b) Tìm a để tiếp tuyến qua $B(1; 0)$. Chứng minh có hai giá trị a thỏa mãn điều kiện và 2 tiếp tuyến tương ứng vuông góc nhau.

9. Cho (C) : $y = \dfrac{x+2}{x-2}$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) :

   a) Tại điểm có tung độ bằng 5

   b) Biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = x + 2$

   c) Biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(0; 1)$.

10. Cho (C) $y = x^4 - 2x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua $M(0; 1)$

11. Cho (C): $y = \dfrac{x^2}{x+1}$. Chứng minh rằng qua điểm A(1;–2) có thể kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) và hai tiếp tuyến này vuông góc với nhau.

12. Viết phương trình tiếp tuyến của (C): $y = x^3 + 3x^2 - x + 1$ kẻ từ A(1; 4)

13. Chứng minh rằng qua điểm A(0; 2) ta luôn vẽ được ba tiếp tuyến đến đồ thị (C): $y = x^4 - 3x^2 + 2$.

14. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2mx + m}{x + m}$ (C_m)

a) Chứng minh nếu (C_m) cắt Ox tại điểm có hoành độ x_0 thì hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm đó là $k = \dfrac{2x_0 - 2m}{x_0 + m}$.

b) Định m để (C_m) cắt Ox tại 2 điểm A, B sao cho tiếp tuyến tại A, B vuông góc nhau.

15. Cho (C_m): $y = \dfrac{x - m^2 + m}{x + m}$ $(m \neq 0)$. Tìm m để tiếp tuyến với (C_m) tại giao điểm của (C_m) và trục hoành song song với đường thẳng y = x. Viết phương trình tiếp tuyến nói trên.

16. Cho hàm số $y = \dfrac{-x+1}{2x-1}$. (Khối A – 2011)

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b. Chứng minh rằng với mọi m, đường thẳng (d): y = x + m luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến của (C) tại A và B. Tìm m để tổng $k_1 + k_2$ đạt giá trị lớn nhất.

Vấn đề 4. Đồ thị hàm số chứa trị tuyệt đối

I. PHƯƠNG PHÁP

➢ **Các lưu ý :**

a) Định nghĩa giá trị tuyệt đối:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) \text{ khi } f(x) \geq 0 \\ -f(x) \text{ khi } f(x) < 0 \end{cases}.$$

b) Tính chất đồ thị của hàm số chẵn, hàm số lẻ:

* Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục Oy làm trục đối xứng.

* Đồ thị của hàm số lẻ nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

c) Cho hai hàm số y = g(x) và y = f(x) cùng có tập xác định là D và có đồ thị lần lượt là (G) và (F). Khi đó:

– Nếu g(x) = f(x), ∀ x ∈ D thì (G) ≡ (F).

– Nếu g(x) = –f(x), ∀ x ∈ D thì (G) và (F) đối xứng nhau qua trục Ox.

II. MỘT SỐ DẠNG THƯỜNG GẶP

Dạng 1: Từ đồ thị (C): y = f(x) hãy suy ra đồ thị (C₁): y = |f(x)|

a. Cách giải:

Ta có $(C_1): y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{khi } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{khi } f(x) < 0 \end{cases}$.

Do đó đồ thị (C_1) gồm hai phần:

+ Phần 1 là phần *không nằm phía dưới trục hoành* của đồ thị (C).

+ Phần 2 là *phần đối xứng của phần phía dưới trục hoành* của (C) qua trục Ox.

b. Ví dụ:

Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Từ đồ thị (C) hãy suy ra đồ thị (C′) của hàm số
$y = g(x) = |x^3 - 3x^2 + 4|$.

c) Định m để phương trình: $|x^3 - 3x^2 + 4| = m$ có 4 nghiệm phân biệt.

Giải

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

1. Tập xác định: D = R.

2. Sự biến thiên:

* Giới hạn: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \pm\infty$

* $y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 4 \\ x = 2 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right.$

* Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	4 CĐ	↘	CT 0	↗	$+\infty$

Hàm số tăng trong $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$.

Hàm số giảm trong (0; 2).

Hàm số đạt cực đại tại x = 0, $y_{CĐ} = 4$

và đạt cực tiểu tại x = 2, $y_{CT} = 0$.

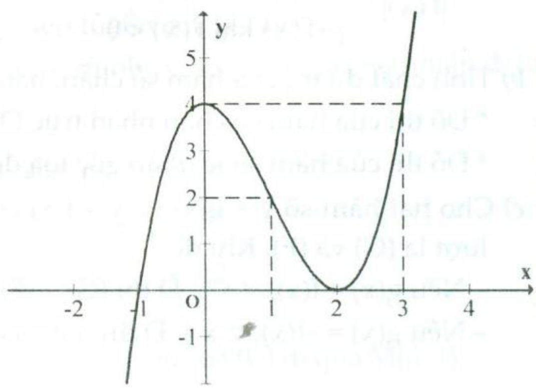
3. Điểm uốn:

* $y'' = 6x - 6$;

$y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2$

$\Rightarrow$ Điểm uốn I(1; 2)

* Đồ thị:



<u>Nhận xét:</u> Đồ thị nhận điểm uốn I(1; 2) làm tâm đối xứng.

b) Từ đồ thị (C) hãy suy ra đồ thị (C′) của hàm số $y = g(x) = |x^3 - 3x^2 + 4|$.

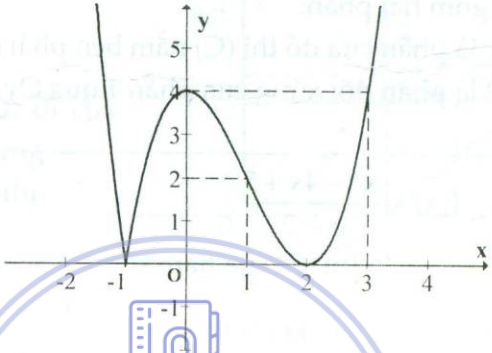
Ta có $(C_1): y = g(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{khi } f(x) \ge 0 \\ -f(x) & \text{khi } f(x) < 0 \end{cases}$.

Do đó đồ thị (C_1) gồm hai phần:

* Phần 1 là phần không nằm phía dưới trục hoành của đồ thị (C).

* Phần 2 là phần đối xứng của phần phía dưới trục hoành của (C) qua trục Ox.

Ta có đồ thị (C_1) như sau:



c) Định m để phương trình: $|x^3 - 3x^2 - 6| = m$ (1) có 4 nghiệm phân biệt.

Ta có phương trình (1) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C_1) và đường thẳng (d): y = m.

Do đó số nghiệm của (1) bằng số giao điểm của đồ thị (C_1) và đường thẳng (d).

Dựa vào đồ thị (C_1) ta suy ra:

(1) có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (C_1) và (d) có 4 giao điểm phân biệt $\Leftrightarrow 0 < m < 4$.

c. Bài tập:

1. a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$.

   b) Từ đồ thị (C) suy ra đồ thị (C′) của hàm số $y = |x^3 - 3x + 2|$.

2. a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$.

   b) Dựa vào đồ thị (C) suy ra đồ thị (C_1) của hàm số

   $y = g(x) = \left|\dfrac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}\right|$.

3. Cho hàm số $y = \dfrac{x - 2}{x + 1}$.

   a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

   b) Từ đồ thị (C) hãy suy ra đồ thị (C′): $y = \left|\dfrac{x - 2}{x + 1}\right|$.

Dạng 2: Từ đồ thị (C): y = f(x) hãy suy ra đồ thị (C_1): y = g(x) = f(|x|)

a. Cách giải:

Ta có: g(–x) = f(|–x|) = f(|x|) = g(x) nên hàm số y = g(x) là hàm số chẵn.

Suy ra (C_2) nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Mặt khác khi $x \geq 0$ thì g(x) = f(|x|) = f(x) nên (C_2) ≡ (C).

Do đó (C_2) gồm hai phần:

* Phần 1 là phần của đồ thị (C) nằm bên phải của Oy.
* Phần 2 là phần đối xứng của phần 1 qua Oy.

b. Ví dụ:

Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Từ đồ thị (C) hãy suy ra đồ thị (C′): $y = \dfrac{x^2 - 4|x| + 5}{|x| - 2}$.

Giải

a) Ta có $y = \dfrac{x^2 - 4x + 5}{x - 2} = x - 2 + \dfrac{1}{x - 2}$.

* Tập xác định : D = R\{1}.
* Giới hạn và tiệm cận:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} y = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2 - 4x + 5}{x - 2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} y = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 - 4x + 5}{x - 2} = +\infty \end{cases} \Rightarrow x = 2 \text{ là tiệm cận đứng của đồ thị.}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} [y - (x - 2)] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x - 2} = 0 \Rightarrow y = x - 2 \text{ là tiệm cận xiên của đồ thị.}$$

* Sự biến thiên : $y' = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = -2 \\ x = 3 \Rightarrow y = 2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
y′		+	0	–	‖	–	0	+	
y	$-\infty$	↗	–2 CĐ	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2 CT	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trong $(-\infty ; 1)$ và $(3 ; +\infty)$.

Hàm số nghịch biến trong (1; 2) và (2; 3).

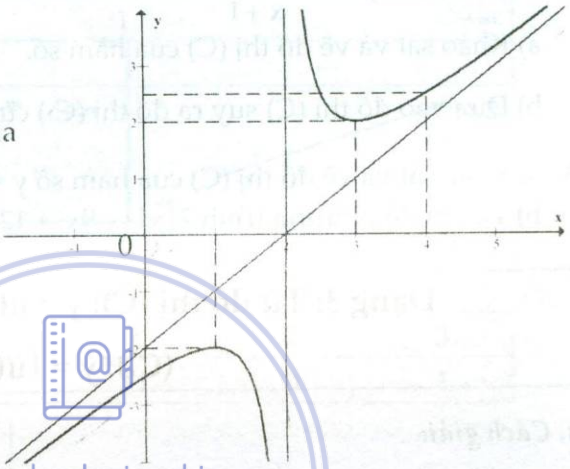
Hàm số đạt cực đại tại x = 1 và $y_{CĐ} = -2$.

Hàm số đạt cực tiểu tại x = 3 và $y_{CT} = 2$.

* Giá trị đặc biệt :

x	0	1	2	3	4
y	–5/2	–2	||	2	5/2

* Đồ thị :



Nhận xét:

Đồ thị nhận giao điểm I(2; 0) của hai tiệm cận làm tâm đối xứng.

b) Từ đồ thị (C) hãy suy ra đồ thị

(C′): $y = g(x) = \dfrac{x^2 - 4|x| + 5}{|x| - 2}$

Tập xác định của g(x) là

$D_g = R \setminus \{\pm 2\}$.

Ta có: $\forall x \in D_g \Rightarrow -x \in D_g$ và

$g(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = g(x)$.

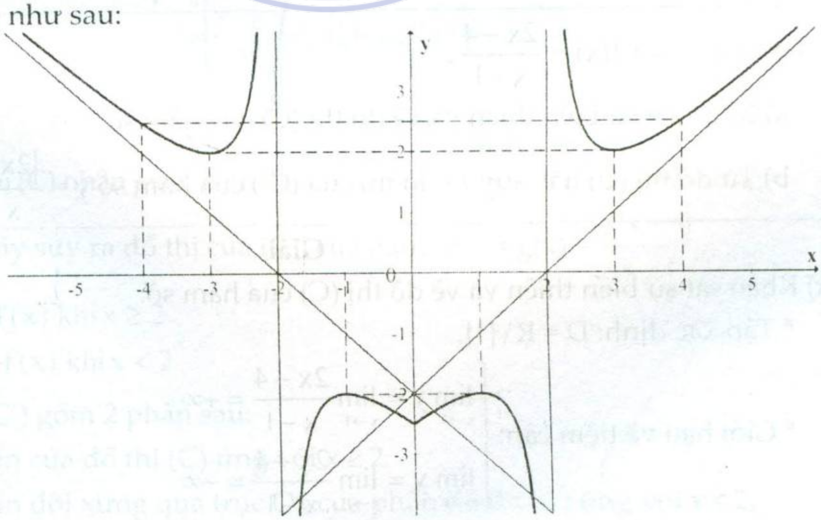
Do đó g(x) là hàm số chẵn. Suy ra (C′) nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Khi $x \geq 0$ thì g(x) = f(x) nên (C′) ≡ (C).

Do đó từ (C′) gồm 2 phần sau:

* Phần 1 là phần của đồ thị (C) ứng với $x \geq 0$.
* Phần 2 là phần đối xứng của phần 1 qua trục Oy.

Ta có đồ thị (C′) như sau:



c. Bài tập:

1. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$.

   a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

   b) Từ đồ thị (C) hãy suy ra đồ thị (C_1) của hàm số $y = |x|^3 - 6x^2 + 9|x|$.

   c) Định m để phương trình $|x|^3 - 6x^2 + 9|x| - 3 + m = 0$ có 5 nghiệm x thuộc đoạn [–2; 4].

2. Cho hàm số $y = \dfrac{-x^2 + x - 2}{x + 1}$.

   a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

   b) Dựa vào đồ thị (C) suy ra đồ thị (C_1) của hàm số $y = \dfrac{-x^2 + |x| - 2}{|x| + 1}$.

3. a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$.

   b) Tìm m để phương trình $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = m$ có 6 nghiệm phân biệt.

Dạng 3: Từ đồ thị (C): y = u(x).v(x) hãy suy ra đồ thị (C_1): y = |u(x)| v(x)

a. Cách giải:

Vì $y = |u(x)|.v(x) = \begin{cases} u(x).v(x) & \text{khi } u(x) \geq 0 \\ -u(x).v(x) & \text{khi } u(x) < 0 \end{cases}$

nên (C_1) gồm hai phần sau:

+ Phần đồ thị (C) ứng với $u(x) \geq 0$.

+ Phần đối xứng qua Ox của phần đồ thị (C) ứng với $u(x) < 0$.

b. Ví dụ:

Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{2x - 4}{x - 1}$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Từ đồ thị (C) hãy suy ra đồ thị của (C′) của hàm số $y = \dfrac{|2x - 4|}{x - 1}$.

Giải

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

* Tập xác định: $D = R\setminus\{1\}$.

* Giới hạn và tiệm cận: $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} y = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2x - 4}{x - 1} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} y = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2x - 4}{x - 1} = -\infty \end{cases}$

$\Rightarrow$ x = 1 là tiệm cận đứng của đồ thị.

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-4}{x-1} = 2 \Rightarrow y = 2 \text{ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.}$$

* Sự biến thiên : $y' = \dfrac{2}{(x-1)^2} > 0, \forall x \in D$

$\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định.

Bảng biến thiên :

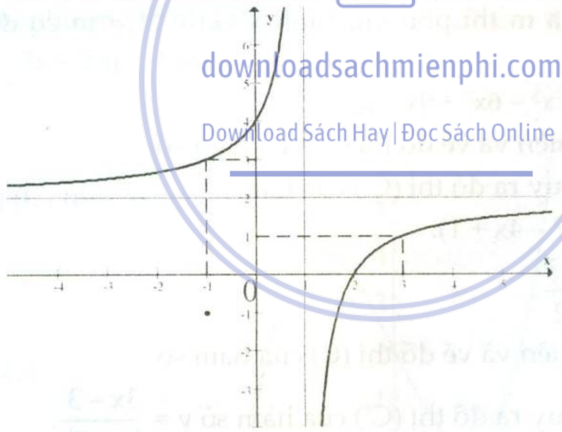
x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		−	‖	−	
y	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2

Hàm số không có cực trị.

* Giá trị đặc biệt :

x	−1	0	1	2	3
y	3	4	‖	0	1

* Đồ thị :



Nhận xét: Đồ thị (C) nhận giao điểm I(1; 2) của hai tiệm cận làm tâm đối xứng.

b) Từ đồ thị (C) hãy suy ra đồ thị của (C') của hàm số $y = g(x) = \dfrac{|2x-4|}{x-1}$.

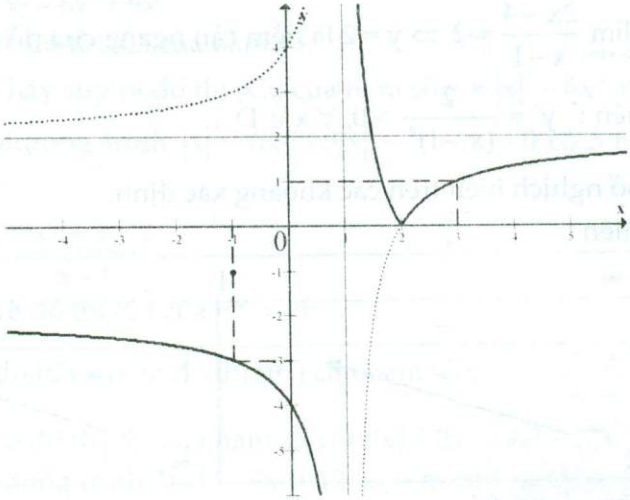
Ta có $g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ khi } x \geq 2 \\ -f(x) \text{ khi } x < 2 \end{cases}$.

Do đó đồ thị (C') gồm 2 phần sau:

* Phần 1 là phần của đồ thị (C) ứng với $x \geq 2$.

* Phần 2 là phần đối xứng qua trục Ox của phần đồ thị (C) ứng với $x < 2$.

Ta có đồ thị (C′) có dạng sau:



c. Bài tập:

1. Cho hàm số $y = 2x^4 - 4x^2$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Với giá trị nào của m thì phương trình $x^2|x^2 - 2| = m$ có đúng 6 nghiệm phân biệt.

2. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Từ đồ thị (C) hãy suy ra đồ thị (C′) của hàm số

$y = g(x) = |x - 2|(x^2 - 4x + 1)$.

3. Cho hàm số: $y = \dfrac{3x-3}{x-2}$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Từ đồ thị (C) hãy suy ra đồ thị (C′) của hàm số $y = \dfrac{3x-3}{|x-2|}$.

4. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2+x-3}{x+2}$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Dựa vào đồ thị (C) suy ra đồ thị (C_1) của hàm số $y = \dfrac{x^2+x-3}{|x+2|}$.

Vấn đề 5: Biện luận số nghiệm của phương trình bằng đồ thị

1. PHƯƠNG PHÁP

Cho đồ thị (C): $y = f(x)$. Dựa vào đồ thị (C), hãy biện luận theo m số nghiệm phương trình: $f(x) = m$ (1)

Ta có :

* Phương trình (1) là phương trình hoành độ giao điểm của đường(C): $y = f(x)$ và đường thẳng (d): $y = m$.

Do đó số nghiệm của (1) bằng số điểm chung của (C) và (d).

* Dựa vào đồ thị (C), kết luận số điểm chung của (C) và (d). Suy ra số nghiệm của (1).

Chú ý: Nếu bài toán yêu cầu biện luận số nghiệm x thuộc tập K, thì ta chỉ dựa vào phần đồ thị (C) ứng với $x \in K$.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ : Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Dùng đồ thị (C) biện luận số nghiệm của phương trình: $x^3 - 3x + 2 - m = 0$.

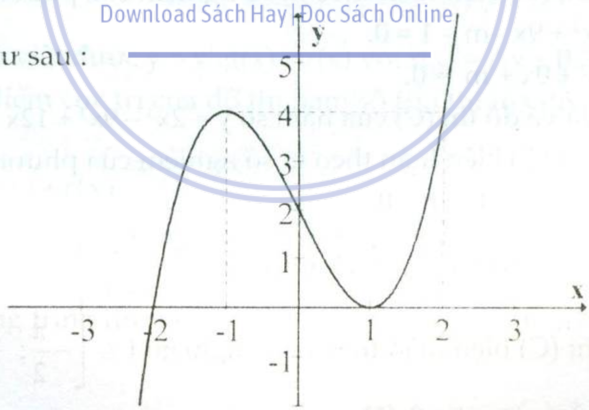
c) Định m để phương trình sau có đúng một nghiệm dương :

$x^3 - 3x + 2m - 2 = 0$

Giải

a) Tự giải.

Ta có đồ thị (C) như sau :



b) Ta có $x^3 - 3x + 2 - m = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = m$ (1).

Do đó (1) là phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) : $y = m$ và đồ thị (C).

Suy ra số nghiệm của (1) chính bằng số giao điểm của (C) và (d).

Dựa đồ thị (C) ta có :

* $m < 0$ hay $m > 4$: (1) có một nghiệm.
* $m = 0$ hay $m = 4$: (1) có hai nghiệm phân biệt.

* $0 < m < 4$: (1) có ba nghiệm phân biệt.

c) Ta có $x^3 - 3x + 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = -2m + 4$ (2).

Do đó (2) là phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d): $y = -2m + 4$ và đồ thị (C).

Suy ra số nghiệm dương của (2) bằng số giao điểm của (d) và phần đồ thị (C) ứng với $x > 0$.

Dựa vào đồ thị (C) ta có :

(2) có đúng một nghiệm dương $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2m + 4 = 0 \\ -2m + 4 > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m < 1 \end{array}\right.$.

3. BÀI TẬP

1. Cho hàm số $y = x^3 - 4x^2 + 4x$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Dựa vào đồ thị (C), biện luận theo m số nghiệm phương trình:

$x^3 - 4x^2 + 4x - m = 0$

2. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số: $y = \dfrac{2x^2 + 5x + 4}{x + 2}$

b) Biện luận theo m số nghiệm phương trình: $\dfrac{2x^2 + 5x + 4}{x + 2} + m = 0$

3. a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

b) Dùng đồ thị (C) biện luận theo m số nghiệm của phương trình:

b1. $x^3 - 6x^2 + 9x - m - 1 = 0$.

b2. $x^3 - 6x^2 + 9x + m = 0$.

4. a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$

b) Dùng đồ thị (C) biện luận theo m số nghiệm của phương trình

$2x^3 - 9x^2 + 12x - 4 - m = 0$.

5. a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{x^2 + x - 1}{x - 1}$

b) Dùng đồ thị (C) biện luận theo m số nghiệm $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ của phương trình:

$\sin^2 t + (1 - m)\sin t + m - 1 = 0$ (1)

6. a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = -x^3 + 6x^2 - 9x$

b) Dùng đồ thị (C) biện luận theo k số nghiệm của phương trình

$x^3 - 6x^2 + 9x + m = 0$

c) Định m để phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt.

$x^3 - 6x^2 + 9x - k^3 + 6k^2 - 9k = 0$.

7. a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{(x-1)^2}{x+2}$

b) Biện luận theo m số nghiệm phương trình $\dfrac{(x-1)^2}{|x-2|} = m$.

8. a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$

b) Với giá trị nào của m thì phương trình $|x^4 - 2x^2 - 1| = 2m - 5$ có sáu nghiệm phân biệt.

Vấn đề 6: Viết phương trình đường thẳng qua các điểm đặc biệt

1. PHƯƠNG PHÁP

1. Đường lối chung:

Để viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm đặc biệt của đồ thị (C) của hàm số y = f(x) ta thực hiện các việc sau:

+ Gọi M(x; y) là điểm đặc biệt của đồ thị hàm số.

+ Lập một hệ phương trình mà tọa độ M phải thỏa mãn.

+ Từ hệ trên rút ra một phương trình hệ quả bậc nhất y = ax + b.

+ Suy ra đường thẳng (d): y = ax + b là đường thẳng đi qua các điểm đặc biệt M.

2. Hai trường hợp thường gặp:

• Lập phương trình đường thẳng qua điểm cực trị của đồ thị hàm bậc ba y = f(x):

+ Tính y'.

+ Chia y cho y' và viết được y = y'.g(x) + r(x) với r(x) = Ax + B.

+ Gọi M(x; y) là điểm cực trị của đồ thị hàm số f(x) thì tọa độ của M phải thỏa mãn hệ: $\begin{cases} f'(x) = 0 \\ y = f'(x).g(x) + r(x) \end{cases} \Rightarrow y = r(x)$.

+ Vậy y = r(x) = Ax + B là phương trình của đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số.

• Cách viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$:

+ Gọi M(x; y) là điểm cực trị của đồ thị hàm số thì tọa độ M thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = \dfrac{u(x)}{v(x)} & (1) \\ y = \dfrac{u'(x)}{v'(x)} & (2) \end{cases}. \text{ Từ (1) và (2)} \Rightarrow y = ax + b.$$

+ Vậy y = ax + b là phương trình của đường thẳng đi qua các điểm CĐ và CT của đồ thị hàm số.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Chứng minh các hàm số sau có CĐ, CT và viết phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số
$y = 2x^3 - mx^2 + mx + 1.$

Giải

Tập xác định: D = R;

$y' = 6x^2 - 2mx + m$

$y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 2mx + m = 0$ (1)

Hàm số có cực trị ⇔ (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 6m > 0 \Leftrightarrow m < 0$ hay $m > 6$.

Chia y cho y' ta viết được:

$$y = \left(\frac{x}{3} - \frac{m}{18}\right)y' + \left(\frac{2m}{3} - \frac{m^2}{9}\right)x + \frac{m^2}{18} + 1.$$

Tọa độ điểm cực trị của đồ thị hàm số thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} y' = 0 \\ y = \left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{m}{18}\right)y' + \left(\dfrac{2m}{3} - \dfrac{m^2}{9}\right)x + \dfrac{m^2}{18} + 1 \end{cases} \Rightarrow y = \left(\frac{2m}{3} - \frac{m^2}{9}\right)x + \frac{m^2}{18} + 1.$$

Vậy phương trình đường thẳng qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$$y = \left(\frac{2m}{3} - \frac{m^2}{9}\right)x + \frac{m^2}{18} + 1.$$

Ví dụ 2: Chứng minh các hàm số sau có CĐ, CT và viết phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số
$$y = \frac{2x^2 - (2m+1)x + 4m - 4}{x - 2}.$$

Giải

Tập xác định: D = R\{2}.

$$y' = \frac{2x^2 - 8x + 6}{(x-2)^2};\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = -2m + 3 \\ x = 3 \Rightarrow y = -2m + 12 \end{array}\right..$$

Suy ra hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là A(1; –2m + 3) và B(3; –2m + 11).

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2; 8) = 2(1; 4)$.

Do đó đường thẳng AB có hệ số góc k = 4. Suy ra phương trình của AB là:

$y = 4(x - 1) - 2m + 3 = 4x - 2m - 1.$

Vậy phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị là y = 4x – 2m – 1.

Ví dụ 3: Định m để hàm số $y = \dfrac{2x^2 - 3mx + 5m}{x - 2}$ có cực đại, cực tiểu. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số

Giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}\setminus\{2\}$.

$$y' = \frac{2x^2 - 8x + m}{(x-2)^2};\ y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = 2x^2 - 8x + m = 0 \\ x \neq 2 \end{cases}.$$

Hàm số có cực đại, cực tiểu

$\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 16 - 2m > 0 \\ g(2) = m - 8 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 8.$$

Đặt $y = \dfrac{2x^2 - 3mx + 5m}{x - 2} = \dfrac{u}{v}$.

Ta có tọa độ các điểm cực trị thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} \\ y = \dfrac{u}{v} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'v = uv' \\ y = \dfrac{u}{v} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{u}{v} = \frac{u'}{v'} = \frac{4x - 3m}{1} = 4x - 3m.$$

Vậy các điểm cực trị của đồ thị hàm số thuộc đường thẳng (d): $y = 4x - 3m$.

Suy ra phương trình đường thẳng qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y = 4x - 3m$.

3. BÀI TẬP

1. Chứng minh hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + m + 6$ luôn có cực đại và cực tiểu. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số.

2. Cho họ đường cong (C_m): $y = (3 - m)x^3 + 3(m - 3)x^2 + (6m - 1)x - m + 1$

   a) Chứng minh (C_m) luôn đi qua 3 điểm cố định.

   b) Chứng minh 3 điểm cố định trên cùng thuộc một đường thẳng (d).

3. Cho hàm số $y = 3x^3 - 9x^2 + 3(2m - 1)x + 9m - 12$

   a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = 0$.

   b) Định m để hàm số có cực đại, cực tiểu. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số.

4. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + x + m}{x^2 - 1}$

   a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = -1$

   b) Định m để hàm số có cực đại, cực tiểu. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số

5. Cho (C_m): $y = \dfrac{x^2 + mx - 6}{x - m}$

a) Tìm những điểm trong mặt phẳng mà mọi đường (C_m) đều đi qua.

b) Định m để (C_m) có hai cực trị. Chứng tỏ rằng khi đó hai giá trị cực trị cùng dấu.

c) Viết phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

6. Cho (C_m): $y = \dfrac{x + m}{x^2 + 1}$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = 0$

b) Chứng minh nếu (C_m) có 3 điểm uốn thì 3 điểm uốn thẳng hàng. Viết phương trình đường thẳng qua 3 điểm uốn đó.

7. Cho (C_m) : $y = x^3 + (m - 1)x^2 - (m + 3)x - 1$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = 1$

b) Chứng minh $\forall m$ hàm số có cực đại, cực tiểu. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị.

c) Tìm những cặp điểm nguyên trên (C) đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$ và không nằm trên đường thẳng đó.

8. Cho hàm số $y = \dfrac{2x - 1}{x^2}$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Cho M(0; m). Hãy biện luận theo m số tiếp tuyến của (C) vẽ từ M.

c) Khi qua M vẽ được hai tiếp tuyến đến (C), hãy lập phương trình đường thẳng (d) qua hai tiếp điểm.

9. Cho họ đường cong (C_m): $y = \dfrac{-x^2 + mx - m^2}{x - m}$

a) Định m để hàm số có cực đại, cực tiểu. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số.

b) Tìm các điểm trong mặt phẳng sao cho có đúng hai đường của họ (C_m) đi qua.

10. Cho họ đường cong (C_m): $y = 2x^3 + 3(m - 1)x^2 + 6(m - 2)x - 1$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = 2$

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua A(0; –1)

c) Định m để hàm số có cực đại, cực tiểu và đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu vuông góc với đường thẳng $y = x$.

11. Cho hàm số $y = mx^3 - 3mx^2 + (2m + 1)x + 3 - m$ (C_m)

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = 2$

b) Định m để hàm số có cực đại, cực tiểu. Chứng minh đường thẳng đi qua điểm cực đại và cực tiểu của (C_m) luôn đi qua một điểm cố định.

Vấn đề 7: Một số bài toán liên hệ khoảng cách

1. PHƯƠNG PHÁP

➢ Khoảng cách giữa hai điểm A và B: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - x_A)^2}$

➢ Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng (Δ): $Ax + By + C = 0$ là

$$d[M, \Delta] = \frac{|Ax_M + By_M + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

➢ Đặc biệt :

• $d(M, Ox) = |y_M|$ • $d(M, Oy) = |x_M|$.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-1}$.

b) Tìm trên (C) điểm M cách đều hai trục tọa độ.

Giải

a) * Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

* Giới hạn và tiệm cận:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} y = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} y = +\infty \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ là tiệm cận đứng của đồ thị.}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} y = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x+2}{x-1} = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.}$$

* Sự biến thiên :

$$y' = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0, \forall x \in D.$$

$\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định.

Bảng biến thiên :

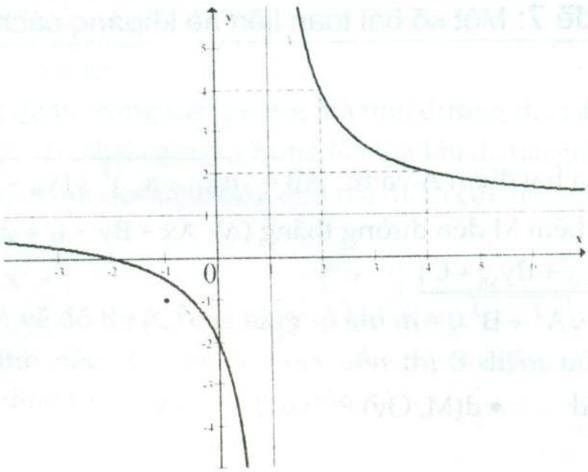
x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		–	‖	–	
y	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

Hàm số không có cực trị.

* Giá trị đặc biệt :

x	–2	0	2	4
y	0	–2	4	2

* Đồ thị :



<u>Nhận xét:</u> Đồ thị (C) nhận giao điểm I(1; 1) của hai tiệm cận làm tâm đối xứng.

b) Gọi $M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow y = \dfrac{x+2}{x-1}$.

M cách đều hai trục tọa độ $\Leftrightarrow |y| = |x| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x \\ y = -x \end{array}\right.$.

➢ Với y = x ta có: $x = \dfrac{x+2}{x-1} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}$.

➢ Với y = –x ta có: $-x = \dfrac{x+2}{x-1} \Leftrightarrow x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$.

Vậy $M(1 \pm \sqrt{3}; 1 \pm \sqrt{3})$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 2: Cho (C): $y = 2x^4 - 3x^2 + 2x + 1$ và (d): $y = 2x - 3$

a) Chứng minh (C) và (d) không có điểm chung.

b) Tìm trên (C) điểm A sao cho d(A, d) nhỏ nhất.

Giải

a) Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là:

$2x^4 - 4x^2 + 2x + 1 = 2x - 3 \Leftrightarrow 2x^4 - 4x^2 + 4 = 0$ (1)

Vì (1) vô nghiệm nên (C) và (d) không có giao điểm.

b) Gọi $A(x; y) \in (C) \Rightarrow y = 2x^4 - 4x^2 + 2x + 1$.

Ta có (d): $2x - y - 3 = 0$ nên

$$d(A; d) = \frac{|2x - y - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|2x - 3 - (2x^4 - 4x^2 + 2x + 1)|}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}|2x^4 - 4x^2 + 4| = \frac{1}{\sqrt{5}}|2(x^2 - 1)^2 + 2| \geq \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Vậy khi A(–1; –3) hay A(1; 1) thì d(A; d) nhỏ nhất.

Khi đó Min d(A; d) = $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số

b) Tìm điểm M thuộc (C) sao cho tổng các khoảng cách từ M đến 2 tiệm cận là nhỏ nhất.

c) Xác định hai điểm A, B lần lượt ở trên hai nhánh của (C) sao cho độ dài đoạn AB ngắn nhất.

Giải

a) Ta có $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1} = x + \dfrac{1}{x - 1}$.

* Tập xác định : D = R\{1}.

* Giới hạn và tiệm cận:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} y = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} y = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1} = +\infty \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ là tiệm cận đứng của đồ thị.}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} [y - x] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x - 1} = 0 \Rightarrow y = x \text{ là tiệm cận xiên của đồ thị.}$$

* Sự biến thiên :

$$y' = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}\ ;\ \ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = -1 \\ x = 2 \Rightarrow y = 3 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		+	0	–	‖	–	0	+	
y	$-\infty$	↗	–1 CĐ	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	CT 3	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trong $(-\infty ; 0)$ và $(2 ; +\infty)$.

Hàm số nghịch biến trong (0; 1) và (1; 2).

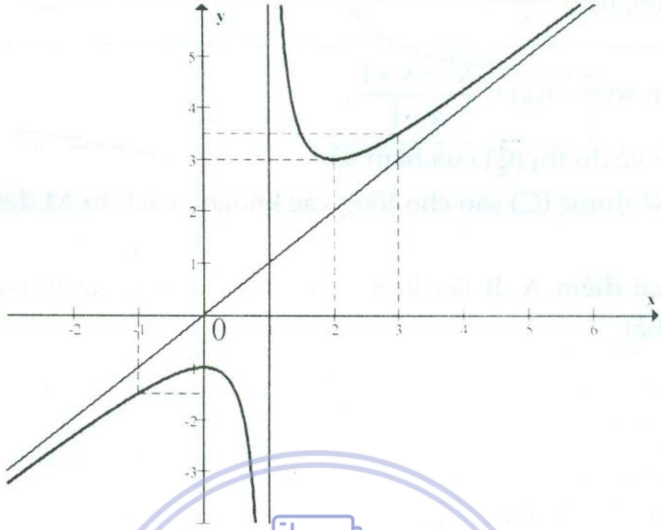
Hàm số đạt cực đại tại x = 0 và $y_{CĐ} = -1$.

Hàm số đạt cực tiểu tại x = 2 và $y_{CT} = 3$.

* Giá trị đặc biệt :

x	–1	0	2	3
	–3/2	–1	3	7/2

* Đồ thị :



Nhận xét: Đồ thị nhận giao điểm I(1;1) của hai tiệm cận làm tâm đối xứng.

b) Tìm điểm M thuộc (C) sao cho tổng các khoảng cách từ M đến 2 tiệm cận là nhỏ nhất.

$M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow y = x + \dfrac{1}{x-1}$.

(C) có tiệm cận đứng là $x - 1 = 0 \Rightarrow d_1 = d(M; TCĐ) = |x - 1|$.

(C) có tiệm cận xiên là $y = x \Leftrightarrow x - y = 0$

$$\Rightarrow d_2 = d(M; TCX) = \frac{|x-y|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}|x-1|}.$$

Ta có $d_1 + d_2 \geq 2d_1d_2 = 2\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{2}}} = \dfrac{2}{\sqrt[4]{2}}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow d_1 = d_2 \Leftrightarrow x = 1 \pm \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} \Rightarrow y = 1 \pm \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} \pm \sqrt[4]{2}$.

Vậy khi $M(1 + \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}};\ 1 + \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} + \sqrt[4]{2})$ hay $M(1 - \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}};\ 1 - \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} - \sqrt[4]{2})$ thì $d_1 + d_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

c) Xác định hai điểm A, B lần lượt ở trên hai nhánh của (C) sao cho AB ngắn nhất.

Vì A, B lần lượt thuộc hai nhánh của (C) nên ta có thể giả thiết $x_A < 1 < x_B$.

Do đó có thể đặt:

$x_A = 1 - a$; $x_B = 1 + b$ trong đó $a > 0$ và $b > 0$.

Khi đó: $y_A = 1 - a - \frac{1}{a}$ và $y_B = 1 + b + \frac{1}{b}$.

Ta có $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (b+a)^2 + \left(b + a + \frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)^2$

$$= (b+a)^2\left[1 + (1 + \frac{1}{ab})^2\right]$$

$$= (a+b)^2\left(2 + \frac{1}{a^2b^2} + \frac{2}{ab}\right) \geq (2\sqrt{ab})^2\left(2\sqrt{\frac{2}{a^2b^2}} + \frac{2}{ab}\right) = 8\left(\sqrt{2}+1\right).$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

Vậy khi $A\left(1 - \frac{1}{\sqrt[4]{2}}; 1 - \frac{1}{\sqrt[4]{2}} - \sqrt[4]{2}\right)$, $B\left(1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}; 1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \sqrt[4]{2}\right)$ thì AB ngắn nhất và $\text{MinAB} = 2\sqrt{2(\sqrt{2}+1)}$.

3. BÀI TẬP

1. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ và (d): $2x - y + m = 0$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số

b) Chứng minh (d) luôn cắt (H) tại hai điểm phân biệt A, B ở trên hai nhánh khác nhau.

c) Định m để độ dài AB ngắn nhất.

2. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + mx - m}{x - 1}$ có đồ thị (C_m).

a) Định m để A(1; 2) là tâm đối xứng của (C_m).

b) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số với m vừa tìm được.

c) Định k để đường thẳng (d): y = k cắt đồ thị (C) tại hai điểm A, B sao cho $AB = \sqrt{5}$.

3. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Xác định hai điểm A, B lần lượt ở trên hai nhánh của (C) sao cho AB ngắn nhất.

c) Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho M cách đều hai trục tọa độ.

4. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2\cos\alpha + 2x\sin\alpha + 1}{x + 2}$ có đồ thị là (C_α)

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C_0) của hàm số khi $\alpha = 0$

b) Tìm α để đường tròn tâm O và tiếp xúc với tiệm cận xiên của (C_α) có bán kính lớn nhất.

5. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{mx^2 + (m^2+1)x + 4m^2 + m}{x + m}$ có đồ thị (C_m)

a) Khi $m = -1$, hãy khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số và tìm trên mỗi nhánh của (C) một điểm sao cho khoảng cách giữa chúng nhỏ nhất.

b) Định m để (C_m) có một cực trị thuộc góc phần tư (II) và một cực trị thuộc góc phần tư (IV).

6. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2 + (m+1)x - m + 1}{x - m}$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = 2$.

b) Chứng minh tích các khoảng cách từ điểm M tùy ý thuộc (C) đến hai tiệm cận là một hằng số.

c) Với giá trị nào của m thì hàm số có CĐ, CT và hai giá trị CĐ, CT cùng dấu.

7. Cho hàm số $y = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số

b) Tìm những điểm trên (C) có hoành độ lớn hơn 1 sao cho tiếp tuyến tại đó tạo với hai tiệm cận một tam giác có chu vi nhỏ nhất.

8. a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-3}$.

b) Tìm trên (C) điểm M để khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng bằng 5 lần khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang.

Vấn đề 8: Điểm đối xứng và đường đối xứng

1. PHƯƠNG PHÁP

➢ Hai điểm A và B phân biệt đối xứng nhau qua I $\Leftrightarrow$ I là trung điểm của AB.

➢ Hai điểm A và B phân biệt đối xứng nhau qua đường thẳng Δ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AB \perp (\Delta) \\ I \in (\Delta) \end{cases} \text{ (I là trung điểm của AB).}$$

➢ Hai đường (C) và (C′) gọi là đối xứng nhau qua đường thẳng (Δ) nếu: $M \in (C)$ và M′ là điểm đối xứng của M qua (Δ) thì ta luôn có:

$M \in (C) \Leftrightarrow M' \in (C')$.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2-1)x + 1 - m^2$ (C_m)

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = 2$

b) Định m để (C_m) có 2 điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ.

Giải

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi m = 2:

Khi m = 2 thì (C): $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$.

* Tập xác định: D = R.

* Giới hạn: $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$.

* Chiều biến thiên:

$$y' = 3x^2 - 12x + 9;\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \rightarrow y = 1 \\ x = 3 \rightarrow y = -3 \end{array}\right.$$

* Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	1 CĐ	↘	−3 CT	↗	$+\infty$

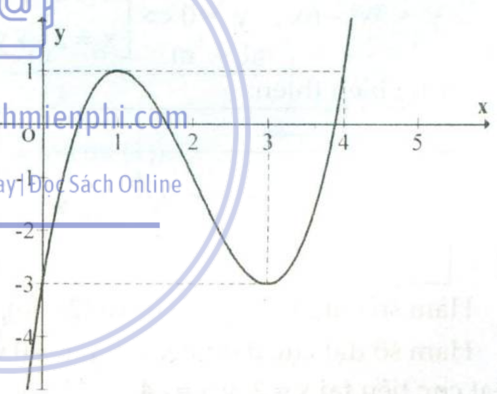
Hàm số tăng trong $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$; giảm trong $(1; 3)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$, $y_{CĐ} = 1$ và đạt cực tiểu tại $x = 3$, $y_{CT} = -3$.

* $y'' = 6x - 12$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = -1$.

Đồ thị có điểm uốn I(2; −1).

* Đồ thị:



<u>**Nhận xét:**</u> Đồ thị nhận điểm uốn I(−1; −2) làm tâm đối xứng.

b) Định m để (C_m) có 2 điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ.

Gọi $A(x_0; y_0) \in (C_m) \Rightarrow y_0 = x_0^3 - 3mx_0^2 + 3(m^2 - 1)x_0 + 1 - m^2$ (1)

Ta có: B là điểm đối xứng của A qua O $\Leftrightarrow B(-x_0; -y_0)$.

$B \in (C_m) \Leftrightarrow -y_0 = -x_0^3 - 3mx_0^2 - 3(m^2 - 1)x_0 + 1 - m^2$ (2)

(1) và (2) $\Rightarrow -6mx_0^2 + 2 - 2m^2 = 0$ (3)

Nếu $x_0 = 0$ thì $y_0 = 1 - m^2 = -y_0 \Rightarrow y_0 = 0$ nên $A \equiv B \equiv O$.

Do đó: (C_m) có 2 điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ

$\Leftrightarrow$ (3) có nghiệm $x_0 \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 2-2m^2 \neq 0 \\ \Delta' = 6m(2-2m^2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < m < 0 \\ m > 1 \end{array}\right. .$$

Vậy m thỏa YCBT $\Leftrightarrow -1 < m < 0$ hay $m > 1$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m^2x + m$

a) Khảo sát hàm số khi $m = 0$

b) Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có CĐ, CT và các điểm CĐ, CT đối xứng nhau qua đường thẳng $y = \dfrac{x-5}{2}$.

Giải

a) Khi $m = 0$ thì (C): $y = x^3 - 3x^2$.

* Tập xác định: D = R.

* Giới hạn: $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$.

* Chiều biến thiên:

$y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \to y = 0 \\ x = 2 \to y = -4 \end{array}\right.$

* Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	0 CĐ	↘	CT −4	↗	$+\infty$

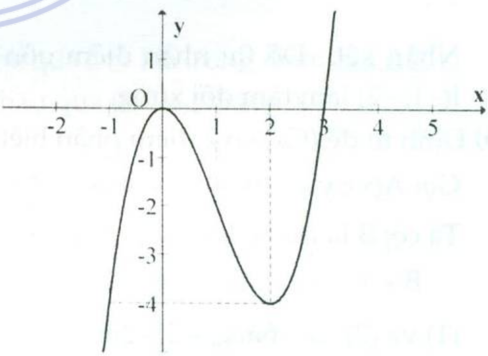
Hàm số tăng trong $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$; Hàm số giảm trong $(0; 2)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CĐ} = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$, $y_{CT} = -4$.

* $y'' = 6x - 6$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = -2$.

Đồ thị có điểm uốn I(1; −2).

* Đồ thị:



<u>**Nhận xét:**</u> Đồ thị nhận điểm uốn I(1; −2) làm tâm đối xứng.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có CĐ, CT và các điểm CĐ, CT đối xứng nhau qua đường thẳng (d): $y = \dfrac{x-5}{2}$.

Tập xác định: D = R

$y' = 3x^2 - 6x + m^2$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + m^2 = 0$ (1).

Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = 9 - 3m^2 > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3} < m < \sqrt{3}.$$

Chia y cho y′ ta viết được $y = \frac{x-1}{3}.y' + \frac{2m^2-6}{3}x + \frac{m^2+3m}{3}$.

Tọa độ điểm cực trị thỏa hệ:

$$\begin{cases} y' = 0 \\ y = \frac{x-1}{3}.y' + \frac{2m^2-6}{3}x + \frac{m^2+3m}{3} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{2m^2-6}{3}x + \frac{m^2+3m}{3}.$$

Do đó đường thẳng qua các điểm cực trị là (Δ): $y = \frac{2m^2-6}{3}x + \frac{m^2+3m}{3}$.

Suy ra hai điểm cực trị là

$A(x_A; \frac{2m^2-6}{3}x_A + \frac{m^2+3m}{3})$; $B(x_B; \frac{2m^2-6}{3}x_B + \frac{m^2+3m}{3})$.

Gọi I là trung điểm AB thì $I\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{2m^2-6}{3}x_1 + \frac{m^2+3m}{3}\right)$

$\Rightarrow I(1; m^2+m-2)$ (vì x_A, x_B là nghiệm của (1)).

Do đó: A, B đối xứng với nhau qua đường thẳng (d)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} I \in (d) \\ (d) \perp (\Delta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 2 = \frac{1-5}{2} \\ k_d.k_\Delta = \frac{1}{2}.\frac{2m^2-6}{3} = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m = 0 \\ m^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$$

Vậy m = 0 thỏa mãn yêu cầu bài toán..

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = \frac{2x-4}{x-1}$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số

b) Tìm phương trình đường cong (C′) đối xứng với (C) qua đường thẳng y = 2.

Giải

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số

* Tập xác định: D = R\{1}.

* Giới hạn và tiệm cận:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} y = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2x-4}{x-1} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} y = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x-4}{x-1} = -\infty \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ là tiệm cận đứng của đồ thị.}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-4}{x-1} = 1 \Rightarrow y = 2 \text{ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.}$$

* Sự biến thiên :

$$y' = \frac{2}{(x-1)^2} > 0, \forall x \in D.$$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên các khoảng xác định.

Bảng biến thiên :

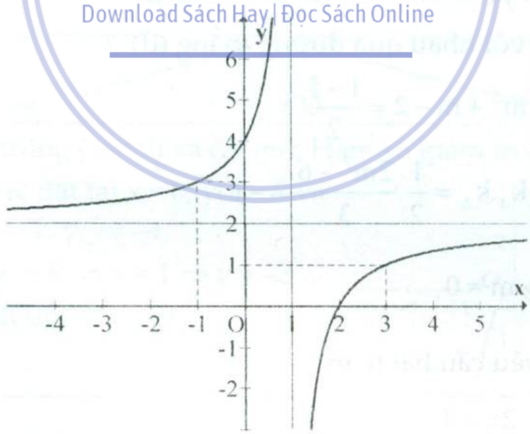
x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	+	||	+
y	2 ↗ $+\infty$	||	$-\infty$ ↗ 2

Hàm số không có cực trị.

* Giá trị đặc biệt :

x	–1	0	2	3
y	3	2	0	1

* Đồ thị :



Nhận xét: Đồ thị (C) nhận giao điểm I(1; 2) của hai tiệm cận làm tâm đối xứng.

b) Tìm phương trình đường cong (C′) đối xứng với (C) qua (d): y = 2.

Lấy M′(x′; y′) bất kì thuộc (C′). Gọi H là hình chiếu của M′ trên (d) thì H(x′; 2).

Gọi M (x; y) là điểm đối xứng của M′ qua (d): y = 2 ⇔ H là trung điểm của MM′

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = 4 - y' \end{cases} \Leftrightarrow M(x'; 4 - y').$$

Ta có: (C) và (C′) đối xứng nhau qua (d)

$\Leftrightarrow M \in (C)$

$\Leftrightarrow 4 - y' = \frac{2x'-4}{x'-1} \quad \Leftrightarrow y' = 4 - \frac{2x'-4}{x'-1} = \frac{2x'}{x'-1} \Leftrightarrow M' \in (C'): y = \frac{2x}{x-1}$.

Vậy (C′): $y = \frac{2x}{x-1}$ là đường cong thỏa yêu cầu bài toán.

3. BÀI TẬP

1. Cho hàm số $y = x^3 - \frac{3}{2}mx^2 + \frac{1}{3}m^3$.

a) Khảo sát hàm số khi m = 1.

b) Định m để hàm số có các điểm CĐ, CT đối xứng nhau qua đường thẳng y = x.

2. Cho $y = \frac{3x+1}{x-3}$ (1)

a) Khảo sát hàm số (1).

b) Tìm một hàm số mà đồ thị của nó đối xứng với đồ thị hàm số (1) qua đường thẳng $x + y - 3 = 0$.

c) C là điểm bất kì trên đồ thị (1). Tiếp tuyến với đồ thị tại C cắt tiệm cận đứng và ngang lần lượt tại A và B. Chứng minh C là trung điểm AB và diện tích tam giác tạo bởi tiếp tuyến đó và hai tiệm cận không đổi.

3. Cho hàm số $y = \frac{3x^2}{x-1}$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Tìm hai điểm A, B thuộc (C) sao cho chúng đối xứng nhau qua đường thẳng có phương trình $y = x - 1$.

4. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 4mx + 5m}{x-1}$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi m = 1.

b) Tìm m để trên (C_m) có 2 điểm đối xứng nhau qua O.

5. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + (m-1)x - m}{x+1}$ (1)

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi m= –1.

b) Tìm m để hàm số có CĐ, CT

c) Định m để đồ thị hàm số (1) cắt trục Ox tại 2 điểm M, N. Chứng tỏ M, N không đối xứng nhau qua O.

HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

§1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

Dạng 1: Tìm khoảng tăng, giảm của hàm số y = f(x)

1. Tìm các khoảng tăng, giảm của các hàm số sau:

a. $y = x^2 + 2mx + m - 1$.

Tập xác định: D = R;

$y' = 2x + 2m$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -m$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-m$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		↘		↗	

Vậy hàm số giảm trong $(-\infty; -m)$; hàm số tăng trong $(-m; +\infty)$.

b. $y = -x^3 + 6x^2 - 12x + 8$.

Tập xác định: D = R;

$y' = -3x^2 + 12x - 12$; $y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 12x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	
y		↘		↘	

Vậy hàm số luôn giảm trên R.

c. $y = -\dfrac{1}{4}x^4 - x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + 3x$.

Tập xác định: D = R; $y' = -x^3 - 3x^2 + x + 3$;

$y' = 0 \Leftrightarrow -x^3 - 3x^2 + x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3; x = \pm 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y		↗		↘		↗		↘	

Vậy hàm số tăng trong $(-\infty; -3)$, $(-1; 1)$; giảm trong $(-3; -1)$, $(1; +\infty)$.

d. $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(2m+2)x^2 + (m^2 + 2m)x$

Tập xác định: $D = R; y' = x^2 + (2m+2)x + m^2 + 2m;$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + (2m+2)x + m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -m \\ x = -m-2 \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-m-2$		$-m$		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y		↗		↘		↗	

Vậy hàm số tăng trên $(-\infty; -m-2)$, $(-m; +\infty)$, hàm số giảm trong $(-m-2; -m)$.

2. Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số sau:

a. $y = \frac{3x+1}{x+2}$.

Tập xác định: $D = R\backslash\{-2\}$; $y' = \frac{5}{(x+2)^2}$.

Ta có $y' > 0$ với mọi $x \in D$ nên hàm số luôn tăng trên $(-\infty; -2)$, $(-2; +\infty)$.

b. $y = \frac{(x-2)^2}{1-x}$.

Tập xác định: $D = R\backslash\{1\}$; $y' = \frac{-x^2+2x}{(1-x)^2}$;

$y' = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = 2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		−	0	+	‖	+	0	−	
y		↘		↗	‖	↗		↘	

Vậy: Hàm số nghịch biến trong $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$; hàm số đồng biến trong $(0; 1)$ và $(1; 2)$.

c. $y = \frac{x^2 - x}{x^2 - x - 2}$.

Tập xác định: $D = R\backslash\{-1; 2\}$; $y' = \frac{-4x+2}{(x^2-x-2)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
y'		+	||	+	0	−	||	−	
y		↗	||	↗		↘	||	↘	

Vậy hàm số tăng trên $(-\infty; -1)$, $(-1; \frac{1}{2})$; hàm số nghịch biến $(\frac{1}{2}; 2)$, $(2; +\infty)$.

d. $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$.

Tập xác định: $D = R \setminus \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$.

$$y' = \frac{3x^2(3 - x^2) - x^3(-2x)}{(3 - x^2)^2} = \frac{-x^4 + 9x^2}{(9 - x^2)^2}$$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = \pm 3$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		3		$+\infty$
y'		−	0	+	||	+	0	+	||	+	0	−	
y		↘		↗	||		↗		||	↗		↘	

Vậy hàm số tăng trên $(-3; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}; 3)$;

hàm số giảm trong $(-\infty; -3)$, $(3; +\infty)$.

e. $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

Tập xác định: $D = R$.

$y' = \dfrac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		−	0	+	0	−	
y		↘		↗		↘	

Vậy hàm số giảm trên $(-\infty; -1)$, $(1; +\infty)$, hàm số tăng trong $(-1; 1)$.

f. $y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^2 - 2x + 2}$.

Tập xác định: $D = R$.

$$y' = \frac{-4x^2+8}{(x^2-2x+2)^2};\ y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	+	0	$-$	
y		↘		↗		↘	

Vậy hàm số giảm trên $(-\infty; -\sqrt{2})$, $(\sqrt{2}; +\infty)$, hàm số tăng trong $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$.

3. Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số sau:

a. $y = \sqrt{x^2-4x+3}$

Tập xác định: $D = (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$.

$$y' = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}};\ y' = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (loại)}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1	2	3		$+\infty$
y'		$-$	‖		‖	+	
y		↘	‖		‖	↗	

Vậy hàm số tăng trong $(3; +\infty)$; giảm trong $(-\infty; 1)$.

b. $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = \frac{-3x+3}{2\left(\sqrt{x^2-x+1}\right)^3};\ y' = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		+	0	$-$	
y		↗		↘	

Vậy hàm số tăng trong $(-\infty; 1)$; hàm số giảm trong $(1; +\infty)$.

c. $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$. Tập xác định: $D = (1; +\infty) \cup (-\infty; -1)$

$y' = \dfrac{x(x^2-2)}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (loại) hay $x = \pm\sqrt{2}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖				‖	$-$	0	$+$	
y		↘		↗	‖				‖	↘		↗	

Vậy hàm số tăng trên $(-\sqrt{2}; -1)$, $(\sqrt{2}; +\infty)$; hàm số giảm trong $(-\infty; -\sqrt{2})$, $(1; \sqrt{2})$.

d. $y = \sqrt{2x - x^2}$. Tập xác định: $D = [0; 2]$.

$y' = \dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'			‖	$+$	0	$-$	‖		
y			‖	↗		↘	‖		

Vậy hàm số tăng trong $(0; 1)$; giảm trong $(1; 2)$.

4. Tìm khoảng tăng giảm của các hàm số:

a. $y = |x-1| + \dfrac{x^2+x+2}{x+1} = \begin{cases} \dfrac{2x^2+x+1}{x+1} & \text{khi } x \geq 1 \\ \dfrac{x+3}{x+1} & \text{khi } x < 1,\ x \neq -1 \end{cases}$. Tập xác định: $D = R \setminus \{-1\}$.

$y' = \begin{cases} \dfrac{2x^2+4x}{(x+1)^2} & \text{khi } x > 1 \\ \dfrac{-2}{(x+1)^2} & \text{khi } x < 1,\ x \neq -1 \end{cases}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$		$+$	
y		↘	‖	↘		↗	

Vậy hàm số giảm trong $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$; tăng trong $(1; +\infty)$.

b. $y = x^2 - 2x - 4|2 - x| + 3$.

Ta có: $y = \begin{cases} x^2 - 2x - 4(x-2) + 3 \text{ khi } x \geq 2 \\ x^2 - 2x + 4(x-2) + 3 \text{ khi } x < 2 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 6x + 11 \text{ khi } x \geq 2 \\ x^2 + 2x - 5 \text{ khi } x < 2 \end{cases}$.

Tập xác định: D = R.

$y' = \begin{cases} 2x - 6 \text{ khi } x > 2 \\ 2x + 2 \text{ khi } x < 2 \end{cases}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 3$ hay $x = -1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	2	3	$+\infty$
y'	$-$	0 $+$		$-$ 0 $+$	
y	↘	↗		↘	↗

Vậy : Hàm số đồng biến trong $(-1 ; 2)$ và $(3 ; +\infty)$;

Hàm số nghịch biến trong $(-\infty; -1)$ và $(2 ; 3)$.

5. *a.* Tập xác định: D = R;

$y' = 3(m^2 + 1)x^2 + 2x + 2$.

Ta có: y' có $\Delta' = 1 - 6(m^2 + 1) = -6m^2 - 5 < 0$ với mọi m và $a = m^2 + 1 > 0$ với mọi m, nên $y' > 0$ với mọi $x \in D$. Vậy hàm số luôn tăng trên tập xác định.

b. $y = \dfrac{2x-3}{3x-6}$. Tập xác định: $D = R\setminus\{2\}$;

$y' = \dfrac{-3}{(3x-6)^2} < 0$ với mọi $x \in D$.

Vậy hàm số luôn giảm trên các khoảng xác định của nó.

c. $y = \dfrac{x^2 - x - 4}{1 - x}$.

Tập xác định: $D = R\setminus\{1\}$;

$y' = \dfrac{-x^2 + 2x - 5}{(1-x)^2} = \dfrac{-(x-1)^2 - 4}{(1-x)^2} < 0$ với mọi $x \in D$.

Vậy hàm số luôn giảm trên các khoảng xác định của nó.

d. $y = \dfrac{(m-2)x - 2m^2 + 2m - 4}{x - m}$.

Tập xác định: $D = R\setminus\{m\}$.

$y' = \dfrac{-m^2 + 2m + 2m^2 - 2m + 4}{(x-m)^2} = \dfrac{m^2 + 4}{(x-m)^2} > 0$ với mọi $x \in D$.

Vậy hàm số luôn tăng trên các khoảng xác định của nó.

e. $f(x) = x^3 + x - \cos x - 4$.

Tập xác định: D = R;

$y' = 3x^2 + 1 + \sin x \geq 0$

Vì $3x^2 \geq 0$ và $1 + \sin x \geq 0$ nên $y' \geq 0$ với mọi $x \in R$.

Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm.

Vậy hàm số luôn tăng trên các khoảng xác định của nó.

Dạng 2: Chứng minh hàm số tăng (giảm) trên đoạn hay nửa khoảng

1. $y = f(x) = x\sqrt{8 - x^2}$.

Tập xác định: $D = \left[-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right]$;

$$y' = \sqrt{8 - x^2} + x.\frac{-x}{\sqrt{8 - x^2}} = \frac{8 - 2x^2}{\sqrt{8 - x^2}};$$

$y' = 0 \Leftrightarrow 8 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Ta có: Với mọi $x \in (-2; 2)$ thì $8 - 2x^2 > 0$ nên $y' > 0$ (1)

Hàm số đã cho liên tục trên [–2; 2] (2)

Từ (1) và (2) suy ra hàm số đồng biến trên [–2; 2].

2. $y = \sqrt{x - 1} + \sqrt{7 - x}$.

Tập xác định: D = [1; 7];

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x - 1}} - \frac{1}{2\sqrt{7 - x}} = \frac{\sqrt{7 - x} - \sqrt{x - 1}}{2\sqrt{x - 1}.\sqrt{7 - x}};$$

$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{7 - x} = \sqrt{x - 1} \Leftrightarrow x = 4$.

Ta có: Với mọi $x \in (4; 7)$, $y' < 0$ (1)

Hàm số đã cho liên tục trên [4; 7] (2)

Từ (1) và (2) suy ra hàm số đã cho giảm trên [4; 7].

3. $y = x^2 + 2\sqrt{5}\sqrt{9 - x^2}$.

Tập xác định: D = [–3; 3];

$$y' = 2x - \frac{2\sqrt{5}x}{\sqrt{9 - x^2}} = \frac{2x(\sqrt{9 - x^2} - \sqrt{5})}{\sqrt{9 - x^2}}$$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = \pm 2$.

Ta có: Với $x \in (2; 3)$ thì $y' < 0$ và với mọi $x \in (-3; -2)$ thì $y' > 0$ (1)

Hàm số đã cho liên tục trên [2; 3] và [–3; –2] (2)

Từ (1) và (2) suy ra hàm số đồng biến trên [–3; –2] và nghịch biến trên [2; 3].

Dạng 3: Định giá trị tham số để hàm số đơn điệu trên tập hợp X cho trước

1.

a. $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (4m-3)x + 3$.

Tập xác định: D = R; $y' = x^2 + 2mx + 4m - 3$

Hàm số đồng biến trên R

$\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in R$

$\Leftrightarrow \Delta' \leq 0$ (vì $a = 1 > 0$)

$\Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 3$.

Vậy $1 \leq m \leq 3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b. $y = \left(\frac{1-m}{3}\right)x^3 - 2(1-m)x^2 + 2(m-2)x + 5$.

Tập xác định: D = R;

$y' = (1-m)x^2 - 4(1-m)x + 2(m-2)$;

Hàm số nghịch biến trên R $\Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in R$.

TH1: $a = 1 - m = 0 \Leftrightarrow m = 1$;

Khi đó $y' = -2 < 0\ \forall x \in R$ nên $m = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

TH2: $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$;

Khi đó:

$$y' \leq 0\ \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ 6m^2 - 14m + 8 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ 1 \leq m \leq \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m \leq \frac{4}{3}.$$

Vậy m thỏa mãn yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 1 \leq m \leq \frac{4}{3}$.

c. $y = \frac{mx - m^2 - 1}{x + 2}$. Tập xác định: D = R \ {–2};

$$y' = \frac{2m + m^2 + 1}{(x+2)^2} = \frac{(m+1)^2}{(x+2)^2};$$

Hàm số tăng trên từng khoảng xác định

$\Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in D \Leftrightarrow (m+1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq -1$.

Vậy $m \neq -1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

d. $y = \dfrac{mx^2 - 2x + 1}{x + 1}$.

Tập xác định: $D = R\backslash\{-1\}$; $y' = \dfrac{mx^2 + 2mx - 3}{(x+1)^2}$

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

$\Leftrightarrow y' \le 0$ với mọi $x \in D$.

$\Leftrightarrow g(x) = mx^2 + 2mx - 3 \le 0, \forall x \in D$.

TH1: $m = 0$. Khi đó $g(x) = -3 < 0$. Vậy $m = 0$ (nhận).

TH2: $m \ne 0$.

YCBT $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m^2 + 3m \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \le m < 0.$

Vậy m thỏa mãn yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -3 \le m \le 0$

2. Định m để hàm số

a. $y = x^2 - 2(m - 4)mx + m + 3$.

Tập xác định: $D = R$; $y' = 2x - 2(m - 4)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = m - 4$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$m - 4$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

Hàm số tăng trong $(2; +\infty) \Leftrightarrow m - 4 \le 2 \Leftrightarrow m \le 6$.

Vậy $m \le 6$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b. $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2mx^2 - 4mx - 2$.

Tập xác định: $D = R$; $y' = x^2 - 4mx - 4m$

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0) \Leftrightarrow y' \ge 0, \forall x \in (-\infty; 0)$.

TH1: $\Delta' \le 0 \Leftrightarrow 4m^2 + 4m \le 0 \Leftrightarrow -1 \le m \le 0$.

Khi đó do $a = 1 > 0 \Rightarrow y' \ge 0, \forall x \in R \Rightarrow y' \ge 0, \forall x \in (-\infty; 0)$.

Vậy $-1 \le m \le 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán (1).

TH2: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < -1$ hay $m > 0$.

Khi đó y' có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$). Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Vậy hàm số tăng trên $(-\infty; 0) \Leftrightarrow 0 \le x_1 < x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S < 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \text{ hay } m > 0 \\ 4m < 0 \\ -4m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1 \ (2).$$

Kết luận: kết hợp (1) và (2) ta có $m \leq 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

c. $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + 4x - 10$ nghịch biến trên đúng một khoảng có độ dài bằng 2.

Tập xác định: $D = R$; $y' = x^2 - 2(m+1)x + 4$; $\Delta' = m^2 + 2m - 3$.

TH1: $\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 1$: Khi đó $y' \geq 0$ nên hàm số luôn tăng trên R.

TH2: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < -3$ hay $m > 1$: Khi đó y' có 2 nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		+	0	–	0	+	
y		↗		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

YCBT $\Leftrightarrow x_2 - x_1 = 2 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 = 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4$

$\Leftrightarrow 4(m+1)^2 - 4.4 = 4 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = -1 \pm \sqrt{5}$ (nhận)

Vậy m thỏa mãn yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m = -1 \pm \sqrt{5}$.

d. $y = \dfrac{mx - 8}{x - m - 2}$.

Tập xác định: $D = R \setminus \{m + 2\}$; $y' = \dfrac{-m^2 - 2m + 8}{(x - m - 2)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên $(1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m + 2 \notin (1; +\infty) \\ -m^2 - 2m + 8 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 2 \leq 1 \\ m < -4 \text{ hay } m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow m < -4.$$

Vậy m thỏa mãn yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m < -4$.

e. $y = \dfrac{x^2 - 2mx + m^2 + 1}{x - m}$. Tập xác định: $D = R \setminus \{m\}$; $y' = \dfrac{x^2 - 2mx + m^2 - 1}{(x - m)^2}$;

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = m - 1$ hay $x = m + 1$;

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		$m-1$		m		$m+1$		$+\infty$
y'		+	0	–	‖	–	0	+	
y		↗		↘	‖	↘		↗	

Vậy: Hàm số đồng biến trong $(2 ; +\infty) \Leftrightarrow m + 1 \leq 2 \Leftrightarrow m \leq 1$.

3. Định m để hàm số:

a. $y = x + (m+1)\sin x$.

Tập xác định: D = R; $y' = 1 + (m+1)\cos x$

Ta có: $\forall x \in [0; 2\pi]$ ta có $(m+1)\cos x \geq -|m+1|$ nên $y' \geq 1 - |m+1|$.

Hàm số đã cho liên tục trên $[0; 2\pi]$

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (0; 2\pi)$

$\Leftrightarrow 1 - |m+1| \geq 0 \Leftrightarrow |m+1| \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 0$.

b. $y = m\sin x + 2\cos x + (m+2)x$.

Tập xác định: D = R; $y' = m\cos x - 2\sin x + m + 2$.

Ta có: $\forall x \in (0; 10\pi)$ ta có $m\cos x - 2\sin x \geq -\sqrt{m^2+4}$

$\Rightarrow y' \geq m + 2 - \sqrt{m^2+4}$.

Do đó hàm số tăng trên $(0; 10\pi) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (0; 10\pi)$

$\Leftrightarrow m + 2 - \sqrt{m^2+4} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{m^2+4} \leq m+2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+2 \geq 0 \\ m^2+4 \leq (m+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -2 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 0.$$

Dạng 4: Chứng minh bất đẳng thức F(x) ≥ 0 với mọi x ∈ K

1. ➢ Trước hết ta chứng minh $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$ (1), với mọi $x > 0$.

Ta có: (1) $\Leftrightarrow f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6} > 0$ (1').

Ta có: $f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$;

$f''(x) = x - \sin x > 0$ với mọi $x > 0$ mà $f'(x)$ liên tục trên $[0; +\infty)$

$\Rightarrow f'(x)$ tăng trên $[0; +\infty)$.

$\Rightarrow f'(x) > f'(0) = 0$, $\forall x > 0$ mà $f(x)$ liên tục trên $[0; +\infty)$

$\Rightarrow f(x)$ tăng trên $[0; +\infty)$

$\Rightarrow f(x) > f(0) = 0, \forall x > 0 \Rightarrow$ (1) được chứng minh.

➢ Chứng minh $\sin x < x - \frac{x^3}{6}$ (2), với mọi $x < 0$:

Với mọi $x < 0$, đặt $t = -x > 0$ nên áp dụng (1) ta có:

$$\sin t > t - \frac{t^3}{6} \Rightarrow \sin(-x) > -x - \frac{(-x)^3}{6} \Rightarrow \sin x < x - \frac{x^3}{6}$$

Vậy (2) đúng với mọi $x < 0$.

2. *a*. $3x < 2\sin x + \tan x, \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$

Xét hàm số $f(x) = 2\sin x + \tan x - 3x$ trên $[0; \frac{\pi}{2})$, ta có:

+ f liên tục trên $[0; \frac{\pi}{2})$.

+ $f'(x) = 2\cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 = \cos x + \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3$

$> 3\sqrt[3]{\cos x.\cos x.\frac{1}{\cos^2 x}} - 3 = 0, \forall (0; \frac{\pi}{2})$ (do $0 < \cos x < 1$)

Vậy f tăng trên $[0; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow f(x) > f(0) = 0 \ \forall x \in (0; \frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow 2\sin x + \tan x - 3x > 0, \forall x \in (0; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow$ ĐPCM.

b. $2\sin x + \sin 2x \le \frac{3\sqrt{3}}{2}, \forall x \in [\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2})$.

Xét hàm số $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$ trên $(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2})$

+ f liên tục trên $(0; \frac{\pi}{2})$

+ $f'(x) = 2\cos x + 2\cos 2x = 4\cos^2 x + 2\cos x + 2$

Với $x \in [\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2})$ thì $f'(x) \le 0$

$\Rightarrow$ Hàm số f giảm trên $[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow f(x) \le f(\frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \ \forall x \in [\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2})$

3. Xét hàm số $f(x) = x^4 - ax^2 - bx - c$ trên $[1; +\infty)$.

Ta có: $f'(x) = 4x^3 - 2ax - b$

$f''(x) = 12x - 2a$

Vì với $x > 1$ thì $12x > 12$ và $-2a \ge -12$ nên $f''(x) > 0 \ \forall x \in (1; +\infty)$ mà $f'(x)$ liên tục trên $[1; +\infty)$

$\Rightarrow f'(x)$ tăng trên $[1; +\infty)$

$\Rightarrow \forall x > 1$ thì $f'(x) > f'(1) = 4 - 2a - b \ge 4 - 12 + 8 = 0$

$\Rightarrow \forall x > 1$ ta có $f'(x) > 0$ mà $f(x)$ liên tục trên $[1; +\infty)$.

$\Rightarrow f(x) \ge f(1) = 1 - a - b - c \ge 1 - 6 + 8 - 3 = 0, \forall x \ge 1$.

Vậy ta luôn có $f(x) \ge 0, \forall x \ge 1$ (ĐPCM).

4. Xét hàm số $f(x) = \tan x - \frac{4x}{\pi}$ trên $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ ta có:

* f liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

* $f'(x) = \tan^2 x + 1 - \frac{4}{\pi}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \tan^2 x = \frac{4-\pi}{\pi} \Leftrightarrow g(x) = \tan x - \sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}} = 0.$

Ta có: g(x) liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

$g(0) = -\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}} < 0$ và $g(\frac{\pi}{4}) = 1 - \sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}} > 0$

nên g(x) = 0 có một nghiệm duy nhất trên $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Giả sử nghiệm đó là x = a.

Ta có bảng biến thiên

x	0		a		π/4
f′(x)		–	0	+	
f(x)	0	↘	f(a)	↗	0

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

Với mọi $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ ta có $f(x) \le 0$ hay $\tan x \le \frac{4x}{\pi}$.

5. Xét hàm số $f(x) = \tan x - x - \frac{x^3}{3}$ trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ ta có:

$f'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 - x^2 = (\tan x + x)(\tan x - x)$

Ta có: $\tan x + x > 0$ với mọi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

$g(x) = \tan x - x$ có $g'(x) = \tan^2 x > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

nên g(x) tăng trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Do đó $g(x) = \tan x - x > g(0) = 0$.

Vậy $f'(x) \geq 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f(x)$ tăng trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thì $f(x) > f(0) = 0$ hay $\tan x > x + \frac{x^3}{3}$.

Dạng 5: Dùng tính đơn điệu của hàm số để giải phương trình – hệ phương trình.

1. *a)* Điều kiện: $x \geq -\frac{3}{2}$. $\sqrt{2x+3} + 3\sqrt{4x+13} - 18$

Xét hàm số $f(x) =$ trên $[-\frac{3}{2}; +\infty)$.

Ta có: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}} + \frac{6}{\sqrt{4x+13}} > 0, \forall x > -\frac{3}{2}$; f liên tục trên $[-\frac{3}{2}; +\infty)$

Do đó phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm.

Mặt khác $f(3) = 0$ nên $x = 3$ là một nghiệm của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 3$.

b) Điều kiện: $x \geq -1$.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} + \sqrt{3x+7} + \sqrt{4x+24} - 15$ trên $[-1; +\infty)$.

Ta có: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{2x+3}} + \frac{3}{2\sqrt{3x+7}} + \frac{2}{\sqrt{4x+24}} > 0, \forall x > -1$;

f liên tục trên $[-1; +\infty)$

Do đó phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm.

Mặt khác $f(3) = 0$ nên $x = 3$ là một nghiệm của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 3$.

c) Điều kiện: $x \geq 1$.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x-1} + x^3 - 3x^2 + 4x - 5$ trên $[1; +\infty)$.

Ta có: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} + 3x^2 - 6x + 4 = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} + 3(x-1)^2 + 1 > 0, \forall x > 1$.

f liên tục trên $[1; +\infty)$

Do đó phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm.

Mặt khác $f(2) = 0$ nên $x = 2$ là một nghiệm của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 2$.

2. *a.* $\begin{cases} x - y = \cos x - \cos y & (1) \\ \cos x + \cos y = 1 & (2) \end{cases}$ $(x \in (-\pi; 2\pi)$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow x - \cos x = y - \cos y$.

Xét hàm số $f(t) = t - \cos t$ trên $(-\pi; 2\pi)$.

Ta có $f'(t) = 1 + \sin t \geq 0$ và $f'(t) = 0$ có hữu hạn nghiệm $x \in (-\pi; 2\pi)$.

Do đó f(t) tăng và liên tục trong $(-\pi; 2\pi)$ nên phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow x = y$.

Thay vào (2) ta được $\cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$.

Do $x \in (-\pi; 2\pi)$ nên $x \in \left\{-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right\}$.

Vậy hệ đã cho có ba nghiệm là $\left(-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right)$.

b) $\begin{cases} \tan x - \tan y = y - x \\ 2x^2 + 6y^2 = \pi^2 \end{cases}$ $\left(x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)\right)$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow x + \tan x = y + \tan y$

Xét hàm số $f(t) = t + \tan t$ có $f'(t) = 2 + \tan^2 t > 0$ với mọi $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow$ f(t) tăng và liên tục trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

Do đó nếu (x; y) thỏa (1) thì x = y.

Thay vào (2) ta được $x = y = \pm\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ là nghiệm của hệ đã cho.

c) $\begin{cases} \sqrt{x+6} + \sqrt{y-9} = 5 \\ \sqrt{x-9} + \sqrt{y+6} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{x-9} = \sqrt{y+6} - \sqrt{y-9} & (1) \\ \sqrt{x-9} + \sqrt{y+6} = 5 & (2) \end{cases}$

Điều kiện: $x \geq 9; y \geq 9$.

Ta có hàm số $f(t) = \sqrt{t+6} - \sqrt{t-9}$ có $f'(t) = \frac{\sqrt{t-9} - \sqrt{t+5}}{2\sqrt{t+6}.\sqrt{t-9}} < 0, \forall t > 9$ và f(t) liên tục trên $[9; +\infty)$ nên f(t) giảm và liên tục trên $[9; +\infty)$.

Do đó nếu (x; y) thỏa mãn (1) thì x = y.

Thay vào (2) ta được $g(x) = \sqrt{x-9} + \sqrt{x+6} = 5$ (3)

* g(x) tăng và liên tục trên $[9; +\infty)$ nên g(x) = 5 nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

* g(10) = 5 nên x = 10 là một nghiệm của (3)

Do đó (3) có đúng một nghiệm là x = 10. Suy ra hệ có nghiệm duy nhất là (10; 10).

3. $x^5 - x^2 - 2x - 1 = 0$ (1).

Ta có: (1) $\Leftrightarrow x^5 = (x+1)^2$ (2).

Vì vế phải (2) ≥ 0 nên từ (2) suy ra $x \geq 0 \Rightarrow (x+1)^2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$.

Vậy phương trình (1) không có nghiệm thỏa mãn $x < 0$. Do đó ta chỉ cần chứng minh (1) có nghiệm duy nhất thuộc $[1; +\infty)$ là đủ.

Xét hàm số $f(x) = x^5 - x^2 - 2x - 1$ trên $[1; +\infty)$ ta có:

+ $f'(x) = 5x^4 - 2x - 2 = 2(x^4 - 1) + 2(x^4 - x) + x^4 \geq 1 > 0, \forall x \geq 1$

$\Rightarrow$ f(x) tăng và liên tục trên $[1; +\infty)$

$\Rightarrow$ (1) nếu có nghiệm thuộc $[1; +\infty)$ thì nghiệm đó là duy nhất.

+ Ta có: $f(1) = -3$ và $f(2) = 23 \Rightarrow f(1)f(2) < 0$; f liên tục trên $[1; 2]$

Suy ra (1) có nghiệm $x \in (1; 2)$.

Vậy (1) luôn có nghiệm duy nhất thuộc $[1; +\infty)$.

Do đó (1) luôn có nghiệm duy nhất.

4. *a)* $6x + 3\cos x + 2\sin x = 0$.

Xét hàm số $f(x) = 6x + 3\cos x + 2\sin x$, ta có:

* $f'(x) = 6 - 3\sin x + 2\cos x = 1 + 3(1 - \sin x) + 2(1 + \cos x) \geq 1 > 0$ với mọi x

$\Rightarrow$ f(x) tăng và liên tục trên R

$\Rightarrow$ Phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm (1).

* $f(0) = 3$ và $f(-\pi) = -6\pi - 3 \Rightarrow f(-\pi).f(0) < 0$

f liên tục trên $[-\pi; 0]$

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm thuộc $(-\pi; 0)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

b) $2x = 2a + \sin(x + a) \Leftrightarrow 2x - \sin(x + a) - 2a = 0$

Xét hàm số $f(x) = 2x - \sin(x + a) - 2a$, ta có:

* $f'(x) = 2 - \cos(x + a) = 1 + [1 - \cos(x + a)] \geq 1 > 0$ với mọi x

$\Rightarrow$ f(x) tăng và liên tục trên R

$\Rightarrow$ Phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm (1).

* $f(\pi + a) = 2(\pi + a) - \sin(2a + \pi) - 2a = 2\pi + \sin 2a > 0$

và $f(-\pi + a) = 2(-\pi + a) - \sin(2a - \pi) - 2a = -2\pi + \sin 2a < 0$

$\Rightarrow f(-\pi + a).f(\pi + a) < 0$

f liên tục trên $[-\pi + a; \pi + a]$

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong $(-\pi + a; \pi + a)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

c) $x^5 - 5x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 5x + 1 = 0$.

Xét $f(x) = x^5 - 5x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 5x + 1$ ta có:

* $f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 6x^2 - 4x + 5 = 5(x^2 - x)^2 + (x - 2)^2 + 1 > 0, \forall x \in R$

$\Rightarrow$ f(x) tăng và liên tục trên R

$\Rightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm.

* Ta có: + $f(0) = 1$ và $f(2) = -31 \Rightarrow f(0).f(2) < 0$

+ f liên tục trên $[0; 2]$

Do đó phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x \in (0; 2)$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

d) $x^2\sqrt{x-1} + x = 11\sqrt{30-x}$

Xét $f(x) = x^2\sqrt{x-1} + x - 11\sqrt{30-x}$ trên $[1; 30]$, ta có:

$$* \; f'(x) = 2x\sqrt{x-1} + x^2.\frac{1}{2\sqrt{x-1}} + 1 + \frac{11}{2\sqrt{30-x}} = \frac{5x^2-2x}{2\sqrt{x-1}} + \frac{2\sqrt{30-x}+11}{2\sqrt{30-x}}.$$

Với mọi $x \in (1; 30)$, $y' > 0$

$\Rightarrow$ f(x) tăng và liên tục trên (0; 30).

$\Rightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm thuộc (0; 30) (*)

* $f(5) = 0 \Rightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x = 5$. (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow$ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 5$.

5. Chứng minh rằng với mọi $m \in (-2; 2)$ phương trình $\sin^2x + 2\cos x = m$ có nghiệm duy nhất thuộc đoạn $[0; \pi]$.

Xét hàm số $f(x) = \sin^2x + 2\cos x - m$ trên $[0; \pi]$, ta có:

* $f(0) = 2 - m$; $f(\pi) = -2 - m$

$\Rightarrow f(0).f(\pi) = m^2 - 4 < 0$, $\forall m \in (-2; 2)$ và $\forall x \in (0; \pi)$ (1)

* f liên tục trên $[0; \pi]$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ phương trình có nghiệm $x \in (0; \pi)$.

* $f'(x) = 2\sin x\cos x - 2\sin x = 2\sin x(\cos x - 1) < 0$, $\forall x \in (0; \pi)$

$\Rightarrow$ f giảm trên $[0; \pi] \Rightarrow f(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm $x \in [0; \pi]$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất thuộc $[0; \pi]$.

§2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Vấn đề 1: Tìm cực trị của hàm số theo quy tắc 1

1. Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$

Tập xác định: D = R;

$$y' = x^2 - 4x + 3;\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{3} \\ x = 3 \Rightarrow y = -1 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		+	0	–	0	+	
y		↗	1/3 CĐ	↘	CT –1	↗	

Vậy hàm số đạt cực đại tại x = 1; $y_{CĐ} = \frac{1}{3}$, đạt cực tiểu tại x = 3; $y_{CT} = -1$.

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x - 2$

Tập xác định: D = R;

$y' = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 > 0$ với mọi $x \in R$.

Suy ra hàm số không đạt cực trị trên D.

c) $y = \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 2x + 1$

Tập xác định: D = R;

$$y' = 2x^2 + 5x + 2;\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \Rightarrow y = \frac{5}{3} \\ x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{13}{24} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		+	0	–	0	+	
y		↗	$\frac{5}{3}$ CĐ	↘	CT $\frac{13}{24}$	↗	

Vậy hàm số đạt cực đại tại x = –2; $y_{CĐ} = \frac{5}{3}$, đạt cực tiểu tại $x = -\frac{1}{2}$; $y_{CT} = \frac{13}{24}$.

d) $y = 4 - 2x^2 - x^4$

Tập xác định: D = R; $y' = -4x - 4x^3$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 4$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		+	0	–	
y		↗	4 CĐ	↘	

Vậy hàm số đạt cực đại tại x = 0; $y_{CĐ} = 4$.

e) $f(x) = x^4 - 4x^2 - 5$

Tập xác định: D = R;

$$y' = 4x^3 - 8x;\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \quad\ \ \Rightarrow y = -5 \\ x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow y = -9 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		−	0	+	0	−	0	+	
y		↘	CT −9	↗	−5 CĐ	↘	CT −9	↗	

Vậy hàm số đạt cực đại tại x = 0; $y_{CĐ} = -5$, đạt cực tiểu tại $x = \pm\sqrt{2}$; $y_{CT} = -9$.

f) $f(x) = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^3}{3} + 2$.

* Tập xác định: D = R

* $y' = x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ hay $x = 0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		−1		0		1		$+\infty$
y'		+	0	−	0	−	0	+	
y		↗	$\frac{32}{15}$ CĐ	↘		↘	CT $\frac{28}{15}$	↗	

Vậy: Hàm số đạt CĐ tại x = −1, $y_{CĐ} = \dfrac{32}{15}$; đạt cực tiểu tại x = 1 và $y_{CT} = \dfrac{28}{15}$.

2. Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$

Tập xác định: $D = R\setminus\{1\}$. $y' = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \ \Rightarrow y = -5 \\ x = 3 \quad \Rightarrow y = 3 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		−1		1		3		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y		↗	−5	↘	‖	↘	3	↗	

Vậy: Hàm số đạt cực đại tại x = −1; $y_{CĐ} = -5$, đạt cực tiểu tại x = 3; $y_{CT} = 3$.

b) $f(x) = x + 3 + \frac{4}{x}$

Tập xác định: $D = R\setminus\{0\}$; $y' = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \Rightarrow y=1 \\ x=2 \Rightarrow y=7 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	+	0	− ‖ −	0	+
y	↗	1	↘ ‖ ↘	7	↗

Vậy: Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$; $y_{CĐ} = 1$, đạt cực tiểu tại $x = 2$; $y_{CT} = 7$.

c) $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

* Tập xác định : D = R.

* $y' = \frac{2x^2-2}{\left(x^2+x+1\right)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm1$. Dấu y' là dấu của $2x^2 - 2$

* Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
y'	+	0	−	0	+
y	↗	3 CĐ	↘	CT $\frac{1}{3}$	↗

Vậy hàm số đạt CĐ tại $x = -1$, $y_{CĐ} = 3$; đạt cực tiểu tại $x = 1$, $y_{CT} = \frac{1}{3}$.

d) $y = \frac{x^2}{x^3+1}$

* Tập xác định : $D = R\setminus\{-1\}$; $y' = \frac{2x(x^3+1) - x^2.3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{x(2-x^3)}{(x^3+1)^2}$;

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = \sqrt[3]{2}$. Dấu y' là dấu của $4 - 2x^2$.

* Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-1		0		$\sqrt[3]{2}$	$+\infty$
y'	−	‖	−	0	+	0	−
y	↘	‖	↘	CT 0	↗	$\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$ CĐ	↘

Vậy : Hàm số đạt CĐ tại $x = \sqrt[3]{2}$, $y_{CD} = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$; đạt cực tiểu tại $x = 0$, $y_{CT} = 0$.

3. Tìm cực trị của hàm số sau:

a) $f(x) = |x|(x+4) = \begin{cases} x^2 + 4x \text{ khi } x \geq 0 \\ -x^2 - 4x \text{ khi } x < 0 \end{cases}$.

* Tập xác định: D = R

* $y' = \begin{cases} 2x + 4 \text{ khi } x > 0 \\ -2x - 4 \text{ khi } x < 0 \end{cases}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

* Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		+	0	−	||	+	
y		↗	CĐ 4	↘	CT 0	↗	

Vậy hàm số đạt CĐ tại $x = -2$, $y_{CĐ} = 4$; đạt cực tiểu tại $x = 0$, $y_{CT} = 0$.

b) $y = |x^2 - 6x + 5| + 2x$

$y = |x^2 - 6x + 5| + 2x = \begin{cases} x^2 - 4x + 5 \text{ khi } x \leq 1 \text{ hay } x \geq 5 \\ -x^2 + 8x - 5 \text{ khi } 1 < x < 5 \end{cases}$

* Tập xác định : D = R

* $y' = \begin{cases} 2x - 4 \text{ khi } x < 1 \text{ hay } x > 5 \\ -2x + 8 \text{ khi } 1 < x < 5 \end{cases}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 4$.

x	$-\infty$		1		4		5		$+\infty$
y'		−	||	+	0	−	||	+	
y		↘	CT 2	↗	11 CĐ	↘	CT 10	↗	

Vậy hàm số đạt CĐ tại $x = 4$, $y_{CĐ} = 11$; đạt cực tiểu tại $x = 1$, $y_{CT} = 2$ và tại $x = 5$, $y_{CT} = 10$.

c) $y = x^2 + 3x + \sqrt{x^2 - 6x + 9}$

$y = \begin{cases} x^2 + 3x + x - 3 \text{ khi } x \geq 3 \\ x^2 + 3x - x + 3 \text{ khi } x < 3 \end{cases} = \begin{cases} x^2 + 4x - 3 \text{ khi } x \geq 3 \\ x^2 + 2x + 3 \text{ khi } x < 3 \end{cases}$

* Tập xác định : D = R

* $y' = \begin{cases} 2x + 4 \text{ khi } x > 3 \\ 2x + 2 \text{ khi } x < 3 \end{cases}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\|\|$		
y		$\searrow$	CT 2	$\nearrow$			

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$, $y_{CT} = 2$.

4. Tìm cực trị của hàm số sau:

a) $y = x\sqrt{4 - x^2}$

* Tập xác định : $D = [-2; 2]$.

* $y' = \sqrt{4 - x^2} + x.\dfrac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} = \dfrac{4 - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

Dấu y' là dấu của $4 - 2x^2$.

* Bảng biến thiên :

x	-2		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		2
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y		$\searrow$	CT -2	$\nearrow$	2 CĐ	$\searrow$	

Vậy hàm số đạt CĐ tại $x = \sqrt{2}$, $y_{CĐ} = 2$; đạt cực tiểu tại $x = -\sqrt{2}$, $y_{CT} = -2$.

b) $y = x + \sqrt{x^2 + 1}$

* Tập xác định : $D = R$

* $y' = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}}$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = -x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ x^2 + 1 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing.$$

$y' > 0$ với mọi $x \in D$ nên hàm số không có cực trị.

c) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 12}$

Tập xác định $D = R$;

$y' = \dfrac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 12}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 2\sqrt{2}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại x = 2; $y_{CT} = 2\sqrt{2}$.

d) $y = \sqrt{5 - 4x - x^2}$

Tập xác định: D = [–5; 1];

$y' = \dfrac{-x-2}{\sqrt{5-4x-x^2}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow y = 3$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	–5	–2	1	$+\infty$
y'	–	+	0	–	+
y		↗	3	↘	

Vậy hàm số đạt cực đại tại x = –2; $y_{CD} = 3$

Vấn đề 2: Tìm cực trị của hàm số theo quy tắc 2

1. Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = x - \sin 2x + 2$

* Tập xác định : D = R.

* $y' = 1 - 2\cos 2x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi.$$

* $y'' = 4\sin 2x$

Ta có :

$$+\ y''\left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right) = 4\sin\left(\frac{\pi}{3} + k2\pi\right) = 2\sqrt{3} > 0$$

$\Rightarrow$ Tại $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$ hàm số đạt cực tiểu và $y_{CT} = \dfrac{\pi}{6} + k\pi + 2 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$$+\ y''\left(-\frac{\pi}{6} + k\pi\right) = 4\sin\left(-\frac{\pi}{3} + k2\pi\right) = -2\sqrt{3} < 0$$

$\Rightarrow$ Tại $x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi$ hàm số đạt cực đại và $y_{CD} = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi + 2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $y = 3 - 2\cos x - \cos 2x$

* Tập xác định: D = R

* $y' = 2\sin x + 2\sin 2x = 2\sin x(1 + 2\cos x)$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.$$

* $y'' = 2\cos x + 4\cos 2x$.

Ta có :

+ $y''(k\pi) = 2\cos(k\pi) + 4\cos(4k\pi) = \pm 2 + 4 > 0$

$\Rightarrow$ Tại $x = k\pi$ hàm số đạt cực tiểu và $y_{CT} = \begin{cases} 0 \text{ khi } k = 2m \\ 4 \text{ khi } k = 2m+1 \end{cases}$.

+ $y''(\pm\frac{\pi}{3} + k2\pi) = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 4.\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 < 0$

$\Rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$ và $y_{CĐ} = 3 - 2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

2. Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = \sin 2x + \cos 2x + \sqrt{2}$

* Tập xác định: D = R

* $y' = 2\cos 2x - 2\sin 2x$

$y' = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \cos 2x \Leftrightarrow \tan 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$.

* $y'' = -4\sin 2x - 4\cos 2x$

Ta có :

+ $y''(\frac{\pi}{8} + k\pi) = -4.\frac{\sqrt{2}}{2} - 4\frac{\sqrt{2}}{2} = -4\sqrt{2} < 0$

$\Rightarrow$ Tại $x = \frac{\pi}{8} + k\pi$ hàm số đạt cực đại và $y_{CĐ} = 2\sqrt{2}$

+ $y''(\frac{5\pi}{8} + k\pi) = -4.(-\frac{\sqrt{2}}{2}) - 4(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 4\sqrt{2} > 0$

$\Rightarrow$ Tại $x = \frac{5\pi}{8} + k\pi$ hàm số đạt cực đại và $y_{CĐ} = 0$.

b) $y = \sin^2 x - \sqrt{3}\cos x$

$y = -\cos^2 x - \sqrt{3}\cos x + 1$.

* Tập xác định: D = R.

* $y' = 2\cos x\sin x + \sqrt{3}\sin x = \sin 2x + \sqrt{3}\sin x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right..$$

* $y'' = 2\cos 2x + \sqrt{3}\cos x$;

Ta có :

$+\ y''(k\pi) = 2 \pm \sqrt{3} > 0$

$\Rightarrow$ Tại $x = k\pi$ hàm số đạt cực tiểu và $y_{CT} = \begin{cases} -\sqrt{3} \text{ khi } k = 2m \\ \sqrt{3} \text{ khi } k = 2m+1 \end{cases}$.

$+\ y''\left(\pm\dfrac{5\pi}{6} + k2\pi\right) = -1 - \sqrt{3} < 0$

$\Rightarrow$ Tại $x = \pm\dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$ thì hàm số đạt cực đại và $y_{CĐ} = \dfrac{7}{4}$.

Vấn đề 3: Điều kiện để hàm số đạt cực trị

1. $y = \dfrac{x^2 - m(m+1)x + m^3 + 1}{x - m}$.

* Tập xác định: $D = R \setminus \{m\}$

* $y' = \dfrac{x^2 - 2mx + m^2 - 1}{(x-m)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ có $\Delta' = 1 > 0$ với mọi m.

Suy ra hàm số luôn có cực đại, cực tiểu.

2. *a*. $y = x^3 + 3x^2 + mx - 10$

Tập xác định: $D = R$;

$y' = 3x^2 + 6x + m$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x + m = 0$ (1)

Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3$.

b. $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + 3m + 4$

Tập xác định: $D = R$;

$y' = 3x^2 - 6x + 3m$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3m = 0$ (2)

Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 9 - 9m > 0 \Leftrightarrow m < 1$.

c. $y = \dfrac{x^2 - mx + 3}{x - 1}$. Tập xác định: $D = R \setminus \{1\}$;

$y' = \dfrac{x^2 - 2x + m - 3}{(x-1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow g(x) = x^2 - 2x + m - 3 = 0$ (3) $(x \neq 1)$

Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow$ (3) có 2 nghiệm phân biệt khác 1.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m > 0 \\ m - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 4$.

d. $y = \dfrac{x^2 - (m+1)x + 2m - 1}{x - m}$

Tập xác định: $D = R \setminus \{m\}$;

$$y' = \frac{x^2 - 2mx + m^2 - m + 1}{(x-m)^2};$$

$y' = 0 \Leftrightarrow g(x) = x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 = 0$ (4)

Hàm số có cực đại, cực tiểu ⇔ (4) có 2 nghiệm phân biệt khác m

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(m) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 > 0 \\ -m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1.$$

3. $y = -2x + m\sqrt{x^2+1}$

Tập xác định: D = R.

$$y' = -2 + m\frac{x}{\sqrt{x^2+1}};\quad y'' = m.\frac{1\sqrt{x^2+1} - x\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{m}{(\sqrt{x^2+1})^3}$$

a) Ta có:

* $m = 0$: $y' = -2$ không đổi dấu trên D nên hàm số không có cực trị.

* $m \neq 0$ thì $y'' \neq 0$ với mọi $x \in D$. Do đó:

Hàm số có cực trị ⇔ $y' = 0$ có nghiệm ⇔ $m\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 2 = 0$ (1) có nghiệm.

Đặt $t = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ vì $|x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+1}$ nên $t \in (-1; 1)$.

Khi đó (1) ⇔ $f(t) = mt - 2 = 0$ (2)

(1) có nghiệm ⇔ (2) có nghiệm $t \in (-1; 1)$

⇔ $f(-1).f(1) < 0 \Leftrightarrow (-m-2)(m-2) < 0$

⇔ $m < -2$ hay $m > 2$.

Vậy hàm số có cực trị ⇔ $m < -2$ hay $m > 2$.

b) Dựa vào a) ta có: Hàm số có cực tiểu ⇔ $m > 2$.

Vấn đề 4 : Định giá trị tham số để hàm số đạt cực trị tại x_0 cho trước

1. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Ta có : $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

f(x) đạt cực tiểu tại tại $x = 0$, $f(0) = 0$ và đạt cực đại tại $x = 1$, $f(1) = 1$.

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(0) = c = 0 \\ f'(1) = 3a + 2b + c = 0 \\ f(0) = d = 0 \\ f(1) = a + b + c + d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = 0 \\ a = -2 \\ b = 3 \end{cases}.$$

Khi đó : $f(x) = -2x^3 + 3x^2$;

$f'(x) = -6x^2 + 6x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = 1$.

$f''(x) = -12x + 6$.

Ta có : $f''(0) = 6 > 0$ nên tại $x = 0$ hàm số đạt cực tiểu và $y_{CT} = 0$

$f''(1) = -6 < 0$ nên tại $x = 1$ hàm số đạt cực đại và $y_{CĐ} = 1$.

Vậy $a = -2$, $b = 3$, $c = d = 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

2. $y = \dfrac{x^2 - ax + 2b}{x^2 - 2x + 1}$.

* Tập xác định : $D = R \setminus \{1\}$.

* $y' = \dfrac{(a-2)x^2 + 2(1-2b)x - a + 4b}{(x^2 - 2x + 1)^2}$

* Hàm số có giá trị cực trị bằng $\frac{5}{4}$ khi $x = -3 \Rightarrow \begin{cases} y'(-3) = 0 \\ y(-3) = \dfrac{5}{4} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9(a-2) - 6(1-2b) - a + 4b = 0 \\ \dfrac{9 + 3a + 2b}{9 + 6 + 1} = \dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a + 16b = 24 \\ 3a + 2b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow a = 4 \text{ và } b = -\frac{1}{2}.$$

Khi đó : $y = \dfrac{x^2 - 4x - 1}{x^2 - 2x + 1}$; $y' = \dfrac{2x^2 + 4x - 6}{(x^2 - 2x + 1)^2}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x = -3$ và y' đổi dấu khi qua $x = -3$ nên tại $x = -3$ hàm số đạt cực trị và $y(-3) = \dfrac{5}{4}$.

Vậy $a = 4$ và $b = -\dfrac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

3. $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

* Tập xác định: $D = R$

* $y' = 3x^2 + 2ax + b$

* Hàm số $f(x)$ đạt cực trị bằng 0 tại điểm $x = -2$ và đồ thị của hàm số qua điểm $A(1; 0)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(-2) = 0 \\ f(-2) = 0 \\ f(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 - 4a + b = 0 \\ -8 + 4a - 2b + c = 0 \\ 1 + a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \\ c = -4 \end{cases}.$$

* Khi đó $y = x^3 + 3x^2 - 4$; $y' = 3x^2 + 6x$.

Ta thấy : $\begin{cases} f'(-2) = 0 \\ f''(-2) = -6 \neq 0 \\ f(1) = 0 \end{cases}$

⇒ hàm số f(x) đạt cực trị bằng 0 tại điểm x = –2 và đồ thị của hàm số qua điểm A(1; 0).

Vậy a = 3, b = 0 và c = –4 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

4. $y = x^3 - (m-3)x^2 + (4m-1)x - m$

* Tập xác định: D = R

* $y' = 3x^2 - 2(m-3)x + 4m - 1$

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2(m-3)x + 4m - 1 = 0$ (1)

* YCBT ⇔ (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1 < -2 < x_2$.

Đặt t = x + 2 thì (1) $\Leftrightarrow 3(t-2)^2 - 2(m-3)(t-2) + 4m - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 3t^2 - 2(m-3)t - 12t + 12 + 4(m-3) + 4m - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 3t^2 - 2(m+3)t + 8m - 1 = 0$ (2)

Do đó: YCBT ⇔ (2) có hai nghiệm t_1, t_2 sao cho $t_1 < 0 < t_2$

$$\Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow 8m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{8}.$$

Vậy m thỏa bài toán $\Leftrightarrow m < \frac{1}{8}$.

5. $y = \dfrac{x^2 + (m+1)x + 2m + 1}{x+1}$.

* Tập xác định: D = R \ {–1}.

* $y' = \dfrac{x^2 + 2x - m}{(x+1)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - m = 0 \; (x \neq -1)$

$\Leftrightarrow m = x^2 + 2x = g(x)$ (*).

YCBT ⇔ (*) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1 < x_2 < 2$.

Ta có $g'(x) = 2x + 2$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Ta có bảng biến thiên của g(x) trên (–∞; 2):

x	–∞		–1		2	+∞
g'(x)						
g(x)	+∞	↘	–1	↗	8	

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

m thỏa YCBT ⇔ –1 < m < 8.

6. $y = \dfrac{mx^2 - 2x + m}{x^2 - x}$

a. * Tập xác định: D = R \ {0; 1}.

$*\ y' = \dfrac{(2-m)x^2 - 2mx + m}{(x^2-x)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow g(x) = (2-m)x^2 - 2mx + m = 0$ (1) ($x \neq 0$ và $x \neq 1$)

➢ Xét $2 - m = 0 \Leftrightarrow m = 2$:

$y' = \dfrac{-4x+2}{(x^2-x)^2}$

$\Rightarrow y'$ đổi dấu khi qua $x = \dfrac{1}{2}$ nên hàm số đạt cực trị tại $x = \dfrac{1}{2} > 0$.

Vậy $m = 2$ thỏa mãn bài toán.

➢ Xét $2 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$:

Hàm số đạt CĐ, CT tại các điểm có hoành độ dương

$\Leftrightarrow g(x)$ có 2 nghiệm dương phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 - 2m > 0 \\ \dfrac{2m}{2-m} > 0 \\ \dfrac{m}{2-m} > 0 \\ 2 - 2m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \text{ hay } m > 1 \\ 0 < m < 2 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 2.$$

Kết luận: m thỏa mãn yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 1 < m \leq 2$.

b) Hàm số chỉ có một cực trị.

<u>TH1:</u> $m = 2$: Theo a) ta có hàm số có đúng một cực trị $\Rightarrow$ nhận $m = 2$.

<u>TH2:</u> $m \neq 2$:

YCBT $\Leftrightarrow y'$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho:

($x_1 = 0$ và $x_2 \neq 1$ hay $x_1 = 1$ và $x_2 \neq 0$).

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} P = 0 \\ S \neq 1 \end{cases} \text{hay} \begin{cases} g(1) = 0 \\ S - 1 \neq 0 \end{cases} \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m = 0 \\ \dfrac{2m}{2-m} \neq 1 \end{cases} \text{hay} \begin{cases} m = 1 \\ \dfrac{2m}{2-m} - 1 \neq 0 \end{cases} \\ m < 0 \text{ hay } m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing.$$

Kết luận: YCBT $\Leftrightarrow m = 2$.

7. $y = \dfrac{x^3}{3} + mx^2 + (m+6)x + 2$

* Tập xác định: $D = R$; $y' = x^2 + 2mx + m + 6$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2mx + m + 6 = 0$ (1)

Hàm số có cực trị ở về hai phía trục Oy

$\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow m + 6 < 0 \Leftrightarrow m < -6$.

8. $y = x^3 + 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + m^2 - 3m$

* Tập xác định: D = R
* $y' = 3x^2 + 6mx + 3m^2 - 3$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = -m + 1$ hay $x = -m - 1$.

* YCBT $\Leftrightarrow (-m-1)^2 + (-m+1)^2 = 10 \Leftrightarrow 2m^2 = 8 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

Cách khác : x_1, x_2 là nghiệm của $y' = 0$

$$\text{YCBT} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 - 3(3m^2 - 3) = 9 > 0 \\ 4m^2 - 2(m^2 - 1) = 10 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$

Vấn đề 5: Giá trị cực trị của hàm số bậc ba và hàm số dạng phân thức.

1. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2mx + m + 1}{x - 1} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$.

a. Tìm m để hàm số đạt cực đại, cực tiểu tại các điểm có hoành độ dương.

* $D = R\backslash\{1\}$
* $y' = \dfrac{x^2 - 2x + m - 1}{(x-1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow g(x) = x^2 - 2x + m - 1 = 0$ (*)
* YCBT $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $0 < x_1 < x_2$ và $x_1, x_2 \neq 1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_g > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - m > 0 \\ 2 > 0 \\ m - 1 > 0 \\ m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 2.$$

b. Ta có tọa độ điểm cực trị thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} y = \dfrac{u}{v} \\ y' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{u}{v} \\ \dfrac{u'.v - u.v'}{v^2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{u}{v} \\ u'.v = u.v' \end{cases} \Rightarrow y = \frac{u}{v} = \frac{u'}{v'} \Rightarrow y(x_0) = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)} \text{ (ĐPCM).}$$

c. * Theo a) ta có khi m < 2 thì hàm số có cực đại, cực tiểu.

* Khi đó theo b) ta có:

$$y_{CĐ} = \frac{u'(x_{CĐ})}{v'(x_{CĐ})} = 2x_{CĐ} - 2m \text{ và } y_{CT} = \frac{u'(x_{CT})}{v'(x_{CT})} = 2x_{CT} - 2m$$

Do đó : $y_{CĐ}$ và y_{CT} cùng dấu

$\Leftrightarrow y_{CĐ}.y_{CT} = (2x_{CĐ} - 2m)(2x_{CT} - 2m) > 0$

$\Leftrightarrow x_{CĐ}x_{CT} - m(x_{CĐ} + x_{CT}) + m^2 = 0$

$\Leftrightarrow 2 - m(m-1) + m^2 > 0$ (Do $x_{CĐ}$, x_{CT} là hai nghiệm của (*))

$\Leftrightarrow 2 + m > 0 \Leftrightarrow m > -2.$

Vậy m thỏa mãn yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -2 < m < 2.$

2. Cho hàm số $y = \dfrac{mx^3}{3} - mx^2 + x - 1.$

a. * Tập xác định : D = R

* $y' = mx^2 - 2mx + 1$; $y' = 0 \Leftrightarrow mx^2 - 2mx + 1 = 0$ (1) ;

* Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow$ y′ đổi dấu hai lần trên R

$\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = m \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0 \text{ hay } m > 1.$$

b. Khi chia y cho y′ ta được thương là T(x) và dư là R(x) nên ta có $y = y'.T(x) + R(x).$

Tọa độ điểm cực trị của f thỏa hệ: $\begin{cases} y' = 0 \\ y = y'.T(x) + R(x) \end{cases} \Rightarrow y = R(x).$

Do đó: $y_0 = f(x_0) = R(x_0).$

c. Khi hàm số có cực đại và cực tiểu. Tìm m để $y_{CĐ}$ và y_{CT} cùng dấu.

Chia y cho y′ ta viết được: $y = \dfrac{x-1}{3}.y' + \dfrac{2}{3}[(1-m)x - 1].$

Áp dụng câu b) ta có : $y_{CĐ} = \dfrac{2}{3}[(1-m)x_{CĐ} - 1]$ và $y_{CT} = \dfrac{2}{3}[(1-m)x_{CT} - 1]$

Do đó :

YCBT $\Leftrightarrow [(1-m)x_{CĐ} - 1].[(1-m)x_{CT} - 1] > 0$

$\Leftrightarrow (1-m)^2x_{CĐ}x_{CT} - (1-m)(x_{CĐ} + x_{CT}) + 1 > 0$

$\Leftrightarrow (1-m)^2.\dfrac{1}{m} - (1-m).2 + 1 > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3m^2 - 3m + 1}{m} > 0 \Leftrightarrow m > 0$ (vì $3m^2 - 3m + 1 > 0$ với mọi m)

Kết hợp điều kiện ta được: m thỏa mãn yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m > 1.$

3. $y = \dfrac{-x^2 + 3x + m}{x - 4}.$

+ Tập xác định: $D = R \setminus \{4\}$

+ $y' = \dfrac{-x^2 + 8x - m - 12}{(x - m)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 8x - m - 12 = 0$ (1)

Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 4

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 4 - m > 0 \Leftrightarrow m < 4$ (2) ;

Khi đó $y_{CĐ} = -2x_{CĐ} + 3$ và $y_{CT} = -2x_{CT} + 3$.

Do đó:

$|y_{CĐ} - y_{CT}| = 4 \Leftrightarrow |2(x_{CĐ} - x_{CT})| = 4$

$\Leftrightarrow 4(x_{CĐ} - x_{CT})^2 = 16$

$\Leftrightarrow (x_{CĐ} + x_{CT})^2 - 4x_{CĐ}x_{CT} = 4$

$\Leftrightarrow 8^2 - 4(m + 12) = 4 \Leftrightarrow -4m = -12 \Leftrightarrow m = 3$ (thỏa (2)) .

Vậy m = 3 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

4. a) $y = \dfrac{x^2 - 2x + m + 2}{x + m - 1}$

* Tập xác định: $D = R\setminus\{1 - m\}$;

* $y' = \dfrac{x^2 + 2(m-1)x - 3m}{(x + m - 1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow g(x) = x^2 + 2(m - 1)x - 3m = 0$ (1).

Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác $1 - m$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(1 - m) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 + m + 1 > 0 \Leftrightarrow \forall x \in R.$

* Tọa độ điểm cực trị thỏa mãn hệ :

$$\begin{cases} y' = 0 \\ y = \dfrac{u}{v} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{u'v - uv'}{v^2} = 0 \\ y = \dfrac{u}{v} \end{cases} \Rightarrow y = \dfrac{u}{v} = \dfrac{u'}{v'} = 2x - 2 .$$

Vậy phương trình đường thẳng qua các điểm cực trị là (d): $y = 2x - 2$.

b) $y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1 - m^2)x + m^3 - m^2$

* Tập xác định: D = R ;

* $y' = -3x^2 + 6mx + 3(1 - m^2)$;

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx - 1 + m^2 = 0$ (1) ;

(1) có $\Delta' = 1 > 0\ \forall\ m$ nên hàm số luôn có cực đại, cực tiểu.

* Chia y cho y′ ta viết được: $y = \dfrac{x - m}{3}.y' + 2x + m - m^2$.

* Tọa độ điểm cực trị thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} y' = 0 \\ y = \dfrac{x - m}{3}y' + 2x + m - m^2 \end{cases} \Rightarrow y = 2x + m - m^2.$$

Vậy phương trình đường thẳng qua điểm cực trị là (d) : $y = 2x + m - m^2$.

5. $y = \dfrac{x^2 + (m+1)x + m + 1}{x+1}$ (C_m).

* Tập xác định: $D = R \setminus \{-1\}$.

* $y' = \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = -2$. Suy ra hàm số luôn có cực tiểu và cực đại.

* Khi đó ta có hai điểm cực trị là: $A(0; m+1)$ và $B(-2; m-3)$

Do đó: $AB = \sqrt{(-2-0)^2 + (m-3-m-1)^2} = \sqrt{20}$ (đpcm)

6. Cho hàm số $y = x + |x^2 - 2x + m|$

a. Tập xác định: D = R

Xét $h(x) = x^2 - 2x + m$ có $\Delta' = 1 - m$

➢ $m \ge 1$: $h(x) \ge 0$, $\forall x \in R$ nên $y = x^2 - x + m$.

$y' = 2x - 1$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

BBT:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		↘		↗	

➢ $m < 1$: h(x) có 2 nghiệm $x_1 = 1 - \sqrt{1-m}$ V $x_2 = 1 + \sqrt{1-m}$ .Ta có :

$$y = f(x) = \begin{cases} x^2 - x + m & \text{khi } x \le x_1 \vee x \ge x_2 \\ -x^2 + 3x - m & \text{khi } x_1 < x < x_2 \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} 2x - 1 & \text{khi } x < x_1 \vee x > x_2 \\ -2x + 3 & \text{khi } x_1 < x < x_2 \end{cases}$$

Ta có $x_2 = 1 + \sqrt{1-m} > \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \sqrt{1-m} > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - m > \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow m < \dfrac{3}{4}$.

Khi đó $x_1 < \dfrac{1}{2}$.

Do đó:

$+ \; m < \dfrac{3}{4}$:

x	$-\infty$		x_1		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		x_2		$+\infty$
y'		−		+		+	0	−		+	
y		↘		↗		↗		↘		↗	

$+\ m = \frac{3}{4}$:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
y'		−		+		+	
y		↘		↗		↗	

$+\ \frac{3}{4} < m < 1$:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		x_1		x_2		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
y'		−	0	+		+		+	0	+	
y		↘		↗		↗		↗		↗	

b. Theo a/ ta có hàm số có cực đại và $y_{CĐ} < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3/4 \\ f(3/2) < 3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 3/4 \\ \frac{9}{4} - m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{3}{4} \\ m > -\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{4} < m < \frac{3}{4}.$$

7. $y = \dfrac{x^2 + 2m^2x + m}{x+1}$.

* Tập xác định: $D = R\backslash\{-1\}$;

* $y' = \dfrac{x^2 + 2x + 2m^2 - m}{(x+1)^2}$;

$y' = 0 \Leftrightarrow g(x) = x^2 + 2x + 2m^2 - m = 0$ (1);

* Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' = -2m^2 + m + 1 > 0 \Leftrightarrow -1/2 < m < 1$.

* Khi đó ta có: $y_{CĐ} = 2x_{CĐ} + 2m^2$ và $y_{CT} = 2x_{CT} + 2m^2$.

Do đó: YCBT $\Leftrightarrow y_{CĐ}.y_{CT} < 0 \Leftrightarrow x_{CĐ}.x_{CT} + m^2(x_{CĐ} + x_{CT}) + m^4 < 0$

$\Leftrightarrow 2m^2 - m + m^2(-2) + m^4 < 0$

$\Leftrightarrow m^4 - m < 0 \Leftrightarrow m(m^3 - 1) < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 1$ (thỏa mãn).

8. $y = 2x^3 - 3(2m + 1)x^2 + 6m(m + 1)x + 1$

* Tập xác định: D = R

* $y' = 6x^2 - 6(2m + 1)x + 6m^2 + 6m$

* Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow$ y′ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' = 9(2m + 1)^2 - 36(m^2 + m) = 9 > 0\ \forall\ m \in R$.

* Khi đó y′ có hai nghiệm phân biệt là: $x_1 = m$, $x_2 = m + 1$;

Do đó hai điểm cực trị là: $A(m; 2m^3 + 3m^2 + 1)$ và $B(m + 1; 2m^3 + 3m^2)$;

Gọi I là trung điểm AB $\Rightarrow I(m + \frac{1}{2}; 2m^3 + 3m + \frac{1}{2})$.

$\overrightarrow{AB} = (1; -1) \Rightarrow$ Hệ số góc của đường thẳng AB là $k_{AB} = -1$.

Đường thẳng (d) có hệ số góc là $k_d = 1$

YCBT $\Rightarrow \begin{cases} k_{AB}.k_d = -1 \\ I \in (d) \end{cases} \Leftrightarrow 2m^3 + 3m^2 + \frac{1}{2} = m + \frac{1}{2} + 4$

$\Leftrightarrow 2m^3 + 2m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m^3 + m^2 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (m - 1)(m^2 + 2m + 2) = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

9. $y = \dfrac{x^2 + 2mx + 2}{x + 1}$;

* Tập xác định: $D = R \setminus \{-1\}$;

* $y' = \dfrac{x^2 + 2x + 2m - 2}{(x + 1)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2m - 2 = 0$ (1)

Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow \Delta' = -2m + 3 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{3}{2}$.

Khi đó hai điểm cực trị là: $A(x_A; 2x_A + 2m)$ và $B(x_B; 2x_B + 2m)$.

Ta có: $d(A; (\Delta)) = \dfrac{|x_A + y_A + 1|}{\sqrt{2}} = \dfrac{|3x_A + 2m + 1|}{\sqrt{2}}$

$d(B; (\Delta)) = \dfrac{|x_B + y_B + 1|}{\sqrt{2}} = \dfrac{|3x_B + 2m + 1|}{\sqrt{2}}$

Do đó: YCBT $\Leftrightarrow |3x_A + 2m + 1| = |3x_B + 2m + 1|$

$\Leftrightarrow 3(x_A + x_B) + 4m + 2 = 0$ (do $x_A \neq x_B$)

$\Leftrightarrow 3(-2) + 4m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ (nhận).

Vậy m thỏa mãn yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m = 1$.

10. $y = \dfrac{x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m}{x+2}$.

* Tập xác định: D = R\{–2}.

* $y' = \dfrac{x^2 + 2x - m^2 + 4}{(x+2)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - m^2 + 4 = 0$

Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 3 > 0$

* Khi đó hai điểm cực trị là $A(x_A; 2x_A + 2m + 2)$ và $B(x_B; 2x_B + 2m + 2)$.

* YCBT $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow x_Ax_B + (2x_A + 2m + 2)(2x_B + 2m + 2) = 0$

$\Leftrightarrow 5x_Ax_B + (4m+4)(x_A + x_B) + (2m+2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow 5(-m^2 + 4) + (4m+4).(-2) + 4m^2 + 8m + 4 = 0$

$\Leftrightarrow -m^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 4$ (nhận)

Vậy m thỏa mãn yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m = \pm 4$.

§3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

Vấn đề 1: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số f(x) trên X = [a; b].

1. Tìm GTLN và. GTNN của các hàm số

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x - 4$ trên [–4; 0].

Tập xác định: D = R; X = [–4; 0].

$f'(x) = x^2 + 4x + 3$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \in X \\ x = -3 \in X \end{array}\right.$

Ta có: $f(-4) = -\dfrac{16}{3}$; $f(-3) = -4$; $f(-1) = -\dfrac{16}{3}$ và $f(0) = -4$

Do đó: $\underset{[-4;0]}{\text{Max}}\, f(x) = -4$; $\underset{[-4;0]}{\text{Min}}\, f(x) = -\dfrac{16}{3}$.

b) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 5x + 4}{x+2}$ trên [–1; 1].

Tập xác định: D = R\{–2}; X = [–1; 1].

$f'(x) = \dfrac{2x^2 + 8x + 6}{(x+2)^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \in X \\ x = -3 \in X \end{array}\right.$

Ta có: $f(1) = \dfrac{11}{3}$; $f(-1) = 1$. Do đó: $\underset{[-1;1]}{\text{Max}}\, f(x) = \dfrac{11}{3}$; $\underset{[-1;1]}{\text{Min}}\, f(x) = 1$

c) $f(x) = \left|x^2 - 3x + 2\right| - 3$ trên $[-10; 10]$.

Tập xác định: $D = R$; $X = [-10; 10]$.

Ta có: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x - 1 & \text{khi } x \le 1 \text{ hoặc } x \ge 2 \\ -x^2 + 3x - 5 & \text{khi } 1 < x < 2 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{khi } x < 1 \text{ hoặc } x > 2 \\ -2x + 3 & \text{khi } 1 < x < 2 \end{cases}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2} \in X$.

Ta có: $f(-10) = 129$; $f(1) = -3$; $f(\dfrac{3}{2}) = -\dfrac{11}{4}$; $f(2) = -3$ và $f(10) = 69$.

Do đó: $\max\limits_{X} f(x) = 129$; $\min\limits_{X} f(x) = -3$.

d) $f(x) = x - \sin 2x$ trên $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Tập xác định: $D = R$; $X = \left[-\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Ta có: $f'(x) = 1 - 2\cos 2x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi$

Vì $x \in X$ nên ta được $x = -\dfrac{\pi}{6}; x = \dfrac{\pi}{6}; x = \dfrac{5\pi}{6}$.

Ta có: $f(-\dfrac{\pi}{2}) = -\dfrac{\pi}{2}; f(-\dfrac{\pi}{6}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi}{6}; f(\dfrac{\pi}{6}) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\pi}{6}; f(\dfrac{5\pi}{6}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{5\pi}{6}; f(\pi) = \pi$

Do đó: $\max\limits_{[-\frac{\pi}{2};\pi]} f(x) = \dfrac{5\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\min\limits_{[-\frac{\pi}{2};\pi]} f(x) = -\dfrac{\pi}{2}$.

2. $y = 5\cos x - \cos 5x$.

Tập xác định: $D = R$; $X = \left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right]$.

Ta có: $f'(x) = -5\sin x + 5\sin 5x$;

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin 5x = \sin x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x = x + k2\pi \\ 5x = \pi - x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{3} \end{array}\right.$$

Vì $x \in X$ nên ta được $x = -\dfrac{\pi}{6}$; $x = 0$; $x = \dfrac{\pi}{6}$.

Ta có: $f(-\dfrac{\pi}{4}) = 3\sqrt{2}$; $f(-\dfrac{\pi}{6}) = 3\sqrt{3}$; $f(\dfrac{\pi}{6}) = 3\sqrt{3}$; $f(\dfrac{\pi}{4}) = 3\sqrt{2}$; $f(0) = 4$.

Do đó: $\underset{[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}]}{\text{Max}}\ f(x) = 3\sqrt{3}$; $\underset{[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}]}{\text{Min}}\ f(x) = 4$.

3. $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

* Tập xác định: D = R; X = [–1; 2].

* $y' = \dfrac{1-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in X$.

* Ta có: $f(-1) = 0$, $f(1) = \sqrt{2}$ và $f(2) = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

Suy ra: $\underset{[-1;2]}{\text{Max}}\, f(x) = \sqrt{2}$; $\underset{[-1;2]}{\text{Min}}\, f(x) = 0$.

4.

a) $y = x + \sqrt{4-x^2}$

* Tập xác định: D = X = [–2 ; 2].

* $y' = 1 + \dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = x \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \in X$.

* Ta có: $f(-2) = -2$, $f(2) = 2$ và $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$

Suy ra: $\underset{[-2;2]}{\text{Max}}\, f(x) = 2\sqrt{2}$; $\underset{[-2;2]}{\text{Min}}\, f(x) = -2$.

b) $y = x + \sqrt{12-3x^2}$.

* Tập xác định: D = X = [–2 ; 2].

* $y' = 1 + \dfrac{-3x}{\sqrt{12-3x^2}} = \dfrac{\sqrt{12-3x^2}-3x}{\sqrt{4-x^2}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{12-3x^2} = 3x \Leftrightarrow x = 1 \in X$.

* Ta có: $f(-2) = -2$, $f(2) = 2$ và $f(1) = 4$.

Suy ra: $\underset{[-2;2]}{\text{Max}}\, f(x) = 4$; $\underset{[-2;2]}{\text{Min}}\, f(x) = -2$.

c) $y = (x+2)\sqrt{4-x^2}$.

* Tập xác định: D = X = [–2 ; 2].

* $y' = = \dfrac{-2(x^2+x-2)}{\sqrt{4-x^2}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in X$.

* Ta có: $f(-2) = 0$, $f(2) = 0$ và $f(1) = 3\sqrt{3}$

Suy ra: $\underset{[-2;2]}{\text{Max}}\, f(x) = 3\sqrt{3}$; $\underset{[-2;2]}{\text{Min}}\, f(x) = 0$.

d) $y = (3-x)\sqrt{x^2+1}$ với $x \in [0; 2]$

* Tập xác định: D = R; X = [0; 2].

* $y' = \dfrac{-2x^2+3x-1}{\sqrt{x^2+1}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in X \\ x = \dfrac{1}{3} \in X \end{array}\right.$.

* Ta có: $f(0) = 3$, $f(\frac{1}{3}) = \dfrac{8\sqrt{10}}{9}$; $f(1) = 2\sqrt{2}$; $f(2) = \sqrt{5}$.

Suy ra: $\underset{[0;2]}{\mathrm{Max}}\, f(x) = 3$; $\underset{[0;2]}{\mathrm{Min}}\, f(x) = \sqrt{5}$.

5. $y = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 9x$.

* Tập xác định: D = R; X = [–2 ; 2].

* $y' = 4x^3 - 9x^2 - 4x + 9$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \in X$.

* Ta có: $f(-2) = 14$, $f(-1) = -7$; $f(1) = 5$ và $f(2) = 2$

Suy ra: $\underset{[-2;2]}{\mathrm{Max}}\, f(x) = 14$; $\underset{[-2;2]}{\mathrm{Min}}\, f(x) = -7$.

Vấn đề 2. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số f trên tập X không là một đoạn.

1. Tìm GTLN và GTNN của các hàm số

a) $f(x) = \dfrac{15(x^2+1)}{2x^2+x+2}$.

* Tập xác định: D = R

* $y' = \dfrac{15(x^2-1)}{(2x^2+x+2)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = 6 \\ x = -1 \Rightarrow y = 10 \end{array}\right.$

* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \dfrac{15}{2}$

* Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'							
y	15/2	$\nearrow$	10	$\searrow$	6	$\nearrow$	15/2

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

$\underset{D}{\mathrm{Max}}\, f(x) = f(-1) = 10$; $\underset{D}{\mathrm{Min}}\, f(x) = f(1) = 6$.

b) Đáp số: $\underset{D}{\mathrm{Max}}\, f(x) = f(-1) = 28$; $\underset{D}{\mathrm{Min}}\, f(x) = f(3) = 18$.

2. $y = x + \sqrt{2x^2 + 1}$.

* Tập xác định: D = R;

$$* \; y' = 1 + \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}} = \frac{\sqrt{2x^2+1} + 2x}{\sqrt{2x^2+1}};$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+1} = -2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ 2x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$* \; \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$$

* Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}/2$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

$\operatorname*{Min}_{D} f(x) = f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Hàm số không đạt giá trị lớn nhất.

Vấn đề 3. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số f trên X bằng cách dùng ẩn phụ.

1. Tìm GTLN và GTNN của các hàm số:

a) $f(x) = \cos^2 2x - 2\sqrt{3}\sin x.\cos x + 6$

$f(x) = \cos^2 2x - 2\sqrt{3}\sin x.\cos x + 5 = -\sin^2 2x - \sqrt{3}\sin 2x + 6$

Đặt $t = \sin 2x$, $t \in [-1; 1]$.

Khi đó $f(x) = -t^2 - \sqrt{3}t + 6 = g(t)$.

Ta có: $g'(t) = -2t - \sqrt{3}$; $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{\sqrt{3}}{2} \in [-1; 1]$.

$$g(-1) = 5 + \sqrt{3};\; g(1) = 5 - \sqrt{3} \text{ và } g(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{27}{4}$$

Vậy $\operatorname*{Max}_{D} f(x) = \operatorname*{Max}_{[-1;1]} g(t) = g(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{27}{4}$;

$\operatorname*{Min}_{D} f(x) = \operatorname*{Min}_{[-1;1]} g(t) = g(1) = 5 - \sqrt{3}$.

b) $f(x) = \sin^4 x + \cos^2 x + 2 = \sin^4 x - \sin^2 x + 3$.

HD: Đặt $t = \sin^2 x$; $t \in [0; 1]$.

Đáp số: $\underset{D}{\text{Max}} f(x) = 3$; $\underset{D}{\text{Min}} f(x) = \frac{11}{4}$.

c) $f(x) = \dfrac{9\sin^2 x - \sin x + 1}{9\sin^2 x + \sin x + 1}$ trên $\left[0;\ \frac{\pi}{6}\right]$.

Đặt $t = \sin x$; Ta có: $x \in \left[0;\ \frac{\pi}{6}\right] \Leftrightarrow t \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$

Khi đó: $f(x) = \dfrac{9t^2 - t + 1}{9t^2 + t + 1} = g(t)$

$$g'(t) = \frac{18t^2 - 2}{(9t^2 + t + 1)^2};\ g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3} \notin \left[0;\ \frac{1}{2}\right] \text{ hay } t = \frac{1}{3} \in \left[0;\ \frac{1}{2}\right].$$

$$g(0) = 1;\ g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{15} \text{ và } g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{7}.$$

Vậy $\underset{\left[0;\frac{\pi}{6}\right]}{\text{Max}} f(x) = \underset{\left[0;\frac{1}{2}\right]}{\text{Max}} g(t) = g(0) = 1$; $\underset{\left[0;\frac{\pi}{6}\right]}{\text{Min}} f(x) = \underset{\left[0;\frac{1}{2}\right]}{\text{Min}} g(t) = g(\frac{1}{3}) = \frac{5}{7}$.

d) $f(x) = \left(\dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}\right)^3 - 3\left(\dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}\right)^2 + 10$.

Đặt $t = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$; $t' = \dfrac{-2x^2 + 2}{(x^2 - x + 1)^2}$; $t' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

$$\lim_{x \to \pm\infty} t(x) = 1$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	+	0	$-$	
y	1	↘	1/3	↗	3	↘	1

Vậy $t \in \left[\frac{1}{3}; 3\right]$. Khi đó ta có $f(x) = t^3 - 3t^2 + 10 = g(t)$;

$$g'(t) = 3t^2 - 6t;\ g'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \notin [\frac{1}{3}; 3] \\ t = 2 \in [\frac{1}{3}; 3] \end{array}\right..$$

$$g(\frac{1}{3}) = \frac{262}{27};\ g(2) = 6 \text{ và } g(3) = 10.$$

Vậy $\max\limits_{R} f(x) = \max\limits_{\left[\frac{1}{3};3\right]} g(t) = g(3) = 10;\ \ \min\limits_{R} f(x) = \min\limits_{\left[\frac{1}{3};3\right]} g(t) = g(2) = 6.$

e) $y = \dfrac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}.$

Tương tự với c) ta có:

$\max\limits_{R} f(x) = \max\limits_{[-1;1]} g(t) = g(0) = 1;\ \ \min\limits_{R} f(x) = \min\limits_{[-1;1]} g(t) = g(-1) = 0.$

2. Tìm GTLN và GTNN của các hàm số

a) $y = \dfrac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^6 x + \cos^6 x} = \dfrac{1 - 2\sin^2 x\cos^2 x}{1 - 3\sin^2 x\cos^2 x} = \dfrac{4 - 2\sin^2 2x}{4 - 3\sin^2 2x}.$

Đặt $t = \sin^2 2x$, $t \in [0 ; 1]$.

Ta được: $y = \dfrac{4 - 2t}{4 - 3t} = g(t)$. $g'(t) = \dfrac{4}{(4 - 3t)^2} > 0$ với mọi $t \in [0; 1]$.

$g(0) = 1; g(1) = 2.$

Vậy $\max\limits_{R} f(x) = \max\limits_{[0;1]} g(t) = g(1) = 2;\ \ \min\limits_{R} f(x) = \min\limits_{[0;1]} g(t) = g(0) = 1.$

b) $y = 2(1 + \sin 2x\cos 4x) - \dfrac{1}{2}(\cos 4x - \cos 8x) = 2 + 2\sin 2x\cos 4x - \sin 6x\sin 2x$

$= 2 + 2\sin 2x(1 - 2\sin^2 2x) - (3\sin 2x - 4\sin^3 2x)\sin 2x$

$= 4\sin^4 2x - 4\sin^3 2x - 3\sin^2 2x + 2\sin 2x + 2.$

Đặt $t = \sin 2x$; $t \in [-1; 1]$;

Ta được $y = 4t^4 - 4t^3 - 3t^2 + 2t + 2 = g(t)$;

$g'(t) = 16t^3 - 12t^2 - 6t + 2 = (t - 1)(16t^2 + 4t - 2) = 0$;

$g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hay $t = \dfrac{1}{4}$ hay $t = \dfrac{-1}{2}$;

Ta có: $g(-1) = 5$; $g\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 1$; $g\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{165}{64}$ và $g(1) = 1$.

Vậy : $\max\limits_{R} f(x) = \max\limits_{[-1;1]} g(t) = g(-1) = 5;$

$\min\limits_{R} f(x) = \min\limits_{[-1;1]} g(t) = g(0) = g\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 1.$

Vấn đề 4: Giá trị lớn nhất - nhỏ nhất và điều kiện của tham số thỏa điều kiện về nghiệm của phương trình, bất phương trình.

I. Phương trình:

1. $\sin^6 x + \cos^6 x = m\sin 2x$ (1).

* (1) $\Leftrightarrow 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x = m\sin 2x \Leftrightarrow 4 - 3\sin^2 2x = 4m\sin 2x$.

* Đặt $t = \sin 2x$, $t \in [-1; 1]$.

* (1) trở thành $4 - 3t^2 = 4mt$ (2).

Ta có $t = 0$ không là nghiệm của (2) nên

$$(2) \Leftrightarrow 4m = \frac{-3t^2 + 4}{t} = g(t) \quad (3)$$

Xét hàm số g(t) với $t \neq 0$; $g'(t) = \dfrac{-3t^2 - 4}{t^2} < 0$ với mọi $t \neq 0$.

* Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
y'		0	$-$	$\|\|$	$-$	0	
y		-1	$\searrow$ $-\infty$	$\|\|$	$+\infty$ $\searrow$	1	

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

(1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (3) có nghiệm $\in [-1; 1] \Leftrightarrow m \leq -1$ hay $m \geq 1$.

2. $\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} - \sqrt{(1+x)(3-x)} = m$ (1).

Đặt $t = \sqrt{1+x} + \sqrt{3-x}$ với $x \in [-1; 3]$.

Ta có: $x \in [-1; 3] \Leftrightarrow t \in [2; 2\sqrt{2}]$.

Ta có: $t^2 = 4 + 2\sqrt{(1+x)(3-x)} \Rightarrow \sqrt{(1+x)(3-x)} = \dfrac{t^2 - 4}{2}$.

Khi đó: (1) $\Leftrightarrow t - \dfrac{t^2 - 4}{2} = m \Leftrightarrow 2m = -t^2 + 2t + 4 = f(t)$ (2).

Ta có: $f'(t) = -2t + 2 < 0 \ \forall t \in [2; 2\sqrt{2}]$ nên f(t) nghịch biến trên $[2; 2\sqrt{2}]$.

Do đó: $\min\limits_{[2;2\sqrt{2}]} f(t) = f(2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} - 4$; $\max\limits_{[2;2\sqrt{2}]} f(t) = f(2) = 4$.

Do đó (1) có nghiệm $x \in [-1 ; 3] \Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t \in [2; 2\sqrt{2}]$

$$\Leftrightarrow 4\left(\sqrt{2} - 1\right) \leq m \leq 4.$$

3. Xét hàm số $f(x) = \sin 2x + 2\sin x$

$$f'(x) = 2\cos 2x + 2\cos x = 4\cos^2 x + 2\cos x - 2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -1 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + k2\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right..$$

Vì $x \in \left[0; \dfrac{5\pi}{4}\right]$ nên $x = \pi$, $x = \dfrac{\pi}{3}$.

Bảng biến thiên

x	0		$\pi/3$		π		$5\pi/4$
y'		+	0	–	0	–	0
y	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	0	↘	$1-\sqrt{2}$

Vậy phương trình có đúng 2 nghiệm $x \in \left[0; \frac{5\pi}{4}\right] \Leftrightarrow 0 \le m < \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

4. $\dfrac{4\sin x + 2}{\sin x + 2} = m$ (1)

Đặt $t = \sin x$; Điều kiện: $t \in [-1; 1]$.

Phương trình trở thành: $m = \dfrac{4t+2}{t+2} = g(t)$ (2)

Nhận xét:

* Mỗi nghiệm $x \in [0; \pi]$ của (1) ứng với một nghiệm $t \in [0; 1]$ của (2).

* Mỗi nghiệm $t \in [0; 1)$ của (2) cho 2 nghiệm $x \in [0; \pi]$ của (1).

Do đó: YCBT $\Leftrightarrow$ (2) có đúng một nghiệm $t \in [0; 1)$.

Ta có: $g'(t) = \dfrac{6}{(t+2)^2} > 0, \forall t \in [0; 1)$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	0		1	$+\infty$
y'		0	0	–	0	
y			1	↗	2	

Vậy $1 \le m < 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

5. $4\cos x.\cos 2x.\cos 3x + m = 14(\cos^2 x - \sin^2 x)$ (1).

(1) $\Leftrightarrow 2\cos 2x[\cos 4x + \cos 2x] + m = 14\cos 2x$

$\Leftrightarrow m = 14\cos 2x - 2\cos 2x[2\cos^2 2x + \cos 2x - 1]$

$\Leftrightarrow m = -4\cos^3 2x - 2\cos^2 2x + 16\cos 2x$ (1)

Đặt $t = \cos 2x$, ta được (1) $\Leftrightarrow m = -4t^3 - 2t^2 + 16t = g(t)$

Nhận xét: $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{6}\right] \Leftrightarrow t \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Ta có: $g'(t) = -12t^2 - 4t + 16$; $g'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\frac{4}{3} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
g'(t)			+		
g(t)		-8	$\nearrow$	7	

Vậy với $-8 \le m \le 7$ phương trình có nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{6}\right]$.

II. Bất phương trình

1. $m\sqrt{2x^2+9} < 4x + m$ (1).

Ta có (1) $\Leftrightarrow m\left(\sqrt{2x^2+9}-1\right) < 4x \Leftrightarrow m < \dfrac{4x}{\sqrt{2x^2+9}-1} = f(x)$ (2)

Ta có: $f'(x) = \dfrac{4\left(9-\sqrt{2x^2+9}\right)}{\sqrt{2x^2+9}\left(\sqrt{2x^2+9}-1\right)^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 6$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-6		6		$+\infty$
y'		$-$	0	+	0	$-$	
y	$-2\sqrt{2}$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	3	$\searrow$	$2\sqrt{2}$

Do đó (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $\Leftrightarrow m < 3$.

2. $\sqrt{(1+x)(3-x)} \ge m + \left(x^2 - 2x - 3\right)$ (1).

Đặt $t = \sqrt{(1+x)(3-x)} = \sqrt{-x^2+2x+3} = \sqrt{-(x-1)^2+4}$.

Ta có: $x \in [-1; 3] \Leftrightarrow t \in [0; 2]$.

Khi đó: (1) trở thành $t \ge m - t^2 \Leftrightarrow m \le t^2 + t = g(t)$.

Ta có: $g'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t \in [0; 2] \Rightarrow g(t)$ tăng và liên tục trên $[0; 2]$.

Do đó: $\underset{[0;2]}{\text{Min}}\, g(t) = g(0) = 0$ và $\underset{[0;2]}{\text{Max}}\, g(t) = g(2) = 6$.

(1) nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 3] \Leftrightarrow m \le g(t), \forall t \in [0; 2]$

$\Leftrightarrow m \le \underset{[0;2]}{\text{Min}}\, g(t) = g(0) = 0$.

3. $x + 2m \le \sqrt{4x - x^2}$ (1).

Ta có: (1) $\Leftrightarrow 2m \le \sqrt{4x-x^2} - x = f(x)$; $x \in [0; 4]$.

Ta có: $f'(x) = \dfrac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}} - 1 = \dfrac{2-x-\sqrt{4x-x^2}}{\sqrt{4x-x^2}}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4x-x^2} = 2-x \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \ge 0 \\ 4x-x^2 = (2-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2-\sqrt{2}.$$

Ta có: $f(0) = 0$, $f(4) = -4$ và $f\left(2-\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}-2$

Do đó: $\min\limits_{[0;4]} f(x) = -4$ và $\max\limits_{[0;4]} f(x) = 2\sqrt{2}-2$.

Suy ra YCBT $\Leftrightarrow 2m \le 2\sqrt{2}-2 \Leftrightarrow m \le \sqrt{2}-1$.

4. $mx + 2 \ge \sqrt{4x-x^2}$ (1).

Ta có: (1) $\Leftrightarrow mx \ge \sqrt{4x-x^2} - 2 \Leftrightarrow m \ge \dfrac{\sqrt{4x-x^2}-2}{x} = f(x)$ (do $x > 0$).

Ta có $f'(x) = \dfrac{2\sqrt{4x-x^2}-2x}{x^2\sqrt{4x-x^2}}$;

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{4x-x^2} = 2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 4x - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 4x - 2x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0		2		4	$+\infty$
y'		0	+	0	−	0	
y		$-\infty$	↗	0	↘	$-1/2$	

Do đó: m thỏa mãn yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \ge 0$.

§4. ĐIỂM UỐN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ TỊNH TIẾN HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

Vấn đề 1: Tìm điểm uốn của đồ thị (C) của hàm số y = f(x).

1. Tìm điểm uốn của các đồ thị hàm số:

a) $y = x^3 - 6x^2 - 3x + 5$

Tập xác định: D = R;

$y' = 3x^2 - 12x - 3$; $y'' = 6x - 12$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = -17$.

y'' đổi dấu khi qua x = 2 nên đồ thị có điểm uốn là I(2; −17).

b) $y = 2x^4 - 12x^2 + 5$

Tập xác định: D = R;

$y' = 8x^3 - 24x$; $y'' = 24x^2 - 24$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \Rightarrow y = -5$.

y'' đổi dấu khi qua $x = \pm 1$ nên đồ thị có điểm uốn là I(1; –5) và J(–1; –5).

c) $y = -x^4 - 3x^2 + 4$

Tập xác định: D = R;

$y' = -4x^3 - 6x - 3$; $y'' = -12x^2 - 6$.

$\Rightarrow$ y'' không đổi dấu trên R nên đồ thị không có điểm uốn.

d) $y = 3x^5 - 5x^4 - 4x + 5$.

Tập xác định: D = R;

$y' = 15x^4 - 20x^3 - 4$; $y'' = 60x^3 - 60x^2$.

$y'' = 0 \Leftrightarrow 60x^2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (kép) hay $x = 1 \Rightarrow y = -1$.

y'' chỉ đổi dấu khi qua x = 1 nên đồ thị có điểm uốn là I(1; –1).

Vấn đề 2: Chứng minh đồ thị có 3 điểm uốn thẳng hàng

1. Chứng minh rằng đồ thị các hàm số sau có 3 điểm uốn thẳng hàng

a) $y = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$

$$y' = \frac{-2x^2 - 2x + 1}{(x^2+x+1)^2}$$

$$y'' = \frac{(-4x-2)(x^2+x+1) + (2x^2+2x-1)2(2x+1)}{(x^2+x+1)^3} = \frac{2(2x+1)[x^2+x-2]}{(x^2+x+1)^3}$$

Ta có $y'' = 0 \Leftrightarrow (2x + 1)(x^2 + x - 2) = 0$ có ba nghiệm phân biệt

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có ba điểm uốn.

M(x, y) là điểm uốn

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1} \\ (2x+1)(x^2+x-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2x+1+m(x^2+x-2)(2x+1)}{x^2+x+1} = ax + b \ (1) \\ (2x+1)(x^2+x-2) = 0 \ (2) \end{cases}$$

Ta có (2) $\Leftrightarrow x = 1$ hay $x = -2$ hay $x = -\dfrac{1}{2}$. Thay x = 1 và x = –2 vào (1) ta được:

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ -2a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{2}{3},\ b = \frac{1}{3} \Rightarrow m = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow y = \dfrac{2x+1}{3}$ là phương trình đường thẳng qua ba điểm uốn.

b) $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$.

$y' = \dfrac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$; $y'' = \dfrac{2x^3+6x^2-6x-2}{(x^2+1)^3}$

Ta có: $y'' = 0 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+4x+1) = 0$ có ba nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số có ba điểm uốn.

M(x, y) là điểm uốn $\Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x+1}{x^2+1} \\ x^3+3x^2-3x-1=0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x+1+m(x^3+3x^2-3x-1)}{x^2+1} = ax+b \\ x^3+3x^2-3x-1=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow mx^3 + 3mx^2 + (1-3m)x + 1 - m = ax^3 + bx^2 + ax + b$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = a \\ 3m = b \\ 1-3m = a \\ 1-m = b \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}, b = \frac{3}{4}, m = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{x+3}{4}.$$

Vậy nếu đồ thị hàm số có ba điểm uốn thì ba điểm uốn đó phải nằm trên đường thẳng (Δ): $y = \dfrac{x+3}{4}$.

c) $y = \dfrac{x^2-x+2}{x^2-2x+2}$

Tập xác đinh: D = R

$y' = \dfrac{-x^2+2}{(x^2-2x+2)^2}$; $y'' = \dfrac{2x^3-12x+8}{(x^2-2x+2)^3}$;

$y'' = 0 \Leftrightarrow x^3 - 6x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x-2) = 0$ luôn có ba nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số có ba điểm uốn A, B, C.

➢ Giả sử A, B, C thuộc đường thẳng $y = ax + b$.

Ta có hoành độ A, B, C thỏa phương trình

$$\frac{x^2-x+2}{x^2-2x+2} = ax+b \Leftrightarrow (ax+b)(x^2-2x+2) = x^2-x+2$$

$\Leftrightarrow ax^3 + (b-2a-1)x^2 + (2a-2b+1)x + 2b - 2 = 0$ (1)

Ta có $y'' = 0 \Leftrightarrow x^3 - 6x + 4 = 0$ (2)

Vì (1) và (2) cùng có ba nghiệm là x_A, x_B và x_C nên ta có:

$a : (b-2a-1) : (2a-2b+1) : (2b-2) = 1 : 0 : (-6) : 4$

(các hệ số tương ứng tỉ lệ)

$$\Rightarrow b = 2a \text{ và } \frac{a}{1} = \frac{b-2a-1}{0} = \frac{2a-2b+1}{-6} = \frac{2b-2}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b-1 = 2a \\ a = \dfrac{-b}{-6} = \dfrac{b-1}{2} \end{cases} \Rightarrow b = \frac{3}{2}\,;\ a = \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow\ y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$ là phương trình đường thẳng qua ba điểm uốn của đồ thị.

2. $y'(x) = x\cos x + \sin x$; $y''(x) = 2\cos x - x\sin x$

Tọa độ các điểm uốn của (C) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y''=2\cos x - x\sin x = 0 \\ y = x\sin x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x\sin x \\ 2\cos x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \dfrac{y}{x} \\ \cos x = \dfrac{y}{2} \end{cases}$$

Do $\sin^2x + \cos^2x = 1$ nên $\left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow y^2(4 + x^2) = 4x^2$.

Vấn đề 3: Tìm điều kiện của tham số để đồ thị có điểm uốn thỏa điều kiện cho trước.

1. $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + 3m + 4$; (d): $y = 5x + 9$.

   Tập xác định: D = R;

   $y' = 3x^2 - 6x + 3m$; $y'' = 6x - 6$.

   $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 6m + 2 \Rightarrow$ Đồ thị có điểm uốn là $I(1; 6m + 2)$.

   Do đó $I \in (d) \Leftrightarrow 6m + 2 = 5.1 + 9 \Leftrightarrow m = 2$.

2. $y = x^4 - (a-1)x^2 + 3$.

   Tập xác định D = R;

   $y' = 4x^3 - 2(a-1)x$; $y'' = 12x^2 - 2(a-1)$.

   $y'' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - a + 1 = 0$ (1)

a) Đồ thị có hai điểm uốn $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow a - 1 > 0 \Leftrightarrow a > 1$.

b) Đồ thị không có điểm uốn $\Leftrightarrow$ (1) vô nghiệm hay có nghiệm kép

   $\Leftrightarrow a - 1 \le 0 \Leftrightarrow a \le 1$. .

3. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 6$.

   Tập xác định: D = R; $y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x-1)^2 - 12$;

   $y'' = 6x - 6$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 5$. Đồ thị có điểm uốn là $I(1;5)$.

Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị tại $M(x_0; y_0)$ là

$y'(x_0) = 3(x_0 - 1) - 12 \geq -12$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x_0 = 1, y_0 = 5 \Leftrightarrow M \equiv I$.

Vậy trong tất cả các tiếp tuyến với đồ thị hàm số, tiếp tuyến tại điểm uốn có hệ số góc nhỏ nhất.

4. Tìm a, b để đồ thị hàm số :

a) $y = x^3 - ax^2 + x + b$ nhận điểm I(1; 4) làm điểm uốn.

* Tập xác định: D = R

* $y' = 3x^2 - 2ax + 1$; $y'' = 6x - 2a$

* I là điểm uốn của đồ thị hàm số $\Rightarrow \begin{cases} y''(1) = 0 \\ y(1) = 4 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6 - 2a = 0 \\ 1 - a + 1 + b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 5 \end{cases}.$$

Khi đó $y = x^3 - 3x^2 + x + 5$; $y'' = 6x - 6$

Ta có: $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 4$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y''	$-$	0	+
Đồ thị		Điểm uốn (1; 4)	

Vậy đồ thị nhận U(1; 4) làm điểm uốn. Suy ra a = 3 và b = 5 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) $y = ax^3 + bx^2$ nhận điểm I(1; 8) là điểm uốn.

* Tập xác định: D = R

* $y' = 3ax^2 + 2bx$; $y'' = 6ax + 2b$

* I là điểm uốn của đồ thị hàm số $\Rightarrow \begin{cases} y''(1) = 0 \\ y(1) = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6a + 2b = 0 \\ a + b = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 12 \end{cases}$.

Khi đó $y = -4x^3 + 12x^2$; $y'' = -24x + 24$

Ta có: $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 8$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Y''	+	0	$-$
Đồ thị		Điểm uốn (1; 8)	

Vậy đồ thị nhận U(1; 8) làm điểm uốn. Suy ra a = –4 và b = 12 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

c) Đáp số: a = 2; b = –6 d) Đáp số: m = 0.

Vấn đề 4: Công thức chuyển hệ trục và áp dụng

1. Cho đường cong (C): $y = 3 - \dfrac{1}{x-2}$ và điểm I(2; 3).

➢ Công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{OI}$ là

$$\begin{cases} x = X + x_1 = X + 2 \\ y = Y + y_1 = Y + 3 \end{cases}$$

➢ Phương trình của (C) đối với hệ tọa độ IXY là :

$$Y = f(X + x_I) - y_I = f(X + 2) - 3$$

$$\Leftrightarrow \quad Y = 3 - \frac{1}{X + 2 - 2} - 3 \Leftrightarrow Y = -\frac{1}{X} = F(X).$$

Hàm số $Y = F(X) = -\dfrac{1}{X}$ có :

* Tập xác định là $D_F = R\setminus\{0\}$ nên $X \in D_F \Rightarrow -X \in D_F$.

* $F(-X) = -\dfrac{1}{-X} = -F(X),\ \forall X \in D_F$.

Vậy F(X) là hàm số lẻ. Suy ra đồ thị (C) nhận I làm tâm đối xứng.

2. Chứng minh đồ thị :

a) Hàm số $y = \dfrac{5x-2}{x-1}$ nhận điểm I(1; 5) làm tâm đối xứng.

* Tịnh tiến hệ trục Oxy về hệ trục IXY theo vectơ $\overrightarrow{OI}$, công thức chuyển hệ trục là : $\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + 5 \end{cases}$.

* Đối với hệ trục IXY thì đồ thị (C) có phương trình là :

$$Y = \frac{5(X+1)-2}{(X+1)-1} - 5 = \frac{3}{X} = F(X)$$

* Ta có tập xác định của F là $D_F = R\setminus\{0\}$.

Với mọi $X \in D_F$ thì $-X \in D_F$ và $F(-X) = -\dfrac{3}{X} = -F(X)$. Suy ra F là hàm số lẻ.

Do đó đồ thị (C) nhận I làm tâm đối xứng.

b) Hàm số $y = x^4 - 4x^3 - x^2 + 10x + 5$ có trục đối xứng vuông góc với Ox.

Ta có: $y' = 4x^3 - 12x^2 - 2x + 10$

$y'' = 12x^2 - 24x - 2;\ y''' = 24x - 24$

$y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

Xét điểm đường thẳng (Δ): x = 1 và I(1 ; 0).

* Tịnh tiến hệ trục Oxy về hệ trục IXY theo vectơ $\overrightarrow{OI}$, công thức chuyển hệ trục là:

$$\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y \end{cases}.$$

* Đối với hệ trục IXY thì đồ thị (C) có phương trình là :

$$Y = f(X+1) = (X+1)^4 - 4(X+1)^3 - (X+1)^2 + 10(X+1) + 5$$
$$= X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X + 1 - 4(X^3 + 3X^2 + 3X + 1) - (X^2 + 2X + 1) + 10X + 10 + 5$$
$$= X^4 - 7X^2 + 11 = F(X)$$

* Ta có tập xác định của F là $D_F = R$.

* $F(-X) = F(X) \Rightarrow F(X)$ là hàm số chẵn $\Rightarrow IY \equiv \Delta$: $x = 1$ là trục đối xứng.

Vậy đồ thị hàm số có trục đối xứng vuông góc với Ox là (Δ): $x = 1$.

c) Hàm số $y = (x - 2a)^2(x + 2)^2$ có trục đối xứng vuông góc trục Ox.

Xét điểm đường thẳng (Δ): $x = a - 1$ và $I(a - 1 ; 0)$.

* Tịnh tiến hệ trục Oxy về hệ trục IXY theo vectơ $\overrightarrow{OI}$, công thức chuyển hệ trục là :

$$\begin{cases} x = X + a - 1 \\ y = Y \end{cases}.$$

* Đối với hệ trục IXY thì đồ thị (C) có phương trình là :

$$Y = f(X+1) = (X + a - 1 - 2a)^2(X + a - 1 + 2)^2$$
$$= (X - a - 1)^2(X + a + 1)^2 = [X^2 - (a+1)^2]^2 = F(X)$$

* Ta có tập xác định của F là $D_F = R$.

* $F(-X) = F(X) \Rightarrow F(X)$ là hàm số chẵn $\Rightarrow IY \equiv \Delta$: $x = a - 1$ là trục đối xứng.

Vậy đồ thị hàm số có trục đối xứng vuông góc với Ox là (Δ): $x = a - 1$.

§5. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1. Tìm các tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{2x+3}{4-x^2}$

Tập xác định: $D = R\backslash\{-2; 2\}$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = 0 \Rightarrow$ TCN: $y = 0$.

$\lim\limits_{x\to-2^-} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-2^+} y = -\infty \Rightarrow$ TCĐ: $x = -2$.

$\lim\limits_{x\to2^-} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to2^+} y = -\infty \Rightarrow$ TCĐ: $x = 2$.

b) $y = \dfrac{3x^2 + 9x - 12}{x^2 + x - 2}$

Tập xác định: $D = R \setminus \{-2; 1\}$.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = 3 \Rightarrow$ TCN: $y = 3$.

$\lim\limits_{x \to -2^-} y = -\infty;\ \lim\limits_{x \to -2^+} y = +\infty \Rightarrow$ TCĐ: $x = -2$.

$$\lim_{x \to 1^-(1^+)} y = \lim_{x \to 1^-(1^+)} \frac{(x-1)(3x+12)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \to 1^-(1^+)} \frac{3x+12}{x+2} = 5$$

$\Rightarrow x = 1$ không là tiệm cận đứng.

c) $y = 2x - 5 + \dfrac{2}{3-x}$

Tập xác định: $D = R \setminus \{3\}$.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} [y - (2x-5)] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2}{3-x} = 0 \Rightarrow$ TCX: $y = 2x - 5$.

$\lim\limits_{x \to 3^-} y = +\infty;\ \lim\limits_{x \to 3^+} y = -\infty \Rightarrow$ TCĐ: $x = 3$.

d) $y = \dfrac{3x^2 + 4x - 4}{x - 3} = 3x + 13 + \dfrac{35}{x-3}$

Tập xác định: $D = R \setminus \{3\}$.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} [y - (3x+13)] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{35}{x-3} = 0 \Rightarrow$ TCX: $y = 3x + 13$.

$\lim\limits_{x \to 3^-} y = -\infty;\ \lim\limits_{x \to 3^+} y = +\infty \Rightarrow$ TCĐ: $x = 3$.

2. Tìm các tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

a) $y = 2x - 4 + \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

* Tập xác định: $D = (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$.

Suy ra đồ thị không có tiệm cận đứng.

* Giả sử $y = ax + b$ là tiệm cận của đồ thị.

➢ Khi $x \to +\infty$:

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x - 4 + \sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(2 - \frac{4}{x} + \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}\right) = 3$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (y - 3x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 4x + 3} - x - 4\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - 4x + 3 - x^2}{\sqrt{x^2 - 4x + 3} + x} - 4\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-4 + \dfrac{3}{x}}{\sqrt{1 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{x^2}} + 1} - 4 = -6$$

Vậy khi $x \to +\infty$ thì đồ thị có tiệm cận xiên là $y = 3x - 6$.

➢ Khi $x \to -\infty$:

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-4+\sqrt{x^2-4x+3}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{4}{x}-\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}\right) = 1$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}(y-x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+3}+x-4\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-4x+3-x^2}{\sqrt{x^2-4x+3}-x}-4\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-4+\dfrac{3}{x}}{-\sqrt{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}}-1} - 4 = -2$$

Vậy khi $x \to -\infty$ thì đồ thị có tiệm cận xiên là $y = x - 2$.

b) $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Tập xác định: D = R.

Suy ra đồ thị không có tiệm cận đứng.

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ là tiệm cận ngang khi } x \to +\infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = -1 \Rightarrow y = -1 \text{ là tiệm cận ngang khi } x \to -\infty.$$

3. Cho $(C_m): y = \dfrac{2x^2+(m+1)x-3}{x+m}$

a) Tập xác định: $D = R\setminus\{-m\}$.

Ta có $y = 2x - m + 1 + \dfrac{m^2-m-3}{x+m}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[y-(2x-m+1)\right] = 0$ nên $y = 2x - m + 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Do đó tiệm cận xiên của đồ thị qua A $\Leftrightarrow 5 = 2 - m + 1 \Leftrightarrow m = -2$.

b) Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận thì $I(-m\,;-3m+1)$.

Do đó $I \in (P) \Leftrightarrow -3m + 1 = (-m)^2 - 3$

$\Leftrightarrow m^2 + 3m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ hay $m = -4$.

4. Cho (C): $y = \dfrac{x^2 - 2x - 17}{x - 3}$.

* Tập xác định : $D = R \setminus \{3\}$.

* $\lim\limits_{x \to 3^+} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to 3^-} y = +\infty \Rightarrow$ TCĐ: $x = 3$.

* Ta có $y = x + 1 - \dfrac{14}{x - 3} \Rightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty} [y - (x + 1)] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{-14}{x - 3}\right) = 0$

$\Rightarrow$ TCX: $y = x + 1$.

* $M(x_0 ; y_0) \in (C) \Leftrightarrow y_0 = x_0 + 1 - \dfrac{14}{x_0 - 3}$ (1)

* $d(M ; TCĐ) = |x_0 - 3|$; $d(M ; TCX) = \dfrac{|x_0 - y_0 + 1|}{\sqrt{2}} = \dfrac{14}{\sqrt{2}|x_0 - 3|}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow d(M ; TCĐ).d(M ; TCX) = 7\sqrt{2}$ (là hằng số).

5. Cho $(C_m) : y = \dfrac{x^2 + mx - 1}{x - 1}$.

* Tập xác định : $D = R \setminus \{1\}$.

* Ta có $y = x + m + 1 + \dfrac{m}{x - 1}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty} [y - (x + m + 1)] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{m}{x - 1} = 0$ $(m \neq 0)$.

Do đó với $m \neq 0$ thì (C_m) có tiệm cận xiên là (d): $y = x + m + 1$.

* Gọi $A = (d) \cap Ox$ và $B = (d) \cap Oy$ thì $A(-m - 1; 0)$ và $B(0; m + 1)$.

Ta có : $S_{OAB} = \dfrac{1}{2}OA.OB = \dfrac{1}{2}|-m - 1|.|m + 1| = \dfrac{(m + 1)^2}{2}$.

Do đó : $S_{OAB} = 2 \Leftrightarrow (m + 1)^2 = 4 \Leftrightarrow m + 1 = \pm 2 \Leftrightarrow m = 1$ hay $m = -3$.

Vậy giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m = 1$ hay $m = -3$.

6. (C): $y = \dfrac{2x^2 + x - 1 + 4\sqrt{5}}{x + 1}$

* Tập xác định: $D = R \setminus \{-1\}$.

* $\lim\limits_{x \to -1^+} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to -1^-} y = -\infty \Rightarrow$ TCĐ: $x = -1$.

* Ta có $y = 2x - 1 + \dfrac{4\sqrt{5}}{x + 1} \Rightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty} [y - (2x - 1)] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{4\sqrt{5}}{x + 1}\right) = 0$

$\Rightarrow$ TCX: $y = 2x - 1$.

* $M(x_0 ; y_0) \in (C) \Leftrightarrow y_0 = 2x_0 - 1 + \dfrac{4\sqrt{5}}{x_0 + 1}$ (1)

* $d(M ; TCĐ) = |x_0 + 1|$; $d(M ; TCX) = \dfrac{|2x_0 - y_0 - 1|}{\sqrt{5}} = \dfrac{4}{|x_0 + 1|}$ (2)

Ta có $d(M ; TCĐ) + d(M ; TCX) \ge 2\sqrt{d(M;TCĐ).d(M;TCX)} = 4$.

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow d(M ; TCĐ) = d(M ; TCX)$

$\Leftrightarrow (x_0 + 1)^2 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 0$ hay $x_0 = -2$.

Vậy khi $M(0 ; -1 + \sqrt{5})$ hay $M(-2 ; -5 - \sqrt{5})$ thì tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận là nhỏ nhất và giá trị nhỏ nhất là 4.

§6. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA MỘT SỐ HÀM ĐA THỨC

Vấn đề 1: Khảo sát hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$

1. *a)* $y = -x^3 - 3x^2 + 2$

1. Tập xác định: D = R.

2. Khảo sát sự biến thiên:

* Giới hạn: $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$.

* Chiều biến thiên:

$$y' = -3x^2 - 6x;\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \to y = 2 \\ x = -2 \to y = -2 \end{array}\right.$$

* Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	CT -2	↗	2 CĐ	↘	$-\infty$

Hàm số giảm trong $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$. Hàm số tăng trong $(-2; 0)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CĐ} = 2$ và đạt cực tiểu tại $x = -2$, $y_{CT} = -2$.

3. Điểm uốn: $y'' = -6x - 6$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = 0$.

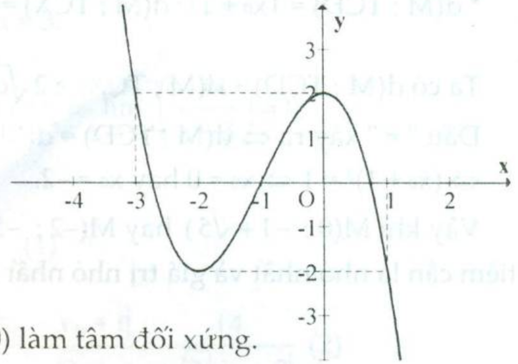
Đồ thị có điểm uốn I(–1; 0)

4. Đồ thị:

* Giá trị đặc biệt:

x	–1	0	1	2	3
y	–2	2	0	–2	2

* Đồ thị:



Nhận xét: Đồ thị nhận điểm uốn I(–1; 0) làm tâm đối xứng.

b) $y = 2x^3 - 3x^2 + 2$

1. Tập xác định: D = R.

2. Khảo sát sự biến thiên:

* Giới hạn: $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$.

* Chiều biến thiên: $y' = 6x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \to y = 2 \\ x = 1 \to y = 1 \end{array}\right.$.

* Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		+	0	–	0	+	
y	$-\infty$	↗	2 CĐ	↘	CT 1	↗	$+\infty$

Vậy: Hàm số tăng trong $(-\infty; 0)$ và $(1; +\infty)$. Hàm số giảm trong (0; 1).

Hàm số đạt cực đại tại x = 0, $y_{CĐ} = 2$.

Hàm số đạt cực tiểu tại x = 1, $y_{CT} = 1$.

3. Điểm uốn:

$$y'' = 12x - 6; y'' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}.$$

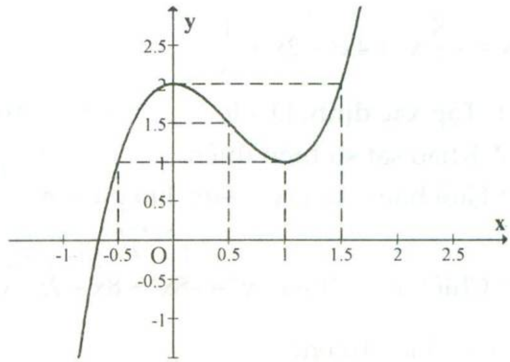
Đồ thị có điểm uốn $I(\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$

4. Đồ thị:

* Giá trị đặc biệt:

x	–1/2	0	1/2	1	3/2
y	1	2	3/2	1	2

* Đồ thị:



Nhận xét: Đồ thị nhận điểm uốn $I(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ làm tâm đối xứng.

c) $y = x^3 - 3x^2 + 5x - 2$

1. Tập xác định: D = R.

2. Khảo sát sự biến thiên:

* Giới hạn: $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y = +\infty$.

* Chiều biến thiên: $y' = 3x^2 - 6x + 5$; $y' = 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		+	
y	$-\infty$	↗	$+\infty$

Hàm số tăng trong ($-\infty$; $+\infty$). Hàm số không đạt cực trị.

3. Điểm uốn: $y'' = 6x - 6$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1$.

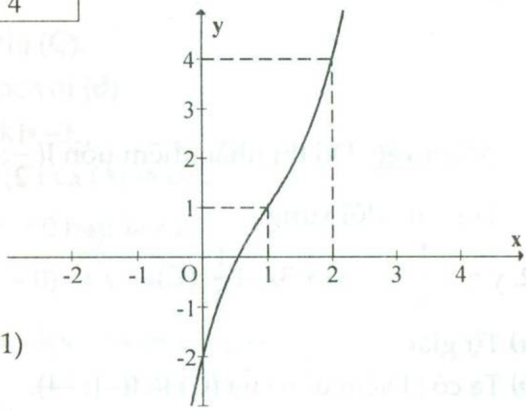
Đồ thị có điểm uốn là I(1; 1)

4. Đồ thị:

* Giá trị đặc biệt:

x	0	1	2
y	–2	1	4

* Đồ thị:



Nhận xét: Đồ thị nhận điểm uốn I(1; 1) làm tâm đối xứng.

d) $y = -\frac{8}{3}x^3 + 4x^2 - 2x + \frac{1}{3}$

1. Tập xác định: D = R.

2. Khảo sát sự biến thiên:

* Giới hạn: $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$.

* Chiều biến thiên: $y' = -8x^2 + 8x - 2$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
y'		+	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

Hàm số tăng trong $(-\infty; +\infty)$. Hàm số không đạt cực trị.

3. Điểm uốn: $y'' = -16x + 8$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 0$.

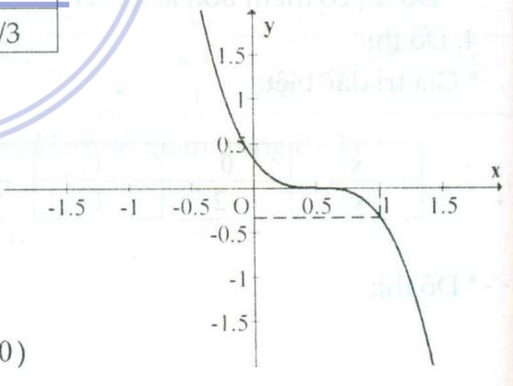
Đồ thị có điểm uốn là $I(\frac{1}{2}; 0)$.

4. Đồ thị:

* Giá trị đặc biệt:

x	0	1/2	1
y	1/3	0	−1/3

* Đồ thị:



Nhận xét: Đồ thị nhận điểm uốn $I(\frac{1}{2}; 0)$ làm tâm đối xứng.

2. $y = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x - \frac{1}{3}$ (C).

a) Tự giải

b) Ta có : Điểm uốn của (C) là $I(-1; -4)$.

Tịnh tiến hệ trục Oxy về hệ trục IXY theo vectơ $\vec{OI}$.

Công thức chuyển hệ trục là : $\begin{cases} x = X - 1 \\ y = Y - 4 \end{cases}$.

Đối với hệ trục IXY, đồ thị (C) có phương trình là :

$$Y - 4 = -\frac{1}{3}(X-1)^3 - (X-1)^2 + 3(X-1) - \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow Y = -\frac{1}{3}\left(X^3 - 3X^2 + 3X - 1\right) - (X^2 - 2X + 1) + 3X - 3 - \frac{1}{3} + 4$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}X^3 + 4X = F(X).$$

Ta có: Với mọi X ∈ R thì –X ∈ R và F(–X) = –F(X) nên F(X) là hàm số lẻ.

Do đó (C) nhận gốc tọa I làm tâm đối xứng. Vậy (C) nhận điểm uốn I làm tâm đối xứng.

c) Ta có: Điểm uốn của (C) là I(–1; –4).

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm uốn là :

$$y + 4 = y'(-1)(x+1) \Leftrightarrow y = 4(x+1) - 4 = 4x.$$

3. $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1$

a) Tự giải.

b) Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$.

Ta có hệ số góc tiếp tuyến của (C) tại M là

$$k = f'(x_0) = x_0^2 - 2x_0 - 3 = (x_0 - 1)^2 - 4 \geq -4.$$

$$k = -1 \Leftrightarrow x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = -\frac{8}{3}.$$

Vậy tại điểm $M(1\,; -\frac{8}{3})$ thì hệ số góc tiếp tuyến đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta thấy M chính là điểm uốn của đồ thị (C).

c) Gọi (Δ) là tiếp tuyến của (C), vuông góc với (d)

$\Rightarrow$ hệ số góc của Δ là $k \,.\, k_d = -1 \Rightarrow k = -3$.

Gọi x_0 là hoành độ của tiếp điểm của (C) và (Δ) ta có :

$$f'(x_0) = -3 \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 - 3 = -3 \Leftrightarrow x_0 = 0 \text{ hay } x_0 = 2.$$

Khi $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1 \Rightarrow (\Delta) : y - 1 = -3(x - 0) \Leftrightarrow y = -3x + 1$.

Khi $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = -\frac{19}{3} \Rightarrow (\Delta) : y + \frac{19}{3} = -3(x-2) \Leftrightarrow y = -3x - \frac{1}{3}$.

Vậy có 2 tiếp tuyến thỏa mãn bài toán.

4. $y = x^3 - 3mx^2 + 3m - 1$

a) * Tập xác định: D = R

* $y' = 3x^2 - 6mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2m \end{array}\right.$.

Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó hai điểm cực trị của đồ thị là

$A(0\,; 3m - 1)$ và $B(2m\,; 3m - 1 - 4m^3)$.

Đường thẳng (d) qua 2 điểm cực trị A, B nhận $\overrightarrow{AB} = (2m; -4m^3) = 2m(1; -2m^2)$ làm vectơ chỉ phương nên (d) : $\dfrac{x - 0}{1} = \dfrac{y - 3m + 1}{-2m^2} \Leftrightarrow y = -2m^2x + 3m - 1$.

Vậy phương trình đường thẳng qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y = -2m^2x + 3m - 1$.

b) Tự giải.

5. $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + 1 + m \quad (C_m)$.

a) * Tập xác định: D = R

* $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1)$;

$y' = 0 \Leftrightarrow x = m + 1$ hay $x = m - 1$

* Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$m - 1$		$m + 1$		$+\infty$
y'							
y	$-\infty$	$\nearrow$	CĐ	$\searrow$	CT	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó:

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3 \Leftrightarrow x_{CT} = 3 \Leftrightarrow m + 1 = 3 \Leftrightarrow m = 2$.

b) Tự giải.

6. $y = x^3 - mx^2 + (2m + 1)x - m - 2 \quad (C_m)$

a) Tự giải

b) Ta có: $y = x^3 - mx^2 + (2m + 1)x - m - 2$

$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1)m + y - x^3 - x + 2 = 0$ (1).

Tọa độ điểm cố định của (C_m) phải thỏa mãn (1) có nghiệm với $\forall m$:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ y - x^3 - x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Vậy (C_m) luôn đi qua một điểm cố định là K(1; 0).

c) Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và Ox là:

$x^3 - mx^2 + (2m + 1)x - m - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)[x^2+(1-m)x+m+2]=0 \quad (1)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ g(x)=x^2+(1-m)x+m+2=0 \quad (2) \end{array}\right.$$

YCBT $\Leftrightarrow$ (1) có ba nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm dương phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-6m-7>0 \\ m-1>0 \\ m+2>0 \\ 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<-1 \text{ hay } m>7 \\ m>1 \\ m>-2 \end{cases} \Leftrightarrow m>7.$$

7. $y=(m+1)x^3-(4m+1)x-3m+1 (C_m)$

a) Ta có:

$y=(m+1)x^3-(4m+1)x-3m+1$

$\Leftrightarrow \quad (x^3-4x-3)m+x^3-x+1-y=0 \ (1)$

Điểm cố định của (C_m) thỏa điều kiện:

(1) thỏa mãn với mọi m $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-4x-3=0 & (*) \\ x^3-x+1-y=0 \end{cases}$.

Ta thấy (*) luôn có ba nghiệm phân biệt là $x=-1$, $x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$ nên (C_m) luôn có ba điểm cố định.

Tọa độ các điểm cố định của (C_m) thỏa hệ

$$\begin{cases} x^3-4x-3=0 \\ x^3-x+1-y=0 \end{cases} \Rightarrow -3x-4+y=0 \Leftrightarrow y=3x+4.$$

Vậy các điểm cố định của (C_m) luôn thuộc đường thẳng (d): $y=3x+4$ nên chúng thẳng hàng.

b) Gọi $M(x_0; y_0) \in (C_m)$. Hệ số góc tiếp tuyến (Δ) của (C_m) tại M là

$k=y'(x_0)=3(m+1)x_0^2-4m-1$

Ta có (Δ) vuông góc (d) $\Leftrightarrow k=-1$

$\Leftrightarrow 3(m+1)x_0^2-4m-1=-1 \Leftrightarrow 3(m+1)x_0^2-4m=0 \quad (2)$

YCBT $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \neq 0 \\ (m+1)(-4m) \geq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m \geq 0 \end{array}\right..$$

8. $y = x^3 + mx^2 - m - 1$

a) Ta có: $y = x^3 + mx^2 - m - 1 \Leftrightarrow (x^2 - 1)m + x^3 - 1 - y = 0$.

Tọa độ điểm cố định thỏa hệ

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x^3 - 1 - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \text{hay} \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}.$$

Vậy (C_m) qua hai điểm cố định là A(1; 0) và B(–1; –2).

* Phương trình tiếp tuyến của (C_m) tại A là:

(d_A): $y - 0 = y'(1)(x - 1) = (2m + 3)(x - 1) \Leftrightarrow y = (2m + 3)x - 2m - 3$.

* Phương trình tiếp tuyến của (C_m) tại B là:

(d_A): $y + 2 = y'(-1)(x + 1) = (-2m + 3)(x + 1) \Leftrightarrow y = (-2m + 3)x - 2m + 1$.

* Tọa độ giao điểm của (d_A) và (d_B) thỏa hệ:

$$\begin{cases} y = (2m + 3)x - 2m - 3 \\ y = (-2m + 3)x - 2m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m(x - 1) = y - 3x + 3 \\ 2m(x + 1) = -y + 3x + 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow (y - 3x + 3)(x + 1) = (-y + 3x + 1)(x - 1)$

$\Rightarrow yx + y - 3x^2 + 3 = -yx + y + 3x^2 - 2x - 1$

$\Rightarrow 2xy = 6x^2 - 2x - 4 \Rightarrow y = \dfrac{3x^2 - x - 2}{x}$.

Vậy tập hợp các giao điểm của (d_A) và (d_B) là đường (G): $y = \dfrac{3x^2 - x - 2}{x}$.

b) Tự giải.

c) Theo b) ta có hai điểm cực trị của (C) là M(0; 2) và N(2; –2).

Do đó M và N ở về 2 phía khác nhau của đường tròn

(T): $x^2 + y^2 - 2ax - 4ay + 4a^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow P_M(T).P_N(T) < 0$

$\Leftrightarrow (4 - 8a + 4a^2 - 4)(4 + 4 - 4a + 8a + 4a^2 - 4) < 0$

$\Leftrightarrow (4a^2 - 8a)(4a^2 + 4a + 4) < 0 \Leftrightarrow 0 < a < 2$.

9. $y = x^3 - (2m + 1)x^2 + (m^2 - 4m + 3)x + 3$.

a) Tự giải.

b) Ta có: $y' = 3x^2 - 2(2m + 1)x + m^2 - 4m + 3$

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2(2m + 1)x + m^2 - 4m + 3 = 0$ (1)

YCBT $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt x_1; x_2 sao cho $x_1 < 0 < x_2$

$\Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 3$.

10. $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + 1$.

a) Tự giải

b) Gọi $M(x_0; y_0) \in$ (C). Hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại M là:

$k = y'(x_0) = x_0^2 - 1 \geq -1.$

$k = -1 \Leftrightarrow x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1.$

Vậy k đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M(0; 1).

Do đó trong các tiếp tuyến của (C), tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất là tiếp tuyến tại M(0; 1).

Ta có phương trình của tiếp tuyến tại M(0; 1) là:

$y - 1 = (-1)(x - 0) \Leftrightarrow y = -x + 1.$

c) Ta có: $y' = x^2 - 2mx - 1$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx - 1 = 0$ (*)

Thấy rằng (*) luôn có hai nghiệm phân biệt, nên hàm số đã cho luôn có CĐ, CT với mọi m.

Goi A; B là hai điểm cực trị của (C_m).

Chia y cho y′ ta viết được:

$$y = \frac{x-m}{3}y' + \frac{1}{3}\left[(-2m^2-2)x + 2m + 3\right]$$

$$\Rightarrow y_A = \frac{1}{3}\left[(-2m^2-2)x_A + 2m + 3\right];\ y_B = \frac{1}{3}\left[(-2m^2-2)x_B + 2m + 3\right].$$

Ta có: $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$

$$= (x_B - x_A)^2 + \left(\frac{1}{3}\left(-2m^2-2\right)\left(x_B - x_A\right)\right)^2$$

$$= \left(x_B - x_A\right)^2\left[1 + \frac{(2m^2+2)^2}{9}\right] = \left[\left(x_B + x_A\right)^2 - 4x_Ax_B\right]\left[1 + \frac{(2m^2+2)^2}{9}\right]$$

$$= \left[4m^2 + 4\right]\left[\frac{9 + (2m^2+2)^2}{9}\right] \geq 4.\frac{9+2^2}{9} = \frac{52}{9}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0.$

Vậy khi m = 0 thì hàm số có cực trị và khoảng cách giữa hai điểm cực trị nhỏ nhất.

Vấn đề 2 : Khảo sát hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ $(a \neq 0)$.

1. *a)* $y = 1 + 2x^2 - x^4$

* Tập xác định: D = R

* Giới hạn: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = -\infty$

* Sự biến thiên:

$$y' = 4x - 4x^3 = 4x(1 - x^2);\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \quad \Rightarrow y = 1 \\ x = \pm 1 \ \Rightarrow y = 2 \end{array}\right.$$

– Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		+	0	–	0	+	0	–	
y	$-\infty$	↗	2 CT	↘	1 CĐ	↗	2 CT	↘	$-\infty$

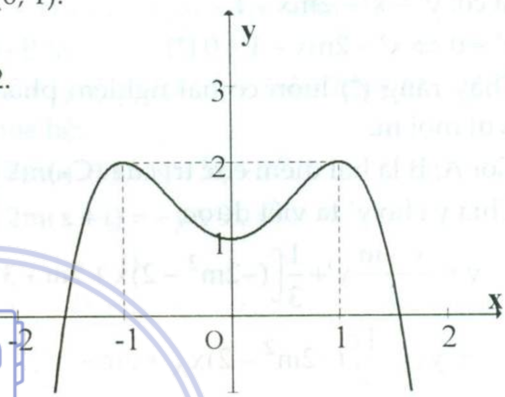
Hàm số nghịch biến trong $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$

Hàm số đồng biến trong $(-\infty, -1)$ và $(0; 1)$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, $y_{CT} = 1$;

Hàm số đạt cực đại tại $x = \pm 1$, $y_{CĐ} = 2$.

* Đồ thị:



b) $y = x^4 + 4x^2 - 1$

* Tập xác định: D = R

* Giới hạn: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = +\infty$

* Sự biến thiên:

– Chiều biến thiên: $y' = 4x^3 + 8x = 4x(x^2 + 2)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = -1$.

– Bảng biến thiên:

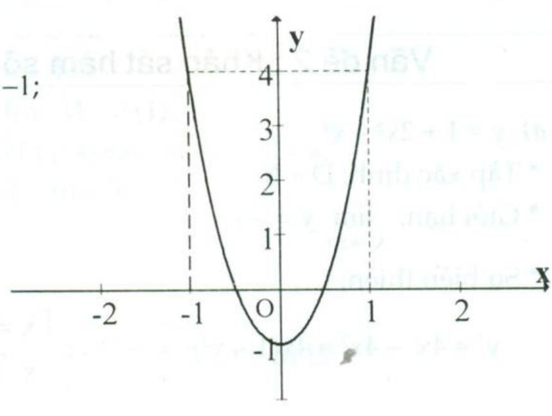
x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		–	0	+	
y	$+\infty$	↘	CĐ -1	↗	$+\infty$

Hàm số nghịch biến trong $(-\infty; 0)$.

Hàm số đồng biến trong $(0; +\infty)$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, $y_{CT} = -1$;

* Đồ thị:



c) $y = -x^4 - x^2 + 2$

* Tập xác định: D = R

* Giới hạn: $\lim_{x \to \pm\infty} y = -\infty$

* Sự biến thiên:

$y' = -4x^3 - 2x = -2x(2x^2 + 1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 2$.

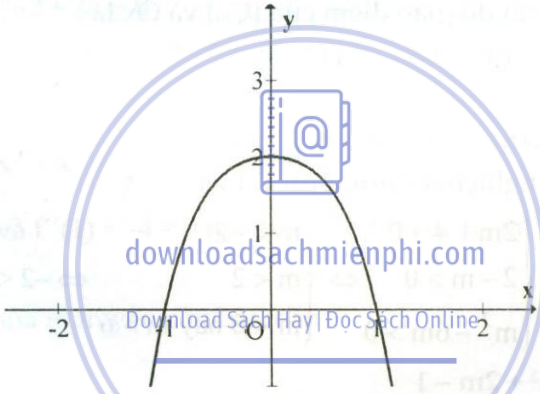
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		+	0	–	
y	$-\infty$	↗	2 CĐ	↘	$-\infty$

Hàm số đồng biến trong $(-\infty; 0)$; Hàm số nghịch biến trong $(0; +\infty)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CĐ} = 2$;

* Đồ thị:



d) $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1$

* Tập xác định: D = R

* Giới hạn: $\lim_{x \to \pm\infty} y = +\infty$

* Sự biến thiên:

$y' = x^3 - 4x = x(x^2 - 4)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \quad \Rightarrow y = 1 \\ x = \pm 2 \ \Rightarrow y = -3 \end{array}\right.$

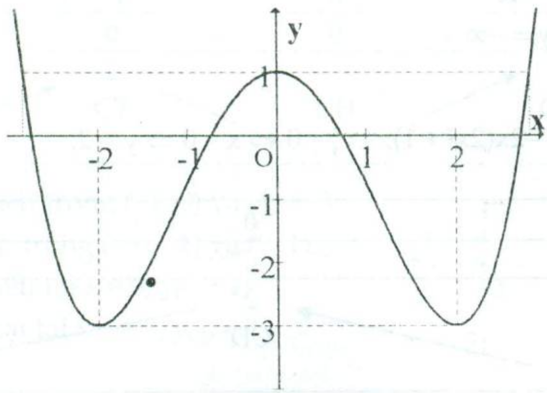
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		–	0	+	0	–	0	+	
y	$+\infty$	↘	CT -3	↗	1 CĐ	↘	CT -3	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trong $(-2; 0)$, $(2; +\infty)$; nghịch biến trong $(-\infty, -2)$, $(0; 2)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CĐ} = 1$; Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm 2$, $y_{CT} = -3$.

* Đồ thị:



2. $y = x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 6m \quad (C_m)$.

a) Tự giải.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và Ox là :

$$x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 5m = 0 \ (1)$$

Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$.

(1) trở thành $t^2 + 2(m-2)t + m^2 - 6m = 0$ (2).

YCBT $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm t dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 4 > 0 \\ 2 - m > 0 \\ m^2 - 6m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m < 2 \\ m < 0 \text{ hay } m > 6 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 0.$$

3. $y = (1-m)x^4 + mx^2 + 2m - 1$

a) Tập xác định: D = R

$y' = 4(1-m)x^3 + 2mx = 2x[2(1-m)x^2 + m]$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2(1-m)x^2 + m = 0 \qquad (1) \end{array}\right.$$

Hàm số có đúng một cực trị

$\Leftrightarrow$ $y' = 0$ có đúng một nghiệm

$\Leftrightarrow$ $-m(1-m) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 1$.

b) $y' = 2x[2(1-m)x^2 + m]$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$

$\Rightarrow y'(1) = 0 \Leftrightarrow 2(1-m) + m = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

Khi đó $y' = 2x\left[-2x^2 + 2\right] = -4x^3 + 4x$; $y'' = -12x^2 + 4$.

Ta có $y''(1) = -8 < 0$ nên tại $x = 1$ hàm số đạt cực đại.

Vậy $m = 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

4. $y = x^4 - 2mx^2 - m - 1$

a) Tự giải.

b) (C): $y = x^4 + 2x^2$; $y' = 4x^3 + 4x$.

Tiếp tuyến d // Δ nên hệ số góc k_d của d bằng hệ số góc k_Δ của $\Delta \Rightarrow k_d = -8$.

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm $\Rightarrow y'(x_0) = -8$

$$\Leftrightarrow 4x_0^3 + 4x_0 = -8 \Leftrightarrow (x_0 + 1)(x_0^2 - x_0 + 2) = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 3.$$

Vậy phương trình tiếp tuyến (d) là $y - 3 = -8(x + 1) \Leftrightarrow y = -8x - 5$.

5. $y = f(x) = -\dfrac{x^4}{2} + ax^2 + \dfrac{b}{2}$.

a) Ta có $y' = -2x^3 + 2ax$

Hàm số đạt cực trị bằng 2 khi x = 1

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 + 2a = 0 \\ 2 = -\dfrac{1}{2} + a + \dfrac{b}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}.$$

Khi đó $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^4 + x^2 + \dfrac{3}{2}$; $f'(x) = -2x^3 + 2x$; $f''(x) = -6x^2 + 2$.

Ta có: $f'(1) = 0$ và $f''(1) = -4 \neq 0$ nên hàm số đạt cực trị tại x = 1.

$f(1) = 2$

Vậy a = 1; b = 3 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Tự giải

c) Ta có (C): $y = -\dfrac{1}{2}x^4 + x^2 + \dfrac{3}{2}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox là

$$-\frac{1}{2}x^4 + x^2 + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}.$$

* Khi $x_0 = \sqrt{3} \Rightarrow y_0 = 0$ và $y'(\sqrt{3}) = -4\sqrt{3}$.

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) là:

$$y = -4\sqrt{3}(x - \sqrt{3}) = -4\sqrt{3}x + 12.$$

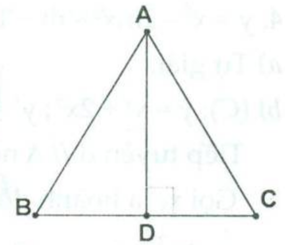
* Khi $x_0 = -\sqrt{3} \Rightarrow y_0 = 0$ và $y'(-\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) là:

$$y = 4\sqrt{3}(x + \sqrt{3}) = 4\sqrt{3}x + 12.$$

6. $y = x^4 + 2mx^2 + 1$ (C_m)

a) Tự giải.



b) Ta có: $y' = 4x^3 + 4mx = 4x(x^2 + m)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -m \end{array}\right.$.

Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow$ y' đổi dấu ba lần trên D

$\Leftrightarrow$ y' = 0 có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m < 0$.

Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là

$A(0; 1)$, $B(-\sqrt{-m}; 1 - m^2)$ và $C(\sqrt{-m}; 1 - m^2)$

Theo tính chất của đồ thị hàm bậc bốn trùng phương, ta có tam giác ABC cân tại A. Gọi D là trung điểm của BC thì D thuộc trục Oy.

Xét tam giác vuông ADC, ta có $\sin C = \dfrac{AD}{AC}$.

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC, áp dụng định lí sin trong tam giác ABC, ta có:

$$\frac{AB}{\sin C} = 2R \Leftrightarrow \frac{AB.AC}{AD} = 2 \Leftrightarrow \frac{AC^2}{AD} = 2$$

$$\Leftrightarrow -m + m^4 = 2m^2 \Leftrightarrow m^3 - 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow (m+1)(m^2 - m - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Xét điều kiện $m < 0$, ta chỉ nhận $m = -1$, $m = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

7. $y = x^4 + mx^2 - m - 1$ $\quad (C_m)$

a) Ta có $y = x^4 + mx^2 - m - 1 \Leftrightarrow (x^2 - 1)m + x^4 - 1 - y = 0$.

Tọa độ các điểm cố định của (C_m) thỏa hệ:

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x^2 - 1 - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Vậy (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định là $(1; 0)$ và $(-1; 0)$.

b) Ta có $A(1; 0)$. $y' = 4x^3 + 2mx$.

Phương trình tiếp tuyến của (C_m) tại A là:

d: $y = (4 + 2m)(x - 1) = (2m + 4)x - 2m - 4$.

Ta có: d song song với đường thẳng $y = -2x \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 4 = -2 \\ -2m - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -3$.

8. $y = (x - 1)^2(x - a)^2$ $\quad (C_a)$

a) Tự giải

b) Ta có: $y = (x^2 - 2x + 1)(x^2 - 2ax + a^2)$

$y' = (2x - 2)(x - a)^2 + (x - 1)^2(2x - 2a)$

$= 2(x - 1)(x - a)(x - a + x - 1) = 2(x - 1)(x - a)(2x - a - 1)$.

Vì y′ chỉ có thể đổi dấu đúng một lần hoặc đổi dấu đúng ba lần trên D nên ta có:

Đồ thị (C_a) của hàm số có điểm cực đại

$\Leftrightarrow$ y′ đổi dấu đúng ba lần trên D (do $y' > 0$ với $x \in (\alpha; +\infty)$ trong đó α là nghiệm lớn nhất của y′)

$\Leftrightarrow$ y′ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ \dfrac{a+1}{2} \neq 1 \\ \dfrac{a+1}{2} \neq a \end{cases} \Leftrightarrow a \neq 1.$

c) Xét đường thẳng cùng phương với trục tung là Δ: $x = \dfrac{a+1}{2}$ (Giá trị này chính là nghiệm của phương trình $y''' = 0$).

Gọi I là giao điểm của trục Ox và Δ. Ta có $I(\dfrac{a+1}{2}; 0)$.

Tịnh tiến hệ trục Oxy về hệ trục IXY theo vectơ $\overrightarrow{OI}$.

Công thức chuyển hệ trục là $\begin{cases} x = X + \dfrac{a+1}{2} \\ y = Y \end{cases}$

Đối với hệ trục IXY thì đồ thị (C_a) có phương trình là:

$$Y = \left(X + \frac{a+1}{2} - 1\right)^2 \left(X + \frac{a+1}{2} - a\right)^2 = \left[X^2 - \frac{(a-1)^2}{4}\right]^2 = F(X)$$

Ta có F có tập xác định là $D_F = R$.

Với mọi $X \in D_F$ thì $-X \in D_F$ và $F(-X) = F(X)$ $\Rightarrow$ F(X) là hàm số chẵn

$\Rightarrow$ (C_a) nhận IY làm trục đối xứng $\Rightarrow (\Delta): x = \dfrac{a+1}{2}$ là trục đối xứng của (C_a).

Vậy với mọi a thì (C_a) luôn có trục đối xứng cùng phương với Oy là

$(\Delta): x = \dfrac{a+1}{2}$.

9. $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$

a) Tập xác định: D = R;

$y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$.

Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$.

Khi đó ba điểm cực trị là:

$A(0; 2m + m^4)$, $B(-\sqrt{m}; 2m - m^2 + m^4)$ và $C(\sqrt{m}; 2m - m^2 + m^4)$.

Ta có: $AB^2 = AC^2 = m + m^4$ và $BC^2 = 4m$.

Do đó YCBT $\Leftrightarrow AB^2 = BC^2 \Leftrightarrow m + m^4 = 4m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \sqrt[3]{3} \end{array}\right.$.

So sánh điều kiện ta được $m = \sqrt[3]{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Tự giải.

10. $y = x^4 - 2(m + 1)x^2 + m$ (1). (B 2011)

a) Tự giải.

b) Tập xác định: $D = R$;

$y' = 4x^3 - 4(m + 1)x = 4x(x^2 - m - 1)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m + 1 \end{array}\right.$.

Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > -1$.

Khi đó ba điểm cực trị là:

$A(0; m)$, $B(-\sqrt{m+1}\,;\, m - (m+1)^2)$ và $C(\sqrt{m+1}\,;\, m - (m+1)^2)$.

Ta có: $AB^2 = AC^2 = m + 1 + (m + 1)^4$ và $BC^2 = 4(m + 1)$.

Do đó:

YCBT $\Leftrightarrow OA^2 = BC^2 \Leftrightarrow m^2 = 4(m + 1) \Leftrightarrow m = 2 \pm 2\sqrt{2}$.

So sánh điều kiện ta được $m = 2 \pm 2\sqrt{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

§7. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA MỘT SỐ HÀM PHÂN THỨC HỮU TỈ

Vấn đề 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số dạng $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ ($c \neq 0$ và $ad - bc \neq 0$)

1. *a)* $y = \dfrac{2x - 1}{x + 2}$

* Tập xác định: $D = R\backslash\{-2\}$.

* Giới hạn và tiệm cận:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} y = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{2x - 1}{x + 2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} y = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{2x - 1}{x + 2} = +\infty \end{array}\right. \Rightarrow x = -2 \text{ là tiệm cận đứng của đồ thị.}$$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x - 1}{x + 2} = 2 \Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

* Sự biến thiên :

$$y' = \frac{5}{(x+2)^2} > 0,\ \forall x \in D.$$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên các khoảng xác định.

Bảng biến thiên :

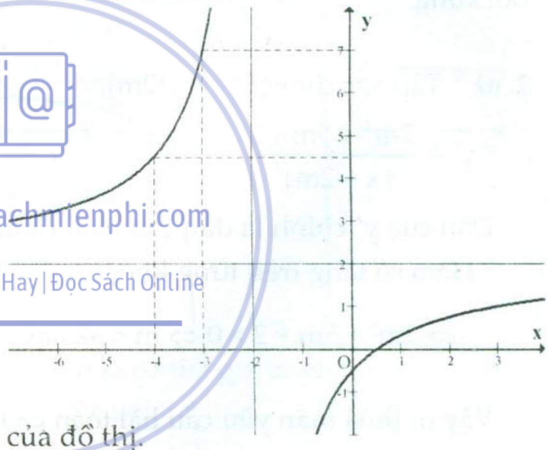
x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y'		+	‖	+	
y	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2

Hàm số không có cực trị.

* Giá trị đặc biệt :

x	-4	-3	-1	0
y	9/2	7	-3	$-1/2$

* Đồ thị :



Nhận xét: Đồ thị (C) nhận giao điểm I(–2; 3) của hai tiệm cận làm tâm đối xứng.

b) * Tập xác định: $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

* Giới hạn và tiệm cận:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} y = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} y = +\infty \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ là tiệm cận đứng của đồ thị.}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+3}{x-1} = 2 \Rightarrow y = 2 \text{ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.}$$

* Sự biến thiên: $y' = \dfrac{-5}{(x-1)^2} < 0,\ \forall x \in D$

$\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định.

Bảng biến thiên :

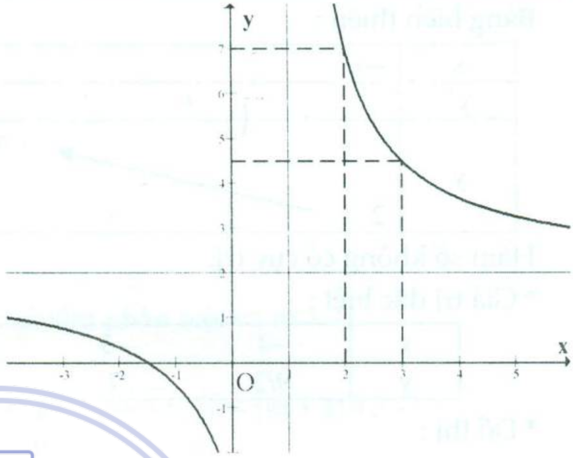
x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		–	‖	–	
y	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2

Hàm số không có cực trị.

* Giá trị đặc biệt :

x	-1	0	1	2	3
y	$-1/2$	-3	$\|\|$	7	$9/2$

* Đồ thị :



Nhận xét: Đồ thị (C) nhận giao điểm I(1; 2) của hai tiệm cận làm tâm đối xứng.

2. *a)* * Tập xác định: D = R \ {2m}.

* $y' = \dfrac{2m^2 + 5m + 2}{(x - 2m)^2}$.

Dấu của y′ chính là dấu của biểu thức $T = 2m^2 + 5m + 2$.

* Hàm số tăng trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow y' > 0$ với mọi $x \in D$

$\Leftrightarrow 2m^2 + 5m + 2 > 0 \Leftrightarrow m < -2$ hay $m > -\dfrac{1}{2}$.

Vậy m thỏa mãn yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m < -2$ hay $m > -\dfrac{1}{2}$.

b) Khi m = –1 thì (C): $y = \dfrac{x+3}{x+2}$.

* Tập xác định: D = R \ {–2}.

* Giới hạn và tiệm cận:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -2^-} y = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} y = +\infty \end{cases} \Rightarrow x = -2 \text{ là tiệm cận đứng của đồ thị.}$$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = 1 \Rightarrow y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

* Sự biến thiên : $y' = \dfrac{-1}{(x+2)^2} < 0,\ \forall x \in D \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định.

Bảng biến thiên:

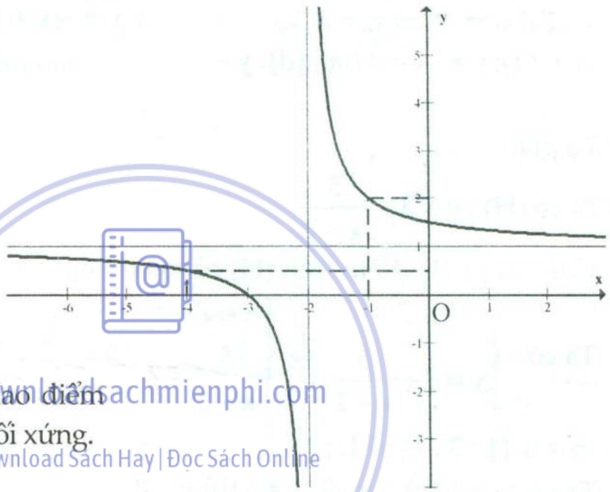
x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	1

Hàm số không có cực trị.

* Giá trị đặc biệt :

x	-4	-3	-1	0
y	$1/2$	0	2	$3/2$

* Đồ thị :



Nhận xét: Đồ thị (C) nhận giao điểm I(–2; 1) của hai tiệm cận làm tâm đối xứng.

c) Vì M, N lần lượt thuộc hai nhánh của (C) nên ta có thể giả thiết

$x_M = -2 - m,\ \ x_N = -2 + n$ với $m, n > 0$.

Ta có M, N $\in$ (C) : $y = \dfrac{x+3}{x+2} = 1 + \dfrac{1}{x+2}$ nên $y_M = 1 - \dfrac{1}{m}$; $y_N = 1 + \dfrac{1}{n}$.

Suy ra $MN^2 = (x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2 = (n+m)^2 + \left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}\right)^2$

$$= (m+n)^2\left(1 + \frac{1}{m^2n^2}\right) \ge \left(2\sqrt{mn}\right)^2\left(2\sqrt{\frac{1}{m^2n^2}}\right) = 8.$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow m = n$ và $\dfrac{1}{m^2n^2} = 1 \Leftrightarrow m = n = 1$.

Khi đó M(–3 ; 0) và N(–1 ; 2).

Vậy với M(–3 ; 0) và N(–1 ; 2) thì MN đạt giá trị nhỏ nhất và $\min MN = 2\sqrt{2}$.

d) Gọi $M(x_0; y_0) \in (C) \Rightarrow y_0 = \dfrac{x_0+3}{x_0+2}$.

Ta có:

* d tiếp xúc (C) tại M nên hệ số góc của d là $k_d = f'(x_0) = \dfrac{-1}{(x_0+2)^2}$.

* $\overrightarrow{IM} = (x_0+2; y_0-1)$ nên hệ số góc của đường thẳng IM là

$$k_{IM} = \frac{y_0-1}{x_0+2} = \frac{1}{(x_0+2)^2}.$$

$$(d) \perp (IM) \Leftrightarrow k_d.k_{IM} = -1 \Leftrightarrow (x_0+2)^4 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -3 \\ x_0 = -1 \end{array}\right.$$

➢ Khi $x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = 0$; $k_d = -1 \Rightarrow (d): y = -1(x+3) = -x-3$.

➢ Khi $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 2$; $k_d = -1 \Rightarrow (d): y = -(x+1)+2 = -x+1$.

Vậy (d): $y = -x-3$ hay (d): $y = -x+1$.

3.

a) Tự giải

b) Ta có (H) : $y = 3 + \dfrac{5}{x-2}$.

Gọi N(x ; y) là điểm trên (H) có tọa độ nguyên.

Ta có : $\begin{cases} x; y \in Z \\ y = 3 + \dfrac{5}{x-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in Z \\ \dfrac{5}{x-2} \in Z \end{cases} \Rightarrow x-2 \in \{\pm 1 ; \pm 5\}$

$\Rightarrow x \in \{1 ; 3 ; -3 ; 7\}$.

Ta có : x = 1 thì y = –2, x = 3 thì y = 8

x = –3 thì y = 2 x = 7 thì y = 4.

Vậy trên (H) có 4 điểm có tọa độ nguyên là (1; –2), (3; 8), (–3; 2) và (7; 4).

c) $M(x_0 ; y_0)$ thuộc (H) $\Leftrightarrow y_0 = 3 + \dfrac{5}{x_0-2}$.

(H) có tiệm cận đứng là $x = 2 \Leftrightarrow x-2 = 0$.

(H) có tiệm cận ngang là $y = 3 \Leftrightarrow y-3 = 0$.

Ta có : $d_1 = d(M ; TCĐ) = |x_0-2|$.

$$d_2 = d(M ; TCN) = |y_0-3| = \frac{5}{|x_0-2|}.$$

Do đó $d_1.d_2 = |x_0-2|.\dfrac{5}{|x_0-2|} = 5$.

Vậy tích các khoảng cách từ M đến hai tiệm cận là hằng số.

4. *a)* Tự giải.

b) Gọi M(x; y) thuộc (C) những điểm cách đều hai trục tọa độ.

Ta có: $\begin{cases} d(M;Ox) = d(M;Oy) \\ y = \dfrac{x+2}{2x-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |y| = |x| & (1) \\ y = \dfrac{x+2}{2x-2} & (2) \end{cases}$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$\left|\frac{x+2}{2x-2}\right| = |x| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2 = x(2x-2) \\ x+2 = -x(2x-2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2 - 3x - 2 = 0 \\ x^2 - x + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{2} \\ x = 2 \end{array}\right..$$

Thay vào (2) ta được:

* $x = -\dfrac{1}{2}$ thì $y = -\dfrac{1}{2}$ * $x = 2$ thì $y = 2$.

Vậy $M(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2})$ hay M(2; 2) thỏa mãn yêu cầu bài toán.

c) Gọi d là tiếp tuyến của (C) tại $(x_0; y_0)$.

Ta có: (d) // (Δ) nên ta có:

$$k_d = k_\Delta \Rightarrow \frac{-6}{(2x_0-2)^2} = -\frac{3}{2}$$

$\Leftrightarrow (2x_0 - 2)^2 = 4 \Leftrightarrow x_0 - 1 = \pm 1 \Leftrightarrow x_0 = 2$ hay $x_0 = 0$.

– Khi $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 2 \Rightarrow$ (d): $y = -\dfrac{3}{2}(x-1) + 2 = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{7}{2}$.

– Khi $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -1 \Rightarrow$ (d): $y = -\dfrac{3}{2}(x-0) - 1 = -\dfrac{3}{2}x - 1$.

Vậy có 2 tiếp tuyến của (C) thỏa bài toán là:

d_1: $y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{7}{2}$ và d_2: $y = -\dfrac{3}{2}x - 1$.

5. $y = \dfrac{x+1}{x-3}$

a), b) Tự giải.

c) Gọi $M(x; y) \in (C) \Rightarrow y = \dfrac{x+1}{x-3} = 1 + \dfrac{4}{x-3}$.

(C) có tiệm cận đứng là $x = 3 \Leftrightarrow x - 3 = 0$.

(C) có tiệm cận ngang là $y = 1 \Leftrightarrow y - 1 = 0$.

Ta có : $d_1 = d(M\,;\,TCĐ) = |x_0 - 3|$.

$d_2 = d(M\,;\,TCN) = |y_0 - 1| = \dfrac{4}{|x_0 - 3|}$.

Mà khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng bằng bốn lần khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang

$\Rightarrow |x_0 - 3| = \dfrac{16}{|x_0 - 3|} \Leftrightarrow (x_0 - 3)^2 = 16 \Leftrightarrow x_0 - 3 = \pm 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 7 \\ x_0 = -1 \end{array}\right.$.

Khi $x_0 = 7 \Rightarrow y_0 = 2$; Khi $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 0$.

Vậy M(–1; 0) hay M(7; 2).

6. $y = \dfrac{x+2}{2x+3}$ (1) (Khối A – 2009)

a. Tự giải.

b. Gọi d là tiếp tuyến cần tìm và x_0 là hoành độ của tiếp điểm giữa (d) và đồ thị hàm số (1).

Theo giả thiết ta có Δ OAB vuông cân tại O nên d có hệ số góc là k = ± 1 và (d) không qua O.

Mà $k = f'(x_0) = \dfrac{-1}{(2x_0+3)^2} < 0$.

Do đó ta có: $\dfrac{-1}{(2x_0+3)^2} = -1 \Leftrightarrow 2x_0 + 3 = \pm 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ x_0 = -2 \end{array}\right.$.

* Khi $x_0 = -1$ thì $y_0 = 1$ nên (d): $y = -1(x + 1) + 1 = -x$ (loại)

* Khi $x_0 = -2$ thì $y_0 = 0$ nên (d): $y = -1(x + 2) = -x - 2$ (nhận).

Vậy có một tiếp tuyến thỏa mãn bài toán là (d): $y = -x - 2$.

Vấn đề 2 : Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số dạng $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$

1. $y = \dfrac{x^2 - 2mx + 3m^2 - 3}{x - 2m}$

a) Tập xác định : D = R \ {2m}.

$y' = \dfrac{x^2 - 4mx + m^2 + 3}{(x-2m)^2}$. Dấu y′ là dấu của $g(x) = x^2 - 4mx + m^2 + 3$.

Hàm số đồng biến trên các khoảng xác định

$\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in D$

$\Leftrightarrow g(x) \geq 0, \forall x \in R$

$\Leftrightarrow \Delta' \leq 0$ (do a = 1 > 0)

$\Leftrightarrow 3m^2 - 3 \leq 0$

$\Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1$.

b) Tự giải.

2. $y = \dfrac{x^2 - x - 1}{2 - x}$

a) Tự giải.

b) Ta có $y = -x - 1 - \dfrac{1}{x-2}$.

Gọi $N(x\,;y) \in (C)$ có tọa độ nguyên. Ta có :

$$\begin{cases} x; y \in Z \\ y = -x - 1 - \dfrac{1}{x-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in Z \\ \dfrac{1}{x-2} \in Z \end{cases} \Rightarrow x - 2 \in \{\pm 1\} \Rightarrow x \in \{3; 1\}$$

Với x = 3 ta có y = –5 ; Với x = 1 ta có y = –1.

Vậy N(3 ; –5) hay N(1 ; –1) là các điểm nguyên của (C).

c) Tìm điểm trên (C) cách đều hai trục tọa độ.

Ta có: $M(x\,;y) \in (C)$ cách đều hai trục tọa độ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |y| = |x| \\ y = \dfrac{x^2 - x - 1}{2 - x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x = \dfrac{x^2 - x - 1}{2 - x} \end{cases} \text{hay} \begin{cases} y = -x \\ -x = \dfrac{x^2 - x - 1}{2 - x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 2x - x^2 = x^2 - x - 1 \end{cases} \text{hay} \begin{cases} y = -x \\ -2x + x^2 = x^2 - x - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 2x^2 - 3x - 1 = 0 \end{cases} \text{hay} \begin{cases} y = -x \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x = \dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{4} \end{cases} \text{hay} \begin{cases} y = -x \\ x = 1 \end{cases}.$$

Vậy $M\left(\dfrac{3-\sqrt{17}}{4}; \dfrac{3-\sqrt{17}}{4}\right)$ hay $M\left(\dfrac{3+\sqrt{17}}{4}; \dfrac{3+\sqrt{17}}{4}\right)$ hay M(1 ; –1).

3. $y = \dfrac{x^2 + (2m+3)x + m^2 + 4m}{x + m}$ (H_m)

a) Tự giải

b) Tập xác định: $D = R \setminus \{-m\}$.

$y' = \dfrac{x^2 + 2mx + m^2 - m}{(x+m)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow g(x) = x^2 + 2mx + m^2 - m = 0$ (1)

Hàm số có CĐ, CT ⇔ (1) có hai nghiệm phân biệt khác –m.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(-m) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0.$$

Khi đó tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} y = \dfrac{u}{v} \\ y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{u}{v} = \frac{u'}{v'} = 2x + 2m + 3.$$

Suy ra $y_{CT} = 2x_{CT} + 2m + 3$ và $y_{CĐ} = 2x_{CĐ} + 2m + 3$.

Do đó: YCBT $\Leftrightarrow y_{CT}.y_{CĐ} < 0 \Leftrightarrow (2x_{CT} + 2m + 3)(2x_{CT} + 2m + 3) < 0$

$\Leftrightarrow 4x_{CT}x_{CĐ} + (4m + 6)(x_{CT} + x_{CĐ}) + (2m + 3)^2 < 0$

$\Leftrightarrow 4(m^2 - m) + (4m + 6)(-2m) + 4m^2 + 12m + 9 < 0$

$\Leftrightarrow -4m + 9 < 0 \Leftrightarrow m > 9/4$ (thỏa điều kiện).

Vậy m thỏa mãn yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m > \dfrac{9}{4}$.

4. $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.

a) Tự giải.

b) Ta có $y = x + \dfrac{1}{x - 1}$.

Vì A, B lần lượt thuộc hai nhánh của (C) nên ta có thể giả thiết

$x_A = 1 - a$, $x_B = 1 + b$ (với a, b > 0).

Ta có $y_A = 1 - a - \dfrac{1}{a}$ và $y_B = 1 + b + \dfrac{1}{b}$.

Suy ra: $AB^2 = (b + a)^2 + (a + b + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{a})^2$

$$= (b + a)^2\left[1 + \left(1 + \frac{1}{ab}\right)^2\right]$$

$$= (b + a)^2\left(2 + \frac{1}{a^2b^2} + \frac{2}{ab}\right) \geq \left(2\sqrt{ab}\right)^2\left(2\sqrt{2.\frac{1}{a^2b^2}} + \frac{2}{ab}\right) = 8\left(\sqrt{2} + 1\right).$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$ và $\dfrac{1}{a^2b^2} = 1 \Leftrightarrow a = b = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

Vậy khi $A\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}; 1 - \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} - \sqrt[4]{2}\right)$, $B\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}; 1 + \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} + \sqrt[4]{2}\right)$ thì AB đạt giá trị nhỏ nhất và ta có MinAB $= \sqrt{8(\sqrt{2} + 1)}$.

5. $y = \dfrac{x^2 - (m + 1)x - m^2 + 4m - 2}{x - 1}$.

a) Tập xác định: $D = R\backslash\{1\}$.

$$y' = \frac{x^2 - 2x + m^2 - 3m + 3}{(x-1)^2}$$

$y' = 0 \Leftrightarrow g(x) = x^2 - 2x + m^2 - 3m + 3 = 0$ (1)

Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 3m - 2 > 0 \\ m^2 - 3m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 2.$$

Tọa độ điểm cực trị thỏa hệ

$$\begin{cases} y = \dfrac{u}{v} \\ y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{u}{v} = \frac{u'}{v'} = 2x - 2.$$

Suy ra $y_{CĐ} = 2x_{CĐ} - 2$ và $y_{CT} = 2x_{CT} - 2$.

Do đó $y_{CĐ}.y_{CT} = (2x_{CĐ} - 2)(2x_{CT} - 2)$

$= 4x_{CĐ}.x_{CT} - 4(x_{CĐ} + x_{CT}) + 4$

$= 4(m^2 - 3m + 3) - 4.2 + 4 = 4m^2 - 12m + 8$

$= (2m - 3)^2 - 1 \geq -1.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$ (thỏa điều kiện).

Vậy với $m = \frac{3}{2}$ thì tích các giá trị cực trị đạt giá trị nhỏ nhất và $\text{Min}(y_{CĐ}.y_{CT}) = -1$.

b) Tự giải

c) Đáp số có 4 điểm trên (C) có tọa độ nguyên là: (2; 0), (0; 2), (3; 2), (–1; 0).

6. $y = \dfrac{x^2 + (m+1)x - m + 1}{x - m}$.

a) Tự giải

b) Ta có (C): $y = \dfrac{x^2 + 3x - 1}{x - 2} = x + 5 + \dfrac{9}{x - 2}$.

(C) có tiệm cận là d_1: $x - 2 = 0$ và tiệm cận xiên là d_2: $y = x + 5$.

Suy ra: Khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng là $d(M; d_1) = |x - 2|$.

Khoảng cách từ M đến tiệm cận xiên là

$$d(M; d_2) = \frac{|x - y + 5|}{\sqrt{2}} = \frac{9}{\sqrt{2}|x-2|}.$$

Do đó $d(M; d_1).d(M; d_2) = |x - 2|.\dfrac{9}{\sqrt{2}|x - 2|} = \dfrac{9}{\sqrt{2}}$ là hằng số.

c) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$y' = \dfrac{x^2 - 2mx - m^2 - 1}{(x-m)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow g(x) = x^2 - 2mx - m^2 - 1 = 0$

Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác m

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(m) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 + 1 > 0 \\ -2m^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall\, m \in R.$$

Khi đó ta có $y_{CĐ} = 2x_{CĐ} + m + 1$ và $y_{CT} = 2x_{CT} + m + 1$.

Suy ra: $y_{CĐ}$, y_{CT} cùng dấu $\Leftrightarrow y_{CĐ}.y_{CT} > 0$

$\Leftrightarrow 4x_{CĐ}x_{CT} + 2(m+1)(x_{CĐ} + x_{CT}) + (m+1)^2 > 0$

$\Leftrightarrow 4(-m^2 - 1) + 2(m+1).2m + m^2 + 2m + 1 > 0$

$\Leftrightarrow m^2 + 6m - 3 > 0$

$\Leftrightarrow m < -3 - 2\sqrt{3}$ hay $m > -3 + 2\sqrt{3}$.

Vậy m thỏa mãn yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m < -3 - 2\sqrt{3}$ hay $m > -3 + 2\sqrt{3}$.

7. $y = x - \dfrac{1}{x+1}$

a) Tự giải.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng (d): y = m là:

$$x - \frac{1}{x+1} = m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ g(x) = x^2 + (1-m)x - 1 - m = 0\ (1) \end{cases}$$

(C) cắt (d) tại hai điểm A, B

$\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác –1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ g(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-m)^2 - 4(-1-m) > 0 \\ 1 - (1-m) - 1 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m + 5 > 0 \\ -1 \neq 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \forall\, m \in R.$

Khi đó ta có $A(x_A; m)$ và $B(x_B; m) \Rightarrow \overrightarrow{OA} = (x_A; m)$ và $\overrightarrow{OB} = (x_B; m)$.

Do đó: $OA \perp OB \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow x_Ax_B + m^2 = 0$

$$\Leftrightarrow -1 - m + m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

8. $y = \dfrac{x^2 - (m+1)x + 4m^2 - 4m}{x - m + 1}$

a) Tự giải.

b) Tập xác định: $D = R \setminus \{m - 1\}$.

$$y' = \frac{x^2 + 2(1-m)x - 3m^2 + 4m - 1}{(x - m + 1)^2}$$

Dấu y′ là dấu của $g(x) = x^2 + 2(1 - m)x - 3m^2 + 4m - 1$.

Hàm số xác định và luôn tăng trong khoảng $(0, +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 \notin (0; +\infty) \\ y' \geq 0, \forall x \in (0; +\infty) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ g(x) = x^2 + 2(1-m)x - 3m^2 + 4m - 1 \geq 0, \forall x > 0 \end{cases}$$

Ta có $\Delta'_g = 4m^2 - 6m + 2$

* $\Delta'_g \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq m \leq 1$ thì $g(x) \geq 0\ \forall x \in R$ nên $\frac{1}{2} \leq m \leq 1$ (nhận)

* $\Delta'_g > 0$ thì g(x) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
g(x)		+	0	−	0	+	

Do đó YCBT $\Leftrightarrow x_1 < x_2 \leq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_g > 0 \\ S < 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{2} \text{ hay } m > 1 \\ m - 1 < 0 \\ -3m^2 + 4m - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \leq m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq m < \frac{1}{2}.$$

Vậy m thỏa mãn yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq m \leq 1$.

9. $y = \frac{x^2 + mx - 1}{x - 1}$.

a) Tự giải.

b) Ta có $y = x + m + 1 + \frac{m}{x - 1}$.

Suy ra $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [y - (x + m + 1)] = 0$ nên đồ thị có tiệm cận xiên là:

(d): $y = x + m + 1$.

Ta có: $A = (d) \cap Ox \Rightarrow A(-m - 1; 0)$

$B = (d) \cap Oy \Rightarrow B(0; m + 1)$.

Do đó $S_{OAB} = 18 \Leftrightarrow OA.OB = 36 \Leftrightarrow |-m - 1|.|m + 1| = 36$

$\Leftrightarrow |m + 1| = 6 \Leftrightarrow m = 5$ hay $m = -7$.

Vậy m = 5 hay m = −7 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

§8. MỘT SỐ BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP VỀ ĐỒ THỊ

Vấn đề 1: Sự tương giao của hai đồ thị

1. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$. (Khối D –2011)

a. Tự giải

b. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là:

$$\frac{2x+1}{x+1} = kx + 2k + 1$$

$\Leftrightarrow 2x + 1 = kx^2 + kx + 2kx + 2k + x + 1 \ (x \neq -1)$

$\Leftrightarrow g(x) = kx^2 + (3k - 1)x + 2k = 0 \ \ (1)$

(C) cắt (d) tại 2 điểm phân biệt A, B $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt x_A, x_B khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta = k^2 - 6k + 1 > 0 \\ g(-1) = 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow k < 3 - 2\sqrt{2} \text{ hay } k > 3 + 2\sqrt{2} \text{ và } k \neq 0.$$

Khi đó: $y_A = kx_A + 2k + 1$ và $y_B = kx_B + 2k + 1$ và $x_A + x_B = \dfrac{-3k+1}{k}$.

Do đó: $d(A; Ox) = d(B; Oy)$

$$\Leftrightarrow |y_A| = |y_B| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} kx_A + 2k + 1 = kx_B + 2k + 1 \\ kx_A + 2k + 1 = -kx_B - 2k - 1 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow k(x_A + x_B) + 4k + 2 = 0$ (Do $x_A \neq x_B$).

$\Leftrightarrow k.\dfrac{-3k+1}{k} + 4k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = -3$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy thỏa mãn yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow k = 3$.

2. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$. (Khối B – 2010)

a. Tự giải.

b. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là:

$$\frac{2x+1}{x+1} = -2x + m$$

$\Leftrightarrow 2x + 1 = -2x^2 - 2x + mx + m \ \ (x \neq -1)$

$\Leftrightarrow g(x) = 2x^2 - (m - 4)x + 1 - m = 0 \ \ (1)$

(C) cắt (d) tại 2 điểm phân biệt A, B

$\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt x_A, x_B khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 + 16 > 0 \\ g(-1) = -2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall\, m \in R.$$

Khi đó: $y_A = -2x_A + m$ và $y_B = -2x_B + m$ và

$$x_A + x_B = \frac{m-4}{2};\ x_A x_B = \frac{1-m}{2}.$$

Ta có: $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = 5(x_B - x_A)^2$.

$$= 5[(x_A + x_B)^2 - 4x_Ax_B] = 5\left[\left(\frac{m-4}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{1-m}{2}\right)\right] = \frac{5}{4}(m^2+8).$$

(d): $2x + y - m = 0 \Rightarrow d(O; (d)) = \dfrac{|m|}{\sqrt{5}}$.

Do đó: $S_{OAB} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}.AB.d(O;(d)) = \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow AB^2.[d(O;(d))]^2 = 12 \Leftrightarrow \dfrac{5(m^2+8)}{4}.\dfrac{m^2}{5} = 12$

$\Leftrightarrow m^4 + 8m^2 - 48 = 0$

$\Leftrightarrow m^2 = 4$ hay $m^2 = -12 \Leftrightarrow m = \pm 2$ (nhận).

Vậy m thỏa mãn yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m = \pm 2$.

3. *a)* Tự giải.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là :

$$\frac{x^2+x+1}{x+1} = m + \frac{3}{4}x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x^2 + x + 1 = (m + \frac{3}{4}x)(x+1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ 4x^2 + 4x + 4 = 4mx + 3x^2 + 4m + 3x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ g(x) = x^2 + (1-4m)x + 4 - 4m = 0 \quad (1) \end{cases}$$

(d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ g(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16m^2 + 8m - 15 > 0 \\ 4 \neq 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow m < -\dfrac{5}{4}$ hay $m > \dfrac{3}{4}$.

4. Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và Ox là :

$x^3 + mx^2 - (2m-1)x + m - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)[x^2 + (1+m)x - m + 2] = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ g(x) = x^2 + (1+m)x - m + 2 = 0 \qquad (*) \end{array}\right.$$

YCBT $\Leftrightarrow$ (*) có 2 nghiệm dương phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ g(1) \neq 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 6m - 7 > 0 \\ 4 \neq 0 \\ -m - 1 > 0 \\ -m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -7 \text{ hay } m > 1 \\ m < -1 \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow m < -7.$$

Vậy m thỏa mãn yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m < -7$.

5. Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và Ox là :

$4x^3 - 3(2m + 4)x^2 + 2(m^2 + 8m + 4)x - 2m(2m + 4) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)[4x^2 - 2(3m + 2)x + 2m^2 + 4m] = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ g(x) = 4x^2 - 2(3m+2)x + 2m^2 + 4m = 0 \qquad (*) \end{array}\right.$$

YCBT $\Leftrightarrow$ (*) có 2 nghiệm phân biệt lớn hơn 1 và khác 2.

Đặt $t = x - 1$. Ta có (*) trở thành

$4(t + 1)^2 - 2(3m + 2)(t + 1) + 2m^2 + 4m = 0$

$\Leftrightarrow h(t) = 4t^2 - (6m - 4)t + 2m^2 - 2m = 0$ (**)

Do đó YCBT $\Leftrightarrow$ (**) có hai nghiệm dương t_1, t_2 phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ h(1) \neq 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m + 4 > 0 \\ 2m^2 - 8m + 8 \neq 0 \\ 6m - 4 > 0 \\ 2m^2 - 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m > 2/3 \\ m < 0 \text{ hay } m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \neq 2 \end{cases}.$$

6. $y = -x^4 + mx^2 - m + 1 \quad (C_m)$

a) Tập xác định D = R

$y' = -4x^3 + 2mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $2x^2 = m$.

Biện luận :

* $m \leq 0$: Hàm số không có cực trị

* $m > 0$: Hàm số có ba cực trị.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và Ox là :

$-x^4 + mx^2 - m + 1 = 0 \quad (1)$

Đặt $t = x^2$; $t \geq 0$. Phương trình (1) trở thành

$t^2 - mt + m - 1 = 0 \quad (2)$

Ta có (2) $\Leftrightarrow t = 1$ hay $t = m - 1$.

(1) có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm dương phân biệt $t_1 < t_2$.

$\Leftrightarrow m - 1 > 0$ và $m - 1 \neq 1 \Leftrightarrow m > 1$ và $m \neq 2$.

Khi đó 4 nghiệm của (1) là : $-\sqrt{t_2} < -\sqrt{t_1} < \sqrt{t_1} < \sqrt{t_2}$.

Do đó 4 nghiệm của (1) lập thành cấp số cộng

$$\Leftrightarrow \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-1 = 9.1 \\ 1 = 9(m-1) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow m = 10 \text{ hay } m = \frac{10}{9} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy m thỏa mãn yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m = 10$ hay $m = \dfrac{10}{9}$.

7. Cho (C): $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.

Đường thẳng (d) qua A(3, 0) và có hệ số góc m $\Rightarrow$ (d): y = m(x – 3)

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là:

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = mx - 3m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - 2x + 2 = (mx - 3m)(x - 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ g(x) = (m-1)x^2 - (4m-2)x + 3m - 2 = 0 \, (1) \end{cases}$$

Ta có: (d) và (C) có 2 giao điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m^2 + m - 1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m < \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ hay } m > \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ và } m \neq 1.$$

8. Cho (C) : y = $(x - 1)^2(4 - x)$.

a) Ta có: I là giao điểm của (C) và Oy nên I(0; 4).

(d) qua I và có hệ số góc k nên (d): y = kx + 4.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là:

$$(x-1)^2(4-x) = kx + 4 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1)(4 - x) = kx + 4$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + (k+9)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ g(x) = x^2 + 6x + k + 9 = 0 \, (1) \end{array}\right.$$

(C) cắt (d) tại ba điểm phân biệt I, A, B

$\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(0) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -k > 0 \\ k + 9 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k < 0 \\ k \neq -9 \end{cases}.$$

9. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 5x + 7}{2 - x}$

a) Tự giải.

b) Gọi M(x; y) ∈ (C) cách đều hai trục tọa độ.

Ta có:

$$\begin{cases} |y| = |x| \\ y = \dfrac{x^2 + 5x + 7}{2 - x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x = \dfrac{x^2 + 5x + 7}{2 - x} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} y = -x \\ -x = \dfrac{x^2 + 5x + 7}{2 - x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 2x^2 + 3x + 7 = 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} y = -x \\ 7x + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}. \text{ Vậy } M(-1; 1).$$

c) Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là:

$$\frac{x^2 + 5x + 7}{2 - x} = 3x + m$$

$\Leftrightarrow x^2 + 5x + 7 = (3x + m)(2 - x)$

(vì x = 1 không là nghiệm của phương trình)

$\Leftrightarrow 4x^2 + (m - 1)x + 7 - 2m = 0$ (1)

Ta có: $\Delta = m^2 - 2m + 1 - 56 + 16m = m^2 + 14m - 55$

* $-7 - 2\sqrt{26} < m < -7 + 2\sqrt{26}$: (1) vô nghiệm nên (C) và (d) không có giao điểm.

* $m = -7 \pm 2\sqrt{26}$: (1) có 1 nghiệm nên (C) và (d) có một giao điểm.

* $m < -7 - 2\sqrt{26}$ hay $m > -7 + 2\sqrt{26}$: (1) có 2 nghiệm phân biệt nên (C) và (d) có 2 giao điểm.

Vấn đề 2 : Điều kiện tiếp xúc của hai đường

1. Ta có $f'(x) = -6x + 4$, $g'(x) = 3x^2 - 6x + 1$ và $h'(x) = -2x + 8$.

Ta có : $\begin{cases} f(-1) = g(-1) = -3 \\ f'(-1) = g'(-1) = 10 \end{cases} \Rightarrow$ Đồ thị của f và g tiếp xúc nhau tại A.

$\begin{cases} g(-1) = h(-1) = -3 \\ g'(-1) = h'(-1) = 10 \end{cases} \Rightarrow$ Đồ thị của g và h tiếp xúc nhau tại A.

$\begin{cases} f(-1) = h(-1) = -3 \\ f'(-1) = h'(-1) = 10 \end{cases} \Rightarrow$ Đồ thị của f và h tiếp xúc nhau tại A.

Vậy ba đồ thị của ba hàm số trên tiếp xúc nhau tại A.

2. $y = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 2}$

a) Tự giải

b) Ta có (C) tiếp xúc nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-3x+3}{x-2} = -3x+m \\ \dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2} = -3 \end{cases}$ có nghiệm

$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{x^2-3x+3}{x-2} + 3x \\ 4x^2 - 16x + 15 = 0 \end{cases}$ có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{2} \\ m = 11 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ m = 3 \end{cases}$.

Vậy m = 11 hay m = 3 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

3. $y = \dfrac{(m-1)x+m}{x-m}$ $(m \neq 0)$

a) Gọi M(x ; y) là điểm cố định của (C_m)

$\Leftrightarrow y = \dfrac{(m-1)x+m}{x-m}$, $\forall\, m \neq 0$.

$\Leftrightarrow yx - ym = xm - x + m;\ \forall\, m \neq 0$ và $m \neq x$.

$\Leftrightarrow (x+y+1)m - x - xy = 0,\ \forall\, m \neq 0$ và $m \neq x$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1 = 0 \\ x(y+1) = 0 \\ x \neq m, m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$

Vậy với mọi m ≠ 0 thì (C_m) qua điểm cố định M(0; –1).

Ta có $y' = \dfrac{-m^2}{(x-m)^2}$, $y'(0) = -1$.

Suy ra tiếp tuyến của (C_m) tại M là $\Delta : y = y'(0)(x-0) - 1 = -x - 1$.

Vậy với mọi m ≠ 0 thì các đồ thị (C_m) luôn tiếp xúc với (Δ) : y = –x – 1 cố định tại điểm M cố định. Do đó các đồ thị (C_m) luôn tiếp xúc nhau tại M cố định.

b) Tự giải.

4. *a)* (C) tiếp xúc (d) $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x-3}{x+2} = x+m & (1) \\ \dfrac{9}{(x+2)^2} = 1 & (2) \end{cases}$ có nghiệm.

Ta có: (2) $\Leftrightarrow x + 2 = \pm 3 \Leftrightarrow x = 1$ hay $x = -5$.

Với x = 1 thì (1) ⇒ m = –1;

Với x = –5 thì (1) ⇒ m = 11.

Vậy (C) tiếp xúc (d) ⇔ m = –1 hay m = 11.

b) $y = 4x^3 + (m-3)x + 1$ tiếp xúc với đường thẳng (d): $y = m(2x-1) + 2$

(C) tiếp xúc (d) $\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 + (m-3)x + 1 = m(2x-1) + 2 \\ 12x^2 + m - 3 = 2m \end{cases}$ có nghiệm.

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - (m+3)x + m - 1 = 0 & (1) \\ 12x^2 - 3 = m & (2) \end{cases}$ có nghiệm.

Thay (2) vào (1) ta được:

$4x^3 - (12x^2)x + (12x^2 - 3) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow -8x^3 + 12x^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2 - x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hay $x = -\dfrac{1}{2}$.

Với $x = 1$ thì (2) $\Rightarrow m = 9$; Với $x = -\dfrac{1}{2}$ thì (2) $\Rightarrow m = 0$.

Vậy (C) tiếp xúc (d) $\Leftrightarrow m = 9$ hay $m = 0$.

c) (C) tiếp xúc trục Ox $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2 - mx + 1}{x+1} = 0 \\ \dfrac{x^2 + 2x - m - 1}{(x+1)^2} \end{cases}$ có nghiệm.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - mx + 1 = 0 & (1) \\ x^2 + 2x - m - 1 = 0 & (2) \\ x \neq -1 \end{cases}$ có nghiệm.

Từ (2) $\Rightarrow m = x^2 + 2x - 1$ (3). Thay vào (1) ta được:

$x^2 - x(x^2 + 2x - 1) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^3 + x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (vì $x \neq -1$)

Với $x = 1$ thay vào (3) ta được $m = 2$.

Vậy (C) tiếp xúc Ox $\Leftrightarrow m = 2$.

d) (C) tiếp xúc trục (d) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + mx - 4 + m = 5x - 3 & (1) \\ 3x^2 - 6x + m = 5 & (2) \end{cases}$ có nghiệm

Từ (2) $\Rightarrow m = -3x^2 + 6x + 5$ (3). Thay vào (1) ta được:

$x^3 - 3x^2 + x(-3x^2 + 6x + 5) - 1 - 3x^2 + 6x + 5 - 5x = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^3 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hay $x = 2$.

Với $x = -1$ thay vào (3) ta được $m = -4$.

Với $x = 2$ thay vào (3) ta được $m = 5$.

Vậy (C) tiếp xúc (d) $\Leftrightarrow m = -4$ hay $m = 5$.

Vấn đề 3: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C): y = f(x)

1. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x = \dfrac{6x}{x+2} \\ 2x + 3 = \dfrac{12}{(x+2)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + 3x)(x+2) = 6x \\ (2x+3)(x+2)^2 = 12 \\ x \neq -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 5x^2 = 0 \\ (2x+3)(x+2)^2 = 12 \\ x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy hai đồ thị trên tiếp xúc nhau. Tọa độ tiếp điểm là M(0 ; 0).

Tiếp tuyến chung của hai đồ thị là tiếp tuyến của đồ thị hàm số f(x) tại M có phương trình là :

$y = f'(0)(x - 0) + f(0) = 3x.$

2. $y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$

a) Tự giải.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (P) là :

$2x^3 - 3x^2 + 1 = x^2 + 1 \Leftrightarrow 2x^3 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = 2.$

Khi $x = 0 \Rightarrow y = 1$; Khi $x = 2 \Rightarrow y = 5.$

Vậy (C) và (P) có 2 giao điểm là A(0; 1) và B(2; 5).

c) Ta có: $f'(x) = 6x^2 - 6x$; $g'(x) = 2x.$

* Tại A :

+ Phương trình tiếp tuyến của (C) là: $y = f'(0)(x - 0) + 1 = 1.$

+ Phương trình tiếp tuyến của (P) là: $y = g'(0)(x - 0) + 1 = 1.$

* Tại B :

+ Phương trình tiếp tuyến của (C) là :

$y = f'(2)(x-2) + 5 = 12(x - 2) + 5 = 12x - 19.$

+ Phương trình tiếp tuyến của (P) là:

$y = g'(2)(x-2) + 5 = 4(x - 2) + 5 = 4x - 3.$

3. Ta có: $y' = \dfrac{-1}{(x-1)^2}.$

Tiếp tuyến (d) song song với $(\Delta) \Rightarrow$ (d): $y = -4x + b$ $(b \neq 3).$

(C) tiếp xúc (d) $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x-2}{x-1} = -4x + b & (1) \\ -\dfrac{1}{(x-1)^2} = -4 & (2) \end{cases}$ có nghiệm.

(2) $\Leftrightarrow (x-1)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ hay $x = \frac{1}{2}$.

* Khi $x = \frac{3}{2}$ thì (1) $\Rightarrow b = 11 \Rightarrow$ (d): $y = -4x + 11$ (nhận)

* Khi $x = \frac{1}{2}$ thì (1) $\Rightarrow b = 3$ (loại)

Vậy có một tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán là (d): $y = -4x + 11$.

4. ***a)*** Tự giải

b) (d) là tiếp tuyến của (C) đi qua A và có hệ số góc k $\Rightarrow$ (d): $y = kx - 2$.

(d) tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 3x^2 - 2 = kx - 2 & (1) \\ 6x^2 - 6x = k & (2) \end{cases}$ có nghiệm.

Thay (2) vào (1) ta được:

$$2x^3 - 3x^2 = (6x^3 - 6x)x \Leftrightarrow 4x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hay } x = \frac{3}{4}.$$

* Với $x = 0$ thì (2) $\Rightarrow k = 0 \Rightarrow$ (d): $y = -2$.

* Với $x = \frac{3}{4}$ thì (2) $\Rightarrow k = -\frac{9}{8} \Rightarrow$ (d): $y = -\frac{9}{8}x - 2$.

Vậy có 2 tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán là: (d): $y = -1$ và

(d): $y = -\frac{9}{8}x - 1$.

5. Đáp số: ***a)*** $y = -x + 6$; ***b)*** $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$;

c) $y = -4x + 17$; $y = -4x + 9$. ***d)*** $y = -\frac{4}{25}x + \frac{17}{25}$.

6. ***a)*** $y = -9x + 20$; $y = -9x + 16$. ***b)*** $y = -9x + 20$; $y = -7$.

7. (C): $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$; (d): $3y - x + 6 = 0$.

Ta có: (d): $y = \frac{1}{3}x - 2 \Rightarrow k_d = \frac{1}{3}$.

Tiếp tuyến (Δ) vuông góc (d) nên $k_\Delta = -3 \Rightarrow$ (Δ): $y = -3x + b$.

(Δ) tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2 + 3x + 3}{x + 2} = -3x + b & (1) \\ \dfrac{x^2 + 4x + 3}{(x + 2)^2} = -3 & (2) \end{cases}$ có nghiệm.

(2) $\Leftrightarrow 4x^2 + 16x + 15 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$ hay $x = -\frac{3}{2}$.

Thay vào (1) ta được: $b = -11; b = -3$.

Suy ra $(\Delta): y = -3x - 11$ và $(\Delta): y = -3x - 3$.

8. Cho $(C): y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$.

a) Ta có: $x_A = a \Rightarrow y_A = \dfrac{a^2 + 2x + 2}{a + 1}$; $y' = \dfrac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2} \Rightarrow y'(a) = \dfrac{a^2 + 2a}{(a + 1)^2}$.

Do đó phương trình tiếp tuyến của (C) tại A là:

$(d): y = \dfrac{a^2 + 2a}{(a + 1)^2}(x - a) + \dfrac{a^2 + 2a + 2}{a + 1}$.

b) (d) qua $B(1; 0) \Leftrightarrow \dfrac{a^2 + 2a}{(a + 1)^2}(1 - a) + \dfrac{a^2 + 2a + 2}{a + 1} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -1 \\ (a^2 + 2a)(1 - a) + (a^2 + 2a + 2)(a + 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -1 \\ 2a^2 + 6a + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Với $a = \dfrac{-3 - \sqrt{5}}{2}$ thì $k_1 = f'(a) = 1 - \dfrac{1}{(a + 1)^2} = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

Với $a = \dfrac{-3 + \sqrt{5}}{2}$ thì $k_2 = f'(a) = 1 - \dfrac{1}{(a + 1)^2} = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$.

Ta thấy $k_1.k_2 = -1$ nên hai tiếp tuyến qua B vuông góc nhau.

9. *a)* $y = -4x + 17$; *b)* $y = -x + 7$; $y = -x - 1$. *c)* $y = -4x + 1$.

10. $(C): y = x^4 - 2x^2 + 2$; $M(0; 1)$.

Gọi (d) là tiếp tuyến của (C) đi qua M và có hệ số góc $k \Rightarrow (d): y = kx + 1$.

(d) tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 2x^2 + 2 = kx + 1 & (1) \\ 4x^3 - 4x = k & (2) \end{cases}$ có nghiệm.

Thay (2) vào (1) ta được:

$x^4 - 2x^2 + 2 = 4x^4 - 4x^2 + 1 \Leftrightarrow 3x^4 - 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Thay vào (2) ta được $k = 0$. Vậy (d): $y = 1$.

11. $(C): y = \dfrac{x^2}{x + 1}$.

Gọi d là tiếp tuyến của (C) qua A và có hệ số góc k.

Ta có: $(d): y = k(x - 1) - 2$.

(d) tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{x+1} = k(x-1) - 2 & (1) \\ \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2} = k & (2) \end{cases}$ có nghiệm.

Thay (2) vào (1) ta được: $\dfrac{x^2}{x+1} = \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}(x-1) - 2 \Leftrightarrow 2x^2 + 6x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Với $x = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow k_1 = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$; Với $x = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow k_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Ta có $k_1.k_2 = -1$. Suy ra qua A có hai tiếp tuyến đến (C) và hai tiếp tuyến đó vuông góc nhau.

12. (C): $y = x^3 + 3x^2 - x + 1$; A(1; 4)

Gọi (d) là tiếp tuyến của (C) đi qua M và có hệ số góc k

$\Rightarrow$ (d): $y = k(x-1) + 4$.

(d) tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 3x^2 - x + 1 = k(x-1) + 4 & (1) \\ 3x^2 + 6x - 1 = k & (2) \end{cases}$ có nghiệm.

Thay (2) vào (1) ta được:

$x^3 + 3x^2 - x + 1 = 3x^3 + 6x^2 - x - 3x^2 - 6x + 1 + 4$

$\Leftrightarrow 2x^3 - 6x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hay $x = -2$.

Thay vào (2) ta được:

* $x = 1 \Rightarrow k = 8 \Rightarrow$ (d): $y = 8x - 4$.

* $x = -2 \Rightarrow k = -1 \Rightarrow$ (d): $y = -x + 5$.

13. Gọi d là tiếp tuyến của (C) đi qua A và có hệ số góc k $\Rightarrow$ (d): $y = kx + 2$.

(d) tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 3x^2 + 2 = kx + 2 & (1) \\ 4x^3 - 6x = k & (2) \end{cases}$ có nghiệm

Thay (2) vào (1) ta được:

$x^4 - 3x^2 = (4x^3 - 6x)x \Leftrightarrow 3x^4 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = \pm 1$.

Khi $x = 0 \Rightarrow k = 0$; $x = 1 \Rightarrow k = -2$; $x = -1 \Rightarrow k = 2$.

Vậy qua A có ba tiếp tuyến đến (C).

14. $y = \dfrac{x^2 - 2mx + m}{x+m}$ (C_m)

a) Ta có x_0 là nghiệm của phương trình $x^2 - 2mx + m = 0$ (1) $(x_0 \neq -m)$.

$$y' = \frac{(2x-2m)(x+m) - (x^2 - 2mx + m)}{(x+m)^2}$$

Do đó:Hệ số góc tiếp tuyến của (C_m) tại điểm có hoành độ x_0 là:

$$k = \frac{(2x_0 - 2m)(x+m) - (x_0^2 - 2mx_0 + m)}{(x_0+m)^2} = \frac{(2x_0 - 2m)(x_0+m)}{(x_0+m)^2} = \frac{2x_0 - 2m}{x_0 + m}.$$

b) (C_m) cắt Ox tại 2 điểm A, B $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow m^2 - m > 0 \Leftrightarrow m < 0$ hay $m > 1$.

Áp dụng a) ta có:

Hệ số góc tiếp tuyến của (C_m) tại A là $k_A = \dfrac{2x_A - 2m}{x_A + m}$

Hệ số góc tiếp tuyến của (C_m) tại B là $k_B = \dfrac{2x_B - 2m}{x_B + m}$

Hai tiếp tuyến tại A và tại B vuông góc $\Leftrightarrow k_Ak_B = -1$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x_A - 2m}{x_A + m}.\dfrac{2x_B - 2m}{x_B + m} = -1 \Leftrightarrow (2x_A - 2m)(2x_B - 2m) = -(x_A + m)(x_B + m)$

$\Leftrightarrow 5x_Ax_B - 3m(x_A + x_B) + 5m^2 = 0$

$\Leftrightarrow 5.m - 3m(2m) + 5m^2 = 0 \Leftrightarrow 5m - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0$ hay $m = 5$.

So sánh điều kiện ta được $m = 5$.

15. (C_m): $y = \dfrac{x - m^2 + m}{x + m}$ $(m \neq 0)$.

Ta có hoành độ giao điểm của (C_m) và Ox là nghiệm của phương trình

$x - m^2 + m = 0$ $(x \neq m, m \neq 0)$ (*)

Hệ số góc của tiếp tuyến d của (C_m) tại giao điểm trên là

$$k = y'(x_0) = \frac{m^2}{(x_0 + m)^2}.$$

Tiếp tuyến d song song với đường thẳng $y = x$

$$\Rightarrow k = 1 \Leftrightarrow \frac{m^2}{(x_0+m)^2} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = -2m \end{array}\right.$$

Với $x_0 = m$ thì (*) $\Leftrightarrow -m^2 + m = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Với $x_0 = -2m$ thì (*) $\Leftrightarrow -2m - m^2 + m = 0 \Leftrightarrow m^2 + m = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

Khi $m = 1$ thì $x_0 = 0$; $y_0 = 0 \Rightarrow$ d: $y = x$ (loại).

Khi $m = -1$ thì $x_0 = 2$; $y_0 = 0 \Rightarrow$ d: $y = x - 2$.

Vậy m thỏa mãn yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m = -1$. Tiếp tuyến tương ứng là $y = x - 2$.

16. Cho hàm số $y = \dfrac{-x+1}{2x-1}$. (Khối A – 2011)

a) Tự giải.

b) * Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là:

$\dfrac{-x+1}{2x-1} = x + m \Leftrightarrow g(x) = 2x^2 + 2mx - m - 1 = 0$ (*) $(x \neq \dfrac{1}{2})$

Ta có (*) có $\Delta' = m^2 + 2m + 2 > 0$ và $g\frac{1}{2} \neq 0$ với mọi m.

$\Rightarrow$ Với mọi m, (C) cắt (d) tại hai điểm phân biệt A, B.

* Theo định lí Viet ta có: $x_1 + x_2 = -m$ và $x_1x_2 = \frac{-m-1}{2}$.

* Ta có: $k_1 = f'(x_1) = \frac{-1}{(2x_1-1)^2}$; $k_2 = f'(x_2) = \frac{-1}{(2x_2-1)^2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$k_1 + k_2 = -\left[\frac{1}{(2x_1-1)^2} + \frac{1}{(2x_2-1)^2}\right] \leq -\frac{2}{|(2x_1-1)(2x_2-1)|}$$

$$= \frac{-2}{|4x_1x_2 - 2(x_1+x_2)+1|} = \frac{-2}{|2(-m-1)+2m+1|} = -2$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow (2x_1 - 1)^2 = (2x_2 - 1)^2 \Leftrightarrow 2x_1 - 1 = -2x_2 + 1$

$\Leftrightarrow 2(x_1 + x_2) = 2 \Leftrightarrow -2m = 2 \Leftrightarrow m = -1$.

Vậy khi $m = -1$ thì $k_1 + k_2$ đạt GTLN là -2.

Vấn đề 4. Đồ thị hàm số chứa trị tuyệt đối

Dạng 1: Từ đồ thị (C): $y = f(x)$ hãy suy ra đồ thị (C_1): $y = |f(x)|$

1. *a)* Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$.

* Tập xác định: D = R

* Giới hạn: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \pm\infty$

* Sự biến thiên: $y' = 3x^2 - 3$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = 0 \\ x = -1 \Rightarrow y = 4 \end{array}\right.$$

* Bảng biến thiên:

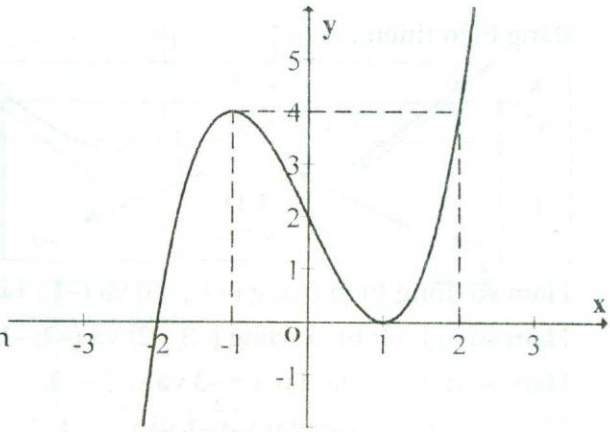
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	4 CĐ	↘	CT 0	↗	$+\infty$

Hàm số tăng trong $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$; giảm trong $(-1; 1)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$, $y_{CĐ} = 4$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$, $y_{CT} = 0$.

* $y'' = 6x$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 2$. Đồ thị có điểm uốn I(0; 2)

* Đồ thị:



Nhận xét: Đồ thị nhận điểm uốn I(0; 2) làm tâm đối xứng.

b) Từ đồ thị (C) suy ra đồ thị (C′) của hàm số $y = |x^3 - 3x + 2|$.

Đặt (C): $y = f(x) = x^3 - 3x + 2$.

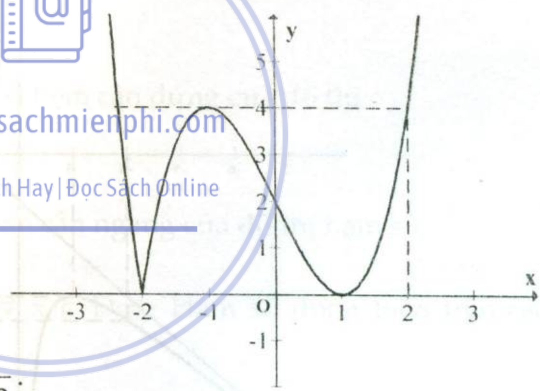
Ta có: (C′): $y = g(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) \text{ khi } f(x) \geq 0 \\ -f(x) \text{ khi } f(x) < 0 \end{cases}$.

Do đó đồ thị (C_1) gồm hai phần:

* Phần 1 là phần không nằm phía dưới trục hoành của đồ thị (C).

* Phần 2 là phần đối xứng của phần phía dưới trục hoành của (C) qua trục Ox.

Ta có đồ thị (C_1) như sau:



2. a) Ta có $y = \dfrac{x^2 + 3x + 3}{x + 2} = x + 1 + \dfrac{1}{x + 2}$.

* Tập xác định : $D = R\backslash\{-2\}$.

* Giới hạn và tiệm cận:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -2^-} y = \lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x^2 + 3x + 3}{x + 2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} y = \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x^2 + 3x + 3}{x + 2} = +\infty \end{cases} \Rightarrow x = -2 \text{ là tiệm cận đứng của đồ thị.}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} [y - (x + 1)] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x + 2} = 0 \Rightarrow y = x + 1 \text{ là tiệm cận xiên của đồ thị.}$$

* Sự biến thiên : $y' = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{(x + 2)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \Rightarrow y = 1 \\ x = -3 \Rightarrow y = -3 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	-3 CĐ	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	CT 1	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trong $(-\infty ; -3)$ và $(-1 ; +\infty)$.

Hàm số nghịch biến trong $(-3; -2)$ và $(-2; -1)$.

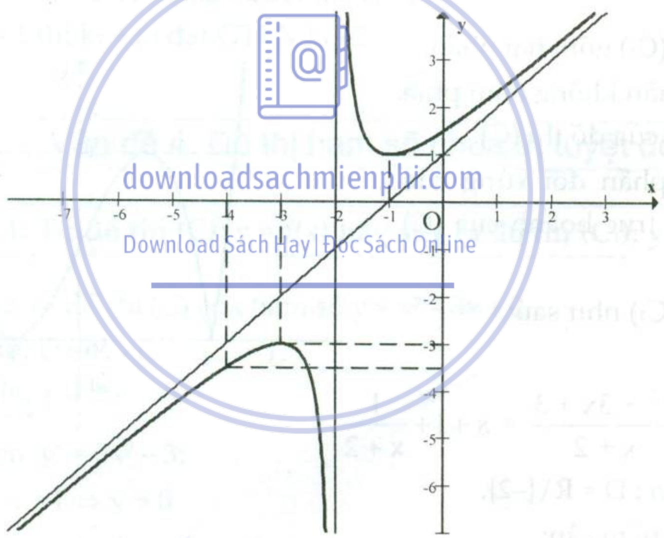
Hàm số đạt cực đại tại $x = -3$ và $y_{CĐ} = -3$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ và $y_{CT} = 1$.

* Giá trị đặc biệt :

x	-4	-3	-1	0
	$-7/2$	-3	1	3/2

* Đồ thị :



Nhận xét: Đồ thị nhận giao điểm $I(-1; -2)$ của hai tiệm cận làm tâm đối xứng.

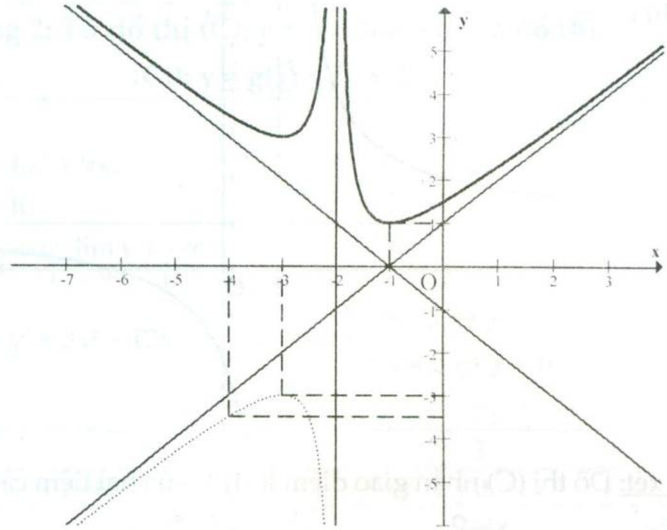
b) Ta có $y = g(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) \text{ khi } f(x) \geq 0 \\ -f(x) \text{ khi } f(x) < 0 \end{cases}$.

Do đó đồ thị (C_1) gồm 2 phần sau:

* Phần 1 là phần đồ thị không nằm phía dưới trục Ox của đồ thị (C).

* Phần 2 là phần đối xứng của phần nằm phía dưới trục Ox của (C) qua trục Ox.

Ta có đồ thị (C_1) như sau:



3. $y = \dfrac{x-2}{x+1}$.

a) * Tập xác định: D = R\{1}.

* Giới hạn và tiệm cận:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} y = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x-2}{x+1} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} y = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x-2}{x+1} = -\infty \end{cases} \Rightarrow x = -1 \text{ là tiệm cận đứng của đồ thị.}$$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x-2}{x+1} = 1 \Rightarrow y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

* Sự biến thiên : $y' = \dfrac{3}{(x+1)^2} > 0,\ \forall\ x \in D \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên các khoảng xác định.

Bảng biến thiên :

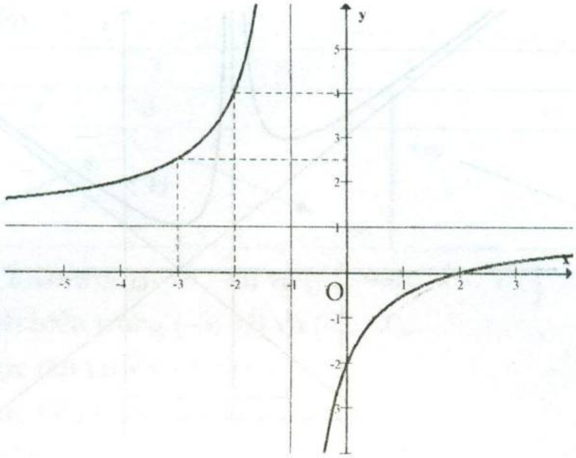
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+	‖	+
y	$1 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow 1$

Hàm số không có cực trị.

* Giá trị đặc biệt :

x	-3	-2	0	1
y	5/2	4	-2	$-\dfrac{1}{2}$

* Đồ thị :



Nhận xét: Đồ thị (C) nhận giao điểm I(–1; 1) của hai tiệm cận làm tâm đối xứng.

b) Đặt (C): $y = f(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$ và (C′): $y = \left|\dfrac{x-2}{x+1}\right| = g(x)$.

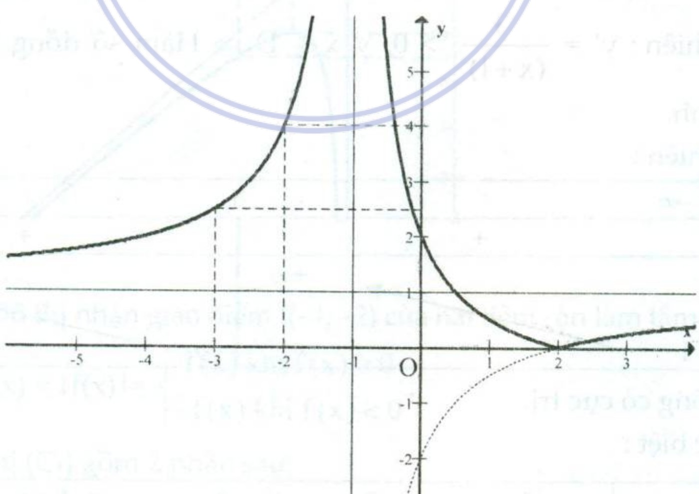
Ta có $y = g(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) \text{ khi } f(x) \geq 0 \\ -f(x) \text{ khi } f(x) < 0 \end{cases}$.

Do đó đồ thị (C_1) gồm 2 phần sau:

* Phần 1 là phần không nằm phía dưới trục Ox của đồ thị (C).

* Phần 2 là phần đối xứng của phần nằm phía dưới trục Ox của (C) qua trục Ox.

Ta có đồ thị (C_1) như sau:



Dạng 2: Từ đồ thị (C): $y = f(x)$ hãy suy ra đồ thị (C₁): $y = g(x) = f(|x|)$

1. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$.

a) * Tập xác định: D = R.

* Giới hạn: $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$.

* Chiều biến thiên: $y' = 3x^2 - 12x + 9$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \to y = 4 \\ x = 3 \to y = 0 \end{array}\right.$

* Bảng biến thiên:

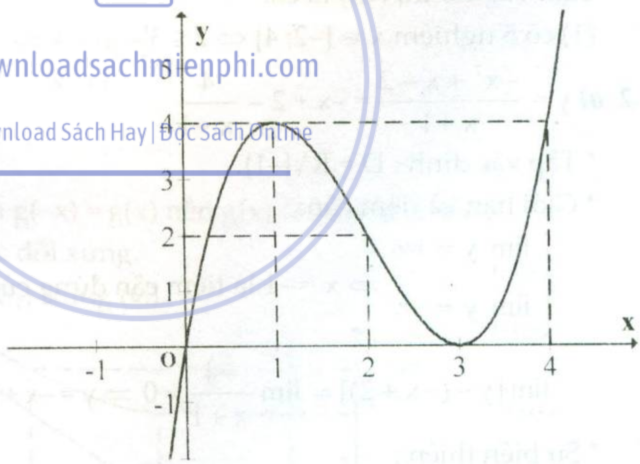
x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	4 CĐ	↘	0 CT	↗	$+\infty$

Hàm số tăng trong $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$. Hàm số giảm trong $(1; 3)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$, $y_{CD} = 4$ và đạt cực tiểu tại $x = 3$, $y_{CT} = 0$.

* $y'' = 6x - 12$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 2$. Đồ thị có điểm uốn I(2, 2).

* Đồ thị:



<ins>Nhận xét:</ins> Đồ thị nhận điểm uốn I(−1; −2) làm tâm đối xứng.

b) Đặt (C): $y = x^3 - 6x^2 + 9x = f(x)$ và (C₁): $y = g(x) = |x|^3 - 6x^2 + 9|x|$.

Ta có: Tập xác định của g là $D_g = R$.

Với mọi $x \in D_g$ thì $-x \in D_g$ và $g(-x) = g(x)$ nên $g(x)$ là hàm số chẵn.

Suy ra (C₁) nhận Oy làm trục đối xứng.

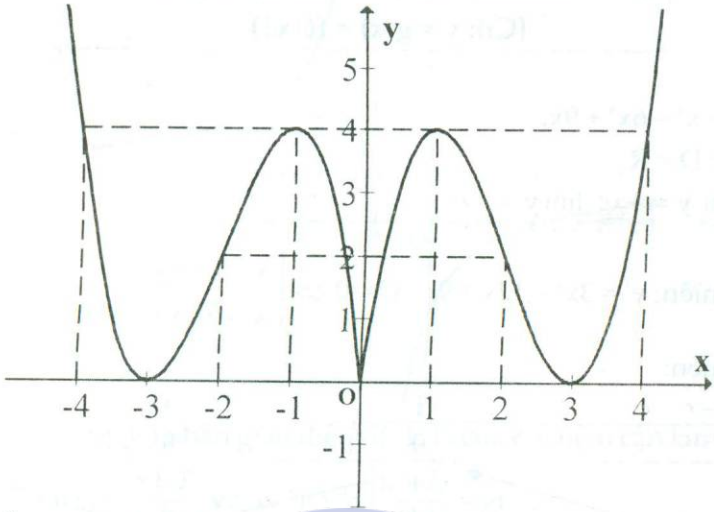
Khi $x \geq 0$ thì $g(x) = f(x)$ nên (C₁) trùng (C).

Do đó ta có đồ thị (C₁) gồm hai phần sau:

– Phần 1 là phần của (C) với $x \geq 0$.

– Phần 2 là phần đối xứng của phần 1 qua trục Oy.

Suy ra đồ thị (C_1) có hình dạng như sau:



c) Ta có $|x|^3 - 6x^2 + 9|x| - 3 + m = 0 \Leftrightarrow |x|^3 - 6x^2 + 9|x| = 3 - m$ (1).

Ta thấy (1) là phương trình hoành độ giao điểm của (d): $y = 3 - m$ với (C_1).

nên số nghiệm của phương trình chính bằng số giao điểm của (d) và (C_1).

Dựa vào đồ thị (C_1) ta có:

(1) có 5 nghiệm $x \in [-2; 4] \Leftrightarrow 2 \le 3 - m < 4 \Leftrightarrow -1 < m \le 5$.

2. *a)* $y = \dfrac{-x^2 + x - 2}{x + 1} = -x + 2 - \dfrac{4}{x+1}$

* Tập xác định : $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

* Giới hạn và tiệm cận:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^-} y = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} y = -\infty \end{cases} \Rightarrow x = -1 \text{ là tiệm cận đứng của đồ thị.}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} [y - (-x + 2)] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-4}{x + 1} = 0 \Rightarrow y = -x + 2 \text{ là tiệm cận xiên của đồ thị.}$$

* Sự biến thiên :

$$y' = \frac{-x^2 - 2x + 3}{(x + 1)^2}; \quad y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = -1 \\ x = -3 \Rightarrow y = -5 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	CT 7	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	-1 CĐ	↘	$-\infty$

Hàm số nghịch biến trong $(-\infty ; -3)$ và $(1 ; +\infty)$.

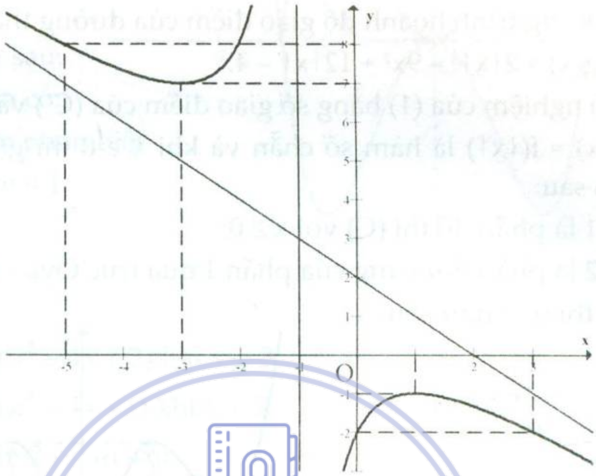
Hàm số đồng biến trong (–3; –1) và (–1; 1).

Hàm số đạt cực đại tại x = 1 và $y_{CĐ} = -1$; đạt cực tiểu tại x = –3 và $y_{CT} = 7$

* Giá trị đặc biệt :

x	–5	–3	1	3
	8	7	–1	–2

* Đồ thị :



Nhận xét: Đồ thị nhận giao điểm I(–1; 3) của hai tiệm cận làm tâm đối xứng.

b) Đặt (C): y = f(x), (C_1): $y = g(x) = \dfrac{-x^2 + |x| - 2}{|x| + 1}$

Ta có g(x) = f(|x|).

– Tập xác định của g là $D_g = \mathbb{R}$.

– Với mọi $x \in D_g$ thì $-x \in D_g$ và g(–x) = g(x) nên g(x) là hàm số chẵn.

Suy ra (C_1) nhận Oy làm trục đối xứng.

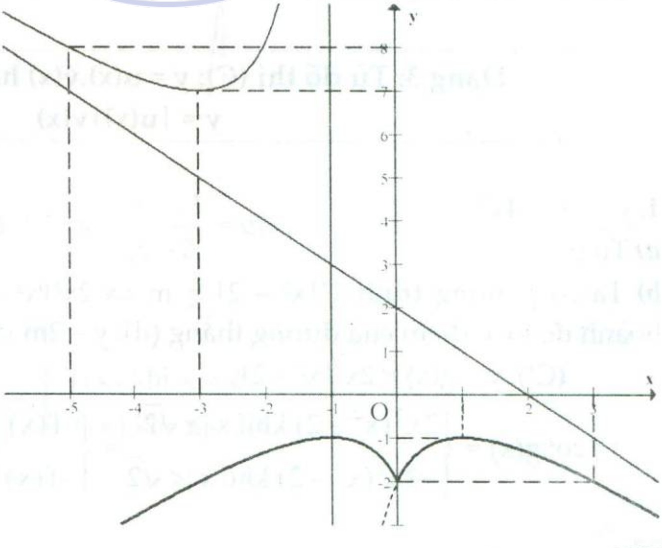
Khi x ≥ 0 thì g(x) = f(x) nên (C_1) trùng (C).

Do đó ta có đồ thị (C_1) gồm hai phần sau:

– Phần 1 là phần của (C) với x ≥ 0.

– Phần 2 là phần đối xứng của phần 1 qua trục Oy.

Suy ra đồ thị (C_1) có hình dạng như sau:



3.

a) Tự giải

b) Phương trình $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = m$

$\Leftrightarrow 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - 4 = m - 4$ (1).

Ta có:

(1) là phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d): y = m với đồ thị (C′): $y = g(x) = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - 4$.

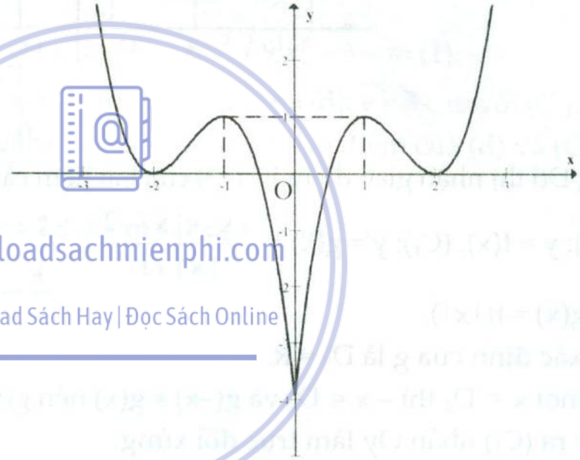
Suy ra số nghiệm của (1) bằng số giao điểm của (C′) và (d).

Ta có $g(x) = f(|x|)$ là hàm số chẵn và khi $x \geq 0$ thì $g(x) = f(x)$ nên đồ thị (C′) gồm 2 phần sau:

Phần 1 là phần đồ thị (C) với $x \geq 0$;

Phần 2 là phần đối xứng của phần 1 qua trục Oy.

Ta có đồ thị (C′) như sau:



Dựa vào đồ thị (C′) ta có:

(1) có 6 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 0 < m - 4 < 1 \Leftrightarrow 4 < m < 5$.

Dạng 3: Từ đồ thị (C): y = u(x).v(x) hãy suy ra đồ thị (C_1): y = |u(x)|v(x)

1. $y = 2x^4 - 4x^2$.

a) Tự giải

b) Ta có phương trình $x^2|x^2 - 2| = m \Leftrightarrow 2x^2|x^2 - 2| = 2m$ (*) là phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d): y = 2m và đồ thị

(C′): $y = g(x) = 2x^2|x^2 - 2|$.

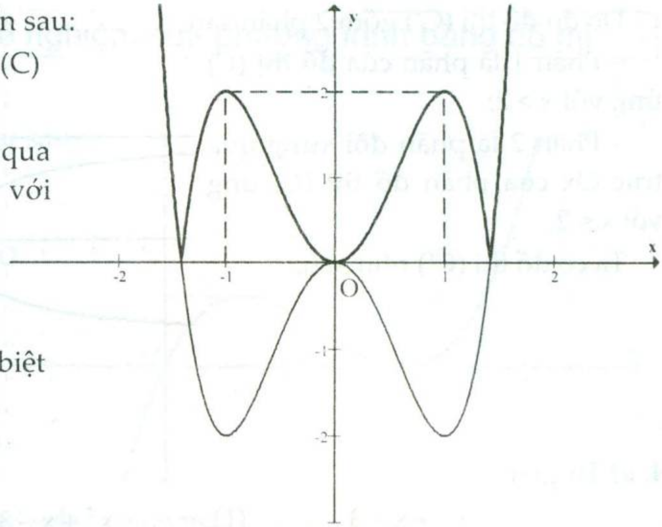
Ta có: $g(x) = \begin{cases} 2x^2(x^2-2) \text{ khi } |x| \geq \sqrt{2} \\ -2x^2(x^2-2) \text{ khi } |x| < \sqrt{2} \end{cases} = \begin{cases} f(x) \text{ khi } |x| \geq \sqrt{2} \\ -f(x) \text{ khi } |x| < \sqrt{2} \end{cases}$.

Do đó đồ thị (C′) gồm 2 phần sau:

– Phần 1 là phần của đồ thị (C) ứng với $|x| \geq \sqrt{2}$;

– Phần 2 là phần đối xứng qua trục Ox của phần đồ thị (C) với $|x| < \sqrt{2}$.

Ta có đồ thị (C′) như sau:



Dựa vào đồ thị (C′) ta có:

(*) có đúng 6 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow 0 < 2m < 2 \Leftrightarrow 0 < m < 1$.

2. $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$.

a) Tự giải.

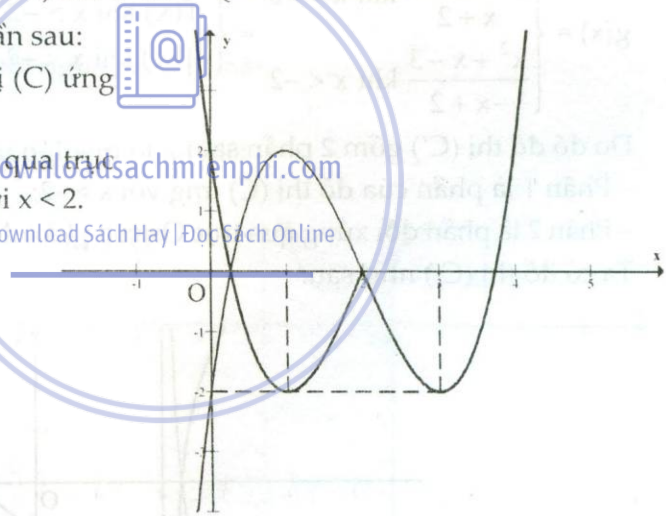
b) Ta có: $g(x) = \begin{cases} (x-2)(x^2-4x+2) \text{ khi } x \geq 2 \\ (2-x)(x^2-4x+1) \text{ khi } x < 2 \end{cases} = \begin{cases} f(x) \text{ khi } x \geq 2 \\ -f(x) \text{ khi } x < 2 \end{cases}$.

Do đó đồ thị (C′) gồm 2 phần sau:

– Phần 1 là phần của đồ thị (C) ứng với $x \geq 2$;

– Phần 2 là phần đối xứng qua trục Ox của phần đồ thị (C) ứng với $x < 2$.

Ta có đồ thị (C′) như sau:



3.

a) Tự giải.

b) Đặt (C): $y = \dfrac{3x-3}{x-2} = f(x)$ và (C′): $y = \dfrac{3x-3}{|x-2|} = g(x)$.

Ta có:

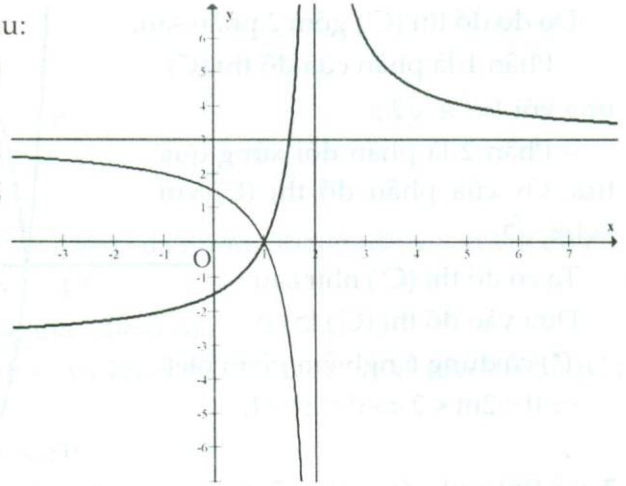
$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{3x-3}{x-2} \text{ khi } x > 2 \\ \dfrac{3x-3}{-x+2} \text{ khi } x < 2 \end{cases} = \begin{cases} f(x) \text{ khi } x > 2 \\ -f(x) \text{ khi } x < 2 \end{cases}.$$

Do đó đồ thị (C′) gồm 2 phần sau:

– Phần 1 là phần của đồ thị (C) ứng với $x > 2$;

– Phần 2 là phần đối xứng qua trục Ox của phần đồ thị (C) ứng với $x < 2$.

Ta có đồ thị (C′) như sau:



4. ***a)*** Tự giải.

b) Đặt (C): $y = \dfrac{x^2 + x - 3}{x + 2} = f(x)$ và (C_1): $y = \dfrac{x^2 + x - 3}{|x + 2|} = g(x)$.

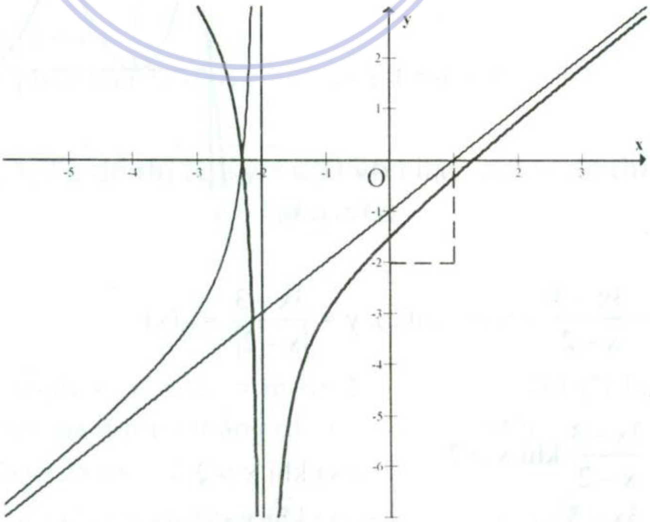
$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 3}{x + 2} \text{ khi } x > -2 \\ \dfrac{x^2 + x - 3}{-x + 2} \text{ khi } x < -2 \end{cases} = \begin{cases} f(x) \text{ khi } x > -2 \\ -f(x) \text{ khi } x < -2 \end{cases}$$

Do đó đồ thị (C′) gồm 2 phần sau:

– Phần 1 là phần của đồ thị (C) ứng với $x > -2$;

– Phần 2 là phần đối xứng qua trục Ox của phần đồ thị (C) ứng với $x < -2$.

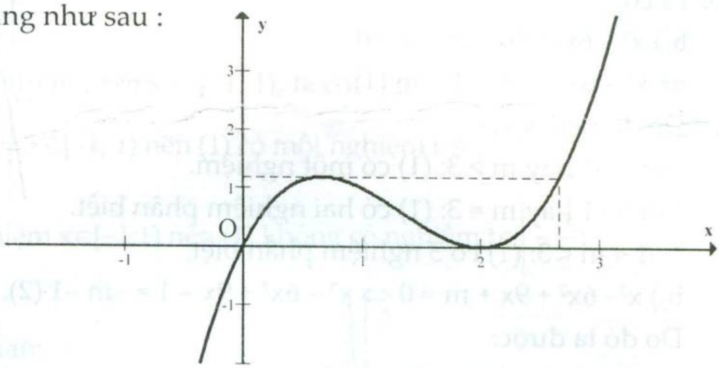
Ta có đồ thị (C′) như sau:



Vấn đề 5: Biện luận số nghiệm của phương trình bằng đồ thị

1.

a) Tự giải. Đồ thị (C) có dạng như sau :



b) Ta có $x^3 - 4x^2 + 4x - m = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 4x = m$ (1)

Phương trình (1) là phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d): $y = m$.

Do đó số nghiệm của phương trình (1) bằng số giao điểm của (C) và (d).

Dựa vào đồ thị (C) ta có :

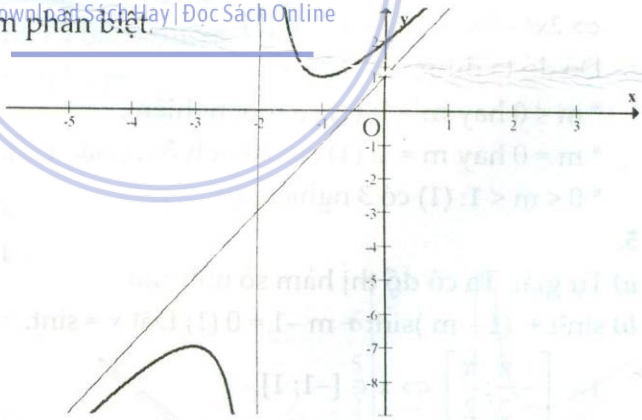
* $m < 0$ hay $m > \frac{32}{27}$: (1) có một nghiệm duy nhất.

* $m = 0$ hay $m = \frac{32}{27}$: (1) có hai nghiệm phân biệt.

* $0 < m < \frac{32}{27}$: (1) có ba nghiệm phân biệt.

2. *a)* Tự giải.

Ta có đồ thị (C) như sau :



b) Ta có :

$$\frac{2x^2+5x+4}{x+2} + m = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2+5x+4}{x+2} = -m \ (1)$$

(1) là phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) : $y = -m$.

Do đó ta có :

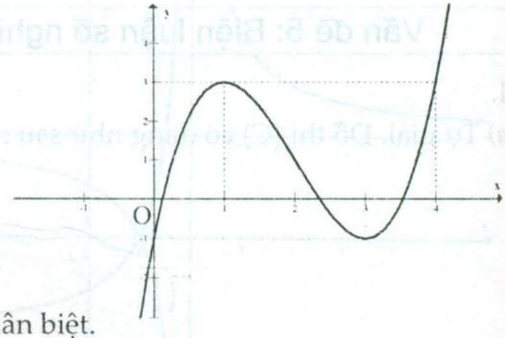
* $m < -7$ hay $m > 1$: (1) có 2 nghiệm phân biệt.

* $m = -7$ hay $m = 1$: (1) có một nghiệm

* $-7 < m < 1$: (1) vô nghiệm.

3. ***a)*** Tự giải.

Đồ thị (C) như sau:



b) Ta có:

b_1) $x^3 - 6x^2 + 9x - m - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x - 1 = m$ (1).

Do đó ta được:

* $m < -1$ hay $m > 3$: (1) có một nghiệm.

* $m = -1$ hay $m = 3$: (1) có hai nghiệm phân biệt.

* $-1 < m < 3$: (1) có 3 nghiệm phân biệt.

b_2) $x^3 - 6x^2 + 9x + m = 0 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x - 1 = -m - 1$ (2).

Do đó ta được:

* $-m - 1 < -1$ hay $-m - 1 > 3$

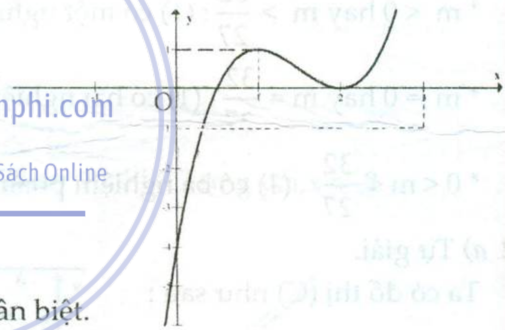
$\Leftrightarrow m > 0$ hay $m < -4$: (1) có một nghiệm.

* $-m - 1 = -1$ hay $-m - 1 = 3 \Leftrightarrow m = 0$ hay $m = -4$: (1) có hai nghiệm phân biệt.

* $-1 < -m - 1 < 3 \Leftrightarrow -4 < m < 0$: (1) có 3 nghiệm phân biệt.

4.

a) Tự giải. Đồ thị (C) như sau:



b) Ta có:

$2x^3 - 9x^2 + 12x - 4 - m = 0$

$\Leftrightarrow 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4 = m$ (1).

Do đó ta được:

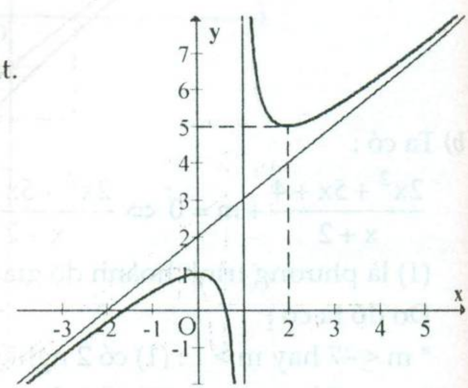
* $m < 0$ hay $m > 1$: (1) có một nghiệm.

* $m = 0$ hay $m = 1$: (1) có hai nghiệm phân biệt.

* $0 < m < 1$: (1) có 3 nghiệm phân biệt.

5.

a) Tự giải. Ta có đồ thị hàm số như sau:



b) $\sin^2 t + (1 - m)\sin t + m - 1 = 0$ (1) Đặt $x = \sin t$.

$t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow x \in [-1; 1]$.

Phương trình (1) trở thành:

$x^2 + (1 - m)x + m - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 1 = m(x - 1)$

$\Leftrightarrow m = \dfrac{x^2 + x - 1}{x - 1}$ (2)

(vì $x = 1$ không là nghiệm của phương trình)

Nhận xét:

Mỗi nghiệm $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ của (1) tương ứng với một nghiệm $x \in [-1; 1]$ của (2) và ngược lại.

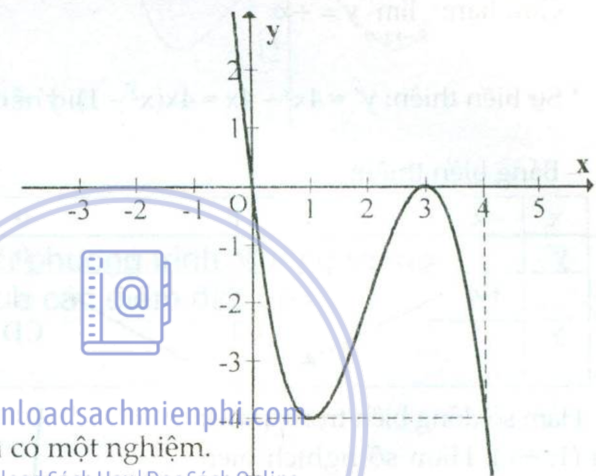
Do đó dựa vào phần đồ thị (C) với $x \in [-1; 1)$, ta có:

+ $m \le 1$: (2) có một nghiệm $x \in [-1; 1)$ nên (1) có một nghiệm $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

+ $m > 1$: (2) không có nghiệm $x \in [-1;1)$ nên (1) không có nghiệm $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

6.

a) Tự giải. Đồ thị (C) như sau:



b) * $m < -4$ hay $m > 0$ phương trình có một nghiệm.

* $m = -4$ hay $m = 0$ phương trình có hai nghiệm.

* $-4 < m < 0$ phương trình có ba nghiệm.

c) Phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow -4 < -k^3 + 6k^2 - 9k < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < k < 4 \\ k \ne 1 \\ k \ne 3 \end{cases}.$$

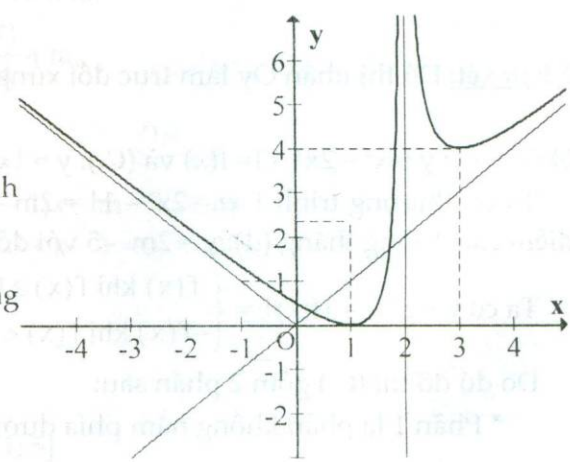
7. *a)* Tự giải

b) Ta có: $\dfrac{(x-1)^2}{|x-2|} = m$ (1)

Phương trình (1) là phương trình hoành độ giao điểm của (C'):

$y = g(x) = \dfrac{(x-1)^2}{|x-2|}$ và đường thẳng (d): $y = m$.

Ta có đồ thị (C') như hình bên:



Dựa vào đồ thị (C′) ta có:

* $m < 0$: (1) vô nghiệm.
* $m = 0$: (1) có một nghiệm.
* $0 < m < 4$: (1) có hai nghiệm phân biệt.
* $m = 4$: (1) có 3 nghiệm phân biệt.
* $m > 4$: (1) có 4 nghiệm phân biệt.

8.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$

* Tập xác định: D = R
* Giới hạn: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = +\infty$
* Sự biến thiên: $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & \Rightarrow y = -1 \\ x = \pm 1 & \Rightarrow y = -2 \end{array}\right.$

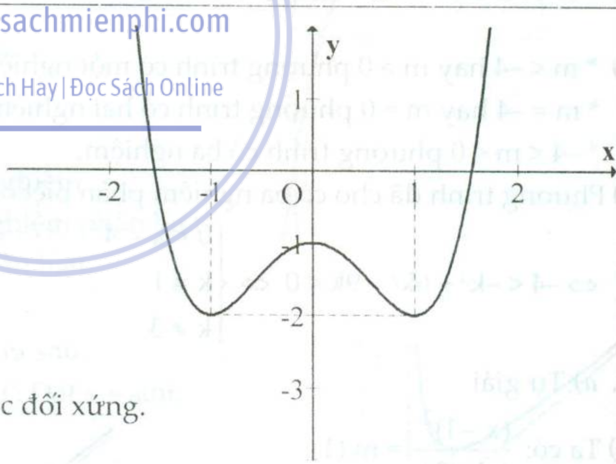
– Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		–	0	+	0	–	0	+	
y	$+\infty$	↘	CT -2	↗	-1 CĐ	↘	CT -2	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trong $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$; Hàm số nghịch biến trong $(-\infty, -1)$ và $(0; 1)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CĐ} = -1$; Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm 1$, $y_{CT} = -2$.

* Đồ thị:



<u>**Nhận xét:**</u> Đồ thị nhận Oy làm trục đối xứng.

b) Đặt (C): $y = x^4 - 2x^2 - 1 = f(x)$ và (C_1): $y = |x^4 - 2x^2 - 1| = g(x)$.

Ta có: Phương trình $|x^4 - 2x^2 - 1| = 2m - 5$ (1) là phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d): $y = 2m - 5$ với đồ thị (C_1).

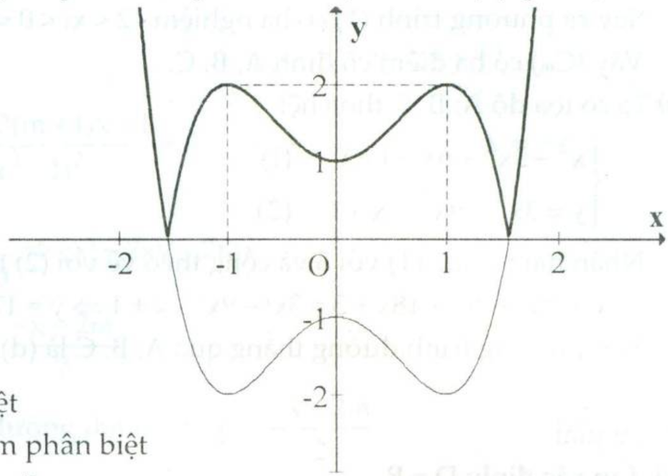
Ta có $y = g(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) \text{ khi } f(x) \geq 0 \\ -f(x) \text{ khi } f(x) < 0 \end{cases}$.

Do đó đồ thị (C_1) gồm 2 phần sau:

* Phần 1 là phần không nằm phía dưới trục Ox của đồ thị (C).

* Phần 2 là phần đối xứng của phần nằm phía dưới trục Ox của (C) qua trục Ox.

Ta có đồ thị (C_1) như sau:



Dựa vào đồ thị (C_1) ta có:

(1) có 6 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (d) và (C_1) có 6 giao điểm phân biệt

$\Leftrightarrow 1 < 2m - 5 < 2 \Leftrightarrow 3 < m < \dfrac{7}{2}$.

Vấn đề 6: Viết phương trình đường thẳng qua các điểm đặc biệt

1.

* Tập xác định: D = R.

* $y' = 3x^2 - 6x - 9$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \Rightarrow y = m + 11 \\ x = 3 \Rightarrow y = m - 21 \end{array}\right..$$

Ta có $y' = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số luôn có CĐ, CT.

Hai điểm cực trị là $A(-1; m + 6)$ và $B(3; m - 21)$. Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; -27)$.

Phương trình đường thẳng qua A và B là:

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y - m - 11}{-27} \Leftrightarrow y = -\frac{27}{4}x - \frac{71}{4} + m.$$

2.

a) K(x; y) là điểm cố định của (C_m)

$\Leftrightarrow y = (3 - m)x^3 + 3(m - 3)x^2 + (6m - 1)x - m + 1, \forall m$

$\Leftrightarrow (x^3 - 3x^2 - 6x + 1)m + y - 3x^3 + 9x^2 + x - 1 = 0, \forall m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 - 6x + 1 = 0 \quad (1) \\ y = 3x^3 - 9x^2 - x + 1 \end{cases}$$

Ta có $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 1$

+ liên tục trên $[-2; 0]$, $[0; 1]$ và $[1; 5]$

+ $f(-2)f(0) = -7 < 0$, $f(0)f(1) = -7 < 0$ và $f(1)f(5) = -157 < 0$

Suy ra phương trình (1) có ba nghiệm $-2 < x_1 < 0 < x_2 < 1 < x_3 < 5$.

Vậy (C_m) có ba điểm cố định A, B, C.

b) Ta có tọa độ A, B, C thỏa hệ:

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 6x + 1 = 0 & (1) \\ y = 3x^3 - 9x^2 - x + 1 & (2) \end{cases}.$$

Nhân hai vế của (1) với 3 và cộng theo vế với (2) ta được:

$y + 3x^3 - 9x^2 - 18x + 3 = 3x^3 - 9x^2 - x + 1 \Rightarrow y = 17x - 2$.

Vậy phương trình đường thẳng qua A, B, C là (d): $y = 17x - 2$.

3.

a) Tự giải

b) Tập xác định: D = R.

$y' = 9x^2 - 18x + 6m - 3 = 3(3x^2 - 6x + 2m - 1)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 2m - 1 = 0$ (1)

Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' = -6m + 12 > 0 \Leftrightarrow m < 2$.

Chia y cho y′ ta viết được $y = \dfrac{x-1}{3}.y' + (2m-8)x + 11m - 13$.

Tọa độ các điểm cực trị thỏa hệ:

$$\begin{cases} y' = 0 \\ y = \dfrac{x-1}{3} + (4m-8)x + 11m - 13 \end{cases} \Rightarrow y = (4m-8)x + 11m - 13.$$

Vậy phương trình đường thẳng qua các điểm cực trị là

$y = (4m - 8)x + 11m - 13$.

4.

a) Tự giải.

b) Tập xác định: $D = R \setminus \{-1; 1\}$.

$$y' = \frac{-x^2 - 2(1+m)x - 1}{(x^2-1)^2}.$$

$y' = 0 \Leftrightarrow g(x) = -x^2 - 2(1 + m)x - 1 = 0$ (1) $(x \neq \pm 1)$.

Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt khác ± 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(1) \neq 0 \\ g(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m > 0 \\ -2m - 4 \neq 0 \\ 2m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -2 \text{ hay } m > 0.$$

Tọa độ các điểm cực trị thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2+x+m}{x^2-1} = \dfrac{u}{v} \\ y' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2} = \dfrac{-x^2-2(m+1)x-1}{(x^2-1)^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{u}{v} = \dfrac{u'}{v'} = \dfrac{2x+1}{2x} \\ -x^2-2x-1-2mx = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2xy = 2x+1 \\ -x^2-2x-1-2mx = 0 \end{cases} \Rightarrow -x^2-2xy-2mx$$

$$\Rightarrow -x-2y-2m = 0 \Rightarrow y = \frac{-x-2m}{2}$$

Vậy các điểm cực trị thuộc đường thẳng (d): $y = \dfrac{-x-2m}{2}$.

5.

a) Gọi K(x; y) là điểm mà (C_m) luôn đi qua

$$\Leftrightarrow y = \frac{x^2+mx-6}{x-m}, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq x \\ yx-ym = x^2+xm-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq x \\ (-x-y)m = x^2-xy-6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x^2+xy-6 = 0 \\ x \neq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x^2 = 3 \\ m \neq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ y = -x \\ m \neq x \end{cases}$$

Vậy (C_m) luôn đi qua $K(\sqrt{3};-\sqrt{3})$ hay $K(-\sqrt{3};\sqrt{3})$ với mọi $m \in R \setminus \{\pm\sqrt{3}\}$.

b) Ta có: $y' = \dfrac{x^2-2mx-m^2+6}{(x-m)^2}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow g(x) = x^2-2mx-m^2+6 = 0$ (1)

Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác m

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 2m^2-6 > 0 \\ g(m) = -2m^2+6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -\sqrt{3} \text{ hay } m > \sqrt{3}.$$

Vậy với $m < -\sqrt{3}$ hay $m > \sqrt{3}$ hàm số có cực trị.

Khi đó ta có $y_{CĐ} = 2x_{CĐ} + m$ và $y_{CT} = 2x_{CT} + m$.

Với $m < -\sqrt{3}$ hay $m > \sqrt{3}$ ta có $y_{CĐ}.y_{CT} = 4x_{CĐ}x_{CT} + 2m(x_{CĐ} + x_{CT}) + m^2$

$= 4(-m^2 + 6) + 2m(2m) + m^2 = m^2 + 24 > 0$

nên $y_{CĐ}$ và y_{CT} cùng dấu.

c) Tọa độ các điểm cực trị thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} y = \dfrac{u}{v} \\ y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \dfrac{u}{v} = \dfrac{u'}{v'} = 2x + m.$$

Vậy phương trình đường thẳng qua các điểm cực trị là y = 2x + m.

6.

a) Tự giải.

b) $y' = \dfrac{-x^2 - 2mx + 1}{(x^2+1)^2}$; $y'' = \dfrac{2x^3 + 6mx^2 - 6x - 2m}{(x^2+1)^3}$

M(x, y) là điểm uốn $\Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x+m}{x^2+1} \\ 2x^3 + 6mx^2 - 6x - 2m = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow y = \frac{k(x^3 + 3mx^2 - 3x - 2m) + x + m}{x^2+1} = ax + b$$

$\Rightarrow (k - a)x^3 + (3mk - b)x^2 + (1 - 3k - a)x + m - 2km - b = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} k - a = 0 & (1) \\ 3mk - b = 0 & (2) \\ 1 - 3k - a = 0 & (3) \\ m - 2mk - b = 0 & (4) \end{cases}$$

(1) $\Rightarrow$ a = k, thay vào (2) $\Rightarrow a = 1 - 4a = 0 \Rightarrow a = \dfrac{1}{4} = k$.

Thay vào (2) $\Rightarrow b = \dfrac{3m}{4}$. Thay vào (4) ta thấy thỏa mãn.

$\Rightarrow$ Ba điểm uốn thuộc đường thẳng $y = \dfrac{x + 3m}{4}$.

Vậy ba điểm uốn của đồ thị thẳng hàng và đường thẳng qua ba điểm uốn là $y = \dfrac{x+3m}{4}$.

7.

a) Tự giải.

b) Tập xác định: D = R.

$y' = 3x^2 + 2(m - 1)x - m - 3$

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2(m - 1)x - m - 3 = 0$ (1)

Ta có: (1) có $\Delta' = (m - 1)^2 + 3(m + 3) = m^2 + m + 10 > 0$ với mọi m.

Suy ra (1) luôn có hai nghiệm phân biệt. Do đó hàm số luôn có cực đại, cực tiểu.

➤ Chia y cho y′ ta viết được:

$$y = \frac{3x+1-m}{9}y' + \frac{2m^2-10m-16}{9}x - \frac{m^2-2m}{9}.$$

Tọa độ các điểm cực trị thỏa hệ:

$$\begin{cases} y' = 0 \\ y = \dfrac{3x+1-m}{9}y' + \dfrac{2m^2-10m-16}{9}x - \dfrac{m^2-2m}{9} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \frac{2m^2-10m-16}{9}x - \frac{m^2-2m}{9}.$$

Vậy phương trình đường thẳng qua các điểm cực trị là

$$y = \frac{2m^2-10m-16}{9}x - \frac{m^2-2m}{9}.$$

c) Gọi $M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow y = x^3 - 4x - 1$ (a)

Giả sử N là điểm đối xứng của M qua đường thẳng (d): $y = x \Rightarrow N(y; x)$.

YCBT $\Leftrightarrow N \in (C)$ và N khác M $\Leftrightarrow x = y^3 - 4y - 1$ (b) và $y \neq x$.

Do đó ta có hệ:

$$\begin{cases} y = x^3 - 4x - 1 \\ x = y^3 - 4y - 1 \\ y \neq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y^3 - 3x + 3y = 0 \\ y + x = x^3 + y^3 - 4x - 4y - 2 \\ y \neq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + xy + y^2 - 3 = 0 \\ x^3 + y^3 - 5(x+y) - 2 = 0 \text{ (c)} \\ y \neq x \end{cases}$$

Đặt $S = x + y$ và $P = xy$. Điều kiện: $S^2 - 4P \geq 0$.

Hệ (c) trở thành $\begin{cases} S^2 - P - 3 = 0 \\ S^3 - 3SP - 5S - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3S^3 - 3SP - 9S = 0 \\ S^3 - 3SP - 5S - 2 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow 2S^3 - 4S + 2 = 0 \Leftrightarrow (S-1)(2S^2 + 2S - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S = 1 \\ S^2 + S - 1 = 0 \end{array}\right.$$

$$* \; S = 1 \Rightarrow P = -2 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}.$$

$$* \; S^2 + S - 1 = 0 \Rightarrow S = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ (loại do } x, y \in \mathbb{Z}).$$

Vậy cặp điểm nguyên trên (C) thỏa mãn yêu cầu bài toán là M(2; –1) và N(–1; 2).

8.

a) Tự giải

b) Gọi d là tiếp tuyến của (C) qua M và có hệ số góc k.

Ta có (d): y = kx + m.

$$\text{(d) tiếp xúc (C)} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x-1}{x^2} = kx + m \\ \dfrac{-2x+2}{x^3} = k \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2} = kx + m \\ -\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{2}{x^3} = k \end{cases} \text{ có nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2} = -\dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{x^2} + m \\ \dfrac{-2x+2}{x^3} = k \end{cases} \text{ có nghiệm}$$

$\Leftrightarrow mx^2 - 4x + 3 = 0$ (*) ($x \neq 0$)

Ta có:

➢ m = 0: (*) có một nghiệm $x \neq 0 \Rightarrow$ Có một tiếp tuyến của (C) qua M.

➢ $m \neq 0$: $\Delta' = 4 - 3m$.

* m > 4/3: (*) vô nghiệm nên qua M không có tiếp tuyến đến (C).

* m = 4/3: (*) có một nghiệm khác 0 nên qua M có một tiếp tuyến đến (C).

* m < 4/3: (*) có hai nghiệm phân biệt khác 0 nên qua M có hai tiếp tuyến đến (C).

c) Gọi hai tiếp điểm là $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$.

$$y_1 = \frac{18x_1 - 9}{x_1^2} = \frac{2mx_1 - m}{4x_1 - 3} = \frac{1}{2}\left(\frac{4mx_1 - 3m + m}{4x_1 - 3}\right) = \frac{1}{2}\left(m + \frac{m}{4x_1 - 3}\right);$$

$$y_2 = \frac{2x_2 - 1}{x_2^2} = \frac{2mx_2 - m}{4x_2 - 3} = \frac{1}{2}\left(\frac{4mx_2 - 3m + m}{4x_2 - 3}\right) = \frac{1}{2}\left(m + \frac{m}{4x_2 - 3}\right)$$

$$\overrightarrow{AB} = \left(x_2 - x_1;\ \frac{m}{2}\left(\frac{1}{4x_2 - 3} - \frac{1}{4x_1 - 3}\right)\right)$$

$$= (x_2 - x_1)\left(1;\ \frac{m}{2}.\frac{4}{(4x_1 - 3)(4x_2 - 3)}\right)$$

$$= (x_2 - x_1)\left(1;\ \frac{m}{2}.\frac{4}{16x_1x_2 - 12(x_1 + x_2) + 9}\right)$$

$$= (x_2 - x_1)\left(1;\ \frac{m}{2}.\frac{4}{16.\frac{3}{m} - 12.\frac{4}{m} + 9}\right) = (x_2 - x_1)\left(1;\ \frac{2m}{9}\right).$$

$\Rightarrow$ Hệ số góc của AB là $k = \dfrac{2m}{9}$.

Gọi I là trung điểm AB. Ta có:

$$x_I = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2}{m}.$$

$$y_I = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \frac{1}{4}\left[2m + m\left(\frac{1}{4x_1 - 3} + \frac{1}{4x_2 - 3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[2m + m\left(\frac{4(x_1 + x_2) - 6}{16x_1x_2 - 12(x_1 + x_2) + 9}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[2m + m\left(\frac{4.\frac{4}{m} - 6}{\frac{9}{m}}\right)\right] = \frac{3m + 4}{9}.$$

Do đó AB: $y - \frac{3m+4}{9} = \frac{2m}{9}\left(x - \frac{2}{m}\right) \Leftrightarrow y = \frac{2m}{9}x + \frac{m}{3}$

Vậy đường thẳng qua 2 tiếp điểm là AB: $y = \frac{2m}{9}x + \frac{m}{3}$.

9.

a) $m \neq 0$; $y = -2x + m$.

b) K(x; y) là điểm mà có đúng 2 đường của (C_m) đi qua

$\Leftrightarrow y = \frac{-x^2 + mx - m^2}{x - m}$ có đúng hai nghiệm m.

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq x \\ xy - xm = -x^2 + mx - m^2 \end{cases}$ có đúng hai nghiệm m.

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq x \\ g(m) = m^2 - 2xm - xy + x^2 = 0 \end{cases}$ có đúng hai nghiệm m.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow xy > 0.$

$\Leftrightarrow$ K nằm trong hai góc phần tư (I) và (III) của mặt phẳng tọa độ.

10.

a) Tự giải.

b) (C): $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$.

(d) là tiếp tuyến của (C) qua A và có hệ số góc k

$\Rightarrow$ (d): $y = kx - 1$

(d) tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 + 3x^2 - 1 = kx - 1 \\ 6x^2 + 6x = k \end{cases}$ có nghiệm.

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 + 3x^2 = (6x^2 + 6x)x \\ k = 6x^2 + 6x \end{cases}$ có nghiệm.

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 + 3x^2 = 0 \\ k = 6x^2 + 6x \end{cases}$ có nghiệm. $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ k = 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = -\dfrac{3}{4} \\ k = -\dfrac{9}{8} \end{cases}$.

Vậy có hai tiếp tuyến qua A có phương trình là $y = -1$ và $y = -\dfrac{9}{8}x - 1$.

c) $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$

$y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6(m-2)$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + (m-1)x + m - 2 = 0 (1)$

Hàm số có CĐ; CT $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 6m + 9 > 0 \Leftrightarrow m \neq 3.$

Ta có $y = \dfrac{1}{6}y'(2x + m - 1) - (m-3)^2x - m^2 + 3m - 3.$

Tọa độ điểm cực trị thỏa hệ

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{6}y'(2x + m - 1) - (m-3)^2x - m^2 + 3m - 3 \\ y' = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow y = -(m-3)^2x - m^2 + 3m - 3.$

Do đó phương trình đường thẳng d qua các điểm cực trị là

$y = -(m-3)^2x - m^2 + 3m - 3.$

Suy ra YCBT $\Leftrightarrow k_d.1 = -1 \Leftrightarrow (m-3)^2 = 1 \Leftrightarrow m = 4$ hay $m = 2.$

11. *a)* Tự giải.

b) $y = mx^3 - 3mx^2 + (2m+1)x + 3 - m$

Tập xác định: D = R.

$y' = 3mx^2 - 6mx + 2m + 1;$

$y' = 0 \Leftrightarrow 3mx^2 - 6mx + 2m + 1 = 0 (*);$

Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 3m^2 - 3m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0$ hay $m > 1.$

Chia y cho y′ ta viết được: $y = \dfrac{x-1}{3}y' + \dfrac{1}{3}[(2-2m)x + 10 - m]$

Tọa độ các điểm cực trị thỏa hệ:

$$\begin{cases} y' = 0 \\ y = \dfrac{x-1}{3}y' + \dfrac{1}{3}[(2-2m)x + 10 - m] \end{cases} \Rightarrow y = \dfrac{1}{3}[(2-2m)x + 10 - m].$$

Do đó đường thẳng qua hai điểm cực trị là d: $y = \frac{1}{3}\left[(2-2m)x + 10 - m\right]$.

Ta có: d: $y = \frac{1}{3}\left[(2-2m)x + 10 - m\right] \Leftrightarrow (2x+1)m + 3y - 2x - 10 = 0$

Do đó tọa độ điểm cố định của (d) thỏa hệ

$\begin{cases} 2x+1=0 \\ 3y-2x-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 3 \end{cases}$. Vậy (d) qua $K(-\frac{1}{2}; 3)$ cố định.

Vấn đề 7: Một số bài toán liên hệ khoảng cách

1. *a)* Tự giải

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d):

$$\frac{x+1}{x-1} = 2x + m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ 2x^2 + (m-3)x - 1 - m = 0 \ (*) \end{cases}$$

Đặt $t = x - 1$, ta được: $\begin{cases} t \neq 0 \\ 2(t+1)^2 + (m-3)(t+1) - 1 - m = 0 \ (*) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \neq 0 \\ g(t) = 2t^2 + (m+1)t - 2 = 0 \ (**) \end{cases}$$

Ta có (**) có $P = -1 < 0$ nên (**) có 2 nghiệm $t_1 < 0 < t_2$.

Suy ra (*) có 2 nghiệm $x_1 < 1 < x_2$ nghĩa là (C) cắt (d) tại 2 điểm phân biệt A, B ở về hai nhánh của (C).

c) Ta có $A(x_A; 2x_A + m)$ và $B(x_B; 2x_B + m)$.

$$\Rightarrow AB^2 = (x_B - x_A)^2 + 4(x_B - x_A)^2 = 5[(x_A + x_B)^2 - 4x_Ax_B]$$

$$= 5\left[\left(\frac{3-m}{2}\right)^2 - 4\frac{-m-1}{2}\right]$$

$$= \frac{5}{4}\left[m^2 + 2m + 17\right] = \frac{5}{4}\left[(m+1)^2 + 16\right] \geq 20.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m = -1$.

Vậy khi $m = -1$ thì AB ngắn nhất và Min $AB = 2\sqrt{5}$.

2. *a)* Tịnh tiến hệ trục Oxy về hệ trục AXY, công thức chuyển hệ trục là: $\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + 2 \end{cases}$.

Trong hệ trục AXY thì (C) có phương trình

$$Y+2=\frac{(X+1)^2+m(X+1)-m}{(X+1)-1}$$

$$\Leftrightarrow Y=\frac{X^2+mX+1}{X}=X+m+\frac{1}{X}=F(X).$$

(C) nhận A làm tâm đối xứng $\Leftrightarrow$ F(X) là hàm số lẻ

$\Leftrightarrow F(-X)=-F(X)\Leftrightarrow m=0.$

b) Tự giải

c) Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là

$$\frac{x^2}{x-1}=k\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\ g(x)=x^2-kx+k=0\end{cases}.$$

(d) cắt (C) tại hai điểm A, B $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=k^2-4k>0\\ g(1)=1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow k<0$ hay $k>4$.

Khi đó $A(x_A;\,k)$ và $B(x_B;\,k)$.

Suy ra $AB^2=(x_B-x_A)^2=(x_A+x_B)^2-4x_Ax_B=k^2-4k$.

Do đó $AB=\sqrt{5}\Leftrightarrow k^2-4k=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=-1\\ k=5\end{array}\right.$ (nhận).

Vậy k thỏa mãn yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow k=-1$ hay $k=5$.

3. *a)* Tự giải

b) A, B lần lượt thuộc hai nhánh của (C) nên ta có thể giả sử:

$x_A=-1-a$ và $x_B=-1+b$ $(a, b>0)$

Khi đó $y_A=x_A+2+\dfrac{1}{x_A+1}=-a+1-\dfrac{1}{a}$ và $y_B=b+1+\dfrac{1}{b}$.

Ta có $AB^2=(b+a)^2+\left(b+a+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a}\right)^2=(a+b)^2\left[1+\left(1+\dfrac{1}{ab}\right)^2\right]$

$$=(a+b)^2\left(2+\frac{1}{a^2b^2}+\frac{2}{ab}\right)\geq 4ab\left(\frac{2\sqrt{2}}{ab}+\frac{2}{ab}\right)=4\left(2\sqrt{2}+2\right).$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

Vậy AB ngắn nhất $\Leftrightarrow A\left(-1-\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}};\,1-\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}-\sqrt[4]{2}\right), B\left(-1+\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}};\,1+\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}+\sqrt[4]{2}\right)$.

c) Gọi M(x; y) là điểm thuộc (C) và cách đều hai trục tọa độ.

Ta có $\begin{cases}|y|=|x|\\ y=\dfrac{x^2+3x+3}{x+1}\end{cases}\Leftrightarrow\left|\dfrac{x^2+3x+3}{x+1}\right|=|x|$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 3 = x(x+1)$ hay $x^2 + 3x + 3 = -x(x+1)$

$\Leftrightarrow 2x + 3 = 0$ hay $2x^2 + 4x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2} \Rightarrow y = -\dfrac{3}{2}$. Vậy $M(-\dfrac{3}{2}; -\dfrac{3}{2})$.

4. *a)* Tự giải.

b) Ta có $y = x\cos\alpha + 2\sin\alpha - 2\cos\alpha + \dfrac{1+4\cos\alpha}{x+2}$

$\Rightarrow$ TCX: $y = x\cos\alpha + 2\sin\alpha - 2\cos\alpha \Leftrightarrow x\cos\alpha - y + 2\sin\alpha - 2\cos\alpha = 0$

Đường tròn (O; R) tiếp xúc với tiệm cận xiên

$$\Leftrightarrow R = \frac{|2\sin\alpha - 2\cos\alpha|}{\sqrt{\cos^2\alpha + 1}}$$

Ta có: $R = \dfrac{|2\sin\alpha - \sqrt{2}.\sqrt{2}\cos\alpha|}{\sqrt{\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha}} \le \dfrac{\sqrt{2^2 + (\sqrt{2})^2}\sqrt{\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha}}{\sqrt{\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha}} = \sqrt{6}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{\sin\alpha}{2} = \dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha}{-\sqrt{2}} \Leftrightarrow \tan\alpha = -2$.

5. *a)* $m = -1$: (C): $y = \dfrac{-x^2 + 2x + 3}{x-1} = -x + 1 + \dfrac{4}{x-1}$.

➢ Khảo sát hàm số (Tự giải).

➢ A, B lần lượt thuộc hai nhánh của (C) nên ta giả sử $x_A = 1 - a$; $x_B = 1 + b$.

Khi đó $y_A = a - \dfrac{4}{a}$ và $y_B = -b + \dfrac{4}{b}$.

$$AB^2 = (-b-a)^2 + \left(-b - a + \frac{4}{b} + \frac{4}{a}\right)^2 = (a+b)^2\left[1 + \left(1 - \frac{4}{ab}\right)^2\right]$$

$$= (a+b)^2\left(2 + \frac{16}{a^2b^2} - \frac{8}{ab}\right) \ge 4ab\left(\frac{8\sqrt{2}}{ab} - \frac{8}{ab}\right) = 32\left(\sqrt{2} - 1\right).$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = \sqrt[4]{8}$.

Vậy với $A\left(1 - \sqrt[4]{8};\ \sqrt[4]{8} - \dfrac{4}{\sqrt[4]{8}}\right)$, $B\left(1 + \sqrt[4]{8};\ -\sqrt[4]{8} + \dfrac{4}{\sqrt[4]{8}}\right)$ là các điểm cần tìm.

c) $y = f(x) = \dfrac{mx^2 + (m^2+1)x + 4m^2 + m}{x+m}$.

Tập xác định: $D = R\setminus\{-m\}$.

$$y' = \frac{mx^2 + 2m^2x + m^3 - 4m^2}{(x+m)^2}$$

$y' = 0 \Leftrightarrow g(x) = mx^2 + 2m^2x + m^3 - 4m^2 = 0 \quad (1)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow mx^2 + (m^2+1)x + 4m^2 + m = 0 \quad (2)$

YCBT $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm trái dấu, $m < 0$ và phương trình (2) vô nghiệm.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ P < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m^2 - 4m < 0 \\ (m^2+1)^2 - 4m(4m^2+m) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 0 < m < 4 \\ m^4 - 16m^3 - 2m^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing.$$

6. ***a)*** Tự giải.

b) (C): $y = \dfrac{x^2+3x-1}{x-2} = x + 5 + \dfrac{9}{x-2}$.

$M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow y = x + 5 + \dfrac{9}{x-2} \quad (1)$

TCĐ: $x - 2 = 0 \Rightarrow d(M; \text{TCĐ}) = |x-2| \quad (2)$

TCX: $y = x + 5 \Leftrightarrow x - y + 5 = 0$

$\Rightarrow d(M; \text{TCX}) = \dfrac{|x-y+5|}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}|x-2|} \quad (3)$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $d(M; \text{TCĐ}).d(M; \text{TCX}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ là hằng số.

c) Ta có $y' = \dfrac{x^2 - 2mx - m^2 - 1}{(x-m)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx - m^2 - 1 = 0 \ (1)$

Vì (1) có $\Delta' = 2m^2 + 1 > 0, \forall m$ nên hàm số luôn có cực trị.

Ta có $y_{CĐ} = 2x_{CĐ} + m + 1$ và $y_{CT} = 2x_{CT} + m + 1$.

Do đó: YCBT $\Leftrightarrow (2x_{CĐ} + m + 1)(2x_{CT} + m + 1) > 0$

$\Leftrightarrow 4x_{CT}x_{CĐ} + (2m+2)(x_{CT} + x_{CĐ}) + (m+1)^2 > 0$

$\Leftrightarrow 4(-m^2 - 1) + (2m+2)(2m) + m^2 + 2m + 1 > 0$

$\Leftrightarrow m^2 + 6m - 3 > 0 \Leftrightarrow m < -3 - 2\sqrt{3}$ hay $m > -3 + 2\sqrt{3}$.

7. ***a)*** Tự giải.

b) Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ $(x_0 > 1)$.

Tiếp tuyến (d) của (C) tại M có phương trình

$$y = \left(1 - \frac{1}{(x_0-1)^2}\right)(x - x_0) + x_0 + 1 + \frac{1}{x_0 - 1}.$$

Gọi $A = d \cap TCĐ \Rightarrow A(1; \frac{2x_0}{x_0 - 1})$.

Gọi $B = (d) \cap (TCX) \Rightarrow B(2x_0 - 1; 2x_0)$

Gọi $I = (TCĐ) \cap (TCX) \Rightarrow I(1; 2)$.

Ta có $IA = \frac{2}{|x_0 - 1|}$; $IB = 2\sqrt{2}|x_0 - 1|$.

Do đó $P_{IAB} = IA + IB + AB = IA + IB + \sqrt{IA^2 + IB^2 - 2IA.IB.\cos\widehat{AIB}}$

$$\geq 2\sqrt{IA.IB} + \sqrt{2IA.IB - 2IA.IB.\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{4\sqrt{2}} + 2\sqrt{8\sqrt{2} - 8}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow IA = IB \Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x_0 = 1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

Vậy khi $M\left(1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}};\ 2 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \sqrt[4]{2}\right)$ thì P_{IAB} nhỏ nhất.

8. *a)* Tự giải

b) $M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow y = \frac{x+2}{x-3}$.

TCĐ: $x - 3 = 0 \Rightarrow d(M; TCĐ) = |x - 3|$.

TCN: $y - 1 = 0 \Rightarrow d(M; TCN) = |y - 1| = \frac{5}{|x-3|}$.

Do đó YCBT $\Leftrightarrow |x - 3| = 5.\frac{5}{|x-3|} \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 8 \Rightarrow y = 2 \\ x = -2 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right.$.

Vậy M(8; 2) hay M(–2; 0).

Vấn đề 8: Điểm đối xứng và đường đối xứng

1. *a)* Tự giải.

b) Tập xác định: D = R.

$y' = 3x^2 - 3mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = m \end{array}\right.$.

Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó hai điểm cực trị là $A(0; \frac{1}{3}m^3)$ và $B(m; -\frac{1}{6}m^3)$

Ta có: A, B đối xứng nhau qua đường thẳng y = x

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A = y_B \\ y_A = x_B \end{cases} \Leftrightarrow m = 0 \text{ (loại)}$$

Vậy không tồn tại m nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.

2. *a)* Tự giải.

b) Gọi (H′) là đồ thị đối xứng với (H): $y = \dfrac{3x+1}{x-3}$.

$M'(x'; y') \in (H')$, gọi M là điểm đối xứng của M′ qua (d): $x + y - 3 = 0$.

Ta có trung điểm của MM′ là $I\left(\dfrac{x+x'}{2}; \dfrac{y+y'}{2}\right)$ và $\overrightarrow{MM'} = (x' - x; y' - y)$.

Vì M và M′ đối xứng qua d nên

$$\begin{cases} MM' \perp (d) \\ I \in (d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(x'-x) + 1(y'-y) = 0 \\ \dfrac{x+x'}{2} + \dfrac{y+y'}{2} - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = x' - y' \\ x + y = 6 - x' - y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - y' \\ y = 3 - x' \end{cases}.$$

Vì (H) và (H′) đối xứng nhau qua d nên $M \in (H)$

$$\Leftrightarrow y = \frac{3x+1}{x-3} \Leftrightarrow 3 - x' = \frac{3(3-y')+1}{3-y'-3} \Leftrightarrow (x'-3)y' = 10 - 3y' \Leftrightarrow y' = \frac{10}{x'}.$$

Vậy (H′): $y = \dfrac{10}{x}$.

c) $C(x_0; y_0) \in (H) \Rightarrow y_0 = \dfrac{3x_0+1}{x_0-3}$.

Tiếp tuyến (d) của (H) tại C có phương trình

$$y = \frac{-10}{(x_0-3)^2}(x - x_0) + \frac{3x_0+1}{x_0-3}.$$

$(d) \cap (TCĐ) = A \Rightarrow A\left(3; \dfrac{3x_0+11}{x_0-3}\right)$;

$(d) \cap (TCN) = B \Rightarrow B(2x_0 - 3; 3)$;

Ta có: * $x_A + x_B = 2x_0 = 2x_C \Rightarrow$ C là trung điểm AB.

* Gọi I là giao điểm hai tiệm cận $\Rightarrow I(3; 3)$.

$\Rightarrow IA = \left|\dfrac{20}{x_0-3}\right|$ và $IB = 2|x_0 - 3|$. $\Rightarrow S_{IAB} = \dfrac{1}{2}IA.IB = 20$ là hằng số.

3. *a)* Tự giải.

b) Ta có AB vuông góc với (d): $y = x - 1$ nên (AB): $y = -x + m$.

Hoành độ A, B là nghiệm của phương trình

$$\frac{3x^2}{x-1} = -x + m \Leftrightarrow 4x^2 - (m+1)x + m = 0 \ (*)$$

Gọi I là trung điểm AB, ta có: $x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{m+1}{8}$; $y_I = -x_I + m = \frac{7m-1}{8}$.

YCBT $\Leftrightarrow I \in (d) \Leftrightarrow \frac{7m-1}{8} = \frac{m+1}{8} - 1 \Leftrightarrow 6m = -6 \Leftrightarrow m = -1$.

Khi đó (*) $\Leftrightarrow 4x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{3}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Vậy $A(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2})$; $B(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$ là hai điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

4. *a)* Tự giải.

b) Xét đường thẳng (d): $y = kx$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và (d) là:

$$\frac{x^2 - 4mx + 5m}{x-1} = kx \Leftrightarrow x^2 - 4mx + 5m = kx^2 - kx \ (x \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow (k-1)x^2 + (4m-k)x - 5m = 0 \ (*)$$

YCBT $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 1 và $x_1 + x_2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S = 0 \\ \Delta > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 4m \\ 5m(k-1) > 0 \\ -1 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0 \text{ hay } m > \frac{1}{4} \text{ và } m \neq -1.$$

5. *a)* Tự giải.

b) Tập xác định: $D = R \setminus \{-1\}$.

$y' = \frac{x^2 + 2x + 2m - 1}{(x+1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow g(x) = x^2 + 2x + 2m - 1 = 0$ (1), $x \neq -1$.

Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 2m > 0 \\ 2m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 1.$$

c) Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và Ox là:

$$\frac{x^2 + (m-1)x - m}{x+1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} h(x) = x^2 + (m-1)x - m = 0 \ (*) \\ x \neq -1 \end{cases}.$$

(C_m) cắt Ox tại hai điểm M, N $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m+1)^2 > 0 \\ h(-1) = -2m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 1 \end{cases}.$$

* Giả sử M, N đối xứng nhau qua O $\Rightarrow x_M + x_N = 0 \Rightarrow -m + 1 = 0$

$\Rightarrow m = 1$ (vô lí).

Vậy M, N không thể đối xứng với nhau qua O.

Chương II: HÀM SỐ LŨY THỪA - HÀM SỐ MŨ HÀM SỐ LÔGARIT

§1. LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ HỮU TỈ - THỰC HÀM SỐ LŨY THỪA

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

I. Lũy thừa với số mũ nguyên:

1. Định nghĩa:

a. Lũy thừa với số mũ nguyên dương:

Cho $a \in R$, $n \in N$, $n \geq 1$, ta định nghĩa: $a^n = \underbrace{a.a.a....a}_{n \text{ thừa số } a}$.

(a^n là lũy thừa bậc n của a, a gọi là cơ số, n là số mũ)

b. Lũy thừa với số mũ 0 và mũ nguyên âm:

Cho $a \neq 0$, và n là số nguyên dương. Ta định nghĩa:

$a^0 = 1$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ (lưu ý: 0^0 và 0^{-n} không có nghĩa)

2. Tính chất lũy thừa với số mũ nguyên:

a. Định lí 1: Cho $a \neq 0$; $b \neq 0$ và $m, n \in Z$, ta có:

1. $a^m.a^n = a^{m+n}$ 　　 2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

3. $(a^m)^n = a^{mn}$ 　　 4. $(ab)^n = a^nb^n$

5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.

b. Định lí 2: (tính chất bất đẳng thức):

Cho $m, n \in Z$. Khi đó:

1. Với $a > 1$: $a^m > a^n \Leftrightarrow m > n$.
2. Với $0 < a < 1$: $a^m > a^n \Leftrightarrow m < n$.

Hệ quả 1: Với $0 < a < b$, $m \in Z$ ta có:

1. $a^m < b^m \Leftrightarrow m > 0$ 　　 2. $a^m > b^m \Leftrightarrow m < 0$.

Hệ quả 2: Với n là số tự nhiên lẻ: $a < b \Rightarrow a^n < b^n$.

II. Căn bậc n và lũy thừa số mũ hữu tỉ:

1. Căn bậc n:

a. Định nghĩa: Cho $a \in R$, $n \in Z^+$, ta gọi số thực b là căn bậc n của số a nếu $b^n = a$.

Nhận xét:

* Mỗi số thực a có duy nhất một căn bậc n lẻ, kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$

* Mỗi số thực $a > 0$ có đúng hai căn bậc n chẵn đối nhau, kí hiệu: Giá trị dương là $\sqrt[n]{a}$ và giá trị âm là $-\sqrt[n]{a}$.

b. Tính chất:

Cho $a, b \in R$; $m, n \in Z^+$; $p, q \in Z$. Với các điều kiện của a, b để các biểu thức có nghĩa, ta có:

1. $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(a, b > 0)$

3. $\sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p$ $(a \neq 0)$

4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$

5. Nếu $\dfrac{p}{n} = \dfrac{q}{m}$ thì $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[m]{a^q}$ $(a \neq 0)$. Đặc biệt: $\sqrt[n]{a} = \sqrt[m.n]{a^m}$ $(a \neq 0)$

2. Lũy thừa với số mũ hữu tỉ:

a. Định nghĩa:

Cho số thực a dương, r là số hữu tỉ có dạng $r = \dfrac{m}{n}$ với $m \in Z$ và $n \in Z^+$.

Ta định nghĩa: $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

b. Tính chất của lũy thừa với số mũ hữu tỉ:

Lũy thừa số mũ hữu tỉ có đầy đủ các tính chất của lũy thừa với số mũ nguyên đã nêu ở phần I.

III. Lũy thừa với số mũ thực:

1. Định nghĩa:

Cho số thực $a > 0$ và α là một số vô tỉ.

Ta luôn có một dãy các số hữu tỉ $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$,.. mà $\lim r_n = \alpha$.

Xét dãy số những lũy thừa của a tương ứng: $a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \ldots\ldots\ldots, a^{r_n}, \ldots$

Người ta chứng minh được rằng dãy số $a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \ldots\ldots\ldots, a^{r_n}, \ldots$ có giới hạn xác định (không phụ thuộc vào dãy hữu tỉ (r_n) đã chọn) khi $n \to +\infty$.

Giới hạn đó được gọi là *lũy thừa với số mũ vô tỉ α của số dương a*.

Kí hiệu là a^α. Vậy $a^\alpha = \lim\limits_{n \to +\infty} a^{r_n}$.

Chú ý về cơ số của lũy thừa a^r:

Nếu $r \in Z^+$ thì cơ số $a \in R$.

Nếu $r \in Z$ thì cơ số $a \neq 0$.

Nếu $r \in R$ thì cơ số $a > 0$.

2. Tính chất lũy thừa với số mũ thực:

Lũy thừa với số mũ thực có đầy đủ tính chất như lũy thừa với số mũ nguyên.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: Tính toán - rút gọn các biểu thức lũy thừa

1. PHƯƠNG PHÁP:

- Áp dụng các tính chất của lũy thừa để tính giá trị của biểu thức, rút gọn một biểu thức, chứng minh một biểu thức không phụ thuộc tham số....

- Cần lưu ý:

* Với $a \in R, n \in N, n \leq 1$ thì $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$.

* Ngược lại với $A \geq 0$ thì $a\sqrt[2n]{A} = \begin{cases} \sqrt[2n]{a^{2n}A} & \text{khi } a \geq 0 \\ -\sqrt[2n]{a^{2n}A} & \text{khi } a < 0 \end{cases}$.

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Tính giá trị các biểu thức:

a) $A = \left(\dfrac{1}{256}\right)^{-0,75} + \left(\dfrac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}}$

b) $B = \left(\dfrac{1}{49}\right)^{-1,5} - \left(\dfrac{1}{125}\right)^{-\frac{2}{3}}$.

Giải

a) Ta có: $A = \left(\dfrac{1}{256}\right)^{-0,75} + \left(\dfrac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}} = \left(4^{-4}\right)^{-\frac{3}{4}} + \left(3^{-3}\right)^{-\frac{4}{3}} = 4^3 + 3^4 = 91$.

b) Ta có: $B = \left(\dfrac{1}{49}\right)^{-1,5} - \left(\dfrac{1}{125}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(7^{-2}\right)^{\frac{-3}{2}} - \left(5^{-3}\right)^{\frac{-2}{3}} = 7^3 - 5^2 = 318$.

Ví dụ 2: Tính giá trị các biểu thức:

a) $A = \sqrt[3]{\dfrac{125}{64}}.\sqrt[4]{81}$;

b) $B = \dfrac{\sqrt[5]{98}.\sqrt[5]{343}}{\sqrt[5]{64}}$.

Giải

a) Ta có: $A = \sqrt[3]{\dfrac{125}{64}}.\sqrt[4]{81} = \dfrac{\sqrt[3]{5^3}.\sqrt[4]{3^4}}{\sqrt[3]{4^3}} = \dfrac{5.3}{4} = \dfrac{15}{4}$.

b) Ta có: $B = \dfrac{\sqrt[5]{98}.\sqrt[5]{343}}{\sqrt[5]{64}} = \sqrt[5]{\dfrac{98.343}{64}} = \sqrt[5]{\dfrac{2.7^2.7^3}{2^6}} = \sqrt[5]{\dfrac{7^5}{2^5}} = \dfrac{7}{2}$.

Ví dụ 3: Tính giá trị các biểu thức:

a) $A = 4^{\frac{17}{7}} : 4^{\frac{3}{7}} - 2^{\frac{11}{5}}.2^{\frac{4}{5}}$; b) $B = \left(4^{3+\sqrt{3}} - 4^{\sqrt{3}-1}\right)2^{-2\sqrt{3}}$; c) $C = \left(3^{\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}}\right).3^{\frac{3\sqrt{5}}{2}}$.

Giải

a) Ta có: $A = 4^{\frac{17}{7}} : 4^{\frac{3}{7}} - 2^{\frac{11}{5}}.2^{\frac{4}{5}} = 4^{\frac{17}{7}-\frac{3}{7}} - 2^{\frac{11}{5}+\frac{4}{5}} = 4^2 - 2^3 = 8$.

b) Ta có: $B = \left(4^{3+\sqrt{3}} - 4^{\sqrt{3}-1}\right).2^{-2\sqrt{3}} = \left(2^{6+2\sqrt{3}} - 2^{2\sqrt{3}-2}\right).2^{-2\sqrt{3}}$

$= 2^{6+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}} - 2^{2\sqrt{3}-2-2\sqrt{3}} = 2^6 - 2^{-2} = 64 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{255}{4}$.

c) Áp dụng tính chất: $(a^m)^n = a^{mn}$, ta có:

$C = \left(3^{\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}}\right)^{-3}.3^{\frac{3\sqrt{5}}{2}} = 3^{\frac{(1-\sqrt{5})(-3)}{1+\sqrt{5}}}.3^{\frac{3\sqrt{5}}{2}} = 3^{\frac{-3+3\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}+\frac{3\sqrt{5}}{2}} = 3^{\frac{9-3\sqrt{5}}{2}+\frac{3\sqrt{5}}{2}} = 3^{\frac{9}{2}} = 81\sqrt{3}$.

Ví dụ 4: Rút gọn các biểu thức rồi tính:

a) $A = \dfrac{a^{\frac{3}{2}}\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[6]{a}} + \sqrt[3]{a}.\sqrt[9]{a^6}$, a>0 (áp dụng với a = 1; 3)

b) $B = \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt[6]{b}} + \sqrt[3]{\dfrac{27}{b^6}}\left(\dfrac{b^3}{\sqrt[4]{81}} - \sqrt[3]{b^7}\right)$, b>0 (áp dụng với b = 27)

Giải

a) Sử dụng tính chất $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ của căn thức và các tính chất lũy thừa ta có:

$$A = \frac{a^{\frac{3}{2}}\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[6]{a}} + \sqrt[3]{a}.\sqrt[9]{a^6} = \frac{a^{\frac{3}{2}}.a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}} + a^{\frac{1}{3}}.a^{\frac{6}{9}} = \frac{a^{\frac{13}{6}}}{a^{\frac{1}{6}}} + a^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = a^2 + a.$$

Do đó:

* Với a = 1, ta có $A = 1^2 + 1 = 2$ và với a = 3 thì $A = 3^2 + 3 = 12$.

b) $B = \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt[6]{b}} + \sqrt[3]{\dfrac{27}{b^6}}\left(\dfrac{b^3}{\sqrt[4]{81}} - \sqrt[3]{b^7}\right) = \dfrac{b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{6}}} + \dfrac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{b^6}}\left(\dfrac{b^3}{3} - \sqrt[3]{b^7}\right) = b^{\frac{1}{3}} + \dfrac{3}{b^2}\left(\dfrac{b^3}{3} - b^{\frac{7}{3}}\right)$

$= b^{\frac{1}{3}} + b - 3b^{\frac{1}{3}} = b - 2b^{\frac{1}{3}}$.

Khi $b = 27$ thì $B = 27 - 2.27^{\frac{1}{3}} = 27 - 2.3 = 21$.

Ví dụ 5: Cho biểu thức $M = \left(\dfrac{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{9}{4}}}{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{5}{4}}} : \dfrac{b^{-\frac{1}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}}}\right)\sqrt[3]{\dfrac{a}{b^4}}.\sqrt[6]{\dfrac{b^{14}}{a^2}}$.

a) Rút gọn M;

b) Tính giá trị của M khi $a = 5$; $b = -2$.

Giải

a) Ta có:

$$M = \left(\dfrac{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{9}{4}}}{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{5}{4}}} : \dfrac{b^{-\frac{1}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}}}\right)\sqrt[3]{\dfrac{a}{b^4}}.\sqrt[6]{\dfrac{b^{14}}{a^2}} = \left(\dfrac{a^{\frac{1}{4}}\left(1-a^2\right)}{a^{\frac{1}{4}}(1-a)} : \dfrac{b^{-\frac{1}{2}}\left(1-b^2\right)}{b^{-\frac{1}{2}}(1+b)}\right).\dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{4}{3}}}.\dfrac{b^{\frac{14}{6}}}{a^{\frac{2}{6}}}$$

$$\Rightarrow M = \left[(1+a):(1-b)\right].b^{\frac{14}{6}-\frac{4}{3}}.a^{\frac{1}{3}-\frac{2}{6}} = \left(\dfrac{1+a}{1-b}\right).b.$$

b) Khi $a = 5$ và $b = -2$ thì $M = \left[\dfrac{1+5}{1-(-2)}\right].(-2) = \dfrac{6}{3}.(-2) = -4$.

Ví dụ 6: Cho biểu thức: $A = \left[\dfrac{4a - 9a^{-1}}{2a^{\frac{1}{2}} - 3a^{-\frac{1}{2}}} + \dfrac{a - 4 + 3a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}}\right]^2$.

Rút gọn và tính giá trị của A khi $a = 4$.

Giải

Điều kiện bài toán: $0 < a \neq 1; \dfrac{3}{2}$.

Ta có: $A = \left[\dfrac{4a - 9a^{-1}}{2a^{\frac{1}{2}} - 3a^{-\frac{1}{2}}} + \dfrac{a - 4 + 3a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}}\right]^2 = \left[\dfrac{4a^2 - 9}{(2a-3)\sqrt{a}} + \dfrac{a^2 - 4a + 3}{(a-1)\sqrt{a}}\right]$

$$\Rightarrow A = \left[\frac{2a+3}{\sqrt{a}} + \frac{a-3}{\sqrt{a}}\right]^2 = \left(\frac{3a}{\sqrt{a}}\right)^2 = 9a.$$

Khi $a = 4 \Rightarrow A = 36$.

Ví dụ 7: Rút gọn biểu thức: $M = \dfrac{\left(a^{\sqrt{5}+1}\right)^{\sqrt{5}-1}}{a^{7-\sqrt{2}}.a^{-3+\sqrt{2}}}$ $(a > 0)$.

Giải

$$M = \frac{\left(a^{\sqrt{5}+1}\right)^{\sqrt{5}-1}}{a^{7-\sqrt{2}}.a^{-3+\sqrt{2}}} = \frac{a^{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}}{a^{7-\sqrt{2}-3+\sqrt{2}}} = \frac{a^{5-1}}{a^4} = 1.$$

Ví dụ 8: Rút gọn biểu thức: $X = \dfrac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$ $(a, b > 0)$.

Giải

Ta có: $X = \dfrac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = \dfrac{ab\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}} = ab.$

Ví dụ 9: Chứng minh rằng biểu thức sau không phụ thuộc vào b:

$$B = \left(1 - 2\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{b}{a}\right) : \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)^2 \quad (a > 0,\ b \geq 0,\ a \neq b).$$

Giải

Ta có:

$$B = \left(1 - 2\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{b}{a}\right) : \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

$$= \left(-\sqrt{\frac{b}{a}} + 1\right)^2 : \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = \left(1 - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)^2 : \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2$$

$$= \frac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2}{\left(\sqrt{a}\right)^2} : \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = \frac{1}{\left(\sqrt{a}\right)^2} = \frac{1}{a}.$$

Ví dụ 10: Chứng minh đẳng thức $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}=2$.

Giải

Đặt $a=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$; $b=\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$. Ta có:

$$a^3=7+5\sqrt{2};\ b^3=7-5\sqrt{2} \text{ và } ab=\sqrt[3]{\left(7+5\sqrt{2}\right)\left(7-5\sqrt{2}\right)}=-1.$$

Đặt $x = a + b$. Ta có:

$x^3 = (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = 14 - 3(a + b) = 14 - 3x$

$\Rightarrow x^3 + 3x - 14 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 2x + 7) = 0$

$\Leftrightarrow x = 2$. Vậy $a + b = 2$ hay $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}=2$ (ĐPCM).

3. BÀI TẬP

1. Thực hiện phép tính sau:

a. $16^{-0,75}+\left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}-\left(\frac{1}{243}\right)^{-\frac{3}{5}}$.

b. $0,001^{-\frac{1}{3}}-(-2)^{-2}64^{\frac{2}{3}}-27^{-1\frac{1}{3}}+\left(7^0\right)^2$.

c. $64^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{1}{81}\right)^{-0,75}-25^{-0,5}$

d. $(-0,5)^{-4}-625^{0,25}-\left(2\frac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}}+19(-3)^{-3}$

2. Viết các biểu thức sau dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ:

a. $\sqrt[4]{x^2\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}\ (x>0)$.

b. $\sqrt[5]{\frac{b}{a}\sqrt[3]{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a}{b}}}}\ (a>0, b>0)$.

c. $\sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}}}$.

d. $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}:a^{\frac{11}{16}}\ (a>0)$.

3. Đơn giản các biểu thức sau ($a, b > 0$):

a. $\dfrac{\left(\sqrt[4]{a^3b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}}$

b. $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{4}{3}}}-\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}-a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}}$.

4. Đơn giản các biểu thức sau ($a, b > 0$):

a. $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}-\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$

b. $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$

c. $\left(\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-\sqrt[3]{ab}\right):\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2$

d. $\dfrac{a-1}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}}\cdot\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}+1}.a^{\frac{1}{4}}+1$

5. Đơn giản các biểu thức sau:

a. $\dfrac{\left(a^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1}}{a^{\sqrt{5}-3}.a^{4-\sqrt{5}}}$ b. $a^{\sqrt{2}}.\left(\dfrac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1}$.

6. Đơn giản các biểu thức sau:

a. $a^{-2\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{a^{-\sqrt{2}-1}}\right)^{\sqrt{2}+1}$. b. $\left(\dfrac{a^{\sqrt{3}}}{b^{\sqrt{3}-1}}\right)^{\sqrt{3}+1}\dfrac{a^{-1-\sqrt{3}}}{b^{-2}}$.

c. $\dfrac{a^{2\sqrt{2}}-b^{2\sqrt{3}}}{\left(a^{\sqrt{2}}-b^{\sqrt{3}}\right)^2}+1$. d. $\sqrt{\left(x^{\pi}+y^{\pi}\right)^2-\left(4^{\frac{1}{\pi}}xy\right)^{\pi}}$.

7. Chứng minh:

a. $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}=2$ b. $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=3$

8. Chứng minh rằng biểu thức $M = ab\dfrac{\sqrt[n]{\dfrac{a^{1-n}}{b^{n}}-\dfrac{a^{-n}}{b^{n-1}}}}{\sqrt[n]{a-b}}$, với $0< b < a$ không phụ thuộc vào giá trị của a và b.

9. Cho biểu thức $M = \dfrac{ab^{-2}\left(ab^{-1}\right)^2\left(a^{-1}b^2\right)}{a^{-2}b\left(a^{-2}b^{-1}\right)^3}$.

a) Chứng minh M không phụ thuộc vào b;
b) Tính giá trị của M khi a = 2.

Vấn đề 2: So sánh các lũy thừa hay căn số

1. PHƯƠNG PHÁP:

➢ So sánh hai lũy thừa *có cùng cơ số a* ta áp dụng kết quả sau:

* Với $a > 1$ thì $a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$

* Với $0 < a < 1$ thì $a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$.

➢ So sánh hai lũy thừa *có cùng số mũ x*, ta áp dụng kết quả sau:

Với $a, b \neq 1$ và $0 < b^x < a^x \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \Leftrightarrow b^x < a^x \\ x < 0 \Leftrightarrow b^x > a^x \end{cases}$.

➢ Với các hai biểu thức chứa căn, ta cần đưa về các căn cùng bậc.

2. VÍ DỤ:

Ví dụ: Hãy so sánh các số m và n sau:

a. $m = \sqrt{42}$ và $n = \sqrt[3]{51}$.

b. $m = 16^{\sqrt{3}}$ và $n = 4^{3\sqrt{2}}$.

c. $m = (0,2)^{\sqrt{16}}$ và $n = (0,2)^{\sqrt[3]{60}}$.

d. $2^m > 1$ và $5^n < 1$.

Giải

a. Ta có: $m = \sqrt{42} = \sqrt[6]{42^3} > \sqrt[6]{40^3}$ và $n = \sqrt[3]{51} = \sqrt[6]{51^2} < \sqrt[6]{60^2}$,

mà $40^3 = 64000 > 3600 = 60^2$ nên $m > n$.

b. Ta có: $m = 16^{\sqrt{3}} = \left(4^2\right)^{\sqrt{3}} = 4^{2\sqrt{3}} = 4^{\sqrt{12}}$ và $n = 4^{3\sqrt{2}} = 4^{\sqrt{18}}$,

mà cơ số $a = 4 > 1$, $12 < 18$ nên $m < n$.

c. Ta có: $m = (0,2)^{\sqrt{16}} = (0,2)^4 = (0,2)^{\sqrt[3]{64}}$ mà $\sqrt[3]{64} > \sqrt[3]{60}$ và $a = 0,2 < 1$ nên

$(0,2)^{\sqrt{16}} < (0,2)^{\sqrt[3]{60}}$ hay $m < n$.

d. Ta có: $2^m > 1 = 2^0 \Rightarrow m > 0$;

$5^n < 1 = 5^0 \Rightarrow n < 0$. Vậy $m > n$.

3. BÀI TẬP

1. So sánh các số sau:

a. $\left(\sqrt{3}\right)^{-\frac{5}{6}}$ và $\sqrt[3]{5^{-1}\sqrt[4]{\frac{1}{5}}}$.

b. 3^{600} và 5^{400}.

c. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{6}{7}}$ và $\sqrt{2}.2^{\frac{3}{14}}$.

d. 7^{30} và 4^{40}.

2. So sánh hai số sau:

a. $m = \left(\frac{3}{7}\right)^{-111}$ và $n = \left(\frac{4}{9}\right)^{-111}$

b. $m = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\sqrt{2}}$ và $n = \left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\sqrt{3}}$.

Vấn đề 2: Chứng minh một đẳng thức, bất đẳng thức

1. PHƯƠNG PHÁP:

➢ Biến đổi vế trái (hoặc vế phải) của biểu thức để trở về với biểu thức vế bên kia. Trong nhiều trường hợp ta biến đổi cả hai vế của đẳng thức này về cùng một biểu thức trung gian. Để làm được điều đó ta sử dụng các định nghĩa, tính chất của hàm số lũy thừa và căn thức.

➢ Khi chứng minh các bất đẳng thức ta cần chú ý đến cơ số của lũy thừa so với số 1.

2. Ví dụ:

Ví dụ 1: Cho a, b, c > 0 thỏa a + b = c. Chứng minh:

a) $a^m + b^m > c^m$ nếu $0 < m < 1$; b) $a^m + b^m < c^m$ nếu $m > 1$.

Giải

a) $a^m + b^m > c^m$ nếu $0 < m < 1$.

Vì a, b, c đều dương nên ta có:

$$c > a;\ c > b \text{ và } \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 1 \Rightarrow 0 < \frac{a}{c} < 1;\ 0 < \frac{b}{c} < 1.$$

Do đó khi $0 < m < 1$ ta có:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{a}{c}\right)^m > \dfrac{a}{c} \\ \left(\dfrac{b}{c}\right)^m > \dfrac{b}{c} \end{cases} \Rightarrow \frac{a^m}{c^m} + \frac{b^m}{c^m} > \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 1.$$

Vậy khi $0 < m < 1$ ta luôn có $a^m + b^m > c^m$.

b) $a^m + b^m < c^m$ nếu $m > 1$.

Vì a, b, c > 0 nên ta có:

$$c > a;\ c > b \text{ và } \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 1 \Rightarrow 0 < \frac{a}{c} < 1;\ 0 < \frac{b}{c} < 1.$$

Do đó khi $m > 1$, ta có: $\begin{cases} 0 < \left(\dfrac{a}{c}\right)^m < \dfrac{a}{c} \\ 0 < \left(\dfrac{b}{c}\right)^m < \dfrac{b}{c} \end{cases} \Rightarrow \left(\dfrac{a}{c}\right)^m + \left(\dfrac{b}{c}\right)^m < \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} = 1.$

Vậy với mọi $m > 1$ ta luôn có: $a^m + b^m < c^m$.

Ví dụ 2: Chứng minh: Với các số a, b, x, y thỏa $a > 0; b > 0; x > y > 0$ ta luôn có:

$$\left(a^x + b^x\right)^y < \left(a^y + b^y\right)^x \quad (*).$$

Giải

Vì a, b > 0 nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a \geq b$.

Khi đó đặt $t = \dfrac{b}{a}$, ta có $0 < t \leq 1$.

Ta có: $\left(a^x+b^x\right)^y<\left(a^y+b^y\right)^x \Leftrightarrow a^{xy}\left[1+\left(\frac{b}{a}\right)^x\right]^y<a^{xy}\left[1+\left(\frac{b}{a}\right)^y\right]^x$

$$\Leftrightarrow\left[1+t^x\right]^y<\left[1+t^y\right]^x \quad (**)$$

Ta có: $0<t\le 1$ và $x>y \Rightarrow t^x\le t^y \Rightarrow 1<1+t^x\le 1+t^y$ mà $y>0$

$\Rightarrow \quad (1+t^x)^y\le(1+t^y)^y \quad (1)$

Mà $1+t^y>1$ và $0<y<x$ nên $(1+t^y)^y<(1+t^y)^x$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $(1+t^x)^y<(1+t^y)^x$.

Vậy (**) đúng, do đó (*) được chứng minh.

Ví dụ 3: Chứng minh bất đẳng thức: $\forall\, x\in R$, ta có $2^{\sin x}+2^{\cos x}\ge 2^{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$.
Khi nào thì dấu đẳng thức xảy ra?

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số $2^{\sin x}$ và $2^{\cos x}$ ta có:

$$2^{\sin x}+2^{\cos x}\ge 2\sqrt{2^{\sin x}.2^{\cos x}}=2\sqrt{2^{\sin x+\cos x}}=2.2^{\frac{\sin x+\cos x}{2}} \quad (*).$$

Do $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\ge-\sqrt{2}$ và $2>1$ nên $2^{\frac{\sin x+\cos x}{2}}\ge 2^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

Suy ra $2.2^{\frac{\sin x+\cos x}{2}}\ge 2.2^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$ (**). Từ (*) và (**) ta suy ra:

$$2^{\sin x}+2^{\cos x}\ge 2^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} \text{ (ĐPCM)}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}2^{\sin x}=2^{\cos x}\\ \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1\end{cases}\Leftrightarrow \sin x=\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{4}+k2\pi$.

Vậy dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{4}+k2\pi$.

Ví dụ 4: Cho x, y, z thỏa mãn: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ và $ax^3=by^3=cz^3$.

a) Rút gọn biểu thức $A=ax^2+by^2+cz^2$.

b) Chứng minh rằng: $A=\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\right)^3$.

Giải

a) Rút gọn biểu thức $A = ax^2 + by^2 + cz^2$.

Ta có:

$$A = ax^2 + by^2 + cz^2 = \frac{ax^3}{x} + \frac{by^3}{y} + \frac{cz^3}{z} = \frac{ax^3}{x} + \frac{ax^3}{y} + \frac{ax^3}{z} = ax^3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$$

(vì $ax^3 = by^3 = cz^3$) mà $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ nên ta có $A = ax^3$.

b) Ta có:

$$\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt[3]{ax^3}}{x} + \frac{\sqrt[3]{by^3}}{y} + \frac{\sqrt[3]{cz^3}}{z}\right)^3 = ax^3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^3 = ax^3$$

(vì $ax^3 = by^3 = cz^3$) mà theo a) ta có $A = ax^3$. Do đó $A = \left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}\right)^3$.

3. BÀI TẬP

1. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a^2 = b^2 + c^2$. Chứng minh:

   a) $a^m > b^m + c^m$ nếu $m > 2$ b) $a^m < b^m + c^m$ nếu $m < 2$

2. Chứng minh bất đẳng thức: $2^{2\sin x} + 2^{\tan x} > 2^{\frac{3x}{2}+1}$ với $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

3. Cho biểu thức $A = (9^a - 4.3^a + 1)a + (a^2 + 1).3^a$.

   Chứng minh rằng $A > 0$ khi $a > 0$.

4. Cho $a \ge 0$; $b \ge 0$; $m > n > 0$. Chứng minh: $\left(a^m + b^m\right)^{\frac{1}{m}} \le \left(a^n + b^n\right)^{\frac{1}{n}}$.

5. Cho $a \ge b > 0$. Chứng minh $\left(2^a + \frac{1}{2^a}\right)^b < \left(2^b + \frac{1}{2^b}\right)^a$.

Vấn đề 3: Giải phương trình chứa lũy thừa

1. PHƯƠNG PHÁP:

- Giải phương trình lũy thừa là dùng các tính chất của lũy thừa hoặc đặt ẩn phụ để biến đổi phương trình đã cho về dạng các phương trình bậc nhất, bậc hai, bậc ba…

- Cần nắm các tính chất sau:

* Với $a \ne 0$ và n nguyên dương thì: $a^0 = 1$ (lưu ý: 0^0 không có nghĩa)

* Với $a \ne 0$ và n nguyên dương thì: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (lưu ý: 0^{-n} không có nghĩa)

* Với mọi số thực a, b khác 0 và m, n $\in Z$ ta luôn có:

1. $a^m.a^n = a^{m+n}$
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$
4. $(ab)^n = a^n b^n$
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.

* **Lưu ý:** Không được đồng nhất: $\sqrt[n]{x}$ với $x^{\frac{1}{n}}$.

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Giải phương trình sau: $\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{2}} + \sqrt{\dfrac{1-x}{2}} = 1$ (1)

Giải

Đặt $u = \sqrt[3]{\dfrac{1+x}{2}}$; $v = \sqrt{\dfrac{1-x}{2}}$ với $v \ge 0$.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} v \ge 0 \\ u + v = 1 \\ u^3 + v^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v \ge 0 \\ v = 1 - u \\ u^3 + (1-u)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v \ge 0 \\ v = 1 - u \\ u^3 + u^2 - 2u + 1 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v \ge 0 \\ v = 1 - u \\ u^3 + u^2 - 2u = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 0 \\ v = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} u = -2 \\ v = 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x = -17 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình (*) có nghiệm là $x_1 = -1$; $x_2 = 1$; $x_3 = -17$.

Ví dụ 2: Giải phương trình sau: $\sqrt[4]{x^3} + 2\sqrt{x} - 8x^{1/4} = 0$ (1)

Giải

Điều kiện: $x > 0$.

Ta có: (1) $\Leftrightarrow \sqrt[4]{x^3} + 2\sqrt[4]{x^2} - 8\sqrt[4]{x} = 0$

Đặt $\sqrt[4]{x} = t > 0$, ta có (1) trở thành $t^3 + 2t^2 - 8t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = 0 & \text{(loại)} \\ t = 2 & \text{(nhận)} \\ t = -4 & \text{(loại)} \end{array}\right.$.

$\Leftrightarrow \sqrt[4]{x} = 2 \Leftrightarrow x = 16$.

Vậy nghiệm của phương trình là: x = 16.

Ví dụ 3: Giải phương trình sau: $x^3 + 8 = 16\sqrt[3]{x-1}$

Giải

Ta có: $x^3 + 8 = 8\sqrt[3]{8x-8}$ (1)

Đặt $t = \sqrt[3]{8x-8}$. Ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 8 = 8t \\ 8x - 8 = t^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 8 = 8t & (2) \\ t^3 - x^3 = 8(x-t) & (3) \end{cases}$$

Ta có (3) $\Leftrightarrow (t - x)(t^2 + tx + x^2) = 8(x - t)$

$\Leftrightarrow (t - x)(t^2 + tx + x^2 + 8) = 0$

$\Leftrightarrow t = x$ (vì $t^2 + tx + x^2 + 8 > 0$ với mọi x, t)

Thay vào (2) ta được:

$x = \sqrt[3]{8x-8} \Leftrightarrow x^3 - 8x + 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x-4) = 0$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x^2 + 2x - 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 + \sqrt{5} \\ x_3 = -1 - \sqrt{5} \end{array}\right..$$

Vậy phương trình (1) có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 + \sqrt{5} \\ x_3 = -1 - \sqrt{5} \end{array}\right.$.

3. BÀI TẬP

1. Giải các phương trình sau:

a. $\dfrac{x^{-\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} = 16$ b. $(3x-1)^{\frac{2}{3}} = 4$ c. $x^5 = 16x^3$ d. $\sqrt[3]{x^2} = 16$.

2. Giải phương trình $\sqrt[4]{16x^2} + 5\sqrt[4]{x} - 7 = 0$

3. Giải các phương trình sau:

a. $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = 2$ b. $\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x} + 2 = 0$

4. Giải phương trình: $2\sqrt[3]{3x-2} + 3\sqrt{6-5x} - 8 = 0$.

5. Tìm các số thực x thỏa mãn điều kiện sau:

a. $a^{x+2} + a^{2-x} = a^4 + 1 \quad (a > 0)$ b. $3^{|x|} < 27$.

§2. LÔGARIT

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

I. Lôgarit:

1. Định nghĩa: Cho $a > 0, a \neq 1$ và $b > 0$.

Ta gọi: Số α là lôgarit theo cơ số a của số b nếu $a^\alpha = b$. Kí hiệu: $\log_a b = \alpha$.

Vậy $\boxed{\log_a b = \alpha \Leftrightarrow a^\alpha = b}$.

Nhận xét: Từ định nghĩa ta suy ra:

* $\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$. * $\log_a(a^\alpha) = \alpha$ và $a^{\log_a b} = b$.

2. Tính chất:

2.1. *So sánh hai lôgarit cùng cơ số:*

* Cho $b, c > 0$, ta có:

➢ Khi $a > 1$: $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$.

➢ Khi $0 < a < 1$: $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b < c$.

* Cho $0 < a \neq 1$ và $b, c > 0$

➢ $\log_a b > 0 \Leftrightarrow$ a và b cùng lớn hơn 1 hay cùng nhỏ hơn 1.

➢ $\log_a b < 0 \Leftrightarrow a < 1 < b$ hay $b < 1 < a$.

2.2. *Các quy tắc tính lôgarit*

Cho $0 < a \neq 1$ và $b, c > 0$. Ta có:

a) $\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$.

b) $\log_a\left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$. Đặc biệt: $\log_a \dfrac{1}{b} = -\log_a b$.

c) $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$. Đặc biệt: $\log_a \sqrt[n]{b} = \dfrac{1}{n}\log_a b$ $(n \in Z^+)$.

2.3. *Đổi cơ số của lôgarit*

Với $0 < a, b \neq 1$ và $c > 0$ và $\alpha \neq 0$.

* $\log_b c = \dfrac{\log_a c}{\log_a b}$ hay $\log_a b.\log_b c = \log_a c$

* $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ hay $\log_a b.\log_b a = 1$

* $\log_{a^n} c^m = \dfrac{m}{n}\log_a c$

Chú ý:

* Khi a = 10 thì $\log_{10}x$ gọi là ***lôgarit thập phân***, ký hiệu là logx (hoặc lgx).
* Khi a = e thì $\log_e x$ gọi là ***lôgarit tự nhiên (hay lôgarit nê–pe)***, ký hiệu là lnx.
* Nếu $x = 10^n$ thì $\log x = n$
* Với $x \ge 1$ tùy ý ta có: $n \le \log x < n+1 \Rightarrow 10^n \le x < 10^{n+1}$.

  Suy ra: Nếu $n \le \log x < n+1$ thì x có n + 1 chữ số.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: Tính toán lôgarit

1. PHƯƠNG PHÁP:

Để tính lôgarit ta sử dụng:

1. Định nghĩa lôgarit:

Cho a > 0, a ≠ 1 và b > 0. Ta có: $\boxed{\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b}$.

2. Các tính chất của lôgarit:

* $\log_a 1 = 0,\ \log_a a = 1$
* $\log_a a^b = b$
* $a^{\log_a b} = b$
* $\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$
* $\log_a\left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
* $\log_a b^\alpha = \alpha\log_a b\ (\alpha \in \mathbb{R})$.
* $\log_a \dfrac{1}{b} = -\log_a b$.
* $\log_a \sqrt[n]{b} = \dfrac{1}{n}\log_a b$.

3. Công thức đổi cơ số của lôgarit:

Với 0 < a, b ≠ 1 và c > 0 và α ≠ 0.

* $\log_b c = \dfrac{\log_a c}{\log_a b}$ hay $\log_a b.\log_b c = \log_a c$
* $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ hay $\log_a b.\log_b a = 1$
* $\log_{a^\alpha} c = \dfrac{1}{\alpha}\log_a c$

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Tính các giá trị sau:

$A = \dfrac{\log_{1/7} 32}{\log_7 15 - \log_7 30}$; $B = \log_5\sqrt{3} - \dfrac{1}{2}\log_5 12 + \log_5 250$.

Giải

$$A = \frac{\log_{1/7} 32}{\log_7 15 - \log_7 30} = \frac{-\log_7 32}{\log_7 \frac{15}{30}} = \frac{-\log_7 32}{\log_7 \frac{1}{2}} = \frac{-\log_7 2^5}{-\log_7 2} = \frac{5\log_7 2}{\log_7 2} = 5.$$

$$B = \log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2}\log_5 12 + \log_5 250 = \frac{1}{2}\log_5 3 - \frac{1}{2}\log_5 12 + \log_5 250$$

$$= \frac{1}{2}\log_5 \frac{3}{12} + \log_5 250$$

$$= \frac{1}{2}\log_5 2^{-2} + \log_5 50 = -\log_5 2 + \log_5 250 = \log_5 \frac{250}{2} = \log_5 125 = 3.$$

Ví dụ 2:

a. Rút gọn biểu thức sau: $A = \log_{\frac{1}{4}}(\log_3 4.\log_2 3)$

b. Cho $\log_2 14 = a$, tính $\log_{49} 32$ theo a.

Giải

a) $A = \log_{\frac{1}{4}}(\log_3 4.\log_2 3) = \log_{\frac{1}{4}}(\log_2 4) = \log_{2^{-2}}(\log_2 2^2) = -\frac{1}{2}\log_2 2 = -\frac{1}{2}$.

b) Ta có: $\log_2 14 = a \Leftrightarrow \log_2 2 + \log_2 7 = a \Leftrightarrow \log_2 7 = a - 1$;

Do đó: $\log_{49} 32 = \log_{7^2} 2^5 = \frac{5}{2}\log_7 2 = \frac{5}{2(a-1)}$

3. BÀI TẬP:

1. Hãy tìm lôgarit của mỗi số sau theo cơ số 3:

$81\sqrt{3}$; $\quad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3}.\sqrt[6]{3}}$; $\quad \frac{\sqrt[3]{3\sqrt[5]{3}}}{9}$; $\quad \frac{27}{\sqrt[3]{9\sqrt[4]{3}}}$.

2. Tính $\log_{\frac{1}{5}} 125$; $\quad \log_{0,5}\frac{8\sqrt{2}}{2\sqrt[3]{4}}$; $\quad \log_{\frac{1}{4}}\frac{\sqrt[3]{2}}{64}$; $\quad \log_{\frac{1}{\sqrt[3]{6}}} 36\sqrt{6}$.

3. Tính $3^{\log_3 18}$; $\quad 3^{5\log_3 2}$; $\quad \left(\frac{1}{8}\right)^{1+\log_2 5}$; $\quad \left(\frac{1}{32}\right)^{-1-\log_{0,5} 5}$.

4. Hãy tính:

a. $A = 2\log_{64} 12 + \log_{2\sqrt{2}} \sqrt{15} + \log_8 20$;

b. $B = \frac{1}{2}\log_7 36 - \log_{49} 196 - 3\log_7 \sqrt[3]{21}$

c. $C = \dfrac{(\log_5 36 - \log_5 12)\log_9 49}{\log_5 7}$;

d. $D = 36^{\log_6 5} + 10^{1-\log 2} - 8^{\log_2 3}$.

5. Đơn giản các biểu thức:

a. $M = \log\dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{2}\log 4 + 4\log\sqrt{2}$;

b. $N = \log\dfrac{4}{9} + \dfrac{1}{2}\log 36 + \dfrac{3}{2}\log\dfrac{9}{2} - \dfrac{1}{2}\log 2$;

c. $P = \log 81\sqrt{3} - 2\log\dfrac{27}{16} + \log\sqrt{108}$;

d. $Q = \log\dfrac{1}{8} - \log 0{,}375 + 2\log\sqrt{0{,}5625}$.

6. Hãy tính:

a. $\ln\sqrt{e} + \ln\dfrac{1}{e\sqrt[3]{e}}$ b. $5\ln\dfrac{e^{-1}}{\sqrt{e}} + 4\ln\left(e^2\sqrt{e}\right)$

7. Đơn giản các biểu thức:

a. $A = \left(\ln a + \log_a e\right)^2 + \ln^2 a - \log^2{}_a e$.

b. $B = 2\ln a + 3\log_a e - \dfrac{3}{\ln a} - \dfrac{2}{\log_a e} + 2\ln 10\log_a$.

Vấn đề 2: So sánh hai lôgarit

1. PHƯƠNG PHÁP:

Để so sánh hai lôgarit ta áp dụng các kết quả sau:

1. Nếu $a > 1$ thì: $\log_a M > \log_a N \Leftrightarrow M > N > 0$.
2. Nếu $0 < a < 1$ thì: $\log_a M > \log_a N \Leftrightarrow 0 < M < N$.
3. Nếu $0 < a < b < 1$ hay $1 < a < b$ thì:
   * $\log_a x > \log_b x \Leftrightarrow x > 1$.
   * $\log_a x < \log_b x \Leftrightarrow 0 < x < 1$.
4. $\log_a b > 0 \Leftrightarrow$ a và b cùng lớn hơn 1 hay cùng nhỏ hơn 1.

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Hãy so sánh hai số sau:

a) $m = \log_{\sqrt{3}}\dfrac{3}{5}$ với $n = \log_{\sqrt{3}}\dfrac{7}{9}$.

b) $m = \log_{\sqrt{2}-1} 15$ với $n = \log_{\sqrt{2}+1} 2$.

Giải

a) Ta có: $a = \sqrt{3} > 1$ và $\frac{3}{5} < \frac{7}{9}$ nên $\log_{\sqrt{3}} \frac{3}{5} < \log_{\sqrt{3}} \frac{7}{9}$. Vậy m < n.

b) Ta có: $a = \sqrt{2} - 1 < 1$ và $15 > 2$ nên $\log_{\sqrt{2}-1} 15 < \log_{\sqrt{2}-1} 2$. Vậy m < n.

Ví dụ 2: So sánh hai số sau: $m = \log_{\frac{1}{3}} 8$ với $n = \log_{115} 2$.

Giải

Ta có: $\frac{1}{3} < 1$ và $8 > 1$ nên $\log_{\frac{1}{3}} 8 < 0$.

$115 > 1$ và $2 > 1$ nên $\log_{115} 2 > 0$.

Vậy m < n.

Ví dụ 3: So sánh hai số sau $m = \log_3 4$ với $n = \log_2 3$.

Giải

Ta có: $m = \log_3 4 = \log_{3^2} 4^2 = \log_9 16$,

$n = \log_2 3 = \log_{2^3} 3^3 = \log_8 27$.

Ta có: $8 > 1$ và $27 > 16$ nên $\log_8 27 > \log_8 16$ (1)

$8 < 9$ và $16 > 1$ nên $\log_8 16 > \log_9 16$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra m < n.

3. BÀI TẬP:

1. So sánh các số sau:

a. $\log_3 4$ với $\log_4 \frac{1}{3}$; b. $3^{\log_7 1.4}$ với $7^{\log_5 0.92}$.

c. log2 + log3 với log5; d. log13 – log3 với log6.

e. 2ln2 – ln5 với log1,1; f. 1 + 2log3 với log89.

2. So sánh các số sau:

a. $\log_7 29$ với $\log_3 5$; b. $\log_{0,3} 0.8$ với $\log_{0,2} 0,3$.

Vấn đề 3: Biểu diễn một lôgarit theo các lôgarit khác

1. PHƯƠNG PHÁP:

Để biểu diễn $\log_a b$ theo $\log_c d$ ta đưa $\log_a b$ về lôgarit theo cơ số c và viết a và b thành tích hay thương của các lũy thừa theo cơ số c và d.

Áp dụng tính chất lôgarit của tích và của thương ta suy ra kết quả.

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Cho $\alpha = \log_2 3$ và $\beta = \log_2 5$. Hãy tính $\log_{225}(2700)$.

Giải

Ta có:

$$\log_{225}(2700) = \frac{\log_2 2700}{\log_2 225} = \frac{\log_2(2^2.3^3.5^2)}{\log_2(3^2.5^2)}$$

$$= \frac{2\log_2 2 + 3\log_2 3 + 2\log_2 5}{2\log_2 3 + 2\log_2 5} = \frac{2 + 3\alpha + 2\beta}{2\alpha + 2\beta}.$$

Ví dụ 2: Biểu diễn theo a = ln2 các số sau:

$$\ln 16\,;\ \ln 0{,}125\,;\ \frac{1}{8}\ln\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\ln\frac{1}{8}.$$

Giải

$$\ln 16 = \ln 2^4 = 4\ln 2 = 4a;\quad \ln 0{,}125 = \ln\frac{1}{8} = -3\ln 2 = -3a;$$

$$\frac{1}{8}\ln\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\ln\frac{1}{8} = \frac{1}{8}\ln 2^{-2} - \frac{1}{4}\ln 2^{-3} = -\frac{1}{4}\ln 2 + \frac{3}{4}\ln 2 = \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}a.$$

3. BÀI TẬP:

1. Hãy biểu diễn các lôgarit sau qua α và β:

   a. $\log_{\sqrt{3}} 50$, nếu $\log_3 15 = \alpha, \log_3 10 = \beta$.

   b. $\log_4 1250$, nếu $\log_2 5 = \alpha$.

   c. $\log_{30} 1350$, nếu $\log_{30} 5 = a$ và $\log_{30} 3 = b$.

2. Biểu diễn các số sau đây theo a = ln2, b = ln5:

   a) $\ln 500$; b) $\ln\frac{16}{25}$;

   c) $\ln 6{,}25$; d) $\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + \ldots + \ln\frac{98}{99} + \ln\frac{99}{100}$.

3. Biểu diễn theo a = ln2, b = ln3 các số sau:

   $\ln 36$; $\ln\frac{1}{12}$; $\ln 21 + 2\ln 14 - 3\ln 0{,}875$.

4. Biết $\log_a b = 3, \log_a c = -2$, hãy tính $\log_a x$:

   a) $x = a^3b^2\sqrt{c}$ b) $x = \frac{a^4\sqrt[3]{b}}{c^3}$.

Vấn đề 4: Tìm giá trị của x thỏa mãn hệ thức lôgarit

1. PHƯƠNG PHÁP:

Sử dụng các công thức biến đổi lôgarit đưa hệ thức đã cho về dạng:

$\log_a f(x) = \log_a g(x)$

Từ đó ta có: $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \text{ hay } g(x) > 0. \end{cases}$ (1). Giải (1) ta tìm được x.

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Tìm x biết $\log_3\left(x^2-1\right)+\log_9\left(x^2-1\right)=\dfrac{3}{2}$.

Giải

(1) $\Leftrightarrow \log_3(x^2-1)+\dfrac{1}{2}\log_3(x^2-1)=\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \log_3(x^2-1)=1$

$\Leftrightarrow x^2-1=3 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2.$

3. BÀI TẬP:

1. Tìm x, biết:

a. $\log_{x-1}(4x-4)=2$;   b. $\log_2(x^3+2x^2)=4$;

c. $\log_3(x^3+2)=3$;   d. $\log_{\frac{1}{6}}(x^2+4x-6)=-1$.

2. Trong mỗi trường hợp sau, hãy tìm x theo a và b (a, b > 0):

a. $\log_3 x = 4\log_3 a + 7\log_3 b$;   b. $\log_5 x = 2\log_5 a - 3\log_5 b$.

3. Tìm x biết:

a. $\log_x(24+x)=3$;   b. $\log_x \dfrac{1}{64} = \dfrac{-\log_{\sqrt{2}} 2}{\log_{12} 2+\log_{12} 6}$.

Vấn đề 5: Chứng minh đẳng thức chứa lôgarit

1. PHƯƠNG PHÁP:

Áp dụng các công thức biến đổi lôgarit, công thức đổi cơ số để biến đổi vế này thành vế kia, hai vế cùng bằng một đại lượng thứ 3, …

2. VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Cho a, b, c là ba số dương và c ≠ 1.

Chứng minh rằng: $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$.

Giải

Áp dụng công thức $a^{\log_a b} = b$ ta có:

$$a^{\log_c b} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_c b} = b^{\log_c b.\log_b a} = b^{\log_c a}.$$

Vậy đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 2: Cho a, b, c là các số dương và khác 1.

Chứng minh rằng: $\dfrac{\log_a c}{\log_{ab} c} = 1 + \log_a b$.

Giải

Ta có: Vế trái $= \log_c ab.\log_a c = \left(\log_c a + \log_c b\right)\log_a c$

$= \log_a c.\log_c a + \log_a b.\log_c b = 1 + \log_a b$ = Vế phải.

Vậy đẳng thức đã được chứng minh.

3. BÀI TẬP:

1. Chứng minh:

$$\frac{7}{16}\ln\left(3+2\sqrt{2}\right) - 4\ln\left(\sqrt{2}+1\right) - \frac{25}{8}\ln\left(\sqrt{2}-1\right) = 0$$

2. Chứng minh rằng:

a. Nếu $\begin{cases} a^2 + b^2 = 7ab \\ a > 0, b > 0 \end{cases}$ thì $\log_7 \dfrac{a+b}{3} = \dfrac{1}{2}(\log_7 a + \log_7 b)$.

b. Nếu $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 12xy \\ x > 0, y > 0 \end{cases}$ thì $2\log(x+2y) = \log x + \log y + 4\log 2$.

3. Chứng minh $a^{\sqrt{\log_a b}} - b^{\sqrt{\log_b a}} = 0$.

4. Cho $0 < a \neq 1$; $0 < x \neq 1$ và $n \in N^*$. Chứng minh:

$$\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_{a^2} x} + \ldots + \frac{1}{\log_{a^n} x} = \frac{n(n+1)}{2\log_a x}.$$

5. Cho $a = \log_{12}18$ và $b = \log_{24}54$. Chứng minh rằng: $5(a - b) + ab = 1$.

§3. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

I. Định nghĩa: Cho $0 < a \neq 1$.

* Hàm số dạng $y = a^x$ được gọi là *hàm số mũ* theo cơ số a.

* Hàm số dạng $y = \log_a x$ được gọi là *hàm số lôgarit* theo cơ số a.

II. Một số giới hạn liên quan đến hàm số mũ và hàm số lôgarit:

1. Hàm số mũ và hàm số lôgarit liên tục tại mọi điểm mà hàm số xác định, nghĩa là ta có:

➢ $\forall x_0 \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$

➢ $\forall\ x_0 \in (0; +\infty),\ \lim\limits_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0$.

2. Ta có $\lim\limits_{t \to +\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e;\ \lim\limits_{t \to -\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$.

3. Bằng cách viết $\frac{1}{t} = x$, ta được: $\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

4. **Định lý**: $\lim\limits_{x \to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$ và $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

III. Đạo hàm của hàm số mũ

Định lý: Cho $0 < a \neq 1$.

Hàm số $y = a^x$ có đạo hàm tại mọi $x \in R$ và: $\boxed{(a^x)' = a^x.\ln a}$

Đặc biệt: $(e^x)' = e^x$.

Nếu $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm trên khoảng K thì hàm số $y = a^{u(x)}$ có đạo hàm trên K và :

$$\boxed{(a^{u(x)})' = u'(x).a^{u(x)}.\ln a}$$

Đặc biệt: $(e^{u(x)})' = u'(x).e^{u(x)}$.

IV. Đạo hàm của hàm số lôgarit

1. **Định lý**: Cho $0 < a \neq 1$ và $u = u(x)$ là hàm số nhận giá trị dương và có đạo hàm trên khoảng K. Ta có:

a) $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$. Nói riêng, ta có: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

b) $(\log_a u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)\ln a}$; Đặc biệt: $(\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

2. **Hệ quả**:

a) $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}\ (x \neq 0)$; b) $(\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

V. Sự biến thiên và đồ thị của hàm số mũ:

– Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

– Tập giá trị: $f(D) = (0; +\infty)$.

– Đạo hàm: $y' = a^x.\ln a$

Do đó: Khi $a > 1$ thì $y' > 0$ nên hàm số $y = a^x$ đồng biến trên R.

Khi $0 < a < 1$ thì $y' < 0$ nên hàm số $y = a^x$ nghịch biến trên R.

– Giới hạn và tiệm cận:

* Khi $a > 1$ ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ nên đồ thị hàm số $y = a^x$ nhận $y = 0$ làm tiệm cận ngang khi $x \to -\infty$.

* Khi $0 < a < 1$ ta có $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$ nên đồ thị hàm số $y = a^x$ nhận $y = 0$ làm tiệm cận ngang khi $x \to +\infty$.

– Bảng biến thiên:

* Với $a > 1$:

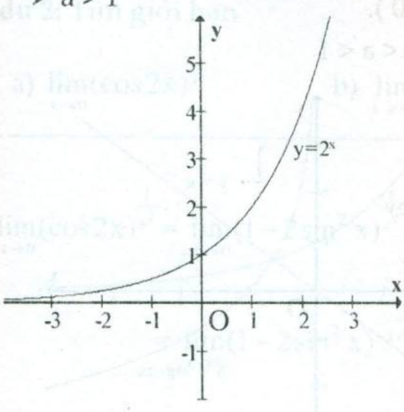
x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		+		+	
y	0	↗	1	↗	$+\infty$

* Với $0 < a < 1$:

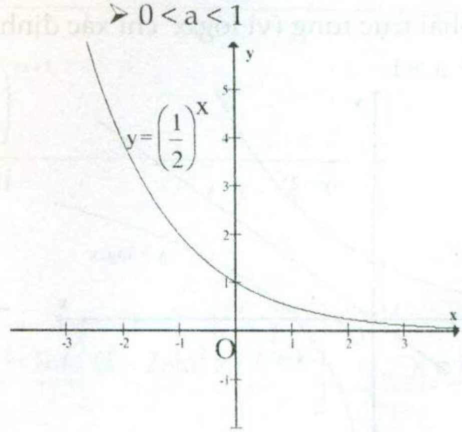
x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		–		–	
y	$+\infty$	↘	1	↘	0

– Đồ thị hàm số luôn cắt trục tung tại điểm M(0; 1) (vì $a^0 = 1$) và nằm ở phía trên trục hoành (vì $a^x > 0$ với mọi x).

➢ $a > 1$



➢ $0 < a < 1$



VI. Sự biến thiên và đồ thị của hàm số $y = \log_a x$

– Tập xác định: $D = \left(0;+\infty\right)$

– Tập giá trị: $f(D) = \mathbb{R}$.

– Đạo hàm: $y' = \dfrac{1}{x.\ln a}$.

* Khi $a > 1$ thì $y' > 0$ nên $y = \log_a x$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

* Khi $0 < a < 1$ thì $y' < 0$ nên $y = \log_a x$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

– Giới hạn và tiệm cận:

* Khi $a > 1$: $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty; \lim\limits_{x\to +\infty} \log_a x = +\infty \Rightarrow x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị khi $x \to 0^+$.

* Khi $0 < a < 1$: $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty; \lim\limits_{x\to +\infty} \log_a x = -\infty \Rightarrow x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị khi $x \to 0^+$.

– Bảng biến thiên:

Với $a > 1$:

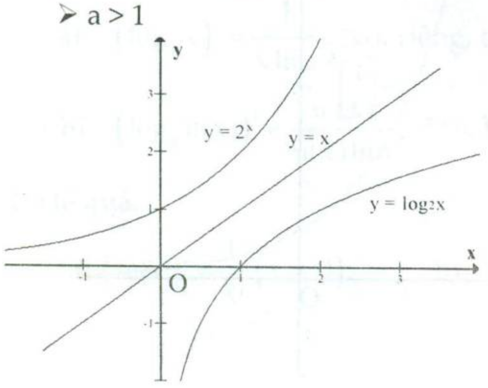
x	0	1	$+\infty$
y'		+	
y	$-\infty$	0	$+\infty$

Với $0 < a < 1$:

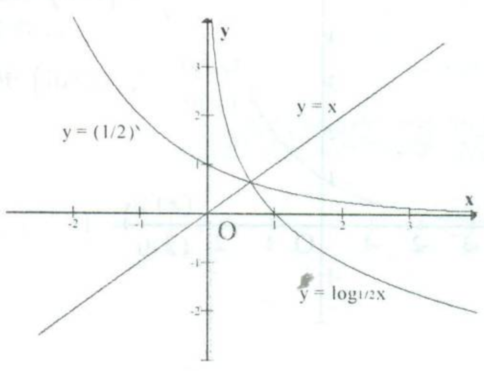
x	0	1	$+\infty$
y'		–	
y	$+\infty$	0	$-\infty$

– Đồ thị hàm số luôn cắt trục hoành tại điểm M(1; 0) (vì $\log_a 1 = 0$) và nằm ở bên phải trục tung (vì $\log_a x$ chỉ xác định khi $x > 0$).

➢ $a > 1$



➢ $0 < a < 1$



<u>*Nhận xét:*</u>

Đồ thị (G) của hàm số $y = a^x$ và đồ thị (G') của hàm số $y = \log_a x$ đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất: $y = x$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: Tìm giới hạn của hàm số mũ

1. PHƯƠNG PHÁP:

Sử dụng các công thức giới hạn:

➢ $\forall x_0 \in \mathbb{R}, \lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$ (với $0 < a \neq 1$).

➢ Khi gặp giới hạn dạng 1^∞ ta biến đổi để áp dụng

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \text{ hay } \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

➢ Khi gặp giới hạn dạng $\frac{0}{0}$ ta biến đổi để áp dụng $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$.

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{2x+1}{x+1}}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{e^x}-1}{2x}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{2x+1}{x+1}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x+1}} = e^2$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{e^x}-1}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\frac{x}{3}}-1}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{6}.\frac{e^{\frac{x}{3}}-1}{\frac{x}{3}}\right) = \frac{1}{6}$.

Ví dụ 2: Tìm giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{4x+3}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}(1-2\sin^2 x)^{\frac{1}{x^2}}$

$$= \lim_{x\to 0}(1-2\sin^2 x)^{\frac{1}{-2\sin^2 x}.\frac{-2\sin^2 x}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left[(1-2\sin^2 x)^{\frac{1}{-2\sin^2 x}}\right]^{-2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2} = e^{-2}.$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{4x+3} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}}\right]^{\frac{2(4x+3)}{x+1}} = e^8.$

3. BÀI TẬP:

1. Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^2-e^{5x+2}}{x}$; b. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-e^{7x}}{x}$; c) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}+e^{\sin3x}-2}{x}$.

2. Tìm giới hạn:

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x.e^{\frac{1}{x}}-x\right)$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{3x+1}$; c) $\lim\limits_{x\to0}(1+4\sin3x)^{\frac{1}{2x}}$.

Vấn đề 2: Tìm giới hạn của hàm số lôgarit

1. PHƯƠNG PHÁP:

Sử dụng các công thức giới hạn:

- $\forall x_0\in\mathbb{R}^+$, $\lim\limits_{x\to x_0}\log_a x=\log_a x_0$ (với $0<a\neq1$).
- $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ (Dùng khi giới hạn có dạng $\frac{0}{0}$, có chứa lôgarit)

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to8}\log_2 x$; b. $\lim\limits_{x\to0}\log\left|\frac{\sin10x}{x}\right|$; c. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin2x)}{x}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x\to8}\log_2 x=\log_2 8=3$

b) $\lim\limits_{x\to0}\log\left|10.\frac{\sin10x}{10x}\right|=\log10=1$

c) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{\ln(1+\sin2x)}{\sin2x}.2.\frac{\sin2x}{2x}\right]=2$

3. BÀI TẬP:

1. Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{x}$; b. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{x}$; c. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(3x+1)-\ln(2x+1)}{x}$.

2. Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x[e^{\sin 4x}-\ln e(1+3x)]}{\ln(\cos 2x)}$; b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\dfrac{2}{x+1}\ln\left(\dfrac{x+5}{x+1}\right)$.

Vấn đề 3: Tìm đạo hàm của hàm số mũ

1. PHƯƠNG PHÁP:

Sử dụng các công thức tính đạo hàm:

$(a^x)' = a^x.\ln a$ $(e^x)' = e^x$.

$[a^{u(x)}]' = u'(x).a^{u(x)}.\ln a$ $[e^{u(x)}]' = u'(x).e^{u(x)}$.

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a. $y=\left(x^2+1\right)e^{4x}$ b. $y=e^{\sqrt{x}.\sin\sqrt{x}}$

Giải

a. $y=\left(x^2+1\right)e^{4x}$

$\Rightarrow y' = (x^2+1)'e^{4x}+(x^2+1)(e^{4x})' = 2xe^{4x}+(x^2+1)4e^{4x} = 2e^{4x}(2x^2+x+2)$.

b. $y=e^{\sqrt{x}.\sin x}$

$\Rightarrow y' = (\sqrt{x}.\sin\sqrt{x})'e^{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}} = (\dfrac{1}{2\sqrt{x}}.\sin\sqrt{x}+\sqrt{x}\cos\sqrt{x}.\dfrac{1}{2\sqrt{x}})e^{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}$

$=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}\left(\sin\sqrt{x}+\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\right)$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y=e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}$. Chứng minh: $4xy''+2y'-y=0$.

Giải

Ta có: $y' = (\sqrt{x})'e^{\sqrt{x}}+(-\sqrt{x})'e^{-\sqrt{x}} = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}-\dfrac{e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = \dfrac{e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$.

$$y'' = \frac{(e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}})'.2\sqrt{x}-(e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}})(2\sqrt{x})'}{4x}$$

$$=\frac{(\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}).2\sqrt{x}-(e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}})(2\frac{1}{2\sqrt{x}})}{4x}$$

$$= \frac{(e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}).2\sqrt{x} - (e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}})(2)}{8x\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2\sqrt{x}.y - 2.2\sqrt{x}.y'}{8x\sqrt{x}} = \frac{y - 2y'}{4x}.$$

Suy ra $4xy'' = y - 2y'$ hay $4xy'' + 2y' - y = 0$ (ĐPCM).

3. BÀI TẬP

1. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a. $y = (x-1)e^{2x}$; b. $y = x^2.\sqrt{e^{4x}+1}$; c. $y = \frac{1}{2}\left(e^{2x} - e^{-2x}\right)$;

d. $y = (x+1)e^{x^2} + (x^2+1)e^{x+1}$; e. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; f. $y = 2^x - \sqrt{e^x}$.

2. Tìm đạo hàm cấp n ($n \in N^*$) của các hàm số sau:

a. $y = a^x$ b. $y = e^{kx}$.

3. Cho hàm số $y = x.e^{-\frac{1}{x}}$. Chứng minh rằng: $x^3y'' - xy' + y = 0$.

4. Cho hàm số $y = e^{4x} + 2e^{-x}$. Chứng minh rằng: $y''' - 13y' - 12y = 0$.

5. Cho hàm số $y = e^{-x}.\sin x$. Chứng minh rằng: $y'' + 2y' + 2y = 0$.

Vấn đề 4: Tìm đạo hàm hàm số lôgarit

1. PHƯƠNG PHÁP:

Sử dụng các công thức tính đạo hàm:

$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ $(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$.

$(\log_a|x|)' = \frac{1}{x\ln a}$ $(\log_a|u|)' = \frac{u'}{u\ln a}$.

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Tìm đạo hàm của hàm số sau: $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

Giải

Ta có: $y' = \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng:

Nếu $y = (x+1)\ln(x+2)$ thì $(x+1)y' - (x+2)y'' = x + y - 1$.

Giải

Ta có: $y' = \ln(x+2) + \dfrac{x+1}{x+2}$.

$$y'' = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{x+3}{(x+2)^2}$$

Do đó:

$$(x+1)y' = (x+1)\ln(x+2) + \frac{x^2+2x+1}{x+2} = y + x + \frac{1}{x+2}.$$

$$(x+2)y'' = \frac{x+3}{x+2} = 1 + \frac{1}{x+2}$$

Suy ra: $(x+1)y' - (x+2)y'' = x + y - 1$ (ĐPCM).

3. BÀI TẬP

1. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a. $y = (3x-2)\ln^2(3x-2)$ b. $y = \sqrt{x^2+1}.\ln x^2$

c. $y = x.\ln\dfrac{1}{1+x}$ d. $y = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$.

2. Tìm đạo hàm cấp n của các hàm số sau:

a. $y = \ln x$; b. $y = x\ln x$ $(n \geq 2)$.

3. Cho hàm số $y = \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$. Chứng minh rằng: $x^2y'' + xy' + y = 0$.

4. Cho $y = \ln\dfrac{1}{1+x}$. Chứng minh: $xy' + 1 = e^y$.

5. Cho $y = \dfrac{1}{1+x+\ln x}$. Chứng minh: $xy' = y(y\ln x - 1)$.

Vấn đề 5: Tìm tập xác định - chứng minh bất đẳng thức; tìm giá trị lớn nhất - giá trị nhỏ nhất của hàm số mũ và hàm số logarit.

1. PHƯƠNG PHÁP:

a) Cần chú ý: $\log_a b$ xác định $\Leftrightarrow 0 < a \neq 1$ và $b > 0$.

b) Hàm số mũ $y = a^x$ với $0 < a < 1$.

* Tăng trên R nếu $a > 1$.
* Giảm trên R nếu $0 < a < 1$.

b) Hàm số logarit $y = \log_a x$ với $0 < a < 1$

* Tăng trên $(0; +\infty)$ nếu $a > 1$
* Giảm trên $(0; +\infty)$ nếu $0 < a < 1$

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Chứng minh rằng: $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$ với mọi $x > 0$.

Giải

Xét hàm số: $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$ trên $[0; +\infty)$.

Ta có: * f liên tục trên $[0; +\infty)$.

* $y'(x) = e^x - 1 - x$; $y''(x) = e^x - 1$

Vì $x > 0 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f'(x)$ là hàm đồng biến trên $[0; +\infty)$.

Suy ra $f'(x) > f'(0)$ với $x > 0$.

$\Rightarrow f'(x) > 0$ với $x > 0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$

$\Rightarrow f(x) > f(0)$ với mọi $x > 0$.

$\Rightarrow e^x - x - \frac{x^2}{2} - 1 > 0, \forall x > 0 \Rightarrow e^x > \frac{x^2}{2} + x + 1, \forall x > 0$.

Ví dụ 2: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = 4^x$ trên đoạn $[2;4]$

Giải

Do hàm số $f(x) = 4^x$ là hàm số mũ với cơ số lớn hơn 1 nên hàm số luôn đồng biến.

Do đó ta có: $f(2) \le f(x) \le f(4)$ với mọi $x \in [2; 4]$.

Vì vậy: $\max\limits_{x\in[2;4]} f(x) = f(4) = 256$; $\min\limits_{x\in[2;4]} f(x) = f(2) = 16$.

Ví dụ 3: Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $y = \log_2 \frac{3}{10 - x}$ b) $y = \log_{5-x} x^2$

c) $y = \log_3 \frac{x+1}{\sqrt{x^2 - x - 2}}$ d) $y = \frac{1}{\log_2 x - 1}$

Giải

a) $y = \log_2 \frac{3}{10 - x}$.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \frac{3}{10 - x} > 0 \Leftrightarrow x < 10$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; 10)$.

b) $y = \log_{5-x} x^2$.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 5 - x \ne 1 \\ x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \ne x < 5 \\ x \ne 0 \end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là D = (–∞; 5)\{0; 4}.

c) $y = \log_3 \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2 - x - 2}}$.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x-2}} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1>0 \\ x^2-x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2.$

Vậy tập xác định của hàm số là D = (2; +∞).

d) $y = \dfrac{1}{\log_2 x - 1}$.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là D = (0; +∞)\{2}.

Ví dụ 4: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$f(x) = (x-1)\ln x$ trên $\left[\dfrac{1}{e}; e^2\right]$.

Giải

Tập xác định: $D = (0; +\infty)$; $X = \left[\dfrac{1}{e}; e^2\right]$.

$$f'(x) = \ln x + (x-1).\frac{1}{x} = \frac{x\ln x + x - 1}{x}.$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = x\ln x + x - 1 = 0$ (*).

Ta có: $\quad * \; g(1) = 0$

$\quad * \; g'(x) = \ln x + 2$

Với $x \in (e^{-1}; e^2)$ thì $-1 < \ln x < 2$ nên $g(x) > 0$ với mọi $x \in (e^{-1}; e^2)$. Do đó (*) có nghiệm duy nhất là x = 1.

Ta có: $f(e^2) = 2(e^2 - 1)$; $f(e^{-1}) = -(e^{-1} - 1)$ và $f(1) = 0$.

Do đó: $\max\limits_X f(x) = f(e^2) = 2(e^2 - 1)$; $\min\limits_X f(x) = f(1) = 0$.

3. BÀI TẬP

1. a. Chứng minh rằng hàm số $y = \dfrac{2^x - 2^{-x}}{3}$ đồng biến trên R.

b. Chứng minh rằng hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x - \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ đồng biến trên R^+.

2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a. $f(x) = 3^x + 2^x$ trên [–1; 1] $\qquad$ b. $f(x) = 5^{|x^2 - 2x|}$ trên [–1; 2].

3. Cho $a^\alpha + b^\alpha = c^\alpha$ $(a > 0, b > 0, \alpha > 0)$

a. Chứng minh: $a^m + b^m < c^m$ nếu $m > \alpha$.

b. Chứng minh: $a^m + b^m > c^m$ nếu $m < \alpha$.

4. Với điều kiện nào của a thì:

a. $a^\pi > \sqrt[3]{a^{10}}$; b. $a^{-0,02} < a^{\sqrt{3}}$; c. $(a-1)^{\frac{3}{4}} > (a-1)^{t+\sqrt{t}+1}$ $(t > 0)$.

5. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{4^x}{4^x + 2}$. Tính tổng sau:

$$S = f\left(\frac{1}{2012}\right) + f\left(\frac{2}{2012}\right) + f\left(\frac{3}{2012}\right) + \ldots + f\left(\frac{2011}{2012}\right).$$

6. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \log_3\left(x^2 + 2x\right)$; b) $y = \log_{0,7}\dfrac{x^2 - 9}{x + 5}$;

c) $y = \dfrac{2}{\log_4 x - 3}$; d) $y = \log_3\left(2 - x\right)^2$.

7. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a. $y = \ln x^2$ $\left(-e \le x \le -\dfrac{1}{e}\right)$; b. $y = \left|\ln x\right|$;

c. $y = \log_2 x - \dfrac{2}{x}$ $\left(x \ge \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; d. $y = \dfrac{\ln(2x - 3)}{2x - 3}$.

8. Xét sự biến thiên của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{x^2 + 1}.\ln x^2$; b) $y = x.\ln\left(\dfrac{1}{x + 1}\right)$.

9. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \dfrac{\ln\left(x^2 + 1\right)}{x}$ đồng biến trong các khoảng $(-1;0)$; $(0;1)$.

10. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \dfrac{\ln^2 x}{x}$ trên đoạn $[1; e^3]$.

11. Chứng minh: $x > \ln(1 + x) > x - \dfrac{x^2}{2}$ với mọi $x > 0$.

12. Cho $0 < x < 1$; $0 < y < 1$ và $x < y$. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{y - x}\left(\ln\dfrac{y}{1 - y} - \ln\dfrac{x}{1 - x}\right) > 4$.

13. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$f(x) = \ln x - \dfrac{x + 1}{x}\ln(x + 1)$ trên $[1; e]$.

§4. PHƯƠNG TRÌNH MŨ

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

1. Định nghĩa:

Phương trình mũ là phương trình có chứa ẩn ở số mũ của lũy thừa

2. Phương trình mũ cơ bản

$$\boxed{a^x = m} \text{ với } 0 < a \neq 1.$$

* Nếu $m \le 0$ thì phương trình vô nghiệm.
* Nếu $m > 0$ thì: $a^x = m \Leftrightarrow x = \log_a m$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: Đưa về cùng một cơ số

1. PHƯƠNG PHÁP:

Sử dụng các quy tắc biến đổi lũy thừa để đưa phương trình đã cho về phương trình mà *hai vế là hai lũy thừa có cùng cơ số*. Áp dụng kết quả:

Với $0 < a \neq 1$ thì: $a^\alpha = a^\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$

ta sẽ đưa phương trình đã cho về phương trình không còn ẩn ở mũ.

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

a) $2^{2x-1} + 4^{x+1} = 72$ b) $9^{x^2+3} = 27^{2x+2}$.

c) $5^{2^{\frac{1}{x}}} = 625$ d) $4^{-2x^2} = 64^{x-9}$.

Giải

a) $2^{2x-1} + 4^{x+1} = 72 \Leftrightarrow \dfrac{4^x}{2} + 4^x.4 = 72 \Leftrightarrow 9.4^x = 144$

$\Leftrightarrow 4^x = 16 = 4^2 \Leftrightarrow x = 2.$

b) $9^{x^2+3} = 27^{2x+2} \Leftrightarrow \left(3^2\right)^{x^2+3} = \left(3^3\right)^{2x+2} \Leftrightarrow 3^{2x^2+6} = 3^{6x+6}$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 6 = 6x + 6$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = 3$.

c) $5^{2^{\frac{1}{x}}} = 625 \Leftrightarrow 5^{2^{\frac{1}{x}}} = 5^4 \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{x}} = 4 = 2^2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

d) $4^{-2x^2} = 64^{x-9} \Leftrightarrow 4^{-2x^2} = 4^{3(x-9)} \Leftrightarrow -2x^2 = 3x - 27$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 27 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ hay $x = -\dfrac{9}{2}$.

Ví dụ 2: Giải phương trình sau: $3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2} = 2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2}$.

Giải

$$3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2} = 2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} \Leftrightarrow 3^x - \frac{3^x}{3} + \frac{3^x}{9} = 2^x + \frac{2^x}{2} + \frac{2^x}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{9}3^x = \frac{7}{4}2^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Leftrightarrow x = 2.$$

Ví dụ 3: Giải các phương trình sau:

a. $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{x^2-x-5} = \left(7-4\sqrt{3}\right)^{2x+3}$ b. $\left(3-2\sqrt{2}\right)^{x^2-4x} = \left(3+2\sqrt{2}\right)^{6-x}$.

Giải

a. $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{x^2-x-5} = \left(7-4\sqrt{3}\right)^{2x+3} \Leftrightarrow \left(7+4\sqrt{3}\right)^{x^2-x-5} = \left(7+4\sqrt{3}\right)^{-2x-3}$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 5 = -2x - 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$$.

b. $\left(3-2\sqrt{2}\right)^{x^2-4x} = \left(3+2\sqrt{2}\right)^{6-x} \Leftrightarrow \left(3-2\sqrt{2}\right)^{x^2-4x} = \left(3-2\sqrt{2}\right)^{x-6}$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x = x - 6 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 3 \end{array}\right.$$.

Ví dụ 4: Giải phương trình sau:

a) $5^{x-2} = 10^x.2^{-x}.5^{x+3}$ b) $2^{\frac{\sqrt{16x}+20}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}} = 4$.

Giải

a) $5^{x-2} = 10^x.2^{-x}.5^{x+3} \Leftrightarrow 5^{x-2} = 5^x2^x.2^{-x}.5^{x+3} \Leftrightarrow 5^{x-2} = 5^{2x+3}$

$\Leftrightarrow x - 2 = 2x + 3 \Leftrightarrow x = -5.$

b) Ta có: $2^{\frac{\sqrt{16x}+20}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}} = 2^2 \, (x > 0, x \neq 1)$

$$\Leftrightarrow \frac{4\left(\sqrt{x}+5\right)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = 2 \Leftrightarrow 4\left(\sqrt{x}+5\right) = 2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3\sqrt{x} - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = 5 \\ \sqrt{x} = -2 (\text{loại}) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 25$$

3. BÀI TẬP:

1. Giải các phương trình sau:

a. $5^{x+1} - 5^{x} = 2.2^{x} + 2^{x+3}$.

b. $2^{x+1} + 9.2^{x} - 2^{x+2} = 56$.

2. Giải các phương trình sau:

a. $2^{\frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}(5\sqrt{x}+1)}} - 2^{2\sqrt{x}-1} = 0$

b. $5^{2|2x-3|} - 5^{6x-8} = 0$.

c. $\left(2+\sqrt{3}\right)^{2x} = 2-\sqrt{3}$

d. $2^{x^2-3x+2} = 4$.

3. Giải các phương trình sau:

a. $2^{x^2-6x-\frac{5}{2}} = 16\sqrt{2}$

b. $3^{x-1} = 18^{2x}.2^{-2x}.3^{x+1}$.

c. $5^{x}.\ 8^{\frac{x-1}{3}} = 500$

d. $2^{x+3}.3^{x-2}.5^{x+1} = 4000$.

e. $4.9^{x-1} = 3\sqrt{2^{2x+1}}$

f. $16^{\frac{x+10}{x-10}} = 0.125.8^{\frac{x+5}{x-15}}$.

4. Giải các phương trình sau:

a. $32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0,25.128^{\frac{x+17}{x-3}}$

b. $5^{x-1} = 10^{x}.2^{-x}.5^{x+1}$

c. $4^{x} - 3^{x-0,5} = 3^{x+0,5} - 2^{2x-1}$

Vấn đề 2: Phương pháp đặt ẩn số phụ

1. PHƯƠNG PHÁP:

Tìm một lũy thừa chung, đặt làm ẩn phụ t để đưa phương trình về phương trình đơn giản hơn.

Khi đặt ẩn phụ cần lưu ý:

1. Nếu đặt $t = a^{x}$, điều kiện $t > 0$ thì:

$$a^{2x} = \left(a^{2}\right)^{x} = \left(a^{x}\right)^{2} = t^{2};\ a^{3x} = t^{3};\ a^{-x} = \frac{1}{t}.....$$

2. Lưu ý các kết quả sau:

* $\sqrt{2} - 1 = \left(\sqrt{2}+1\right)^{-1}$
* $2-\sqrt{3} = \left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}$.
* $4-\sqrt{15} = \left(4+\sqrt{15}\right)^{-1}$
* $\sqrt{7-\sqrt{48}} = \left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^{-1}$.

3. Gặp phương trình dạng $\alpha.a^{2f(x)} + \beta.a^{f(x)+g(x)} + \gamma.a^{2g(x)} = 0$ ta chia 2 vế cho $a^{2g(x)}$ và đặt $t = a^{f(x)-g(x)}$.

4. Gặp phương trình dạng $\alpha.a^{2f(x)} + \beta.(ab)^{f(x)} + \gamma.b^{2f(x)} = 0$ ta chia 2 vế cho $a^{2f(x)}$ và đặt $t = \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}$.

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Giải phương trình sau: $e^{4x}+2=3.e^{2x}$ (1)

Giải

Đặt $e^{2x}=t$ với $t>0$.

$$(1)\Leftrightarrow t^2-3t+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\frac{1}{2}\ln 2\end{array}\right..$$

Vậy nghiệm của phương trình (1) là: $x = 0$ hay $x=\frac{1}{2}\ln 2$.

Ví dụ 2: Giải phương trình sau: $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=4$ (2)

Giải

Đặt $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=t;\quad t>0\Rightarrow\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=\frac{1}{t}$.

Phương trình (2) trở thành: $t+\frac{1}{t}-4=0\quad\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t_1=2+\sqrt{3}\\t_2=2-\sqrt{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\pm 2$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 2$ và $x = -2$.

Ví dụ 3: Giải phương trình sau: $3.8^x+4.12^x=18^x+2.27^x$ (3).

Giải

Chia 2 vế cho 27^x ta có :

$$(3)\Leftrightarrow 3.\left(\frac{2}{3}\right)^{3x}+4.\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}=\left(\frac{2}{3}\right)^x+2\quad(3a)$$

Đặt $t=\left(\frac{2}{3}\right)^x$, $t>0$

Phương trình (3) trở thành $3t^3+4t^2-t-2=0$

$$\Leftrightarrow t=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{2}{3}\Leftrightarrow x=1.$$

Vậy nghiệm của phương trình là x = 1.

Ví dụ 4: Giải phương trình sau: $\frac{49^x}{10^{2x}}=6.(0,7)^x+7$ (4)

Giải

$$(4) \Leftrightarrow \frac{7^{2x}}{100^x} - 6.(0,7)^x - 7 = 0 \Leftrightarrow (0,7)^{2x} - 6.(0,7)^x + 7 = 0$$

Đặt $t = (0,7)^x$, $t > 0$

Phương trình trên trở thành:

$$t^2 - 6t - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \ \text{(loại)} \\ t = 7 \Leftrightarrow (0,7)^x = 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \log_{0,7} 7.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \log_{0,7} 7$.

Ví dụ 5: Giải phương trình sau: $5^3 - 5^{x-1} - 5^{3-x} = 99$ (5)

Giải

Ta có:

$$(5) \Leftrightarrow 5^{x-1} + 5^{3-x} - 26 = 0 \Leftrightarrow \frac{5^x}{5} + \frac{125}{5^x} = 26.$$

Đặt $t = 5^x$, điều kiện $t > 0$

Phương trình trở thành:

$$t^2 - 130t + 625 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 125 \\ t_2 = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right..$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1$ và $x = 3$.

3. BÀI TẬP:

1. Giải các phương trình sau:

   a) $3^{x+1} + 18.3^{-x} = 29$　　b) $4.9^x + 12^x = 3.16^x$

   c) $3.5^{2x+1} - 34.15^x + 135.9^{x-1} = 0$　　d) $5.6^{\frac{x}{2}} - 4.3^x + 9.2^x = 0$.

2. Giải phương trình sau: $\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x + \left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x = \sqrt{7+\sqrt{35721}}$.

3. Giải các phương trình sau:

   a. $9^x - 4.3^x - 45 = 0$　　b. $3^{2x+5} = 3^{x+2} + 2$.

   c. $9^{x^2+1} + 3^{x^2+1} - 6 = 0$　　d. $4^{x-\sqrt{x^2-5}} - 12.2^{x-1-\sqrt{x^2-5}} + 8 = 0$.

   e. $5.4^x - 7.10^x + 2.25^x = 0$　　f. $3^{2x^2+6x-9} + 4.15^{x^2+3x-5} = 3.5^{2x^2+6x-9}$

4. Giải các phương trình sau:

   a) $2^{3x+1} - 125^x - 50^x = 0$　　b) $8^x - 2.4^x - 2^x + 2 = 0$

c) $7^{\frac{2}{x}+2} - 74.35^{\frac{1}{x}} - 25^{\frac{1}{x}+1} = 0$ d) $2^{x(1-x)+2} - 2^{x(x-1)} + 3 = 0$

e) $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5.2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} - 6 = 0$ f) $3^{4x+8} - 4.3^{2x+5} + 28 = 2\log_2\sqrt{2}$.

5. Giải các phương trình sau:

a) $3^{2\sin^2 x} + 3^{2\cos^2 x} = 10$ b) $4^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} - \sqrt{2}(\sqrt{2}+1) = 0$

c) $2^{\sin^2 x} + 4.2^{\cos^2 x} = 6$ d) $4^{3+2\cos 2x} - 7.4^{1+\cos 2x} = 4^{\frac{1}{2}}$.

6. Giải các phương trình sau:

a) $2^{x^2-x} - 2^{2+x-x^2} = 3$. (Khối D – 2003)

b) $3.8^x + 4.12^x - 18^x - 2.27^x = 0$. (Khối A – 2006)

c) $\left(\sqrt{2}-1\right)^x + \left(\sqrt{2}+1\right)^x - 2\sqrt{2} = 0$ (Khối B – 2007).

d) $2^{x^2+x} - 4.2^{x^2-x} - 2^{2x} + 4 = 0$ (Khối D – 2006)

Vấn đề 3: Phương pháp lôgarit hóa

1. PHƯƠNG PHÁP:

Với phương trình không cùng cơ số dạng: $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ (a, b dương, khác 1 và nguyên tố cùng nhau), lấy lôgarit cơ số a (hoặc b) cho hai vế, ta có:

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a[a^{f(x)}] = \log_a[b^{g(x)}] \Leftrightarrow f(x) = g(x).\log_a b$$

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Giải phương trình sau: $50.2^{x^2-2} = 5^{x+1}$ (1)

Giải

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \log_2(50.2^{x^2-2}) = \log_2 5^{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \log_2 50 + \log_2 2^{x^2-2} = (x+1)\log_2 5$$

$$\Leftrightarrow \log_2 5^2.2 + x^2 - 2 - x\log_2 5 - \log_2 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x\log_2 5 - 1 + \log_2 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ hay } x = \log_2 5 - 1.$$

Ví dụ 2: Giải phương trình sau: $3^{x-1}.5^{3^{\frac{x-1}{x}}} = 15^{x^2-7}$ (2)

Giải

$$(2) \Leftrightarrow \log_5\left(2^{x-1}.5^{3\frac{x+1}{x}}\right) = \log_5\left(10^{x-1}.5^{x^2-7}\right)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\log_5 2 + 3.\frac{x+1}{x} = (x-1)\log_5 10 + x^2 - 7$$

$$\Leftrightarrow (x^2-x)\log_5 2 + 3x + 3 = (x^2-x)\log_5 10 + x^3 - 7x$$

$$\Leftrightarrow (x^2-x)(\log_5 10 - \log_5 2) + x^3 - 10x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + x^3 - 10x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 11x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x^2+4x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ hay } x = -2 \pm \sqrt{3}.$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm là $x = 3$ hay $x = -2 \pm \sqrt{3}$.

Ví dụ 3: Giải phương trình sau: $5^x.8^{\frac{x-1}{x}} - 500 = 0$

Giải

Ta có: $5^x.8^{\frac{x-1}{x}} - 500 = 0 \Leftrightarrow 5^x.2^{\frac{3(x-1)}{x}} = 5^3.2^2 \Leftrightarrow 2^{\left(\frac{3(x-1)}{x}-2\right)} = 5^{(3-x)}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3(x-1)}{x} - 2\right) = (3-x)\log_2 5$$

$$\Leftrightarrow x^2.\log_2 5 + (1 - 3\log_2 5)x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \log_5\frac{1}{2} = -\log_5 2 \\ x = 3 \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $\left[\begin{array}{l} x = -\log_5 2 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

3. BÀI TẬP:

1. Giải các phương trình sau:

a. $2^{x-3} = 5^{x^2-5x+6}$ b. $3^x.2^{x^2} = 144$ c. $3^{x-1}.2^{x^2} = 8.4^{x-2}$.

2. Giải các phương trình sau:

a. $2^{x^3-1}.5^x = 3200$ b. $3^{2x+4} = 4^{x^2-1}$

c. $6^x + 6^{x+1} = 2^{x^2} + 2^{x^2+2} + 2^{x^2+4}$ d. $7^{\log x} - 5^{\log x + \log_5(x-1) - 1} = 5^{\log x - 1} - 3.7^{\log x - 1}$.

3. Giải các phương trình sau:

a. $3^{4^x} = 4^{3^x}$ b. $3^{2-\log_3 x} = 81x$

c. $3^x.8^{\frac{x}{x+1}} = 36$ d. $x^6.5^{-\log_x 5} = 5^{-5}$.

Vấn đề 4: Phương pháp dùng tính đơn điệu của hàm số

1. PHƯƠNG PHÁP:

Hướng 1: Biến đổi hai vế của phương trình sao cho một vế là một hàm số đồng biến (hoặc là hàm hằng) và một vế là một hàm số nghịch biến (hoặc là hàm hằng).

* B1: Nhẩm và chứng minh x_0 là nghiệm.
* B2: Chứng minh x_0 là nghiệm duy nhất (bằng cách chứng minh $x \neq x_0$ không là nghiệm).

Hướng 2: Đưa phương trình về dạng f(u) = f(v) mà f là hàm số tăng hay giảm.

Khi đó ta có: $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$.

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Giải phương trình: $2^x + 3x - 5 = 0$ (1)

Giải

Xét hàm số $f(x) = 2^x + 3x - 5$, ta có:

* $f(1) = 0$ nên $x = 1$ là một nghiệm của phương trình.
* $f'(x) = 2^x \ln 2 + 3 > 0$, $\forall x$ nên f đồng biến trên R

$\Rightarrow$ (1) có nhiều nhất là một nghiệm.

Vậy phương trình (1) có một nghiệm duy nhất $x = 1$.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $3^x + 4^x = 5^x$

Giải

Chia hai vế phương trình cho 5^x ta có : $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1 = 0$ (*)

Xét hàm số: $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1$, ta có:

* $f(2) = 0 \Rightarrow x = 2$ là một nghiệm của phương trình (*).
* $f'(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x \ln\frac{3}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^x \ln\frac{4}{5} < 0 \Rightarrow$ f nghịch biến trên R

$\Rightarrow$ (*) có nhiều nhất là một nghiệm.

Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất là $x = 2$.

Ví dụ 3: Giải phương trình: $3^{2x} + 2x(3^x + 1) - 4.3^x - 5 = 0$

Giải

$$3^{2x}+2x(3^x+1)-4.3^x-5=0$$

$$\Leftrightarrow 3^{2x}+2x(3^x+1)-4.3^x-5=0$$

$$\Leftrightarrow 9^x-1+2x(3^x+1)-4(3^x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (3^x+1)\left(3^x+2x-5\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 3^x+2x-5=0\ (*).$$

Xét $f(x)=3^x+2x-5$, ta có:

* $f(1)=0 \Rightarrow x=1$ là một nghiệm của phương trình (*).

* $f'(x)=3^x\ln 3+3>0,\ \forall x\in R$

$\Rightarrow f(x)=3^x+2x-5$ đồng biến trên R.

$\Rightarrow$ Phương trình (*) có nhiều nhất một nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất là $x=1$.

3. BÀI TẬP:

1. Giải phương trình : $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^x+\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^x=\left(\sqrt{10}\right)^x$.

2. Giải phương trình : $13^x-11^x-4^x=\left(4\sqrt{2}\right)^x$

3. Giải các phương trình sau:

a) $2^x+3^x+5^x=10$ b) $3.25^{x-2}+(3x-10)5^{x-2}+3-x=0$.

4. Giải các phương trình sau:

a) $2^x=3-x$ b) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=x+4$

c) $\left(\sin\dfrac{\pi}{5}\right)^x+\left(\cos\dfrac{\pi}{5}\right)^x=1$.

5. Giải phương trình $2^{x^2+5x}+\log x=2^{x+5}$.

6. Giải phương trình sau: $x-2^{\log_5(x+3)}=0$

7. Giải phương trình: $3.2^{2x}+6-2x=3-x-(3x-10).2^x$

Vấn đề 5: Đưa về phương trình tích

1. PHƯƠNG PHÁP:

Biến đổi phương trình đã cho thành phương trình tích: A.B = 0.

Từ đó ta đưa việc giải phương trình đã cho về giải các phương trình A = 0; B = 0 đơn giản hơn.

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Giải phương trình: $x^2.2^{x-1} - 2^{x+1} - x^2.2^{|x-7|+4} + 2^{|x-7|+6} = 0$ (1)

Giải

Biến đổi bằng cách đặt thừa số chung, ta có:

$$2^{x-1}(x^2-4) - 2^{|x-7|+4}(x^2-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-4)(2^{x-1} - 2^{|x-7|+4}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2-4=0 & (1) \\ 2^{x-1} = 2^{|x-7|+4} & (2) \end{array}\right.$$

(1) $\Leftrightarrow x = \pm 2$.

(2) $\Leftrightarrow x-1 = |x-7|+4 \Leftrightarrow |x-7| = x-5$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-5 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x-7 = x-5 \\ x-7 = -(x-5) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow x = 6.$$

Vậy: Phương trình đã cho có 3 nghiệm là x = –2; x = 2; x = 6.

3. BÀI TẬP:

1. Giải phương trình: $3^{2x} + 2x(3^x+1) - 4.3^x = 5$

2. Giải phương trình: $x^2(2^{x-1} + 2^{2-x}) + 3 = 3x^2 + 2^{2-x} + 2^{x-1}$.

3. Giải phương trình: $x^2.(2^{x+1} - 2^{|x-3|+4}) + 2^{|x-3|+2} - 2^{x-1} = 0$.

4. Giải phương trình: $4^{2x+\sqrt{x+2}} + 2^{x^3} = 4^{2+\sqrt{x+2}} + 2^{x^3+4x-4}$ (khối D– 2010).

5. Giải phương trình: $4^{x^2-3x+2} + 4^{x^2+6x+5} = 4^{2x^2+3x+7} + 1$.

6. Giải phương trình: $2^{x^2+x} - 4.2^{x^2-x} - 2^{2x} + 4 = 0$ (khối D – 2006).

§5. PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

1. Định nghĩa:

Phương trình logarit là phương trình có chứa ẩn số dưới dấu lôgarit.

2. Phương trình lôgarit cơ bản

$\log_a x = m$ (với $0 < a \neq 1$) $\Leftrightarrow x = a^m$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: Đưa các lôgarit về cùng cơ số

1. PHƯƠNG PHÁP:

Với $0 < a \neq 1$ thì: * $\log_a\alpha = \log_a\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ \alpha > 0 \text{ (hay } \beta > 0) \end{cases}$

* $\log_a f(x) = m \Leftrightarrow f(x) = a^m$

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

a) $\log_3 x + \log_3(x+2) = 1$; b) $\log_2(2^x - 3) + x = 2$.

Giải

a) $\log_3 x + \log_3(x+2) = 1$ (1)

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$

(1) $\Leftrightarrow \log_3 x(x+2) = \log_3 3 \Leftrightarrow x(x+2) = 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \text{ (loại)} \\ x = 1 \text{ (nhận)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1$.

b) $\log_2(2^x - 3) + x = 2 \Leftrightarrow \log_2(2^x - 3) = 2 - x$

$\Leftrightarrow 2^x - 3 = 2^{2-x} \qquad \Leftrightarrow 2^x - 3 = \dfrac{4}{2^x}$

$\Leftrightarrow (2^x)^2 - 3.2^x - 4 = 0$ (1)

Đặt $t = 2^x$ điều kiện $t > 0$;

(1) trở thành $t^2 - 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = 4 \text{ (nhận)} \end{array}\right. \Leftrightarrow 2^x = 4 \Leftrightarrow x = 2$.

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau:

a) $\log_2\frac{1}{x}=\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-x-3\right)$ b) $\log_4\left(x+12\right).\log_x 2=1$

Giải

a) $\log_2\frac{1}{x}=\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-x-3\right)$

Điều kiện $\begin{cases}x>0\\x^2-x-3>0\end{cases}$. Ta có:

$\log_2\frac{1}{x}=\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-x-3\right)\Leftrightarrow\log_2 x^{-1}=\log_{2^{-1}}(x^2-x-3)$

$\Leftrightarrow -\log_2 x=-\log_2(x^2-x-3)\quad\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x^2-x-3=x\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x^2-2x-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x=-1\text{ hoặc }x=3\end{cases}\Leftrightarrow x=3$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=3$.

b) $\log_4\left(x+12\right).\log_x 2=1\,(1)$

Điều kiện $0<x\neq1$

$(1)\Leftrightarrow\frac{1}{2}\log_2\left(x+12\right)=\log_2 x\Leftrightarrow\log_2\left(x+12\right)=\log_2 x^2$

$\Leftrightarrow x+12=x^2\Leftrightarrow x^2-x-12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\text{ (nhận)}\\x=-3\text{ (loại)}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=4.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=4$.

3. BÀI TẬP:

1. Giải các phương trình sau:

a. $\log(\sqrt{x+1}+1)-3\log\sqrt[3]{x-40}=0$

b. $2-\log(x-9)-\log(2x-1)=0$

c. $\log_2(x^2+3x+2)+\log_2(x^2-7x+12)-\log_2 3-3=0$

d. $3^{\log_4 x+\frac{1}{2}}+3^{\log_4 x-\frac{1}{2}}=4\sqrt{x}$.

2. Giải các phương trình sau:

a. $\log_2[x(x-1)]=1$ b. $\log_2 x+\log_2(x-1)=1$.

c. $\log_2\left(3-x\right)+\log_2\left(1-x\right)=3$ d. $\log_2 x+\log_4 x=\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{3}$.

3. Giải các phương trình sau:

a. $\log_3\left(3^x+8\right)=2+x$ b. $\log_2\left(9-2^x\right)=10^{\lg(3-x)}$

c. $\log_{\sqrt{3}}x.\log_3 x.\log_9 x=8$ d. $\log_4(\log_2 x)+\log_2(\log_4 x)=2$.

4. Giải phương trình: $\log_2(4^x+15.2^x+27)+2\log_2\dfrac{1}{4.2^x-3}=0$ (1).

5. Giải các phương trình sau:

a. $\log_4(x+1)^2+2=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{4-x}+\log_8(x+4)^3$.

b. $\log_9(x^2-5x+6)^2=\dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}\dfrac{x-1}{2}+\log_3|x-3|$.

c. $(x-1)\log_5 3+\log_5(3^{x+1}+3)=\log_5(11.3^x-9)$.

d. $\log_5 x+\log_3 x=\log_5 3.\log_9 225$.

Vấn đề 2: Phương pháp đặt ẩn số phụ

1. PHƯƠNG PHÁP:

Tìm một $\log_a f(x)$ chung trong phương trình, đặt bằng t. Đưa phương trình đã cho về phương trình theo t. Giải phương trình tìm t, thay t vào cách đặt để tìm x.

__Chú ý:__ Nếu đặt $t=\log_a x$ thì $\log_{\frac{1}{a}}x=-t$; $\log_{a^2}x=\frac{1}{2}t$; $\log_a^2 x=t^2$ ...

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

a) $\log_2^2 x^2-4\log_2 x^3+8=0$; b) $\dfrac{6}{\log_2 16x}+\dfrac{4}{\log_2\left(x^2\right)}=2$.

Giải

a) $\log_2^2 x^2-4\log_2 x^3+8=0$ (1).

Điều kiện: $x>0$.

(1) $\Leftrightarrow (2\log_2 x)^2-12\log_2 x+8=0$.

Đặt $t=\log_2 x$, ta được:

$$(1)\Leftrightarrow 4t^2-12t+8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x=1\\\log_2 x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=4\end{array}\right.$$

So sánh điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x=2$ hay $x=4$.

b) $\dfrac{6}{\log_2 16x} + \dfrac{4}{\log_2\left(x^2\right)} = 2$ (2)

Điều kiện $\begin{cases} 0 < x^2 \neq 1 \\ 0 < 16x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ x \neq \dfrac{1}{16} \end{cases}$.

Ta có: (1) $\Leftrightarrow \dfrac{6}{\log_2 16 + \log_2 x} + \dfrac{4}{2\log_2 x} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{6}{\log_2 x + 4} + \dfrac{2}{\log_2 x} = 2$ (2)

Đặt $t = \log_2 x$. Phương trình (2) trở thành:

$$\frac{6}{t+4} + \frac{2}{t} = 2 \Leftrightarrow 6t + 2t + 8 = 2t(t+4) \Leftrightarrow 2t^2 - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \pm 2.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = \dfrac{1}{4} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 4$ và $x = \dfrac{1}{4}$.

Ví dụ 2: Giải phương trình sau: $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 5 = 0$.

Giải

Ta có : $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 5 = 0$ (1).

Đặt $t = \sqrt{\log_3^2 x + 1}$. Điều kiện $t \geq 1$

Phương trình (1) trở thành

$$t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \text{(nhận)} \\ t = -3 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow t = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_3^2 x = 3 \quad \Leftrightarrow \log_3 x = \pm 3 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3^{\sqrt{3}} \\ x = 3^{-\sqrt{3}} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 3^{\sqrt{3}}$; $x = 3^{-\sqrt{3}}$.

3. BÀI TẬP:

1. Giải các phương trình sau:

a. $\log^2 x = 3 + \log x^2$ b. $2.9^{\log_2 x - 1} = 6^{\log_2 x} - x^2$.

c. $\log_3(2x+1) - 2\log_{2x+1} 3 - 1 = 0$ d. $\log^2\left(x^3\right) - 20\log\sqrt{x} + 1 = 0$.

2. Giải các phương trình sau:

a. $\log_5(5^x-1)\left[\frac{1}{2}\log_5 5(5^x-1)\right]-1=0$. b. $\log_{27}(x^{\log_{27}x})-3\log_{27}x+2=0$.

c. $3\sqrt{\log_2 x}-\log_2 8x+1=0$. d. $5\sqrt{\log_2(-x)}=\log_2\sqrt{x^2}$.

3. Giải các phương trình sau:

a. $\log_{9x}27-\log_{3x}3+\log_9 243=0$; b. $\dfrac{\log_2 x}{\log_4 2x}=\dfrac{\log_8 4x}{\log_{16}8x}$;

c. $\log_3\left(3^x-1\right).\log_3\left(3^{x+1}-3\right)=12$; d. $\log_{x-1}4=1+\log_2\left(x-1\right)$.

4. Giải các phương trình sau:

a. $\dfrac{6}{\log_2 x+1}+\dfrac{2}{\log_2 x}-3=0$; b. $\dfrac{1}{\log_2\dfrac{16}{x}}+\dfrac{2}{\log_2 4x}=1$.

5. Cho phương trình: $\log_3^2 x+\sqrt{\log_3^2 x+1}-2m-1=0$ (1) (m là tham số)

a. Giải phương trình (1) khi m = 2.

b. Định m để (1) có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]$

(Đề thi TSĐH – khối A – 2002).

6. Giải các phương trình sau:

a. $\log_3\left(\log_{0.5}^2 x-3\log_{0.5}x+5\right)=2$ b. $\log_2\left(4.3^x-6\right)-\log_2\left(9^x-6\right)=1$.

7. Giải phương trình: $\log_{2x-1}(2x^2+x-1)+\log_{x+1}\left(2x-1\right)^2=4$

(Đề thi TSĐH – khối A – 2008).

Vấn đề 3: Phương pháp dùng tính đơn điệu của hàm số

1. PHƯƠNG PHÁP:

a) Biến đổi hai vế của phương trình sao cho hai vế là hai hàm số không cùng chiều biến thiên.

* Bước 1: Nhẩm và chứng minh x_0 là nghiệm.

* Bước 2: Chứng minh x_0 là nghiệm duy nhất (bằng cách chứng minh $x \neq x_0$ không là nghiệm).

b) Một số phương trình ta sử dụng phương pháp đánh giá hai vế, phương pháp đối lập, … để giải.

c) Một số phương trình biến đổi được về dạng f(u) = f(v) thì ta áp dụng:

Nếu f(t) là hàm số tăng (hay giảm) thì $f(u)=f(v) \Leftrightarrow u=v$.

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Giải phương trình: $2^x = 2 - \log_3 x$ (1).

Giải

Điều kiện $x > 0$. (1) $\Leftrightarrow f(x) = 2^x + \log_3 x - 2 = 0$.

Ta có: * $f(1) = 0$ nên $x = 1$ là một nghiệm của phương trình (1).

* $f'(x) = 2^x \ln 2 + \dfrac{1}{x\ln 3} > 0$, $\forall x > 0$ nên hàm số f đồng biến trên $(0;+\infty)$.

$\Rightarrow$ (1) có không quá một nghiệm .

Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất $x = 1$.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $11 - x = \log_3 x$ (2)

Giải

Điều kiện $x > 0$.

Ta có: $x = 9$ là một nghiệm của phương trình (2).

Ta chứng minh $x = 9$ là nghiệm duy nhất của phương trình

Ta có:

+ $f(x) = 11 - x \Rightarrow f'(x) = -1 > 0$ nên f nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

+ $g(x) = \log_3 x \Rightarrow g'(x) = \dfrac{1}{x\ln 3} > 0, \forall x > 0$ nên g đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Do đó:

* $x > 9$:

$\begin{cases} VT < 2 \\ VP > 2 \end{cases} \Rightarrow$ Phương trình (2) không có nghiệm thỏa mãn $x > 9$.

* $0 < x < 1$

$\begin{cases} VT > 2 \\ VP < 2 \end{cases} \Rightarrow$ Phương trình (2) không có nghiệm thỏa mãn $x < 9$.

Vậy phương trình (2) có một nghiệm duy nhất $x = 9$.

Ví dụ 3: Giải phương trình: $\log_3(x^2 + x + 1) = x(2 - x) + \log_3 x$ (3)

Giải

Điều kiện : $\begin{cases} x > 0 \\ x^2 + x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$

Cách 1: (Dùng phương pháp đánh giá 2 vế)

Ta có: (3) $\Leftrightarrow \log_3 \dfrac{(x^2 + x + 1)}{x} = 2x - x^2$ (4).

Ta có: * Khi $x > 0 \Rightarrow \dfrac{x^2+x+1}{x} = x + \dfrac{1}{x} + 1 \ge 3 \Rightarrow VT(4) \ge \log_3 3 \Rightarrow VT(4) \ge 1$.

* Mặt khác ta có : $VP(4) = 2x - x^2 = 1-(x-1)^2 \le 1$.

Do đó (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 \dfrac{(x^2+x+1)}{x} = 1 \\ 2x - x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 1$.

Cách 2: (Dùng phương pháp hàm số)

Ta có: (3) $\Leftrightarrow \log_3(x^2+x+1) + (x^2+x+1) = \log_3(3x) + 3x$ (*).

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ với $t > 0$.

Ta có: $f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 3} + 1 > 0$ với mọi $t > 0$.

Suy ra f(t) là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Do đó: (*) $\Leftrightarrow f(x^2+x+1) = f(3x) \Leftrightarrow x^2+x+1 = 3x \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất là $x = 1$.

3. BÀI TẬP:

1. Giải các phương trình sau:

a. $x - 2^{\log_5(x+3)} = 0$ b. $\log_2(\sqrt{x}+1) - \log_3 x = 0$.

2. Giải các phương trình sau:

a. $\log_2(x + 3^{\log_6 x}) - \log_6 x = 0$ b. $\log_7 x = \log_3(\sqrt{x}+2)$.

3. Giải phương trình: $\log_3\left(\dfrac{x^2+x+3}{2x^2+4x+5}\right) = x^2+3x+2$.

4. Giải phương trình: $2\log_6(\sqrt[4]{x} + \sqrt[8]{x}) = \log_4 \sqrt{x}$.

5. Giải phương trình: $(x+2)\log_3^2(x+1) + 4(x+1)\log_3(x+1) - 16 = 0$

6. Giải phương trình: $\log_x(x+1) = \lg 1,5$.

Vấn đề 4: Phương trình tích

1. PHƯƠNG PHÁP:

* Biến đổi phương trình đã cho về phương trình tích.

* Ta có: $A.B = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0 \end{array}\right.$. Ở đây các phương trình A = 0, B = 0 là những phương trình đơn giản hơn.

2. VÍ DỤ:

Ví dụ: Giải phương trình $2\log_9^2 x = \log_3 x.\log_3\left(\sqrt{2x+1}-1\right)$ (1).

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{2x+1} - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0.$

$$(1) \Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{2}\log_3 x\right)^2 = \log_3 x.\log_3\left(\sqrt{2x+1}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_3^2 x - 2\log_3 x\log_3\left(\sqrt{2x+1}-1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x\left[\log_3 x - 2\log_3\left(\sqrt{2x+1}-1\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x = 0 \\ \log_3 x = \log_3\left(\sqrt{2x+1}-1\right)^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2x - 2\sqrt{2x+1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \sqrt{8x+4} = x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 - 8x - 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 + 2\sqrt{5} \end{array}\right..$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 1$ hay $x = 4 + 2\sqrt{5}$.

3. BÀI TẬP:

1. Giải phương trình $\log_2 x + 2\log_7 x = 2 + \log_2 x.\log_7 x$.
2. Giải phương trình $2x + \log_2(x^2 - 4x + 4) = 2 - (x + 1)\log_{\frac{1}{2}}(2 - x)$.
3. Giải phương trình: $\frac{1}{x-1}\log_2^2 x + \log_2 x + 2 = \frac{4}{x-1}$.

§6. HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ - LÔGARIT

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

Hệ phương trình mũ – logarit là hệ phương trình trong đó có chứa các phương trình mũ – lôgarit.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1. PHƯƠNG PHÁP:

* Dùng các phương pháp giải hệ phương trình đại số như: phương pháp thế, phương pháp cộng,... để giải.

* Dùng một hoặc hai ẩn phụ để biến hệ mũ, lôgarit thành các hệ đại số quen thuộc như hệ tổng tích, hệ đối xứng loại I, hệ đối xứng loại II, hệ đẳng cấp, ...

Cần lưu ý một số kĩ thuật biến đổi sau:

a) Biến đổi đưa về cùng cơ số, làm mất cơ số, đưa về hệ các phương trình đại số quen thuộc.

b) Giải một phương trình, sau đó thế vào phương trình còn lại (phương pháp thế)

c) Biến đổi đưa hệ về dạng f(u) = f(v)

d) Dùng phương pháp khảo sát hàm số

e) Dùng phương pháp đồ thị

f) Dùng phương pháp đặt ẩn số phụ (lưu ý điều kiện cần và đủ cho ẩn số phụ này)

g) Đối với hệ mũ có thể dùng các bất đẳng thức cơ bản (bất đẳng thức Côsi,...) hoặc tam thức bậc hai

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 5^x.8^y = 512000 \\ x+y=7 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2^{x+y}+3^y=5 \\ 2^{x+y}.3^{y-1}=2 \end{cases}$

Giải

a) $\begin{cases} 5^x.8^y = 512000 \text{ (1a)} \\ x+y=7 \quad \text{(1b)} \end{cases}$

Từ (1b) $\Rightarrow y = 7 - x$ (1c).

Thay vào (1a) ta được: $5^x.8^{7-x} = 5^3.8^4 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{8}\right)^x = \left(\frac{5}{8}\right)^3 \Leftrightarrow x = 3.$

Thay vào (1c) ta được y = 4.

Vậy hệ đã cho có nghiệm là $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} 2^{x+y}+3^y=5 \\ 2^{x+y}.3^{y-1}=2 \end{cases}$ (I)

Đặt $u = 2^{x+y}$ và $v = 3^y$ (u, v > 0).

(I) trở thành:

$$\begin{cases} u+v=5 \\ uv=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=2 \\ v=3 \end{cases} \text{hay} \begin{cases} u=3 \\ v=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x+y}=2 \\ 3^y=3 \end{cases} \text{hay} \begin{cases} 2^{x+y}=3 \\ 3^y=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ y=1 \end{cases} \text{hay} \begin{cases} x+y=\log_2 3 \\ y=\log_3 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \text{hay} \begin{cases} x=\log_2 3-\log_3 2 \\ y=\log_3 2 \end{cases}.$$

Ví dụ 2: Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2^{2x-y}+2^y=2^{1+y} \\ \log_2 x.\left(\log_4 y-1\right)=4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x.y=1 \\ \lg^2 x+\lg^2 y=2 \end{cases}$.

Giải

a) $\begin{cases} 2^{2x-y}+2^y=2^{1+y} & (a) \\ \log_2 x.\left(\log_4 y-1\right)=4 & (b) \end{cases}$ (1)

Chia 2 vế của (a) cho 2^y, ta được: $2^{2x-2y}+1=2 \Leftrightarrow 2^{2x-2y}=1 \Leftrightarrow x=y$.

Thay vào (b) ta được:

$$\log_2 x\left(\log_4 x-1\right)=4 \quad \Leftrightarrow \log_2 x\left(\frac{1}{2}\log_2 x-1\right)=4$$

$$\Leftrightarrow \log_2^2 x-2\log_2 x-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x=4 \\ \log_2 x=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=16 \text{ hoặc } x=2^{-2}=\frac{1}{4}.$$

Vậy hệ (1) có hai nghiệm là (16; 16) và $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$.

b) $\begin{cases} x.y=1 \\ \log^2 x+\log^2 y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x.y=1 \\ \log^2 x+\log^2\frac{1}{x}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x.y=1 \\ \log^2 x=1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x.y=1 \\ \log x=\pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=\frac{1}{10} \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x=\frac{1}{10} \\ y=10 \end{cases}.$$

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình $\begin{cases} e^y-e^x=\ln(x-1)-\ln(y-1) & (a) \\ \sqrt{x-1}+y^3=3x^2-4y+5 & (b) \end{cases}$.

Giải

Ta có: (a) $\Leftrightarrow e^y+\ln(y-1)=e^x+\ln(x-1)$ (c).

Xét hàm số $f(t)=e^t+\ln(t-1)$ với $t>1$.

Ta có $f'(t)=e^t+\dfrac{1}{t-1}>0, \forall t>1 \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

Do đó (c) $\Leftrightarrow f(y)=f(x) \Leftrightarrow x=y$.

Thay vào (b) ta được:

$\sqrt{x-1} = -x^3 + 3x^2 - 4x + 5$

$\Leftrightarrow g(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 5 - \sqrt{x-1} = 0$ (d)

Ta có:

* $g(2) = 0$;

* $g'(x) = 3x^2 - 6x + 4 - \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} = 3(x-2)^2 + 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} > 0, \forall x > 1.$

$\Rightarrow g(x)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.

Do đó (d) có nghiệm duy nhất là $x = 2$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất là $(2; 2)$.

3. BÀI TẬP:

1. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2^x - 2^y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2.10^{y-1}.5^x - 2^y + x^2 - x = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 4^{-2x} + 4^{-2y} = 0,5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4^x + 2^{x+1} - y.2^x - 2y = 0 \\ 2^{3x} - 5y^2 + 4y = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4^x - y^2 + 8 = 0 \\ 2^{x+1} + y + 1 = 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3^x.2^y = 3^{-2} \\ y - x - 2 = 0 \end{cases}$.

2. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 3.2^x + 2.3^y = 2,75 \\ 2^x - 3^y = -0,75 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 77 \\ 3^x - 2^{\frac{y}{2}} = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 64^{2x} + 64^{2y} = 12 \\ 64^{x+y} = 4\sqrt{2} \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2^x - 9.3^y = 7 \\ 2^x.3^y = \dfrac{8}{9} \end{cases}$

3. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x + y = 20 \\ \log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 30 \\ \lg x + \lg y = 3\lg 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ \log_2 x + \log_2 y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2^{\frac{2x}{y}} = 2^5.2^{\frac{3y}{x}} \\ 3^{\frac{x}{y}} = 3.3^{\frac{2(1-y)}{y}} \end{cases}$

4. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 3^{-x}.2^{y} = 1152 \\ \log_{\sqrt{5}}(x+y) = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ \log_2(x+y) - \log_3(x-y) = 1 \end{cases}$.

5. Giải hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 3\log_9(9x^2) - \log_3 y^3 = 3 \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{2-y} = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2^{3x+1} + 2^{y-2} = 3.2^{y+3x} \\ \sqrt{3x^2 + 1 + xy} = \sqrt{x+1} \end{cases}$

6. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} \log_5 x + \log_5 7.\log_7 y = 1 + \log_5 2 \\ 3 + \log_2 y = \log_2 5(1 + 3\log_5 x) \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log x + \dfrac{1}{2}\log y = \dfrac{5}{2} \\ 5\log x - 2\log y = 8 \end{cases}$.

7. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} \log_y x - \log_2 y^2 = 1 \\ \log_4 x - \log_4 y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log_{xy}(x+y) = 0 \\ \log_{xy}(x-y) = 1 \end{cases}$.

8. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} \log_2 \sqrt{x+3} = \log_3 3y \\ \log_2 \sqrt{y+3} = \log_3 3x \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log_x(3x+2y) = 2 \\ \log_y(2x+3y) = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \log_x(x^3 + 2x^2 - 3x - 5y) = 3 \\ \log_y(y^3 + 2y^2 - 3y - 5x) = 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y = y^2 + x \\ 2^{x+y} - 2^{x-1} = x - y \end{cases}$.

9. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2^{x+1} = 4y^2 + 1 \\ 2^x \le 2y \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2^{|x^2-2x-3| - \log_2 3} = 3^{-y-4} \\ 4|y| - |y-1| + (y+3)^2 \le 8 \end{cases}$.

10. Giải hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} (10x)^{\log 4} = (10y)^{\log 3} \\ 3^{\log x} = 4^{\log y} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4 \\ \log_4 x - \log_4 y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4^{\log_3(xy)} = 2 + (xy)^{\log_3 2} \\ x^2 + y^2 + 2x + 2y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^4 + y = 31^{x^4-y} \\ 2(x^4 + y) = 62^{x^4-y} \end{cases}$.

11. Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases} 2^{3x} = 5y^2 - 4y \\ \dfrac{4^x + 2^{x+1}}{2^x + 2} = y \end{cases}$ (Đề thi TSĐH – khối D – 2002)

b) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{4}}(y-x) - \log_4 \dfrac{1}{y} = 1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$ (Đề thi TSĐH – A – 2004).

c) $\begin{cases} \log_2(x^2+y^2) = 1 + \log_2(xy) \\ 3^{x^2-xy+y^2} = 81 \end{cases}$ (Đề thi TSĐH – khối A – 2009).

12. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} e^x - e^y = (\log_2 y - \log_2 x)(xy+1) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

13. Chứng minh rằng với mọi a > 0 thì hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} e^x - e^y = \ln(1+x) - \ln(1+y) \\ y - x = a \end{cases}.$$

§7. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

Bất phương trình mũ cơ bản là bất phương trình có một trong các dạng:

$a^x > m$, $a^x \ge m$, $a^x < m$, $a^x \le m$ với $0 < a \ne 1$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Phương pháp chung:

Áp dụng tính chất đồng biến, nghịch biến của hàm mũ để giải.

Vấn đề 1: Bất phương trình mũ dạng cơ bản.

1. PHƯƠNG PHÁP:

Với bất phương trình $a^x > m$ (1)

* Nếu $m \le 0$ thì tập nghiệm của (1) là S = R (vì $a^x > 0, \forall x \in R$)

* Nếu $m > 0$ thì :

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \log_a m \text{ khi } a > 1 \\ x < \log_a m \text{ khi } 0 < a < 1 \end{array} \right.$$

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Giải các bất phương trình sau:

a) $3^x > 81$; b) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x > 32$.

Giải

a) $3^x > 81 \Leftrightarrow 3^x > 3^4 \Leftrightarrow x > 4$.

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 32 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x > 2^5 \Leftrightarrow 2^{-x} > 2^5 \Leftrightarrow -x > 5 \Leftrightarrow x < -5$.

Ví dụ 2: Giải bất phương trình sau: $3^x + 3^{x+1} + 3^{x-1} < 5^x + 5^{x+1} + 5^{x-1}$

Giải

Ta có: $3^x + 3^{x+1} + 3^{x-1} < 5^x + 5^{x+1} + 5^{x-1}$

$$\Leftrightarrow 3^x\left(1+3+\frac{1}{3}\right) < 5^x\left(1+5+\frac{1}{5}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x < \frac{93}{65} \Leftrightarrow x > \log_{\frac{3}{5}}\frac{93}{65}.$$

3. BÀI TẬP:

1. Giải các bất phương trình sau:

a) $3^{x^2-2x+\log_3 5} > 5$ b) $8.4^{\frac{x-3}{x^2+1}} < 1$

2. Giải các bất phương trình:

a) $2^{-x^2+3x} < 4$ b) $\left(\frac{7}{9}\right)^{2x^2-3x} \geq \frac{9}{7}$

3. Giải bất phương trình: $3^{x+2} + 3^{x-1} \leq 28$

4. Giải bất phương trình: $5^{\log_3 \frac{x-2}{x}} < 1$

Vấn đề 2: Đưa bất phương trình mũ về cùng một cơ số

1. PHƯƠNG PHÁP:

Với $0 < a \neq 1$. Ta có:

$$* \ a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x) \text{ nếu } a > 1 \\ f(x) < g(x) \text{ nếu } 0 < a < 1 \end{array}\right.$$

$$* \ a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \geq g(x) \text{ nếu } a > 1 \\ f(x) \leq g(x) \text{ nếu } 0 < a < 1 \end{array}\right.$$

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Giải bất phương trình: $3^{x^2-2x} < 3$.

Giải

Ta có: $3^{x^2-2x} < 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x < 1 \Leftrightarrow 1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2}$.

Ví dụ 2: Giải bất phương trình: $2^{|x-2|} > 4^{|x+1|}$.

Giải

Ta có: $2^{|x-2|} > 4^{|x+1|} \Leftrightarrow 2^{|x-2|} > 2^{2|x+1|} \Leftrightarrow |x-2| > 2|x+1|$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 > 4x^2 + 8x + 4 \Leftrightarrow 3x^2 + 12x < 0 \Leftrightarrow -4 < x < 0$

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $-4 < x < 0$

Ví dụ 3: Giải bất phương trình: $\left(\sqrt{10}+3\right)^{\frac{x-3}{x-1}} < \left(\sqrt{10}-3\right)^{\frac{x+1}{x+3}}$.

Giải

Điều kiện: $x \neq 1; x \neq -3$.

Nhận xét: $\left(\sqrt{10}+3\right).\left(\sqrt{10}-3\right) = 1 \Rightarrow \left(\sqrt{10}-3\right) = \left(\sqrt{10}+3\right)^{-1}$

$\left(\sqrt{10}+3\right)^{\frac{x-3}{x-1}} < \left(\sqrt{10}-3\right)^{\frac{x+1}{x+3}} \Leftrightarrow \left(\sqrt{10}+3\right)^{\frac{x-3}{x-1}} < \left(\sqrt{10}+3\right)^{-\left(\frac{x+1}{x+3}\right)}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-3}{x-1} < -\dfrac{x+1}{x+3} \Leftrightarrow \dfrac{x-3}{x-1} + \dfrac{x+1}{x+3} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-5}{(x-1)(x+3)} < 0$

$\Leftrightarrow -3 < x < -\sqrt{5}$ hoặc $1 < x < \sqrt{5}$.

Vậy nghiệm của bất phương trình $-3 < x < -\sqrt{5}$ hoặc $1 < x < \sqrt{5}$.

3. BÀI TẬP:

1. Giải bất phương trình: $\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}} \leq \left(\sqrt{2}-1\right)^{-x}$.
2. Giải các bất phương trình sau:

a) $\dfrac{1}{2^{|2x-1|}} > \dfrac{1}{2^{3x-1}}$ b) $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{x^2+1} \geq \left(\dfrac{3}{7}\right)^{3x-1}$.

3. Giải các bất phương trình: $3^{\sqrt{x^2-2x}} \geq \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-|x-1|}$.
4. Giải bất phương trình: $x^{2x^2-5x+2} \geq 1$ (với $0 < x \neq 1$).

Vấn đề 3: Phương pháp đặt ẩn số phụ

1. PHƯƠNG PHÁP:

Nếu đặt $t = a^x$, điều kiện $t > 0$ thì

$$a^{2x} = \left(a^2\right)^x = \left(a^x\right)^2 = t^2;\ a^{3x} = t^3; a^{-x} = \frac{1}{t}...$$

Lưu ý một số kết quả sau thường sử dụng khi đặt ẩn phụ:

* $\left(\sqrt{2}-1\right)^{x}\left(\sqrt{2}+1\right)^{x}=1$ * $\left(2-\sqrt{3}\right)^{x}\left(2+\sqrt{3}\right)^{x}=1$

* $\left(4-\sqrt{15}\right)^{x}\left(4+\sqrt{15}\right)^{x}=1$ * $\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^{x}\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^{x}=1$

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Giải bất phương trình: $4^{x}-2.5^{2x}<10^{x}$.

Giải

$$4^{x}-2.5^{2x}<10^{x}\Leftrightarrow 1-2.\left(\frac{5}{2}\right)^{2x}<\left(\frac{5}{2}\right)^{x}\quad(1)$$

Đặt $t=\left(\frac{5}{2}\right)^{x}$,điều kiện $t>0$.

(1) thành $1-2t^{2}<t\Leftrightarrow 2t^{2}+t-1>0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t<-1\quad (L)\\ t>\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left(\frac{5}{2}\right)^{x}>\frac{1}{2}\Leftrightarrow x>\log_{\frac{5}{2}}\frac{1}{2}\Leftrightarrow x>-\log_{\frac{5}{2}}2.$$

Ví dụ 2: Giải bất phương trình: $\left(\sqrt{5}+1\right)^{x-x^{2}}+2^{-x^{2}+x+1}<3.\left(\sqrt{5}-1\right)^{x-x^{2}}$.

Giải

Ta có: $\left(\sqrt{5}+1\right)^{x-x^{2}}+2^{-x^{2}+x+1}<3.\left(\sqrt{5}-1\right)^{x-x^{2}}\quad(1)$

Ta có: $2^{-x^{2}+x}>0$ với mọi x. Chia 2 vế cho $2^{-x^{2}+x}$ ta được:

$$(1)\Leftrightarrow\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{x-x^{2}}+2<3\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{x-x^{2}}\quad(2)$$

Ta nhận thấy: $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)=1$

Đặt: $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{x-x^{2}}=t,\ t>0\Rightarrow\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{x-x^{2}}=\frac{1}{t}$

(2) trở thành:

$$t+2<\frac{3}{t}\Leftrightarrow t^{2}+2t-3<0\ \Leftrightarrow 0<t<1\ \Leftrightarrow 0<\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{x-x^{2}}<1.$$

$$\Leftrightarrow x-x^{2}<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<0\\ x>1\end{array}\right.$$

3. BÀI TẬP:

1. Giải các bất phương trình sau:

a) $4^x - 3.2^x + 2 > 0$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}} + \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}} > 12$.

2. Giải các bất phương trình sau:

a) $9^{\sqrt{x^2-3x}} + 3 < 28.3^{\sqrt{x^2-3x}-1}$ b) $2^{3x} - \frac{8}{2^{3x}} - 6\left(2^x - \frac{1}{2^{x-1}}\right) \le 1$.

3. Giải bất phương trình: $25^{1+2x-x^2} + 9^{1+2x-x^2} \ge 34.15^{2x-x^2}$.

4. Giải các bất phương trình sau:

a) $3^{2x} - 8.3^{x+\sqrt{x+4}} - 9.9^{\sqrt{x+4}} > 0$ b) $2^{2\sqrt{x+3}-x-6} + 15.2^{\sqrt{x+3}-5} < 2^x$.

5. Giải bất phương trình: $x^2 2^{2x} + 9(x+2).2^x + 8x^2 \le (x+2)2^{2x} + 9x^2 2^x + 8x + 16$

Vấn đề 4: Phương pháp lôgarit hóa

1. PHƯƠNG PHÁP:

Với bất phương trình mũ mà hai vế là tích hay thương của nhiều lũy thừa với các cơ số khác nhau thì ta có thể lấy lôgarit hai vế, ta có:

$$* \ a^{f(x)} > b^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x) > g(x).\log_a b & \text{nếu } a > 1 \\ f(x) < g(x).\log_a b & \text{nếu } 0 < a < 1 \end{array}\right.$$

$$* \ a^{f(x)} \ge b^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x) \ge g(x).\log_a b & \text{nếu } a > 1 \\ f(x) \le g(x).\log_a b & \text{nếu } 0 < a < 1 \end{array}\right.$$

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Giải bất phương trình: $3^{2x-1} < 11^{3-x}$

Giải

$3^{2x-1} < 11^{3-x} \Leftrightarrow 2x - 1 < \log_3 11^{3-x}$

$\Leftrightarrow 2x - 1 < (3-x)\log_3 11 \Leftrightarrow x < \dfrac{3\log_3 11 + 1}{2 + \log_3 11}$.

Ví dụ 2: Giải bất phương trình $(x-2)^{x^2-6x+8} > 1$ với $2 < x \ne 3$

Giải

$(x-2)^{x^2-6x+8} > 1$ với $2 < x \ne 3$. $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 > 0 \\ (x-2-1)(x^2-6x+8-0) > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ 2 < x < 3 \text{ hoặc } x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x < 3$ hoặc $x > 4$.

3. BÀI TẬP:

1. Giải các bất phương trình sau:

a) $5^{x^2-1} + 5^{x^2} \geq 7^x - 7^{x-1}$ b) $5^{4x^2-3} > 5.3^{3x-3}$.

2. Giải các bất phương trình sau:

a) $5^x.8^{\frac{x-1}{x}} > 500$ b) $3^{x^2}.2^x \leq 1$.

§8. BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

Định nghĩa:

Bất phương trình lôgarit cơ bản là bất phương trình có một trong các dạng: $\log_a x > m$, $\log_a x \geq m$, $\log_a x < m$, $\log_a x \leq m$ với $0 < a \neq 1$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Phương pháp chung:

Dùng tính chất đồng biến, nghịch biến của hàm mũ (mũ hóa)

Chú ý: Có thể tìm tập xác định của bất phương trình trước khi giải.

Vấn đề 1: Bất phương trình lôgarit dạng cơ bản

1. PHƯƠNG PHÁP:

Với bất phương trình $\log_a x > m$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > a^m \text{ nếu } a > 1 \\ 0 < x < a^m \text{ nếu } 0 < a < 1 \end{array}\right.$$

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Giải các bất phương trình sau:

a) $\log_2(x^2 - 2x) > 3$ b) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 6x) > -3$.

Giải

a) $\log_2(x^2 - 2x) > 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x > 2^3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 > 0 \Leftrightarrow x < -2$ hoặc $x > 4$.

b) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-6x) > -3 \Leftrightarrow 0 < x^2-6x < \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x>0 \\ x^2-6x-27<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<0 \text{ hoặc } x>6 \\ -3<x<9 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3<x<0 \\ 6<x<9 \end{array}\right..$$

Ví dụ 2: Giải bất phương trình sau: $\log_3 \frac{x^2+4x}{2x-3} < 1$.

Giải

$$\log_3 \frac{x^2+4x}{2x-3} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+4x}{2x-3} > 0 \\ \frac{x^2+4x}{2x-3} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+4x}{2x-3} > 0 \\ \frac{x^2-2x+9}{2x-3} < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3<0 \quad (\text{vì } x^2-2x+9=(x-1)^2+8>0, \forall x) \\ x^2+4x<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<\frac{3}{2} \\ -4<x<0 \end{cases} \Leftrightarrow -4<x<0.$$

3. BÀI TẬP:

1. Giải các bất phương trình sau:

a) $\log_8(4-2x) \geq 2$

b) $\log_2\left(2-x-\sqrt{x^2-1}\right) < 1$

c) $\log_{\sqrt{5}}(6^{x+1}-36^x) \leq 2$

2. Giải bất phương trình sau: $\log_{\frac{2}{3}} \log_3 |x-3| \geq 0$

3. Giải bất phương trình sau: $\log_2 x(\log_3 x - 1) + 1 - \log_3 x > 0$

4. Giải bất phương trình: $\log_{0,7}\left[\log_6\left(\frac{x^2+x}{x+4}\right)\right] < 0$ (TSĐH – khối B – 2008)

5. Giải bất phương trình: $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^2-3x+2}{x}\right) \geq 0$ (TSĐH – khối D – 2008).

Vấn đề 2: Đưa lôgarit về cùng một cơ số

1. PHƯƠNG PHÁP: Với $0 < a \neq 1$, ta có:

$$* \ \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)>g(x)>0 \text{ nếu } a>1 \\ 0<f(x)<g(x) \text{ nếu } 0<a<1 \end{array}\right.$$

$$* \ \log_a f(x) \ge \log_a g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \ge g(x) > 0 \text{ nếu } a > 1 \\ 0 < f(x) \le g(x) \text{ nếu } 0 < a < 1 \end{array}\right.$$

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Giải các bất phương trình:

a) $\log_{0,5}(5x+10) < \log_{0,5}(x^2+6x+8)$.

b) $\log_2(x-3) + \log_2(x-2) \le 1$.

Giải

a) $\log_{0,5}(5x+10) < \log_{0,5}(x^2+6x+8)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+6x+8>0 \\ 5x+10 > x^2+6x+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-4 \vee x>-2 \\ x^2+x-2<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<-4 \vee x>-2 \\ -2<x<1 \end{cases} \Leftrightarrow -2<x<1$$

b) $\log_2(x-3) + \log_2(x-2) \le 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3>0 \\ x-2>0 \\ \log_2(x-3)(x-2) \le \log_2 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x^2-5x+6 \le 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ 1 \le x \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x \le 4.$$

Ví dụ 2: Giải bất phương trình: $\log_x(3-\sqrt{1-2x+x^2}) > 1$.

Giải

Ta có: $\log_x(3-\sqrt{1-2x+x^2}) > 1 \Leftrightarrow \log_x(3-|1-x|) > 1$ (1)

Điều kiện: $\begin{cases} 1 \ne x > 0 \\ 3-|1-x|>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x\ne 1 \\ -2<x<4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<4 \\ x\ne 1 \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ 3-|1-x|>x \end{cases} \vee \begin{cases} 0<x<1 \\ 3-|1-x|<x \end{cases} \Leftrightarrow 1<x<2$ (thỏa điều kiện)

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $1<x<2$

3. BÀI TẬP:

1. Giải các bất phương trình sau:

a) $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) \le \log_3(2-x)$; b) $\log_{\frac{1}{7}}\dfrac{x^2+6x+9}{2(x+1)} < -\log_7(x+1)$;

c) $\log_2(9^{x-1}+7) > \log_2(3^{x-1}+1)+2$.

2. Giải các bất phương trình sau:

a) $\log_x(5x^2-8x+3) > 2$ b) $\log_x\dfrac{4x+5}{6-5x} < -1$

3. Giải các bất phương trình sau:

a) $\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}x + \log_{\frac{1}{4}}(x-1) + \dfrac{1}{2}\log_2 6 \le 0$;

b) $\log(x^2-3x+6) > 2(\log x + \log 2)$;

c) $\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)} + \dfrac{1}{\log_2\sqrt{x^2-3x+2}} > 0$.

4. Giải bất phương trình:

$2\log_3(4x-3) + \log_{\frac{1}{3}}(2x+3) \le 2$ (TSĐH – khối A – 2007)

5. Giải các bất phương trình sau:

a) $\log_{\frac{1}{5}}\left(x^2-6x+18\right) + 2\log_5(x-4) < 0$ b) $\log_3\left[\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-1\right)\right] < 1$.

6. Giải bất phương trình : $\log_x(\log_3(9^x-72)) \le 1$. (TSĐH – khối B – 2002)

Vấn đề 3: Phương pháp đặt ẩn số phụ

1. PHƯƠNG PHÁP:

Nếu đặt $t = \log_a x$ thì $\log_{\frac{1}{a}} x = -t$; $\log_{a^2} x = \dfrac{1}{2}t$; $\log_a^2 x = t^2$ ...

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Giải bất phương trình: $\log_2(2^x-1).\log_2(2^{x+1}-2) < 2$.

Giải

Ta có:

$$\log_2(2^x-1).\log_2(2^{x+1}-2) < 2 \Leftrightarrow \log_2(2^x-1).\left[\log_2\left(2^x-1\right)+\log_2 2\right] < 2 \qquad (1)$$

Đặt: $t = \log_2(2^x-1)$

(1) trở thành: $t(t+1) < 2$

$\Leftrightarrow t^2+t-2<0$ $\Leftrightarrow -2<t<1$

$\Leftrightarrow -2 < \log_2\left(2^x-1\right) < 1$ $\Leftrightarrow 2^{-2} < 2^x - 1 < 2^1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4} + 1 < 2^x < 2$ $\qquad\qquad$ $\Leftrightarrow \frac{5}{4} < 2^x < 2$

$\Leftrightarrow \log_2 \frac{5}{4} < x < \log_2 2$ $\qquad\qquad$ $\Leftrightarrow \log_2 5 - 2 < x < 1$

3. BÀI TẬP:

1. Giải các bất phương trình sau:

a) $2\log_5 x - \log_x 125 < 1$ $\qquad$ b) $\log_x 2.\log_{\frac{x}{16}} 2 > \frac{1}{\log_2 x - 6}$.

2. Giải các bất phương trình sau:

a) $3^{\log x+2} - 3^{\log x^2+5} + 2 < 0$ $\qquad$ b) $6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} \le 12$.

3. Giải các bất phương trình sau:

a) $\sqrt{\log_3^2 x - 4\log_3 x + 9} \ge 2\log_3 x - 3$

b) $\log_2(2^x - 1).\log_2(2^{x+1} - 2) < 2$.

4. Giải bất phương trình: $\log_5(4^x + 144) - 4\log_5 2 < 1 + \log_5(2^{x-2} + 1)$.

(Đề thi TSĐH – khối B – 2006).

HƯỚNG DẪN GIẢI

§1. LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ HỮU TỈ - THỰC HÀM SỐ LŨY THỪA

Vấn đề 1: Tính toán - rút gọn các biểu thức lũy thừa

1. Thực hiện phép tính sau:

a. $16^{-0,75} + \left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{243}\right)^{-\frac{3}{5}} = (2^4)^{-0,75} + (5^{-3})^{-\frac{1}{3}} - (3^{-5})^{-\frac{3}{5}}$

$$= 2^{-3} + 5^1 - 3^3 = \frac{1}{8} + 5 - 27 = -\frac{175}{8}.$$

b. $0,001^{-\frac{1}{3}} - (-2)^{-2}64^{\frac{2}{3}} - 27^{-1\frac{1}{3}} + \left(7^0\right)^2 = (10^{-3})^{-\frac{1}{3}} - \frac{(2^6)^{\frac{2}{3}}}{(-2)^2} - (3^3)^{-\frac{4}{3}} + 1^2$

$$= 10 - \frac{2^4}{2^2} - 3^{-4} + 1 = 10 - 4 - \frac{1}{81} + 1 = \frac{566}{81}.$$

c. $64^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{81}\right)^{-0,75} - 25^{-0,5} = (2^6)^{\frac{2}{3}} + (3^{-4})^{-0,75} - (5^2)^{-0,5}$

$$= 2^4 + 3^3 - 5^{-1} = 16 + 27 - \frac{1}{5} = \frac{214}{5}.$$

d. $(-0,5)^{-4} - 625^{0,25} - \left(2\frac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}} + 19(-3)^{-3}$

$$= (-2^{-1})^{-4} - (5^4)^{0,25} - \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}} + 19.\frac{1}{(-3)^3}$$

$$= 2^4 - 5^1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \frac{19}{27} = 16 - 5 - \frac{8}{27} - \frac{19}{27} = 10.$$

2. Viết các biểu thức sau dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ:

a. $\sqrt[4]{x^2\sqrt[3]{x\sqrt{x}}} = x^{\frac{2}{4}}.x^{\frac{1}{3.4}}.x^{\frac{1}{2.3.4}} = x^{\frac{2}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}} = x^{\frac{5}{8}}.$

b. $\sqrt[5]{\frac{b}{a}\sqrt[3]{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a}{b}}}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{5}}.\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3.5}}.\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2.3.5}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{5}-\frac{1}{15}-\frac{1}{30}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{10}}.$

c. $\sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}.\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3.3}}.\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2.3.3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$.

d. $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}} : a^{\frac{11}{16}} = a^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{2.2}}.a^{\frac{1}{2.2.2}}.a^{\frac{1}{2.2.2.2}} : a^{\frac{11}{16}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{11}{16}} = a^{\frac{1}{4}}$.

3. Đơn giản các biểu thức sau ($a, b > 0$):

a. $\dfrac{\left(\sqrt[4]{a^3b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}} = \dfrac{a^3b^2}{a^{\frac{12}{2.3}}.b^{\frac{6}{2.3}}} = \dfrac{a^3b^2}{a^2.b} = ab$.

b. $\dfrac{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{4}{3}}} - \dfrac{a^{-\frac{1}{3}} - a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + a^{-\frac{1}{3}}} = \dfrac{a^{\frac{1}{3}}(1-a^2)}{a^{\frac{1}{3}}(1-a)} - \dfrac{a^{-\frac{1}{3}}(1-a^2)}{a^{-\frac{1}{3}}(a+1)} = 1 + a - (1-a) = 2a$.

4. Đơn giản các biểu thức sau ($a, b > 0$):

a. $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}} - \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}} = \dfrac{(\sqrt[4]{a})^2-(\sqrt[4]{b})^2}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}} - \dfrac{(\sqrt[4]{a})^2+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$

$$= \sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b} - \frac{\sqrt[4]{a}(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}} = \sqrt[4]{b}$$

b. $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} - \dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} = \dfrac{(\sqrt[3]{a})^3-(\sqrt[3]{b})^3}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} - \dfrac{(\sqrt[3]{a})^3+(\sqrt[3]{b})^3}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$

$$= (\sqrt[3]{a})^2+\sqrt[3]{ab}+(\sqrt[3]{b})^2 - \left[(\sqrt[3]{a})^2-\sqrt[3]{ab}+(\sqrt[3]{b})^2\right] = 2\sqrt[3]{ab}.$$

c. $\left(\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} - \sqrt[3]{ab}\right) : \left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2 = \left(\dfrac{(\sqrt[3]{a})^3+(\sqrt[3]{b})^3}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} - \sqrt[3]{ab}\right) : \left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2$

$$= \left[\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{ab}\right] : \left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2 : \left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2 = 1.$$

d. $\dfrac{a-1}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}}.\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}+1}.a^{\frac{1}{4}}+1 = \dfrac{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}{a^{\frac{1}{4}}(a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}})}.\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{a}+1}.a^{\frac{1}{4}}+1 = \sqrt{a}-1+1 = \sqrt{a}$.

5. Đơn giản các biểu thức sau:

a. $\dfrac{\left(a^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1}}{a^{\sqrt{5}-3}.a^{4-\sqrt{5}}} = \dfrac{a^{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}}{a^{\sqrt{5}-3+4-\sqrt{5}}} = \dfrac{a^{3-1}}{a} = a$.

b. $a^{\sqrt{2}}.\left(\frac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1} = a^{\sqrt{2}}.(a^{-1})^{\sqrt{2}-1} = a^{\sqrt{2}-\sqrt{2}+1} = a$.

6. Đơn giản các biểu thức sau:

a. $a^{-2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{a^{-\sqrt{2}-1}}\right)^{\sqrt{2}+1} = a^{-2\sqrt{2}}.(a^{\sqrt{2}+1})^{\sqrt{2}+1} = a^{-2\sqrt{2}}.a^{(\sqrt{2}+1)^2} = a^{-2\sqrt{2}+3+2\sqrt{2}} = a^3$.

b. $\left(\frac{a^{\sqrt{3}}}{b^{\sqrt{3}-1}}\right)^{\sqrt{3}+1}\frac{a^{-1-\sqrt{3}}}{b^{-2}} = \frac{a^{3+\sqrt{3}}.a^{-1-\sqrt{3}}}{b^{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}.b^{-2}} = \frac{a^{3+\sqrt{3}-1-\sqrt{3}}}{b^{(\sqrt{3})^2-1}.b^{-2}} = \frac{a^2}{b^2.b^{-2}} = a^2$.

c. $\frac{a^{2\sqrt{2}}-b^{2\sqrt{3}}}{\left(a^{\sqrt{2}}-b^{\sqrt{3}}\right)^2}+1 = \frac{(a^{\sqrt{2}})^2-(b^{\sqrt{3}})^2}{(a^{\sqrt{2}}-b^{\sqrt{3}})^2}+1 = \frac{a^{\sqrt{2}}+b^{\sqrt{3}}}{a^{\sqrt{2}}-b^{\sqrt{3}}}+1 = \frac{2a^{\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{2}}+b^{\sqrt{3}}}$.

d. $\sqrt{\left(x^{\pi}+y^{\pi}\right)^2-\left(4^{\frac{1}{\pi}}xy\right)^{\pi}} = \sqrt{(x^{\pi}+y^{\pi})^2-4x^{\pi}y^{\pi}} = \sqrt{(x^{\pi}-y^{\pi})^2} = \left|x^{\pi}-y^{\pi}\right|$.

7. Chứng minh:

a. Ta có: $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}$

$= \sqrt{3}+1-\left(\sqrt{3}-1\right) = 2$ (ĐPCM)

b. $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}} = 3$.

Đặt $a = \sqrt[3]{9+\sqrt{80}}$; $b = \sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$ và $x = a+b$. Ta có: $a^3+b^3 = 18$ và $ab = 1$.

Do đó: $x^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 = 3ab(a+b)+a^3+b^3 = 3x+18$

$\Rightarrow x^3-3x-18 = 0 \Leftrightarrow x = 3$. Vậy $a+b = 3$ hay $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}} = 3$.

8. Ta có: $M = ab\frac{\sqrt[n]{\frac{a^{1-n}}{b^n}-\frac{a^{-n}}{b^{n-1}}}}{\sqrt[n]{a-b}} = ab.\frac{\sqrt[n]{\frac{a}{a^nb^n}-\frac{b}{a^nb^n}}}{\sqrt[n]{a-b}} = ab.\frac{\frac{1}{ab}\sqrt[n]{a-b}}{\sqrt[n]{a-b}} = 1$ với mọi a, b thỏa $0 < b < a$. Vậy M không phụ thuộc vào giá trị của a và b.

9. a) Ta có: $M = \frac{ab^{-2}\left(ab^{-1}\right)^2\left(a^{-1}b^2\right)}{a^{-2}b\left(a^{-2}b^{-1}\right)^3} = \frac{ab^{-2}.a^2b^{-2}.a^{-1}b^2}{a^{-2}b.a^{-6}.b^{-3}} = \frac{a^2.b^{-2}}{a^{-8}.b^{-2}} = a^{10}$.

$\Rightarrow$ M không phụ thuộc vào b.

b) Khi $a = 2$, ta có $M = 2^{10} = 1024$.

Vấn đề 2: So sánh các lũy thừa hay căn số

1. So sánh các số sau:

a. Ta có: $\left(\sqrt{3}\right)^{-\frac{5}{6}} = (3^{\frac{1}{2}})^{-\frac{5}{6}} = 3^{-\frac{5}{12}}$ và $\sqrt[3]{5^{-1}\sqrt[4]{\frac{1}{5}}} = 5^{-\frac{1}{3}}.5^{-\frac{1}{4.3}} = 5^{-\frac{5}{12}}$.

Vì $3 < 5$ và $x = -\frac{5}{12} < 0$ nên $3^{-\frac{5}{12}} > 5^{-\frac{5}{12}}$. Vậy $\left(\sqrt{3}\right)^{-\frac{5}{6}} > \sqrt[3]{5^{-1}\sqrt[4]{\frac{1}{5}}}$.

b. Ta có $3^{600} = (3^3)^{200} = 27^{200}$ và $5^{400} = (5^2)^{200} = 25^{200}$.

Vì $27 > 25$ và $x = 200 > 0$ nên $27^{200} > 25^{200}$. Vậy $3^{600} > 5^{400}$.

c. Ta có $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{6}{7}} = 2^{\frac{6}{7}}$ và $\sqrt{2}.2^{\frac{3}{14}} = 2^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{3}{14}} = 2^{\frac{5}{7}}$.

Vì $a = 2 > 1$ và $\frac{6}{7} > \frac{5}{7}$ nên $2^{\frac{6}{7}} > 2^{\frac{5}{7}}$. Vậy $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{6}{7}} > \sqrt{2}.2^{\frac{3}{14}}$.

d. Ta có: $7^{30} = (7^3)^{10} = 343^{20}$ và $4^{40} = (4^4)^{10} = 256^{10}$.

Vì $343 > 256$ và $x = 10 > 0$ nên $343^{10} > 256^{10}$. Vậy $7^{30} > 4^{40}$.

2. So sánh hai số sau:

a. Ta có: $\frac{3}{7} < \frac{4}{9}$ và $-111 < 0$ nên $\left(\frac{3}{7}\right)^{-111} > \left(\frac{4}{9}\right)^{-111}$. Vậy $m > n$.

b. Ta có: $\frac{\pi}{2} < \frac{5}{\pi}$ và $\sqrt{2} > 0$ nên $m = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\sqrt{2}} < \left(\frac{5}{\pi}\right)^{\sqrt{2}}$ (1)

$\frac{5}{\pi} > 1$ và $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ nên $\left(\frac{5}{\pi}\right)^{\sqrt{2}} < \left(\frac{5}{\pi}\right)^{\sqrt{3}} = \left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\sqrt{3}} = n$.

Vậy $m < n$.

Vấn đề 3: Chứng minh một đẳng thức, bất đẳng thức

1. Để sử dụng điều kiện $m > 2$, $m < 2$ ta làm xuất hiện lũy thừa có số mũ là $m - 2$.

Ta biến đổi như sau:

$$a^m - b^m - c^m = a^{m-2}\left(b^2 + c^2\right) - b^m - c^m$$
$$= b^2\left(a^{m-2} - b^{m-2}\right) + c^2\left(a^{m-2} - c^{m-2}\right)$$

Từ giả thiết a, b, c > 0 và $a^2 = b^2 + c^2$ nên $a > b > 0$ và $a > c > 0$.

Do đó:

a) Khi $m > 2 \Rightarrow m - 2 > 0 \Rightarrow a^{m-2} > b^{m-2}$ và $a^{m-2} > c^{m-2}$

Suy ra: $a^m - b^m - c^m > 0 \Rightarrow a^m > b^m + c^m$

b) Khi $m < 2 \Rightarrow m - 2 < 0$ thì $a^{m-2} < b^{m-2}$ và $a^{m-2} < c^{m-2}$

Suy ra: $a^m - b^m - c^m < 0 \Rightarrow a^m < b^m + c^m$.

<u>Lưu ý:</u> Theo cách giải này ta có thể phát biểu bài toán tương tự, bằng cách thay điều kiện $a^2 = b^2 + c^2$ bởi $a^\alpha = b^\alpha + c^\alpha$ và $m > 2$ bởi $m > \alpha$ và $m < 2$ bởi $m < \alpha$.

2. Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương $2^{2\sin x}$ và $2^{\tan x}$ ta được:

$$2^{2\sin x} + 2^{\tan x} \ge 2\sqrt{2^{2\sin x + \tan x}} = 2.2^{\frac{2\sin x + \tan x}{2}} = 2^{\frac{2\sin x + \tan x}{2} + 1} \quad (*)$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh $2\sin x + \tan x > 3x$ (**) với mọi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Xét hàm số $f(x) = 2\sin x + \tan x - 3x$ trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ta có : $f'(x) = 2\cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 =$

$$\cos x + \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 \ge 3\sqrt[3]{\cos x.\cos x.\frac{1}{\cos^2 x}} - 3 \ge 0.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Do hàm số f(x) liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên f(x) đồng biến trong khoảng $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Do đó: $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ thì $x > 0$ nên $f(x) > f(0) = 0$.

Suy ra $f(x) > 0$ hay $2\sin x + \tan x > 3x$.

Từ (*) và (**) ta có: $2^{2\sin x} + 2^{\tan x} \ge 2^{\frac{2\sin x + \tan x}{2} + 1} > 2^{\frac{3x}{2} + 1}$

Vậy $2^{2\sin x} + 2^{\tan x} > 2^{\frac{3x}{2} + 1}$ với mọi $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

3. Vì $a > 0$ nên ta có $1 + a^2 \ge 2a$ và $3^a > 1$.

Do đó

$A = (9^a - 4.3^a + 1)a + (a^2 + 1).3^a \ge (3^{2a} - 4.3^a + 1)a + 2a.3^a = a(3^{2a} - 2.3^a + 1) = a(3^a - 1)^2 > 0$

Vậy ta luôn có $A > 0$ khi $a > 0$.

4. Đặt $\left(a^m + b^m\right)^{\frac{1}{m}} \le \left(a^n + b^n\right)^{\frac{1}{n}}$ (1)

Với a = 0 hoặc b = 0, bất đẳng thức (1) đúng.

Với $0 < a \le b$, ta có $0 < \alpha = \dfrac{a}{b} \le 1 \Rightarrow 0 < \alpha^m \le \alpha^n$

$$\Rightarrow 1 + \alpha^m \le 1 + \alpha^n \Rightarrow \left[1 + \alpha^m\right]^{\frac{1}{n}} \le \left[1 + \alpha^n\right]^{\frac{1}{n}} \quad (2)$$

Vì $1 + \alpha^m > 1$ và $0 < \dfrac{1}{m} < \dfrac{1}{n}$ nên $\left[\left(1 + \alpha\right)^m\right]^{\frac{1}{m}} \le \left[1 + \alpha^m\right]^{\frac{1}{n}}$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra: $\left[1 + \alpha^m\right]^{\frac{1}{m}} \le \left[1 + \alpha^n\right]^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \left[\dfrac{a^m + b^m}{b^m}\right]^{\frac{1}{m}} \le \left[\dfrac{b^n + a^n}{b^n}\right]^{\frac{1}{n}}$.

Vậy $\left(a^m + b^m\right)^{\frac{1}{m}} \le \left(a^n + b^n\right)^{\frac{1}{n}}$.

5. Cho a > b > 0. Chứng minh $\left(2^a + \dfrac{1}{2^a}\right)^b < \left(2^b + \dfrac{1}{2^b}\right)^a$ (*).

Ta có (*) $\Leftrightarrow \left(1 + \dfrac{1}{4^a}\right)^b > \left(1 + \dfrac{1}{4^b}\right)^a$ (**).

Ta có: a > b nên $\dfrac{1}{4^a} < \dfrac{1}{4^b} \Rightarrow 1 < 1 + \dfrac{1}{4^a} < 1 + \dfrac{1}{4^b}$

Do đó: Với b > 0 ta có: $\left(1 + \dfrac{1}{4^a}\right)^b < \left(1 + \dfrac{1}{4^b}\right)^b$ (1)

Mặt khác: Do $1 + \dfrac{1}{4^b} > 1$ và b < a nên $\left(1 + \dfrac{1}{4^b}\right)^b < \left(1 + \dfrac{1}{4^b}\right)^a$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra (**) đúng. Vậy (*) được chứng minh.

Vấn đề 4: Giải phương trình chứa lũy thừa

1. Giải các phương trình sau:

a. $\dfrac{x^{-\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \dfrac{1}{x^2} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 = \dfrac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}$.

b. $\left(3x - 1\right)^{\frac{2}{3}} = 4 \Leftrightarrow 3x - 1 = 4^{\frac{3}{2}} = (2^2)^{\frac{3}{2}} = 2^3 = 8 \Leftrightarrow x = 3$.

c. $x^5 = 16x^3 \Leftrightarrow x^3(x^2 - 16) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = \pm 4$.

d. $\sqrt[3]{x^2} = 16 \Leftrightarrow x^2 = 16^3 \Leftrightarrow x = \pm 64$.

2. $\sqrt[4]{16x^2} + 5\sqrt[4]{x} - 7 = 0$ (1)

Đặt $t = \sqrt[4]{x} \geq 0$. Phương trình (1) trở thành:

$2t^2 + 5t - 7 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hay $t = -\dfrac{7}{2}$ (loại) $\Leftrightarrow \sqrt[4]{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

3. a) $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = 2 \Leftrightarrow (\sqrt[4]{x})^2 + \sqrt[4]{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt[4]{x} = 1\\ \sqrt[4]{x} = -2 \text{ (loại)}\end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1$.

b) $\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x} + 2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt[4]{x})^2 - 3\sqrt[4]{x} + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt[4]{x} = 1\\ \sqrt[4]{x} = 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 1\\ x = 16\end{array}\right.$.

4. $2\sqrt[3]{3x-2} + 3\sqrt{6-5x} - 8 = 0$ (*).

Đặt $u = \sqrt[3]{3x-2}$; $v = \sqrt{6-5x}$ ($v \geq 0$)

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2u + 3v = 8 \\ 5u^3 + 3v^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \dfrac{8-2u}{3} \\ 5u^3 + 3\left(\dfrac{8-2u}{3}\right)^2 = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15u^3 + 4u^2 - 32u + 40 = 0 \\ v = \dfrac{8-2u}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -2 \\ v = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2.$$

5. a) $a^{x+2} + a^{2-x} = a^4 + 1 \Leftrightarrow a^2.a^x + \dfrac{a^2}{a^x} = a^4 + 1 \Leftrightarrow a^2(a^x)^2 - (a^4 + 1).a^x + a^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^x = a^2 \\ a^x = a^{-2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

b) $3^{|x|} < 27 \Leftrightarrow 3^{|x|} < 3^3 \Leftrightarrow |x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$.

§2. LÔGARIT

Vấn đề 1: Tính toán lôgarit

1. * $\log_3 81\sqrt{3} = \log_3(3^4.3^{\frac{1}{2}}) = \log_3 3^{\frac{9}{2}} = \dfrac{9}{2}$.

* $\log_3\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3}.\sqrt[6]{3}}\right)=\log_3\left(\dfrac{3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{3}}.3^{\frac{1}{6}}}\right)=\log_3 3^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}=\log_3 3^0=0.$

* $\log_3\dfrac{\sqrt[3]{3\sqrt[5]{3}}}{9}=\log_3\left(\dfrac{3^{\frac{1}{3}}.3^{\frac{1}{15}}}{3^2}\right)=\log_3 3^{\frac{1}{3}+\frac{1}{15}-2}=\log_3 3^{-\frac{8}{5}}=-\dfrac{8}{5}$.

* $\log_3\dfrac{27}{\sqrt[3]{9\sqrt[4]{3}}}=\log_3\dfrac{3^3}{3^{\frac{2}{3}}.3^{\frac{1}{12}}}=\log_3 3^{3-\frac{1}{3}-\frac{1}{12}}=\log_3 3^{\frac{31}{12}}=\dfrac{31}{12}.$

2. * $\log_{\frac{1}{5}}125=\log_{5^{-1}}5^3=\dfrac{3}{-1}\log_5 5=-3.$

* $\log_{0,5}\dfrac{8\sqrt{2}}{2\sqrt[3]{4}}=\log_{2^{-1}}\dfrac{2^3.2^{\frac{1}{2}}}{2.2^{\frac{2}{3}}}=\log_{2^{-1}}2^{\frac{7}{2}-\frac{5}{3}}=\log_{2^{-1}}2^{\frac{11}{6}}=-\dfrac{11}{6}.$

* $\log_{\frac{1}{4}}\dfrac{\sqrt[3]{2}}{64}=\log_{2^{-2}}\dfrac{2^{\frac{1}{3}}}{2^6}=\log_{2^{-2}}2^{\frac{1}{3}-6}=\log_{2^{-2}}2^{-\frac{17}{3}}=\dfrac{17}{6}.$

* $\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{6}}}36\sqrt{6}=\log_{6^{-\frac{1}{3}}}\left(6^2.6^{\frac{1}{2}}\right)=\log_{6^{-\frac{1}{3}}}6^{\frac{5}{2}}=-\dfrac{15}{2}.$

3. * $3^{\log_3 18}=18.$

* $3^{5\log_3 2}=\left(3^{\log_3 2}\right)^5=2^5=32..$

* $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{1+\log_2 5}=\left(2^{-3}\right)^{\log_2 2+\log_2 5}=\left(2^{-3}\right)^{\log_2 10}=\left(2^{\log_2 10}\right)^{-3}=10^{-3}=0{,}001.$

* $\left(\dfrac{1}{32}\right)^{-1-\log_{0,5}5}=\left(2^{-5}\right)^{-\log_2 2-\log_{2^{-1}}5}=2^{5(\log_2 2-\log_2 5)}=\left(2^{\log_2\frac{2}{5}}\right)^5=\left(\dfrac{2}{5}\right)^5.$

4. a. $A=2\log_{64}12+\log_{2\sqrt{2}}\sqrt{15}+\log_8 20=2\log_{2^6}12+\log_{2^{\frac{3}{2}}}\sqrt{15}+\log_{2^3}20$

$=\dfrac{1}{3}\log_2 12+\dfrac{2}{3}\log_2\sqrt{15}+\dfrac{1}{3}\log_2 20=\dfrac{1}{3}\left[\log_2 12+\log_2 15+\log_2 20\right]$

$=\dfrac{1}{3}\log_2(12.15.20)=\dfrac{1}{3}\log_2 3600.$

b. $B = \frac{1}{2}\log_7 36 - \log_{49} 196 - 3\log_7 \sqrt[3]{21} = \frac{1}{2}\log_7 6^2 - \log_{7^2} 14^2 - 3\log_7 21^{\frac{1}{3}}$

$= \log_7 6 - \log_7 14 - \log_7 21 = \log_7\left(\frac{6}{14.21}\right) = \log_7 7^{-2} = -2$.

c. $C = \dfrac{\log_5 \frac{36}{12}\log_{3^2} 7^2}{\log_5 7} = \dfrac{\log_5 3\log_3 7}{\log_5 7} = \dfrac{\log_5 7}{\log_5 7} = 1$.

d. $D = 36^{\log_6 5} + 10^{1-\log 2} - 8^{\log_2 3} = 6^{2\log_6 5} + 10^{\log 10 - \log 2} - 2^{3\log_2 3}$

$= \left(6^{\log_6 5}\right)^2 + 10^{\log\frac{10}{2}} - \left(2^{\log_2 3}\right)^3 = 5^2 + 5 - 3^3 = 3.$

5. a. $M = \log\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\log 4 + 4\log\sqrt{2} = \log\frac{1}{8} + \log 4^{\frac{1}{2}} + \log\sqrt{2}^4$

$= \log\frac{1}{8} + \log 2 + \log 4 = \log\frac{1}{8}.2.4 = \log 1 = 0$.

b. $N = \log\frac{4}{9} + \frac{1}{2}\log 36 + \frac{3}{2}\log\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\log 2$

$= \log\frac{4}{9} + \log 36^{\frac{1}{2}} + \log\left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \log 2^{\frac{1}{2}}$

$= \log\frac{4}{9} + \log 6 + \log\frac{3^3}{2\sqrt{2}} - \log\sqrt{2} = \log\frac{4}{9}.6.\frac{27}{2\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{2}} = \log 18$.

c. $P = \log 81\sqrt{3} - 2\log\frac{27}{16} + \log\sqrt{108} = \log 81\sqrt{3} - \log\left(\frac{27}{16}\right)^2 + \log\sqrt{108}$

$= \log\frac{81\sqrt{3}\sqrt{108}}{27^2}.16^2 = \log 512$.

d. $Q = \log\frac{1}{8} - \log 0,375 + 2\log\sqrt{0,5625} = \log\frac{1}{8} - \log 0,375 + \log 0,5625$

$= \log\frac{0,5625}{8.0,375} = \log\frac{3}{16}$.

6. a. $\ln\sqrt{e} + \ln\frac{1}{e\sqrt[3]{e}} = \ln e^{\frac{1}{2}} + \ln e^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{2} - \frac{4}{3} = -\frac{5}{6}$.

b. $5\ln\frac{e^{-1}}{\sqrt{e}} + 4\ln\left(e^2\sqrt{e}\right) = 5\ln e^{-\frac{3}{2}} + 4\ln e^{\frac{5}{2}} = -\frac{15}{2} + 10 = \frac{5}{2}$.

7. a. $A = \ln^2 a + 2\ln a \log_a e + \log_a^2 e + \ln^2 a - \log_a^2 e = 2\ln^2 a + 2$.

b. $B = 2\ln a + 3\log_a e - 3\log_a e - 2\ln a + 2 = 2$.

Vấn đề 2: So sánh hai lôgarit

1. So sánh các số sau:

a. Ta có $\log_3 4 > \log_3 1 = 0$ và $\log_4 \frac{1}{3} < \log_4 1 = 0$ nên $\log_3 4 > \log_4 \frac{1}{3}$.

b. Ta có $\log_7 1{,}4 > 0$ nên $3^{\log_7 1{,}4} > 1$ và $\log_5 0{,}92 < 0$ nên $\log 7^{\log_5 0{,}92} < 1$.

Vậy $3^{\log_7 1{,}4} > 7^{\log_5 0{,}92}$.

c. Ta có $\log 2 + \log 3 = \log 6$ mà $6 > 5$ nên $\log 6 > \log 5$. Vậy $\log 2 + \log 3 > \log 5$.

d. Ta có $\log 13 - \log 3 = \log\frac{13}{3} < \log 6$. Vậy $\log 13 - \log 3 < \log 6$.

e. Ta có $2\ln 2 - \ln 5 = \ln\frac{4}{5} < 0$ và $\log 1{,}1 > 0$. Vậy $2\ln 2 - \ln 5 < \log 1{,}1$.

f. Ta có $1 + 2\log 3 = \log 10 + \log 9 = \log 90 > \log 89$. Vậy $1 + 2\log 3 > \log 89$.

2. a. Ta có: $\log_7 29 > \log_7 25$ và $\log_3 5 = \log_9 25 < \log_7 25$. Vậy $\log_7 29 > \log_3 5$.

b. Ta có: $\log_{0,3} 0{,}8 = \log_{0,09} 0{,}64$ và $\log_{0,2} 0{,}3$.

Vì $0{,}09 < 1$ và $0{,}64 > 0{,}3$ nên $\log_{0,3} 0{,}8 = \log_{0,09} 0{,}64 < \log_{0,09} 0{,}3$

và $0{,}09 < 0{,}2 < 1$ và $0{,}3 < 1$ nên $\log_{0,09} 0{,}3 < \log_{0,2} 0{,}3$.

Vậy $\log_{0,3} 0{,}8 < \log_{0,2} 0{,}3$.

Vấn đề 3: Biểu diễn một lôgarit theo các lôgarit khác

1. Hãy biểu diễn các lôgarit sau qua α và β:

a. $\log_{\sqrt{3}} 5.10 = 2\log_3 \frac{15.10}{3} = 2\left[\log_3 15 + \log_3 10 - \log_3 3\right] = 2(\alpha + \beta - 1)$.

b. $\log_4 1250 = \frac{\log_2 5^4.2}{\log_2 4} = \frac{4\log_2 5 + \log_2 2}{2} = \frac{4\alpha + 1}{2}$

c. $\log_{30} 1350 = \log_{30} 3^3.5^2.2 = \log_{30} 3^2.5.30$

$= 2\log_{30} 3 + \log_{30} 5 + \log_{30} 30 = 2b + a + 1$

2. a. $\ln 500 = \ln 5^3.2^2 = 3\ln 5 + 2\ln 2 = 3b + 2a$.

b. $\ln\frac{16}{25} = \ln 2^4 - \ln 5^2 = 4a - 2b$.

c. $\ln 6{,}25 = \ln\frac{5^2}{2^2} = 2\ln 5 - 2\ln 2 = 2b - 2a$.

d. $\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + ... + \ln\frac{98}{99} + \ln\frac{99}{100} = \ln\frac{1}{2}.\frac{2}{3}....\frac{98}{99}.\frac{99}{100}$

$= \ln\frac{1}{100} = -\ln 5^2.2^2 = -2(\ln 5 + \ln 2) = -2(a + b)$.

3. * $\ln 36 = \ln(2.3)^2 = 2(\ln 2 + \ln 3) = 2(a + b)$.

* $\ln\frac{1}{12} = -\ln 2^2.3 = -(2\ln 2 + \ln 3) = -(2a + b)$.

* $\ln 21 + 2\ln 14 - 3\ln 0{,}875 = \ln 7.3 + 2\ln 2.7 - 3\ln\frac{7}{8}$

$= \ln 7 + \ln 3 + 2(\ln 2 + \ln 7) - 3(\ln 7 - 3\ln 2) = \ln 3 + 11\ln 2 = 11a + b$.

4. a. $\log_a x = \log_a\left(a^3b^2\sqrt{c}\right) = \log_a a^3 + \log_a b^2 + \log_a \sqrt{c}$

$= 3 + 2\log_a b + \frac{1}{2}\log_a c = 3 + 2.3 + \frac{1}{2}.(-2) = 8$.

b. $\log_a x = \log_a\frac{a^4\sqrt[3]{b}}{c^3} = \log_a a^4 + \log_a\sqrt[3]{b} - \log_a c^3$

$= 4 + \frac{1}{3}\log_a b - 3\log_a c = 4 + \frac{1}{3}.3 - 3.(-2) = 11$.

Vấn đề 4: Tìm giá trị của x thỏa mãn hệ thức lôgarit

1. a. $\log_{x-1}(4x - 4) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x - 1 \neq 1 \\ 4x - 4 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x \neq 2 \\ x^2 - 6x + 5 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x \neq 2 \\ x = 1 \text{ hay } x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5$.

b. $\log_2(x^3 + 2x^2) = 4 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 = 2^4 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 16 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 4x + 8) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

c. $\log_3(x^3 + 2) = 3 \Leftrightarrow x^3 + 2 = 3^3 \Leftrightarrow x^3 = 25 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{25}$.

d. $\log_{\frac{1}{6}}(x^2 - 4x - 6) = -1 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 6 = 6$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 6 \text{ hay } x = -2$.

2. a. $\log_3 x = 4\log_3 a + 7\log_3 b = \log_3(a^4.b^7) \Leftrightarrow x = a^4b^7$.

b. $\log_5 x = 2\log_5 a - 3\log_5 b = \log_5 \dfrac{a^2}{b^3} \Leftrightarrow x = a^2b^{-3}$.

3. a. $\log_x(24+x) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ x^3 = x + 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ x^3 - x - 24 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ (x-3)(x^2+3x+8) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$

b. $\log_x \dfrac{1}{64} = \dfrac{-\log_{\sqrt{2}} 2}{\log_{12} 2 + \log_{12} 6} = \dfrac{-2\log_2 2}{\log_{12} 2.6} = -2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ x^{-2} = \dfrac{1}{64} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ x^2 = 64 \end{cases} \Leftrightarrow x = 8.$

Vấn đề 5: Chứng minh đẳng thức chứa lôgarit

1. Vế trái $= \dfrac{7}{16}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)^2 - 4\ln\left(\sqrt{2}+1\right) - \dfrac{25}{8}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)^{-1}$

$= \dfrac{7}{8}\ln(\sqrt{2}+1) - 4\ln(\sqrt{2}+1) + \dfrac{25}{8}\ln(\sqrt{2}+1)$

$= \left(\dfrac{7}{8} - 4 + \dfrac{25}{8}\right)\ln(\sqrt{2}+1) = 0 =$ Vế phải.

2. a. Ta có: $a^2 + b^2 = 7ab \Rightarrow (a+b)^2 = 9ab \Rightarrow \left(\dfrac{a+b}{3}\right)^2 = ab$

$\Rightarrow \log_7\left(\dfrac{a+b}{3}\right)^2 = \log_7(ab) \Rightarrow \log_7 \dfrac{a+b}{3} = \dfrac{1}{2}(\log_7 a + \log_7 b)$ (ĐPCM).

b. Ta có: $x^2 + 4y^2 = 12xy \Rightarrow (x+2y)^2 = 16xy$

$\Rightarrow \log(x+2y)^2 = \log(16xy) \Rightarrow 2\log\left(x+2y\right) = \log x + \log y + 4\log 2$ (ĐPCM).

3. Ta có: $a^{\sqrt{\log_a b}} - b^{\sqrt{\log_b a}} = b^{\log_b a\sqrt{\log_a b}} - b^{\sqrt{\log_b a}}$

$= b^{\sqrt{(\log_b a)\log_a b}} - b^{\sqrt{\log_b a}} = b^{\sqrt{\log_b a}} - b^{\sqrt{\log_b a}} = 0$ (ĐPCM).

4. Vế trái $= \dfrac{1}{\log_a x} + \dfrac{1}{\frac{1}{2}\log_a x} + \ldots + \dfrac{1}{\frac{1}{n}\log_a x} = \dfrac{1}{\log_a x} + \dfrac{2}{\log_a x} + \ldots + \dfrac{n}{\log_a x}$

$$= (1+2+...+n).\frac{1}{\log_a x} = \frac{n(n+1)}{2\log_a x} = \text{Vế phải.}$$

5. Ta có: $\begin{cases} a = \log_{12} 18 = \dfrac{\log_3 2.3^2}{\log_3 12} = \dfrac{\log_3 2 + 2}{2\log_3 2 + 1} = \dfrac{x+2}{2x+1} \\ b = \log_{24} 54 = \dfrac{\log_3 2.3^3}{\log_3 3.2^3} = \dfrac{\log_3 2 + 3}{3\log_3 2 + 1} = \dfrac{x+3}{3x+1} \end{cases}$ ($x = \log_3 2$).

$$\Rightarrow 5(a-b) + ab = 5\left(\frac{x+2}{2x+1} - \frac{x+3}{3x+1}\right) + \frac{x+2}{2x+1}.\frac{x+3}{3x+1}$$

$$= \frac{5[(x+2)(3x+1) - (x+3)(2x+1)] + (x+2)(x+3)}{(2x+1)(3x+1)}$$

$$= \frac{6x^2 + 3x + 1}{(2x+1)(3x+1)} = \frac{(2x+1)(3x+1)}{(2x+1)(3x+1)} = 1 \text{ (ĐPCM).}$$

§3. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

Vấn đề 1: Tìm giới hạn của hàm số mũ

1. a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^2 - e^{5x+2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(-5e^2.\dfrac{e^{5x}-1}{5x}\right) = -5e^2.$

b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - e^{7x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-5e^{2x}(e^{5x}-1)}{5x} = -5e^0 = -5$.

c. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} + e^{\sin 3x} - 2}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(2.\dfrac{e^{2x}-1}{2x} + \dfrac{e^{\sin 3x}-1}{\sin 3x}.\dfrac{\sin 3x}{3x}.3\right) = 2.1 + 1.1.3 = 5.$

2. a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x.e^{\frac{1}{x}} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}\right) = 1$ (vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$).

b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^{3x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \dfrac{3}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{-3}.\frac{-3(3x+1)}{x+2}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1-\dfrac{3}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{-3}}\right]^{\frac{-3(3x+1)}{x+2}} = e^{-9}.$

c. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+4\sin 3x\right)^{\frac{1}{2x}} = \lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+4\sin 3x\right)^{\frac{1}{4\sin 3x}}\right]^{\frac{4\sin 3x}{2x}}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+4\sin 3x\right)^{\frac{1}{4\sin 3x}}\right]^{\frac{6\sin 3x}{3x}} = e^6.$

Vấn đề 2: Tìm giới hạn của hàm số lôgarit

1. a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+3x\right)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\ln\left(1+3x\right)}{3x} = 3.$

b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x.\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2} = 0.$

c. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(3x+1\right)-\ln\left(2x+1\right)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3\ln\left(1+3x\right)}{3x} - \dfrac{2\ln\left(1+2x\right)}{2x}\right) = 3-2=1.$

2. a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x[e^{\sin 4x} - \ln e(1+3x)]}{\ln(\cos 2x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x[e^{\sin 4x} - 1 - \ln(1+3x)]}{\ln(1-2\sin^2 x)}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x[4x.\frac{e^{\sin 4x}-1}{4x} - 3x\frac{\ln(1+3x)}{3x}]}{\frac{\ln(1-2\sin^2 x)}{-2\sin^2 x}.\frac{-2\sin^2 x}{x^2}.x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\frac{e^{\sin 4x}-1}{4x} - 3.\frac{\ln(1+3x)}{3x}}{\frac{\ln(1-2\sin^2 x)}{-2\sin^2 x}.\frac{-2\sin^2 x}{x^2}} = -\dfrac{1}{2}.$

b. $\lim\limits_{x\to +\infty}(4x+3)\ln\left(\dfrac{x+5}{x+1}\right) = \lim\limits_{x\to +\infty}(4x+3)\ln\left(1+\dfrac{4}{x+1}\right)$

$= \lim\limits_{x\to +\infty}(4x+3).\dfrac{\ln\left(1+\frac{4}{x+1}\right)}{\frac{x+1}{4}\cdot\frac{4}{x+1}} = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{4(4x+3)}{x+1}.\dfrac{\ln\left(1+\frac{4}{x+1}\right)}{\frac{4}{x+1}} = 16.1 = 16.$

Vấn đề 3: Tìm đạo hàm của hàm số mũ

1. a. $y = \left(x-1\right)e^{2x} \Rightarrow y' = 1.e^{2x} + (x-1).e^{2x}.2 = (2x-1)e^{2x}.$

b. $y = x^2.\sqrt{e^{4x}+1} \Rightarrow y' = 2x\sqrt{e^{4x}+1} + x^2.\dfrac{4e^{4x}}{2\sqrt{e^{4x}+1}}$

$$= \frac{2x(e^{4x}+1)+2x^2e^{4x}}{\sqrt{e^{4x}+1}} = \frac{2x[xe^{4x}+e^{4x}+1]}{\sqrt{e^{4x}+1}}.$$

c. $y = \frac{1}{2}\left(e^{2x}-e^{-2x}\right) \Rightarrow y' = \frac{1}{2}\left[2e^{2x}+2e^{-2x}\right] = e^{2x}+e^{-2x}$.

d. $y = (x+1)e^{x^2} + (x^2+1)e^{x+1}$

$\Rightarrow y' = 1.e^{x^2} + (x+1).2xe^{x^2} + 2x.e^{x+1} + (x^2+1)e^{x+1}$

$= e^{x^2}(2x^2+2x+1) + e^{x+1}(2x^2+2x+1) = (2x^2+2x+1)(e^{x^2}+e^{x+1})$.

e. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \Rightarrow y' = \frac{(e^x-e^{-x})'(e^x+e^{-x}) - (e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x})'}{(e^x+e^{-x})^2}$

$= \frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$.

Cách khác: $y = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{e^{-x}(e^{2x}+1)} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = 1 - \frac{2}{e^{2x}+1}$

$y' = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$

f. $y = 2^x - \sqrt{e^x} \Rightarrow y' = 2^x\ln 2 - \frac{1}{2}\sqrt{e^x}$.

2. a. $y = a^x$

Ta có: $y' = a^x\ln a$; $y'' = a^x(\ln a)^2$;

Dự đoán $y^{(n)} = a^x(\ln a)^n$ (*) với mọi $n \in N^*$.

Chứng minh công thức (*) bằng quy nạp:

- Ta có khi $n = 1$ thì $y' = a^x\ln a \Rightarrow$ (*) đúng khi $n = 1$.
- Giả sử (*) đúng với $n = k \geq 1$, nghĩa là $y^{(k)} = a^x(\ln a)^k$.

Khi đó: $y^{(k+1)} = [y^{(k)}]' = [a^x(\ln a)^k]' = a^x\ln a.(\ln a)^k = a^x(\ln a)^{k+1}$.

Suy ra (*) đúng với $n = k + 1$.

Vậy (*) đúng với mọi $n \in N^*$. Do đó $y^{(n)} = a^x(\ln a)^n$.

b. $y = e^{kx}$.

Ta có: $y' = e^{kx}.k$; $y'' = e^{kx}.k^2$.

Bằng quy nạp ta chứng minh được $y^{(n)} = e^{kx}.k^n$.

3. Ta có: $y' = 1.e^{-\frac{1}{x}} + x.e^{-\frac{1}{x}}(\frac{1}{x^2}) = e^{-\frac{1}{x}}(1+\frac{1}{x})$.

$$y'' = \frac{1}{x^2}.e^{-\frac{1}{x}}(1+\frac{1}{x}) + e^{-\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2}) = e^{-\frac{1}{x}}.\frac{1}{x^3}.$$

Do đó: $x^3y'' - xy' + y = x^3.e^{-\frac{1}{x}}.\frac{1}{x^3} - x.e^{-\frac{1}{x}}(1+\frac{1}{x}) + x.e^{-\frac{1}{x}}$

$$= e^{-\frac{1}{x}}(1 - x - 1 + x) = 0 \text{ (ĐPCM)}.$$

4. Ta có: $y' = 4e^{4x} - 2e^{-x}$; $y'' = 16e^{4x} + 2e^{-x}$; $y''' = 64e^{4x} - 2e^{-x}$.

Do đó:

$$y''' - 13y' - 12y = 64e^{4x} - 2e^{-x} - 13(4e^{4x} - 2e^{-x}) - 12(e^{4x} + 2e^{-x})$$
$$= 64e^{4x} - 2e^{-x} - 52e^{4x} + 26e^{-x} - 12e^{4x} - 24e^{-x} = 0 \text{ (ĐPCM)}.$$

5. Ta có: $y' = -e^{-x}.\sin x + e^{-x}.\cos x = e^{-x}(\cos x - \sin x)$.

$$y'' = -e^{-x}(\cos x - \sin x) + e^{-x}(-\sin x - \cos x) = -2e^{-x}\cos x.$$

Do đó:

$$y'' + 2y' + 2y = -2e^{-x}\cos x + 2e^{-x}(\cos x - \sin x) + 2e^{-x}\sin x$$
$$= e^{-x}(-2\cos x + 2\cos x - 2\sin x + 2\sin x) = 0 \text{ (ĐPCM)}.$$

Vấn đề 3: Tìm đạo hàm hàm số lôgarit

1. a. $y' = (3x-2)'\ln^2(3x-2) + (3x-2)[\ln^2(3x-2)]'$

$$= 3\ln^2(3x-2) + (3x-2).2\ln(3x-2).\frac{3}{3x-2}$$

$$= 3\ln^2(3x-2) + 6\ln(3x-2).$$

b. $y' = \left(\sqrt{x^2+1}\right)'.\ln x^2 + \sqrt{x^2+1}(\ln x^2)'$

$$= \frac{x\ln x^2}{\sqrt{x^2+1}} + \sqrt{x^2+1}.\frac{2}{x} = \frac{x^2\ln x^2 + 2(x^2+1)}{x\sqrt{x^2+1}}.$$

c. $y = x.\ln\frac{1}{1+x} = -x\ln(1+x)$

$$\Rightarrow y' = -1.\ln(1+x) - x.\frac{1}{1+x} = -\frac{(1+x)\ln(1+x) + x}{1+x}.$$

d. $$y' = \frac{\left(\ln(x^2+1)\right)'x - \ln(x^2+1).x'}{x^2} = \frac{\frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1)}{x^2} = \frac{2}{x^2+1} - \frac{\ln(x^2+1)}{x^2}.$$

2. a. $y = \ln x$:

Ta có: $y' = \frac{1}{x}$; $y'' = -\frac{1}{x^2}$; $y''' = \frac{2}{x^3}$. Dự đoán: $y^{(n)} = (-1)^{n-1}.\frac{(n-1)!}{x^n}$ (*).

Dùng quy nạp ta chứng minh được (*) đúng.

b. $y = x\ln x$.

Ta có: $y' = \ln x + 1;\ y'' = \dfrac{1}{x};\ y''' = -\dfrac{1}{x^2};\ ..$

Dự đoán: $y^{(n)} = (-1)^n.\dfrac{(n-2)!}{x^{n-1}}$ (**) với mọi $n \geq 2$.

Dùng quy nạp ta chứng minh được (**) đúng với mọi $n \geq 2$.

3. Ta có: $y' = \cos(\ln x).\dfrac{1}{x} - \sin(\ln x).\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}\left[\cos(\ln x) - \sin(\ln x)\right]$.

$$y'' = -\frac{1}{x^2}\left[\cos(\ln x) - \sin(\ln x)\right] + \frac{1}{x}\left[-\frac{1}{x}\sin(\ln x) - \frac{1}{x}\cos(\ln x)\right]$$

$$= -\frac{2}{x^2}\cos(\ln x).$$

Do đó: $x^2y'' + xy' + y = -2\cos(\ln x) + \cos(\ln x) - \sin(\ln x) + \sin(\ln x) + \cos(\ln x) = 0$.

4. Ta có: $y = -\ln(1+x) \Rightarrow y' = \dfrac{-1}{1+x}$.

$\Rightarrow y' + xy' = -1$.

$\Rightarrow xy' + 1 = -y' = \dfrac{1}{1+x} = e^y$ (ĐPCM).

5. Ta có: $y = \dfrac{1}{1+x+\ln x} \Rightarrow y(1 + x + \ln x) = 1$ (*)

Lấy đạo hàm 2 vế của (*), ta được:

$$y'(1 + x + \ln x) + y(1 + \frac{1}{x}) = 0$$

$\Rightarrow xy'(1 + x + \ln x) + xy + y = 0$ (1)

Mặt khác từ (*) $\Rightarrow xy + y = 1 - y\ln x$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$xy'.\dfrac{1}{y} + 1 - y\ln x = 0 \Rightarrow xy' = y(y\ln x - 1)$. (ĐPCM).

Vấn đề 4: tìm tập xác định - chứng minh bất đẳng thức; tìm giá trị lớn nhất - giá trị nhỏ nhất của hàm số mũ và hàm số logarit.

1. a. Ta có: $y' = \dfrac{1}{3}\left[2^x\ln 2 + 2^{-x}\ln 2\right] = \dfrac{\ln 2}{3}(2^x + 2^{-x}) > 0$ với mọi $x \in R$.

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên R.

b. Ta có: $y' = \dfrac{1}{x\ln\frac{1}{2}} - \dfrac{1}{(x+1)\ln\frac{1}{2}} = -\dfrac{1}{\ln 2}.\dfrac{1}{x(x+1)} < 0$ với mọi $x > 0$.

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên R^+.

2. a. $f(x) = 3^x + 2^x$ trên $[-1; 1]$

Tập xác định: $D = R$; $X = [-1; 1]$.

$f'(x) = 3^x\ln 3 + 2^x\ln 2 > 0$ với mọi $x \in R$.

Do đó f(x) liên tục và đồng biến trên R.

Ta có: $f(1) = 5$ và $f(-1) = \dfrac{5}{6}$.

Vậy $\underset{X}{\operatorname{Max}} f(x) = f(1) = 5$; $\underset{X}{\operatorname{Min}} f(x) = f(-1) = \dfrac{5}{6}$.

b. $f(x) = 5^{|x^2-2x|}$ trên $[-1; 2]$.

Với mọi $x \in [-1; 2]$ ta có: $0 \le |x^2 - 2x| \le 3$ nên $5^0 \le 5^{|x^2-2x|} \le 5^3$.

Ta có: $f(-1) = 5^3$ và $f(0) = f(2) = 1$.

Vậy $\underset{[-1;2]}{\operatorname{Max}} f(x) = f(-1) = 125$; $\underset{[-1;2]}{\operatorname{Min}} f(x) = f(0) = f(2) = 1$.

3. Với $a > 0$, $b > 0$ và $\alpha > 0$ ta có:

$$a^\alpha + b^\alpha = c^\alpha \Rightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^\alpha + \left(\frac{b}{c}\right)^\alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^\alpha < 1; \left(\frac{b}{c}\right)^\alpha < 1.$$

$$\Rightarrow 0 < u = \frac{a}{c} < 1; 0 < v = \frac{b}{c} < 1.$$

Do đó:

a) $m > \alpha \Rightarrow \begin{cases} u^m < u^\alpha \\ v^m < v^\alpha \end{cases} \Rightarrow u^m + v^m < u^\alpha + v^\alpha = 1 \Rightarrow a^m + b^m < c^m$.

b) $m < \alpha \Rightarrow \begin{cases} u^m > u^\alpha \\ v^m > v^\alpha \end{cases} \Rightarrow u^m + v^m > u^\alpha + v^\alpha = 1 \Rightarrow a^m + b^m > c^m$.

4. a. Vì $\pi < \dfrac{10}{3}$ mà $a^\pi > \sqrt[3]{a^{10}} = a^{\frac{10}{3}}$ nên $0 < a < 1$.

b. Vì $-0,02 < \sqrt{3}$ và $a^{-0,02} < a^{\sqrt{3}}$ nên $a > 1$.

c. Ta có: $t+\sqrt{t}+1=(\sqrt{t}+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>\frac{3}{4}$ và $(a-1)^{\frac{3}{4}}>(a-1)^{t+\sqrt{t}+1}$ nên:

$0<a-1<1 \Leftrightarrow 1<a<2.$

5. Ta chứng minh: Nếu a + b = 1 thì f(a) + f(b) = 1.

Thật vậy:

$$f(a)+f(b)=\frac{4^a}{4^a+2}+\frac{4^b}{4^b+2}=\frac{4^a(4^b+2)+4^b(4^a+2)}{(4^a+2)(4^b+2)}$$

$$=\frac{2.4^a+2.4^b+2.4^{a+b}}{2.4^a+2.4^b+4^{a+b}+4}=\frac{2.4^a+2.4^b+8}{2.4^a+2.4^b+8}=1.$$

Do đó:

$$S=f\left(\frac{1}{2012}\right)+f\left(\frac{2011}{2012}\right)+f\left(\frac{2}{2012}\right)+f\left(\frac{2010}{2012}\right)...+f\left(\frac{1005}{2012}\right)+f\left(\frac{1007}{2012}\right)+f\left(\frac{1006}{2012}\right)$$

$$=1005+f\left(\frac{1}{2}\right)=1005+\frac{1}{2}=\frac{2011}{2}.$$

6. a. $y=\log_3\left(x^2+2x\right)$.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow x^2+2x>0 \Leftrightarrow x<-2$ hay $x>0$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$.

b. $y=\log_{0,7}\frac{x^2-9}{x+5}$.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \frac{x^2-9}{x+5}>0 \Leftrightarrow (x^2-9)(x+5)>0$

$\Leftrightarrow -5<x<-3$ hay $x>3$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(-5;-3)\cup(3;+\infty)$.

c. $y=\frac{2}{\log_4 x-3}$.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \frac{x^2-9}{x+5}>0 \Leftrightarrow (x^2-9)(x+5)>0$

$\Leftrightarrow -5<x<-3$ hay $x>3$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(-5;-3)\cup(3;+\infty)$

d. $y=\log_3\left(2-x\right)^2$.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow (2-x)^2>0 \Leftrightarrow x\neq 2$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=R\setminus\{2\}$.

7. a. $y = \ln x^2 \quad \left(-e \le x \le -\dfrac{1}{e}\right)$

Tập xác định: $D = R\setminus\{0\};\ X = \left[-e; -\dfrac{1}{e}\right]$.

Ta có: $y' = \dfrac{2}{x} < 0$ với mọi $x \in X$.

Suy ra hàm số nghịch biến và liên tục trên X.

Do đó: $\max\limits_{X} f(x) = f(-e) = 2;\ \min\limits_{X} f(x) = f(-\dfrac{1}{e}) = -2$.

b. $y = |\ln x| = \begin{cases} \ln x \text{ khi } x \ge 1 \\ -\ln x \text{ khi } 0 < x < 1 \end{cases}$.

Tập xác định: $D = (0; +\infty)$.

Ta có: $y' = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \text{ khi } x > 1 \\ -\dfrac{1}{x} \text{ khi } 0 < x < 1 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	0		1		$+\infty$
y'	‖	−	|	+	
y	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $\min\limits_{D} f(x) = f(1) = 0$.

Hàm số không đạt giá trị lớn nhất trên D.

c. $y = \log_2 x - \dfrac{2}{x} \quad \left(x \ge \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Tập xác định: $D = (0; +\infty);\ X = [\dfrac{\sqrt{2}}{2}; +\infty)$.

Ta có: $y' = \dfrac{1}{x\ln 2} + \dfrac{1}{x^2} > 0$ với mọi $x > 0$.

Suy ra hàm số tăng và liên tục trên X.

Do đó: $\min\limits_{X} f(x) = f(\dfrac{\sqrt{2}}{2}) = -\dfrac{1}{2} - 2\sqrt{2}$.

Hàm số không đạt giá trị lớn nhất trên X.

d. $y = \dfrac{\ln(2x-3)}{2x-3}$.

Tập xác định: $D = (\frac{3}{2}; +\infty)$.

Ta có: $y' = \dfrac{2-2\ln(2x-3)}{(2x-3)^2}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \ln(2x-3) = 1 \Leftrightarrow 2x-3 = e \Leftrightarrow x = \dfrac{e+3}{2} = x_0$.

Bảng biến thiên:

x		3/2		x_0		$+\infty$
y'		‖	+	0	−	
y		‖	↗	1/e	↘	

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $\underset{D}{\text{Max}}\, f(x) = f(\frac{e+3}{2}) = \frac{1}{e}$.

Hàm số không đạt giá trị nhỏ nhất trên D.

8. a) $y = \sqrt{x^2+1}.\ln x^2 = f(x)$.

Tập xác định: $D = R\setminus\{0\}$.

$y' = \dfrac{2x\ln|x|}{\sqrt{x^2+1}} + \dfrac{2\sqrt{x^2+1}}{x} = \dfrac{2x^2\ln|x| + 2x^2 + 2}{x\sqrt{x^2+1}}$

Ta có: $g(x) = 2x^2\ln|x| + 2x^2 + 2$.

Ta có: $g'(x) = 4x\ln|x| + 6x = 2x(2\ln|x| + 3)$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\, e^{-\frac{3}{2}}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-e^{-3/2}$		0		$e^{-3/2}$		$+\infty$
g'(x)		−	0	+	‖	−	0	+	
g(x)		↘		↗	‖	↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $g(x) \ge g(\pm e^{-\frac{3}{2}}) = 2.e^{-3}.\left(-\frac{3}{2}\right) + 2 + 2e^{-3} = 2 - e^{-3} > 0$.

Do đó dấu y' chính là dấu của x.

Vậy khi $x > 0$ thì $y' > 0$ và khi $x < 0$ thì $y' < 0$.

Suy ra: Hàm số tăng trong $(0; +\infty)$ và giảm trong $(-\infty; 0)$.

b) $y = x.\ln\left(\dfrac{1}{x+1}\right) = -x\ln(1+x)$.

Tập xác định: $D = (-1; +\infty)$.

$$y' = -\ln(x+1) - \frac{-x}{x+1} = -\frac{(x+1)\ln(x+1)+x}{x+1}$$

Ta có:

* $x > 0$ thì $\ln(x+1) > \ln 1 = 0$ nên $y' < 0 \Rightarrow$ hàm số giảm trên $(0; +\infty)$.

* $-1 < x < 0$ thì $\ln(x+1) < \ln 1 = 0$ và $x + 1 > 0$ nên $y' > 0$

$\Rightarrow$ hàm số tăng trên $(-1; 0)$.

9. Tập xác định: $D = R\setminus\{0\}$.

$$f'(x) = \frac{\dfrac{2x}{x^2+1}.x - \ln(x^2+1)}{x^2} = \frac{2x^2 - (x^2+1)\ln(x^2+1)}{x^2(x^2+1)}$$

Xét $g(x) = 2x^2 - (x^2+1)\ln(x^2+1)$ ta có:

$$g'(x) = 4x - 2x\ln(x^2+1) - 2x = 2x[1 - \ln(x^2+1)]$$

Với $x \in (0; 1)$ thì: $0 < x^2 < 1$ nên $1 < x^2 + 1 < 2 \Rightarrow 0 < \ln(x^2+1) < \ln 2 < 1$

$\Rightarrow g'(x) > 0$ với $x \in (0; 1)$.

Với $x \in (-1; 0)$ thì: $0 < x^2 < 1$ nên $1 < x^2 + 1 < 2 \Rightarrow 0 < \ln(x^2+1) < \ln 2 < 1$

$\Rightarrow g'(x) < 0$ với $x \in (-1; 0)$.

Do đó: Với mọi $x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$ thì $g(x) > g(0) = 0$.

$\Rightarrow f'(x) > 0$ với mọi $x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$.

Vậy $f(x)$ đồng biến trong $(-1; 0)$ và $(0; 1)$.

10. Tập xác định: $D = (0; +\infty)$; $X = [1; e^3]$.

$$y' = \frac{2\ln x - \ln^2 x}{x^2};\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = e^2 \end{array}\right.$$

Ta có f liên tục trên $[1; e^3]$; $f(1) = 0$; $f(e^2) = 4e^{-2}$ và $f(e^3) = 9e^{-3}$.

Do đó: $\min\limits_X f(x) = f(1) = 0$ và $\max\limits_X f(x) = f(e^2) = 4e^{-2}$.

11. ➢ Xét $f(x) = x - \ln(x+1)$ trên $[0; +\infty)$ ta có:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} > 0 \text{ với mọi } x > 0.$$

$\Rightarrow f(x)$ tăng và liên tục trên $[0; +\infty) \Rightarrow f(x) > f(x) = 0$ với mọi $x > 0$.

$\Rightarrow x > \ln(x+1)$ với mọi $x > 0$ (*).

➢ Xét $g(x) = \ln(x+1) - x + \dfrac{x^2}{2}$ trên $[0; +\infty)$ ta có:

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 + x = \frac{x^2}{x+1} > 0 \ \forall \ x > 0$$

$\Rightarrow g(x)$ tăng và liên tục trên $[0; +\infty) \Rightarrow g(x) > g(0) = 0, \forall \ x > 0$.

$\Rightarrow \ln(x+1) > x - \dfrac{x^2}{2}$ với mọi $x > 0$ (**).

Từ (*) và (**) suy ra ĐPCM.

12. Ta có: $\dfrac{1}{y-x}\left(\ln\dfrac{y}{1-y} - \ln\dfrac{x}{1-x}\right) > 4 \Leftrightarrow \ln\dfrac{y}{1-y} - \ln\dfrac{x}{1-x} > 4(y-x)$

$$\Leftrightarrow \ln\frac{y}{1-y} - 4y > \ln\frac{x}{1-x} - 4x$$

Xét hàm số $f(t) = \ln\dfrac{t}{1-t} - 4t$ trên $(0; 1)$ ta có:

$$f'(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{1-t} - 4 = \frac{1-4t+4t^2}{t(1-t)} = \frac{(2t-1)^2}{t(1-t)} \geq 0 \ \forall \ t \in (0; 1).$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}.$$

Vậy f(t) tăng và liên tục trên (0; 1).

Do đó với $y > x$ ta có $f(y) > f(x) \Rightarrow \ln\dfrac{y}{1-y} - 4y > \ln\dfrac{x}{1-x} - 4x$ (ĐPCM)

13. Tập xác định: $D = (0; +\infty)$; $X = [1; e]$.

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}\ln(x+1) > 0 \ \forall \ x \in [1; e].$$

Do đó: $\underset{X}{\text{Min}}\, f(x) = f(1) = -2\ln 2$ và $\underset{X}{\text{Max}}\, f(x) = f(e) = 1 - \dfrac{e+1}{e}\ln(e+1)$.

§4. PHƯƠNG TRÌNH MŨ

Vấn đề 1: Đưa về cùng một cơ số

1. a. $5x + 1 - 5x = 2.2x + 2x + 3 \Leftrightarrow 5x(5-1) = 2x(2+23)$

$$\Leftrightarrow 4.5^x = 10.2^x \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = 1.$$

b. $2^{x+1} + 9.2^x - 2^{x+2} = 56 \Leftrightarrow 2^x(2 + 9 - 2^2) = 56 \Leftrightarrow 2^x = 8 \Leftrightarrow x = 3.$

2.

a. $2^{\frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}(5\sqrt{x}+1)}} - 2^{2\sqrt{x}-1} = 0 \Leftrightarrow 2^{\frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}(5\sqrt{x}+1)}} = 2^{2\sqrt{x}-1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}\left(5\sqrt{x}+1\right)} = 2\sqrt{x}-1 \Leftrightarrow \sqrt{x}+5 = (2\sqrt{x}-1).\sqrt{x}\left(5\sqrt{x}+1\right)$ (*).

Đặt $t = \sqrt{x} \geq 0$.

(*) trở thành

$t + 5 = (2t - 1)t(5t + 1) \Leftrightarrow 10t^2 - 4t - 6 = 0$

$\Leftrightarrow t = 1$ hay $t = -\dfrac{3}{5}$ (loại) $\Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

b. $5^{2|2x-3|} - 5^{6x-8} = 0 \Leftrightarrow 5^{2|2x-3|} = 5^{6x-8}$

$\Leftrightarrow 2|2x-3| = 6x - 8 \Leftrightarrow |2x-3| = 3x - 4$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} 2x - 3 = 3x - 4 \\ 2x - 3 = -3x + 4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4 \geq 0 \\ x = 1 \text{ hay } x = \dfrac{7}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{5}$.

c. $\left(2+\sqrt{3}\right)^{2x} = 2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)^{2x} = \left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}$

$\Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$.

d. $2^{x^2-3x+2} = 4 \Leftrightarrow 2^{x^2-3x+2} = 2^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 2 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 3$.

3. a. $2^{x^2-6x-\frac{5}{2}} = 16\sqrt{2}$ (1)

(1) $\Leftrightarrow 2^{x^2-6x-\frac{5}{2}} = 2^4.2^{1/2} \Leftrightarrow 2^{x^2-6x-\frac{5}{2}} = 2^{9/2} \Leftrightarrow x^2 - 6x - \dfrac{5}{2} = \dfrac{9}{2}$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 7$.

b. $3^{x-1} = 18^{2x}.2^{-2x}.3^{x+1}$ (2)

(2) $\Leftrightarrow 3^{x-1} = (\dfrac{18}{2})^{-2x}.3^{x+1} \Leftrightarrow 3^{x-1} = 9^{-2x}.3^{x+1} \Leftrightarrow 3^{x-1} = 3^{-4x}.3^{x+1}$

$\Leftrightarrow 3^{x-1} = 3^{-3x+1} \Leftrightarrow x - 1 = -3x + 1 \Leftrightarrow 4x = 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

c. $5^x.\ 8^{\frac{x-1}{3}} = 500$ (3)

(3) $\Leftrightarrow 5^x.2^{x-1} = 5^3.2^2 \Leftrightarrow 10^x.\ 2^{-1} = 10^2.5 \Leftrightarrow 10^x = 10^3 \Leftrightarrow x = 3$.

d. $2^{x+3}.3^{x-2}.5^{x+1} = 4000$ (4)

(4) $\Leftrightarrow 2^x.2^3.3^x.3^{-2}.5^x.5 = 10^3.2^2$

$\Leftrightarrow 2.5.\dfrac{1}{3^2}\ 30^x = 10^3 \quad \Leftrightarrow 30^x = 30^2 \Leftrightarrow x = 2.$

e. $4.9^{x-1} = 3\sqrt{2^{2x+1}}$ (5)

(5) $\Leftrightarrow \dfrac{3^{2x-2}}{3} = \dfrac{2^{\frac{2x+1}{2}}}{2^2} \Leftrightarrow 3^{2x-3} = 2^{\frac{2x-3}{2}} \Leftrightarrow 3^{2x-3} = (\sqrt{2})^{2x-3}$

$\Leftrightarrow (\dfrac{3}{\sqrt{2}})^{2x-3} = 1 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}.$

f. $16^{\frac{x+10}{x-10}} = 0.125.8^{\frac{x+5}{x-15}}$ (6)

(6) $\Leftrightarrow 2^{4\frac{x+10}{x-10}} = \dfrac{1}{8}.8^{\frac{x+5}{x-15}} \Leftrightarrow 2^{\frac{4x+40}{x-10}} = 2^{\frac{3x+15}{x-15}-3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{4x+40}{x-10} = \dfrac{3x+15-3(x-15)}{x-15} \Leftrightarrow \dfrac{4x+40}{x-10} = \dfrac{60}{x-15}$

$\Leftrightarrow (4x + 40)(x - 15) = 60(x - 10) \Leftrightarrow 4x^2 - 80x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 20$.

4. Giải các phương trình:

a. $32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0{,}25.128^{\frac{x+17}{x-3}} \Leftrightarrow 2^{5.\frac{x+5}{x-7}} = 2^{-2}.2^{7.\frac{x+17}{x-3}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{5x+25}{x-7} = \dfrac{7x+119}{x-3} - 2 \Leftrightarrow (5x+25)(x-3) = (5x+125)(x-7)$

$\Leftrightarrow x = 10.$

b. $5^{x-1} = 10^x.2^{-x}.5^{x+1} \Leftrightarrow 5^{x-1} = 2^x.5^x.2^{-x}.5^{x+1}$

$\Leftrightarrow 5^{x-1} = 5^{2x+1} \Leftrightarrow x - 1 = 2x + 1 \Leftrightarrow x = -2.$

c. $4^x - 3^{x-0,5} = 3^{x+0,5} - 2^{2x-1} \Leftrightarrow 4^x + 2^{2x-1} = 3^{x-0,5} + 3^{x+0,5}$

$\Leftrightarrow 4^x(1+\dfrac{1}{2}) = 3^{x-0,5}(1+3) \Leftrightarrow 4^x.\dfrac{3}{2} = .4\dfrac{3^x}{\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{4}{3}\right)^x = \dfrac{8}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{4}{3}}\left(\dfrac{8}{3\sqrt{3}}\right).$

Vấn đề 2: Phương pháp đặt ẩn số phụ

1.

a) $3^{x+1} + 18.3^{-x} = 29$ (1)

$(1) \Leftrightarrow 3.3^x + \frac{18}{3^x} = 29$.

Đặt $t = 3^x > 0$.

(1) trở thành $3t^2 - 29t + 18 = 0 \Leftrightarrow t = 9$ hoặc $t = \frac{2}{3}$.

$\Leftrightarrow 3^x = 9$ hoặc $3^x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = \log_3(\frac{2}{3})$.

b) $4.9^x + 12^x = 3.16^x$ (2)

$$(2) \Leftrightarrow 4\left(\frac{9}{16}\right)^x + \left(\frac{12}{16}\right)^x = 3 \Leftrightarrow 4\left(\frac{3}{4}\right)^{2x} + \left(\frac{3}{4}\right)^x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x = -1 \text{ hoặc } \left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = 1.$$

c) $3.5^{2x+1} - 34.15^x + 135.9^{x-1} = 0$ (3)

$$(3) \Leftrightarrow 15\left(\frac{25}{9}\right)^x - 34\left(\frac{15}{9}\right)^x + 15 = 0 \Leftrightarrow 15\left(\frac{5}{3}\right)^{2x} - 34\left(\frac{5}{3}\right)^x + 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x = \frac{5}{3} \text{ hoặc } \left(\frac{5}{3}\right)^x = \frac{3}{5} \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

d) $5.6^{\frac{x}{2}} - 4.3^x + 9.2^x = 0$ (4)

Chia 2 vế phương trình (1) cho $6^{\frac{x}{2}}$ ta được $9.\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x}{2}} - 4.\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{x}{2}} + 5 = 0$ (2)

Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{x}{2}}$, $t > 0$.

Phương trình (1) trở thành:

$$4t^2 - 5t - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \quad (\text{loại}) \\ t = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{x}{2}} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x = 4 \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = 4$.

2. $\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x+\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x=\sqrt{7+\sqrt{35721}}$ (1)

Đặt $t=\left(7+\sqrt{48}\right)^{\frac{x}{2}}$, $t>0 \Rightarrow \left(7-\sqrt{48}\right)^{\frac{x}{2}}=\frac{1}{t}$

Phương trình (1) trở thành: $t+\frac{1}{t}=14$

$\Leftrightarrow t^2-14t+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=7+\sqrt{48} \\ t_2=7-\sqrt{48}\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm 2$

Vậy nghiệm của phương trình sẽ là: $\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2\end{array}\right.$.

3. a. $9^x-4.3^x-45=0 \Leftrightarrow (3^x)^2-4.3^x-45=0$

Đặt $t=3^x>0$ ta được $t^2-4t-45=0 \Leftrightarrow t=-5$ (loại) hay $t=9$.

$\Leftrightarrow 3^x=9 \Leftrightarrow x=2.$

b. $3^{2x+5}=3^{x+2}+2.$

$\Leftrightarrow 3.3^{2x+4}-3^{x+2}-2=0 \Leftrightarrow 3.(3^{x+2})^2-3^{x+2}-2=0.$

Đặt $t=3^{x+2}>0$, ta được $3t^2-t-2=0 \Leftrightarrow t=1$ hay $t=-\frac{2}{3}$ (loại)

$\Leftrightarrow 3^{x+2}=1 \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2.$

c. Đặt $t=3^{x^2+1}\geq 3$ (vì $x^2+1\geq 1$). Ta được:

$t^2+t-6=0 \Leftrightarrow t=-3$ (loại) hoặc $t=2$ (loại).

Vậy phương trình vô nghiệm.

d. $4^{x-\sqrt{x^2-5}}-12.2^{x-1-\sqrt{x^2-5}}+8=0$ (2) Điều kiện $|x|\geq\sqrt{5}$

Đặt $t=2^{x-\sqrt{x^2-5}}>0$. Ta được (2) $\Leftrightarrow t^2-6t+8=0 \Leftrightarrow t=2$ hoặc $t=4$.

Do đó:

$\left[\begin{array}{l} 2^{x-\sqrt{x^2-5}}=2 \\ 2^{x-\sqrt{x^2-5}}=4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\sqrt{x^2-5}=1 \\ x-\sqrt{x^2-5}=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2-5}=x-1 \\ \sqrt{x^2-5}=x-2\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5=x^2-2x+1 (x\geq 1) \\ x^2-5=x^2-4x+4 (x\geq 2)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-6=0\ (x\geq 1) \\ 4x-9=0\ (x\geq 2)\end{array}\right. \Leftrightarrow x=3$ hoặc $x=\frac{9}{4}$.

e. $5.4^x-7.10^x+2.25^x=0$ (3)

Chia hai vế cho 25^x ta được (3) $\Leftrightarrow 5\left(\frac{2}{5}\right)^{2x}-7\left(\frac{2}{5}\right)^x+2=0.$

Đặt $t = \left(\frac{2}{5}\right)^x > 0$ ta được $5t^2 - 7t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = \frac{2}{5}$

$\Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$.

f. $3^{2x^2+6x-9} + 4.15^{x^2+3x-5} = 3.5^{2x^2+6x-9}$

$\Leftrightarrow 3.3^{2x^2+6x-10} + 4.15^{x^2+3x-5} = 3.5.5^{2x^2+6x-10}$

$\Leftrightarrow 3.\left(\frac{3}{5}\right)^{2x^2+6x-10} + 4.\frac{15^{x^2+3x-5}}{5^{2x^2+6x-10}} = 15$

$\Leftrightarrow 3.\left(\frac{3}{5}\right)^{2(x^2+3x-5)} + 4.\left(\frac{3}{5}\right)^{x^2+3x-5} - 15 = 0$

Đặt $t = \left(\frac{3}{5}\right)^{x^2+3x-5} > 0$. Ta được:

$3t^2 + 4t - 15 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{3}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{x^2+3x-5} = \frac{5}{3} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-1} \Leftrightarrow x^2 + 3x - 5 = -1 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -4$.

4. a) $2^{3x+1} - 125^x - 50^x = 0 \Leftrightarrow 2\left(\frac{2}{5}\right)^{3x} - 1 - \left(\frac{50}{125}\right)^x = 0$

Đặt $t = \left(\frac{50}{125}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^x > 0$ ta được:

$2t^3 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$

b) $8^x - 2.4^x - 2^x + 2 = 0$

Đặt $t = 2^x > 0$ ta được:

$t^3 - 2t^2 - t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hay $t = 2$ hay $t = -1$ (loại)

$\Leftrightarrow 2^x = 1$ hay $2^x = 2 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = 1$.

c) $7^{\frac{2}{x}+2} - 74.35^{\frac{1}{x}} + 25^{\frac{1}{x}+1} = 0 \Leftrightarrow 49\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{2}{x}} - 74\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{x}} + 25 = 0$.

Đặt $t = \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{x}} > 0$ ta được $49t^2 - 74t + 25 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hay $t = \frac{25}{49}$.

$\Leftrightarrow \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{x}} = 1$ hay $\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{25}{49} \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = -2$.

d) $2^{x(1-x)+2} - 2^{x(x-1)} + 3 = 0 \Leftrightarrow 4.2^{x-x^2} - 2^{x^2-x} + 3 = 0$

Đặt $t = 2^{x^2-x} > 0$, ta được:

$\frac{4}{t} - t + 3 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 4$ hay $t = -1$ (loại)

$\Leftrightarrow 2^{x^2-x} = 4 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hay $x = 2$.

e) $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5.2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} - 6 = 0$

$\Leftrightarrow 4^{x+\sqrt{x^2-2}} - \frac{5}{2}.2^{x+\sqrt{x^2-2}} - 6 = 0$ điều kiện $|x| \geq \sqrt{2}$

Đặt $t = 2^{x+\sqrt{x^2-2}} > 0$. Ta được:

$2t^2 - 5t - 12 = 0 \Leftrightarrow t = 4$ hay $t = -\frac{3}{2}$ (loại).

$\Leftrightarrow 2^{x+\sqrt{x^2-2}} = 4 \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2-2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2} = 2 - x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ x^2 - 2 = 4 - 4x + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

f) $3^{4x+8} - 4.3^{2x+5} + 28 = 2\log_2\sqrt{2} \Leftrightarrow 3^{2(2x+4)} - 12.3^{2x+4} + 27 = 0$

Đặt $t = 3^{2x+4} > 0$. Ta được:

$t^2 - 12t + 27 = 0 \Leftrightarrow t = 3$ hoặc $t = 9$

$\Leftrightarrow 3^{2x+4} = 3$ hoặc $3^{2x+4} = 9 \Leftrightarrow 2x + 4 = 1$ hoặc $2x + 4 = 2$

$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$ hoặc $x = -1$.

5. a) $3^{2\sin^2 x} + 3^{2\cos^2 x} = 10 \Leftrightarrow 9^{\sin^2 x} + 9^{1-\sin^2 x} - 10 = 0$.

Đặt $t = 9^{\sin^2 x}$; $t \in [1; 9]$. Ta được:

$t + \frac{9}{t} - 10 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 10t + 9 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = 9$

$\Leftrightarrow 9^{\sin^2 x} = 1$ hoặc $9^{\sin^2 x} = 9$

$\Leftrightarrow \sin^2 x = 0$ hoặc $\sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = 0$ hoặc $\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}$ $(k \in Z)$.

b) $4^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} - \sqrt{2}(\sqrt{2}+1) = 0 \Leftrightarrow 2^{2\sin^2 x} + 2^{1-\sin^2 x} - \sqrt{2}(\sqrt{2}+1) = 0$.

Đặt t = $2^{\sin^2 x}$; $t \in [1; 2]$, ta được:

$$t^2 + \frac{2}{t} - \sqrt{2}(\sqrt{2}+1) = 0 \Leftrightarrow t^3 - \sqrt{2}(\sqrt{2}+1)t + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \sqrt{2} \text{ hay } t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \text{ (loại)}$$

$$\Leftrightarrow 2^{\sin^2 x} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \ (k \in Z).$$

c) $2^{\sin^2 x} + 4.2^{\cos^2 x} = 6 \Leftrightarrow 2^{\sin^2 x} + 4.2^{1-\sin^2 x} = 6$.

Đặt t = $2^{\sin^2 x}$ ($t \in [1; 2]$, ta được:

$$t + 4.\frac{2}{t} - 6 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 8 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \text{ hay } t = 4.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{\sin^2 x} = 2 \\ 2^{\sin^2 x} = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in Z).$$

d) $4^{3+2\cos 2x} - 7.4^{1+\cos 2x} = 4^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 4.4^{2(1+\cos 2x)} - 7.4^{1+\cos 2x} - 2 = 0$.

Đặt t = $4^{1+\cos 2x}$ ($t \in [0; 16]$) ta được:

$$4t^2 - 7t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \text{ hay } t = -\frac{1}{4} \text{ (loại)}$$

$$\Leftrightarrow 4^{1+\cos 2x} = 2 \Leftrightarrow 2(1+\cos 2x) = 1 \Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \ (k \in Z).$$

6. a) $2^{x^2-x} - 2^{2+x-x^2} = 3$. (a)

Đặt t = $2^{x^2-x} > 0$, ta được:

$$\text{(a)} \Leftrightarrow t - \frac{4}{t} - 3 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \text{ hay } t = 4$$

$$\Leftrightarrow 2^{x^2-x} = 4 \Leftrightarrow x^2 - x = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hay } x = 2.$$

b) $3.8^x + 4.12^x - 18^x - 2.27^x = 0$. (b)

$$\text{(b)} \Leftrightarrow 3\left(\frac{8}{27}\right)^x + 4\left(\frac{12}{27}\right)^x - \left(\frac{18}{27}\right)^x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{2}{3}\right)^{3x} + 4\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 = 0.$$

Đặt $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x > 0$, ta được: $3t^3 + 4t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$ hay $t = -1$ (loại)

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = 1.$$

c) $\left(\sqrt{2}-1\right)^x + \left(\sqrt{2}+1\right)^x - 2\sqrt{2} = 0$ (c).

Đặt $t = \left(\sqrt{2}+1\right)^x > 0 \Rightarrow \left(\sqrt{2}-1\right)^x = \frac{1}{t}$.

(c) $\Leftrightarrow \frac{1}{t} + t - 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2\sqrt{2}t + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{2}+1 \\ t = \sqrt{2}-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (\sqrt{2}+1)^x = \sqrt{2}+1 \\ (\sqrt{2}+1)^x = \sqrt{2}-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

d) $2^{x^2+x} - 4.2^{x^2-x} - 2^{2x} + 4 = 0$ (d)

(d) $\Leftrightarrow 2^{x^2-x}(2^{2x} - 4) - (2^{2x} - 4) = 0$

$\Leftrightarrow (2^{x^2-x} - 1)(2^{2x} - 4) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x^2-x} = 1 \\ 2^{2x} = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x = 0 \\ 2x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right..$$

Vấn đề 3: Phương pháp lôgarit hóa

1. a. $2^{x-3} = 5^{x^2-5x+6} \Leftrightarrow (x-3)\log_5 2 = x^2 - 5x + 6$

$\Leftrightarrow (x-3)(x-2-\log_5 2) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ hay $x = 2 + \log_5 2 = \log_5 50$.

b. $3^x.2^{x^2} = 144 \Leftrightarrow \log_2(3^x.2^{x^2}) = \log_2 144 \Leftrightarrow x\log_2 3 + x^2 = \log_2(3^2.2^4)$

$\Leftrightarrow x^2 + x\log_2 3 - 2\log_2 3 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+2+\log_2 3) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hay $x = -2 - \log_2 3 = -\log_2 12$.

c. $3^{x-1}.2^{x^2} = 8.4^{x-2} \Leftrightarrow \log_2(3^{x-1}.2^{x^2}) = \log_2(8.4^{x-2})$

$\Leftrightarrow (x-1)\log_2 3 + x^2 = 3 + (2x-4)\log_2 2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + (x-1)\log_2 3 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-1+\log_2 3) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hay $x = 1 - \log_2 3$.

2. a. $2^{x^3-1}.5^x = 3200 \Leftrightarrow x^3 - 1 + x\log_2 5 = \log_2(2^7.5^2)$

$\Leftrightarrow x^3 - 1 + x\log_2 5 = 7 + 2\log_2 5$

$\Leftrightarrow\ x^3 - 8 + (x-2)\log_2 5 = 0$

$\Leftrightarrow\ (x-2)(x^2 + 2x + 4 + \log_2 5) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x^2 + 2x + 4 + \log_2 5 = 0\ (*) \end{array}\right.$$

Ta có: (*) có $\Delta' = -3 - \log_2 5 < 0$ nên (*) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm là $x = 2$.

b. $3^{2x+4} = 4^{x^2-1} \Leftrightarrow \log_2\left(3^{2x+4}\right) = \log_2 2^{2x^2-2}$

$\Leftrightarrow (2x+4)\log_2 3 = 2x^2 - 2$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x\log_2 3 - 2 - 2\log_2 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hay $x = -1 - \log_2 3 = -\log_2 6$.

c. $6^x + 6^{x+1} = 2^{x^2} + 2^{x^2+2} + 2^{x^2+4}$

$\Leftrightarrow 6^x(1+6) = 2^{x^2}(1+4+16)$

$\Leftrightarrow 7.6^x = 21.2^{x^2}$

$\Leftrightarrow \log_2(7.6^x) = \log_2(21.2^{x^2})$

$\Leftrightarrow \log_2 7 + x\log_2 6 = \log_2 21 + x^2$

$\Leftrightarrow x^2 - x\log_2 6 + \log_2 21 - \log_2 7 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - x(\log_2 3 + 1) + \log_2 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hay $x = \log_2 3$.

d. $7^{\log x} - 5^{\log x + \log_5(x-1) - 1} = 5^{\log x - 1} - 3.7^{\log x - 1}$

$\Leftrightarrow 7^{\log x} + 3.7^{\log x - 1} = 5^{\log x - 1} + 5^{\log x + \log_5(x-1) - 1}$.

$\Leftrightarrow 7^{\log x - 1}(7+3) = 5^{\log x - 1}(1 + 5^{\log_5(x-1)})$

$\Leftrightarrow\ 7^{\log x - 1}.10 = 5^{\log x - 1}.x$

$\Leftrightarrow\ \log\left(10.7^{\log x - 1}\right) = \log\left(5^{\log x - 1}.x\right)$

$\Leftrightarrow 1 + (\log x - 1)\log 7 = (\log x - 1)\log 5 + \log x$

$\Leftrightarrow (\log x - 1)(\log 7 - \log 5 - 1) = 0 \Leftrightarrow \log x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 10$.

3. a) $3^{4^x} = 4^{3^x} \Leftrightarrow 4^x = \log_3(4^{3^x}) = 3^x \log_3 4$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = \log_3 4 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{4}{3}}(\log_3 4).$$

b) $3^{2-\log_3 x} = 81x$ (*). Điều kiện: $x > 0$.

(*) $\Leftrightarrow 2 - \log_3 x = \log_3(81x)$

$$\Leftrightarrow 2 - \log_3 x = 4 + \log_3 x \Leftrightarrow \log_3 x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$

c) $3^x.8^{\frac{x}{x+1}} = 36 \Leftrightarrow \log_2 8^{\frac{x}{x+1}}.3^x = \log_2 36$

$\Leftrightarrow 3.\dfrac{x}{x+1} + x\log_2 3 = 2\log_2 3 + 2$

$\Leftrightarrow 3x + (x^2 + x)\log_2 3 = 2x\log_2 3 + 2x + 2\log_2 3 + 2$

$\Leftrightarrow x^2\log_2 3 + (1 - \log_2 3)x - 2 - 2\log_2 3 = 0$

$\Delta = (1 - \log_2 3)^2 - 4\log_2 3(-2 - 2\log_2 3) = (3\log_2 3 + 1)^2.$

Suy ra phương trình có 2 nghiệm là:

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\log_2 3 - 1 + (3\log_2 3 + 1)}{2\log_2 3} = 2 \\ x = \dfrac{\log_2 3 - 1 - (3\log_2 3 + 1)}{2\log_2 3} = -1 - \dfrac{1}{\log_2 3} = -\log_3 6 \end{array}\right.$$

d) $x^6.5^{-\log_x 5} = 5^{-5}$ (*). Điều kiện: $0 < x \neq 1$.

Ta có: (*) $\Leftrightarrow \log_5\left(x^6.5^{-\log_x 5}\right) = \log_5\left(5^{-5}\right)$

$\Leftrightarrow 6\log_5 x - \log_x 5 = -5 \Leftrightarrow 6\log_5 x - \dfrac{1}{\log_5 x} = -5$

$\Leftrightarrow 6(\log_5 x)^2 + 5\log_5 x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \log_5 x = -1$ hay $\log_5 x = \dfrac{1}{6} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{5}$ hay $x = 5^{\frac{1}{6}}$.

Vấn đề 4: Phương pháp dùng tính đơn điệu của hàm số

1. $\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^x + \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^x = \left(\sqrt{10}\right)^x \Leftrightarrow \left(\dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{10}}\right)^x + \left(\dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{10}}\right)^x = 1$ (*).

Xét hàm số $f(x) = \left(\dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{10}}\right)^x + \left(\dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{10}}\right)^x$, ta có:

* $f(2) = 1$

* f là hàm số nghịch biến trên R vì $\dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{10}} < 1;\ \dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{10}} < 1$.

Vậy (*) có nghiệm duy nhất là $x = 2$.

2. $13^x - 11^x - 4^x = \left(4\sqrt{2}\right)^x \Leftrightarrow 1 = \left(\dfrac{11}{13}\right)^x + \left(\dfrac{4}{13}\right)^x + \left(\dfrac{4\sqrt{2}}{13}\right)^x$ (*)

Xét hàm số $f(x) = \left(\frac{11}{13}\right)^x + \left(\frac{4}{13}\right)^x + \left(\frac{4\sqrt{2}}{13}\right)^x$ ta có:

* $f(2) = 1$

* f là hàm số nghịch biến vì $\frac{11}{13} < 1$; $\frac{4}{13} < 1$; $\frac{4\sqrt{2}}{13} < 1$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 2$.

3. a) $2^x + 3^x + 5^x = 10$ (1)

Xét hàm số $f(x) = 2^x + 3^x + 5^x$ ta có:

* $f(1) = 10$

* f là hàm số đồng biến trên R

Vậy $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

b) $3.25^{x-2} + (3x-10)5^{x-2} + 3 - x = 0$ (2)

Đặt $t = 5^{x-2}$; $t > 0$.

(2) $\Leftrightarrow 3t^2 + (3x-10)t + 3 - x = 0$ (2a); $\Delta = (3x-10)^2 - 12(3-x) = (3x-8)^2$

Do đó:

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{10-3x+3x-8}{6} = \dfrac{1}{3} \\ t = \dfrac{10-3x-3x+8}{6} = 3 - x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 5^{x-2} = \dfrac{1}{3} & (2b) \\ 5^{x-2} = 3 - x & (2c) \end{array}\right.$$

Ta có:

* (2b) $\Leftrightarrow x - 2 = -\log_5 3 \Leftrightarrow x = 2 - \log_5 3$.

* (2c) $\Leftrightarrow f(x) = 5^{x-2} + x - 3 = 0$.

Ta có: + $f(2) = 0$

+ $f'(x) = 5^{x-2}\ln 5 + 1 > 0$, $\forall$ x nên f đồng biến trên R.

Suy ra (2c) có nghiệm duy nhất là $x = 2$.

Vậy (2) có hai nghiệm là $x = 2 - \log_5 3$; $x = 2$.

4. a) $2^x = 3 - x \Leftrightarrow f(x) = 2^x + x - 3 = 0$ (1)

Ta có: * $f(1) = 0 \Rightarrow x = 1$ là một nghiệm của (1).

* $f'(x) = 2^x\ln 2 + 1 > 0$, $\forall$ x nên f(x) đồng biến trên R

$\Rightarrow$ (1) có nhiều nhất một nghiệm.

Vậy (1) có nghiệm duy nhất là $x = 1$.

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 4 \Leftrightarrow g(x) = 3^{-x} - x - 4 = 0$ (2)

Ta có: * $g(-1) = 0 \Rightarrow x = -1$ là một nghiệm của (2).

* $g'(x) = -3^{-x}\ln 3 - 1 < 0,\ \forall x$ nên g(x) nghịch biến trên R

$\Rightarrow$ (2) có nhiều nhất một nghiệm.

Vậy (2) có nghiệm duy nhất là $x = -1$.

c) $\left(\sin\frac{\pi}{5}\right)^x + \left(\cos\frac{\pi}{5}\right)^x = 1 \Leftrightarrow h(x) = \left(\sin\frac{\pi}{5}\right)^x + \left(\cos\frac{\pi}{5}\right)^x - 1 = 0$ (3).

Ta có:

* $h(2) = 0 \Rightarrow x = 2$ là một nghiệm của (3).

* $h'(x) = (\sin\frac{\pi}{5})^x \ln\sin\frac{\pi}{5} + (\cos\frac{\pi}{5})^x \ln\cos\frac{\pi}{5} < 0, \forall x$ (do $\ln\sin\frac{\pi}{5} < 0$; $\ln\cos\frac{\pi}{5} < 0$) nên h(x) nghịch biến trên R

$\Rightarrow$ (3) có nhiều nhất một nghiệm.

Vậy (3) có nghiệm duy nhất là $x = 2$.

5. $2^{x^2+5x} + \log x = 2^{x+5} \Leftrightarrow 2^{x^2+5x} + \log x + \log(x+5) = 2^{x+5} + +\log(x+5)$

$\Leftrightarrow 2^{x^2+5x} + \log(x^2+5x) = 2^{x+5} + +\log(x+5)$ (*)

Xét $f(u) = 2^u + \log u$ với $u > 0$.

Ta có $f'(u) = 2^u\ln 2 + \dfrac{1}{u\ln 10} > 0,\ \forall x > 0$

$\Rightarrow$ f(u) đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Do đó: (*) $\Leftrightarrow f(x^2 + 5x) = f(x + 5)$

$\Leftrightarrow x^2 + 5x = x + 5 \Leftrightarrow (x+5)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

Vậy (*) có nghiệm duy nhất là $x = 1$.

6. Ta có: $x - 2^{\log_5(x+3)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5(x+3) = \log_2 x & (1) \\ x > 0 \end{cases}$

Đặt $t = \log_2 x$. Ta có:

(1) $\Leftrightarrow \log_5(2^t + 3) = t \Leftrightarrow 2^t + 3 = 5^t = 5^t - 2^t - 3$

Xét hàm số: $f(t) = 5^t - 2^t - 3,\ t \in R$

Ta có: * $f'(t) = 5^t\ln 5 - 2^t\ln 2 > 0 \Rightarrow f(t)$ tăng trên R.

* $f(1) = 0$

Suy ra: Phương trình $f(t) = 0$ có nghiệm duy nhất $t = 1$

Do đó: Phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = 2$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = 2$

7. $3.2^{2x} + 6 - 2x = 3 - x - (3x - 10).2^x \Leftrightarrow 3.2^{2x} + (3x - 10).2^x + 3 - x = 0(1)$

Đặt $2^x = t$. Điều kiện $t > 0$.

Khi đó: (1) $\Leftrightarrow 3.t^2+(3x-10).t+3-x=0$

Giải phương trình theo t ta được: $\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{3} \\ t=3-x \end{array}\right.$.

* $t=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 2^x=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x=\log_2\dfrac{1}{3}=-\log_2 3$.

* $t=3-x \Leftrightarrow 2^x=3-x$ (*). Áp dụng tính chất đồng biến, nghịch biến suy ra (*) có nghiệm duy nhất là $x=1$.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là: $\left[\begin{array}{l} x=-\log_2 3 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Vấn đề 5: Đưa về phương trình tích

1. $3^{2x}+2x(3^x+1)-4.3^x=5$

$\Leftrightarrow 3^{2x}-4.3^x-5+2x(3^x+1)=0$

$\Leftrightarrow (3^x+1)(3^x-5)+2x(3^x+1)=0$

$\Leftrightarrow (3^x+1)(3^x-5+2x)=0$

$\Leftrightarrow f(x)=3^x-5+2x=0$ (*) (do $3^x+1>0, \forall x$)

Ta có: * $f(1)=0$

* $f'(x)=3^x\ln 3+2>0\ \forall x$ nên f đồng biến trên R.

Suy ra (*) có nghiệm duy nhất là $x=1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=1$.

2. $x^2(2^{x-1}+2^{2-x})+3=3x^2+2^{2-x}+2^{x-1}$.

$\Leftrightarrow (x^2-1)(2^{x-1}+2^{2-x})+3-3x^2=0$

$\Leftrightarrow (x^2-1)(2^{x-1}+2^{2-x}-3)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-1=0 \\ 2^{x-1}+2^{2-x}-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ (2^{x-1})^2-3.2^{x-1}+2=0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ 2^{x-1}=1 \\ 2^{x-1}=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

3. $x^2.(2^{x+1}-2^{|x-3|+4})+2^{|x-3|+2}-2^{x-1}=0$.

$\Leftrightarrow 4x^2\left(2^{x-1}-2^{|x-3|+2}\right)+2^{|x-3|+2}-2^{x-1}=0$

$$\Leftrightarrow (4x^2-1)\left(2^{x-1}-2^{|x-3|+2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2=1 \\ 2^{|x-3|+2}=2^{x-1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\dfrac{1}{2} \\ |x-3|+2=x-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\dfrac{1}{2} \\ |x-3|=x-3 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{1}{2}$ hoặc $x\geq 3$.

4. Giải phương trình $4^{2x+\sqrt{x+2}}+2^{x^3}=4^{2+\sqrt{x+2}}+2^{x^3+4x-4}$ điều kiện $x\geq -2$.

$$4^{2x+\sqrt{x+2}}+2^{x^3}=4^{2+\sqrt{x+2}}+2^{x^3+4x-4}$$

$$\Leftrightarrow 4^{2x+\sqrt{x+2}}-4^{2+\sqrt{x+2}}+2^{x^3}-2^{x^3+4x-4}=0$$

$$\Leftrightarrow 4^{\sqrt{x+2}}\left(4^{2x}-4^2\right)+2^{x^3-4}\left(2^4-2^{4x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(16^x-16\right)\left(4^{\sqrt{x+2}}-2^{x^3-4}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 16^x=16 & (1) \\ 2^{2\sqrt{x+2}}=2^{x^3-4} & (2) \end{array}\right.$$

* (1) $\Leftrightarrow x=1$.

* (2) $\Leftrightarrow x^3-4=2\sqrt{x+2}$

$$\Leftrightarrow x^3-8+4-2\sqrt{x+2}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x+4)+2(2-\sqrt{x+2})=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(x^2+2x+4-\frac{2}{2+\sqrt{x+2}}\right)=0 \Leftrightarrow x=2$$

(Do $x^2+2x+4-\dfrac{2}{2+\sqrt{x+2}}=(x+1)^2+3-\dfrac{2}{2+\sqrt{x+2}}$ mà $\dfrac{2}{2+\sqrt{x+2}}\leq 1$

nên $x^2+2x+4-\dfrac{2}{2+\sqrt{x+2}}>0$).

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là x = 1 hay x = 2.

5. $4^{x^2-3x+2}+4^{x^2+6x+5}=4^{2x^2+3x+7}+1$

$$\Leftrightarrow 4^{x^2-3x+2}-1-4^{2x^2+3x+7}+4^{x^2+6x+5}=0$$

$$\Leftrightarrow 4^{x^2-3x+2}-1-4^{x^2+6x+5}\left(4^{x^2-3x+2}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(4^{x^2-3x+2}-1\right)\left(1-4^{x^2+6x+5}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4^{x^2-3x+2}=1 \\ 4^{x^2+6x+5}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3x+2=0 \\ x^2+6x+5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \{1; 2; -1; -5\}.$$

6. $2^{x^2+x}-4.2^{x^2-x}-2^{2x}+4=0$

$\Leftrightarrow 2^{x^2-x}(2^{2x}-4)-(2^x-4)=0$

$$\Leftrightarrow (2^{2x}-4)(2^{x^2-x}-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{2x}=4 \\ 2^{x^2-x}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm $x = 0; x = 1$.

§5. PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

Vấn đề 1: Đưa các lôgarit về cùng cơ số

1. a. $\log(\sqrt{x+1}+1)-3\log\sqrt[3]{x-40}=0$ (1)

Điều kiện: $x > 40$.

(1) $\Leftrightarrow \log\left(\sqrt{x+1}+1\right)=\log(x-40) \Leftrightarrow \sqrt{x+1}+1=x-40$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}=x-41 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x-41 \geq 0 \\ x+1=(x-41)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 41 \\ x^2-83x+1680=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 41 \\ x=35 \text{ hoặc } x=48 \end{cases} \Leftrightarrow x = 48 \text{ (nhận)}.$$

b. $2-\log(x-9)-\log(2x-1)=0$ (2)

Điều kiện: $x > 9$.

(2) $\Leftrightarrow \log(x-9)(2x-1)=2 \Leftrightarrow (x-9)(2x-1)=10^2$.

$\Leftrightarrow 2x^2-19x-91=0 \Leftrightarrow x=13$ hay $x=-\dfrac{7}{2}$ (loại) $\Leftrightarrow x = 13$ (nhận).

c. $\log_2(x^2+3x+2)+\log_2(x^2-7x+12)-\log_2 3-3=0$ (3)

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x^2+3x+2>0 \\ x^2-7x+12>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-2 \text{ hoặc } x>-1 \\ x<3 \text{ hoặc } x>4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-2 \\ -1<x<3 \\ x>4 \end{array}\right. .$$

$(3) \Leftrightarrow \log_2(x^2+3x+2)(x^2-7x+12) = \log_2 24$

$\Leftrightarrow (x+1)(x+2)(x-3)(x-4) = 24$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-3)(x+2)(x-4) = 24$

$\Leftrightarrow (x^2-2x-3)(x^2-2x-8) = 24.$

Đặt $t = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4 \geq -4$.

$(1) \Leftrightarrow t(t-5) = 24 \Leftrightarrow t = -3$ hay $t = 8$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x-3=-3 \\ x^2-2x-3=8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x=0 \\ x^2-2x-11=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=1\pm 2\sqrt{3} \end{array}\right. .$$

So sánh điều kiện ta được (3) có 4 nghiệm là:

$x = 0, x = 2, x = 1 \pm 2\sqrt{3}$.

d. $3^{\log_4 x+\frac{1}{2}} + 3^{\log_4 x-\frac{1}{2}} = 4\sqrt{x}$ (4).

Điều kiện: $x > 0$.

$(4) \Leftrightarrow 3^{\log_4 x-\frac{1}{2}}(3+1) = 4\sqrt{x} \Leftrightarrow \log_4 x - \frac{1}{2} = \log_3 \sqrt{x}$

$\Leftrightarrow \log_4 x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\log_3 x$

$\Leftrightarrow 2\log_4 x - \log_3 x = 1$

$\Leftrightarrow 2\log_4 3.\log_3 x - \log_3 x = 1$

$\Leftrightarrow (2\log_4 3 - 1)\log_3 x = 1$

$$\Leftrightarrow \log_3 x = \frac{1}{2\log_4 3 - 1} = \frac{\log_3 4}{2 - \log_3 4} = \frac{\log_3 4}{\log_3 \frac{9}{4}} = \log_{\frac{9}{4}} 4$$

$\Leftrightarrow x = 3^{\log_{\frac{9}{4}} 4}$ (nhận).

2. a. $\log_2[x(x-1)] = 1 \Leftrightarrow x(x-1) = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

b. $\log_2 x + \log_2(x-1) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \log_2 x(x-1) = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x(x-1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x = -1 \text{ hoặc } x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

c. $\log_2(3-x)+\log_2(1-x)=3 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x>0 \\ 1-x>0 \\ \log_2(3-x)(1-x)=3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x<1 \\ (3-x)(1-x)=2^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1 \\ x^2-4x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1.$

d. $\log_2 x+\log_4 x=\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 x=-\frac{1}{2}\log_2 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ 3\log_2 x=-\log_2 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \log_2 x=\log_2 3^{-\frac{1}{3}} \end{cases} \Leftrightarrow x=3^{-\frac{1}{3}}.$

3. a. $\log_3(3^x+8)=2+x \Leftrightarrow 3^x+8=3^{2+x} \Leftrightarrow 3^x+8=9.3^x$

$\Leftrightarrow 3^x=1 \Leftrightarrow x=0.$

b. $\log_2(9-2^x)=10^{\lg(3-x)} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x>0 \\ \log_2(9-2^x)=3-x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x<3 \\ 9-2^x=2^{3-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3 \\ 9-2^x=\dfrac{8}{2^x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3 \\ (2^x)^2-9.2^x+8=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x<3 \\ 2^x=1 \text{ hoặc } 2^x=8 \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$

c. $\log_{\sqrt{3}} x.\log_3 x.\log_9 x=8 \Leftrightarrow 2\log_3 x.\log_3 x.\frac{1}{2}\log_3 x=8$

$\Leftrightarrow (\log_3 x)^3=8 \Leftrightarrow \log_3 x=2 \Leftrightarrow x=3^2=9.$

d. $\log_4(\log_2 x)+\log_2(\log_4 x)=2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2(\log_2 x)+\log_2(\frac{1}{2}\log_2 x)=2$

$\Leftrightarrow \log_2(\log_2 x)+2\left[\log_2(\log_2 x)-\log_2 2\right]=4$

$\Leftrightarrow 3\log_2(\log_2 x)=6$

$\Leftrightarrow \log_2(\log_2 x)=2 \Leftrightarrow \log_2 x=2^2=4 \Leftrightarrow x=2^4=16.$

4. Đặt $t=2^x$. Điều kiện: $t>\frac{3}{4}$.

(1) trở thành: $\log_2(t^2+15t+27)+2\log_2\dfrac{1}{4t-3}=0$

$\Leftrightarrow \log_2(t^2+15t+27)=\log_2(4t-3)^2$

$\Leftrightarrow t^2+15t+27=16t^2-24t+9$

$\Leftrightarrow 15t^2-37t-18=0$

$\Leftrightarrow t=3$ (nhận) hay $t=-\dfrac{3}{5}$ (loại)

$\Leftrightarrow 2^x=3 \Leftrightarrow x=\log_2 3$.

5. a. $\log_4(x+1)^2+2=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{4-x}+\log_8(x+4)^3$ (1)

Điều kiện: $-4<x<4$ và $x\neq -1$.

(1) $\Leftrightarrow \log_2|x+1|+\log_2 4=\log_2(4-x)+\log_2(x+4)$

$\Leftrightarrow \log_2 4|x+1|=\log_2(4-x)(4+x)$

$\Leftrightarrow 4|x+1|=16-x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x+4=16-x^2\\4x+4=x^2-16\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2+4x-12=0\\x^2-4x-20=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2 \text{ hoặc } x=-6\\x=2\pm 2\sqrt{6}\end{array}\right.$.

So sánh điều kiện ta được nghiệm của (1) là $x=2$ hay $x=2-2\sqrt{6}$.

b. $\log_9(x^2-5x+6)^2=\dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}\dfrac{x-1}{2}+\log_3|x-3|$ (2)

Điều kiện: $x>1$, $x\neq 3$ và $x\neq 2$.

(2) trở thành: $\log_3|x^2-5x+6|-\log_3|x-3|=\log_3\dfrac{x-1}{2}$

$\Leftrightarrow \log_3|(x-2)(x-3)|-\log_3|x-3|=\log_3\dfrac{(x-1)}{2}$

$\Leftrightarrow \log_3|x-2|=\log_3\dfrac{x-1}{2}$

$\Leftrightarrow 2|x-2|=x-1$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-4=x-1\\2x-4=1-x\end{array}\right.$ (do $x>1$)

$\Leftrightarrow x=3$ (nhận) hay $x=\dfrac{5}{3}$ (nhận).

c. $(x-1)\log_5 3+\log_5(3^{x+1}+3)=\log_5(11.3^x-9)$ (3).

Đặt $t = 3^x$. Điều kiện: $t > \frac{9}{11}$.

(3) trở thành: $\log_5 3^{x-1} + \log_5 3(3^x + 1) = \log_5(11.3^x - 9)$

$\Leftrightarrow \log_5(3^x(3^x + 1)) = \log_5(11.3^x - 9)$

$\Leftrightarrow 3^x(3^x + 1) = 11.3^x - 9$

$\Leftrightarrow t^2 + t = 11t - 9$

$\Leftrightarrow t^2 - 10t + 9 = 0$

$\Leftrightarrow t = 1$ (nhận) hay $t = 9$ (nhận).

$\Leftrightarrow 3^x = 1$ hay $3^x = 9$

$\Leftrightarrow x = 0$ hay $x = 2$.

Vậy phương trình (3) có hai nghiệm là $x = 0$ hay $x = 3$.

d. $\log_5 x + \log_3 x = \log_5 3.\log_9 225 \Leftrightarrow \log_5 3.\log_3 x + \log_3 x = \log_5 3.\log_3 15$.

$\Leftrightarrow (\log_5 3 + 1)\log_3 x = \log_5 15$

$\Leftrightarrow \log_5 15.\log_3 x = \log_5 15 \Leftrightarrow \log_3 x = 1 \Leftrightarrow x = 3$.

Vấn đề 2: Phương pháp đặt ẩn số phụ

1. a. $\log^2 x = 3 + \log x^2$ (1)

Điều kiện: $x > 0$.

(1) $\Leftrightarrow \log^2 x = 3 + 2\log x \Leftrightarrow \log^2 x - 2\log x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \log x = -1$ hay $\log x = 3 \Leftrightarrow x = 10^{-1}$ hoặc $x = 10^3$.

b. $2.9^{\log_2 x - 1} = 6^{\log_2 x} - x^2$ (2).

Điều kiện: $x > 0$.

Đặt $t = \log_2 x \Rightarrow x = 2^t$.

(2) trở thành: $2.3^{2(t-1)} = 6^t - 2^{2t} \Leftrightarrow 2.\frac{3^{2t-2}}{2^{2t}} = \frac{6^t}{2^{2t}} - 1 \Leftrightarrow \frac{2}{9}\left(\frac{3}{2}\right)^{2t} = \left(\frac{3}{2}\right)^t - 1$ (2a)

Đặt $u = \left(\frac{3}{2}\right)^t > 0$ ta được:

(2a) trở thành: $\frac{2}{9}u^2 = u - 1 \Leftrightarrow 2u^2 - 9u + 9 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 3 \\ u = \frac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t = 3 \vee \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \log_{3/2} 3 \\ t = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2^{\log_{3/2} 3} \\ x = 2 \end{array}\right. \text{(nhận)}.$$

Vậy (2) có hai nghiệm là $x = 2^{\log_{3/2} 3}$ và $x = 2$.

c. $\log_3(2x+1) - 2\log_{2x+1}3 - 1 = 0$ (3).

Điều kiện: $0 < 2x + 1 \neq 1$.

$$(3) \Leftrightarrow \log_3(2x+1) - \frac{2}{\log_3(2x+1)} - 1 = 0.$$

Đặt $t = \log_3(2x+1)$.

(3) trở thành $t - \frac{2}{t} - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 2 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3(2x+1) = -1 \\ \log_3(2x+1) = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+1 = \frac{1}{3} \\ 2x+1 = 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{1}{3} \\ x = 4 \end{array}\right. \text{(nhận).}$$

d. $\log^2\left(x^3\right) - 20\log\sqrt{x} + 1 = 0$ (4).

Điều kiện: $x > 0$.

(4) $\Leftrightarrow (3\log x)^2 - 10\log x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log x = 1 \\ \log x = \frac{1}{9} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 10 \text{ hay } x = 10^{\frac{1}{9}} = \sqrt[9]{10} \text{ (nhận).}$$

2. a. $\log_5(5^x - 1)\left[\frac{1}{2}\log_5 5(5^x - 1)\right] - 1 = 0$ (1).

Điều kiện: $5^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$.

$$(1) \Leftrightarrow \log_5(5^x - 1)\left[\frac{1}{2}\left(1 + \log_5(5^x - 1)\right)\right] - 1 = 0$$

Đặt $t = \log_5(5^x - 1)$.

(1) trở thành $t\left[\frac{1}{2}(1+t)\right] - 1 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hay $t = -2$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_5(5^x - 1) = 1 \\ \log_5(5^x - 1) = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^x = 6 \\ 5^x = \frac{26}{25} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \log_5 6 \\ x = \log_5(\frac{26}{25}) \end{array}\right. \text{(nhận).}$$

b. $\log_{27}(x^{\log_{27}x}) - 3\log_{27}x + 2 = 0 \Leftrightarrow (\log_{27}x)^2 - 3\log_{27}x + 2 = 0$ (2)

Đặt $t = \log_{27}x$. Ta được:

(2) trở thành $t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_{27}x = 1 \\ \log_{27}x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 27 \\ x = 729 \end{array}\right.$.

c. $3\sqrt{\log_2 x} - \log_2 8x + 1 = 0$. (3)

Điều kiện: $x \geq 1$.

$(3) \Leftrightarrow 3\sqrt{\log_2 x} - \log_2 8 - \log_2 x + 1 = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{\log_2 x} - \log_2 x - 2 = 0$ (*)

Đặt $t = \sqrt{\log_2 x} \geq 0$.

(*) trở thành $3t - t^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{\log_2 x} = 1 \\ \sqrt{\log_2 x} = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 16 \end{array}\right.$ (nhận).

d. $5\sqrt{\log_2(-x)} = \log_2 \sqrt{x^2}$ (4)

Điều kiện: $x < 0$.

(4) $\Leftrightarrow 5\sqrt{\log_2(-x)} = \log_2(-x)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{\log_2(-x)} = 0 \\ \sqrt{\log_2(-x)} = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2(-x) = 0 \\ \log_2(-x) = 25 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = -2^{25} \end{array}\right.$

3. a. $\log_{9x} 27 - \log_{3x} 3 + \log_9 243 = 0$ (1).

Điều kiện: $x > 0;\ x \neq \frac{1}{3};\ x \neq \frac{1}{9}$.

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{\log_3 27}{\log_3 9x} - \dfrac{\log_3 3}{\log_3 3x} + \log_{3^2} 3^5 = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{2 + \log_3 x} - \dfrac{1}{1 + \log_3 x} + \dfrac{5}{2} = 0$. (*)

Đặt $t = \log_3 x$.

(*) trở thành $\dfrac{3}{2+t} - \dfrac{1}{1+t} + \dfrac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow 6 + 6t - 4 - 2t + 5(t+2)(t+1) = 0$

$\Leftrightarrow 5t^2 + 19t + 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -3 \\ t = -\frac{4}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x = -3 \\ \log_3 x = -\frac{4}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3^{-3} \\ x = 3^{-\frac{4}{5}} \end{array}\right.$ (nhận).

b. $\dfrac{\log_2 x}{\log_4 2x} = \dfrac{\log_8 4x}{\log_{16} 8x}$ (2)

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ 2x \neq 1 \\ 8x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$ và $x \neq \frac{1}{2}$ và $x \neq \frac{1}{8}$.

$$(2) \Leftrightarrow \frac{\log_2 x}{\frac{1}{2}[1+\log_2 x]} = \frac{\frac{1}{3}[2+\log_2 x]}{\frac{1}{4}[3+\log_2 x]} \Leftrightarrow \frac{6\log_2 x}{1+\log_2 x} = \frac{4[2+\log_2 x]}{3+\log_2 x}$$

Đặt $t = \log_2 x$, ta được $\frac{6t}{1+t} = \frac{8+4t}{t+3} \Leftrightarrow 6t(t+3) = (4t+8)(t+1)$

$\Leftrightarrow 2t^2 + 6t - 8 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hay $t = -2$.

Suy ra: • $t = 1 \Leftrightarrow x = 2$ (nhận)

• $t = -2 \Leftrightarrow x = 2^{-2} = \frac{1}{4}$ (nhận)

c. $\log_3\left(3^x - 1\right).\log_3\left(3^{x+1} - 3\right) = 12$ (3)

Điều kiện: $3^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$.

Đặt $t = \log_3(3^x - 1)$. Ta được:

$$(3) \Leftrightarrow \log_3\left(3^x - 1\right).\log_3 3\left(3^x - 1\right) = 12$$

$$\Leftrightarrow \log_3\left(3^x - 1\right).\left[\log_3\left(3^x - 1\right) + 1\right] = 12$$

$$\Leftrightarrow t(t+1) = 12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -4 \\ t = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3(3^x - 1) = -4 \\ \log_3(3^x - 1) = 3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x - 1 = 3^{-4} \\ 3^x - 1 = 3^3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = \frac{82}{81} \\ 3^x = 28 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \log_3(\frac{82}{81}) \\ x = \log_3 28 \end{array}\right. \text{(nhận)}$$

d. $\log_{x-1} 4 = 1 + \log_2\left(x - 1\right)$ (4)

Điều kiện: $0 < x - 1 \neq 1 \Leftrightarrow 1 < x \neq 2$.

$$(4) \Leftrightarrow \frac{\log_2 4}{\log_2(x-1)} = 1 + \log_2(x-1) \Leftrightarrow \log_2^2(x-1) + \log_2(x-1) - 2 = 0$$

Đặt $t = \log_2(x - 1)$, ta được:

$$(4) \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2(x-1) = 1 \\ \log_2(x-1) = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 2 \\ x - 1 = 2^{-2} = \frac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = \frac{5}{4} \end{array}\right. \text{(nhận).}$$

4. a. $\dfrac{6}{\log_2 x+1}+\dfrac{2}{\log_2 x}-3=0$ (1)

Điều kiện $x>0, x\neq 1, x\neq \dfrac{1}{2}$.

Đặt $t=\log_2 x$ ta có:

Phương trình (1) trở thành $\dfrac{6}{t+1}+\dfrac{2}{t}-3=0$

$\Leftrightarrow 6t+2(1+t)-3t(1+t)=0 \Leftrightarrow 3t^2-5t-2=0$

Giải phương trình theo t ta có : $\left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$.

+ Với $t=2 \Rightarrow \log_2 x=2 \Rightarrow x=4$

+ Với $t=-\dfrac{1}{3} \Rightarrow \log_2 x=-\dfrac{1}{3} \Rightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=4$ hay $x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

b. $\dfrac{1}{\log_2 \dfrac{16}{x}}+\dfrac{2}{\log_2 4x}=1$ (2)

Điều kiện: $x>0; x\neq 16; x\neq \dfrac{1}{4}$.

(2) $\Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_2 16-\log_2 x}+\dfrac{2}{\log_2 4+\log_2 x}=1$

Đặt $t=\log_2 x$.

(2) trở thành $\dfrac{1}{4-t}+\dfrac{2}{2+t}=1 \Leftrightarrow 2+t+8-2t=(4-t)(2+t)$

$\Leftrightarrow t^2-3t+2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x=1 \\ \log_2 x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=4 \end{array}\right.$ (nhận).

5. Cho phương trình: $\log_3^2 x+\sqrt{\log_3^2 x+1}-2m-1=0$ (1) (m là tham số)

Đặt $t=\sqrt{\log_3^2 x+1}\geq 1$.

(1) $\Leftrightarrow t^2-1+t-2m-1=0 \Leftrightarrow t^2+t-2m-2=0$ (2).

a) Khi m = 2 thì (2) $\Leftrightarrow t^2+t-6=0 \Leftrightarrow t=-3$ (loại) hay $t=2$ (nhận)

$\Rightarrow \sqrt{\log_3^2 x + 1} = 2 \Leftrightarrow \log_3^2 x = 3 \Leftrightarrow \log_3 x = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x = 3^{\pm\sqrt{3}}$.

b) Ta có: $x \in \left[1; 3^{\sqrt{3}}\right] \Leftrightarrow 0 \le \log_3 x \le \sqrt{3} \Leftrightarrow 1 \le t \le 2$.

Do đó (1) có nghiệm $x \in \left[1; 3^{\sqrt{3}}\right] \Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t \in [1; 2]$.

Ta có: (2) trở thành $2m = t^2 + t - 2 = f(t)$.

Xét hàm số f(t) trên [1; 2] ta có: $f'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t \in [1; 2]$.

$\Rightarrow$ f(t) đồng biến trên [1; 2] và f(t) liên tục trên [1; 2].

$\Rightarrow \min\limits_{[1;2]} f(t) = f(1) = 0$; $\max\limits_{[1;2]} f(t) = f(2) = 4$

Do đó: (2) có nghiệm trên [1; 2] $\Leftrightarrow 0 \le 2m \le 4 \Leftrightarrow 0 \le m \le 2$.

6. a. Đặt $t = \log_{0,5}x$. Ta được:

$\log_3(t^2 - 3t + 5) = 2 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 5 = 9 \Leftrightarrow t^2 - 3t - 4 = 0$

$\Leftrightarrow t = -1$ hoặc $t = 4 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = \dfrac{1}{16}$.

b. Đặt $t = 3^x > 0$. Ta được:

$\log_2(4t - 6) - \log_2(t^2 - 6) = 1 \Leftrightarrow \log_2(4t - 6) = \log_2 2(t^2 - 6)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4t - 6 > 0 \\ 4t - 6 = 2(t^2 - 6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > \dfrac{3}{2} \\ 2t^2 - 4t - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 3 \Leftrightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1$.

7. $\log_{2x-1}(2x^2 + x - 1) + \log_{x+1}(2x - 1)^2 = 4 \quad (1)$

Điều kiện: $\begin{cases} 0 < 2x - 1 \ne 1 \\ 0 < x + 1 \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < x \ne 1$.

$(1) \Leftrightarrow \log_{2x-1}(x + 1)(2x - 1) + \log_{x+1}(2x - 1)^2 = 4$

$\Leftrightarrow \log_{2x-1}(x + 1) + 1 + 2\log_{x+1}(2x - 1) = 4$

Đặt $t = \log_{x+1}(2x - 1)$, ta được:

$\dfrac{1}{t} + 2t = 3 \Leftrightarrow 2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = \dfrac{1}{2}$.

$\Leftrightarrow \log_{x+1}(2x - 1) = 1$ hoặc $\log_{x+1}(2x - 1) = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow 2x - 1 = x + 1$ hoặc $(2x - 1)^2 = x + 1$

$\Leftrightarrow x = 2$ hoặc $4x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = 0$ (loại) hoặc $x = \dfrac{5}{4}$.

Vậy (1) có nghiệm là $x = 2$ hoặc $x = \dfrac{5}{4}$.

Vấn đề 3: Phương pháp dùng tính đơn điệu của hàm số

1. a. $x - 2^{\log_5(x+3)} = 0$ (1)

Đặt $u = \log_5(x+3) \Rightarrow x = 5^u - 3$.

Do đó: (1) trở thành $5^u - 3 - 2^u = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^u + 3\left(\frac{1}{5}\right)^u - 1 = 0$ (1a)

Xét hàm số $f(u) = \left(\frac{2}{5}\right)^u + 3\left(\frac{1}{5}\right)^u - 1 = 0$ với $u \in R$.

Ta có:

* $f(1) = 0 \Rightarrow u = 1$ là một nghiệm của (1a)

* $f'(u) = \left(\frac{2}{5}\right)^u \ln\frac{2}{5} + 3\left(\frac{1}{5}\right)^u \ln\frac{1}{5} < 0$ với mọi $u \in R$.

Suy ra f(u) liên tục và nghịch biến trên R.

Do đó (1a) có không quá một nghiệm.

Vậy (1a) có nghiệm duy nhất là u = 1.

Suy ra (1) có nghiệm duy nhất là $x = 5^1 - 1 = 4$.

b. $\log_2(\sqrt{x}+1) - \log_3 x = 0$ (2)

Điều kiện: x > 0.

Đặt $\log_3 x = u \Leftrightarrow x = 3^u$.

(2) trở thành: $\log_2\left(\sqrt{3^u}+1\right) = u \Leftrightarrow \sqrt{3^u}+1 = 2^u \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^u + \left(\frac{1}{2}\right)^u - 1 = 0$ (2a)

Xét hàm số $f(u) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^u + \left(\frac{1}{2}\right)^u - 1$ với $u \in R$.

Ta có:

* $f(2) = 0 \Rightarrow u = 2$ là một nghiệm của (2a)

* $f'(u) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^u \ln\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^u \ln\frac{1}{2} < 0$ với mọi $u \in R$.

Suy ra f(u) liên tục và nghịch biến trên R.

Do đó (2a) có không quá một nghiệm.

Vậy (2a) có nghiệm duy nhất là u = 2. Suy ra (2) có nghiệm duy nhất là x = 9.

2. a. $\log_2(x + 3^{\log_6 x}) - \log_6 x = 0$

Điều kiện: x > 0.

Đặt $u = \log_6 x \Rightarrow x = 6^u$.

$$(1) \Leftrightarrow \log_2(6^u + 3^u) = u \Leftrightarrow 6^u + 3^u = 2^u \Leftrightarrow 3^u + \left(\frac{3}{2}\right)^u - 1 = 0 \ (1a).$$

Xét hàm số $f(u) = 3^u + \left(\frac{3}{2}\right)^u - 1$ với $u \in R$.

Ta có:

* $f(-1) = 0 \Rightarrow u = -1$ là một nghiệm của (1a) ;

* $f'(u) = 3^u \ln 3 + \left(\frac{3}{2}\right)^u \ln\frac{3}{2} > 0$ với mọi $u \in R$.

Suy ra f(u) liên tục và đồng biến trên R. Do đó (1a) có không quá một nghiệm.

Vậy (1a) có nghiệm duy nhất là $u = -1$.

Suy ra (1) có nghiệm duy nhất là $x = \frac{1}{6}$.

b. $\log_7 x = \log_3(\sqrt{x} + 2)$ (2).

Điều kiện: $x > 0$.

Đặt $u = \log_7 x \Rightarrow x = 7^u$.

(2) trở thành: $\log_3(\sqrt{7^u} + 2) = u \Leftrightarrow \left(\sqrt{7}\right)^u + 2 = 3^u$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^u + 2\left(\frac{1}{7}\right)^u - 1 = 0 \ (2a).$$

Xét hàm số $f(u) = \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^u + 2\left(\frac{1}{7}\right)^u - 1$ với $u \in R$.

Ta có:

* $f(2) = 0 \Rightarrow u = 2$ là một nghiệm của (2a)

* $f'(u) = \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^u \ln\frac{\sqrt{7}}{3} + 2\left(\frac{1}{7}\right)^u \ln\frac{1}{7} < 0$ với mọi $u \in R$.

Suy ra f(u) liên tục và đồng biến trên R. Do đó (2a) có không quá một nghiệm.

Vậy (2a) có nghiệm duy nhất là $u = 2$.

Suy ra (2) có nghiệm duy nhất là $x = 7^2 = 49$.

3. $\log_3\left(\frac{x^2 + x + 3}{2x^2 + 4x + 5}\right) = x^2 + 3x + 2$ (1).

Đặt $u = x^2 + x + 3$; $v = 2x^2 + 4x + 5$. Ta có:

* u, v > 0 với mọi $x \in R$.

(1) trở thành: $\log_3 \frac{u}{v} = v - u \Leftrightarrow \log_3 u + u = \log_3 v + v$ (2).

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ với $t > 0$.

Ta có $f'(t) = \frac{1}{t\ln 3} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty)$.

$\Rightarrow$ f(t) đồng biến và liên tục trên $(0; +\infty)$.

Do đó (2) $\Leftrightarrow f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow v - u = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = -2$.

Vậy (1) có hai nghiệm là $x = -1$ hoặc $x = -2$.

4. $2\log_6(\sqrt[4]{x} + \sqrt[8]{x}) = \log_4 \sqrt{x}$

$\Leftrightarrow \log_6(\sqrt[4]{x} + \sqrt[8]{x}) = \log_4 \sqrt[4]{x} = \log_2 \sqrt[8]{x}$ (1)

Đặt $u = \log_2 \sqrt[8]{x} > 0 \Rightarrow \sqrt[8]{x} = 2^u$.

Ta có:

(1) trở thành: $\log_6\left(2^{2u} + 2^u\right) = u \Leftrightarrow 2^{2u} + 2^u = 6^u$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{6}\right)^u + \left(\frac{2}{6}\right)^u - 1 = 0 \quad (2).$$

Xét hàm số $f(u) = \left(\frac{4}{6}\right)^u + \left(\frac{2}{6}\right)^u - 1$ với $u \in R$.

Ta có:

* $f(1) = 0 \Rightarrow u = 1$ là một nghiệm của (2)

* $f'(u) = \left(\frac{4}{6}\right)^u \ln\frac{4}{6} + \left(\frac{2}{6}\right)^u \ln\frac{2}{6} < 0$ với mọi $u \in R$.

Suy ra f(u) liên tục và đồng biến trên R. Do đó (2) có không quá một nghiệm.

Vậy (2) có nghiệm duy nhất là u = 1.

Suy ra (1) có nghiệm duy nhất là $x = 2^8 = 256$.

5. $(x+2)\log_3^2(x+1) + 4(x+1)\log_3(x+1) - 16 = 0$ (1)

Điều kiện $x > -1$.

Đặt $t = \log_3(x+1)$

(1) trở thành $(x+2)t^2 + 4(x+1)t - 16 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -4 \\ t = \frac{4}{x+2} \end{array}\right.$.

* $t = -4 \Leftrightarrow \log_3(x+1) = -4 \Leftrightarrow x + 1 = 3^{-4} \Leftrightarrow x = 3^{-4} - 1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{80}{81}$.

* $t = \dfrac{4}{x+2} \Leftrightarrow \log_3(x+1) = \dfrac{4}{x+2}$ (2)

Ta có: * $x = 2$ là nghiệm của phương trình (2)

* Khi $x > 2$ thì $\log_3(x+1) > \log_3 3 = 1$ và $\dfrac{4}{x+2} < \dfrac{4}{2+2} = 1$

$\Rightarrow$ Vế trái (2) > Vế phải (2)

$\Rightarrow$ Phương trình (2) không có nghiệm thỏa $x > 2$.

* Khi $-1 < x < 2$ thì $\log_3(x+1) < \log_3 3 = 1$ và $\dfrac{4}{x+2} > \dfrac{4}{2+2} = 1$

$\Rightarrow$ Vế trái (2) < Vế phải (2)

$\Rightarrow$ Phương trình (2) không có nghiệm thỏa $x < 2$.

Vậy $x = 2$ là nghiệm duy nhất của (2).

Do đó: Phương trình (1) có hai nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -\dfrac{80}{81} \end{array}\right.$.

6. $\log_x(x+1) = \lg 1{,}5$ (1)

* Nếu $x > 1$ thì $\log_x(x+1) > \log_x x = 1 = \lg 10 > \lg 1{,}5 \Rightarrow$ (1) vô nghiệm.

* Nếu $0 < x < 1$ thì $\log_x(x+1) < \log_x 1 = 0 < \lg 1{,}5 \Rightarrow$ (1) vô nghiệm.

Vậy phương trình (1) vô nghiệm.

Vấn đề 4: Phương trình tích

1. $\log_2 x + 2\log_7 x = 2 + \log_2 x.\log_7 x$.

$\Leftrightarrow \log_2 x - 2 + 2\log_7 x - \log_2 x.\log_7 x = 0$

$\Leftrightarrow (\log_2 x - 2)(1 - \log_7 x) = 0$

$\Leftrightarrow \log_2 x = 2$ hoặc $\log_7 x = 1 \Leftrightarrow x = 4$ hoặc $x = 7$.

2. $2x + \log_2(x^2 - 4x + 4) = 2 - (x+1)\log_{\frac{1}{2}}(2 - x)$ (1)

Điều kiện: $2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 2$.

(1) $\Leftrightarrow 2x + \log_2(2-x)^2 - 2 - (x+1)\log_2(2-x) = 0$

$\Leftrightarrow 2x - 2 + 2\log_2(2-x) - (x+1)\log_2(2-x) = 0$

$\Leftrightarrow 2(x-1) + (1-x)\log_2(2-x) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)[2 - \log_2(2-x)] = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ hoặc $\log_2(2-x) = 2$

$\Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -2$. (thỏa điều kiện)

3. $\dfrac{1}{x-1}\log_2^2 x + \log_2 x + 2 = \dfrac{4}{x-1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x-1}\log_2^2 x - \dfrac{4}{x-1} + \log_2 x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x-1}\left(\log_2^2 x - 4\right) + \log_2 x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \left(\log_2 x + 2\right)\left[\dfrac{\log_2 x - 2}{x-1} + 1\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\log_2 x = -2 & (2)\\ \log_2 x = 3 - x & (3)\end{array}\right.$

* Giải(2): Ta có (2) $\Leftrightarrow x = 2^{-2}$.

* Giải (3): Bằng cách xét hàm số $f(x) = \log_2 x + x - 3$ trên $(0; +\infty)$ ta suy ra (3) có nghiệm duy nhất là $x = 2$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \dfrac{1}{4}$ và $x = 2$.

§6. HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ - LÔGARIT

1. a) $\begin{cases} x + y = 1 & (a)\\ 2^x - 2^y = 1 & (b)\end{cases}$

Từ (a) $\Rightarrow y = 1 - x$. Thay vào (b) ta được:

$2^x - 2^{1-x} = 1 \Leftrightarrow 2^x - \dfrac{2}{2^x} = 1 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 2^x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2^x = 2$ hay $2^x = -1$ (loại) $\Leftrightarrow x = 1$.

Thay vào (a) $\Rightarrow y = 0$. Vậy hệ có nghiệm là (1; 0).

b) $\begin{cases} x + y - 1 = 0 & (a)\\ 2.10^{y-1}.5^x - 2^{y+x^2-x} = 0 & (b)\end{cases}$

Từ (a) $\Rightarrow y = 1 - x$ (c)

Thay (c) vào (b) ta được:

$2.10^{-x}.5^x - 2^{1-x+x^2-x} = 0 \Leftrightarrow 2.5^{-x}.2^{-x}.5^x = 2.2^{x^2-2x}$

$\Leftrightarrow 2^{-x} = 2^{x^2-2x} \Leftrightarrow x^2 - 2x = -x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 0\\ x = 1\end{array}\right.$.

Với $x = 0$ thì (c) $\Rightarrow y = 1$; Với $x = 1$ thì (c) $\Rightarrow y = 0$.

Vậy hệ có 2 nghiệm là (1; 0) và (0; 1).

c) $\begin{cases} x + y = 1 & (1) \\ 4^{-2x} + 4^{-2y} = 0,5 & (2) \end{cases}$

Từ (1) $\Rightarrow y = 1 - x$ (3).

Thay (3) vào (2) ta được:

$$4^{-2x} + 4^{-2+2x} = 0,5 \Leftrightarrow \frac{1}{16^x} + \frac{16^x}{16} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow (16^x)^2 - 8.16^x + 16 = 0 \Leftrightarrow 16^x = 4 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}.$$

Vậy hệ có nghiệm là $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$.

d) $\begin{cases} 4^x + 2^{x+1} - y.2^x - 2y = 0 & (a) \\ 2^{3x} - 5y^2 + 4y = 0 & (b) \end{cases}$

Ta có: (a) $\Leftrightarrow 2^x(2^x + 2) - y(2^x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow (2^x + 2)(2^x - y) = 0 \Leftrightarrow y = 2^x > 0$.

Thay vào (b) ta được:

$$y^3 - 5y^2 + 4y = 0 \Leftrightarrow y = 1 \text{ hoặc } y = 4.$$

Với $y = 1$ thì $x = 0$; Với $y = 4$ thì $x = 2$.

Vậy hệ có 2 nghiệm là (0; 1); (2; 4).

e) $\begin{cases} 4^x - y^2 + 8 = 0 & (1) \\ 2^{x+1} + y + 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Từ (2) $\Rightarrow y = -2.2^x - 1$ (3).

Thay (3) vào (1) ta được:

$$2^{2x} - (-2.2^x - 1)^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow -3.(2^x)^2 - 4.2^x + 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2^x = 1 \text{ hoặc } 2^x = -\frac{7}{3} \text{ (loại)} \Leftrightarrow x = 0. \text{ Suy ra } y = -3.$$

Vậy hệ có nghiệm là (0; –3).

f) $\begin{cases} 3^x.2^y = 3^{-2} \\ y - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x+2}.2^{x+2} = 1 \\ y = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6^{x+2} = 1 \\ y = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}.$

2. a) $\begin{cases} 3.2^x + 2.3^y = 2,75 \\ 2^x - 3^y = -0,75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 0,25 \\ 3^y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}.$

b) $\begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 77 \\ 3^x - \dfrac{2^y}{2} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 77 \\ 2.3^x - 2^y = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{2x} - 2.3^x - 63 = 0 \\ 2^y = 2.3^x - 14 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 9 \\ 2^y = 4 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} 3^x = -7 \\ 2^y = -28 \end{cases} \text{(loại)} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}.$$

c) $\begin{cases} 64^{2x} + 64^{2y} = 12 \\ 64^{x+y} = 4\sqrt{2} \end{cases}$ (1)

Đặt $u = 64^x$ và $v = 64^y$ $(u, v > 0)$.

(1) trở thành $\begin{cases} u^2 + v^2 = 12 \\ uv = 4\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2 - 2uv = 12 \\ uv = 4\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2 = 12 + 8\sqrt{2} \\ uv = 4\sqrt{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 2\sqrt{2} + 2 \\ uv = 4\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 2\sqrt{2} \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} u = 2\sqrt{2} \\ v = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 64^x = 2 \\ 64^y = 2\sqrt{2} \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} 64^x = 2\sqrt{2} \\ 64^y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{6} \\ y = \dfrac{1}{4} \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x = \dfrac{1}{4} \\ y = \dfrac{1}{6} \end{cases}.$$

d) $\begin{cases} 2^x - 9.3^y = 7 \\ 2^x.3^y = \dfrac{8}{9} \end{cases}$ (1)

Đặt $u = 2^x$ và $v = 3^y$ $(u, v > 0)$.

(1) trở thành $\begin{cases} u - 9v = 7 \\ uv = \dfrac{8}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 9v + 7 \\ 9v(9v+7) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 9v + 7 \\ 81v^2 + 63v - 8 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = \dfrac{1}{9} \text{ hoặc } v = -\dfrac{8}{9} \\ u = 9v + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 8 \\ v = \dfrac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 8 \\ 3^y = 3^{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}.$$

3. a) $\begin{cases} x + y = 20 \\ \log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 20 \\ \log_4 xy = \log_4 36 \\ x, y > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 20 \\ xy = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = 2 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x = 2 \\ y = 18 \end{cases}.$$

b) $\begin{cases} x + y = 30 \\ \lg x + \lg y = 3\lg 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 30 \\ \log(xy) = \log 6^3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 30 \\ xy = 216 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 18 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x = 18 \\ y = 12 \end{cases}.$$

c) $\begin{cases} x^2+y^2=17 \\ \log_2 x+\log_2 y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=17 \\ \log_2(xy)=2 \\ x,y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x,y>0 \\ (x+y)^2-2xy=17 \\ xy=4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x,y>0 \\ (x+y)^2=25 \\ xy=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ xy=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$.

d) $\begin{cases} 2^{\frac{2x}{y}}=2^5.2^{\frac{3y}{x}} \\ 3^{\frac{x}{y}}=3.3^{\frac{2(1-y)}{y}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{\frac{2x}{y}}=2^{5+\frac{3y}{x}} \\ 3^{\frac{x}{y}}=3^{1+\frac{2(1-y)}{y}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x}{y}=5+\dfrac{3y}{x} \\ \dfrac{x}{y}=1+\dfrac{2-2y}{y} \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(\frac{x}{y})^2-5(\frac{x}{y})-3=0 \\ x=2-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y}=3 \text{ hoặc } \frac{x}{y}=-\frac{1}{2} \\ x=2-y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3y \\ x=2-y \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} -2x=y \\ x=2-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases}$.

4. a) $\begin{cases} 3^{-x}.3^y=1152 \\ \log_{\sqrt5}(x+y)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{-x}.2^y=3^2.2^7 \\ x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{y-7}=3^{x+2} \\ x+y=5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{-x-2}=3^{x+2} \\ y=5-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6^{x+2}=1 \\ y=5-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ y=5-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=7 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} x^2-y^2=2 \\ \log_2(x+y)-\log_3(x-y)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x^2-y^2)=1 \\ \log_2(x+y)-\log_3 2\log_2(x-y)=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x+y)+\log_2(x-y)=1 \\ \log_2(x+y)-\log_3 2\log_2(x-y)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x+y)=1 \\ \log_2(x-y)=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}; y=\dfrac{1}{2}$.

5. a) $\begin{cases} 3\log_9(9x^2)-\log_3 y^3=3 & (1) \\ \sqrt{x-1}+\sqrt{2-y}=1 & (2) \end{cases}$.

Điều kiện: $\begin{cases} x-1\ge 0 \\ 2-y\ge 0 \\ y>0 \\ x\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ 0<y\le 2 \end{cases}$.

Ta có: (1) $\Leftrightarrow 3\log_9 9x^2 - 3\log_3 y = 3 \Leftrightarrow \log_{3^2}(3x)^2 = \log_3 y + 1$

$\Leftrightarrow \log_3 3x = \log_3 3y \Leftrightarrow 3x = 3y \Leftrightarrow x = y.$

Thay vào (2) ta được:

$\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}=1 \Leftrightarrow x-1+2-x+2\sqrt{(x-1)(2-x)}=1$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(2-x)}=0 \Leftrightarrow x=2$ hoặc $x=1$ (loại).

Vậy hệ đã cho có nghiệm là (2; 2).

b) $\begin{cases} 2^{3x+1}+2^{y-2}=3.2^{y+3x} & (1) \\ \sqrt{3x^2+1+xy}=\sqrt{x+1} & (2) \end{cases}$.

Ta có: (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x+1\ge 0 \\ 3x^2+1+xy=x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x(3x+y-1)=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ y=1-3x \end{cases}$ hoặc $x = 0$.

* Khi $x = 0$, thay vào (1) ta được

$2+2^{y-2}=3.2^y \Leftrightarrow 8+2^y=12.2^y \Leftrightarrow 2^y=\frac{8}{11} \Leftrightarrow y=\log_2\frac{8}{11}$.

* Khi $y = 1 - 3x$, thay vào (1) ta được:

$2^{3x+1}+2^{-3x-1}=6 \Leftrightarrow 2^{3x+1}+\frac{1}{2^{3x+1}}=6 \Leftrightarrow \quad (2^{3x+1})^2-6.2^{3x+1}+1=0$

$\Leftrightarrow 2^{3x+1}=3\pm 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}\left[\log_2(3\pm 2\sqrt{2})-1\right]$.

So sánh với điều kiện $x \ge -1$ ta được:

$x=\frac{1}{3}\left[\log_2(3+2\sqrt{2})-1\right] \Rightarrow y = 2-\log_2(3+2\sqrt{2})$.

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là:

$\left(0;\ \log_2\frac{8}{11}\right); \left(\frac{1}{3}\left[\log_2(3+2\sqrt{2})-1\right];\ 2-\log_2(3+2\sqrt{2})\right)$.

6. a) $\begin{cases} \log_5 x+\log_5 7.\log_7 y = 1+\log_5 2 \\ 3+\log_2 y=\log_2 5\left(1+3\log_5 x\right) \end{cases}$ (1)

Điều kiện: $x > 0$ và $y > 0$.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 x + \log_5 y = \log_5 10 \\ \log_2 8y = \log_2 5(\log_5 5x^3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5(xy) = \log_5 10 \\ \log_2(8y) = \log_2(5x^3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 10 \\ 8y = 5x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{10}{x} \\ 8.\dfrac{10}{x} = 5x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{10}{x} \\ x^4 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases} \text{(do } x > 0\text{)}.$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là (2; 5).

b) $\begin{cases} \log x + \dfrac{1}{2}\log y = \dfrac{5}{2} \\ 5\log x - 2\log y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\log x + \log y = 5 \\ 5\log x - 2\log y = 8 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log x = 2 \\ \log y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10^2 = 100 \\ y = 10 \end{cases}$. Vậy hệ có nghiệm là (100; 10).

7. a) $\begin{cases} \log_y x - \log_2 y^2 = 1 \\ \log_4 x - \log_4 y = 1 \end{cases}$ (1). Điều kiện: $x > 0$; $0 < y \neq 1$.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_y x - 2\log_2 y = 1 \\ \log_4 \dfrac{x}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ \log_y(4y) - 2\log_2 y = 1 \ (*) \end{cases}$$

Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow \frac{\log_2(4y)}{\log_2 y} - 2\log_2 y = 1 \Leftrightarrow \frac{2 + \log_2 y}{\log_2 y} - 2\log_2 y = 1$$

$\Leftrightarrow (2\log_2 y)^2 = 2 \Leftrightarrow \log_2 y = \pm 1 \Leftrightarrow y = 2$ hay $y = \dfrac{1}{2}$.

Khi $y = 2$ thì $x = 8$; Khi $y = \dfrac{1}{2}$ thì $x = 2$.

Vậy hệ có 2 nghiệm là (8; 2) và (2; $\dfrac{1}{2}$).

b) $\begin{cases} \log_{xy}(x+y) = 0 \\ \log_{xy}(x-y) = 1 \end{cases}$ (2)

Điều kiện: $x > |y|$ và $0 < xy \neq 1$.

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ 1 - 2y = (1-y)y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ y^2 - 3y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ y = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2};\ y = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ (Do } x > |y|)$$

8. a) $\begin{cases} \log_2 \sqrt{x+3} = \log_3 3y \\ \log_2 \sqrt{y+3} = \log_3 3x \end{cases}$. Điều kiện: $x > 0;\ y > 0$.

Ta có:

* Nếu $x > y$ thì $\log_3 3y = \log_2 \sqrt{x+3} > \log_3 \sqrt{y+3} = \log_3 3x \Rightarrow y > x$ (vô lí)

* Nếu $x < y$ thì $\log_3 3y = \log_2 \sqrt{x+3} < \log_3 \sqrt{y+3} = \log_3 3x \Rightarrow y < x$ (vô lí)

Vậy nếu $(x; y)$ là nghiệm của hệ thì $x = y$.

Khi đó ta được $\log_2 \sqrt{x+3} = \log_3 3x = 1 + \log_3 x = 1 + \log_3 x$ (*)

Đặt $u = \log_3 x \Rightarrow x = 3^u$.

(*) trở thành : $\log_2 \sqrt{3^u + 3} = 1 + u \Leftrightarrow \sqrt{3^u + 3} = 2^{1+u}$

$\Leftrightarrow 3^u + 3 = 2^{2+2u} = 4.4^u$.

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{4}\right)^u + 3\left(\dfrac{1}{4}\right)^u - 4 = 0$ (**).

Xét hàm số $f(u) = \left(\dfrac{3}{4}\right)^u + 3\left(\dfrac{1}{4}\right)^u - 4$ trên R.

Ta có: +) $f(0) = 0 \Rightarrow u = 0$ là một nghiệm của (**).

+) $f(u)$ nghịch biến trên R $\Rightarrow$ (**) có không quá một nghiệm.

Vậy (**) $\Leftrightarrow u = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Do đó hệ đã cho có nghiệm duy nhất là $x = y = 1$.

b) $\begin{cases} \log_x (3x + 2y) = 2 \\ \log_y (2x + 3y) = 2 \end{cases}$ (1). Điều kiện: $0 < x \neq 1$ và $0 < y \neq 1$.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = x^2 \\ 2x + 3y = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = x^2 - y^2 \\ 3x + 2y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y-1) = 0 \\ 3x + 2y = x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x^2 = 5x \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} y = 1 - x \\ x^2 = 3x + 2(1-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ y = 1 - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 2 \vee x = -1 \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases}.$$

c) $\begin{cases} \log_x(x^3+2x^2-3x-5y)=3 \\ \log_y(y^3+2y^2-3y-5x)=3 \end{cases}$. Điều kiện: $0 < x;\ y \neq 1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3+2x^2-3x-5y=x^3 \\ y^3+2y^2-3y-5x=y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-3x-5y=0 \\ 2y^2-3y-5x=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x^2-y^2)+2(x-y)=0 \\ 2y^2-3y-5x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y+1)=0 \\ 2y^2-3y-5x=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ 2y^2-8y=0 \end{cases} \text{ (Do } x+y+1>0) \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=4 \end{cases}.$$

Vậy hệ có nghiệm là $x = y = 4$.

d) $\begin{cases} x^2+y=y^2+x \\ 2^{x+y}-2^{x-1}=x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2+y-x=0 \\ 2^{x+y}-2^{x-1}=x-y \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y-1)=0 \\ 2^{x+y}-2^{x-1}=x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ 2^{2x}-2^{x-1}=0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} y=1-x \\ 2-2^{x-1}=2x-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ 2^{2x}=2^{x-1} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} y=1-x \\ 3-2x-2^{x-1}=0\ (*) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ x=-1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases}$. (Do (*) có nghiệm duy nhất là $x = 1$ vì vế trái (*) là hàm số giảm và $x = 1$ là một nghiệm của (*)).

Vậy hệ có 2 nghiệm là $(-1; -1)$ và $(1; 0)$.

9. a) $\begin{cases} 2^{x+1}=4y^2+1 & (1) \\ 2^x \leq 2y & (2) \end{cases}$.

Ta có (2) $\Rightarrow 2^x \leq 2y \Rightarrow 2^{x+1} \leq 4y$ nên kết hợp với (1) ta suy ra:

$$4y^2+1 \leq 4y \Leftrightarrow (2y-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}.$$

Khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} 2^{x+1}=2 \\ 2^x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0. \text{ Vậy hệ đã cho có nghiệm là } y=\frac{1}{2};\ x=0.$$

b) $\begin{cases} 2^{|x^2-2x-3|-\log_2 3}=3^{-y-4} & (1) \\ 4|y|-|y-1|+(y+3)^2 \leq 8 & (2) \end{cases}$

Ta có (1) $\Leftrightarrow 2^{|x^2-2x-3|}.2^{-\log_2 3}=3^{-y-4}$ (3)

Vì $\left|x^2-2x-3\right| \geq 0$ nên ta có:

$$3^{-y-4} \geq 2^0.(2^{\log_2 3})^{-1} = 3^{-1} \Rightarrow -y-4 \geq -1 \Rightarrow y \leq -3\ (4).$$

Do đó (2) trở thành: $-4y + y - 1 + (y+3)^2 \leq 8 \Leftrightarrow y^2 + 3y \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq y \leq 0$.

Kết hợp với (4) ta được $y = -3$.

Thay $y = -3$ vào (3) ta được $2^{\left|x^2-2x-3\right|}.3^{-1} = 3^{-1} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 3$.

Vậy hệ có hai nghiệm là $(-1; -3)$, $(3; -3)$.

10. a) $\begin{cases} (10x)^{\log 4} = (10y)^{\log 3} \\ 3^{\log x} = 4^{\log y} \end{cases}$ (1). Điều kiện: $x > 0$; $y > 0$.

Ta có: $a^{\log_b c} = \left(c^{\log_c a}\right)^{\log_b c} = c^{\log_b c.\log_c a} = c^{\log_b a}$.

Do đó:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 4^{\log(10x)} = 3^{\log(10y)} \\ 3^{\log x} = 4^{\log y} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log 10y = \log_3 4.\log 10x \\ \log x = \log_3 4.\log y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \log y = \log_3 4.(1 + \log x) \\ \log x = \log_3 4.\log y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \log y = \log_3 4.(1 + \log_3 4.\log y) \\ \log x = \log_3 4.\log y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \log_3 4 = (\log_3^2 4 - 1).\log y \\ \log x = \log_3 4.\log y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log y = -\dfrac{1}{\log_3 4 + 1} = -\dfrac{1}{\log_3 12} = -\log_{12} 3 \\ \log x = \log_3 4.(-\log_{12} 3) = -\log_{12} 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10^{-\log_{12} 4} \\ y = 10^{-\log_{12} 3} \end{cases}.$$

b) $\begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4 \\ \log_4 x - \log_4 y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^{\log_8 x} + y^{\log_8 x} = 4 \\ \log_2 x - \log_2 y = 2 \end{cases}$. Điều kiện $x > 0$; $y > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^{\log_8 x} = 2 \\ \log_2 x - \log_2 y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 (y^{\log_8 x}) = \log_2 2 \\ \log_2 x - \log_2 y = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{3}\log_2 x.\log_2 y = 1 \\ \log_2 x - \log_2 y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x.\log_2 y = 3 \\ \log_2 x - \log_2 y = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 3 \\ \log_2 y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 2 \end{cases}.$$

c) $\begin{cases} 4^{\log_3(xy)} = 2 + (xy)^{\log_3 2} & (1) \\ x^2 + y^2 + 2x + 2y = 2 & (2) \end{cases}.$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow 2^{2\log_3 xy} = 2 + 2^{\log_3 xy} \Leftrightarrow \left(2^{\log_3 xy}\right)^2 - 2^{\log_3 xy} - 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2^{\log_3 xy} = 2 \Leftrightarrow \log_3 xy = 1 \Leftrightarrow xy = 3.$

(2) $\Leftrightarrow (x + y)^2 - 2xy + 2(x + y) = 2 \Leftrightarrow (x + y)^2 + 2(x + y) - 8 = 0$

$\Leftrightarrow$ $x + y = -4$ hoặc $x + y = 2$.

Do đó ta được:

* $\begin{cases} x + y = -4 \\ xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases}.$

* $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 3 \end{cases}$ (Vô nghiệm).

Vậy hệ có nghiệm là (–1; –3) hoặc (–3; –1).

d) $\begin{cases} x^4 + y = 31^{x^4 - y} & (1) \\ 2(x^4 + y) = 62^{x^4 - y} & (2) \end{cases}$

Thay (1) vào (2) ta được:

$2.31^{x^4 - y} = 62^{x^4 - y} \Leftrightarrow 2^{x^4 - y} = 2 \Leftrightarrow x^4 - y = 1 \Leftrightarrow y = x^4 - 1.$

Thay vào (1) ta được:

$2x^4 - 1 = 31 \Leftrightarrow x^4 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 2 \Rightarrow y = 15.$

Vậy hệ có 2 nghiệm là (2; 15), (–2; 15).

11. a) $\begin{cases} 2^{3x} = 5y^2 - 4y \\ \dfrac{4^x + 2^{x+1}}{2^x + 2} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{3x} = 5y^2 - 4y \\ \dfrac{2^x(2^x + 2)}{2^x + 2} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3 = 5y^2 - 4y \\ 2^x = y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = y \\ y = 1 \text{ hoặc } y = 4 \text{ hoặc } y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}.$

Vậy hệ có hai nghiệm là (0; 1) và (2; 4).

b) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{4}}(y - x) - \log_4 \dfrac{1}{y} = 1 & (1) \\ x^2 + y^2 = 25 & (2) \end{cases}.$

Điều kiện: $y - x > 0$ và $y > 0$.

(1) $\Leftrightarrow -\log_4(y-x)+\log_4 y = 1 \Leftrightarrow \log_4 y = 1 + \log_4(y-x)$

$\Leftrightarrow \log_4 y = \log_4 4(y-x) \Leftrightarrow y = 4y - 4x \Leftrightarrow y = \dfrac{4}{3}x > 0.$

Thay vào (2) ta được: $x^2 + \dfrac{16}{9}x^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y = 4.$

Vậy hệ có nghiệm là (3; 4).

c) $\begin{cases} \log_2(x^2+y^2) = 1+\log_2(xy) \\ 3^{x^2-xy+y^2} = 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x^2+y^2) = \log_2(2xy) \\ 3^{x^2-xy+y^2} = 3^4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} xy > 0 \\ x^2+y^2 = 2xy \\ x^2-xy+y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy > 0 \\ y = x \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}.$

12. $\begin{cases} e^x - e^y = (\log_2 y - \log_2 x)(xy+1) & (1) \\ x^2+y^2 = 1 & (2) \end{cases}$

Điều kiện: x, y > 0.

Xét (1) ta có:

* x = y thỏa (1).
* x > y > 0 thì VT(1) > 0 > VP(1) (vô lí).
* y > x > 0 thì VT(1) < 0 < VP(1) (vô lí).

Vậy nếu (x; y) là nghiệm của hệ thì x = y.

Thay vào (2) $\Rightarrow x = y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là $x = y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

13. $\begin{cases} e^x - e^y = \ln(1+x) - \ln(1+y) & (1) \\ y - x = a & (2) \end{cases}$. Điều kiện x; y > –1

Từ (2) $\Rightarrow$ y = x + a.

Thay vào (1) ta được:

(1) $\Leftrightarrow e^x - e^{x+a} = \ln(1+x) - \ln(1+x+a)$

$\Leftrightarrow f(x) = e^x(1-e^a) + \ln(x+a+1) - \ln(x+1) = 0$ (3).

Ta có:

* $f'(x) = e^x(1-e^a) + \dfrac{1}{x+a+1} - \dfrac{1}{x+1} < 0$ với mọi $x \in (-1; +\infty)$.

(do a > 0 nên $1 - e^a < 0$ và x + a + 1 > x + 1)

$\Rightarrow$ f(x) nghịch biến trên $(-1; +\infty) \Rightarrow$ (3) có không quá một nghiệm (*) .

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$ và f liên tục trên $(-1; +\infty)$

$\Rightarrow$ (3) có nghiệm $x \in (-1; +\infty)$ (**).

Từ (*) và (**) $\Rightarrow$ (3) có duy nhất nghiệm. Do đó hệ có nghiệm duy nhất.

§7. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

Vấn đề 1: Bất phương trình mũ dạng cơ bản.

1. a) $3^{x^2-2x+\log_3 5} > 5 \Leftrightarrow x^2 - 2x + \log_3 5 > \log_3 5 \Leftrightarrow x < 0$ hoặc $x > 2$.

b) $8.4^{\frac{x-3}{x^2+1}} < 1 \Leftrightarrow 2^3.2^{\frac{x-3}{x^2+1}} < 2^0 \Leftrightarrow 3 + \dfrac{3x-3}{x^2+1} < 0$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 3x < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0.$

2. a) $2^{-x^2+3x} < 4 \Leftrightarrow -x^2 + 3x < 2 \Leftrightarrow x < 1$ hoặc $x > 2$.

b) $\left(\dfrac{7}{9}\right)^{2x^2-3x} \ge \dfrac{9}{7} \Leftrightarrow 2x^2 - 3x \le -1 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \le x \le 1$.

3. $3^{x+2} + 3^{x-1} \le 28 \Leftrightarrow 3^{x-1}(3^3 + 1) \le 28 \Leftrightarrow 3^{x-1} \le 1 \Leftrightarrow x - 1 \le 0 \Leftrightarrow x \le 1.$

4. $5^{\log_3\frac{x-2}{x}} < 1 \Leftrightarrow \log_3\dfrac{x-2}{x} < 0 \Leftrightarrow 0 < \dfrac{x-2}{x} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < 0 \end{array}\right. \\ -\dfrac{2}{x} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$

Vấn đề 2: Đưa bất phương trình mũ về cùng một cơ số

1. $\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}} \le \left(\sqrt{2}-1\right)^{-x} \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}} \le \left(\sqrt{2}+1\right)^{x}$

$\Leftrightarrow \dfrac{6x-6}{x+1} \le x \Leftrightarrow \dfrac{x^2-5x+6}{x+1} \ge 0 \Leftrightarrow -1 < x \le 2$ hay $x \ge 3$.

2. a) $\dfrac{1}{2^{|2x-1|}} > \dfrac{1}{2^{3x-1}} \Leftrightarrow 2^{|2x-1|} < 2^{3x-1} \Leftrightarrow |2x-1| < 3x-1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 < 3x-1 \\ 2x-1 > -3x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > \dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x > \dfrac{2}{5}.$

b) $\left(\frac{3}{7}\right)^{x^2+1} \geq \left(\frac{3}{7}\right)^{3x-1} \Leftrightarrow x^2 + 1 \leq 3x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2.$

3. $3^{\sqrt{x^2-2x}} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{x-|x-1|} \Leftrightarrow 3^{\sqrt{x^2-2x}} \geq 3^{|x-1|-x}$ (1).

Điều kiện: $x^2 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ hoặc $x \geq 2$.

* $x \geq 2$: (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x} \geq x - 1 - x = 1$ (luôn đúng). Vậy $\forall x \geq 2$ là nghiệm.

* $x \leq 0$: (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x} \geq -x + 1 - x = 1 - 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x \geq 1 - 4x + 4x^2$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 2x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$.

Vậy (1) có nghiệm là $x \geq 2$.

4. $x^{2x^2-5x+2} \geq 1$ (*) (với $0 < x \neq 1$)

➢ $x = 1$ là một nghiệm của (*).

➢ $x > 1$: (*) $\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$ (loại) hoặc $x \geq 2$ (nhận).

➢ $0 < x < 1$: (*) $\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 2$.

So sánh điều kiện ta được $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

Vậy (*) có nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{array}\right.$

Vấn đề 3: Phương pháp đặt ẩn số phụ

1. a) $4^x - 3.2^x + 2 > 0$ (1).

Đặt $t = 2^x > 0$.

(1) trở thành $t^2 - 3t + 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < 1 \\ t > 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x < 1 \\ 2^x > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 1 \end{array}\right.$.

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}} + \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}} > 12$ (2).

Đặt $t = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}} > 0$. Ta được:

(2) trở thành $t^2 + t - 12 > 0 \Leftrightarrow t < -4$ (loại) hoặc $t > 3$ (nhận)

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}>3\Leftrightarrow\frac{1}{x}<-1\Leftrightarrow\frac{x+1}{x}<0\Leftrightarrow-1<x<0.$$

2. a) $9^{\sqrt{x^2-3x}}+3<28.3^{\sqrt{x^2-3x}-1}\Leftrightarrow 3^{2\sqrt{x^2-3x}}+3<\frac{28}{3}.3^{\sqrt{x^2-3x}}$ (1)

Đặt $t=3^{\sqrt{x^2-3x}}\geq 1$.

(1) trở thành $3t^2-28t+9<0\Leftrightarrow\frac{1}{3}<t<9\Leftrightarrow 3^{\sqrt{x^2-3x}}<9$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2-3x}<2\Leftrightarrow 0\leq x^2-3x<4\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 0 \text{ hoặc } x\geq 3\\-4<x<1\end{cases}\Leftrightarrow -4<x\leq 0.$$

b) $2^{3x}-\frac{8}{2^{3x}}-6\left(2^x-\frac{1}{2^{x-1}}\right)\leq 1$ (2)

Đặt $t=2^x-\frac{1}{2^{x-1}}\Rightarrow t^3=2^{3x}-\frac{8}{2^{3x}}-6\left(2^x-\frac{2}{2^x}\right)$

Do đó (2) $\Leftrightarrow t^3\leq 1\Leftrightarrow t\leq 1\Leftrightarrow 2^x-\frac{2}{2^x}\leq 1\Leftrightarrow(2^x)^2-2^x-2\leq 1$

$\Leftrightarrow 2^x\leq 2\Leftrightarrow x\leq 1.$

3. $25^{1+2x-x^2}+9^{1+2x-x^2}\geq 34.15^{2x-x^2}\Leftrightarrow 25.\left(\frac{25}{9}\right)^{2x-x^2}+9\geq 34.\left(\frac{5}{3}\right)^{2x-x^2}$ (*).

Đặt $t=\left(\frac{5}{3}\right)^{2x-x^2}>0.$

(*) trở thành $25t^2-34t+9\geq 0\Leftrightarrow t\leq\frac{9}{25}$ hoặc $t\geq 1$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{5}{3}\right)^{2x-x^2}\leq\frac{9}{25}=\left(\frac{5}{3}\right)^{-2} \text{ hoặc } \left(\frac{5}{3}\right)^{2x-x^2}\geq 1$$

$\Leftrightarrow 2x-x^2\leq -2$ hay $2x-x^2\geq 0\Leftrightarrow x^2-2x-2\geq 0$ hay $0\leq x\leq 2$

$\Leftrightarrow x\leq 1-\sqrt{3}$ hoặc $x>1+\sqrt{3}$ hay $0\leq x\leq 2.$

4. a) $3^{2x}-8.3^{x+\sqrt{x+4}}-9.9^{\sqrt{x+4}}>0\Leftrightarrow 3^{2x-2\sqrt{x+4}}-8.3^{x-\sqrt{x+4}}-9>0$ (1)

Đặt $t=3^{x-\sqrt{x+4}}>0.$

(1) trở thành $t^2-8t-9>0\Leftrightarrow t>9\Rightarrow 3^{x-\sqrt{x+4}}>9\Leftrightarrow x-\sqrt{x+4}>2$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x+4}<x-2\Leftrightarrow\begin{cases}x+4\geq 0\\x-2\geq 0\\x+4<(x-2)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 2\\x^2-5x>0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x < 0 \text{ hoặc } x > 5 \end{cases} \Leftrightarrow x > 5.$

b) $2^{2\sqrt{x+3}-x-6} + 15.2^{\sqrt{x+3}-5} < 2^x \Leftrightarrow 2^{2\sqrt{x+3}-2x-6} + 15.2^{\sqrt{x+3}-x-5} < 1$ (2)

Đặt $t = 2^{\sqrt{x+3}-x-3} > 0.$

(2) trở thành $t^2 + \dfrac{15}{4}t < 1 \Leftrightarrow 4t^2 + 15t - 4 < 0 \Leftrightarrow 0 < t < \dfrac{1}{4}.$

$\Rightarrow 2^{\sqrt{x+3}-x-3} < \dfrac{1}{4} = 2^{-2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+3} - x - 3 < -2 \quad \Leftrightarrow \sqrt{x+3} < x+1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \ge 0 \\ x+1 > 0 \\ x+3 < (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x^2 + x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x < -2 \text{ hoặc } x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$

5. $x^2 2^{2x} + 9(x+2).2^x + 8x^2 \le (x+2)2^{2x} + 9x^2 2^x + 8x + 16$

$\Leftrightarrow 2^{2x}(x^2 - x - 2) - 2^x[9x^2 - 9x - 18] + 8x^2 - 8x - 16 \le 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - x - 2)(2^{2x} - 9.2^x + 8) \le 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 \ge 0 \\ 2^{2x} - 9.2^x + 8 \ge 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x^2 - x - 2 \le 0 \\ 2^{2x} - 9.2^x + 8 \le 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le -1 \text{ hoặc } x \ge 2 \\ 2^x \le 1 \text{ hoặc } 2^x \ge 8 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} -1 \le x \le 2 \\ 1 \le 2^x \le 8 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \le -1$ hoặc $x \ge 3$ hoặc $0 \le x \le 2.$

Vấn đề 4: Phương pháp lôgarit hóa

1. a) $5^{x^2-1} + 5^{x^2} \ge 7^x - 7^{x-1} \quad \Leftrightarrow 5^{x^2-1}(1+5) \ge 7^{x-1}(7-1)$

$\Leftrightarrow 5^{x^2-1} \ge 7^{x-1} \quad \Leftrightarrow x^2 - 1 \ge \log_5(7^{x-1})$

$\Leftrightarrow x^2 - 1 \ge (x-1)\log_5 7 \quad \Leftrightarrow x^2 - x\log_5 7 - 1 + \log_5 7 \ge 0.$

$\Leftrightarrow x \le \log_5\left(\dfrac{7}{5}\right)$ hoặc $x \ge 1.$

b) $5^{4x^2-3} > 5.3^{3x-3} \quad \Leftrightarrow 4x^2 - 3 > \log_5(5.3^{3x-3})$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 3 > 1 + (3x-3)\log_5 3 \quad \Leftrightarrow 4x^2 - 3x\log_5 3 - 4 + 3\log_5 3 > 0.$

$\Leftrightarrow x < \dfrac{3\log_5 3 - 4}{4}$ hoặc $x > 1.$

2. a) $5^x.8^{\frac{x-1}{x}} > 500 \Leftrightarrow \log_2\left(5^x.8^{\frac{x-1}{x}}\right) > \log_2 500$

$\Leftrightarrow x\log_2 5 + \dfrac{3x-3}{x} > \log_2(2^2.5^3) \Leftrightarrow \dfrac{x^2\log_2 5 + 3x - 3}{x} > 2 + 3\log_2 5$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2\log_2 5 + (1 - 3\log_2 5)x - 3}{x} > 0 \Leftrightarrow -\log_5 2 < x < 0$ hoặc $x > 3$.

b) $3^{x^2}.2^x \le 1 \Leftrightarrow \log_3\left(3^{x^2}.2^x\right) \le \log_3 1 \Leftrightarrow x^2 + x\log_3 2 \le 0 \Leftrightarrow -\log_3 2 \le x \le 0$.

§8. BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

Vấn đề 1: Bất phương trình lôgarit dạng cơ bản

1. a) $\log_8\left(4-2x\right) \ge 2 \Leftrightarrow 4 - 2x \ge 8^2 \Leftrightarrow x \le -30$.

b) $\log_2\left(2 - x - \sqrt{x^2-1}\right) < 1 \quad \Leftrightarrow 0 < 2 - x - \sqrt{x^2-1} < 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x^2-1} < 2-x\\ \sqrt{x^2-1} > -x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-1 \ge 0\\ 2-x>0\\ x^2-1<(2-x)^2\\ \begin{cases}-x<0\\ x^2-1\ge 0\end{cases} \text{hoặc} \begin{cases}-x\ge 0\\ x^2-1>x^2\end{cases}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le -1 \text{ hoặc } x\ge 1\\ x<2\\ x<\dfrac{5}{4}\\ x\ge 1\end{cases}$$

$\Leftrightarrow 1 \le x < \dfrac{5}{4}$.

c) $\log_{\sqrt{5}}(6^{x+1} - 36^x) \le 2 \Leftrightarrow 0 < 6^{x+1} - 36^x \le 5$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}6.6^x - 6^{2x} > 0\\ 6.6^x - 6^{2x} \le 5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0 < 6^x < 6\\ 6^x \le 1 \text{ hoặc } 6^x \ge 5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<1\\ x\le 0 \text{ hoặc } x \ge \log_6 5\end{cases}$$

$\Leftrightarrow x \le 0$ hay $\log_6 5 \le x < 1$.

2. $\log_{\frac{2}{3}}\log_3\left|x-3\right| \ge 0 \Leftrightarrow 0 < \log_3|x-3| \le 1$

$\Leftrightarrow 1 < |x-3| \le 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1 < x-3 \le 3\\ 1 < 3-x \le 3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4 < x \le 6\\ 0 \le x < 2\end{array}\right.$.

3. $\log_2 x(\log_3 x - 1) + 1 - \log_3 x > 0 \Leftrightarrow \left(\log_3 x - 1\right)\left(\log_2 x - 1\right) > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\log_3 x - 1 > 0\\ \log_2 x - 1 > 0\end{cases} \text{hoặc} \begin{cases}\log_3 x - 1 < 0\\ \log_2 x - 1 < 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x > 3\\ x > 2\end{cases} \text{hoặc} \begin{cases}0 < x < 3\\ 0 < x < 2\end{cases} \Leftrightarrow x > 3 \text{ hoặc } 0 < x < 2.$$

4. $\log_{0,7}\left[\log_6\left(\dfrac{x^2+x}{x+4}\right)\right] < 0 \Leftrightarrow \log_6\left(\dfrac{x^2+x}{x+4}\right) > 1$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+x}{x+4} > 6 \Leftrightarrow \frac{x^2-5x-24}{x+4} > 0 \Leftrightarrow -4 < x < -3 \text{ hay } x > 8.$$

5. $\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{x^2-3x+2}{x}\right) \geq 0 \Leftrightarrow 0 < \dfrac{x^2-3x+2}{x} \leq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x} > 0\\ \dfrac{x^2-3x+2}{x} \leq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0 < x < 1 \text{ hoặc } x > 2\\ x < 0 \text{ hoặc } 2-\sqrt{2} \leq x \leq 2+\sqrt{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2-\sqrt{2} \leq x < 1 \text{ hoặc } 2 < x \leq 2+\sqrt{2}.$$

Vấn đề 2: Đưa lôgarit về cùng một cơ số

1. a) $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) \leq \log_3(2-x) \Leftrightarrow -\log_3(x+1) \leq \log_3(2-x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x+1 > 0\\ 2-x > 0\\ \log_3(2-x)(x+1) \geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1 < x < 2\\ -x^2+x+2 \geq 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-1 < x < 2\\ x^2-x-1 \leq 0\end{cases} \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

b) $\log_{\frac{1}{7}}\dfrac{x^2+6x+9}{2(x+1)} < -\log_7(x+1) \Leftrightarrow -\log_7\dfrac{x^2+6x+9}{2(x+1)} < -\log_7(x+1)$

$$\Leftrightarrow \log_7\frac{x^2+6x+9}{2(x+1)} > \log_7(x+1) \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x^2+6x+9}{2(x+1)} > x+1\\ x+1 > 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+6x+9 > 2(x+1)^2\\ x > -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-2x-7 < 0\\ x > -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1-2\sqrt{2} < x < 1+2\sqrt{2}\\ x > -1\end{cases}$$

c) $\log_2(9^{x-1}+7) > \log_2(3^{x-1}+1)+2 \Leftrightarrow \log_2(9^{x-1}+7) > \log_2[4(3^{x-1}+1)]$

$\Leftrightarrow 9^{x-1}+7 > 4(3^{x-1}+1) \Leftrightarrow 3^{2(x-1)} - 4.3^{x-1}+3>0$

$\Leftrightarrow 3^{x-1}<1$ hoặc $3^{x-1}>3 \Leftrightarrow x-1<0$ hoặc $x-1>1 \Leftrightarrow x<1$ hoặc $x>2$.

2. a) $\log_x(5x^2-8x+3) > 2 = \log_x x^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<1 \\ 0<5x^2-8x+3<x^2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x>1 \\ 5x^2-8x+3>x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<1 \\ x<\frac{3}{5} \vee x>1 \\ 4x^2-8x+3<0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x>1 \\ 4x^2-8x+3>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<\frac{3}{5} \\ \frac{1}{2}<x<\frac{3}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x>1 \\ x<\frac{1}{2} \text{ hoặc } x>\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2}<x<\frac{3}{5} \text{ hoặc } x>\frac{3}{2}.$$

b) $$\log_x\frac{4x+5}{6-5x}<-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<1 \\ \frac{4x+5}{6-5x}>\frac{1}{x} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x>1 \\ 0<\frac{4x+5}{6-5x}<\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<1 \\ \frac{4x^2+10x-6}{(6-5x)x}>0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 1<x<\frac{6}{5} \\ \frac{4x^2+10x-6}{(6-5x)x}<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<1 \\ x<-3 \text{ hoặc } x>\frac{1}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 1<x<\frac{6}{5} \\ -3<x<\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2}<x<1.$$

3. a) $\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}x + \log_{\frac{1}{4}}(x-1) + \frac{1}{2}\log_2 6 \le 0 \quad (1)$

Điều kiện: $x>1$.

$(1) \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\log_2 x - \frac{1}{2}\log_2(x-1) + \frac{1}{2}\log_2 6 \le 0$

$\Leftrightarrow \log_2 x(x-1) \ge \log_2 6 \Leftrightarrow x(x-1)\ge 6 \Leftrightarrow x^2-x-6\ge 0$

$\Leftrightarrow x\le -2$(loại) hoặc $x\ge 3$ (nhận) $\Leftrightarrow x\ge 3$.

b) $\log(x^2-3x+6) > 2(\log x+\log 2) \Leftrightarrow \log(x^2-3x+6) > 2(\log 2x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x > 0 \\ x^2 - 3x + 6 > (2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 3x^2 + 3x - 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ -2 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

c) $\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)} + \dfrac{1}{\log_2 \sqrt{x^2-3x+2}} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_2 \sqrt{x^2-3x+2}} > \dfrac{1}{\log_2(2x-1)}$ (1).

Điều kiện: $\begin{cases} 0 < 2x - 1 \neq 1 \\ 0 < x^2 - 3x + 2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} < x \neq 1 \\ x < 1 \text{ hoặc } x > 2 \\ x \neq \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{2} < x < 1 \\ 2 < x < \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x > \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$.

<u>*TH1:*</u> $\dfrac{1}{2} < x < 1 : x^2 - 3x + 2 < 1$ và $2x - 1 < 1$ nên hai vế của (1) đều âm.

Do đó: (1) $\Leftrightarrow \log_2 \sqrt{x^2 - 3x + 2} < \log_2(2x - 1)$

$\Leftrightarrow 3x^2 - x - 1 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1+\sqrt{13}}{6} < x < 1.$

<u>*TH2:*</u> $2 < x < \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$: VP(1) > 0 và VP < 0 $\Rightarrow$ (1) vô nghiệm.

<u>*TH3:*</u> $x > \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$: VT(1) và VP(1) đều dương.

Do đó (1) $\Leftrightarrow \log_2 \sqrt{x^2 - 3x + 2} < \log_2(2x - 1) \Leftrightarrow 3x^2 - x - 1 > 0$

$\Leftrightarrow x > \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Vậy (1) có nghiệm là $x > \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ và $\dfrac{1+\sqrt{13}}{6} < x < 1$.

4. $2\log_3(4x-3) + \log_{\frac{1}{3}}(2x+3) \leq 2 \Leftrightarrow 2\log_3(4x-3) - \log_3(2x+3) \leq 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3 > 0 \\ 2x + 3 > 0 \\ \log_3(4x-3)^2 \leq \log_3 9(2x+3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{3}{4} \\ 16x^2 - 24x + 9 \leq 18x + 27 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{3}{4} \\ 16x^2 - 42x - 18 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{3}{4} \\ -\dfrac{3}{8} \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{3}{4} < x \leq 3.$$

5. a) $\log_{\frac{1}{5}}\left(x^2-6x+18\right)+2\log_5\left(x-4\right)<0$

$\Leftrightarrow \quad \log_5(x^2-6x+18)>2\log_5(x-4)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-4>0 \\ x^2-6x+18>(x-4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>4 \\ x>-1 \end{cases} \Leftrightarrow x>4.$

b) $\log_3\left[\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-1\right)\right]<1 \Leftrightarrow 0<\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)<3$

$\Leftrightarrow -3<\log_2(x^2-1)<0 \Leftrightarrow \frac{1}{8}<x^2-1<1$

$\Leftrightarrow \frac{9}{8}<x^2<2 \Leftrightarrow \frac{3}{2\sqrt{2}}<x<\sqrt{2}$ hoặc $-\sqrt{2}<x<-\frac{3}{2\sqrt{2}}$.

6. $\log_x(\log_3(9^x-72))\le 1$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} 9^x>72 \\ \log_x(\log_3(9^x-72))\le \log_x x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\log_9 72>1 \\ 0<\log_3(9^x-72)\le x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>\log_9 72 \\ 9^x-72>1 \\ 9^x-72\le 3^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\log_9 73 \\ 3^x\le 9 \end{cases} \Leftrightarrow \log_9 73<x\le 2.$

Vấn đề 3: Phương pháp đặt ẩn số phụ

1. a) $2\log_5 x-\log_x 125<1$ (1)

Điều kiện: $0<x\ne 1$.

(1) $\Leftrightarrow 2\log_5 x-\frac{\log_5 125}{\log_5 x}<1 \Leftrightarrow 2\log_5 x-\frac{3}{\log_5 x}<1$

Đặt $t=\log_5 x$.

(1) trở thành $2t-\frac{3}{t}<1 \Leftrightarrow \frac{2t^2-t-3}{t}<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<t<\frac{3}{2} \\ t<-1 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0<\log_5 x<\frac{3}{2} \\ \log_5 x<-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1<x<5^{3/2}=5\sqrt{5} \\ 0<x<\frac{1}{5} \end{array}\right.$.

b) $\log_x 2.\log_{\frac{x}{16}} 2>\frac{1}{\log_2 x-6}$ (2)

Điều kiện: $\begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ 0 < \dfrac{x}{16} \neq 1 \\ \log_2 x - 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ x \neq 16 \\ x \neq 4 \end{cases}$.

$(2) \Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_2 x}.\dfrac{1}{\log_2 \dfrac{x}{16}} > \dfrac{1}{\log_2 x - 6}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_2 x}.\dfrac{1}{\log_2 x - 4} > \dfrac{1}{\log_2 x - 6}$.

Đặt $t = \log_2 x$.

(2) trở thành $\dfrac{1}{t}.\dfrac{1}{t-4} > \dfrac{1}{t-6} \Leftrightarrow \dfrac{t - 6 - t(t-4)}{t(t-4)(t-6)} > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-t^2 + 5t - 6}{t(t-4)(t-6)} > 0$

$\Leftrightarrow t < 0$ hoặc $2 < t < 3$ hoặc $4 < t < 6$

$\Rightarrow \log_2 x < 0$ hoặc $2 < \log_2 x < 3$ hoặc $4 < \log_2 x < 6$

$\Leftrightarrow 0 < x < 1$ hoặc $4 < x < 8$ hoặc $16 < x < 64$.

2. a) $3^{\log x + 2} - 3^{\log x^2 + 5} + 2 < 0 \Leftrightarrow 3^{\log x + 2} - 3^{2\log x + 5} + 2 < 0$ (1). Điều kiện $x > 0$

Đặt $t = 3^{\log x + 2} > 0$.

(1) trở thành $t - 3t^2 + 2 < 0 \Leftrightarrow t < -\dfrac{2}{3}$ hoặc $t > 1$.

$\Leftrightarrow 3^{\log x + 2} > 1 \Leftrightarrow \log x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{100}$.

b) $6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} \leq 12 \Leftrightarrow 6^{\log_6^2 x} + \left(6^{\log_6 x}\right)^{\log_6 x} \leq 12$

$\Leftrightarrow 6^{\log_6^2 x} \leq 6 \Leftrightarrow \log_6^2 x \leq 1$

$\Leftrightarrow -1 \leq \log_6 x \leq 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{6} \leq x \leq 6$.

3. Giải các bất phương trình:

a) $\sqrt{\log_3^2 x - 4\log_3 x + 9} \geq 2\log_3 x - 3$ (1)

Đặt $t = \log_3 x$.

(1) trở thành $\sqrt{t^2 - 4t + 9} \geq 2t - 3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t - 3 < 0 \\ t^2 - 4t + 9 \geq 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} 2t - 3 \geq 0 \\ t^2 - 4t + 9 \geq (2t-3)^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow t<\frac{3}{2} \text{ hoặc } \begin{cases} t\ge\frac{3}{2} \\ 3t^2-8t\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow t<\frac{3}{2} \text{ hoặc } \begin{cases} t\ge\frac{3}{2} \\ 0\le t\le\frac{8}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow t\le\frac{8}{3} \Leftrightarrow \log_3 x\le\frac{8}{3} \Leftrightarrow 0<x<3^{\frac{8}{3}}=9\sqrt[3]{9}.$$

b) $\log_2(2^x-1).\log_2(2^{x+1}-2)<2 \Leftrightarrow \log_2(2^x-1).\log_2 2(2^x-1)<2$

$\Leftrightarrow \log_2(2^x-1).\left[\log_2(2^x-1)+1\right]<2$ (2).

Đặt $t=\log_2\left(2^x-1\right)$.

(2) trở thành $(t+1)<2 \Leftrightarrow t^2+t-2<0 \Leftrightarrow -2<t<1$.

$\Leftrightarrow -2<\log_2\left(2^x-1\right)<1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4}<2^x-1<2 \Leftrightarrow \frac{5}{4}<2^x<3 \Leftrightarrow \log_2\frac{5}{4}<x<\log_2 3$.

4. $\log_5(4^x+144)-4\log_5 2<1+\log_5(2^{x-2}+1)$

$\Leftrightarrow \log_5(4^x+144)<\log_5 16+\log_5 5+\log_5(2^{x-2}+1)$

$\Leftrightarrow \log_5(4^x+144)<\log_5 80(2^{x-2}+1)$

$\Leftrightarrow 4^x+144<80.(2^{x-2}+1)$

$\Leftrightarrow (2^x)^2-20.2^x+64<0$

$\Leftrightarrow 4<2^x<16 \Leftrightarrow 2<x<4.$

Chương III: NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

§1. NGUYÊN HÀM

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

I. KHÁI NIỆM NGUYÊN HÀM

1. Định nghĩa:

- F(x) được gọi là một nguyên hàm của hàm số f trên (a, b) nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc (a;b).
- Nếu F(x) là nguyên hàm của f trên khoảng (a, b) và hai hàm f và F liên tục trên đoạn [a; b] thì F cũng là nguyên hàm của f trên đoạn [a, b].

2. Định lí:

Giả sử hàm số F là một nguyên hàm của hàm số f trên K. Khi đó:

a. Với mỗi hằng số C, hàm số $y = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của f trên K.

b. Ngược lại, với mỗi nguyên hàm G của f trên K thì tồn tại một hằng số C sao cho $G(x) = F(x) + C$ với mọi x thuộc K.

Như vậy, nếu F là một nguyên hàm của hàm số f trên K thì mọi nguyên hàm của hàm số f trên K đều có dạng $F(x) + C$ với $C \in \mathbb{R}$.

Khi đó: $F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$ được gọi là họ tất cả các nguyên hàm của f trên K, ký hiệu là $\int f(x)dx$.

Vậy $\int f(x)dx = F(x) + C$ với $C \in \mathbb{R}$.

Lưu ý: * $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

* Mọi hàm số liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K.

II. NGUYÊN HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

1) $\int 0dx = C$

2) $\int dx = \int 1dx = x + C$

3) $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1)$

4) $\int \dfrac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

5) $\int \sin x dx = \cos x + C$; $\quad \int \sin kx dx = -\dfrac{\cos kx}{k} + C \ (k \neq 0)$

6) $\int \cos x dx = \sin x + C$; $\quad \int \cos kx dx = \dfrac{\sin kx}{k} + C \ (k \neq 0)$

7) $\int e^x dx = e^x + C$; $\int e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k} + C \ (k \neq 0)$

8) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$ 9) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + C$

10) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x + C$

III. MỘT SỐ TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA NGUYÊN HÀM

Định lý: Nếu f, g là hai hàm số liên tục trên K thì:

a) $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

b) Với $k \neq 0$: $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: Chứng minh F(x) là một nguyên hàm của f(x)

1. PHƯƠNG PHÁP

Để chứng minh F(x) là một nguyên hàm của f(x) trên D, ta chứng minh:

$F'(x) = f(x), \ \forall x \in D$.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Chứng minh rằng hàm số:

a) $F(x) = -\ln|\cos x|$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan x$.

b) $F(x) = \ln\left|\frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}\right|$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{\cos x}$.

c) $F(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

d) $F(x) = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right|$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$.

Giải

a) Ta có $[F(x)]' = [-\ln|\cos x|]' = -\frac{1}{\cos x}(\cos x)' = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$.

Vậy $F(x) = -\ln|\cos x|$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan x$.

b) Ta có: $[F(x)]' = \left[\ln\left|\frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}\right|\right]' = \frac{1}{\frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}}\left(\frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}\right)'$

$$= \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \cdot \frac{-2\cos x}{(\sin x - 1)^2} = \frac{-2\cos x}{\sin^2 x - 1} = \frac{2}{\cos x}.$$

Vậy $F(x) = \ln\left|\frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}\right|$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{\cos x}$.

c) Ta có: $[F(x)]' = \left[\sqrt{a^2 - x^2}\right]' = \frac{(a^2 - x^2)'}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Vậy $F(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

d) Ta có: $[F(x)]' = \left[\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right|\right] = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}}\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)'$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

Vậy $F(x) = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right|$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$.

Ví dụ 2: Chứng minh hàm số $F(x) = (2x^2 + 4x + 5)\sqrt{x - 1}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{10x^2 + 4x - 3}{2\sqrt{x - 1}}$ trong $(1; +\infty)$.

Giải

Ta có: $[F(x)]' = \left[(2x^2 + 4x + 5)\sqrt{x - 1}\right]'$

$$= (4x + 4)\sqrt{x - 1} + (2x^2 + 4x + 5).\frac{1}{2\sqrt{x - 1}}$$

$$= \frac{(4x + 4)2(x - 1) + 2x^2 + 4x + 5}{2\sqrt{x - 1}} = \frac{10x^2 + 4x - 3}{2\sqrt{x - 1}}.$$

Vậy $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{10x^2 + 4x - 3}{2\sqrt{x - 1}}$ trong $(1; +\infty)$.

3. BÀI TẬP

1. Cho $a \neq 0$. Chứng minh rằng hàm số:

a) $F(x) = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a + x}{a - x}\right|$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{a^2 - x^2}$.

b) $F(x) = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right|$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$.

2. Chứng minh rằng hàm số:

a) $F(x) = x\sin 2x + \cos 2x + \sin^2 x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x\cos 2x$.

b) $F(x) = 2x(\ln x - 1)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2\ln x$.

c) $F(x) = e^x(\sin x + \cos x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2e^x\cos x$.

Vấn đề 2: Tìm họ nguyên hàm của hàm số f(x)

1. PHƯƠNG PHÁP

Để tính $\int f(x)dx$ ta thực hiện:

– Phân tích f(x) thành tổng của các hàm số cơ bản có trong bảng nguyên hàm.

– Áp dụng các tính chất và công thức nguyên hàm cơ bản để suy ra nguyên hàm cần tìm.

Chú ý:

➢ Tìm nguyên hàm của một hàm số được hiểu là tìm nguyên hàm trên tập xác định của nó.

➢ Ta thường sử dụng các biến đổi sau:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2};\ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2};$$

$$\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1;\ \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1;\ \frac{1}{x^n} = x^{-n};\ \sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}.$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x;\ \sin a\sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right];$$

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right];\ \ldots$$

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Tìm các họ nguyên hàm sau :

a) $\int (4x^3 + 6x^2 + 2x - 5)dx$ b) $\int \frac{(x^3+5)(x^5-3)}{x^7}dx$

c) $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x\sqrt{x}}dx$ d) $\int (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^2 dx\ (x > 0)$.

Giải

a) $\int (4x^3 + 6x^2 + 2x - 5)dx = 4.\frac{x^4}{4} + 6.\frac{x^3}{3} + 2.\frac{x^2}{2} - 5x + C$

$= x^4 + 2x^3 + x^2 - 5x + C.$

b) $\int \frac{(x^3+5)(x^5-3)}{x^7}dx = \int \frac{x^8 + 5x^5 - 3x^3 - 15}{x^7}dx$

$$= \int (x + \frac{5}{x^2} - 3x^{-4} - 15x^{-7})dx = \frac{x^2}{2} - \frac{5}{x} - 3.\frac{x^{-3}}{-3} - 15.\frac{x^{-6}}{-6} + C$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{5}{2x^6} + C.$$

c) $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x\sqrt{x}}dx = \int \frac{x\sqrt{x} - 3x + 3\sqrt{x} - 1}{x\sqrt{x}}.dx = \int \left(1 - \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}}\right)dx$

$$= \int \left(1 - \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x} - x^{-\frac{3}{2}}\right)dx = x - 6\sqrt{x} + 3\ln x - \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C$$

$$= x - 6\sqrt{x} + 3\ln x + \frac{2}{\sqrt{x}} + C.$$

d) $\int (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^2 dx = \int \left(x + 2\sqrt{x}.\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$

$$= \int \left(x + 2x^{\frac{1}{6}} + x^{-\frac{2}{3}}\right)dx = \frac{x^2}{2} + 2.\frac{x^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}} + \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{12\sqrt[6]{x^7}}{7} + 3\sqrt[3]{x} + C.$$

Ví dụ 2: Tìm các họ nguyên hàm sau :

a) $\int e^x(15 - \frac{20e^{-x}}{x^5})dx$ b) $\int 9^x(5^x + x^7 3^{-2x} + \frac{9^{-x}}{\sin^2 x})dx$.

Giải

a) $\int e^x(15 - \frac{20e^{-x}}{x^5})dx = \int (15e^x - 20x^{-5})dx = 15e^x - 20.\frac{x^{-4}}{-4} + C$

$$= 15e^x + 5x^{-4} + C = 15e^x + \frac{5}{x^4} + C.$$

b) $\int 9^x(5^x + x^7 3^{-2x} + \frac{9^{-x}}{\sin^2 x})dx = \int \left(45^x + x^7 + \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$

$$= \frac{45^x}{\ln 45} + \frac{x^8}{8} - \cot x + C.$$

Ví dụ 3: Tìm các họ nguyên hàm sau :

a) $\int \cos 5x.\cos 3x.\sin 2x.dx$ b) $\int \left[(\sin x + \cos x)^2 + (\tan x - \cot x)^2\right]dx$

c) $\int\left(\dfrac{5\cos^2 x-3\cot^2 x}{\cos^2 x}+\dfrac{2\sin^2 x+3\tan^2 x}{\sin^2 x}\right)dx$

d) $\int(\sin^4 x+\cos^4 x)dx$ e) $\int\dfrac{dx}{1+\cos 2x}$

Giải

a) $\int\cos5x.\cos3x.\sin2x.dx=\int\frac{1}{2}\left[\cos8x+\cos2x\right].\sin2xdx$

$$=\frac{1}{4}\int\left[2\cos8x\sin2x+2\sin2x\cos2x\right]dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\left[\sin10x-\sin6x+\sin4x\right]dx$$

$$=\frac{1}{4}\left[-\frac{\cos10x}{10}+\frac{\cos6x}{6}-\frac{\cos4x}{4}\right]+C.$$

b) $\int\left[(\sin x+\cos x)^2+(\tan x-\cot x)^2\right]dx$

$$=\int\left(\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x+\tan^2 x-2\tan x\cot x+\cot^2 x\right)dx$$

$$=\int\left(1+\sin2x+\tan^2 x-2+\cot^2 x\right)dx$$

$$=\int\left(\sin2x+\frac{1}{\cos^2 x}-1+\frac{1}{\sin^2 x}-1-1\right)dx=\int\left(\sin2x+\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}-3\right)dx$$

$$=-\frac{\cos2x}{2}+\tan x-\cot x-3x+C.$$

c) $\int\left(\dfrac{5\cos^2 x-3\cot^2 x}{\cos^2 x}+\dfrac{2\sin^2 x+3\tan^2 x}{\sin^2 x}\right)dx=\int\left(5-\dfrac{3}{\sin^2 x}+2+\dfrac{3}{\cos^2 x}\right)dx$

$$=\int\left(7-\frac{3}{\sin^2 x}+\frac{3}{\cos^2 x}\right)dx=7x+3\cot x+3\tan x+C.$$

d) $\int(\sin^4 x+\cos^4 x)dx=\int\left(1-2\sin^2 x\cos^2 x\right)dx$

$$=\int\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)dx=\int\left(1-\frac{1}{4}(1-\cos4x)\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(3+\cos4x\right)dx=\frac{1}{4}\left(3x+\frac{\sin4x}{4}\right)+C.$$

e) $\int\dfrac{dx}{1+\cos2x}=\int\dfrac{1}{2\cos^2 x}.dx=\dfrac{1}{2}\tan x+C.$

3. BÀI TẬP

1. Tìm các họ nguyên hàm sau:

a) $f(x) = 3x^2 - 3x + 5$

b) $f(x) = 4x^3 - 6x + \frac{7}{x}$

c) $f(x) = \frac{x^3 + 5x^2 - 10}{x}$

d) $f(x) = \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{x\sqrt{x}}$

e) $f(x) = e^x(1 - \frac{e^{-x}}{x^3})$

f) $f(x) = 2^x(1 + x^2 2^{-x})$.

2. Tính $\int f(x)dx$ với:

a) $f(x) = \cos^2\frac{x}{2}$

b) $f(x) = \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2$

c) $f(x) = \frac{1 - 3\cot^2 x}{\cos^2 x}$

d) $f(x) = \cot^2 x$.

3. Tìm họ nguyên hàm các hàm số sau:

a) $f(x) = x(x+1)(x+2)$

b) $f(x) = (\sqrt{x}+1)(x - \sqrt{x} + 1)$

c) $f(x) = (\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}})^2$

d) $f(x) = \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{x^3}$

e) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}$

f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

4. Tính $\int f(x)dx$ với:

a) $f(x) = 5^x e^x$

b) $f(x) = (4^x - 3.7^x).2^x$

c) $f(x) = \frac{(a^x - b^x)^2}{a^x b^x}$

d) $f(x) = \frac{e^{2x}+1}{e^x}$.

e) $f(x) = (1 - e^{-x})e^x$

f) $f(x) = 2^x(3^{2x} + \pi^x)$.

5. Tính:

a) $\int e^x(2 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x})dx$

b) $\int (2a^x + \sqrt{x})dx$

c) $\int 20^x\left(\frac{5}{4^x} - \frac{6^x}{5^x}\right)dx$

d) $\int \frac{x^{3/4} + 2x^{1/3} + 3x^{1/2}}{x}dx$

e) $\int\left(6\sin x - \frac{2}{\cos^3 x}\right)\cos x dx$

f) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

6. Tính $\int f(x)dx$ với:

a) $f(x) = (1+\sin x)^2 + (1+\cos x)^2$

b) $f(x) = \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}$

c) $f(x) = (\tan x + \cot x)^2(\cos^4 + \sin^4 x)$ d) $f(x) = \sin^4\frac{x}{4} + \cos^4\frac{x}{4}$

e) $f(x) = \int\frac{3\tan^2 x + 2}{\sin^2 x}dx$ f) $f(x) = (2\tan x + 3\cot x)^2$.

Vấn đề 3: Tìm một nguyên hàm F(x) của hàm số f(x) thỏa mãn điều kiện cho trước

1. PHƯƠNG PHÁP

Tìm một nguyên hàm F(x) của hàm số f(x) thỏa điều kiện F(a) = b

Ta thức hiện 2 bước sau :

– Tìm họ nguyên hàm của f(x) là: F(x) = G(x) +C

– Giải điều kiện F(a) = b ⇔ G(a) + C = b ⇔ C = b – G(a)

– Kết luận F(x) = G(x) + C , với C tìm được ở trên.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Tìm một nguyên hàm F(x) của f(x) thỏa điều kiện cho trước :

a. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 5$; F(2) = 8.

b. $f(x) = e^{x+\ln 10}$; F (1) = e.

c. $f(x) = 5x^4 + 2e^{3x} - 4\sin\pi x$; F(1) = 3.

Giải

a. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 5$; F(2) = 8.

Ta có: $F(x) = \int f(x)dx = \int\left(2x^3 - 3x^2 + 4x + 5\right)dx$

$$= \frac{x^4}{2} - x^3 + 2x^2 + 5x + C$$

Lại có: $F(2) = 8 \Leftrightarrow \frac{2^4}{2} - 2^3 + 2.2^2 + 5.2 + C = 8 \Leftrightarrow C = -18.$

Vậy $F(x) = \frac{x^4}{2} - x^3 + 2x^2 + 5x - 18$ là hàm số cần tìm.

b. $f(x) = e^{x+\ln 10}$; F (1) = e.

Ta có: $F(x) = \int e^{x+\ln 10}dx = \int 10.e^x dx = 10e^x + C$

Mặt khác: $F(1) = e \Leftrightarrow 10e + C = e \Leftrightarrow C = -9e$.

Vậy $F(x) = 10e^x - 9e$ là hàm số cần tìm.

c. $f(x) = 5x^4 + 2e^{3x} - 4\sin\pi x$; F(1) = 3.

Ta có: $F(x) = \int(5x^4 + 2e^{3x} - 4\sin\pi x)dx = x^4 + \frac{2e^{3x}}{3} + 4.\frac{\cos\pi x}{\pi} + C$.

Lại có: $F(1) = 3 \Leftrightarrow 1 + \frac{2e^3}{3} + 4.\frac{\cos\pi}{\pi} + C = 3 \Leftrightarrow C = \frac{-2e^3}{3} - 1 + \frac{4}{\pi}$.

Vậy $F(x) = x^4 + \frac{2e^{3x}}{3} + 4.\frac{\cos\pi x}{\pi} - \frac{2e^3}{3} - 1 + \frac{4}{\pi}$ là hàm số cần tìm.

Ví dụ 2: Cho $f(x) = 3x^2 - 2(2m - 1)x + 2m$. Xác định m để nguyên hàm F(x) của f(x) thỏa điều kiện $F(1) = 3$ và $F(2) = 21$.

Giải

Ta có: $F(x) = \int\left(3x^2 - 2(2m-1)x + 2m\right)dx = x^3 - (2m-1)x^2 + 2mx + C$.

Mặt khác:

$$\begin{cases} F(1) = 3 \\ F(2) = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - (2m-1) + 2m + C = 3 \\ 8 - 4(2m-1) + 4m + C = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 1 \\ -4m + C = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 1 \\ m = -2 \end{cases}.$$

Vậy $F(x) = x^3 + 5x^2 - 4x + 1$ là hàm số cần tìm.

3. BÀI TẬP:

1. Tìm a, b để hàm số $F(x) = \frac{ax + b}{x - 5}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{(x-5)^2}$ và $F(6) = 8$.

2. Tìm nguyên hàm F(x) của hàm số $f(x) = 2x^2 - x + 3$ và biết đồ thị hàm số F(x) đi qua M(6; 5).

3. Tìm a, b, c để $F(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 5$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = 6x^2 - 4x + 1$ trên R.

4. Tìm hàm số F(x) biết rằng F(x) là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 2x + m}{x^2}$ và F(x) đạt cực trị tại x = 2 và F(2) = 3.

§2. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÌM NGUYÊN HÀM

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

I. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

Định lý 1:

Cho hàm số u = u(x) có đạo hàm liên tục trên K và hàm số y = f(u) liên tục sao cho f[u(x)] xác định trên K. Khi đó :

Nếu F là một nguyên hàm của f, tức là: $\int f(u)du = F(u) + C$ thì ta có:

$$\int f[u(x)]u'(x)dx = F[u(x)] + C \qquad (1)$$

II. PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

Định lý 2:

Nếu u, v là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên K thì:

$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x).u'(x)dx$ (2)

Công thức (2) có thể viết gọn dưới dạng: $\int udv = uv - \int vdu$. (3)

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Vấn đề 1. Phương pháp đổi biến số

1. PHƯƠNG PHÁP:

a. Biết $\int f(t)dt = F(t) + C$. Tính I = $\int f(u(x)).u'(x)dx$ (*) bằng phương pháp đổi biến số ta thực hiện các bước sau:

– Đặt: $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x)dx$.

– Thay vào (*) ta được:

$I = \int f(t).dt = F(t) + C$ (**).

– Thay $t = u(x)$ vào (**) ta được $I = F[u(x)] + C$ là nguyên hàm cần tìm.

b. Chú ý:

➢ **Trường hợp u = ax + b (a ≠ 0) ta áp dụng trực tiếp kết quả sau:**

Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ **thì** $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

➢ **Một số công thức tính nguyên hàm của hàm số của u = ax + b:**

- $\int (ax+b)^{\alpha}dx = \frac{1}{a}.\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
- $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$
- $\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}.e^{ax+b} + C$
- $\int a^{mx+n}du = \frac{a^{mx+n}}{m.\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$
- $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$
- $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$

- $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}dx = \int [1+\tan^2(ax+b)]dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b)+C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}dx = \int [1+\cot^2(ax+b)]dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b)+C$

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Tìm các họ nguyên hàm sau:

a) $\displaystyle\int \frac{4x+3}{2x-1}dx$ b) $\displaystyle\int (3x-20)^{15}dx$

c) $\displaystyle\int \Big(\frac{1}{(3x+1)^3}+\frac{2}{\sqrt{4x-3}}\Big)dx$ d) $\displaystyle\int \frac{dx}{9-4x^2}$

Giải

a) $\displaystyle\int \frac{4x+3}{2x-1}dx = \int \left(2+\frac{5}{2x-1}\right)dx = 2x+5.\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C.$

b) $\displaystyle\int (3x-20)^{15}dx = \frac{1}{3}.\frac{(3x-20)^{16}}{16}+C = \frac{1}{48}(3x-20)^{16}+C.$

c) $\displaystyle\int \Big(\frac{1}{(3x+1)^3}+\frac{2}{\sqrt{4x-3}}\Big)dx = \int \left[(3x+1)^{-3}+\frac{2}{\sqrt{4x-3}}\right]dx$

$\displaystyle = \frac{1}{3}.\frac{(3x+1)^{-2}}{-2}+2.\frac{1}{4}.2\sqrt{4x-3}+C = -\frac{1}{6(3x+1)^2}+\sqrt{4x-3}+C.$

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{9-4x^2} = \int \frac{1}{(3+2x)(3-2x)}dx = \frac{1}{6}\int \frac{(3+2x)+(3-2x)}{(3+2x)(3-2x)}dx$

$\displaystyle = \frac{1}{6}\int \left(\frac{1}{3-2x}+\frac{1}{3+2x}\right)dx = \frac{1}{6}\left[\frac{1}{-2}.\ln|3-2x|+\frac{1}{2}\ln|3+2x|\right]+C$

$\displaystyle = \frac{1}{12}\ln\left|\frac{3+2x}{3-2x}\right|+C.$

<u>**Nhận xét:**</u> Trong ví dụ 1, các hàm số cần tìm nguyên hàm đều là các hàm số phụ thuộc vào biểu thức dạng u = ax + b nên ta áp dụng trực tiếp các công thức nêu ở phần chú ý trên.

Ví dụ 2 : Tìm các họ nguyên hàm sau :

a) $\displaystyle\int \frac{6x}{(2x^2+3)^4}dx$ b) $\displaystyle\int \frac{e^x dx}{(e^x+1)^5}$

c) $\displaystyle\int \frac{3\ln^2x+6\ln x+3}{x}dx$ d) $\displaystyle\int \sin^{20}x\cos x.dx$

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^6 x}$ f) $\displaystyle\int \frac{(2\sin x+3)\cos x}{\sin x-1}.$

Giải

a.) $\int \frac{6x}{(2x^2+3)^4}dx$

Đặt t = $2x^2 + 3 \Rightarrow dt = (2x^2+3)'dx = 4xdx \Rightarrow xdx = \frac{1}{4}dt$.

Suy ra

$$\int \frac{6x}{(2x^2+3)^4}dx = \int \frac{6}{(2x^2+3)^4}.xdx = \int \frac{6}{t^4}.\frac{1}{4}dt = \frac{3}{2}\int t^{-4}dt$$

$$= \frac{3}{2}.\frac{t^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{2t^3} + C = -\frac{1}{2(2x^2+3)^3} + C.$$

__Chú ý:__ Nếu gặp $\int f(ax^n + b).x^{n-1}dx$ thì ta đặt $t = ax^n + b$.

b) $\int \frac{e^x dx}{(e^x+1)^5}$

Đặt $t = e^x + 1 \Rightarrow dt = e^x\,dx$.

Do đó: $\int \frac{e^x dx}{(e^x+1)^5} = \int \frac{dt}{t^5} = \int t^{-5}dt = \frac{t^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{4t^4} + C = -\frac{1}{4(e^x+1)^4} + C$.

__Chú ý:__ Nếu gặp $\int f(ae^x + b).e^x dx$ ta đặt $t = ae^x + b$.

c. $\int \frac{3\ln^2 x + 6\ln x + 3}{x}dx$

Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x}dx$.

Do đó: $\int \frac{3\ln^2 x + 6\ln x + 3}{x}dx = \int (3t^2 + 6t + 3)dt$

$= t^3 + 3t^2 + 3t + C = \ln^3 x + 3\ln^2 x + 3\ln x + C$.

__Chú ý:__ Nếu gặp $\int f(a\ln x + b).\frac{dx}{x}$ ta đặt $t = a\ln x + b$.

d. $\int \sin^{20} x \cos x.dx$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$.

Do đó $\int \sin^{20} x \cos x.dx = \int t^{20}dx = \frac{t^{21}}{21} + C = \frac{\sin^{21} x}{21} + C$.

e. $\int \frac{dx}{\cos^6 x} = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right).\frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \tan^2 x)^2.\frac{dx}{\cos^2 x}$.

Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$.

Suy ra $\int \frac{dx}{\cos^6 x} = \int (1+t^2)^2 dx = \int \left(t^4 + 2t^2 + 1\right)dt$

$$= \frac{t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} + t + C = \frac{\tan^5 x}{5} + \frac{2\tan^3 x}{3} + \tan x + C.$$

<u>**Chú ý:**</u> Nếu gặp $\int \sin^m x.\cos^n xdx$ thì tùy theo giá trị của m, n ta có các trường hợp sau:

* Nếu m lẻ thì có thể đặt t = cosx.
* Nếu n lẻ thì có thể đặt t = sinx.
* Nếu m, n chẵn dương thì phải hạ bậc trước đã.
* Nếu m chẵn âm hay n chẵn âm thì có thể đặt t = cotx hay t = tanx.

e. $\int \frac{(2\sin x + 3)\cos x}{\sin x - 1}$.

Đặt $t = \sin x - 1 \Rightarrow dt = \cos x\, dx$ và $\sin x = t + 1$.

Do đó: $\int \frac{(2\sin x + 3)\cos x}{\sin x - 1} = \int \frac{2(t+1)+3}{t}dt = \int \left(2 + \frac{5}{t}\right)dt$

$$= 2t + 5\ln|t| + C = 2(\sin x - 1) + 5\ln|\sin x - 1| + C.$$

Chú ý:

– Nếu gặp $\int f(\sin x).\cos xdx$ thì đặt t = sinx.

– Nếu gặp $\int f(\cos x).\sin xdx$ thì đặt t = sinx.

– Nếu gặp $\int f(\tan x).\frac{dx}{\cos^2 x}$ thì đặt t = tanx.

– Nếu gặp $\int f(\cot x).\frac{dx}{\sin^2 x}$ thì đặt t = tanx.

Phương pháp tìm nguyên hàm của hàm số phân thức:

Giả sử cần tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ (P(x) ;Q(x) đa thức)

* Nếu $f(x) = \frac{k}{ax+b}$ thì $\int f(x)dx = \frac{k}{a}\ln|ax+b| + C$.

* Nếu $f(x) = \frac{1}{(ax+b)^2}$ thì $\int f(x)dx = \frac{1}{a}.\frac{-1}{ax+b} + C$.

* Nếu $f(x) = \frac{1}{ax^2+bx+c}$ thì ta có:

+ Mẫu thức có nghiệm kép $x = \alpha$ thì: $\int f(x)dx = \int \frac{1}{a(x-\alpha)^2}dx = -\frac{1}{a(x-\alpha)} + C$.

+ Mẫu thức có hai nghiệm x_1, x_2 thì:

$$\int \frac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)}dx = \frac{1}{a(x_2-x_1)}\int\left[\frac{1}{x-x_2}-\frac{1}{x-x_1}\right]dx$$

* Nếu **bậc P(x) < bậc Q(x)**

Ta biến đổi f(x) về tổng (hiệu) các hàm số đơn giản hoặc ba dạng trên rồi tìm nguyên hàm.

* Nếu **bậc P(x) ≥ bậc Q(x)**

Ta thực hiện phép chia đa thức P(x) cho Q(x) rồi biến đổi f(x) về tổng (hiệu) các hàm số đơn giản hoặc ba dạng trên từ đó tìm ra nguyên hàm.

Để phân tích f(x) về tổng, hiệu các hàm số đơn giản hoặc ba dạng trên ta áp dụng cách làm sau:

Giả sử $Q(x) = (x-\alpha)(x-\beta)^2(ax^2+bx+c)$. Khi đó ta viết:

$$f(x) = \frac{P(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)^2(ax^2+bx+c)} = \frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\beta}+\frac{C}{(x-\beta)^2}+\frac{Mx+N}{ax^2+bx+C}$$

Đồng nhất hai vế ta tìm được A, B, C, M, N. Thay các giá trị tìm được vào ta sẽ đưa f(x) thành tổng hay hiệu của các hàm số như trên.

Chẳng hạn ta hãy xem một ví dụ sau:

Ví dụ 3: Tính $\int \frac{7x^2+10x+1}{(x-1)^2(x^2+2x+3)}dx$

Giải

Giả sử $\frac{7x^2+10x+1}{(x-1)^2(x^2+2x+3)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+3}$, $\forall x \neq 1$.

$\Leftrightarrow 7x^2+10x+1 = A(x-1)(x^2+2x+3)+B(x^2+2x+3)+(Cx+D)(x-1)^2$.

$\Leftrightarrow 7x^2+10x+1 = (A+C)x^3+(A+B-2C+D)x^2+$

$+(A+2B+C-2D)x-3A+3B+D,\ \forall x\neq 1.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+C=0 \\ A+B-2C+D=7 \\ A+2B+C-2D=10 \\ -3A+3B+D=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=-A \\ 3A+B+D=7 \\ 2B-2D=10 \\ -3A+3B+D=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=3 \\ C=-2 \\ D=-2 \end{cases}$$

Do đó $\int \frac{7x^2+10x+1}{(x-1)^2(x^2+2x+3)}dx = \int\left(\frac{2}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}-\frac{2x+2}{x^2+2x+3}\right)dx$

$$= 2\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} - \int\frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx$$

Đặt $t = x^2+2x+3 \Rightarrow dt = (2x+2)dx$

Ta có $\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx = \int\frac{dt}{t} = \ln|t|+C = \ln|x^2+2x+3|+C.$

Vậy $\int \frac{7x^2+10x+1}{(x-1)^2(x^2+2x+3)}dx = 2\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} - \ln|x^2+2x+3| + C$.

Tuy nhiên một số bài toán nếu dùng phương pháp như trên ta tính được nguyên hàm nhưng sẽ dài dòng, nếu ta biết dùng kĩ thuật "thêm, bớt" để phân tích f(x) thành tổng, hiệu thì ta có lời giải ngắn gọn hơn. Chẳng hạn trong ví dụ sau:

Ví dụ 4: Tính $I = \int \frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2-4x+4)}$

Giải

Ta có $I = \int \frac{(x^2-4x+4)-(x^2-4x+3)}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+3)}dx$

$$= \int\left(\frac{1}{x^2-4x+3} - \frac{1}{x^2-4x+4}\right)dx$$

$$= \int\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-1)-(x-3)}{(x-1)(x-3)} - \frac{1}{(x-2)^2}\right)dx$$

$$= \int\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1}\right) - \frac{1}{(x-2)^2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln|x-3| - \ln|x-1|\right] + \frac{1}{x-2} + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right| + \frac{1}{x-2} + C.$$

3. BÀI TẬP

1. Tính $\int f(x)dx$ với:

a) $f(x) = 4x(2x+5)^{20}$

b) $f(x) = \frac{2x^2+3}{2x+1}$

c) $f(x) = \frac{3x+4}{\sqrt{2+3x}}$

d) $f(x) = (1 - \frac{2}{1-3x})^2$

2. Tìm các họ nguyên hàm sau:

a) $\int x(2+x)^{12}dx$

b) $\int \frac{6x^3-4x^2+1}{3x-2}dx$

c) $\int \frac{1-x^2}{x^4-7x^2+1}dx$

d) $\int x^{10}(x^{11}+1)^{12}dx$

e) $\int x^2\left(\frac{x^3}{18}-1\right)^5dx$

f) $\int \frac{8x^4-24}{x(x^8+3x^4+2)}dx$.

g) $\int \frac{x}{(x-1)^2}dx$

h) $\int \frac{4x^7}{(1+x^4)^2}dx$

i) $\int \frac{dx}{x^4(1-x^2)}$

k) $\int \frac{1}{(4x^2-12x+9)(4x^2-12x+5)}dx$

l) $\int \frac{1}{x(x-2)(x+2)}dx$

m) $\int \frac{dx}{x(x+1)(x^2+x-2)}$ n) $\int \frac{2x-3}{3x^2-2x-1}dx$ p) $\int \frac{x^5}{x^6-x^3-2}dx$

q) $\int \frac{x^3}{x^8-16}dx$ r) $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}dx$

s) $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx$ t) $\int \frac{4x^3-3x^2-2x}{(x^2+2x+2)(x^2-3x+3)}dx$.

3. Tìm các họ nguyên hàm sau:

a) $\int \frac{x^3dx}{(x^2+1)^3\sqrt{x^2+1}}$ b) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+1}-1)^2}dx$ c) $\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}}dx$

d) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}$ e) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}dx$ f) $\int \frac{xdx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$

4. Tìm các họ nguyên hàm sau:

a) $\int x^2e^{x^3+1}dx$ b) $\int \frac{e^{2x}}{e^x+3}dx$ c) $\int \frac{e^{\frac{2}{x}}}{x^2}dx$

d) $\int e^{x\sin x+\cos x}x\cos xdx$ e) $\int (e^{2x+4}-e^{2-5x})dx$ f) $\int (x+1)e^{x^2+2x}dx$

g) $\int \frac{dx}{e^x-e^{-x}}$ h) $\int \frac{6^x}{9^x-4^x}dx$

i) $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}$ k. $\int e^{\sin x+1}\cos xdx$

5. Tìm các họ nguyên hàm sau:

a) $\int \frac{\ln(1+x)-\ln x}{x(1+x)}dx$ b) $\int \frac{1}{x.\ln x}dx$

c) $\int \frac{1}{x.\ln^5 x}dx$ d) $\int \frac{1}{x.\sqrt{\ln x}}dx$

6. Tìm các họ nguyên hàm sau:

a) $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}dx$ b) $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos x}$

c) $\int \frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx$ d) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$

e) $\int \frac{\sin 2xdx}{\sqrt{1+\cos x}}$ f) $\int \sin^5\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}dx$

g) $\int \sin 7x.\cos 5x.\cos xdx$ h) $\int \frac{1+2\sin x.\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

i) $\int \frac{\cos x-\sin x}{1+\sin 2x}dx$ k) $\int \frac{dx}{\cos^4 x-\sin^4 x}$

7. Tìm các họ nguyên hàm sau:

a) $\int \frac{1}{\sin 2x}dx$ b) $\int \frac{1}{\cos 2x}dx$ c) $\int \frac{1}{\cos^4 x}dx$

d) $\int \frac{1}{\cos^6 x}dx$ e) $\int \frac{dx}{1-\cos x}$ f) $\int \sin^4 x.\cos^3 xdx$

g) $\int \sqrt{1+\cos^2 x}.\sin 2xdx$ h) $\int \cos^5 xdx$ i) $\int \frac{1}{\sin^6 x}dx$

k) $\int \frac{1}{\sin^4 x\cos x}dx$ l) $\int \tan^4 xdx$ m) $\int \tan^6 xdx$

n) $\int \tan^5 xdx$ p) $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 2\sin 2x}$

r) $\int \frac{1}{3\cos^2 x + \sin^2 x + 4\sin x.\cos x}dx$ s) $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x}dx$.

Vấn đề 2. Phương pháp nguyên hàm từng phần

Công thức nguyên hàm từng phần:

$$\int u.v'.dx = uv - \int u'vdx$$

hay $\int udv = uv - \int vdu$

Các dạng toán tìm nguyên hàm sử dụng công thức nguyên hàm từng phần:

Dạng 1: $\int P(x).(\sin x, \cos x, e^x)dx$

1. PHƯƠNG PHÁP

Đặt $\begin{cases} u = P(x) & \Rightarrow du = P'(x)dx \\ dv = (\sin x, \cos x, e^x)dx & \Rightarrow v = \int \sin xdx \quad \left(v = \int \cos xdx, v = \int e^x dx\right) \end{cases}$

Suy ra $\int P(x).(\sin x, \cos x, e^x)dx = uv - \int vdu$

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính $\int f(x)dx$

a. $\int (8x+4).e^{2x+3}dx$ b. $\int (12x^2-8)\cos 2xdx$

c. $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx$ d. $\int \frac{1}{\sin^3 x}dx$.

Giải

a. $\int (8x+4).e^{2x+3}dx$

Đặt $u = 8x + 4 \Rightarrow u' = 8$;

$v' = e^{2x+3}$, chọn $v = \frac{1}{2}e^{2x+3}dx$

Suy ra: $\int(8x+4).e^{2x+3}dx = (8x+4).\frac{1}{2}e^{2x+3} - \int 8.\frac{1}{2}e^{2x+3}dx$

$= (4x+2).e^{2x+3} - 2e^{2x+3} + C$.

b. $\int(12x^2 - 8)\cos 2x dx$

Đặt $u = 12x^2 - 8 \Rightarrow u' = 24x$.

$v' = \cos 2x$, chọn $v = \frac{\sin 2x}{2}$.

Suy ra: $\int(12x^2 - 8)\cos 2x dx = (12x^2 - 8)\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) - \int 24x\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)dx$

$= (6x^2 - 4)\sin 2x - \int 12x \sin 2x dx$

Đặt $u = 12x \Rightarrow u' = 12$

$v' = \sin 2x$, chọn $v = -\frac{\cos 2x}{2}$.

Do đó: $\int(12x^2 - 8)\cos 2x dx = (6x^2 - 4)\sin 2x - \left[-6\cos 2x + \int 6\cos 2x dx\right]$

$= (6x^2 - 4)\sin 2x + 6\cos 2x - 3\sin 2x + C$.

c. $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx$

Đặt $u = x \Rightarrow u' = 1$.

$v' = \frac{1}{\sin^2 x}$, chọn $v = -\cot x$.

Suy ra: $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx = -x\cot x + \int \cot x dx = -x\cot x + \int \frac{(\sin x)'}{\sin x}dx$

$= -x\cot x + \ln|\sin x| + C$.

d. $\int \frac{1}{\sin^3 x}dx$

Đặt $u = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow u' = -\frac{1}{\sin^2 x}.\cos x$

$v' = \frac{1}{\sin^2 x}$, chọn $v = -\cot x$.

Do đó $\int \frac{1}{\sin^3 x}dx = -\frac{1}{\sin x}.\cot x + \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}.\cot x dx$

$= -\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}dx = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^3 x}dx$

$$= -\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \int \frac{1}{\sin^3 x}dx + \int \frac{dx}{\sin x}$$

Suy ra : $\int \frac{1}{\sin^3 x}dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \int \frac{dx}{\sin x}\right] = -\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin x}$.

Mặt khác ta có: $\int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}}dx = \int \frac{1}{2\tan\frac{x}{2}.\cos^2\frac{x}{2}}dx$

$$= \int \frac{d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

Do đó ta được $\int \frac{1}{\sin^3 x}dx = -\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$.

Ví dụ 2. Tính : $I = \int e^x \cos x dx$ và $J = \int e^x \sin x dx$

Giải

Tính I:

Đặt : $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = \sin x \end{cases}$

$\Rightarrow I = \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - J$ (*)

Đặt : $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

$\Rightarrow J = \int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = -e^x \cos x + I$ (**)

$(*) \Rightarrow I = e^x \sin x - \left(-e^x \cos x + I\right) \Rightarrow I = \frac{1}{2}e^x\left(\sin x + \cos x\right) + C$

$(**) \Rightarrow J = -e^x \cos x + \frac{1}{2}e^x\left(\sin x + \cos x\right) = \frac{1}{2}e^x\left(\sin x - \cos x\right) + C.$

Dạng 2: Tìm nguyên hàm : $\int P(x).\ln Q(x)dx$

1. PHƯƠNG PHÁP

Đặt $u = \ln Q(x) \Rightarrow du = ?$

$dv = P(x)$, chọn $v = ??$

Suy ra $\int P(x).\ln Q(x)dx = uv - \int vdu = \ldots$

2.CÁC VÍ DỤ

Ví dụ : Tính $\int f(x)dx$

a. $\int (6x+4)\ln x dx$ b. $\int x.\ln(1+x^2)dx$

c. $\int \frac{\ln(x^2-4)}{x^2}dx$ d. $\int \frac{x.\ln x}{(x^2+1)^2}dx$

e. $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}dx$ f. $\int \frac{x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

Giải

a. $\int (6x+4)\ln x dx$

Đặt $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$

$dv = 6x + 4$, chọn $v = 3x^2 + 4x$

Suy ra $\int (6x+4)\ln x dx = (3x^2+4x)\ln x - \int \frac{1}{x}(3x^2+4x)dx$

$= (3x^2+4x)\ln x - \int (3x+4)dx = (3x^2+4x)\ln x - \frac{3x^2}{2} - 4x + C$.

b. $\int x.\ln(1+x^2)dx$

Đặt : $\begin{cases} u = \ln(1+x^2) \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2x}{1+x^2}dx \\ v = \frac{1+x^2}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \int x.\ln(1+x^2)dx = \frac{1+x^2}{2}\ln(1+x^2) - \int xdx = \frac{1+x^2}{2}\ln(1+x^2) - \frac{x^2}{2} + C$.

c. $\int \frac{\ln(x^2-4)}{x^2}dx$

Đặt : $\begin{cases} u = \ln(x^2-4) \\ dv = \frac{1}{x^2}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2x}{x^2-4}dx \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}$

$\Rightarrow \int \frac{\ln(x^2-4)}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\ln(x^2-4) + 2\int \frac{1}{x^2-4}dx$

$= -\frac{1}{x}\ln(x^2-4) + \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right)dx$

$= -\frac{1}{x}\ln(x^2-4) + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$.

d. $\displaystyle\int \frac{x.\ln x}{(x^2+1)^2}dx$

Đặt : $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \dfrac{x}{(x^2+1)^2}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}dx \\ v = -\dfrac{1}{2(x^2+1)} \end{cases}$

$$\Rightarrow \int \frac{x.\ln x}{(x^2+1)^2}dx = -\frac{1}{2(x^2+1)}\ln x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x(x^2+1)}dx$$

$$= -\frac{1}{2(x^2+1)}\ln x + \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2(x^2+1)}dx$$

$$= -\frac{1}{2(x^2+1)}\ln x + \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}\right)2xdx$$

$$= -\frac{1}{2(x^2+1)}\ln x + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2}{x^2+1}\right| + C.$$

e. $\displaystyle\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}dx$

Đặt $\begin{cases} u = \ln(\sin x) \\ dv = \dfrac{1}{\sin^2 x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{\cos x}{\sin x}dx = \cot x dx \\ v = -\cot x \end{cases}$

$$\Rightarrow \int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}dx = -\cot x \ln(\sin x) + \int \cot^2 x dx$$

$$= -\cot x \ln(\sin x) + \int (1+\cot^2 x)dx - \int dx$$

$$= -\cot x \ln(\sin x) - \cot x - x + C$$

f. $\displaystyle\int \frac{x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}dx.$

$\begin{cases} u = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \\ dv = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx \\ v = \sqrt{1+x^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \int \frac{x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}dx = \sqrt{1+x^2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \int dx$$

$$= \sqrt{1+x^2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - x + C$$

3. BÀI TẬP

Tìm họ các nguyên hàm sau:

1) $\int(2x-1)e^x dx$ 2) $\int(x-2)\sin 3x.dx$ 3) $\int x.\sin^2 x.dx$

4) $\int x.\ln xdx$ 5) $\int(x^2+2x-1)e^x dx$ 6) $\int \ln(x+1).dx$

7) $\int e^x(\tan^2 x+\tan x+1).dx$ 8) $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$

9) $\int(2-x^2)\cos xdx$ 10) $\int(x-1)\ln xdx$ 11) $\int(1-x)e^x dx$

12) $\int x\ln(x+1)dx$ 13) $\int e^{2x}\sin xdx$ 14) $\int \sin x.\ln(1+\cos x)dx$

15) $\int x.\sin x.\cos^2 xdx$ 16) $\int x^3 e^x dx$ 17) $\int x^2\cos 2xdx$

18) $\int\sqrt{x}\ln xdx$ 19) $\int x^2\ln(2x)dx$ 20) $\int \sin(\ln x)dx$

21) $\int(2x+1).\ln(x+1)dx$ 22) $\int\frac{\ln(\ln x)}{x}dx$ 23) $\int x.\ln^2(x+1)dx$

24) $\int(1-\ln x)^2 dx$ 25) $\int\frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}dx$ 26) $\int\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$.

§3. TÍCH PHÂN

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

I. KHÁI NIỆM TÍCH PHÂN

Định nghĩa: Cho hàm số f liên tục trên K và a, b $\in$ K.

Nếu F là một nguyên hàm của f trên K thì hiệu số F(b) – F(a) được gọi là *tích phân của f từ a đến b* và ký hiệu: $\int_a^b f(x)dx$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)}$$ (Công thức Newton – Leibniz)

Chú ý: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du \ldots = F(b)-F(a)$

II. CÁC TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN

Giả sử các hàm số f, g liên tục trên K và a, b, c $\in$ K. Khi đó ta có:

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$

2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

3. $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$;

4. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$;

5. $\forall k \in \mathbb{R}: \int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: Tính tích phân bằng công thức Newton - Leibniz

1.PHƯƠNG PHÁP

Để tính tích phân $I = \int_a^b f(x)dx$ ta tìm một nguyên hàm F(x) của f(x) trên khoảng K chứa a, b. Áp dụng công thức sau để tìm ra kết quả:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \text{ (Công thức Newton – Leibniz)}$$

2. VÍ DỤ

Tính các tích phân sau:

a. $\int_1^3 \frac{2x^3 - x^2 + 2x + 1}{x^2}dx$ b. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 xdx$ c. $\int_1^2 \frac{e^x}{e^x + 1}dx$

d. $\int_0^{\frac{\pi}{8}} (\sin^6 x + \cos^6 x)dx$ e. $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$ f. $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9} - \sqrt{x}}$

Giải

a. $I = \int_1^3 \frac{2x^3 - x^2 + 2x + 1}{x^2}dx$

$$= \int_1^3 \left(2x - 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx = \left(x^2 - x + 2\ln x - \frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^3 = \frac{20}{3} + 2\ln 3$$

b. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 xdx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = (\tan x - x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$.

c. $\int_1^2 \frac{e^x}{e^x + 1}dx = \int_1^2 \frac{d(e^x + 1)}{e^x + 1} = \ln\left|e^x + 1\right|\Big|_1^2 = \ln\frac{e^2 + 1}{e + 1}$.

d. $\int_0^{\frac{\pi}{8}}(\sin^6 x+\cos^6 x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{8}}(1-3\sin^2 x.\cos^2 x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{8}}(1-\frac{3}{4}\sin^2 2x)dx$.

$$=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\left[1-\frac{3}{8}\left(1-\cos 4x\right)\right]dx=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\left(\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x\right)dx$$

$$=\left(\frac{5}{8}x+\frac{3}{32}\sin 4x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{8}}=\frac{5\pi}{64}+\frac{3}{32}.$$

e. $\int_1^e\frac{\sin(\ln x)}{x}dx=\int_1^e\sin(\ln x).d(\ln x)=-\cos(\ln x)\Big|_1^e=-\cos 1+1$

f. $\int_0^{16}\frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}=\int_0^{16}\frac{\left(\sqrt{x+9}+\sqrt{x}\right)}{9}dx$

$$=\int_0^{16}\frac{\left(\sqrt{x+9}+\sqrt{x}\right)}{9}dx=\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(\sqrt{(x+9)^3}+\sqrt{x^3}\right)\Bigg|_0^{16}=14$$

3. BÀI TẬP:

Tính các tích phân sau:

1. $\int_0^1\left(e^{2x}+\frac{3}{x+1}\right)dx$ 2. $\int_1^2\left(2^x+\frac{4}{e^{5x}}\right)dx$ 3. $\int_{-2}^0\left(x^2-e^{-2x}\right)dx$

4. $\int_1^4\left(\sqrt{x}-1\right)^2dx$ 5. $\int_1^8(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})^2dx$

6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos 5x.\cos 3x.\sin 2x\right)dx$ 7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(6\sin x\sin 2x\sin 3x\right)dx$

8. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1+\sin 2x}$ 9. $\int_1^e\frac{1+\ln x}{x}dx$ 10. $\int_{-3}^{-1}\frac{dx}{(10+3x)^3}$

11. $\int_1^2\frac{dx}{x+x^2}$ 12. $\int_{-1}^0\frac{1}{x^2+x-2}dx$ 13. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}dx$

14. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$ 15. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{3-2\cot^2 x}{\cos^2 x}dx$ 16. $\int_0^1\frac{2x^3+3x+2}{x+1}$.

Vấn đề 2: Tích phân có chứa dấu trị tuyệt đối

1. PHƯƠNG PHÁP

Giả sử cần tính tích phân: $I = \int_a^b |f(x)|dx$. Ta thực hiện như sau:

– Xét dấu biểu thức f(x) trên đoạn [a; b] rồi sử dụng tính chất của trị tuyệt đối để bỏ dấu trị tuyệt đối của f(x) đưa về các tích phân không còn dấu trị tuyệt đối. Từ đó ta tính được tích phân I.

– Nếu f(x) có đổi dấu trên đoạn [a; b] khi qua nghiệm $c \in (a;b)$ thì ta dùng có thể áp dụng tính chất sau:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

2. VÍ DỤ

Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_0^{\pi} |\cos x|dx$ b. $J = \int_0^2 |1-x|dx$

c. $M = \int_{-2}^2 |x+1|dx$ d. $N = \int_0^5 |x^2-5x+6|dx$

Giải

a. Ta có trên $(0; \frac{\pi}{2})$ thì cosx > 0 và trong $(\frac{\pi}{2}; \pi)$ thì cosx < 0 nên:

$$I = \int_0^{\pi} |\cos x|dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x.dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x.dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 2.$$

b. Ta có trên (0; 1) thì $1-x>0$ và trong (1; 2) thì $1-x<0$ nên

$$J = \int_0^2 |1-x|dx = \int_0^1 (1-x)dx - \int_1^2 (1-x)dx = \left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 - \left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 = 1.$$

c. Ta có: Với $x \in (-2;-1)$ thì $x+1<0$ và với $x \in (-1;2)$ thì $x+1>0$ nên:

$$M = \int_{-2}^2 |x+1|dx = -\int_{-2}^{-1} (x+1)dx + \int_{-1}^2 (x+1)dx$$

$$= -\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{-2}^{-1} + \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{-1}^2 = 5$$

d. Bảng xét dấu:

x	1		2		3		5
f(x)		+	0	–	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu, ta có:

$$N = \int_1^5 \left|x^2 - 5x + 6\right|dx = \int_1^2 \left(x^2 - 5x + 6\right)dx - \int_2^3 \left(x^2 - 5x + 6\right)dx + \int_3^5 \left(x^2 - 5x + 6\right)dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x\right)\Bigg|_1^2 - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x\right)\Bigg|_2^3 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x\right)\Bigg|_3^5$$

$$= \frac{5}{6} - (-\frac{1}{6}) + \frac{14}{3} = \frac{17}{3}.$$

3. BÀI TẬP

Tính các tích phân sau:

1. $\int_{-3}^{3}\left(|x+2| - |x-2|\right)dx$
2. $\int_{-3}^{2}\left|\frac{x}{x+4}\right|dx$
3. $\int_{-1}^{1}(2x - 1 - |x|)^2 dx$
4. $\int_0^{\ln 4}\left|e^{2x} - e^{x+1}\right|dx$
5. $\int_0^4 \left|x^2 - 2x - 3\right|dx$
6. $\int_0^{\pi/2}\sqrt{1 - \sin 2x}\,dx$
7. $\int_{-2}^{2}\left|x^2 - 1\right|$
8. $\int_0^{\pi}\left|2\cos x\right|(\sin x - \cos x)dx$

Vấn đề 3: Chứng minh bất đẳng thức tích phân

1. PHƯƠNG PHÁP

Áp dụng các tính chất sau :

a) Nếu hàm số f liên tục trên [a; b] và $f(x) \ge 0, \forall x \in [a; b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \ge 0$.

b) Nếu hai hàm số f và g liên tục trên [a; b] và $f(x) \ge g(x),\ \forall x \in [a; b]$ thì :

$$\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx.$$

c) Nếu hàm số f liên tục trên [a; b] và $m \le f(x) \le M, \forall x \in [a,b]$ (M, m lần lượt chính là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của f(x) trên [a; b]) thì :

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

2. VÍ DỤ

Chứng minh các bất đẳng thức sau :

a) Chứng minh $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx \le 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

b) Chứng minh $\frac{\pi}{75} \le \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{dx}{10+60\cos^2 x} \le \frac{\pi}{30}$

Giải

a) $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, ta có: $\cos x \le 1$ và $\sin x \ge 0$ nên

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x \le 2\sin x \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx \le 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx.$$

b) $\forall x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$, ta có: $-\frac{1}{2} \le \cos x \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \le \cos^2 x \le \frac{1}{4} \Leftrightarrow 10 \le 10 + 60\cos^2 x \le 25$

$$\Rightarrow \frac{1}{25} \le \frac{1}{10+60\cos^2 x} \le \frac{1}{10}, \forall x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{25}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} dx \le \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{10+60\cos^2 x} \le \frac{1}{10}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} dx$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{75} \le \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{dx}{10+60\cos^2 x} \le \frac{\pi}{30}.$$

3. BÀI TẬP

Chứng minh các bất đẳng thức sau:

1. $\int_1^2 e^x dx \le \int_1^2 e^{x^2} dx$

2. $\int_0^{\pi/2} \sin^{20} x dx \le \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$

3. $\frac{\pi}{14} \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4+3\cos^4 x} \le \frac{\pi}{8}$

4. $54\sqrt{2} \le \int_{-7}^{11}\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x}\right)dx \le 108.$

5. $2 \le \int_{-1}^{1} e^{x^2} dx \le 2e$

6. $\int_0^1 \sqrt{3+e^{-x}} dx \le 2$

7. $\frac{\pi}{2} \le \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{3+2\sin^2 x} dx \le \frac{\pi\sqrt{5}}{4}$

8. $\frac{2}{9} \le \int_{-1}^{1} \frac{dx}{8+x^3} \le \frac{2}{7}$

9. $2e^{-\frac{1}{4}} \le \int_0^2 e^{x^2-x} dx \le 2e^2$

10. $\int_1^2 \ln^{2011} x dx > \int_1^2 \ln^{2012} x dx.$

11. $0 \le \int_0^1 x(1-x)^2 dx \le \frac{4}{27}$

12. $\frac{\pi}{3} < \int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x + \cos x + 1} < \frac{4\pi}{3}.$

§4. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

I. Phương pháp đổi biến số:

Định lí: Nếu hàm số u = u(x) có đạo hàm u'(x) liên tục trên K, hàm số f(u) liên tục sao cho hàm số hợp f[u(x)] xác định trên K; a, b ∈ K thì ta có:

$$\boxed{\int_a^b f[u(x)].u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du} \quad (1)$$

Công thức (1) gọi là ***công thức tích phân đổi biến số***.

II. Phương pháp tích phân từng phần:

Định lí: Nếu u và v là hai hàm số có đạo hàm trên K; a, b ∈ K thì ta có:

$$\int_a^b u(x).v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x).v(x)dx \quad (2)$$

Chú ý: Ta viết công thức (**) ở dạng gọn hơn như sau:

$$\int_a^b u.v'dx = [u.v]_a^b - \int_a^b u'.vdx$$

hoặc $\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu$ (3)

Công thức (2), (3) đều gọi là ***công thức tích phân từng phần***.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: Tính tích phân bằng quy tắc đổi biến số dạng 1.

1. PHƯƠNG PHÁP

Dựa vào công thức (1) ta có hai quy tắc đổi biến số 1 sau:

Quy tắc đổi biến số dạng 1:

Giả sử cần tính I = $\int_a^b f(x)dx$ với f(x) là hàm số liên tục trên [a, b].

1. Đặt x = u(t)
2. Tính dx = u'(t)dt
3. Đổi cận: x = a ⇒ t = α và x = b ⇒ t = β.
4. Thay vào I, ta được: $I = \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[u(t)].u'(t).dt = \int_\alpha^\beta g(t)dt$ (*)

Tính tích phân (*) ta được tích phân I cần tìm.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Tính các tích phân sau:

a) $I = \int_0^{\frac{a}{2}} \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ $(a > 0)$ b) $J = \int_0^{a} \dfrac{dx}{a^2 + x^2}$ $(a > 0)$

Giải

a) Đặt $x = a\sin t$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow dx = a\cos t\,dt$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \frac{a}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$.

Suy ra: $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \dfrac{a\cos t\,dt}{\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt = \left[t\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\pi}{6}$.

b) Đặt $x = a\tan t$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow dx = a(1 + \tan^2 t)\,dt$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$

Suy ra: $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{a(1+\tan^2 t)dt}{a^2 + a^2\tan^2 t} = \dfrac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \dfrac{1}{a}\left[t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\pi}{4a}$.

Chú ý:

- Gặp tích phân có chứa $\sqrt{a^2 - x^2}$ ta đặt $x = a\sin t$ $\left(t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right)$.
- Gặp tích phân có chứa $\sqrt{a^2 + x^2}$ ta đặt $x = a\tan t$ $\left(t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)\right)$.
- Gặp tích phân có chứa $\sqrt{x^2 - a^2}$ ta đặt $x = \dfrac{a}{\sin t}$ $\left(t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \text{ hay } \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)\right)$.

3. BÀI TẬP

1. Tính các tích phân sau:

a) $\int_0^{\sqrt{3}} \dfrac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}}dx$ b) $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} x^2\sqrt{1 - x^2}\,dx$

c) $\int_0^{4} \dfrac{dx}{\sqrt{(16 + x^2)^3}}$ d) $\int_1^{\sqrt{3}} \dfrac{dx}{x\sqrt{1 + x^2}}$.

2. Tính các tích phân sau:

a) $\int_{\sqrt{3}}^{3} \dfrac{dx}{x^2 + 3}$ b) $\int_{-1}^{0} \dfrac{1}{x^2 + 2x + 2}dx$ c) $\int_0^{2} \sqrt{4 - x^2}$ d) $\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{11}{8}} \dfrac{dx}{\sqrt{2 + 3x - 2x^2}}$

Vấn đề 2: Tính tích phân bằng quy tắc đổi biến số dạng 2.

1. PHƯƠNG PHÁP

Dựa vào công thức (1) ta có quy tắc đổi biến số 2 sau:

Quy tắc đổi biến số dạng 2:

Gặp tích phân dạng $I = \int_a^b f[u(x)].u'(x).dx$ ta đặt làm như sau:

1) Đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x)dx$

2) Đổi cận: $x = a \Rightarrow t = u(a) = \alpha$

$x = b \Rightarrow t = u(b) = \beta$

3) Thay vào I ta được $I = \int_a^b f[u(x)]\ .u'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t).dt$ (*)

4) Tính tích phân (*) ta được tích phân cần tìm.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 2: Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_1^e \dfrac{\sqrt[3]{1+\ln^2 x}.\ln x.dx}{x}$ b. $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{1+tg^2 x}{(1+tgx)^2}dx$

Giải

a. Đặt $t = 1 + \ln^2 x \Rightarrow dt = 2\dfrac{\ln x}{x}dx$

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 1$; $x = e \Rightarrow t = 2$.

Do đó:

$$I = \int_1^2 \sqrt[3]{t}.\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int_1^2 t^{\frac{1}{3}}dt = \frac{1}{2}.\frac{3}{4}\left[\sqrt[3]{t^4}\right]_1^2 = \frac{3}{8}(2\sqrt[3]{2}-1).$$

b. Đặt $t = 1 + tgx \Rightarrow dt = (1 + tg^2x)dx$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow t = 2$.

Do đó: $J = \int_1^2 \dfrac{dt}{t^2} = \left[-\dfrac{1}{t}\right]_1^2 = \dfrac{-1}{2} + 1 = \dfrac{1}{2}$.

Chú ý:

➢ Khi sử dụng phép đổi biến số dạng 2, trong một số trường hợp việc tính dt khá khó khăn. Khi đó ta có thể dùng đến phương pháp khá thuận lợi sau gọi là "phương pháp thế" :

Gặp tích phân dạng $I = \int_a^b f(x)dx$ ta làm như sau:

1) Đặt $t = u(x)$. Tìm x theo $t \Rightarrow x = u^{-1}(t) \Rightarrow$ dx theo dt.

2) Đổi cận: $x = a \Rightarrow t = u(a) = \alpha$

$x = b \Rightarrow t = u(b) = \beta$

3) Thay vào ta được $I = \int_a^b f[u(x)].u'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt$ (*)

4) Tính tích phân (*) ta được tích phân cần tìm.

Ví dụ 3: Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}.dx$

b. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

Giải

a. Đặt $t = \sqrt{1+3x^8} \Rightarrow t^2 = 1 + 3x^8$

$\Rightarrow 2t\,dt = 24x^7\,dx \Rightarrow t.\,dt = 12x^7\,dt$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = 1 \Rightarrow t = 2$.

Do đó: $J = \int_1^2 \frac{t^2-1}{3}.t.\frac{tdt}{12} = \frac{1}{36}\int_1^2 (t^4 - t^2)dt$

$= \frac{1}{36}\left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{36}\left(\frac{31}{5} - \frac{7}{3}\right) = \frac{29}{274}$

b. Đặt $t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow dt = \frac{1}{2}(1 + \tan^2\frac{x}{2}).dx \Rightarrow dx = \frac{2.dt}{1+t^2}$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$.

Do đó: $J = \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int_0^1 \frac{dt}{t+1} = \ln|t+1|\Big|_0^1 = \ln 2.$

3. BÀI TẬP

1. Tính các tích phân sau:

a. $\int_0^1 e^{-x^2}x.dx$

b. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+3\cos x}dx$

c. $\int_1^e \frac{\sqrt{2+\ln x}}{2x}dx$

d. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{11 - 7\sin x - \cos^2 x}dx$

2. Tính các tích phân sau:

a. $\int_0^3 \frac{x^2+1}{\sqrt{x+1}}dx$

b. $\int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

c. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x}$

d. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$

3. Tính các tích phân sau:

a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x.\sin x dx$ b. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}.\cos x dx$

c. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{tg}x\, dx$ d. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^3 x}{\cos 2x} dx$

4. Tính các tích phân sau:

a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x.dx$ b. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx$

c. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$ d. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^4 x \cos x}$

5. Tính các tích phân sau:

a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{2+\sin x} dx$ b. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x}{1+\cos x} dx$

c. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x(\sin x+\cos x)}$ d. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\sin^2 x - 5\sin x \cos x}$.

6. Tính các tích phân sau:

a. $\int_{\sqrt{7}}^{4} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}$ b. $\int_0^{\ln 6} \frac{dx}{\sqrt{e^x+3}}$

c. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos^3 x}{1+\cos^2 x} dx$ d. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} dx$ $(a \neq \pm b)$.

7. Tính các tích phân sau:

a. $\int_0^{2} x^2 \sqrt[3]{x^3-8}\, dx$ b. $\int_0^{1} x^5 \sqrt{1-x^3}\, dx$ c. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

d. $\int_1^{3} \frac{x^3 dx}{x^2-16}$ e. $\int_0^{1} \frac{x^3}{x+\sqrt{x^2+1}} dx$ f. $\int_{\sqrt{2}}^{3} \frac{x dx}{\sqrt{x^2-1}}$

g. $\int_1^{2} \frac{dx}{x(x^5+1)}$ h. $\int_1^{e} \frac{3\ln^2 x - 2\ln x + 5}{x} dx$

i. $\int_e^{e^2} \frac{6\ln^3 x - 2\ln x + 5}{x\ln x} dx$ k. $\int_1^{e} \frac{\ln x}{x(\ln^2 x+1)} dx$.

8. Tính các tích phân sau:

a. $\int_0^{1} \frac{4x+2}{x^2+x+1} dx$ b. $\int_0^{1} \frac{4x+3}{\sqrt{2x^2+3x+4}} dx$

c. $\int_0^{1} \frac{2x^2+4x+3}{x^2+x+1} dx$ d. $\int_0^{1} \frac{x^3+2x^2+7x+2}{x^2+2x+5} dx$.

9. Tính các tích phân sau:

a. $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ b. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{6\tan^2 x + 2\tan x - 1}{\cos^2 x}dx$ c. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x}$

d. $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x - 1}}{e^{x+3}}dx$ e. $\int_0^1 \frac{dx}{1+2^x}$ f. $\int_0^1 \frac{dx}{1+e^{2x}}$.

10. Chứng minh: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n xdx\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx\ (n \in N)$

Vấn đề 3: Tính tích bằng phương pháp tích phân từng phần.

1. PHƯƠNG PHÁP

Giả sử cần tính tích phân có dạng: $I = \int_a^b u(x).v'(x)dx$ ta thực hiện như sau:

Đặt $u = u(x) \Rightarrow u' = u'(x)$.

$v' = v'(x)$, chọn v là một nguyên hàm của $v'(x)$.

Thay vào công thức tích phân từng phần ta được:

$$I = \left[u(x).v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Tính tích phân ở vế phải ta được tích phân I cần tính.

Chú ý 1:

- Nếu $I = \int_a^b P(x).e^x dx$ thì ta đặt $u = P(x)$ và $v' = e^x$.
- Nếu $I = \int_a^b P(x).\sin xdx$ thì ta đặt $u = P(x)$ và $v' = \sin x$.
- Nếu $I = \int_a^b P(x).\cos xdx$ thì ta đặt $u = P(x)$ và $v' = \cos x$.
- Nếu $I = \int_a^b P(x).\ln xdx$ thì ta đặt $u = \ln x$ và $v' = P(x)$.

Chú ý 2: Tích phân ở vế phải cũng có thể tích bằng phương pháp phân tích như ở bài 3, cũng có thể phải dùng phương pháp đổi biến số và cũng có thể phải dùng phương pháp tích phân từng phần lần nữa.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Tính các tích phân sau:

a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\cos x.dx$ b) $J = \int_0^1 x.e^{2x}.dx$

Giải

a) Đặt $\begin{cases} u = 2x+1 \\ v' = \cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 2 \\ v = \sin x \end{cases}$.

$$\Rightarrow I = \left[(2x+1)\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x dx$$

$$= (\pi + 1) + \left[2\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi + 1 - 2(0 - 1) = \pi + 3.$$

b) Đặt $\begin{cases} u = x \\ v' = e^{2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 1 \\ v = \dfrac{e^{2x}}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \left[\frac{xe^{2x}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{2x}}{2}dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{e^{2x}}{4}\right]_0^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}.$$

Ví dụ 2: Tính $I = \int_1^e x^2 \ln x.dx$

Giải

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ v' = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = \dfrac{1}{x} \\ v = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}.$

$$\Rightarrow I = \left[\frac{x^3 \ln x}{3}\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3}dx = \frac{e^3}{3} - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^e = \frac{2e^3+1}{9}$$

Ví dụ 3: Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}dx$

Giải

Đặt $\begin{cases} u = x \\ v' = \dfrac{1}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 1 \\ v = \text{tg}x \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \left[x\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-(\cos x)'}{\cos x}dx$$

$$= \frac{\pi}{4} + \left[\ln|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ví dụ 4: Tính $I = \int_0^{\pi} e^x \sin x dx$ và $J = \int_0^{\pi} e^x \cos x dx$

Giải

Đặt $\begin{cases} u = e^x \\ v' = \sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = e^x \\ v = -\cos x \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \left[-e^x\cos x\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x\cos x dx = e^{\pi} + 1 + J \quad (1)$$

Đặt $\begin{cases} u = e^x \\ v' = \cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = e^x \\ v = \sin x \end{cases}$

$$\Rightarrow J = \left[e^x\sin x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x\sin x dx = 0 - I \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow I = e^{\pi} + 1 - I \Rightarrow I = \dfrac{e^{\pi}+1}{2}$

3. BÀI TẬP

1. Tính các tích phân sau:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2-x)\sin 3x dx$ b) $\int_0^1 xe^{3x}\, dx$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x^2-1)\cos x\, dx$ d) $\int_0^1 x^2e^{-x}\, dx$.

2. Tính các tích phân sau:

a. $\int_2^5 2x\ln(x-1)dx$ b. $\int_0^1 x\ln(1+x^2)dx$

c. $\int_1^2 \dfrac{\ln x}{x^2}dx$ d. $\int_0^{\sqrt{3}} \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$

3. Tính các tích phân sau:

a. $\int_{\frac{1}{4}}^1 e^{\sqrt{x}}dx$ b. $\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x})dx$

c. $\int_0^{\pi} x\sin x\cos^2 x dx$ d. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x}\sin x\cos^3 x dx$.

4. Tính các tích phân sau: $I = \int_1^{e^{\pi}} \sin(\ln x)dx$ và $J = \int_1^{e^{\pi}} \cos(\ln x)dx$.

6. Tính các tích phân sau:

a. $\int_0^{e-1} 2x\ln(x+1)dx$ b. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos 4x.dx$

c. $\int_1^e (3x^2+2x)\ln x dx$ d. $\int_0^1 (x^2+1)e^{2x}dx$

e. $\int_1^e (\ln x)^2 dx$ f. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x}dx$

g. $\int_1^{10} x.\lg^2 x.dx$ h. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{x}{\sin^2 x}.dx$.

7. Tính các tích phân sau:

a) (ĐH khối A – 2005) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1+3\cos x}} dx$

b) (ĐH khối B – 2005) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cos x}{1+\cos x} dx$

c) (ĐH khối D – 2005) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{\sin x} + \cos x\right)\cos x dx$.

d) (ĐH khối B – 2006) $I = \int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3}$

e) (ĐH khối D – 2006) $I = \int_0^1 (x-2)e^{2x} dx$

f) (ĐH khối D – 2007) $I = \int_1^e x^3 \ln^2 x dx$

g) (ĐH khối A – 2008) $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{\cos 2x} dx$

h) (ĐH khối B – 2008) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)dx}{\sin 2x + 2\left(1+\sin x + \cos x\right)}$

i) (ĐH khối D – 2008) $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^3} dx$

k) (ĐH khối A – 2009) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^3 x - 1\right)\cos^2 x dx$

l) (ĐH khối B – 2009) $I = \int_1^3 \frac{3+\ln x}{(x+1)^2} dx$

m) (ĐH khối D – 2009) $I = \int_1^3 \frac{dx}{e^x - 1}$.

n) (ĐH khối D – 2010) $I = \int_1^e \left(2x - \frac{3}{x}\right)\ln x dx$.

p) (ĐH khối B – 2010) $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(2+\ln x)^2} dx$.

q) (ĐH khối A – 2010) $I = \int_0^1 \frac{x^2 + e^x + 2x^2e^x}{1 + 2e^x}dx$.

r) (ĐH khối D 2011) $I = \int_0^4 \frac{4x - 1}{\sqrt{2x+1} + 2}dx$.

s) (ĐH khối B 2011) $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + x\sin x}{\cos^2 x}dx$

t) (ĐH khối A 2011) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(x\sin x + \cos x) + x\cos x}{x\sin x + \cos x}dx$.

§5. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

I. Cho hàm số f(x) liên tục trên [a, b].

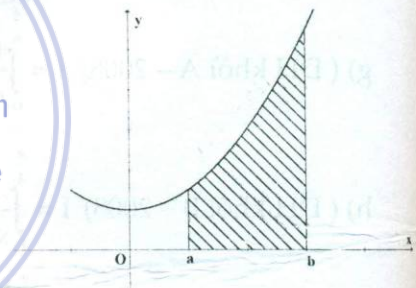
Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường:

– đồ thị (C) của hàm số y = f(x);

– đường thẳng x = a, x = b (a < b)

– trục Ox *(hình 1)*

được tính bởi công thức sau: $S = \int_a^b |f(x)|.dx$



Hình 1

II. Cho hai hàm số f(x) và g(x) liên tục trên [a, b]. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường:

– đồ thị hàm số y = f(x);

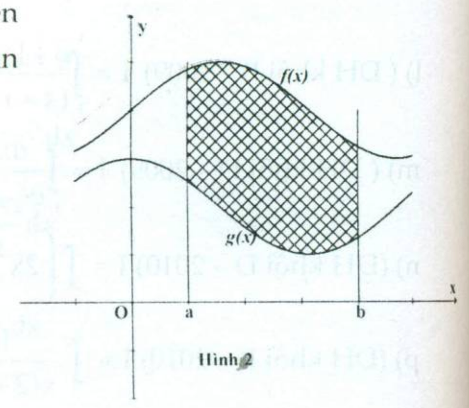
– đồ thị của hàm số y = g(x);

– đường thẳng x = a

– đường thẳng x = b (a < b) *(hình 2)*

được tính bởi công thức sau:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|.dx$$



Hình 2

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi bốn đường: (C): y = f(x), trục Ox, x = a và x = b (a < b)

1. PHƯƠNG PHÁP:

- Áp dụng công thức (1) ta có diện tích hình phẳng cần tìm là: $S = \int_a^b |f(x)|dx$
- Xét dấu f(x) trên [a; b], từ đó bỏ dấu trị tuyệt đối ta sẽ tính được giá trị của tích phân.

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số:
$y = f(x) = 4x^3 - 4$, đường thẳng x = 3, trục tung và trục hoành.

Giải

Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = \int_0^3 |4x^3 - 4|dx$$

Vì với $x \in [0; 1]$ thì $4x^3 - 4 \le 0$ và với $x \in [1; 3]$ thì $4x^3 - 4 \ge 0$ nên:

$$S = \int_0^1 (4 - 4x^3)dx + \int_1^3 (4x^3 - 4)dx$$

$$= \left[4x - x^4\right]_0^1 + \left[x^4 - 4x\right]_1^3 = 75 \text{ (đvdt).}$$

Ví dụ 2: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường
y = sinx, y = 0, x = 0 và x = 2π.

Giải

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int_0^{2\pi} |\sin x|dx$.

Vì với $x \in [0; \pi]$ thì $\sin x \ge 0$ và với $x \in [\pi; 2\pi]$ thì $\sin x \le 0$ nên

$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x)dx$$

$$= \left[-\cos x\right]_0^{\pi} + \left[\cos x\right]_{\pi}^{2\pi} = 1 - (-1) + 1 - (-1) = 4 \text{ (đvdt).}$$

Ví dụ 3: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường
$y = f(x) = 15x^4 - 15x^2$, y = 0, x = −1 và x = 2.

Giải

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int_{-1}^{2} |15x^4 - 15x^2|dx$.

Ta có: $f(x) = 15x^2(x^2 - 1)$ nên với $x \in [-1; 1]$ thì $f(x) \le 0$

và với $x \in [1; 2]$ thì $f(x) \geq 0$ nên

$$S = \int_{-1}^{1}\left(15x^2 - 15x^4\right)dx + \int_{1}^{2}\left(15x^4 - 15x^2\right)dx$$

$$= \left[5x^3 - 3x^5\right]_{-1}^{1} + \left[3x^5 - 5x^3\right]_{1}^{2} = 62 \text{ (đvdt)}.$$

Chú ý:

Muốn tính $S = \int_a^b |f(x)|dx$ thường ta phải xét dấu $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ để khử dấu trị tuyệt đối. Tuy nhiên có thể dựa vào tính chất:

"Nếu hàm số f *liên tục* trên đoạn $[a; b]$ và phương trình $f(x) = 0$ *không có nghiệm* trên $(a; b)$ thì $f(x)$ *không đổi dấu* trên $(a; b)$" để tính S đơn giản hơn.

Ta thực hiện như sau:

Giải phương trình $f(x) = 0$ trên $(a; b)$.

Giả sử các nghiệm thuộc $(a; b)$ của phương trình là $c_1, c_2, .., c_k$

$(a < c_1 < c_2 < \ldots < c_n < b)$.

Thế thì: $S = \left|\int_a^{c_1} f(x)dx\right| + \left|\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx\right| + \ldots + \left|\int_{c_n}^{b} f(x)dx\right|$.

Ví dụ 4: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường (C): $y = x^3 - 3x^2 + 2x$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$.

Giải

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int_{-1}^{2}\left|x^3 - 3x^2 + 2x\right|dx$.

Ta có: $x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$ hoặc $x = 2$.

Do đó:

$$S = \left|\int_{-1}^{0}(x^3 - 3x^2 + 2x)dx\right| + \left|\int_{0}^{1}(x^3 - 3x^2 + 2x)dx\right| + \left|\int_{1}^{2}(x^3 - 3x^2 + 2x)dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_{0}^{1}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_{1}^{2}\right|$$

$$= \left|0 - \left(\frac{1}{4} + 1 + 1\right)\right| + \left|\frac{1}{4}\right| + \left|(4 - 8 + 4) - \frac{1}{4}\right| = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{11}{4} \text{ (đvdt)}.$$

3. BÀI TẬP

1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường

a) $y = 3x^2 + 6x + 3$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 2$.

b) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = \pi$.

c) $y = 4x\sin 2x$, trục Ox, trục Oy và đường $x = \pi$.

d) $y = 3xe^x$, trục Ox; $x = 0$ và $x = 3$.

e) $y = x^3 - 4x$, trục hoành, đường thẳng $x = -2$ và đường thẳng $x = 4$.

2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

a) $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$ và $y = \sin^2 x$.

b) $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ và $y = 5x^4 + 3x^2 + 3$.

c) $y = \dfrac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$ và $x = 2$.

d) $y = 0$, $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)^4}$, $x = 0$ và $x = \dfrac{\pi}{2}$.

3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau:

a) $y = x\ln(x + 1)$; $x = 0$; $x = 3$ và trục Ox.

b) $y = \sin^4 x\cos 3x$; $x = 0$; $x = \pi$ và trục Ox.

c) $y = x^4\sqrt{x^5 + 4}$; $x = 0$; $x = 2$ và trục Ox.

d) $y = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$; $x = \dfrac{1}{2}$; $x = 1$ và trục Ox.

4. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau:

a) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}$; trục Ox; $x = 0$ và $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

b) $y = \dfrac{1 - e^x}{1 + e^x}$; trục Ox; $x = -\ln 2$; $x = \ln 4$.

c) $y = \dfrac{x^3}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$; trục Ox; $x = -1$; $x = 1$.

d) $y = e^{\sqrt{x}}$; trục Ox; $x = 0$; $x = 4$.

e) $y = \dfrac{\cos x + \sin x}{\sqrt{3 + \sin 2x}}$; $x = 0$; $x = \dfrac{\pi}{2}$ và trục Ox.

5. Gọi (D) là hình phẳng giới hạn bởi (P): $y = x^2 + m$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 1$.

Tìm m để diện tích của (D) đạt giá trị nhỏ nhất.

6. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi 4 đường

$x = 0$, $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, trục Ox và $y = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^4}}$.

7. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

$y = \sin^2 x\cos^3 x$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Vấn đề 2: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường (C): $y = f(x)$; (D): $y = g(x)$, $x = a$ và $x = b$ $(a < b)$

1. PHƯƠNG PHÁP

Áp dụng công thức (2) ta có $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$.

Xét dấu biểu thức $F(x) = f(x) - g(x)$, bỏ dấu trị tuyệt đối, từ đó tính được S.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường:
(C): $y = -x^2 + 4$; (D): $y = x^3 - 3x + 4$; $x = -1$ và $x = 1$.

Giải

Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = \int_{-1}^{1} \left|(-x^2 + 4) - \left(x^3 - 3x + 4\right)\right|dx = \int_{-1}^{1} \left|x^3 + x^2 + 3x\right|dx$$

Ta có $F(x) = x^3 + x^2 + 3x = x(x^2 + x + 3)$.

Suy ra $F(x) \le 0$ với $x \in [-1; 0]$ và $F(x) \ge 0$ với $x \in [0; 1]$

Do đó $S = \int_{-1}^{0} \left(-x^3 - x^2 - 3x\right)dx + \int_0^1 (x^3 + x^2 + 3x)dx$

$$= \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{7}{2} \text{ (đvdt).}$$

Ví dụ 2 (*Diện tích hình elip*).

Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi elip: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$.

Giải

Ta có thể xem hình elip trên là hình giới hạn bởi các đường sau:

$$x = -a;\ x = a;\ y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \text{ và } y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Do đó: $S = \int_{-a}^{a} \left|2\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right|dx = 4\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx.$

Đặt $x = a\sin t \Rightarrow dx = a\cos t dt$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

Suy ra $S = \frac{4b}{a}\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}.a\cos t dt = 4ba\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt$

$$= 2ab\int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)dt = 2ab\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \pi ab \text{ (đvdt)}$$

3. BÀI TẬP

1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường

   a) $y = x^3 - 2x$, $y = 2x$, $x = -2$ và $x = 2$.

   b) $y = f(x) = 3x^2 - x^3$, $y = g(x) = x^2 - x + 2$, $x = 0$ và $x = 3$.

   c) $x = -1$, $x = 2$, $y = 3x^2$ và $y = 4x^3$.

   d) $y = 3x - x^3$, $y = -x$, $x = -2$ và $x = 2$.

   e) Đường elip (E): $9x^2 + 16y^2 = 144$.

   f) $y = \sin\dfrac{x}{2}\cos x$, $y = \cos x$, $x = 0$ và $x = \dfrac{\pi}{2}$.

   g) $x = -1$, $x = 2$, $y = x$ và đường $y = x^2 - 2x$

2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau:

   a) $y = 5^{x-2}$, $x = 1$, $x = 4$ và $y = 3 - x$.

   b) (C): $y = x\sqrt{x^2 + 1}$, trục Ox và đường thẳng $x = 1$.

3. Hãy vẽ và tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

   a) (C): $y = \dfrac{x+1}{x-1}$, $x = -1$, $x = 0$ và đường tiệm cận ngang của (C).

   b) (C): $y = \dfrac{x^2 - 3x}{x - 2}$, $x = -1$, $x = 1$ và đường tiệm cận xiên.

   c) (C): $y = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$, $x = 2$, $x = 3$ và đường tiệm cận xiên.

4. Cho hàm số $y = 4x - x^3$ $(0 \le x \le 2)$.

   a) Vẽ đồ thị (C) của hàm số trên.

   b) Xác định m để đường thẳng $y = mx$ chia hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục Ox thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Vấn đề 3: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f(x)$ và $y = g(x)$

1. PHƯƠNG PHÁP

– Lập phương trình hoành độ giao điểm của hai đường

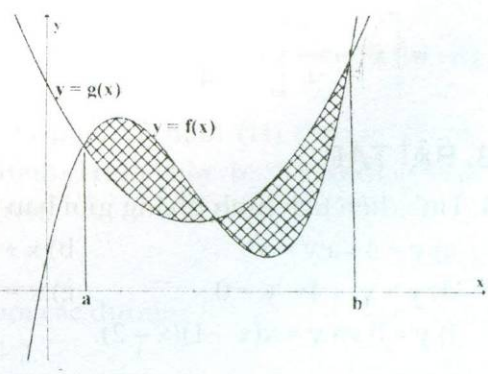
$f(x) = g(x)$

$\Leftrightarrow x = a;\ x = c;\ \ldots;\ x = b$

$(a < c < \ldots < b)$.

– Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = \int_a^b \left|f(x) - g(x)\right| dx.$$



2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đường parabol (P) $y = 2 - x^2$ và đường thẳng (d) $y = -x$.

Giải

➢ Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$2 - x^2 = -x \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

➢ Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = \int_{-1}^{2} \left|(2 - x^2) - (-x)\right| dx$$

$$= \int_{-1}^{2} \left|-x^2 + x + 2\right| dx$$

$$= \int_{-1}^{2} \left(-x^2 + x + 2\right) dx \text{ (vì } -x^2 + x + 2 \geq 0 \text{ với mọi } x \in [-1; 2])$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}.$$

Ví dụ 2: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đường parabol (C) $y = x^3 - 2x$ và đường thẳng (P) $y = 3x^2 - 2x$.

Giải

➢ Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (P) là:

$$x^3 - 2x = 3x^2 - 2x \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right..$$

➢ Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = \int_{0}^{3} \left|(x^3 - 2x) - (3x^2 - 2x)\right| dx = \int_{0}^{3} \left|x^3 - 3x^2\right| dx$$

$$= \int_{0}^{3} \left(3x^2 - x^3\right) dx \text{ (vì } x^3 - 3x^2 \leq 0 \text{ với mọi } x \in [0; 3])$$

$$= \left[x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{3} = \frac{27}{4}.$$

3. BÀI TẬP

1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

a) $y = 4$ và $y = x^2$. b) $x + y = 3$ và $y = x^2 + 1$. c) $y = x^2 + 2$, $y = 3x$.

d) $y = x^2 - 4x$, $y = 0$. e) $x = e$, $y = 0$ và $y = \ln x$.

f) $y = 0$ và $y = x(x - 1)(x - 2)$.

2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi :

   a) Đồ thị hai hàm số $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$;

   b) Đồ thị hai hàm số $y = 2x^2$ và $y = x^4 - 2x^2$ trong miền $x \geq 0$.

   c) (C): $y = \sqrt{4 - x^2}$ và $x^2 - 3y = 0$.

   d) $y = \dfrac{-2x + 1}{x + 1}$ và đường thẳng $y = -\dfrac{x}{2} + 1$.

3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi :

   a) Đồ thị hai hàm số $y = x^2 - 4$ và $y = -x^2 - 2x$;

   b) Đồ thị hai hàm số $y = x^2$ và $y = \sqrt{x}$

   c) Đồ thị hai hàm số $y = -x^2 + 2x$ và $y = -3x$

   d) Đồ thị hàm số $y = 2x - x^2$, trục Ox.

   e) Đồ thị hai hàm số $y = 2 + \sin x$ và $y = 1 + \cos^2 x$ với $x \in [0 ; \pi]$.

4. Xác định $a > 0$ sao cho diện tích S giới hạn bởi hai parabol

   (P): $y = \dfrac{4a^2 - 2ax - x^2}{1 + a^4}$, $y = \dfrac{x^2}{1 + a^4}$

   có giá trị lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó.

5. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong

   $y = \dfrac{x^2\sqrt{x^3 + 1}}{24}$; $y = x.2^{-x}$.

6. Cho $a > 0$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong

   (C): $y = \dfrac{x^2 + 2ax + 3a^2}{1 + a^4}$ và (d): $y = \dfrac{a^2 - ax}{1 + a^4}$.

   Tìm a để diện tích hình phẳng lớn nhất.

Vấn đề 4: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi nhiều hơn hai đồ thị

1. PHƯƠNG PHÁP

Công thức (2) chỉ sử dụng để tính diện tích của hình phẳng được xác định bởi đồ thị của hai hàm số f, g và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$.

Trong trường hợp hình phẳng (H) được xác định bởi nhiều hơn hai đồ thị của hàm số: $y = f(x)$; $y = g(x)$; $y = h(x)$; …

Khi đó muốn tính diện tích của (H) thì ta phải vẽ hình (H) (tức là vẽ các đường xác định (H)). Dựa vào hình vẽ của hình (H) ta chia hình (H) thành các hình đơn giản hơn mà ta đã biết cách tính ở trên.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

(P_1): $y = x^2 + x - 2$; (P_2): $y = x^2$ và (d): $y = x + 2$.

Giải

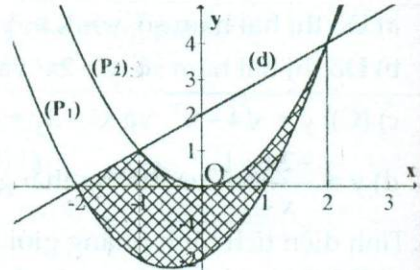
* Phương trình hoành độ giao điểm của (P_1) và (P_2) là:

$x^2 + x - 2 = x^2 \Leftrightarrow x = 2.$

* Phương trình hoành độ giao điểm của (P_2) và (d) là:

$x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2$

$\Leftrightarrow x = -1$ hay $x = 2.$



* Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P_1) là:

$x + 2 = x^2 + x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2.$

* Hình biểu diễn như sau:

* Theo hình vẽ ta suy ra diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = \int_{-2}^{-1}(y_d - y_{P_1})dx + \int_{-1}^{2}(y_{P_2} - y_{P_1})dx = \int_{-2}^{-1}(4 - x^2)dx + \int_{-1}^{2}(2 - x)dx$$

$$= \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{-1} + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} = \frac{37}{6}.$$

Ví dụ 2: Tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị (C): $y = \sqrt{x}$, và đường thẳng (d): $y = x - 2$ và đường thẳng (D): $y = -x$.

Giải

* Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là:

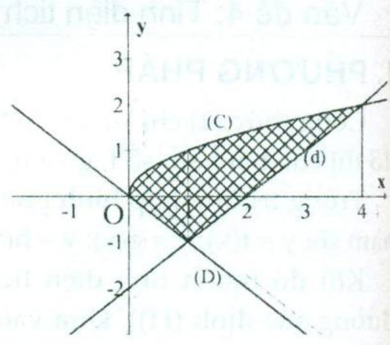
$\sqrt{x} = x - 2 \Leftrightarrow x = 4.$

* Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (D) là: $-x = x - 2 \Leftrightarrow x = 1.$

* Phương trình hoành độ giao điểm của (D) và (C) là: $\sqrt{x} = -x \Leftrightarrow x = 0.$

* Hình biểu diễn như hình bên.

* Theo hình vẽ ta suy ra diện tích hình phẳng cần tìm là:



$$S = \int_0^1(y_C - y_D)dx + \int_1^4(y_C - y_d)dx$$

$$= \int_0^1(\sqrt{x} + x)dx + \int_1^4(\sqrt{x} - x + 2)dx$$

$$= \left[\frac{2x\sqrt{x}}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{2x\sqrt{x}}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^4 = \frac{13}{3}.$$

3. BÀI TẬP

1. Hãy vẽ và tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

a) (P): $y = x^2 - 2x + 2$, trục Oy và tiếp tuyến với (P) tại điểm M(3; 5)

b) (P): $y = x^2 - 2x$ và hai tiếp tuyến của (P) vẽ từ điểm A(2; –9)

c) (P): $y = x^2 - 1$ và hai tiếp tuyến của (P) tại 2 điểm A(–1; 0) và B(2; 3).

2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau:

a) $y = x^2$, $y = \dfrac{x^2}{27}$ và $y = \dfrac{27}{x}$.

b) $y = x^2$, $y = \dfrac{x^3}{8}$ và $y = \dfrac{8}{x}$.

c) $y = |x|$ và đường $y = x^2 - 2$

3. Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số

$$y = \left|x^2 - 4x + 3\right| \text{ và } y = x + 3.$$

4. Cho parabol (P); $y = x^2 - 2x$. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi (P) và các tiếp tuyến của (P) đi qua điểm A(0; – 4).

5. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường (P): $y = x^2 - 4x + 5$ và hai tiếp tuyến của (P) tại hai điểm A(1; 2) và B(4; 5).

6. Xét hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường (P): $y = (x + 3)^2$, $y = 0$, $x = 0$. Viết phương trình hai đường thẳng đi qua điểm A(0; 9) và chia (H) thành ba phần bằng nhau.

Vấn đề 5: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = f(y)$, $x = g(y)$, $y = a$ và $y = b$ $(a < b)$

1. PHƯƠNG PHÁP

Trong các bài toán ở các vấn đề 1, 2, 3, 4. Diện tích hình phẳng được biểu thị bằng các tích phân mà biến tích phân là x.

Tương tự với các trường hợp ta đã biết ở trên, trong nhiều trường hợp nếu ta coi x là hàm của biến y thì diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $x = g(y)$, $x = h(y)$ và hai đường thẳng $y = a$, $y = b$ $(a < b)$ là:

$$\boxed{S = \int_c^d \left|g(y) - h(y)\right| dy. \quad (3)}$$

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Hãy tính diện tích hình phẳng trong ví dụ 2 (Vấn đề 4) bằng cách dùng công thức (3).

Giải

Ta có thể xem hình phẳng đã cho là hình phẳng giới hạn bởi đường cong (C): $x = y^2$, đường thẳng (d): $x = y + 2$ và đường thẳng (D): $x = -y$.

Do đó ta có thể tính ngay S theo công thức (3) như sau :

$$S=\int_{-1}^{0}(x_d-x_D)dy+\int_{0}^{2}(x_d-x_C)dy=\int_{-1}^{0}(2y+2)dy+\int_{0}^{2}(y+2-y^2)dy$$

$$=\left[y^2+2y\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{y^2}{2}+2y-\frac{y^3}{3}\right]_{0}^{2}=\frac{13}{3}.$$

Ví dụ 2: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường (P): $y^2=4x$ và (d): $y=2x-4$.

Giải

Ta có: (P): $y^2=4x \Leftrightarrow x=\dfrac{y^2}{4}$; (d): $y=2x-4 \Leftrightarrow x=\dfrac{y+4}{2}$.

* Phương trình tung độ giao điểm của (C) và (d):

$$\frac{y^2}{4}=\frac{y+4}{2} \Leftrightarrow y^2-2y-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-2 \\ y=4 \end{array}\right..$$

* Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S=\int_{-2}^{4}\left|\frac{y^2}{4}-\frac{y+4}{2}\right|dy=\frac{1}{4}\int_{-2}^{4}(-y^2+2y+8)dy=\frac{1}{4}\left[-\frac{y^3}{3}+y^2+8y\right]_{-2}^{4}=9.$$

3. BÀI TẬP

1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

a) $x=y^3$, $y=1$ và $x=8$.

b) $y^2=2x$, $27y^2=8(x-1)^3$.

c) $y^2=4x$ với $y\le 0$,

$-y^2+6=2x$ với $y\le 2$ và $x=4$.

2. Cho parabol (P) $y^2=6x$ và đường tròn (C) $x^2+y^2=16$. (P) chia hình tròn (C) thành hai phần , tính diện tích của mỗi phần.

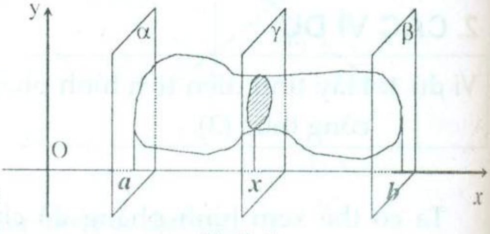
§6. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

I. Công thức tính thể tích:

Giả sử vật thể T được giới hạn bởi hai mặt phẳng song song (α) và (β).

Ta chọn trục Ox sao cho Ox vuông góc với (α) và (β). Gọi các giao điểm của Ox với (α), (β) lần lượt là a, b (a < b).



Hình 1

Xét mặt phẳng (γ) vuông góc với Ox tại điểm có hoành độ là x ($a \le x \le b$), (γ) cắt vật thể theo một thiết diện có diện tích S(x) với S(x) là hàm số liên tục trên [a, b]. (Hình 1)

Khi đó thể tích V của vật thể T được tính bởi công thức sau:

$$\boxed{V = \int_a^b S(x).dx}$$

II. Thể tích khối tròn xoay:

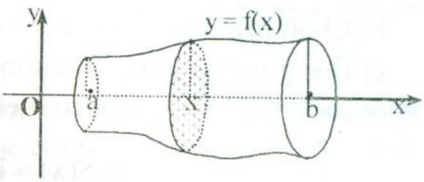
➢ Cho hàm số y = f(x) liên tục, không âm trên [a; b].

Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường:

y = f(x), y = 0, x = a và x = b (Hình 2)

quay quanh trục Ox, được tính bởi công thức:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$



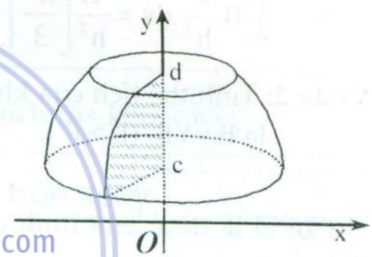
Hình 2

➢ Cho hàm số x = g(y) liên tục, không âm trên [c; d].

Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường: x = g(y), x = 0, y = c và y = d (c < d) (Hình 3)

quay quanh trục Oy, được tính bởi công thức:

$$V = \pi \int_c^d g^2(y)dy.$$



Hình 3

➢ Cho hàm số y = f(x) và y = g(x) liên tục, không âm trên [a; b] với $f(x) \ge g(x)$.

Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường: y = f(x), y = g(x), x = a và x = b (a < b)

quay quanh trục Ox, được tính bởi công thức:

$$V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]dx.$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: Tính thể tích của vật thể T

1. PHƯƠNG PHÁP

1. Giới hạn T bởi 2 mặt phẳng song song α và β.
2. Chọn trục Ox vuông góc với α, β tại a và b (a < b).
3. Dựng mặt phẳng (P) vuông góc với Ox tại x.
4. Tính diện tích thiết diện S(x) tạo bởi (P) và T.
5. Khi đó $V = \int_a^b S(x)dx$

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Tính thể tích của khối chóp (C) có diện tích đáy là B và chiều cao là h.

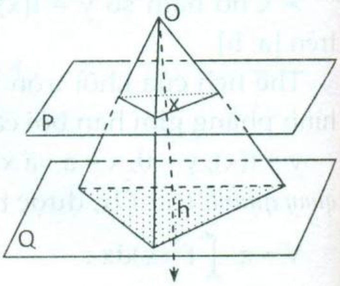
Giải

Gọi O là đỉnh hình chóp.

a) Giới hạn hình chóp bởi hai mặt phẳng (Q) chứa đáy chóp và (R) qua O và song song (Q).

b) Chọn trục Ox vuông góc với (R) và (Q) lần lượt tại O và h.

c) Dựng mặt phẳng (P) vuông góc Ox tại x, cắt hình chóp theo thiết diện có diện tích là S(x).



d) Ta có $\dfrac{S(x)}{B} = \dfrac{x^2}{h^2} \Rightarrow S(x) = B.\dfrac{x^2}{h^2}$.

e) Thể tích của khối chóp đã cho là:

$$V = \int_0^h B.\frac{x^2}{h^2}.dx = \frac{B}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{1}{3}.B.h.$$

Ví dụ 2: Tính thể tích của khối chóp cụt (T) có chiều cao là h và diện tích hai đáy là B và B′ (B > B′).

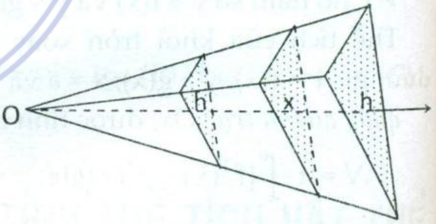
Giải

Gọi O là đỉnh của hình chóp sinh ra hình chóp cụt và h là đường cao hình chóp cụt.

a) Giới hạn hình chóp cụt bởi hai mặt phẳng (α), (β) lần lượt chứa đáy lớn và đáy nhỏ của hình chóp cụt.

b) Chọn trục Ox vuông góc (β), (α) lần lượt tại h_1 và h_2 ($h_1 < h_2$).

c) Cắt hình chóp cụt bởi mp(P) vuông góc Ox tại x ($h_1 \le x \le h_2$), ta được thiết diện có diện tích là S(x).



d) Ta có $\dfrac{S(x)}{B} = \dfrac{x^2}{h_2^2} \Rightarrow S(x) = \dfrac{x^2}{h_2^2}B$

e) Thể tích khối chóp cụt là:

$$V = \int_{h_1}^{h_2} B.\frac{x^2}{h_2^2}.dx = \frac{B}{h_2^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{h_1}^{h_2} = \frac{B}{3h_2^2}\left[h_2^3 - h_1^3\right] = \frac{1}{3}.B(h_2 - h_1)(1 + \frac{h_1}{h_2} + \frac{h_1^2}{h_2^2})$$

$$= \frac{1}{3}B.h(1 + \frac{\sqrt{B'}}{\sqrt{B}} + \frac{B'}{B}) = \frac{1}{3}h(B + \sqrt{B'.B} + B').$$

Nhận xét: Khối chóp được coi là khối chóp cụt có $B' = 0$. Vì vậy, nên ta dễ dàng kiểm chứng công thức thể tích V của khối chóp có chiều cao h và diện tích đáy S là $V = \frac{1}{3}.B.h$.

3. BÀI TẬP

1. Tính thể tích của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = -1$ và $x = 1$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x(-1 \le x \le 1)$ là một hình vuông cạnh là $2\sqrt{1-x^2}$.
2. Tính thể tích của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = \pi$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0 \le x \le \pi)$ là một tam giác đều cạnh là $2\sqrt{\sin x}$.
3. (Thể tích khối chỏm cầu). Cho khối chỏm cầu bán kính R và chiều cao h. Chứng minh rằng thể tích V của khối chỏm cầu đó là

$$V = \pi h^2 (R - \frac{h}{3})$$

Từ đó hãy suy ra thể tích của khối bán cầu và thể tích của khối cầu.

Vấn đề 2: Tính thể tích khối tròn xoay

1. PHƯƠNG PHÁP

1) Xác định hình phẳng giới hạn bởi 4 đường tạo ra khối tròn xoay.

2) Xác định công thức tính theo bảng sau:

Hình phẳng giới hạn bởi các đường:	Quay quanh trục	Thể tích vật thể tròn xoay
$x = a,\ x = b\ (a < b)$ $y = 0$ và $y = f(x)$	Ox	$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$
$y = a,\ y = b\ (a < b)$ $x = 0$ và $x = f(y)$	Oy	$V = \pi \int_a^b f^2(y)dy$
$x = a,\ x = b\ (a < b)$ $y = f(x)$ và $y = g(x)$ với $f(x) \ge g(x) \ge 0$	Ox	$V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]dx$

3) Tính tích phân, từ đó suy ra thể tích V.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = 1, x = e, y = 0$ và $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ quanh trục Ox.

Giải

Ta có : $V = \pi \int_1^e y^2 dx = \pi \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}.dx$

Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x}dx$

Đổi cận $x = 1 \Rightarrow t = 0$; $x = e \Rightarrow t = 1$.

Suy ra $V = \pi \int_0^1 t^2 dt = \pi \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{3}$ (đvtt).

Ví dụ 2: Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = 0$, $x = 2$, $y = e^x$ và $y = e^{-x+2}$ quanh trục Ox.

Giải

Ta có $V = \pi \int_0^2 \left|(e^x)^2 - (e^{-x+2})^2\right| dx = \pi \int_0^2 \left|e^{2x} - e^4.e^{-2x}\right|.dx$

Vì $f(x) = e^{2x} - e^4.e^{-2x} = \frac{e^{4x} - e^4}{e^{2x}} \begin{cases} > 0 \text{ khi } x > 1 \\ < 0 \text{ khi } x < 1 \end{cases}$ nên

$V = \pi \left[\int_0^1 (e^{-2x+4} - e^{2x})dx + \int_1^2 (e^{2x} - e^{-2x+4})dx \right]$

$= \pi \left[\frac{-e^{-2x+4} - e^{2x}}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{e^{2x} + e^{-2x+4}}{2} \right]_1^2$

$= \pi \left[\frac{-e^2 - e^2 + e^4 + 1}{2} + \frac{e^4 + 1 - e^2 - e^2}{2} \right] = \pi(e^2 - 1)^2$ (đvtt).

Ví dụ 3: Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = 0$, $y = 2$, $y = 4$ và $y = \frac{x^2}{2}$ $(x \geq 0)$ quanh trục Oy.

Giải

Ta có: $V = \pi \int_2^4 x^2 dy = \pi \int_2^4 2y dy = \pi \left[y^2 \right]_2^4 = 12\pi$ (đvtt).

Ví dụ 4: Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi cho Elip (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ quay quanh trục Ox.

Giải

Ta có thể xem khối tròn xoay trên là do hình giới hạn bởi 4 đường

$x = -a$, $x = a$, $y = 0$ và $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ quay quanh trục Ox tạo nên.

Vậy $V = \pi \int_{-a}^{a} \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)dx = \frac{\pi b^2}{a^2}\left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-a}^{a} = \frac{\pi b^2}{a^2}(2a^3 - \frac{2a^3}{3}) = \frac{4}{3}\pi ab^2$ (đvtt).

3. BÀI TẬP

1. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi trục Ox và parabol (P) $y = 2x - x^2$. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi (H) quay quanh trục hoành.

2. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C): $y = \sqrt{x}$, trục tung và đường thẳng $y = 1$. Tính thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi (H) quay quanh trục tung .

3. Cho parabol (P) $y = x^2$, $A(-1; 1)$ và $B(2; 4)$ là hai điểm thuộc (P). Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi (P) và dây cung AB của nó. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi (H) quay quanh trục Ox.

4. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = 0$, $x = 4$ và $y = \sqrt{x} - 1$. Tính thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình (H) quanh trục hoành.

5. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox , với (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường:

   a) $y = x.e^x$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 1$;

   b) $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 1$ và $x = e$;

   c) $y = \sin^2 x$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = \pi$;

   d) $y = \sqrt{\sin^6 x + \cos^6 x}$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = \dfrac{\pi}{2}$.

6. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình elip $\dfrac{x^2}{4} + y^2 \le 1$ quanh trục Ox.

7. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \dfrac{2}{x}$, $y = 1$, $y = 4$ và trục Oy .

   Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) quanh trục tung .

8. Cho hình tròn (C) tâm I(2; 0), bán kính R = 1 quay quanh Oy.Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra.

9. Cho hàm số xác định trên [0 ; 3] với $y = f(x) = \begin{cases} x \text{ nếu } 0 \le x \le 1 \\ 1 \text{ nếu } 1 \le x \le 2 \\ 3 - x \text{ nếu } 2 \le x \le 3 \end{cases}$

   a) Vẽ đồ thị của hàm số f(x).

   b) Tính $I = \int_0^3 f(x)dx$.

   c) Tính thể tích của hình tròn xoay sinh ra khi quay hình (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số f và trục Ox quanh trục Oy.

10. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi hai đường (C): $y = x^3 - 3x + 2$ và (P): $y = \sqrt{2x} + 2$. Tính thể tích của khối tròn xoay nhận được khi cho (H) quay quanh trục Ox.

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

§1. NGUYÊN HÀM

Vấn đề 1: Chứng minh F(x) là một nguyên hàm của f(x)

1. a) Ta có: $[F(x)]' = \left[\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|\right]' = \frac{1}{2a}.\frac{a-x}{a+x}.\left(\frac{a+x}{a-x}\right)'$

$= \frac{1}{2a}.\frac{a-x}{a+x}.\frac{2a}{(a-x)^2} = \frac{1}{a^2-x^2}$.

Vậy $F(x) = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{a^2-x^2}$.

b) Ta có: $[F(x)]' = \left[\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|\right]' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)'$

$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

Vậy $F(x) = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

2. a) Ta có: $[F(x)]' = x'.\sin2x + x(\sin2x)' + (\cos2x)' + (\sin^2x)'$

$= \sin2x + 2x\cos2x - 2\sin2x + 2\sin x.\cos x$

$= \sin2x + 2x\cos2x - 2\sin2x + \sin2x = 2x\cos2x = f(x)$

Vậy $F(x) = x\sin2x + \cos2x + \sin^2x$ là một nguyên hàm của $f(x) = 2x\cos2x$.

b) Ta có: $[F(x)]' = (2x)'(\ln x - 1) + 2x.(\ln x - 1)'$

$= 2(\ln x - 1) + 2x.\frac{1}{x} = 2\ln x = f(x)$.

Vậy $F(x) = 2x(\ln x - 1)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2\ln x$.

c) Ta có: $[F(x)]' = (e^x)'(\sin x + \cos x) + e^x(\sin x + \cos x)'$

$= e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) = 2e^x.\cos x = f(x)$.

Vậy $F(x) = e^x(\sin x + \cos x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2e^x\cos x$.

Vấn đề 2: Tìm họ nguyên hàm của hàm số f(x)

1. a) $\int f(x)dx = \int(3x^2-3x+5)dx = x^3 - \frac{3x^2}{2} + 5x + C$.

b) $\int f(x)dx = \int(4x^3-6x+\frac{7}{x})dx = x^4 - 3x^2 + 7\ln|x| + C$.

c) $\int f(x)dx = \int \frac{x^3+5x^2-10}{x}dx = \int (x^2+5x-\frac{10}{x})dx = \frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-10\ln|x|+C$.

d) $\int f(x)dx = \int \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{x\sqrt{x}}dx$

$$= \int \frac{x\sqrt{x}+3x+3\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}}dx = \int \left(1+\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{3}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)dx$$

$$= \int \left(1+\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{3}{x}+x^{-\frac{3}{2}}\right)dx = x+6\sqrt{x}+3\ln x+\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}+C$$

$$= x+6\sqrt{x}+3\ln x-\frac{2}{\sqrt{x}}+C.$$

e) $\int f(x)dx = \int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{x^3}\right)dx = \int \left(e^x-x^{-3}\right)dx = e^x-\frac{x^{-2}}{-2}+C = e^x+\frac{1}{2x^2}+C$.

f) $\int f(x)dx = \int 2^x\left(1+x^2 2^{-x}\right)dx = \int \left(2^x+x^2\right)dx = \frac{2^x}{\ln 2}+\frac{x^3}{3}+C$.

2.

a) $\int f(x)dx = \int \cos^2\frac{x}{2}dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos x)dx = \frac{1}{2}(x-\sin x)+C$.

b) $\int f(x)dx = \int (\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2})^2dx = \int (1-\sin x)dx = x+\cos x+C$.

c) $\int f(x)dx = \int \frac{1-3\cot^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{3}{\sin^2 x}\right)dx = \tan x+3\cot x+C$.

d) $\int f(x)dx = \int \cot^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx = -\cot x-x+C$.

3.

a) $f(x) = x(x+1)(x+2) = x^3+3x^2+2x$

$$\Rightarrow \int f(x)dx = \int \left(x^3+3x^2+2x\right)dx = \frac{x^4}{4}+x^3+x^2+C$$

b) $f(x) = (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1) = \left(\sqrt{x}\right)^3+1 = x^{\frac{3}{2}}+1$

$$\Rightarrow \int f(x)dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+x+C = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+x+C.$$

c) $f(x) = (\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt[3]{x}})^2 = x+6.\sqrt{x}.\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{9}{\sqrt[3]{x^2}} = x+6x^{\frac{1}{6}}+9x^{-\frac{2}{3}}$

$$\Rightarrow \int f(x)dx = \frac{x^2}{2} + 6.\frac{x^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}} + 9.\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = \frac{x^2}{2} + \frac{12}{7}\sqrt[6]{x^7} + 27\sqrt[3]{x} + C.$$

d) $f(x) = \dfrac{(x^2+1)(x^2-2)}{x^3} = \dfrac{x^4 - x^2 - 2}{x^3} = x - \dfrac{1}{x} - 2x^{-3}$

$$\Rightarrow \int f(x)dx = \frac{x^2}{2} - \ln|x| - 2.\frac{x^{-2}}{-2} + C = \frac{x^2}{2} - \ln|x| + \frac{1}{x^2} + C.$$

e) $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{x-1}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{\frac{2}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}$

$$\Rightarrow \int f(x)dx = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} - \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C.$$

f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - x^{-\frac{1}{3}}$

$$\Rightarrow \int f(x)dx = 2\sqrt{x} - \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = 2\sqrt{x} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C.$$

4. a) $f(x) = 5^x e^x = (5e)^x \Rightarrow \int f(x)dx = \dfrac{(5e)^x}{\ln(5e)} + C.$

b) $f(x) = (4^x - 3.7^x).2^x = 8^x - 3.14^x \Rightarrow \int f(x)dx = \dfrac{8^x}{\ln 8} - 3.\dfrac{14^x}{\ln 14} + C.$

c) $f(x) = \dfrac{(a^x - b^x)^2}{a^x b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x + \left(\dfrac{b}{a}\right)^x - 2$

$$\Rightarrow \int f(x)dx = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x}{\ln\frac{a}{b}} + \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^x}{\ln\frac{b}{a}} + C = \frac{1}{\ln a - \ln b}\left[\left(\frac{a}{b}\right)^x - \left(\frac{b}{a}\right)^x\right] + C.$$

d) $f(x) = \dfrac{e^{2x}+1}{e^x} = e^x + \left(\dfrac{1}{e}\right)^x = e^x + e^{-x} \Rightarrow \int f(x)dx = e^x - e^{-x} + C.$

e) $f(x) = (1 - e^{-x})e^x = e^x - 1 \Rightarrow \int f(x)dx = e^x - x + C.$

f) $f(x) = 2^x(3^{2x} + \pi^x) = 18^x + (2\pi)^x \Rightarrow \int f(x)dx = \dfrac{18^x}{\ln 18} + \dfrac{(2\pi)^x}{\ln(2\pi)} + C.$

5. a) $\int e^x\left(2+\frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx = \int(2e^x+\frac{1}{\cos^2 x})dx = 2e^x + \tan x + C$

b) $\int(2a^x+\sqrt{x})dx = \int(2.a^x + x^{\frac{1}{2}})dx = 2\frac{a^x}{\ln a}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C = \frac{2a^x}{\ln a}+\frac{2\sqrt{x^3}}{3}+C$.

c) $\int 20^x\left(\frac{5}{4^x}-\frac{6^x}{5^x}\right)dx = \int\left[5.5^x - 24^x\right]dx = 5.\frac{5^x}{\ln 5}-\frac{24^x}{\ln 24}+C$.

d) $\int\frac{x^{\frac{3}{4}}+2x^{\frac{1}{3}}+3x^{\frac{1}{2}}}{x}dx = \int\left(x^{-\frac{1}{4}}+2.x^{-\frac{2}{3}}+3x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$

$$= \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}}+2.\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}+3.\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}+6x^{\frac{1}{3}}+6x^{\frac{1}{2}}+C.$$

e) $\int\left(6\sin x - \frac{2}{\cos^3 x}\right)\cos x dx = \int(6\sin x\cos x - \frac{2}{\cos^2 x})dx$

$$= \int(3\sin 2x - \frac{2}{\cos^2 x})dx = -\frac{3\cos 2x}{2} - 2\tan x + C.$$

f) $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$

$$= \int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx = \tan x - \cot x + C.$$

6.

a) $f(x) = (1 + \sin x)^2 + (1 + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x + \sin^2 x + 1 + 2\cos x + \cos^2 x$

$= 3 + 2\sin x + 2\cos x$

$\Rightarrow \int f(x)dx = 3x - 2\cos x + 2\sin x + C$.

b) $f(x) = \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}$

$\Rightarrow \int f(x)dx = \int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx = -\cot x - \tan x + C.$

c) $f(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2(1-2\sin^2 x\cos^2 x) = \left(\frac{1}{\sin x\cos x}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)$

$= \frac{4}{\sin^2 2x}\left(\frac{2-\sin^2 2x}{2}\right) = \frac{4}{\sin^2 2x} - 2$

$$\Rightarrow \int f(x)dx = -4.\frac{\cot 2x}{2} - 2x + C = -2\cot 2x - 2x + C.$$

d) $f(x) = \sin^4\frac{x}{4} + \cos^4\frac{x}{4} = 1 - 2\sin^2\frac{x}{4}\cos^2\frac{x}{4} = 1 - \frac{1}{2}\sin^2\frac{x}{2}$

$$= 1 - \frac{1}{2}.\frac{1-\cos x}{2} = \frac{1}{4}(3+\cos x).$$

$$\Rightarrow \int f(x)dx = \frac{1}{4}(3x + \sin x) + C.$$

e) $f(x) = \frac{3\tan^2 x + 2}{\sin^2 x} = \frac{3}{\cos^2 x} + \frac{2}{\sin^2 x} \Rightarrow \int f(x)dx = 3\tan x - 2\cot x + C.$

f) $f(x) = (2\tan x + 3\cot x)^2 = 4\tan^2 x + 9\cot^2 x + 12$

$$= 4\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) + 9\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) + 12.$$

$$\Rightarrow \int f(x)dx = \int\left(\frac{4}{\cos^2 x} + \frac{9}{\sin^2 x} - 1\right)dx = 4\tan x - 9\cot x - x + C.$$

Vấn đề 3: Tìm một nguyên hàm F(x) của hàm số f(x) thỏa mãn điều kiện cho trước

1. Ta có F(x) là nguyên hàm của f(x)

$\Leftrightarrow F'(x) = f(x), \forall x \neq 5$

$\Leftrightarrow \frac{-5a-b}{(x-5)^2} = \frac{1}{(x-5)^2}, \forall x \neq 5 \Leftrightarrow -5a - b = 1$ (1)

Mặt khác $F(6) = 8 \Leftrightarrow 6a + b = 8$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra: $a = 9$ và $b = 46$.

Vậy $a = 9$; $b = 46$ là giá trị cần tìm.

2. Ta có: $F(x) = \int(2x^2 - x + 3)dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x + C.$

Mà đồ thị của F(x) đi qua M(6; 5) $\Leftrightarrow F(6) = 5$

$\Leftrightarrow \frac{2}{3}.6^3 - \frac{1}{2}.6^2 + 3.6 + C = 5 \Leftrightarrow C = -139.$

Vậy $F(x) = \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x - 139$ là hàm số cần tìm.

3. Ta có: F(x) là nguyên hàm của f(x)

$\Leftrightarrow F'(x) = f(x), \forall x \in R.$

$\Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 6x^2 - 4x + 1, \forall x \in R$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 6 \\ 2b = -4 \\ c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 2;\ b = -2 \text{ và } c = 1.$$

Vậy $F(x) = 2x^3 - 2x^2 + x + 5$ là hàm số phải tìm.

4. Ta có $F(x) = \int f(x)dx = \int \frac{x^2 - 2x + m}{x^2}dx$ (1)

$F(x)$ đạt cực trị tại $x = 2 \Rightarrow F'(2) = 0$ mà $F'(x) = f(x)$

$\Rightarrow f(2) = 0 \Rightarrow 2^2 - 2.2 + m = 0 \Rightarrow m = 0.$

Khi đó $F'(x) = f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2} = 1 - \frac{2}{x} \Rightarrow F''(x) = \frac{4}{x^2} \neq 0$

$\Rightarrow$ Tại $x = 2$, $F(x)$ đạt cực trị.

Thay $m = 0$ vào (1) ta được:

$$F(x) = \int \frac{x^2 - 2x}{x^2}dx = \int\left(1 - \frac{2}{x}\right)dx = x - 2\ln|x| + C.$$

Ta có: $F(2) = 3 \Leftrightarrow 2 - 2\ln 2 + C = 3 \Leftrightarrow C = 1 + 2\ln 2.$

Vậy $F(x) = x - 2\ln|x| + 1 + 2\ln 2$ là hàm số cần xác định.

§2. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÌM NGUYÊN HÀM

Vấn đề 1. Phương pháp đổi biến số

1. Tính $\int f(x)dx$ với:

a) $f(x) = 4x(2x + 5)^{20} = 2[(2x + 5) - 5](2x + 5)^{20}$
$= 2(2x + 5)^{21} - 10(2x + 5)^{20}.$

Do đó: $\int f(x)dx = 2.\frac{1}{2}.\frac{(2x+5)^{22}}{22} - 10.\frac{1}{2}.\frac{(2x+5)^{21}}{21} + C$

$$= \frac{(2x+5)^{22}}{22} - \frac{5(2x+5)^{21}}{21} + C.$$

b) $f(x) = \frac{2x^2 + 3}{2x + 1} = x - \frac{1}{2} + \frac{7}{2}.\frac{1}{2x+1}$

$$\Rightarrow \int f(x)dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{7}{2}.\frac{1}{2}\ln|2x+1| + C = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{7}{4}\ln|2x+1| + C.$$

c) $f(x) = \frac{3x + 4}{\sqrt{2 + 3x}} = \frac{(3x+2) + 2}{\sqrt{3x+2}} = (3x+2)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{\sqrt{3x+2}}$

$$\Rightarrow \int f(x)dx = \frac{1}{3}.\frac{(3x+2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 2.\frac{1}{3}.2\sqrt{3x+2} + C = \frac{2}{9}\sqrt{(3x+2)^3} + \frac{4\sqrt{3x+2}}{3} + C$$

d) $f(x) = (1 - \dfrac{2}{1-3x})^2 = 1 + \dfrac{4}{3x-1} + \dfrac{4}{(3x-1)^2}$

$$\Rightarrow \int f(x)dx = x + \frac{4}{3}\ln|3x-1| + \frac{4}{3}.\frac{-1}{3x-1} + C = x + \frac{4\ln|3x-1|}{3} - \frac{4}{3(3x-1)} + C.$$

2. Tìm các họ nguyên hàm sau:

a) $\int x(2+x)^{12}dx = \int (x+2-2)(x+2)^{12}dx = \int\left[(x+2)^{13} - 2(x+2)^{12}\right]dx$

$$= \frac{(x+2)^{14}}{14} - \frac{2(x+2)^{13}}{13} + C.$$

b) $\int \dfrac{6x^3 - 4x^2 + 1}{3x-2}dx = \int (2x^2 + \dfrac{1}{3x-2})dx = \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{1}{3}\ln|3x-2| + C.$

c) $\int \dfrac{1-x^2}{x^4 - 7x^2 + 1}dx = \int \dfrac{\frac{1}{x^2} - 1}{x^2 - 7 + \frac{1}{x^2}}.dx = \int \dfrac{\frac{1}{x^2} - 1}{(\frac{1}{x} + x)^2 - 9}.dx$

Đặt: $t = x + \dfrac{1}{x} \Rightarrow dt = \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)dx$

$$\Rightarrow \int \frac{1-x^2}{x^4 - 7x^2 + 1}dx = -\int \frac{1}{t^2 - 9}dt = -\int \frac{1}{(t-3)(t+3)}dt$$

$$= -\frac{1}{6}\int\left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t+3}\right)dt = -\frac{1}{6}\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right| + C$$

$$= -\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x + \frac{1}{x} - 3}{x + \frac{1}{x} + 3}\right| + C = -\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + 3x + 1}\right| + C.$$

d) $\int x^{10}(x^{11} + 1)^{12}dx$

Đặt: $t = x^{11} + 1 \Rightarrow dt = 11x^{10}dx \Rightarrow x^{10}dx = \dfrac{dt}{11}$

$$\Rightarrow \int x^{10}(x^{11} + 1)^{12}dx = \frac{1}{11}\int t^{12}dt = \frac{t^{13}}{11.13} + C = \frac{(x^{11} + 1)^{13}}{143} + C.$$

e) $\int x^2\left(\dfrac{x^3}{18}-1\right)^5 dx$

Đặt: $t=\dfrac{x^3}{18}-1 \Rightarrow dt=\dfrac{x^2}{6}dt \Rightarrow x^2dt=6dt$

$$\Rightarrow \int x^2\left(\frac{x^3}{18}-1\right)^5 dx=\int t^5.6dt=t^6+C=\left(\frac{x^3}{18}-1\right)^6+C.$$

f) $\int \dfrac{8x^4-24}{x(x^8+3x^4+2)}dx$

Đặt $t=x^4 \Rightarrow dt=4x^3dx$.

$$\int \frac{8x^4-24}{x(x^8+3x^4+2)}dx=\int \frac{2t-6}{t(t^2+3t+2)}dt=\int \frac{2t-6}{t(t+1)(t+2)}dt \quad (*)$$

Dùng phương pháp đồng nhất thức:

$$\frac{2t-6}{t(t+1)(t+2)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t+1}+\frac{C}{t+2}=\frac{(A+B+C)t^2+(3A+2B+C)t+2A}{t(t+1)(t+2)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B+C=0 \\ 3A+2B+C=2 \\ 2A=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-3 \\ B=8 \\ C=-5 \end{cases} \Rightarrow \frac{2t-6}{t(t+1)(t+2)}=-\frac{3}{t}+\frac{8}{t+1}-\frac{5}{t+2} \quad (**)$$

Từ (*) và (**) ta có:

$$\int \frac{8x^4-24}{x(x^8+3x^4+2)}dx=-3\ln|t|+8\ln|t+1|-5\ln|t+2|+C$$

$$=-3\ln x^4+8\ln(x^4+1)-5\ln(x^4+2)+C.$$

g) $\int \dfrac{x}{(x-1)^2}dx=\int \dfrac{(x-1)+1}{(x-1)^2}dx=\int\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2}\right)dx$

$$=\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C.$$

h) $\int \dfrac{4x^7}{(1+x^4)^2}dx=\int \dfrac{x^4}{(1+x^4)^2}.4x^3dx$

Đặt: $t=1+x^4 \Rightarrow \begin{cases} dt=4x^3dx \\ x^4=t-1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \int \frac{4x^7}{(1+x^4)^2}dx=\int \frac{t-1}{t^2}dt=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$=\ln|t|+\frac{1}{t}+C=\ln|1+x^4|+\frac{1}{1+x^4}+C.$$

i) $\int \frac{dx}{x^4(1-x^2)} = \int \frac{x^2+(1-x^2)}{x^4(1-x^2)}dx = \int\left(\frac{1}{x^2(1-x^2)}+\frac{1}{x^4}\right)dx$

$= \int\left(\frac{x^2+(1-x^2)}{x^2(1-x^2)}+\frac{1}{x^4}\right)dx = \int\left(\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)dx$

$= \int\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)dx$

$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + C.$

k) $\int \frac{1}{(4x^2-12x+9)(4x^2-12x+5)}dx$

$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{4x^2-12x+5}dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{4x^2-12x+9}dx$

$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{(2x-5)(2x-1)}dt - \frac{1}{4}\int \frac{1}{(2x-3)^2}dx$

$= \frac{1}{16}\int\left(\frac{1}{2x-5}-\frac{1}{2x-1}\right)dt - \frac{1}{4}\int \frac{1}{(2x-3)^2}dx$

$= \frac{1}{32}\ln\left|\frac{2x-5}{2x-1}\right| + \frac{1}{8}.\frac{1}{2x-3} + C$

l) $\int \frac{4}{x(x-2)(x+2)}dx$

Giả sử $\frac{4}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}$, $\forall\ x \neq 0, x \neq 2$ và $x \neq -2$

$\Leftrightarrow 4 = A(x^2-4) + B(x^2+2x) + C(x^2-2x)$, $\forall\ x \neq 0, x \neq 2$ và $x \neq -2$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B+C=0 \\ 2B-2C=0 \\ -4A=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=C=\frac{1}{2} \end{cases}.$

Do đó: $\int \frac{4}{x(x-2)(x+2)}dx = \int\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{2(x-2)}+\frac{1}{2(x+2)}\right)dx$

$= -\ln|x| + \frac{1}{2}\left(\ln|x-2| + \ln|x+2|\right) + C = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-4\right| - \ln|x| + C.$

m) $\int \frac{dx}{x(x+1)(x^2+x-2)} = \int \frac{(x^2+x)-(x^2+x-2)}{x(x+1)(x^2+x-2)}dx$

$= \int\left(\frac{1}{x^2+x-2}-\frac{1}{x(x+1)}\right)dx = \int\left(\frac{1}{(x-1)(x+2)}-\frac{1}{x(x+1)}\right)dx$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{3}\frac{(x+2)-(x-1)}{(x-1)(x+2)} - \frac{x+1-x}{x(x+1)}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right) - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3(x+2)} + \frac{1}{3(x-1)}\right)dx$$

$$= \frac{1}{6}\left[-2\ln|x| + 2\ln|x+1| - \ln|x+2| + \ln|x-1|\right] + C.$$

n) $\displaystyle\int\frac{2x-3}{3x^2-2x-1}dx = \int\frac{2x-3}{(x-1)(3x+1)}dx$

$$= \frac{1}{4}\int\left(\frac{11}{3x+1} - \frac{1}{x-1}\right)dx = \frac{1}{4}\left[11\ln|3x+1| - \ln|x-1|\right] + C.$$

p) $\displaystyle\int\frac{x^5}{x^6-x^3-2}dx = \int\frac{x^3}{(x^3)^2-x^3-2}.x^2dx$

Đặt $t = x^3 \Rightarrow dt = 3x^2dx \Rightarrow x^2dx = \frac{dt}{3}$

Do đó: $\displaystyle\int\frac{x^5}{x^6-x^3-2}dx = \int\frac{t}{t^2-t-2}.dt = \int\frac{2(t+1)-(t-2)}{(t+1)(t-2)}.dt$

$$= \int\left(\frac{2}{t-2} - \frac{1}{t+1}\right)dt = 2\ln|t-2| - \ln|t+1| + C$$

$$= 2\ln|x^3-2| - \ln|x^3+1| + C.$$

q) $\displaystyle\int\frac{x^3}{x^8-16}dx = \int\frac{x^3}{(x^4)^2-4^2}dx$

Đặt $t = x^4 \Rightarrow dt = 4x^3dx \Rightarrow x^3dx = \frac{dt}{4}$.

Suy ra: $\displaystyle\int\frac{x^3}{x^8-16}dx = \int\frac{1}{t^2-4^2}.\frac{dt}{4} = \frac{1}{32}\int\frac{(t+4)-(t-4)}{(t-4)(t+4)}.dt$

$$= \frac{1}{32}\int\left(\frac{1}{t-4} - \frac{1}{t+4}\right)dt = \frac{1}{32}\left[\ln|t-4| - \ln|t+4|\right] + C = \frac{1}{32}\ln\left|\frac{x^4-4}{x^4+4}\right| + C.$$

r) $\displaystyle\int\frac{x^2}{(1-x)^{100}}dx = \int\frac{x^2-1+1}{(x-1)^{100}}dx = \int\left(\frac{x+1}{(x-1)^{99}} + \frac{1}{(x-1)^{100}}\right)dx$

$$= \int\left(\frac{x-1+2}{(x-1)^{99}} + \frac{1}{(x-1)^{100}}\right)dx = \int\left(\frac{1}{(x-1)^{98}} + \frac{2}{(x-1)^{99}} + \frac{1}{(x-1)^{100}}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{97(x-1)^{97}} - \frac{2}{98(x-1)^{98}} - \frac{1}{99(x-1)^{99}} + C.$$

s) $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx = \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}.\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx$

Đặt $t = x+\frac{1}{x} \Rightarrow dt = \left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx$

Suy ra: $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx = \int \frac{1}{t^2-2}dt = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{1}{t-\sqrt{2}} - \frac{1}{t+\sqrt{2}}\right)dt$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\ln\left|t-\sqrt{2}\right| - \ln\left|t+\sqrt{2}\right|\right] + C = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right| + C.$$

t) $\int \frac{4x^3-3x^2-2x}{(x^2+2x+2)(x^2-3x+3)}dx$

Giả sử $\frac{4x^3-3x^2-2x}{(x^2+2x+2)(x^2-3x+3)} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{Cx+D}{x^2-3x+3}$

$\Leftrightarrow (Ax+B)(x^2-3x+3)+(Cx+D)(x^2+2x+2) = 4x^3-3x^2-2x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+C=4 \\ -3A+B+2C+D=-3 \\ 3A-3B+2C+2D=-2 \\ 3B+2D=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=2 \\ C=2 \\ D=-3 \end{cases}$$

Suy ra $\int \frac{4x^3-3x^2-2x}{(x^2+2x+2)(x^2-3x+3)}dx = \int\left(\frac{2x+2}{x^2+2x+2} + \frac{2x-3}{x^2-3x+3}\right)dx$

$$= \ln\left|x^2+2x+2\right| + \ln\left|x^2-3x+3\right| + C = \ln\left|(x^2+2x+2)(x^2-3x+3)\right| + C.$$

3. Tìm các họ nguyên hàm sau:

a) $\int \frac{x^3dx}{(x^2+1)^3\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{x^2}{(x^2+1)^3}.\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

Đặt: $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow \begin{cases} dt = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx \\ t^2 = x^2+1 \Rightarrow x^2 = t^2-1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \int \frac{x^3dx}{(x^2+1)^3\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{t^2-1}{t^6}dt = \int (t^{-4}-t^{-6})dt$$

$$= \frac{t^{-3}}{-3} - \frac{t^{-5}}{-5} + C = -\frac{1}{3(\sqrt{x^2+1})^3} + \frac{1}{5\left(\sqrt{x^2+1}\right)^5} + C.$$

b) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+1}-1)^2}dx$

Đặt: $t = \sqrt{x+1} - 1 \Rightarrow \begin{cases} x+1 = (t+1)^2 \Rightarrow dx = 2(t+1)dt \\ \sqrt{x+1} = t+1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \int \frac{\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+1}-1)^2}dx = \int \frac{2(t+1)^2dt}{t^2} = 2\int \frac{t^2+2t+1}{t^2}dt$$

$$= 2\int \left(1 + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}\right)dt = 2t + 4\ln|t| - \frac{2}{t} + C$$

$$= 2\left(\sqrt{x+1}-1\right) + 4\ln\left|\sqrt{x+1}-1\right| - \frac{2}{t} + C.$$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}}dx$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1}\right)dx = \frac{1}{6}\sqrt{(2x+1)^3} - \frac{1}{6}\sqrt{(2x-1)^3} + C.$$

d) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}} = \int \frac{1}{x^3\sqrt{1+x^3}}.x^2dx.$

Đặt $t = \sqrt{1+x^3} \Rightarrow t^2 = x^3 + 1 \Rightarrow 2tdt = 3x^2dx \Rightarrow x^2dx = \frac{2}{3}tdt.$

Do đó $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}} = \int \frac{1}{(t^2-1).t}.\frac{2}{3}tdt = \frac{1}{3}\int \frac{2}{t^2-1}dt = \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt$

$$= \frac{1}{3}\left[\ln|t-1| - \ln|t+1|\right] + C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{x^3+1}-1}{\sqrt{x^3+1}+1}\right| + C.$$

e) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}.\frac{dx}{\sqrt{x}}$

Đặt $t = \sqrt{1+\sqrt{x}} \Rightarrow t^2 = 1 + \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} = t^2 - 1$

$\Rightarrow \frac{dx}{2\sqrt{x}} = 2tdt \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = 4tdt.$

Suy ra $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}dx = \int \frac{t^2-1}{t}.4tdt = \int (4t^2-4)dt$

$$= \frac{4t^3}{3} - 4t + C = \frac{4}{3}\sqrt{1+\sqrt{x}} - 4\sqrt{1+\sqrt{x}} + C$$

f) $\int \frac{xdx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$

Đặt $t = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow t^2 = 1 + x^2 \Rightarrow 2tdt = 2xdx \Rightarrow tdt = xdx$.

Do đó: $\int \frac{xdx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \int \frac{tdt}{t^3} = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C$.

4. Tìm các họ nguyên hàm sau:

a) $\int x^2 e^{x^3+1}dx$

Đặt: $t = x^3 + 1 \Rightarrow dt = 3x^2 dx \Rightarrow x^2dt = \frac{dt}{3}$

$$\Rightarrow \int x^2 e^{x^3+1}dx = \int e^t \frac{dt}{3} = \frac{1}{3}e^t + C = \frac{1}{3}e^{(x^3+1)} + C.$$

b) $\int \frac{e^{2x}}{e^x+3}dx$

Đặt: $t = 3 + e^x \Rightarrow \begin{cases} dt = e^x dx \\ e^x = t-3 \end{cases}$

$$\Rightarrow \int \frac{e^{2x}dx}{3+e^x} = \int \frac{e^x.e^x dx}{3+e^x} = \int \frac{(t-3)dt}{t} = \int \left(1 - \frac{3}{t}\right)dt$$

$$= t - 3\ln|t| + C = 3 + e^x - 3\ln(3+e^x) + C$$

c) $\int \frac{e^{\frac{2}{x}}}{x^2}dx$

Đặt $t = \frac{2}{x} \Rightarrow dt = -\frac{2}{x^2}dx$

$$\Rightarrow \int \frac{e^{\frac{2}{x}}}{x^2}dx = \int e^t.\left(-\frac{1}{2}dt\right) = -\frac{1}{2}e^t + C = -\frac{1}{2}e^{\frac{2}{x}} + C.$$

d) $\int e^{x\sin x + \cos x} x\cos x dx$

Đặt $t = x\sin x + \cos x \Rightarrow dt = (x'\sin x + x\cos x - \sin x)dx = (x\cos x)dx$

$$\Rightarrow \int e^{x\sin x+\cos x} x\cos x dx = \int e^t dt = e^t + C = e^{x\sin x+\cos x} + C.$$

e) $\int\left(e^{2x+4}-e^{2-5x}\right)dx=\frac{1}{2}e^{2x+4}+\frac{1}{5}e^{2-5x}+C$.

f) $\int(x+1)e^{x^2+2x}dx$

Đặt $t=x^2+2x\Rightarrow dt=2(x+1)dx$

Suy ra $\int(x+1)e^{x^2+2x}dx=\int e^t.\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}e^t+C=\frac{1}{2}e^{x^2+2x}+C$.

g) $\int\frac{dx}{e^x-e^{-x}}=\int\frac{1}{e^x-\frac{1}{e^x}}dx=\int\frac{e^xdx}{e^{2x}-1}$.

Đặt $t=e^x\Rightarrow dt=e^xdx$.

Do đó $\int\frac{dx}{e^x-e^{-x}}=\int\frac{dt}{t^2-1}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|+C.$$

h) $\int\frac{6^x}{9^x-4^x}dx=\int\frac{1}{\left(\frac{9}{4}\right)^x-1}.\left(\frac{6}{4}\right)^x dx=\int\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-1}\left(\frac{3}{2}\right)^x dx$.

Đặt $t=\left(\frac{3}{2}\right)^x\Rightarrow dt=\left(\frac{3}{2}\right)^x\ln\frac{3}{2}dx$.

Do đó: $\int\frac{6^x}{9^x-4^x}dx=\int\frac{1}{t^2-1}.\frac{dt}{\ln\frac{3}{2}}=\int\frac{1}{2\ln\frac{3}{2}}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$

$$=\frac{1}{2\ln\frac{3}{2}}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\frac{1}{2\ln\frac{3}{2}}\ln\left|\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x-1}{\left(\frac{3}{2}\right)^x+1}\right|+C=\frac{1}{2\ln\frac{3}{2}}\ln\left|\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}\right|+C.$$

i) $\int\frac{e^{2x}dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}=\int\frac{e^{2x}\left(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x}\right)}{(1+e^x)-(1-e^x)}dx$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x}\right).e^xdx.$$

Đặt $t=e^x\Rightarrow dt=e^xdx$.

Suy ra $\int\frac{e^{2x}dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}=\frac{1}{2}\int\left(\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}\right)dt$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2(1+t)^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{2(1-t)^{\frac{3}{2}}}{3}\right] + C = \frac{1}{3}\left(\sqrt{(1+e^x)^3} + \sqrt{(1-e^x)^3}\right) + C.$$

k) $\int e^{\sin x+1}\cos x dx$

Đặt $t = \sin x + 1 \Rightarrow dt = \cos x dx$.

Suy ra $\int e^{\sin x+1}\cos x dx = \int e^t dt = e^t + C = e^{\sin x+1} + C$.

5. Tìm các họ nguyên hàm sau:

a) $\int \frac{\ln(1+x) - \ln x}{x(1+x)}dx$

Đặt: $t = \ln(1+x) - \ln x \Rightarrow dt = \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{x}\right)dx = -\frac{dx}{x(1+x)}$

$$\Rightarrow \int \frac{\ln(1+x) - \ln x}{x(1+x)}dx = -\int t dt = -\frac{t^2}{2} + C = -\frac{1}{2}\left[\ln(1+x) - \ln x\right] + C.$$

b) $\int \frac{1}{x.\ln x}dx$.

Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$.

Suy ra $\int \frac{1}{x.\ln x}dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\ln x| + C$

c) $\int \frac{1}{x.\ln^5 x}dx$

Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$.

Suy ra $\int \frac{1}{x.\ln^5 x}dx = \int \frac{dt}{t^5} = -\frac{1}{4t^4} + C = -\frac{1}{4\ln^4 x} + C$

d) $\int \frac{1}{x.\sqrt{\ln x}}dx$

Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$.

Suy ra $\int \frac{1}{x.\sqrt{\ln x}}dx = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{\ln x} + C$

6. Tìm các họ nguyên hàm sau:

a) $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}dx$

Đặt: $t = \frac{1}{x} \Rightarrow dt = -\frac{1}{x^2}dx$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}dx = -\int \sin t.\cos t.dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int \sin 2t.dt = \frac{1}{4}\cos 2t + C = \frac{1}{4}\cos\frac{2}{x} + C.$$

b) $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos x} = \int \frac{\cos xdx}{\sin^4 x(1-\sin^2 x)}$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos xdx$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sin^4 x\cos x} = \int \frac{dt}{t^4(1-t^2)}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{1}{t} - \frac{1}{3t^3} + C \quad \text{(kết quả bài tập 3.)}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right| - \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x} + C$$

c) $\int \frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx$

Đặt $t = 1+\cos^2 x \Rightarrow \begin{cases} dt = -2\sin x\cos xdx \\ \cos^2 x = t-1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \int \frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{(t-1)dt}{t} = -\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{t}\right)dt$$

$$= -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\ln|t| + C = -\frac{1}{2}(1+\cos^2 x) + \frac{1}{2}\ln\left|1+\cos^2 x\right| + C$$

d) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx = \int \tan^2 x(1+\tan^2 x)\frac{1}{\cos^2 x}dx$

Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x}dx$

$$\Rightarrow \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx = \int t^2(1+t^2)dt = \int\left(t^2+t^4\right)dt$$

$$= \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5} + C$$

e) $\int \frac{\sin 2xdx}{\sqrt{1+\cos x}} = \int \frac{2\cos x}{\sqrt{1+\cos x}}.\sin xdx$

Đặt : $t = \sqrt{1+\cos x} \Rightarrow t^2 = 1+\cos x \Rightarrow \begin{cases} 2tdt = -\sin xdx \\ \cos x = t^2-1 \end{cases}$

Suy ra: $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1+\cos x}} = -\int \frac{(t^2-1)tdt}{t} = -\int (t^2-1)dt$

$$= t - \frac{t^3}{3} + C = \sqrt{1+\cos x} - \frac{1}{3}\sqrt{(1+\cos x)^3} + C.$$

f) $\int \sin^5 \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3} dx$

Đặt $t = \sin\frac{x}{3} \Rightarrow dt = \frac{1}{3}\cos\frac{x}{3}dx$.

Suy ra $\int \sin^5 \frac{x}{3} \cos\frac{x}{3} dx = \int t^5.3dt = \frac{3t^6}{6} + C = \frac{1}{2}\sin^6\frac{x}{3} + C$.

g) $\int \sin 7x.\cos 5x.\cos x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 12x + \sin 2x)\cos x dx$

$$= \frac{1}{4}\int (2\sin 12x \cos x + 2\sin 2x \cos x) dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (\sin 13x + \sin 11x + \sin 3x + \sin x) dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\frac{\cos 13x}{13} - \frac{\cos 11x}{11} - \frac{\cos 3x}{3} - \cos x\right] + C.$$

h) $\int \frac{1 + 2\sin x.\cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x + \cos x} dx$

$$= \int (\sin x + \cos x)dx = -\cos x + \sin x + C.$$

i) $\int \frac{\cos x - \sin x}{1 + \sin 2x} dx = \int \frac{\cos x - \sin x}{(\sin x + \cos x)^2} dx$

Đặt $t = \sin x + \cos x \Rightarrow dt = (\cos x - \sin x)dx$.

Suy ra $\int \frac{\cos x - \sin x}{1+\sin 2x} dx = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\sin x + \cos x} + C$.

k) $\int \frac{dx}{\cos^4 x - \sin^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx = \int \frac{1}{1-\tan^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx$.

Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$.

Suy ra $\int \frac{dx}{\cos^4 x - \sin^4 x} = \int \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{1}{2}\int \frac{(1-t)+(1+t)}{(1-t)(1+t)} dt$.

$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right) dt = \frac{1}{2}\left(\ln|1+t| - \ln|1-t|\right) + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right| + C.$$

7. Tìm các họ nguyên hàm sau:

a) $\int \frac{1}{\sin 2x}dx = \int \frac{dx}{2\sin x\cos x} = \int \frac{1}{2\tan x}.\frac{1}{\cos^2 x}dx$.

Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x}dx$.

Suy ra $\int \frac{1}{\sin 2x}dx = \int \frac{1}{2t}.dt = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln|\tan x| + C$.

b) $\int \frac{1}{\cos 2x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \int \frac{1}{1-\tan^2 x}.\frac{1}{\cos^2 x}dx$.

Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x}dx$.

Suy ra $\int \frac{dx}{\cos^4 x - \sin^4 x} = \int \frac{1}{1-t^2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{(1-t)+(1+t)}{(1-t)(1+t)}dt$.

$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right)dt = \frac{1}{2}\left(\ln|1+t| - \ln|1-t|\right) + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right| + C.$$

c) $\int \frac{1}{\cos^4 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}.\frac{1}{\cos^2 x}dx = \int (1+\tan^2 x)\frac{dx}{\cos^2 x}$.

Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x}dx$.

Suy ra $\int \frac{1}{\cos^4 x}dx = \int (1+t^2)dt = t + \frac{t^3}{3} + C = \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C$.

d) $\int \frac{1}{\cos^6 x}dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2.\frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1+\tan^2 x)^2.\frac{dx}{\cos^2 x}$

Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x}dx$.

Suy ra

$$\int \frac{1}{\cos^6 x}dx = \int (1+t^2)^2 dt = t + \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \tan x + \frac{2}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x + C.$$

e) $\int \frac{dx}{1-\cos x} = \int \frac{dx}{2\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2}.\frac{\tan\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} + C = \tan\frac{x}{2} + C$.

f) $\int \sin^4 x.\cos^3 x dx = \int \sin^4 x.\cos^2 x.\cos x dx = \int \sin^4 x\left(1-\sin^2 x\right)\cos x dx$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$.

Suy ra $\int \sin^4 x.\cos^3 x dx = \int t^4(1-t^2)dt = \int (t^4 - t^6)dt$

$$= \frac{1}{4}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + C = \frac{1}{4}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x + C.$$

g) $\int\sqrt{1+\cos^2 x}.\sin 2xdx = 2\int\sqrt{1+\cos^2 x}.\sin x\cos xdx$

Đặt $t = \sqrt{1+\cos^2 x} \Rightarrow t^2 = 1 + \cos^2 x \Rightarrow 2tdt = -2\sin x\cos xdx$.

Suy ra $\int\sqrt{1+\cos^2 x}.\sin 2xdx = -2\int t.tdt = -\frac{2t^3}{3} + C = -\frac{2}{3}\sqrt{(1+\cos^2 x)^3} + C$.

h) $\int\cos^5 xdx = \int\cos^4 x.\cos xdx = \int(1-\sin^2 x)^2.\cos xdx$.

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos xdx$.

Suy ra:

$$\int\cos^5 xdx = \int(1-t^2)^2 dt = t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \sin x - \frac{2\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

i) $\int\frac{1}{\sin^6 x}dx = \int\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)^2.\frac{dx}{\sin^2 x} = \int\left(1+\cot^2 x\right)^2.\frac{dx}{\sin^2 x}$.

Đặt $t = \cot x \Rightarrow dt = -\frac{dx}{\sin^2 x}$.

Suy ra $\int\frac{1}{\sin^6 x}dx = -\int(1+t^2)^2 dt = -t - \frac{2t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C$

$$= -\cot x - \frac{2}{3}\cot x - \frac{1}{5}\cot x + C.$$

k) $\int\frac{dx}{\sin^4 x\cos x} = \int\frac{\cos xdx}{\sin^4 x(1-\sin^2 x)}$

Đặt : $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos xdx$

$$\Rightarrow \int\frac{dx}{\sin^4 x\cos x} = \int\frac{dt}{t^4(1-t^2)} = \int\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}\right) + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^4}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{1}{t} - \frac{1}{3t^3} + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right| - \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x} + C$$

l) $\int\tan^4 xdx = \int(\tan^2 x(1+\tan^2 x) - (\tan^2 x - 1) + 1)dx$

$$= \int\tan^2 x(1+\tan^2 x)dx - \int(1+\tan^2 x)dx + x$$

$$= \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C.$$

m) $\int\tan^6 xdx = \int\left[\tan^4 x(1+\tan^2 x) - \tan^4 x\right]dx$

$$= \int\tan^4 x(1+\tan^2 x)dx - \int\tan^4 xdx$$

$$= \frac{1}{5}\tan^5 x - \frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x - x + C.$$

n) $\int \tan^5 x dx = \int \left[\tan^3 x(1+\tan^2 x) - \tan^3 x\right]dx$

$= \int \tan^3 x(1+\tan^2 x)dx - \int \tan^3 x dx$

$= \int \tan^3 x(1+\tan^2 x)dx - \int \left[\tan x(1+\tan^2 x) - \tan x\right]dx$

Mà $\int \tan^3 x(1+\tan^2 x)dx = \frac{1}{4}\tan^4 x + C$; $\int \tan x(1+\tan^2 x)dx = \frac{1}{2}\tan^2 x + C$.

và $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\ln|\cos x| + C$.

Do đó $\int \tan^5 x dx = \frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x - \ln|\cos x| + C$.

p) $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 2\sin 2x} = \int \frac{dx}{\sin^2 x - 4\sin x\cos x} = \int \frac{1}{\tan^2 x - 4\tan x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}$.

Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x}dx$.

Suy ra $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 2\sin 2x} = \int \frac{1}{t^2 - 4t}dt = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t-4} - \frac{1}{t}\right)dt$

$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-4}{t}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\tan x - 4}{\tan x}\right| + C$.

r) $\int \frac{1}{3\cos^2 x + \sin^2 x + 4\sin x.\cos x}dx$

$\int \frac{1}{3\cos^2 x + \sin^2 x + 4\sin x.\cos x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x\left(3 + \tan^2 x + 4\tan x\right)}dx$

$= \int \frac{d(\tan x)}{(\tan x + 1)(\tan x + 3)} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\tan x + 1} - \frac{1}{\tan x + 3}\right)d(\tan x)$

$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\tan x + 1}{\tan x + 3}\right| + C$.

s) $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x}dx$.

Đặt u = sinx – cosx và v = sinx + 2cosx.

Ta xác định A, B sao cho u = Av + Bv'

$\Leftrightarrow$ sinx – cosx = A(sinx + 2cosx) + B(cosx – 2sinx)

$\Leftrightarrow \begin{cases} A - 2B = 1 \\ 2A + B = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{5} \\ B = -\frac{3}{5} \end{cases}$

Suy ra: $\displaystyle\int\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+2\cos x}dx=-\frac{1}{5}\int\frac{\sin x+2\cos x}{\sin x+2\cos x}dx-\frac{3}{5}\int\frac{(\sin x+2\cos x)'}{\sin x+2\cos x}dx$

$$=-\frac{1}{5}x-\frac{3}{5}\ln\left|\sin x+2\cos x\right|+C.$$

Vấn đề 2. Phương pháp nguyên hàm từng phần

1. $\int(2x-1)e^x dx$

Đặt $u=2x-1\Rightarrow u'=2$

$v'=e^x$, chọn $v=e^x$.

Suy ra $\int(2x-1)e^x dx=(2x-1)e^x-\int 2e^x dx=(2x-1)e^x-2e^x+C$.

2. $\int(x-2)\sin 3x.dx$

Đặt $u=x-1\Rightarrow u'=1$.

$v'=\sin 3x$, chọn $v=-\dfrac{\cos 3x}{3}$.

Suy ra $\displaystyle\int(x-2)\sin 3x.dx=-\frac{1}{3}(x-2)\cos 3x+\frac{1}{3}\int\cos 3x dx$

$$=-\frac{1}{3}(x-2)\cos 3x+\frac{1}{9}\sin 3x+C.$$

3. $\displaystyle\int x.\sin^2 x.dx=\frac{1}{2}\int x(1-\cos 2x)dx=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\int x\cos 2x dx$.

Đặt $u=x\Rightarrow u'=1$.

$v'=\cos 2x$, chọn $v=\dfrac{1}{2}\sin 2x$

Suy ra $\displaystyle\int x.\sin^2 x.dx=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\int\sin 2x dx\right)$

$$=\frac{x^2}{4}-\frac{x\sin 2x}{4}-\frac{\cos 2x}{4}+C.$$

4. $\int x.\ln x dx$

Đặt $u=\ln x\Rightarrow u'=\dfrac{1}{x}$.

$v'=x\Rightarrow v=\dfrac{x^2}{2}$.

Do đó: $\displaystyle\int x.\ln x dx=\frac{x^2\ln x}{2}-\int\frac{1}{x}.\frac{x^2}{2}dx=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}+C.$

5. $\int\left(x^2+2x-1\right)e^x dx$

Đặt $u = x^2 + 2x - 1 \Rightarrow u' = 2x + 2$

$v' = e^x$, chọn $v = e^x$.

Suy ra $\int\left(x^2+2x-1\right)e^x dx = (x^2+2x-1)e^x - \int(2x+2)e^x dx$.

Đặt $u = 2x + 2 \Rightarrow u' = 2$.

$v' = e^x$, chọn $v = e^x$.

Suy ra $\int\left(x^2+2x-1\right)e^x dx = \left(x^2+2x-1\right)e^x - \left[(2x+2)e^x - 2\int e^x dx\right]$

$=\left(x^2+2x-1\right)e^x - (2x+2)e^x + 2e^x + C = (x^2-1)e^x + C.$

6. $\int \ln(x+1).dx$

Đặt $u = \ln(x+1) \Rightarrow u' = \dfrac{1}{x+1}$.

$v' = 1$, chọn $v = x + 1$.

Suy ra $\int \ln(x+1).dx = (x+1)\ln(x+1) - \int dx = (x+1)\ln(x+1) - x + C$.

7. $\int e^x(\tan^2 x + \tan x + 1).dx = \int e^x(1+\tan^2 x)dx + \int e^x \tan x dx$.

Đặt $u = \tan x \Rightarrow u' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$v' = e^x$, chọn $v = e^x$

$\Rightarrow \int e^x(\tan^2 x + \tan x + 1).dx = \int e^x(1+\tan^2 x)dx + e^x \tan x - \int \dfrac{e^x}{\cos^2 x}dx$

$= \int e^x(1+\tan^2 x)dx + e^x \tan x - \int e^x(1+\tan^2 x)dx = e^x\tan x + C.$

8. $\int \dfrac{xdx}{\cos^2 x}$

Đặt $u = x \Rightarrow u' = 1$.

$v' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, chọn $v = \tan x$.

Suy ra: $\int \dfrac{x}{\cos^2 x}dx = x\tan x - \int \tan x dx = x\tan x + \int \dfrac{(\cos x)'}{\cos x}dx$

$= x\tan x + \ln|\cos x| + C.$

9. $\int\left(2-x^2\right)\cos x dx$

Đặt $u = 2 - x^2 \Rightarrow v' = -2x$

$v' = \cos x$, chọn $v = \sin x$

Suy ra $\int\left(2-x^2\right)\cos x dx = (2 - x^2)\sin x + 2\int x \sin x dx$

Đặt $u = x \Rightarrow u' = 1$.

$v' = \sin x$, chọn $v = -\cos x$.

Do đó: $\int (2 - x^2)\cos x dx = (2 - x^2)\sin x + 2\left[-x\cos x + \int \cos x dx\right]$

$= (2 - x^2)\sin x - 2x\cos x + 2\sin x + C$.

$= (4 - x^2)\sin x - 2x\cos x + C$.

10. $\int (x-1)\ln x dx$

Đặt $u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$.

$v' = x - 1$, chọn $v = \frac{x^2}{2} - x$.

Suy ra: $\int (x-1)\ln x dx = \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\ln x - \int \left(\frac{x}{2} - 1\right)dx$

$= \frac{x^2 - 2x}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + x + C$.

11. $\int (1-x)e^x dx$

Đặt $u = 1 - x \Rightarrow u' = -1$.

$v' = e^x$, chọn $v = e^x$.

Suy ra $\int (1-x)e^x dx = (1-x)e^x + \int e^x dx$

$= (1 - x)e^x + e^x + C = (2 - x)e^x + C$.

12. $\int x\ln(x+1)dx$

Đặt $u = \ln(x + 1) \Rightarrow u' = \frac{1}{x+1}$.

$v' = x$, chọn $v = \frac{x^2 - 1}{2}$.

Suy ra: $\int x\ln(x+1)dx = \left(\frac{x^2-1}{2}\right)\ln(x+1) - \int \left(\frac{x^2-1}{2}.\frac{1}{x+1}\right)dx$

$= \frac{(x^2-1)\ln(x+1)}{2} - \frac{1}{2}\int (x-1)dx = \frac{(x^2-1)\ln(x+1)}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - x\right) + C$.

13. $\int e^{2x}\sin x dx$

Đặt $u = e^{2x} \Rightarrow u' = 2e^{2x}$.

$v' = \sin x$, chọn $v = -\cos x$.

Suy ra $\int e^{2x}\sin x dx = -e^{2x}\cos x + 2\int e^{2x}\cos x dx$.

Lại đặt $u = e^{2x} \Rightarrow u' = 2e^{2x}$.

$v' = \cos x$, chọn $v = \sin x$.

Suy ra $\int e^{2x}\sin x dx = -e^{2x}\cos x + 2\left(e^{2x}\sin x - 2\int e^{2x}\sin x dx\right)$

$\Rightarrow 5\int e^{2x}\sin x dx = e^{2x}(2\sin x - \cos x) + C$

$\Rightarrow \int e^{2x}\sin x dx = \frac{1}{5}e^{2x}(2\sin x - \cos x) + C$.

14. $\int \sin x.\ln(1+\cos x)dx$

Đặt $u = \ln(1 + \cos x) \Rightarrow u' = \frac{-\sin x}{1+\cos x}$

$v' = \sin x$, chọn $v = -\cos x - 1$.

Suy ra: $\int \sin x.\ln(1+\cos x)dx = -(1+\cos x)\ln(1+\cos x) - \int \sin x dx$

$= -(1 + \cos x)\ln(1 + \cos x) + \cos x + C.$

15. $\int x.\sin x.\cos^2 x dx$

Đặt $u = x \Rightarrow u' = 1$.

$v' = \sin x.\cos^2 x = -\cos^2 x.(\cos x)'$, chọn $v = -\frac{\cos^3 x}{3}$.

Suy ra $\int x.\sin x.\cos^2 x dx = -\frac{x\cos^3 x}{3} + \frac{1}{3}\int \cos^3 x dx$

$= -\frac{x\cos^3 x}{3} + \frac{1}{3}\int \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)dx$

$= -\frac{x\cos^3 x}{3} + \frac{1}{12}\left(\frac{\sin 3x}{3} + 3\sin x\right) + C$

16. $\int x^3 e^x dx$.

Đặt: $\begin{cases} u = x^3 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 3x^2 dx \\ v = e^x \end{cases}$

$\Rightarrow \int x^3 e^x dx = e^x x^3 - 3\int x^2 e^x dx$

Đặt: $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = e^x \end{cases}$

$\Rightarrow \int x^3 e^x dx = e^x x^3 - 3\left[e^x x^2 - 2\int x e^x dx\right] = e^x x^3 - 3e^x x^2 + 6\int x e^x dx$

Đặt: $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$

$$\Rightarrow \int x^3e^xdx = e^xx^3 - 3e^xx^2 + 6\left[xe^x - \int e^xdx\right] = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 1) + C$$

17. $\int x^2\cos 2x dx$

Đặt : $\begin{cases} u = x^2 \\ v' = \cos 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 2x \\ v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$

$$\Rightarrow \int x^2\cos 2x dx = \frac{1}{2}x^2\sin 2x - \int x\sin 2x dx$$

Đặt : $\begin{cases} u = x \\ v' = \sin 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 1 \\ v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{cases}$

$$\Rightarrow \int x^2\cos 2x dx = \frac{1}{2}x^2\sin 2x - \left[-\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}x^2\sin 2x + \frac{1}{2}x\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

18. $\int \sqrt{x}\ln x dx$

Đặt : $\begin{cases} u = \ln x \\ v' = \sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = \frac{1}{x} \\ v = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x\sqrt{x} \end{cases}$

$$\Rightarrow \int \sqrt{x}\ln x dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x - \frac{2}{3}\int \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x - \frac{4}{9}x\sqrt{x} + C$$

19. $\int x^2\ln(2x)dx$

Đặt : $\begin{cases} u = \ln 2x \\ v' = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = \frac{1}{2x} \\ v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$

$$\Rightarrow \int x^2\ln(2x)dx = \frac{x^3}{3}\ln(2x) - \frac{1}{6}\int x^2dx = \frac{x^3}{3}\ln(2x) - \frac{1}{18}x^3 + C.$$

20. $\int \sin(\ln x)dx$

Đặt : $\begin{cases} u = \sin(\ln x) \\ v' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = \frac{\cos(\ln x)}{x} \\ v = x \end{cases}$

$$\Rightarrow \int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx$$

Đặt : $\begin{cases} u = \cos(\ln x) \\ v' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = -\dfrac{\sin(\ln x)}{x} \\ v = x \end{cases}$

$$\Rightarrow \int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - \left[x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)dx\right]$$

$$\Rightarrow \int \sin(\ln x)dx = \frac{1}{2}\left[x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x)\right] + C$$

21. $\int (2x+1).\ln(x+1)dx$

Đặt: $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ v' = 2x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = \dfrac{1}{x+1} \\ v = x^2 + x \end{cases}$

$$\Rightarrow \int (2x+1).\ln(x+1)dx = (x^2+x)\ln(x+1) - \int xdx = (x^2+x)\ln(x+1) - \frac{x^2}{2} + C.$$

22. $\int \dfrac{\ln(\ln x)}{x}dx$

Đặt : $\begin{cases} u = \ln(\ln x) \\ dv = \dfrac{1}{x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x.\ln x}dx \\ v = \ln x \end{cases}$

$$\Rightarrow \int \frac{\ln(\ln x)}{x}dx = \ln x.\ln(\ln x) - \int \frac{1}{x}dx = \ln x.\ln(\ln x) + \ln x + C$$

23. $\int x.\ln^2(x+1)dx$

Đặt: $\begin{cases} u = \ln^2(x+1) \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2\ln(x+1).\dfrac{1}{x+1}dx \\ v = \dfrac{x^2-1}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \int x.\ln^2(x+1)dx = \frac{x^2-1}{2}.\ln^2(x+1) - \int (x-1)\ln(x+1)dx$$

Đặt: $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = (x-1)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x+1}dx \\ v = \dfrac{x^2-2x-3}{2} = \dfrac{(x+1)(x-3)}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \int x.\ln^2(x+1)dx = \frac{x^2-1}{2}.\ln^2(x+1) - \frac{1}{2}\left[(x+1)(x-3)\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int (x-3)dx\right]$$

$$= \frac{x^2-1}{2}.\ln^2(x+1) - \frac{1}{2}(x+1)(x-3)\ln(x+1) + \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + C.$$

24. $\int (1-\ln x)^2 dx = \int (\ln x - 1)^2 dx$

Đặt: $\begin{cases} u = (\ln x - 1)^2 \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2\dfrac{\ln x - 1}{x}dx \\ v = x \end{cases}$

$$\Rightarrow \int(\ln x - 1)^2 dx = x(\ln x - 1)^2 - 2\int(\ln x - 1)dx$$

Đặt: $\begin{cases} u = \ln x - 1 \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}dx \\ v = x \end{cases}$

$$\Rightarrow \int(\ln x - 1)^2 dx = x(\ln x - 1)^2 - 2\left[x(\ln x - 1) - \int dx\right]$$

$$= x(\ln x - 1)^2 - 2x(\ln x - 1) - x + C.$$

25. $\displaystyle\int\frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}dx$

Đặt: $\begin{cases} u = \ln(\cos x) \\ dv = \dfrac{1}{\cos^2 x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\dfrac{\sin x}{\cos x}dx = -\tan x dx \\ v = \tan x \end{cases}$

$$\Rightarrow \int\frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}dx = \tan x\ln(\cos x) + \int\tan^2 x dx$$

$$= \tan x\ln(\cos x) + \int(1 + \tan^2 x)dx - \int dx = \tan x\ln(\cos x) + \tan x - x + C$$

26. $\displaystyle\int\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$

Đặt : $\begin{cases} u = \ln\sqrt{x} \\ dv = \dfrac{1}{\sqrt{x}}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{2x}dx \\ v = 2\sqrt{x} \end{cases}$

$$\Rightarrow \int\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\ln\sqrt{x} - \int\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\ln\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + C.$$

§3. TÍCH PHÂN

Vấn đề 1: Tính tích phân bằng công thức Newton - Leibniz

1. $\displaystyle\int_0^1\left(e^{2x} + \frac{3}{x+1}\right)dx = \left[\frac{e^{2x}}{2} + 3\ln|x+1|\right]_0^1 = \frac{e^2}{2} + 3\ln 2 - \frac{1}{2}$

2. $\int_1^2\left(2^x+\frac{4}{e^{5x}}\right)dx=\int_1^2\left(2^x+4.e^{-5x}\right)dx=\left(\frac{2^x}{\ln 2}-\frac{4}{5e^{5x}}\right)\Bigg|_1^2=\frac{3}{\ln 2}-\frac{4}{5e^{10}}+\frac{4}{5^5}$.

3. $\int_{-2}^0\left(x^2-e^{-2x}\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{e^{-2x}}{2}\right]_{-2}^0=\frac{8}{3}+\frac{1-e^4}{2}=\frac{19-3e^4}{6}$.

4. $\int_1^4\left(\sqrt{x}-1\right)^2dx=\int_1^4\left(x-2\sqrt{x}+1\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{4}{3}x\sqrt{x}+x\right)\Bigg|_1^4=\frac{7}{6}$

5. $\int_1^8(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})^2dx=\int_1^8\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}.\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^8\left(x^{\frac{2}{3}}+3.x^{-\frac{1}{6}}+\frac{1}{x}\right)dx$

$$=\left(\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+\frac{18}{5}x^{\frac{5}{6}}+\ln x\right)\Bigg|_1^8=\frac{6}{5}.\sqrt[3]{8^5}+\frac{18}{5}\sqrt[6]{8^5}+\ln 8-\frac{21}{5}$$

$$=\frac{6}{5}.32+\frac{18}{5}\sqrt[3]{32}+\ln 8-\frac{21}{5}=\frac{171+54\sqrt[3]{4}+5\ln 8}{5}.$$

6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 5x.\cos 3x.\sin 2x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 8x+\cos 2x).\sin 2x\,dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 8x.\sin 2x+\cos 2x.\sin 2x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 8x.\sin 2x+\cos 2x.\sin 2x)dx$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 10x-\sin 6x+\sin 4x)dx$$

$$=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{10}\cos 10x+\frac{1}{6}\cos 6x-\frac{1}{4}\cos 4x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{30}.$$

7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(6\sin x\sin 2x\sin 3x)dx=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x(\cos x-\cos 5x)dx$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x-\sin 6x+\sin 4x)dx$$

$$=\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{6}\cos 6x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{4}\cos 4x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=1.$$

8. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\sin 2x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$

$$= -\frac{1}{2}\cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2}.$$

9. $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{1+\ln x}{x}dx = \int_1^{e^2}(1+\ln x)d(1+\ln x) = \frac{(1+\ln x)^2}{2}\Bigg|_1^{e^2} = 4.$

10. $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{(10+3x)^3} = \int_{-3}^{-1}(10+3x)^{-3}dx = -\frac{1}{6}.\frac{1}{(10+3x)^2}\Bigg|_{-3}^{-1} = \frac{8}{49}.$

11. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x+x^2} = \int_1^2 \frac{dx}{x(1+x)} = \int_1^2 \frac{(x+1-x)dx}{x(1+x)} = \int_1^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)xdx$

$$= \left[\ln|x| - \ln|x+1|\right]_1^2 = \ln 2 - (\ln 3 - \ln 2) = 2\ln 2 - \ln 3.$$

12. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2+x-2}dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{(x-1)(x+2)}dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^0\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right)dx$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\Bigg|_{-1}^0 = \frac{1}{3}\ln\frac{1}{4}.$$

13. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x - \sin x)dx$

$$= \left[\sin x + \cos x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - \sqrt{2}.$$

14. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$

$$= (\tan x - \cot x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

15. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3-2\cot^2 x}{\cos^2 x}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{3}{\cos^2 x} - \frac{2}{\sin^2 x}\right)dx = (3\tan x + 2\cot x)\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{11\sqrt{3}}{3} - 5$

16. $\int_0^1 \frac{2x^3+3x+2}{x+1} = \int_0^1 (2x^2-2x+5-\frac{3}{x+1})dx$

$$= \left[\frac{2x^3}{3} - x^2 + 5x - 3\ln|x+1|\right]_0^1 = \frac{14}{3} - 3\ln 2.$$

Vấn đề 2: Tích phân có chứa dấu trị tuyệt đối

1. $I = \int_{-1}^{3}\left(|2x+2| - |2x-2|\right)dx$

* Bảng xét dấu:

x		−1		1		3	
x + 1	−	0	+	|	+		+
x − 1	−		−	0	+		+

Suy ra:

$$I = \int_{-1}^{2}(2x+2+2x-2)dx + \int_1^3(2x+2-2x+2)dx = \int_{-1}^{2} 4x dx + \int_1^3 4dx$$

$$= \left[2x^2\right]_{-1}^{1} + \left[4x\right]_1^3 = 2 - 2 + 12 - 4 = 8.$$

2. $J = \int_{-3}^{2}\left|\frac{x}{x+4}\right|dx$

Bảng xét dấu:

x		−3		0		2	
$\frac{x}{x+4}$			−	0	+		

Do đó: $J = -\int_{-3}^{0}\frac{x}{x+4}dx + \int_0^2 \frac{x}{x+4}dx = \int_{-3}^{0}\left[-1+\frac{4}{x+4}\right]dx + \int_0^2\left[1-\frac{4}{x+4}\right]dx$

$$= \left(-x + 4\ln|x+4|\right)\Big|_{-3}^{0} + \left(x - 4\ln|x+4|\right)\Big|_0^2$$

$$= (4\ln 4 - 3) + (2 - 4\ln 6 + 4\ln 4) = -1 + 4\ln\frac{8}{3}.$$

3. $\int_{-1}^{1}(2x-1-|x|)^2 dx = \int_{-1}^{0}(3x-1)^2dx + \int_0^1 (x-1)^2dx$

$$= \frac{1}{3}\frac{(3x-1)^3}{3}\Bigg|_{-1}^{0} + \frac{(x-1)^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{9}(-1+64) + \frac{1}{3}(0+1) = \frac{22}{3}.$$

4. Ta có $e^{2x} - e^{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

Khi $x > 1$ thì $e^{2x} - e^{x+1} > 0$ và khi $x < 1$ thì $e^{2x} - e^{x+1} < 0$.

Do đó: $\int_0^{\ln 4} \left|e^{2x} - e^{x+1}\right| dx = \int_0^1 \left(e^{x+1} - e^{2x}\right) dx + \int_1^{\ln 4} \left(e^{2x} - e^{x+1}\right) dx$

$$= \left(e^{x+1} - \frac{1}{2}e^{2x}\right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{1}{2}e^{2x} - e^{x+1}\right)\Bigg|_1^{\ln 4} = \left(\frac{1}{2}e^2 - e + \frac{1}{2}\right) + \left(8 - 4e + \frac{1}{2}e^2\right)$$

$$= e^2 - 5e + \frac{17}{2}.$$

5. $\int_0^4 \left|x^2 - 2x - 3\right| dx$

Bảng xét dấu:

x		0		3		4	
$x^2 - 2x - 3$			$-$	0	$+$		

Do đó: $\int_0^4 \left|x^2 - 2x - 3\right| dx = -\int_0^3 \left(x^2 - 2x - 3\right) dx + \int_3^4 \left(x^2 - 2x - 3\right) dx$

$$= -\left(\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right)\Bigg|_0^3 + \left(\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right)\Bigg|_3^4 = 9 - \frac{20}{3} + 9 = \frac{34}{3}.$$

6. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin 2x}\, dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(\sin x - \cos x)^2}\, dx = \int_0^{\pi/2} \left|\sin x - \cos x\right| dx$.

Ta có: $\sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Khi $x \in (0; \frac{\pi}{4})$ thì $\sin x - \cos x < 0$; $x \in (\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$ thì $\sin x - \cos x > 0$;

Do đó: $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin 2x}\, dx = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin x - \cos x) dx$

$$= \left(\sin x + \cos x\right)\Big|_0^{\pi/4} + \left(-\cos x - \sin x\right)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \left(\sqrt{2} - 1\right) + \left(-1 + \sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2} - 2.$$

7. $\int_{-2}^{2} \left|x^2 - 1\right|$

Bảng xét dấu:

x		-2		-1		1		2	
$x^2 - 1$			$+$	0	$-$	0	$+$		

Do đó: $\int_{-2}^{2} \left|x^2 - 1\right| = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1) dx - \int_{-1}^{1} (x^2 - 1) dx + \int_{1}^{2} (x^2 - 1) dx$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\Bigg|_{-2}^{-1} - \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\Bigg|_{-1}^{1} + \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\Bigg|_{1}^{2} = 4$$

8. $I = \int_0^{\pi} |2\cos x|(\sin x - \cos x)dx$

Ta có: Khi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thì $\cos x > 0$ và $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ thì $\cos x < 0$.

Do đó: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x(\sin x - \cos x)dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\cos x(\sin x - \cos x)dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x - 2\cos^2 x)dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin 2x - 2\cos^2 x).dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x - \cos 2x - 1)dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin 2x - \cos 2x - 1).dx$$

$$= \left[-\frac{\cos 2x}{2} - \frac{\sin 2x}{2} - x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[-\frac{\cos 2x}{2} - \frac{\sin 2x}{2} - x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2} - \pi - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

Vấn đề 3 : Chứng minh bất đẳng thức tích phân

1. Ta có: $\forall x \in [1; 2]$: $x \le x^2 \Rightarrow e^x \le e^{x^2} \Rightarrow \int_1^2 e^x dx \le \int_1^2 e^{x^2} dx$.

2. Ta có: $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, thì:

$$0 \le \sin x \le 1 \Rightarrow \sin^{10} x \le \sin^2 x \Rightarrow \int_0^{\pi/2} \sin^{20} x dx \le \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx.$$

3. Ta có: $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, thì:

$$0 \le \cos^4 x \le 1 \Rightarrow 4 \le 4 + 3\cos^4 x \le 7 \Rightarrow \frac{1}{7} \le \frac{1}{4 + 3\cos^4 x} \le \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{7}dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4 + 3\cos^4 x} \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}dx \Rightarrow \frac{\pi}{14} \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4 + 3\cos^4 x} \le \frac{\pi}{8}.$$

4. Xét $f(x) = \sqrt{x+7} + \sqrt{11-x}$, $\forall x \in [-7; 11]$.

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+7}} - \dfrac{1}{2\sqrt{11-x}}$, $\forall x \in (-7; 11)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+7} = \sqrt{11-x} \Leftrightarrow x = 2$

Tính : $f(-7) = 3\sqrt{2}$, $f(11) = 3\sqrt{2}$, $f(2) = 6$

f là hàm số liên tục trên [–7; 11] và có đạo hàm trên khoảng (–7; 11) nên ta có:

$3\sqrt{2} \le f(x) \le 6$, $\forall x \in [-7; 11]$

$$\Rightarrow \int_{-7}^{11} 3\sqrt{2}dx \le \int_{-7}^{11} f(x)dx \le \int_{-7}^{11} 6dx \Rightarrow 54\sqrt{2} \le \int_{-7}^{11} f(x)dx \le 108$$

5. $2 \le \displaystyle\int_{-1}^{1} e^{x^2}dx \le 2e$

Ta có: $\forall x \in [-1; 1]$: $0 \le x^2 \le 1 \Rightarrow 1 \le e^{x^2} \le e$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} dx \le \int_{-1}^{1} e^{x^2}dx \le \int_{-1}^{1} edx \Rightarrow 2 \le \int_{-1}^{1} e^{x^2}dx \le 2e.$$

6. Ta có: $\forall x \in [0; 1]$: $-1 \le -x \le 0 \Rightarrow \dfrac{1}{e} \le e^{-x} \le 1 \Rightarrow 3 + \dfrac{1}{e} \le 3 + e^{-x} \le 4$

$$\Rightarrow \sqrt{3+e^{-x}} \le 2 \Rightarrow \int_0^1 \sqrt{3+e^{-x}}dx \le 2.$$

7. $\forall x \in \left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, ta có : $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \le \sin x \le 1 \Rightarrow \dfrac{1}{2} \le \sin^2 x \le 1 \Rightarrow 4 \le 3 + 2\sin^2 x \le 5$

$$\Rightarrow 2 \le \sqrt{3+2\sin^2 x} \le \sqrt{5} \Rightarrow \int_{\pi/4}^{\pi/2} 2dx \le \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{3+2\sin^2 x}dx \le \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{5}dx$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} \le \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{3+2\sin^2 x}dx \le \frac{\pi\sqrt{5}}{4}$$

8. Ta có: $\forall x \in [-1; 1]$: $-1 \le x^3 \le 1 \Rightarrow 7 \le 8 + x^3 \le 9 \Rightarrow \dfrac{1}{9} \le \dfrac{1}{8+x^3} \le \dfrac{1}{7}$

$$\Rightarrow \frac{2}{9} \le \int_{-1}^{1} \frac{dx}{8+x^3} \le \frac{2}{7}.$$

9. Xét $f(x) = x^2 - x$, f liên tục trên đoạn [0; 2]

$f'(x) = 2x - 1$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

$f(0) = 0$; $f(2) = 2$; $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{4}$.

Suy ra: $-\frac{1}{4} \le f(x) \le 2,\ \forall x \in [0;\ 2]$

$$\Rightarrow e^{-\frac{1}{4}} \le e^{f(x)} \le e^2 \Rightarrow 2e^{-\frac{1}{4}} \le \int_0^2 e^{x^2-x}dx \le 2e^2.$$

10. Ta có: $\forall\ x \in [1;\ 2]$ thì $0 \le \ln x \le \ln 2 < \ln e = 1$ nên $\ln^{2011} > \ln^{2012}$

$$\Rightarrow \int_1^2 \ln^{2011} x dx > \int_1^2 \ln^{2012} x dx.$$

11. Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số $2x;\ 1-x;\ 1-x$ ta có:

$$0 \le x(1-x)^2 = \frac{1}{2}.2x(1-x)(1-x) \le \frac{1}{2}\left(\frac{2x+1-x+1-x}{3}\right)^3 = \frac{4}{27}$$

$$\Rightarrow 0 \le \int_0^1 x(1-x)^2 dx \le \frac{4}{27}$$

12. Xét $y = f(x) = \cos^2 x + \cos x + 1$ với $x \in [0;\ \pi]$

Đặt $t = \cos x;\ x \in [0;\ \pi] \Rightarrow t \in [-1;\ 1]$. Ta được $y = t^2 + t + 1 = g(t)$

$g'(t) = 2t + 1;\ g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$

$g(-1) = 1;\ g(1) = 3$ và $g(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$

Vậy Maxy = 3 và min $y = \frac{3}{4} \Rightarrow 0 < \frac{3}{4} \le y \le 3$

$\Rightarrow \frac{1}{3} \le \frac{1}{\cos^2 x + \cos x + 1} \le \frac{4}{3}$ và $\frac{1}{\cos^2(\pi/2) + \cos(\pi/2) + 1} = 1$ khác với $\frac{1}{3}$ và $\frac{4}{3}$

nên $\frac{\pi}{3} < \int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x + \cos x + 1} < \frac{4\pi}{3}$.

§4. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

Vấn đề 1: Tính tích phân bằng quy tắc đổi biến số dạng 1.

1. a) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$

Đặt $x = 2\sin t \Rightarrow dx = 2\cos t dt$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0;\quad x = \sqrt{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$.

Suy ra: $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{4\sin^2 t}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}.2\cos t dt$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} 4\sin^2 t dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos 2t)dt \;= 2\left[t - \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 2\left[\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right].$$

b) $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} x^2\sqrt{1-x^2}dx$. Đặt $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt$

Đổi cận: $x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$; $x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$.

Suy ra: $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} x^2\sqrt{1-x^2}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t\sqrt{1-\sin^2 t}.\cos t dt$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t\cos^2 t dt = \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 2t dt = \frac{1}{8}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos 4t)dt$$

$$= \frac{1}{8}\left[t - \frac{\sin 4t}{4}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{8}\left[\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{4}\right] = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right).$$

c) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{(16+x^2)^3}}$

Đặt $x = 4\tan t \Rightarrow dx = 4(1 + \tan^2 t)dt$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 4 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$.

Suy ra: $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{(16+x^2)^3}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4(1+\tan^2 t)dt}{\sqrt{(16+16\tan^2 t)^3}}$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{16\sqrt{1+\tan^2 t}} dt = \frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t dt \;= \frac{1}{16}[\sin t]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{32}.$$

d) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$.

Đặt $x = \tan t \Rightarrow dx = (1 + \tan^2 t)dt$

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$; $x = \sqrt{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$.

Suy ra: $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(1+\tan^2 t)dt}{\tan^2 t\sqrt{1+\tan^2 t}} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2 t.\frac{1}{\cos t}}.\frac{dt}{\cos^2 t} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t}{\sin^2 t}dt$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(\sin t)}{\sin^2 t} = \left[-\frac{1}{\sin t}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} + \sqrt{2}.$$

2. a) $\int_{\sqrt{3}}^{3}\frac{dx}{x^2+3}$

Đặt $x=\sqrt{3}\tan t \Rightarrow dx=\sqrt{3}\,(1+\tan^2 t)dt$

Đổi cận: $x=\sqrt{3}\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$; $x=3\Rightarrow t=\frac{\pi}{3}$.

Suy ra: $\int_{\sqrt{3}}^{3}\frac{dx}{x^2+3}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}(1+\tan^2 t)dt}{3\tan^2 t+3}=\frac{\sqrt{3}}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}dt=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi\sqrt{3}}{36}$.

b) $\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^2+2x+2}dx=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{(x+1)^2+1^2}$.

Đặt $x+1=\tan t\Rightarrow dx=(1+\tan^2 t)dt$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$; $x=-1\Rightarrow t=0$.

Suy ra: $\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^2+2x+2}=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{(1+\tan^2 t)dt}{\tan^2 t+1}=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}dt=\frac{\pi}{4}$.

c) $\int_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}$

Đặt $x=2\sin t\Rightarrow dx=2\cos t dt$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0$; $x=2\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$.

Suy ra: $\int_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2 t}.2\cos t dt$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}4\cos^2 t dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}2(1+\cos 2t)dt=\left[2t+\sin 2t\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\pi.$$

d) $\int_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}=\int_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt{4-(x-1)^2}}$

Đặt $x-1=2\sin t\Rightarrow dx=2\cos t dt$

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=0$; $x=2\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}$.

Suy ra: $\int_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}.2\cos t dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}dt=[t]_{0}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}$.

Vấn đề 2: Tính tích phân bằng quy tắc đổi biến số dạng 2.

1. a) $\int_{0}^{1}e^{-x^2}x.dx$

Đặt $t=-x^2\Rightarrow dt=-2xdx\Rightarrow xdx=-\frac{1}{2}dt$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0$; $x=1\Rightarrow t=-1$.

Suy ra: $\int_0^1 e^{-x^2}xdx = -\frac{1}{2}\int_0^{-1} e^t dt = -\frac{1}{2}\left[e^t\right]_0^{-1} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+3\cos x}dx$

Đặt $t = 1 + 3\cos x \Rightarrow dt = -3\sin x dx \Rightarrow \sin x dx = -\frac{1}{3}dt$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 4$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$.

Suy ra: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+3\cos x}dx = \int_4^1 \frac{dt}{-3t} = -\frac{1}{3}\left[\ln|t|\right]_4^1 = \frac{1}{3}\ln 4$.

c) $\int_1^e \frac{\sqrt{2+\ln x}}{2x}dx$

Đặt $t = \sqrt{2+\ln x} \Rightarrow t^2 = 2 + \ln x \Rightarrow 2tdt = \frac{1}{x}dx \Rightarrow \frac{1}{2x}dx = tdt$.

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{2}$; $x = e \Rightarrow t = \sqrt{3}$.

Suy ra: $\int_1^e \frac{\sqrt{2+\ln x}}{2x}dx = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} t.tdt = \frac{1}{3}\left[t^3\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)$.

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{11-7\sin x-\cos^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x-7\sin x+10}dx$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$.

Do đó: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{11-7\sin x-\cos^2 x}dx = \int_0^1 \frac{dt}{t^2-7t+10}$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{(t-2)-(t-5)}{(t-2)(t-5)}dt = \frac{1}{3}\int_0^1\left(\frac{1}{t-5}-\frac{1}{t-2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{3}\left[\ln\left|\frac{t-5}{t-2}\right|\right]_0^1 = \frac{1}{3}\left(\ln 4 - \ln\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{3}\ln\frac{8}{5}.$$

2. Tính các tích phân sau:

a) $\int_0^3 \frac{x^2+1}{\sqrt{x+1}}dx$

Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x + 1 \Rightarrow 2tdx = dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = 3 \Rightarrow t = 2$.

Suy ra:

$$\int_0^3 \frac{x^2+1}{\sqrt{x+1}}dx = \int_1^2 \frac{(t^2-1)^2+1}{t}2tdt = 2\int_1^2\left(t^4-2t^2+2\right)dt = 2\left[\frac{t^5}{5}-\frac{2t^3}{3}+2t\right]_1^2 = \frac{106}{15}.$$

b) $\int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

Đặt $t = \sqrt[6]{x} \Rightarrow x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5dt$.

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 1$; $x = 64 \Rightarrow t = 2$.

Suy ra $\int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int_1^2 \frac{6t^5dt}{t^3+t^2} = \int_1^2 \frac{6t^3}{t+1}dt = 6\int_1^2\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt$

$$=6\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\right]_1^2 = 6\left(\frac{8}{3}-2+2-\ln 3\right)-6\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1-\ln 2\right)$$

$$= 11+6\ln\frac{2}{3}.$$

c) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x}$

Đặt $t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow dt = (1+\tan^2\frac{x}{2}).\frac{1}{2}dx \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$.

Suy ra: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x} = \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}.\frac{2dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{2dt}{(t+1)^2} = -\left[\frac{2}{t+1}\right]_0^1 = -1+2 = 1.$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$.

Đặt $t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow dt = (1+\tan^2\frac{x}{2}).\frac{1}{2}dx \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$.

Suy ra: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5} = \int_0^1 \frac{1}{4.\frac{2t}{1+t^2}+3\frac{1-t^2}{1+t^2}+5}.\frac{2dt}{1+t^2}$

$$= \int\frac{2dt}{8t+3-3t^2+5+5t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{t^2+4t+4} = \int_0^1 \frac{dt}{(t+2)^2} = \left[-\frac{1}{t+2}\right]_0^1 = -\frac{1}{3}+\frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

3 Tính các tích phân sau:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x.\sin x dx = A$.

Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$.

Suy ra $A = \int_1^0 -t^2dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$.

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}.\cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} d(\sin x) = \left[e^{\sin x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = e - 1$.

c) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} d(\cos x) = \left[-\ln|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \ln 2$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^3 x}{\cos 2x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^3 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^3 x}{1 - \tan^2 x}.\frac{dx}{\cos^2 x} = I.$

Đặt $t = 1 - \tan^2 x \Rightarrow dt = -2\tan x.\frac{dx}{\cos^2 x}$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1;\ x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{2}{3}$.

Suy ra: $I = -\frac{1}{2}\int_1^{\frac{2}{3}} \frac{1-t}{t}.dt = \frac{1}{2}\int_{\frac{2}{3}}^1 \left(\frac{1}{t} - 1\right)dt = \frac{1}{2}\left[\ln|t| - t\right]_{\frac{2}{3}}^1 = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)$

4 a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x.dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x.\cos x dx$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0;\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$.

Suy ra: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x.dx = \int_0^1 t^2(1-t^2)dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2}{15}$.

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx = \int_0^1 (1 - \cos^2 x)^2 \sin x dx$

Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1;\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$.

Suy ra: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx = \int_1^0 (1-t^2)^2(-dt) = \int_0^1 \left(1 - 2t^2 + t^4\right)dt = \left[\frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + t\right]_0^1 = \frac{8}{15}$.

c) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} \cos x dx$.

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$.

Đổi cận: $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{2};\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$.

Suy ra: $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1-t^2}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} - t\right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{2}$.

d) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^4 x \cos x} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x dx}{\sin^4 x \cos^2 x} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x dx}{\sin^4 x\left(1-\sin^2 x\right)}$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$.

Đổi cận: $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$; $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra: $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^4 x \cos x} = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{t^4(1-t^2)} = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{t^4-(t^4-1)}{t^4(1-t^2)} dt$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{1-t^2} + \frac{t^2+1}{t^4}\right) dt = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2(t+1)} - \frac{1}{2(t-1)}\right) dt$$

$$= \left[-\frac{1}{3t^3} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\ln|t+1| - \frac{1}{2}\ln|t-1|\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= -\frac{5\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{14}{3} + \frac{1}{2}\ln 3\right) = -\frac{5\sqrt{3}}{3} + \frac{14}{3} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{3}\right).$$

5. a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{2+\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 x}{2+\sin x} . \cos x$

Đặt $t = \sin x + 2 \Rightarrow dt = \cos x dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 2$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 3$.

Suy ra: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{2+\sin x} dx = \int_2^3 \frac{1-(t-2)^2}{t} . dt = \int_2^3 \left(-t + 4 - \frac{3}{t}\right) dt$

$$= \left[-\frac{t^2}{2} + 4t - 3\ln|t|\right]_2^3 = -\frac{9}{2} + 12 - 3\ln 3 + 2 - 8 + 3\ln 2 = \frac{3}{2} - 3\ln\frac{2}{3}.$$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\text{tg}x}{1+\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{(1+\cos x)\cos x} dx$

Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$.

Suy ra:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\text{tg}x}{1+\cos x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dt}{t(t+1)} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \left[\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|\right]_{1/2}^{1} = \ln\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{3} = \ln\frac{3}{2}.$$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x(\sin x + \cos x)} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x(\tan x + 1)}$

Đặt $t = \tan x + 1 \Rightarrow dt = \dfrac{1}{\cos^2 x}dx$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow t = 2$.

Suy ra $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x(\sin x + \cos x)} = \int_1^2 \frac{dt}{t} = \left[\ln|t|\right]_1^2 = \ln 2$.

d) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\sin^2 x - 5\sin x\cos x} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\sin^2 x(1 - 5\cot x)}$.

Đặt $t = 1 - 5\cot x \Rightarrow dt = \dfrac{5}{\sin^2 x}dx$

Đổi cận: $x = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow t = -4$; $x = \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow t = 1 - 5\sqrt{3}$.

Suy ra $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\sin^2 x - 5\sin x\cos x} = \frac{1}{5}\int_{-4}^{1-5\sqrt{3}} \frac{dt}{t} = \frac{1}{5}\left[\ln|t|\right]_{-4}^{1-5\sqrt{3}} = \frac{1}{5}\ln\frac{5\sqrt{3}-1}{4}$.

6. a) $\displaystyle\int_{\sqrt{7}}^{4} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}} = \int_{\sqrt{7}}^{4} \frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2+9}}$

Đặt $t = \sqrt{x^2+9} \Rightarrow t^2 = x^2 + 9 \Rightarrow tdt = xdx$.

Đổi cận: $x = \sqrt{7} \Rightarrow t = 4$; $x = 4 \Rightarrow t = 5$.

Suy ra:

$$\int_{\sqrt{7}}^{4} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}} = \int_4^5 \frac{tdt}{(t^2-9)t} = \frac{1}{6}\int_4^5\left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t+3}\right)dt = \frac{1}{6}\left[\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right|\right]_4^5 = \frac{1}{6}\ln\frac{7}{4}.$$

b) $\displaystyle\int_0^{\ln 6} \frac{dx}{\sqrt{e^x+3}} = \int_0^{\ln 6} \frac{e^x dx}{e^x\sqrt{e^x+3}}$.

Đặt $t = \sqrt{e^x+3} \Rightarrow t^2 = e^x + 3 \Rightarrow 2tdt = e^x dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 2$; $x = \ln 6 \Rightarrow t = 3$.

Do đó: $\displaystyle\int_0^{\ln 6} \frac{dx}{\sqrt{e^x+3}} = \int_2^3 \frac{2tdt}{(t^2-3)t} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_2^3\left(\frac{1}{t-\sqrt{3}} - \frac{1}{t+\sqrt{3}}\right)dt$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right|\right]_2^3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\ln\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} - \ln\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left(2+\sqrt{3}\right).$$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1+\cos^2 x}.\sin x\cos x dx$

Đặt $t = \cos^2 x + 1 \Rightarrow dt = -2\sin x\cos x dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 2$; $x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$.

Suy ra $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx = \int_1^2 \frac{t-1}{t}.\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int_1^2\left(1-\frac{1}{t}\right)dt = \frac{1}{2}\Big[t - \ln|t|\Big]_1^2 = \frac{1}{2}(1-\ln 2)$.

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}}dx$.

Đặt $t = a^2\sin^2x + b^2\cos^2x \Rightarrow dt = (2a^2\sin x\cos x - 2b^2\sin x\cos x)dx$

$= 2(a^2 - b^2)\sin x\cos x dx$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = b^2$; $x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = a^2$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}}dx = \int_{b^2}^{a^2}\frac{dt}{2(a^2-b^2)\sqrt{t}} = \frac{1}{a^2-b^2}.\Big[\sqrt{t}\Big]_{b^2}^{a^2} = \frac{1}{|a|+|b|}.$$

7. a) $\displaystyle\int_0^2 x^2\sqrt[3]{x^3-8}dx$

Đặt $t = \sqrt[3]{x^3-8} \Rightarrow t^3 = x^3 - 8 \Rightarrow 3t^2dt = 3x^2dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = -2$; $x = 2 \Rightarrow t = 0$.

Suy ra $\displaystyle\int_0^2 x^2\sqrt[3]{x^3-8}dx = \int_{-2}^0 t.t^2dt = \frac{1}{4}\Big[t^4\Big]_{-2}^0 = -4$.

b) $\displaystyle\int_0^1 x^5\sqrt{1-x^3}dx$

Đặt $t = \sqrt{1-x^3} \Rightarrow t^2 = 1 - x^3 \Rightarrow 2tdt = -3x^2dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = 1 \Rightarrow t = 0$.

Suy ra $\displaystyle\int_0^1 x^5\sqrt{1-x^3}dx = \int_0^1(1-t^2)t.\frac{2t}{3}dt = \frac{2}{3}\int_0^1\left(t^2-t^5\right)dt = \frac{2}{3}\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right] = \frac{4}{45}$.

c) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \int_1^{\sqrt{3}}\frac{xdx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

Đặt $t = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow t^2 = 1 + x^2 \Rightarrow tdt = xdx$.

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{2}$; $x = \sqrt{3} \Rightarrow t = 2$.

Suy ra $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \int_{\sqrt{2}}^2\frac{tdt}{(t^2-1)t} = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^2\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]_{\sqrt{2}}^2 = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{3} - \ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{3+2\sqrt{2}}{3}.$$

d) $\displaystyle\int_1^3\frac{x^3dx}{x^2-16}$

Đặt $t = x^2 - 16 \Rightarrow dt = 2xdx$.

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = -15$; $x = 3 \Rightarrow t = -7$.

Suy ra

$$\int_1^3 \frac{x^3dx}{x^2-16} = \int_{-15}^{-7} \frac{t+16}{t}.\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int_{-15}^{-7}\left(1+\frac{16}{t}\right)dt = \frac{1}{2}\Big[t+16\ln|t|\Big]_{-15}^{-7} = \frac{1}{2}\left(8+16\ln\frac{7}{15}\right).$$

e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{x+\sqrt{x^2+1}}dx = \int_0^1 \frac{x^3\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2}dx = \int_0^1\left(x^3\sqrt{x^2+1}-x^4\right)dx$

Đặt $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2+1 \Rightarrow tdt = xdx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{2}$.

Suy ra $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{x+\sqrt{x^2+1}}dx = \int_1^{\sqrt{2}}(t^2-1)t.tdt - \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1$

$$= \left[\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right]_1^{\sqrt{2}} - \frac{1}{5} = \frac{4\sqrt{2}}{5} - \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2\sqrt{2}-1}{15}.$$

f) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^3 \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}$

Đặt $t = \sqrt{x^2-1} \Rightarrow t^2 = x^2-1 \Rightarrow tdt = xdx$.

Đổi cận: $x = \sqrt{2} \Rightarrow t = 1$; $x = 3 \Rightarrow t = 2\sqrt{2}$.

Suy ra $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^3 \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}} = \int_1^{2\sqrt{2}} \frac{tdt}{t} = 2\sqrt{2}-1.$

g) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(x^5+1)} = \int_1^2 \frac{dx}{x^6\left(1+\frac{1}{x^5}\right)}$

Đặt $t = 1+\dfrac{1}{x^5} \Rightarrow dt = -\dfrac{-5}{x^6}dx \Rightarrow \dfrac{dx}{x^6} = -\dfrac{dt}{5}dx.$

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 2$; $x = 2 \Rightarrow t = \dfrac{33}{32}$.

Suy ra: $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(x^5+1)} = -\frac{1}{5}\int_2^{\frac{33}{32}}\frac{dt}{t} = -\frac{1}{5}\Big[\ln|t|\Big]_2^{\frac{33}{32}} = -\frac{1}{5}\ln\frac{33}{64}.$

h) $\displaystyle\int_1^e \frac{3\ln^2 x - 2\ln x + 5}{x}dx$

Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \dfrac{1}{x}dx.$

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 0$; $x = e \Rightarrow t = 1$.

Suy ra $\int_1^e \frac{3\ln^2 x - 2\ln x + 5}{x} = \int_0^1 (3t^2 - 2t + 5)dt = \left[t^3 - t^2 + 5t\right]_0^1 = 5$.

i) $\int_e^{e^2} \frac{6\ln^3 x - 2\ln x + 5}{x\ln x} dx$

Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x}dx$.

Đổi cận: $x = e \Rightarrow t = 1$; $x = e^2 \Rightarrow t = 2$.

Suy ra $\int_e^{e^2} \frac{6\ln^3 x - 2\ln x + 5}{x\ln x} = \int_1^2 (6t^3 - 2t + 5)dt = \left[\frac{6t^4}{4} - t^2 + 5t\right]_1^2 = \frac{49}{2}$.

c) $\int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln^2 x + 1)} dx$

Đặt $t = \ln^2 x + 1 \Rightarrow dt = \frac{2\ln x}{x}dx$.

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 1$; $x = e \Rightarrow t = 2$.

Suy ra: $\int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln^2 x + 1)} dx = \int_1^2 \frac{1}{2t}dt = \frac{1}{2}\left[\ln|t|\right]_1^2 = \frac{1}{2}\ln 2$.

8. a) $\int_0^1 \frac{4x + 2}{x^2 + x + 1} dx$

Đặt $t = x^2 + x + 1 \Rightarrow dt = (2x + 1)dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = 1 \Rightarrow t = 3$.

Suy ra: $\int_0^1 \frac{4x + 2}{x^2 + x + 1} = \int_1^3 \frac{2dt}{t} = 2\left[\ln|t|\right]_1^3 = 2\ln 3$.

b) $\int_0^1 \frac{4x + 3}{\sqrt{2x^2 + 3x + 4}} dx$

Đặt $t = 2x^2 + 3x + 4 \Rightarrow dt = (4x + 3)dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 4$; $x = 1 \Rightarrow t = 9$.

Suy ra: $\int_0^1 \frac{4x + 3}{\sqrt{2x^2 + 3x + 4}} dx = \int_4^9 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \left[2\sqrt{t}\right]_4^9 = 2.$.

c) $\int_0^1 \frac{2x^2 + 4x + 3}{x^2 + x + 1} dx = \int_0^1 \left(2 + \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}\right) dx$

Đặt $t = x^2 + x + 1 \Rightarrow dt = (2x + 1)dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = 1 \Rightarrow t = 3$.

Suy ra: $\int_0^1 \frac{2x^2 + 4x + 3}{x^2 + x + 1} dx = \left[2x\right]_0^1 + \int_1^3 \frac{dt}{t} = 2 + \left[\ln|t|\right]_1^3 = 2 + \ln 3$.

d) $\int_0^1 \frac{x^3+2x^2+7x+2}{x^2+2x+5}dx = \int_0^1 \left(x + \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\right)dx$

Đặt $t = x^2 + 2x + 5 \Rightarrow dt = (2x + 2)dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 5$; $x = 1 \Rightarrow t = 8$.

Suy ra: $\int_0^1 \frac{x^3+2x^2+7x+2}{x^2+2x+5}dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \int_5^8 \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} + \left[\ln|t|\right]_5^8 = \frac{1}{2} + \ln\frac{8}{5}$.

9. a) $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$.

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 1$; $x = 4 \Rightarrow t = 2$.

Suy ra $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int_1^2 e^t.2dt = \left[2e^t\right]_1^2 = 2(e^2 - e)$.

b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{6\tan^2 x + 2\tan x - 1}{\cos^2 x}dx$

Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 1$.

Suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{6\tan^2 x + 2\tan x - 1}{\cos^2 x}dx = \int_0^1 (6t^2 + 2t - 1)dt = \left[2t^3 + t^2 - t\right]_0^1 = 2$.

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x}$

Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 1$.

Suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}.\frac{1}{\cos^2 x}dx = \int_0^1 (1 + t^2)dt = \left[t + \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}$.

d) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x\sqrt{e^x - 1}}{e^{x+3}}dx$

Đặt $t = \sqrt{e^x - 1} \Rightarrow t^2 = e^x - 1 \Rightarrow 2tdt = e^x dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \ln 2 \Rightarrow t = 1$.

Suy ra $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x\sqrt{e^x - 1}}{e^{x+3}}dx = \frac{1}{e^3}\int_0^1 \frac{2t.tdt}{(t^2+1)} = \frac{2}{e^3}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)dt$

Đặt $t = \tan u \Rightarrow dt = (1 + \tan^2 u)du$

Đổi cận: $t = 0 \Rightarrow u = 0$; $t = 1 \Rightarrow u = \frac{\pi}{4}$.

Suy ra: $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x\sqrt{e^x - 1}}{e^{x+3}} = \frac{2}{e^3}\left(1 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+\tan^2 u)du}{\tan^2 u + 1}\right) = \frac{2}{e^3}\left(1 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} du\right) = \frac{2}{e^3}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$

e) $\int_0^1 \frac{dx}{1+2^x} = \int_0^1 \frac{2^x dx}{2^x(2^x+1)}$

Đặt $t = 2^x \Rightarrow dt = 2^x \ln 2 dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = 1 \Rightarrow t = 2$.

Suy ra $\int_0^1 \frac{dx}{1+2^x} = \frac{1}{\ln 2}\int_1^2 \frac{dt}{t(t+1)} = \frac{1}{\ln 2}\int_1^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)dt$

$$= \frac{1}{\ln 2}\left[\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|\right]_1^2 = \frac{1}{\ln 2}\left(\ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\ln 2}\ln\frac{4}{3}.$$

f) $\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{1+e^{2x}} = \int_0^1 \frac{e^{2x}dx}{e^{2x}(1+e^{2x})}$

Đặt $t = e^{2x} \Rightarrow dt = 2e^{2x} dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = \ln 2 \Rightarrow t = e^{2\ln 2} = 4$.

Suy ra $\int_0^1 \frac{dx}{1+e^{2x}} = \int_1^4 \frac{dt}{2t(t+1)} = \frac{1}{2}\int_1^4 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)dt$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|\right]_1^4 = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{4}{5} - \ln\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}.$$

10. Đặt $x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow dx = -dt$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$.

Vế trái $= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right)(-dt) = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = VP$.

Vấn đề 3: Tính tích bằng phương pháp tích phân từng phần

1. a) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2-x)\sin 3x dx = I$.

Đặt $u = 2 - x \Rightarrow u' = -1$;

$v' = \sin 3x$, chọn $v = -\frac{\cos 3x}{3}$.

Suy ra $I = -\left[\dfrac{(2-x)\cos 3x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} - \dfrac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos 3x dx = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{9}\left[\sin 3x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{9} = \dfrac{5}{9}$.

b) $\int_0^1 xe^{3x}\,dx = J$.

Đặt $u = x \Rightarrow u' = 1$;

$v' = e^{3x}$, chọn $v = \dfrac{e^{3x}}{3}$.

Suy ra $J = \left[\dfrac{xe^{3x}}{3}\right]_0^1 - \dfrac{1}{3}\int_0^1 e^{3x}dx = \dfrac{e^3}{3} - \dfrac{1}{9}\left[e^{3x}\right]_0^1 = \dfrac{e^3}{3} - \dfrac{1}{9}\left(e^3 - 1\right) = \dfrac{2e^3+1}{9}$.

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x^2-1)\cos x\,dx = K$.

Đặt $u = x^2 - 1 \Rightarrow u' = 2x$;

$v' = \cos x$, chọn $v = \sin x$.

Suy ra $K = \left[(x^2-1)\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$

Đặt $u = x \Rightarrow u' = 1$;

$v' = \sin x$, chọn $v = -\cos x$.

Suy ra $K = \left(\dfrac{\pi^2}{4} - 1\right) - 2\left(\left[-x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx\right)$

$= \left(\dfrac{\pi^2}{4} - 1\right) - 2\left(0 + \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \dfrac{\pi^2}{4} - 3.$

d) $\int_0^1 x^2e^{-x}\,dx = H$.

Đặt $u = x^2 \Rightarrow u' = 2x$;

$v' = e^{-x}$, chọn $v = -e^{-x}$.

Suy ra $H = \left[-x^2e^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 2xe^{-x}dx$

Đặt $u = 2x \Rightarrow u' = 2$;

$v' = e^{-x}$, chọn $v = -e^{-x}$.

Suy ra $H = -e^{-1} + \left[-2xe^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 2e^{-x}dx = -\dfrac{1}{e} - \dfrac{2}{e} - 2\left[e^{-x}\right]_0^1 = -\dfrac{3}{e} - \dfrac{2}{e} + 2 = 2 - \dfrac{5}{e}$.

2. a) $\int_2^5 2x\ln(x-1)dx = A$

Đặt $u = \ln(x-1) \Rightarrow u' = \dfrac{1}{x-1}$.

$v' = 2x$, chọn $v = x^2 - 1$.

Suy ra: $A = \left[(x^2-1)\ln(x-1)\right]_2^5 - \int_2^5 (x+1)dx = 24\ln 4 - \left[\dfrac{x^2}{2}+x\right]_2^5 = 24\ln 4 - \dfrac{27}{2}$.

b) $\int_0^1 x\ln(1+x^2)dx = B$.

Đặt $u = \ln(x^2+1) \Rightarrow u' = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

$v' = x$, chọn $v = \dfrac{x^2+1}{2}$.

Suy ra: $B = \left[\dfrac{(x^2+1)}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^1 - \int_0^1 xdx = \ln 2 - \left[\dfrac{x^2}{2}\right]_0^1 = \ln 2 - \dfrac{1}{2}$.

c) $\int_1^2 \dfrac{\ln x}{x^2}dx = C$.

Đặt $u = \ln x \Rightarrow u' = \dfrac{1}{x}$.

$v' = \dfrac{1}{x^2}$, chọn $v = -\dfrac{1}{x}$.

Suy ra: $C = \left[(-\dfrac{1}{x})\ln x\right]_1^2 + \int_1^2 \dfrac{1}{x^2}dx = -\dfrac{\ln 2}{2} - \left[\dfrac{1}{x}\right]_1^2 = \dfrac{1-\ln 2}{2}$.

d) $\int_0^{\sqrt{3}} \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx = D$.

Đặt $u = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) \Rightarrow u' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

$v' = 1$, chọn $v = x$.

Suy ra: $D = \left[x\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right]_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{3}\ln\left(\sqrt{3}+2\right) - E$

Đặt $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2+1 \Rightarrow tdt = xdx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = \sqrt{3} \Rightarrow t = 2$.

Do đó: $D = \sqrt{3}\ln\left(\sqrt{3}+2\right) - \int_1^2 \dfrac{tdt}{t} = \sqrt{3}\ln\left(\sqrt{3}+2\right) - 1$.

3. a) $\int_{\frac{1}{4}}^1 e^{\sqrt{x}}dx = M$.

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow dx = 2tdt$.

Đổi cận: $x = \dfrac{1}{4} \Rightarrow t = \dfrac{1}{2}$; $x = 1 \Rightarrow t = 1$.

Suy ra: M = $\int_{\frac{1}{2}}^{1} 2te^t dt$

Đặt u = 2t ⇒ u' = 2;

v' = e^t, chọn v = e^t.

Do đó: M = $\left[2te^t\right]_{\frac{1}{2}}^{1} - \int_{\frac{1}{2}}^{1} 2e^t dt = 2e - \sqrt{e} - 2\left[e^t\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = 2e - \sqrt{e} - 2(e - \sqrt{e}) = \sqrt{e}$.

b) $\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x})dx = N$.

Đặt t = $\sqrt{x}$ ⇒ $t^2 = x$ ⇒ dx = 2tdt.

Đổi cận: x = 0 ⇒ t = 0; x = π^2 ⇒ t = π.

Suy ra: N = $\int_0^{\pi} 2t\sin t dt$

Đặt u = 2t ⇒ u' = 2;

v' = sint, chọn v = –cost.

Do đó: N = $\left[-2t\cos t\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2\cos t dt = 2\pi + 2\left[\sin t\right]_0^{\pi} = 2\pi$.

$= 2e - \sqrt{e} - 2(e - \sqrt{e}) = \sqrt{e}$.

c) $\int_0^{\pi} x\sin x\cos^2 x dx = P$.

Đặt u = x ⇒ u' = 1;

v' = $\cos^2x\sin x = -\cos^2x(\cos x)'$, chọn v = $-\dfrac{\cos^3 x}{3}$.

Do đó: $P = \left[-\dfrac{x\cos^3 x}{3}\right]_0^{\pi} + \dfrac{1}{3}\int_0^{\pi}\cos^3 x dt = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{1}{3}\int_0^{\pi}\dfrac{\cos 3x + 3\cos x}{4}dt$

$= \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{1}{12}\left[\dfrac{\sin 3x}{3} + 3\sin x\right]_0^{\pi} = \dfrac{\pi}{3}$.

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x}\sin x\cos^3 x dx = Q$.

Đặt t = $\sin^2 x$ ⇒ dt = 2sinxcosx dx

Đổi cận: x = 0 ⇒ t = 0; x = $\dfrac{\pi}{2}$ ⇒ t = 1.

Suy ra: Q = $\int_0^1 e^t.(1-t).\dfrac{dt}{2}$

Đặt u = 1 – t ⇒ u' = –1;

v' = e^t, chọn v = e^t..

Do đó: $Q = \dfrac{1}{2}\left(\left[(1-t)e^t\right]_0^1 + \int_0^1 e^t dt\right) = \dfrac{1}{2}\left(-1 + \left[e^t\right]_0^1\right) = \dfrac{e-2}{2}$.

4. $I=\int_1^{e^\pi}\sin(\ln x)dx$ và $J=\int_1^{e^\pi}\cos(\ln x)dx$.

Đặt : $\begin{cases}u=\sin(\ln x)\\ dv=dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{\cos(\ln x)}{x}dx\\ v=x\end{cases}$

$$\Rightarrow I=\left[x\sin(\ln x)\right]\Big|_1^{e^\pi}-\int_1^{e^\pi}\cos(\ln x)dx=-J \qquad (1)$$

Xét J :

Đặt : $\begin{cases}u=\cos(\ln x)\\ dv=dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=-\dfrac{\sin(\ln x)}{x}dx\\ v=x\end{cases}$

$$\Rightarrow J=\left[x\cos(\ln x)\right]\Big|_1^{e^\pi}+\int_1^{e^\pi}\sin(\ln x)dx=-e^\pi-1+I \qquad (2)$$

Thế (2) vào (1) : $I=e^\pi+1-I\Rightarrow I=\dfrac{e^\pi+1}{2}\Rightarrow J=-\dfrac{e^\pi+1}{2}$

5. a) $I=\int_e^{e^2}\left(\dfrac{1}{\ln^2x}-\dfrac{1}{\ln x}\right)dx=\int_e^{e^2}\dfrac{1}{\ln^2x}dx-\int_e^{e^2}\dfrac{1}{\ln x}dx=I_1-I_2$

Xét $I_2=\int_e^{e^2}\dfrac{1}{\ln x}dx$:

Đặt : $\begin{cases}u=\dfrac{1}{\ln x}\\ dv=dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=-\dfrac{1}{x\ln^2x}dx\\ v=x\end{cases}$

$$\Rightarrow I_2=\left(\frac{x}{\ln x}\right)\Bigg|_e^{e^2}+\int_e^{e^2}\frac{1}{\ln^2x}dx=\frac{e^2}{2}-e+I_1\Rightarrow I=I_1-I_2=e-\frac{e^2}{2}.$$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan^2x+1+\tan x).e^xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan^2x+1).e^xdx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x.e^xdx=I_1+I_2$

Xét $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan^2x+1).e^xdx$

Đặt : $\begin{cases}u=e^x\\ dv=(1+\tan^2x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=e^xdx\\ v=\tan x\end{cases}$

$$\Rightarrow I_1=\left(e^x.\tan x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^x.\tan xdx=e^{\frac{\pi}{4}}-I_2$$

$$\Rightarrow I=e^{\frac{\pi}{4}}-I_2+I_2=e^{\frac{\pi}{4}}$$

6. Tính các tích phân sau:

a) $\int_0^{e-1} 2x\ln(x+1)dx = I.$

Đặt $u = \ln(x+1) \Rightarrow u' = \dfrac{1}{x+1}$.

$v' = 2x$, chọn $v = x^2 - 1$.

Suy ra: $I = \left[(x^2-1)\ln(x+1)\right]_0^{e-1} - \int_0^{e-1}(x-1)dx$

$$= (e-1)^2 - 1 - \left[\frac{(x-1)^2}{2}\right]_0^{e-1} = e^2 - 2e - \frac{e^2-4e+3}{2} = \frac{e^2-3}{2}.$$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos 4x.dx = J.$

Đặt $u = e^{2x} \Rightarrow u' = 2e^{2x}$.

$v' = \cos 4x$, chọn $v = \dfrac{\sin 4x}{4}$.

Suy ra: $J = \left[\dfrac{e^{2x}\sin 4x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(e^{2x}\sin 4x)dx = -\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(e^{2x}\sin 4x)dx.$

Đặt $u = e^{2x} \Rightarrow u' = 2e^{2x}$.

$v' = \sin 4x$, chọn $v = -\dfrac{\cos 4x}{4}$.

Do đó: $J = -\dfrac{1}{2}\left(\left[-\dfrac{e^{2x}\cos 4x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos 4xdx\right)$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{-e^{\pi}+1}{4} + \frac{1}{2}J\right) \Rightarrow J = \frac{e^{\pi}-1}{10}.$$

c) $\int_1^e (3x^2+2x)\ln xdx = K.$

Đặt $u = \ln x \Rightarrow u' = \dfrac{1}{x}$

$v' = 3x^2 + 2x$, chọn $v = x^3 + x^2$.

Suy ra $K = \left[(x^3+x^2)\ln x\right]_1^e - \int_1^e (x^2+x)dx = e^3 + e^2 - \left[\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2}\right]_1^e = \dfrac{4e^3+3e^2+5}{6}.$

d) $\int_0^1 (x^2+1)e^{2x}dx = H.$

Đặt $u = x^2 + 1 \Rightarrow u' = 2x;$

$v' = e^{2x}$, chọn $v = \dfrac{e^{2x}}{2}$.

Suy ra: $H = \left[\dfrac{(x^2+1)e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 xe^{2x}dx$.

Đặt $u = x \Rightarrow u' = 1$;

$v' = e^{2x}$, chọn $v = \dfrac{e^{2x}}{2}$.

Suy ra $H = \dfrac{2e^2-1}{2} - \left(\left[\dfrac{xe^{2x}}{2}\right]_0^1 - \dfrac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx\right)$.

$$= \frac{2e^2-1}{2} - \left(\frac{e^2}{2} - \left[\frac{e^{2x}}{4}\right]_0^1\right) = \frac{2e^2-1}{2} - \left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^2-1}{4}\right) = \frac{3e^2-3}{4}.$$

e) $\int_1^e (\ln x)^2 dx = M$.

Đặt $u = (\ln x)^2 \Rightarrow u' = \dfrac{2\ln x}{x}dx$

$v' = 1$, chọn $v = x$.

Suy ra: $M = \left[x\ln^2 x\right]_1^e - \int_1^e 2\ln x dx$

Đặt $u = \ln x \Rightarrow u' = \dfrac{1}{x}$;

$v' = 2 \Rightarrow v = 2x$.

Do đó: $M = e - \left(\left[2x\ln x\right]_1^e - \int_1^e 2dx\right) = e - \left(2e - (2e-2)\right) = e - 2$.

f) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x}dx = N$.

Đặt $u = \ln(\sin x) \Rightarrow u' = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \cot x$.

$v' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, chọn $v = \tan x$.

Suy ra: $N = \left[\tan x \ln(\sin x)\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dx = \sqrt{3}\ln\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\ln\dfrac{1}{2} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}\ln\dfrac{27}{16} - \dfrac{\pi}{6}$.

g) $\int_1^{10} x.\log^2 x.dx = P$.

Đặt $u = \log^2 x \Rightarrow u' = \dfrac{2\log x}{x\ln 10}$

$v' = x \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2}$.

Suy ra: $P = \left[\dfrac{x^2\log^2 x}{2}\right]_1^{10} - \dfrac{1}{\ln 10}\displaystyle\int_1^{10} x\log x dx$.

Đặt $u = \log x \Rightarrow u' = \dfrac{1}{x\ln 10}$;

$v' = x \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2}$.

Do đó: $P = 50 - \dfrac{1}{\ln 10}\left(\left[\dfrac{x^2\log x}{2}\right]_1^{10} - \dfrac{1}{2\ln 10}\displaystyle\int_1^{10} x dx\right)$

$= 50 - \dfrac{1}{\ln 10}\left(50 - \dfrac{1}{2\ln 10}\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_1^{10}\right) = 50 - \dfrac{1}{\ln 10}\left(50 - \dfrac{99}{4\ln 10}\right)$.

h) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{x}{\sin^2 x}.dx = Q$.

Đặt $u = x \Rightarrow u' = 1$.

$v' = \dfrac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow v = -\cot x$.

Suy ra $Q = \left[-x\cot x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot x dx$

$= -\dfrac{\pi}{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{3} + \dfrac{\pi}{4} + \left[\ln(\sin x)\right]_{\pi/4}^{\pi/3} = -\dfrac{\pi\sqrt{3}}{9} + \dfrac{\pi}{4} + \ln\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

7. a) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{(2\cos x + 1)\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx$

Đặt: $t = \sqrt{1+3\cos x} \Rightarrow t^2 = 1 + 3\cos x \Rightarrow \begin{cases} 2tdt = -3\sin x dx \Rightarrow -\dfrac{2t}{3}dt = \sin x dx \\ \cos x = \dfrac{t^2-1}{3} \end{cases}$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 2;\quad x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$

$\Rightarrow I = \dfrac{2}{3}\displaystyle\int_1^2 \left(2\dfrac{t^2-1}{3} + 1\right)dt = \dfrac{2}{9}\int_1^2 (2t^2+1)dt = \dfrac{2}{9}\left(\dfrac{2}{3}t^3 + t\right)\Bigg|_1^2 = \dfrac{34}{27}$

b) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin 2x\cos x}{1+\cos x}dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x\cos^2 x}{1+\cos x}dx$

Đặt: $t = 1 + \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 2$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$

$$\Rightarrow I = 2\int_1^2 \frac{(t-1)^2}{t}dt = 2\int_1^2\left(t - 2 + \frac{1}{t}\right)dt = 2\left(\frac{t^2}{2} - 2t + \ln|t|\right)\Big|_1^2 = 2\ln 2 - 1$$

c) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(e^{\sin x})d(\sin x) + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)dx = e^{\sin x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = e - 1 + \frac{\pi}{4}$

d) $I = \int_{\ln 3}^{\ln 5}\frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3} = \int_{\ln 3}^{\ln 5}\frac{e^x dx}{e^{2x} - 3e^x + 2}$

Đặt: $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$

Đổi cận: $\begin{cases} x = \ln 3 \Rightarrow t = 3 \\ x = \ln 5 \Rightarrow t = 5 \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_3^5 \frac{dt}{t^2 - 3t + 2} = \int_3^5 \frac{dt}{(t-1)(t-2)} = \int_3^5\left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t-1}\right)dt = \ln\left|\frac{t-2}{t-1}\right|\Big|_3^5 = \ln\frac{3}{2}.$$

e) $I = \int_0^1 (x-2)e^{2x}dx$

Đặt: $\begin{cases} u = x - 2 \\ dv = e^{2x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}(x-2)e^{2x}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx = \frac{1}{2}\left(-e^2 + 2\right) - \frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left(-e^2 + 2\right) - \frac{1}{4}\left(e^2 - 1\right) = -\frac{3}{4}e^2 + \frac{5}{4}.$$

f) $I = \int_1^e x^3 \ln^2 x dx$

Đặt: $\begin{cases} u = \ln^2 x \\ dv = x^3 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2\ln x}{x}dx \\ v = \frac{x^4}{4} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \frac{x^4}{4}\ln^2 x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x^3 \ln x dx = \frac{e^4}{4} - \frac{1}{2}J.$$

Đặt: $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^3 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}dx \\ v = \dfrac{x^4}{4} \end{cases}$

$$\Rightarrow J = \frac{x^4}{4}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{4}\int_1^e x^3 dx = \frac{e^4}{4} - \frac{1}{4}\frac{x^4}{4}\Big|_1^e = \frac{e^4}{4} - \frac{1}{16}\left(e^4 - 1\right) = \frac{3}{16}e^4 + \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow I = \frac{e^4}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{16}e^4 + \frac{1}{16}\right) = \frac{5}{32}e^4 - \frac{1}{32}.$$

g) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{\cos 2x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{1 - \tan^2 x}.\frac{1}{\cos^2 x}dx$

Đặt: $t = \tan x \Rightarrow dt = \dfrac{1}{\cos^2 x}dx$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0;\quad x = \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow t = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$$I = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{t^4}{1 - t^2}dt = -\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left(\frac{t^4 - 1}{t^2 - 1} + \frac{1}{t^2 - 1}\right)dt = -\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left[t^2 + 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t - 1} - \frac{1}{t + 1}\right)\right]dt$$

$$= -\left(\frac{t^3}{3} + t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t - 1}{t + 1}\right|\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = -\left(\frac{1}{9\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}\right) = -\left(\frac{10}{9\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}\right)$$

h) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)dx}{\sin 2x + 2\left(1 + \sin x + \cos x\right)} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin x - \cos x\right)dx}{\sin 2x + 2\left(1 + \sin x + \cos x\right)}$

Đặt: $t = \sin x + \cos x \Rightarrow \begin{cases} dt = \left(\cos x - \sin x\right)dt \\ t^2 = 1 + \sin 2x \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1 \end{cases}$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1;\quad x = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow t = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t^2 - 1 + 2\left(1 + t\right)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dt}{\left(t + 1\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{t + 1}\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2} + 1} - \frac{1}{2}\right)$$

i) $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x^3}dx$. Đặt: $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \dfrac{1}{x^3}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}dx \\ v = -\dfrac{1}{2x^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{2x^2}\ln x\Big|_1^2 + \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{x^3}dx = -\frac{1}{8}\ln 2 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Big|_1^2$$

$$= -\frac{1}{8}\ln 2 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}\ln 2 + \frac{3}{16}.$$

k) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^3 x - 1\right)\cos^2 x dx$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^3 x - 1\right)\cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2 x\right)^2 \cos x dx - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\cos 2x\right)dx = I_1 - \frac{1}{2}I_2$$

Tính I_1:

Đặt: $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$

$$\Rightarrow I_1 = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^2 dt = \int_0^1 \left(1-2t^2+t^4\right)dt = \left(t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5\right)\Big|_0^1 = \frac{8}{15}.$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\cos 2x\right)dx = \left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow I = \frac{8}{15} - \frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{8}{15} - \frac{\pi}{4}.$$

l) $I = \int_1^3 \frac{3+\ln x}{(x+1)^2}dx$

Đặt: $\begin{cases} u = 3+\ln x \\ dv = \dfrac{1}{(x+1)^2}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}dx \\ v = -\dfrac{1}{x+1} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{x+1}(3+\ln x)\Big|_1^3 + \int_1^3 \frac{1}{x(x+1)}dx = -\frac{1}{4}(3+\ln 3) + \frac{3}{2} + \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\ln 3 + \ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\Big|_1^3 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\ln 3 + \ln\frac{3}{2}.$$

m) $I = \int_1^3 \frac{dx}{e^x - 1} = \int_1^3 \frac{e^x dx}{e^x(e^x - 1)}$

Đặt: $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$

Đổi cận: $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = e \\ x = 3 \Rightarrow t = e^3 \end{cases}$

$\Rightarrow I = \int_e^{e^3} \frac{dt}{t(t-1)} = \int_e^{e^3} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right) dt = \ln\left|\frac{t-1}{t}\right|\Bigg|_e^{e^3} = \ln\left|\frac{e^3 - 1}{e^3} \cdot \frac{e}{e-1}\right|$

$= \ln \frac{e^2 + e + 1}{e^2} = \ln(e^2 + e + 1) - 2$.

n) $I = \int_1^e \left(2x - \frac{3}{x}\right) \ln x dx = \int_1^e 2x \ln x dx - \int_1^e \frac{3 \ln x}{x} dx = I_1 - I_2$.

Tính I_1:

Đặt $u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$;

$v' = 2x \Rightarrow v = x^2$.

Suy ra $I_1 = \left[x^2 \ln x\right]_1^e - \int_1^e x dx = e^2 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e = \frac{e^2 + 1}{2}$.

Tính I_2: $I_2 = \int_1^e 3 \ln x d(\ln x) = \left[\frac{3 \ln^2 x}{2}\right]_1^e = \frac{3}{2}$. Vậy $I = \frac{e^2 + 1}{2} - \frac{3}{2} = \frac{e^2 - 2}{2}$.

p) $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(2 + \ln x)^2} dx$.

Đặt $t = \ln x + 2 \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$.

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 2$; $x = e \Rightarrow t = 3$.

Suy ra $I = \int_2^3 \frac{t - 2}{t^2} dt = \left[\ln|t| + \frac{2}{t}\right]_2^3 = \ln\frac{3}{2} - \frac{1}{3}$.

q) $I = \int_0^1 \frac{x^2 + e^x + 2x^2 e^x}{1 + 2e^x} dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 \frac{e^x dx}{1 + 2e^x} = I_1 + I_2$.

* $I_1 = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$.

* I_2: Đặt $t = 1 + 2e^x \Rightarrow dt = 2e^x dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 3$; $x = 1 \Rightarrow t = 1 + 2e$.

Suy ra $I_2 = \int_3^{1+2e} \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2}\left[\ln|t|\right]_3^{1+2e} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+2e}{3}$.

Vậy $I = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+2e}{3}$.

r) $I = \int_0^4 \frac{4x-1}{\sqrt{2x+1}+2}dx$.

Đặt $t = \sqrt{2x+1} \Rightarrow t^2 = 2x + 1 \Rightarrow 2tdt = 2dx \Rightarrow dx = tdt$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = 4 \Rightarrow t = 3$.

Suy ra $I = \int_1^3 \frac{2(t^2-1)-1}{t+2}.tdt$

$= \int_1^3 \frac{2t^3-3t}{t+2}dt = \int_1^3 \left(2t^2 - 4t + 5 - \frac{10}{t+2}\right)dt$

$= \left[\frac{2t^3}{3} - 2t^2 + 5t - 10\ln|t+2|\right]_1^3 = \frac{34}{3} - 10\ln\frac{5}{3}$.

s) $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+x\sin x}{\cos^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x}dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx = I_1 + I_2$.

* $I_1 = \left[\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}$.

* I_2: Đặt $u = x \Rightarrow u' = 1$.

$v' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$, chọn $v = \frac{1}{\cos x}$.

Suy ra: $I_2 = \left[\frac{x}{\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}dx = \frac{2\pi}{3} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Do đó: $I_2 = \frac{2\pi}{3} - \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{1-t^2} = \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt$

$= \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2}\left[\ln\frac{t-1}{t+1}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\pi}{3} + \ln(2-\sqrt{3})$.

Vậy $I = \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + \ln\left(2-\sqrt{3}\right)$.

t) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(x\sin x + \cos x) + x\cos x}{x\sin x + \cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1 + \frac{x\cos x}{x\sin x + \cos x}\right)dx$

Đặt $t = x\sin x + \cos x \Rightarrow dt = x\cos x dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{\pi\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{4} + 1\right)$.

Do đó: $I = \frac{\pi}{4} + \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{4}+1\right)} \frac{dt}{t} = \frac{\pi}{4} + \left[\ln|t|\right]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{4}+1\right)} = \frac{\pi}{4} + \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{4}+1\right)\right)$

§5. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

Vấn đề 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi bốn đường: (C): y = f(x), trục Ox, x= a và x = b (a < b)

1. a) Diện tích hình phẳng là $S = \int_0^2 \left|3x^2 + 6x - 9\right|dx$

Bảng xét dấu:

x	0		1		2
$3x^2 + 6x - 9$		$-$	0	$+$	

Vậy $S = -\int_0^1 (3x^2 + 6x + 3)dx + \int_1^2 (3x^2 + 6x + 3)dx$

$= -\left[x^3 + 3x^2 + 6x\right]_0^1 + \left[x^3 + 3x^2 + 6x\right]_1^2$

$= -(1 + 3 + 6) + (8 + 12 + 12) - (1 + 3 + 6) = 12$ (đvdt)

b) Diện tích hình phẳng cần tính là $S = \int_0^{\pi} |\cos x|dx$

Bảng xét dấu:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos x$		$+$	0	$-$	

Do đó $S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_0^{\pi} (-\cos x)dx$

$= \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = (1 - 0) - (0 - 1) = 2$ (đvdt).

c) $S = \int_0^{\pi} |4x\sin 2x|dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4x\sin 2x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-4x\sin 2x)dx$

Đặt u = 4x ⇒ u' = 4

$v' = \sin 2x$, chọn $v = -\frac{1}{2}\cos 2x$

Suy ra $S = \left[-2x\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos 2x dx - \left(\left[-2x\cos 2x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\cos 2x dx\right)$

$= \pi + \left[\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left(-2\pi - \pi + \left[\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) = \pi - (-3\pi) = 4\pi.$

d) $S = \int_0^3 \left|3xe^x\right| dx = \int_0^3 3xe^x dx$

Đặt u = 3x ⇒ u' = 3

$v' = e^x \Rightarrow v = e^x$

Suy ra $S = \left[3xe^x\right]_0^3 - \int_0^3 3e^x dx = 9e^3 - \left[3e^x\right]_0^3 = 6e^3 + 3$ đvdt).

e) $S = \int_{-2}^{1} \left|x^3 - 4x\right| dx$

$= \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x) dx + \int_0^2 (4x - x^3) + \int_2^1 (x^3 - 4x) dx$

$= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{0} + \left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 + \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_2^4 = 44$ (đvdt).

2. a) $S = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$ (đvdt).

b) $S = \int_0^1 \left|5x^4 + 3x^2 + 3\right| dx = \int_0^1 (5x^4 + 3x^2 + 3) dx = \left[x^5 + x^4 + 3x\right]_0^1 = 5$ đvdt).

c) $S = \int_1^2 \left|\frac{1}{x}\right| dx = \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \left[\ln x\right]_1^2 = \ln 2$ (đvdt).

d) $S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\frac{\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)^4}\right| dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{(\sin x + \cos x)^4} dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)^4} dx$

Đặt t = sinx + cosx ⇒ dt = (cosx – sinx)dx

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \sqrt{2}$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$

Suy ra $S = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t^4} - \int_{\sqrt{2}}^{1} \frac{dt}{t^4}$

$= 2\left[-\frac{1}{3t^3}\right]_1^{\sqrt{2}} = 2\left(-\frac{1}{6\sqrt{2}} + \frac{1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2} - 1}{3\sqrt{2}} = \frac{4 - \sqrt{2}}{6}$ (đvdt).

3\. a) $S = \int_0^3 |x\ln(x+1)|dx = \int_0^3 x\ln(x+1)dx$ (vì $x\ln(x+1) \geq 0$ với mọi $x \in [0; 3]$)

Đặt $u = \ln(x+1) \Rightarrow u' = \dfrac{1}{x+1}$

$v' = x$, chọn $v = \dfrac{x^2}{2}$

Suy ra $S = \left[\dfrac{x^2}{2}\ln(x+1)\right]_0^3 - \dfrac{1}{2}\int_0^3 \dfrac{x^2}{x+1}dx = \dfrac{9}{2}\ln 4 - \dfrac{1}{2}\int_0^3 (x - 1 + \dfrac{1}{x+1})dx$

$$= \frac{9}{2}\ln 4 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right]_0^3 = 9\ln 2 - \frac{1}{2}\left[\frac{9}{2} - 3 + \ln 4\right] = 8\ln 2 - \frac{3}{4} \text{ (đvdt).}$$

b) $S = \int_0^\pi |\sin^4 x\cos^3 x|dx$

Bảng xét dấu

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
cosx		+	0	–	

Vì dấu của $\sin^4 x\cos^3 x$ cùng dấu với dấu của cosx.

Do đó: $S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\cos^3 x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^4 x\cos^3 x dx$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$; $x = \pi \Rightarrow t = 0$

$S = \int_0^1 t^4(1-t^2)dt - \int_1^0 t^4(1-t^2)dt = 2\int_0^1 (t^4 - t^6)dt$

$$= 2\left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) = \frac{4}{35} \text{ (đvdt).}$$

c) $S = \int_0^2 \left|x^4\sqrt{x^5+4}\right|dx = \int_0^2 x^4\sqrt{x^5+4}dx$

Đặt $t = \sqrt{x^5+4} \Rightarrow t^2 = x^5 + 4 \Rightarrow 2tdt = 5x^4dx \Rightarrow x^4dx = \dfrac{2}{5}tdt$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 2$; $x = 2 \Rightarrow t = 6$

Suy ra $S = \int_2^6 \dfrac{2}{5}t^2dt = \left[\dfrac{2t^3}{15}\right]_2^6 = \dfrac{2}{15}(216 - 8) = \dfrac{416}{15}$ (đvdt).

d) $S = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left|\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\right|dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 e^{\frac{1}{x}}.\dfrac{1}{x^2}dx$.

Đặt $t = \frac{1}{x} \Rightarrow dt = -\frac{1}{x^2}dx$.

Đổi cận: $x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = 2$; $x = 1 \Rightarrow t = 1$.

Suy ra $S = \int_2^1 e^t(-dt) = \left[-e^t\right]_2^1 = e^2 - e$ (đvdt).

4. a) $S = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left|\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right| dx = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} dx$

Đặt $x = \tan t \Rightarrow dx = (1 + \tan^2 t)dt$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$.

Suy ra $S = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^2 t}{\sqrt{1+\tan^2 t}}(1+\tan^2 t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}dt$

Đặt $u = \sin t \Rightarrow du = \cos t dt$

Đổi cận: $t = 0 \Rightarrow u = 0$; $t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow u = \frac{1}{2}$.

Do đó $S = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^2.dt}{(1-t^2)^2} = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}.\frac{t+1+t-1}{(t-1)(t+1)}\right)^2 dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1}\right)^2$

$= \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{2}{(t-1)(t+1)}\right)dt$

$= \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt$

$= \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} + \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\left(2 - \frac{2}{3} + \ln\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3} - \ln 3\right)$ (đvdt).

b) $S = \int_{-\ln 2}^{\ln 4} \left|\frac{1-e^x}{1+e^x}\right| dx = \int_{-\ln 2}^{0} \frac{1-e^x}{1+e^x}dx + \int_0^{\ln 4} \frac{e^x-1}{e^x+1}dx$

(vì $e^x > 1$ khi $x > 0$ và $e^x < 1$ khi $x < 0$)

$= \int_{-\ln 2}^{0} \frac{1-e^x}{(1+e^x)e^x}.e^x dx + \int_0^{\ln 4} \frac{e^x-1}{(e^x+1)e^x}.e^x dx$

Đặt $t = e^x + 1 \Rightarrow dt = e^x dx$

Đổi cận: $x = -\ln 2 \Rightarrow t = \frac{3}{2}$; $x = \ln 4 \Rightarrow t = 5$.

Do đó $S = \int_{\frac{3}{2}}^{2} \frac{2-t}{t(t-1)}dt + \int_2^5 \frac{t-2}{t(t-1)}dt = \int_{\frac{3}{2}}^{2} \frac{t-2(t-1)}{t(t-1)}dt + \int_1^5 \frac{2(t-1)-t}{t(t-1)}dt$

$$= \int_{\frac{3}{2}}^{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{2}{t}\right)dt + \int_{2}^{5}\left(\frac{2}{t}-\frac{1}{t-1}\right)dt$$

$$= \left[\ln\left|\frac{t-1}{t^2}\right|\right]_{\frac{3}{2}}^{2} + \left[\ln\frac{t^2}{t-1}\right]_{2}^{5} = \ln\frac{1}{4} - \ln\frac{2}{9} + \ln\frac{25}{4} - \ln 4$$

$$= \ln\frac{1}{16} + \ln\frac{25.9}{8} = \ln\frac{225}{128} \text{ (đvdt).}$$

c) $S = \int_{-1}^{1}\left|\frac{x^3}{x+\sqrt{x^2+1}}\right|dx = \int_{-1}^{0}\frac{-x^3}{x+\sqrt{x^2+1}}dx + \int_{0}^{1}\frac{x^3}{x+\sqrt{x^2+1}}dx$

$$= \int_{-1}^{0}-x^3\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)dx + \int_{0}^{1}x^3(\sqrt{x^2+1}-x)dx$$

$$= \int_{-1}^{0}x^4dx - \int_{0}^{1}x^4dx - \int_{-1}^{0}x^3\sqrt{x^2+1}dx + \int_{0}^{1}x^3\sqrt{x^2+1}dx$$

$$= \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{x^5}{5}\right]_{0}^{1} - \int_{-1}^{0}x^3\sqrt{x^2+1}dx + \int_{0}^{1}x^3\sqrt{x^2+1}dx$$

$$= -\int_{-1}^{0}x^3\sqrt{x^2+1}dx + \int_{0}^{1}x^3\sqrt{x^2+1}dx$$

Đặt $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2 + 1 \Rightarrow tdt = xdx$.

Đổi cận: $x = -1 \Rightarrow t = \sqrt{2}$; $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{2}$.

Suy ra $S = -\int_{\sqrt{2}}^{1}(t^2-1)t.tdt + \int_{1}^{\sqrt{2}}(t^2-1)t.tdt$

$$= 2\int_{1}^{\sqrt{2}}\left(t^4-t^2\right)dt = 2\left[\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right]_{1}^{\sqrt{2}} = 2\left(\frac{4\sqrt{2}}{5}-\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right) = \frac{4\left(\sqrt{2}+1\right)}{15} \text{ (đvdt).}$$

d) $S = \int_{0}^{1}\left|e^{\sqrt{x}}\right|dx = \int_{0}^{1}e^{\sqrt{x}}dx$

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 4 \Rightarrow t = 2$.

Suy ra $S = \int_{0}^{2}e^t.2tdt$

Đặt $u = 2t \Rightarrow u' = 2$

$v' = e^t$, chọn $v = e^t$.

Suy ra $S = \left[2te^t\right]_0^2 - \int_0^2 2e^tdt = 4e^2 - \left[2e^t\right]_0^2 = 2e^2 + 2$ (đvdt).

e) $S = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{3+\sin 2x}}\right|dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{3+\sin 2x}}\right)dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{4-(\sin x-\cos x)^2}}\right)dx$

Đặt $\sin x - \cos x = 2\sin t \Rightarrow (\cos x + \sin x)dx = 2\cos tdt$

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{6}$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$

Suy ra $S = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\cos t dt}{\sqrt{4 - 4\sin^2 t}} = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} dt = [t]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3}$ (đvdt).

5. Ta có $S = \int_0^1 |x^2 + m| dx$

➢ $m \geq 0$: $S = \int_0^1 (x^2 + m)dx = \left[\frac{x^3}{3} + mx\right]_0^1 = m + \frac{1}{3} \geq \frac{1}{3}$. Suy ra Min $S \geq \frac{1}{3}$.

➢ $-1 < m < 0$:

$$S = \int_0^{\sqrt{-m}} (-x^2 - m)dx + \int_{\sqrt{-m}}^1 (x^2 + m)dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} - mx\right]_0^{\sqrt{-m}} + \left[\frac{x^3}{3} + mx\right]_{\sqrt{-m}}^1$$

$$= \frac{m\sqrt{-m}}{3} - m\sqrt{-m} + \frac{1}{3} + m + \frac{m\sqrt{m}}{3} - m\sqrt{-m} = \frac{1}{3} + m - \frac{4m\sqrt{-m}}{3}$$

$$= \frac{1 - 3\left(\sqrt{-m}\right)^2 + 4\left(\sqrt{-m}\right)^3}{3}$$

Đặt $t = \sqrt{-m}$, $t \in (0; 1)$.

Ta được $S = \frac{1}{3}\left(4t^3 - 3t^2 + 1\right) = f(t)$.

Ta có $f'(t) = 4t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 0$ hoặc $t = \frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên

t	0		$\frac{1}{2}$		1
f'(t)		$-$		$+$	
f(t)		↘	$\frac{1}{4}$	↗	

Suy ra Min$S = \frac{1}{4}$.

➢ $m \leq -1$: $S = \int_0^1 (-x^2 - m)dx = \left[-\frac{x^3}{3} - mx\right]_0^1 = -\frac{1}{3} - m \geq \frac{2}{3} \Rightarrow \min S \geq \frac{2}{3}$.

Vậy S đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{4}$ khi $t = \frac{1}{2}$ hay $m = -\frac{1}{4}$.

6. Ta có: $S = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left| \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} \right| dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$

Đặt $x^2 = \sin t \Rightarrow 2xdx = \cos t dt$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$.

Do đó: $S = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t.dt}{2\sqrt{1-\sin^2 t}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{2} = \left[\frac{t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{12}$ (đvdt).

7. $S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin^2 x \cos^3 x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x dx$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$

$$I = \int_0^1 t^2(1-t^2)dt = \int_0^1 (t^2 - t^4)dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15} \text{ (đvdt).}$$

Vấn đề 2: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường (C): y = f(x); (D): y = g(x), x = a và x = b (a < b)

1. a) Diện tích hình phẳng cần tìm là

$S = \int_{-2}^{2} |(x^3 - 2x) - 2x| dx = \int_{-2}^{2} |x^3 - 4x| dx$

Bảng xét dấu:

x	−2		0		2
$x^3 - 4x$	0	+	0	−	0

Vậy $S = \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)dx + \int_0^2 (-x^3 + 4x)dx$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{0} + \left[-\frac{x^4}{4} + 2x^2\right]_0^2 = 8 \text{ (đvdt).}$$

b) Ta có $S = \int_0^3 |(3x^2 - x^3) - (x^2 - x + 2)| dx$

$= \int_0^3 |(-x^3 + 2x^2 + x - 2)| dx = \int_0^3 |(x-2)(x^2-1)| dx$

Bảng xét dấu

x	0		1		2		3
$(x-2)(x^2-1)$		+	0	−	0	+	

Do đó:

$$S=\int_0^1\left(x^3-2x^2-x+2\right)dx-\int_1^2\left(x^3-2x^2-x+2\right)dx+\int_2^3\left(x^3-2x^2-x+2\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^1-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_1^2+\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_2^3$$

$$=\frac{13}{12}-\frac{2}{3}+\frac{13}{12}+\frac{15}{4}-\frac{2}{3}=\frac{55}{12}\text{ (đvdt).}$$

c) $S=\int_{-1}^{2}\left|3x^2-4x^3\right|dx=\int_{-1}^{\frac{3}{4}}\left(3x^2-4x^3\right)dx-\int_{\frac{3}{4}}^{2}\left(3x^2-4x^3\right)dx$

$$=\left[x^3-x^4\right]_{-1}^{\frac{3}{4}}-\left[x^3-x^4\right]_{\frac{3}{4}}^{2}=\frac{27}{256}+2-\left(-8-\frac{27}{256}\right)=\frac{1307}{128}\text{ (đvdt).}$$

d) $S=\int_{-2}^{2}\left|(3x-x^3)+x\right|dx=\int_{-2}^{2}\left|4x-x^3\right|dx$

$$=\int_{-2}^{0}(-4x+x^3)dx+\int_0^2(4x-x^3)dx=\left[-2x^2+\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{0}+\left[2x^2-\frac{x^4}{3}\right]_0^2=8\text{ (đvdt).}$$

e) Ta có thể xem hình elip trên là hình giới hạn bởi các đường sau:

$x=-4;\ x=4;\ y=-\frac{3}{4}\sqrt{4^2-x^2}$ và $y=\frac{3}{4}\sqrt{4^2-x^2}$.

Do đó: $S=\int_{-4}^{4}\left|2\frac{3}{4}\sqrt{4^2-x^2}\right|dx=3\int_0^4\sqrt{4^2-x^2}dx$

Đặt $x=4\sin t\Rightarrow dx=4\cos t dt$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0;\ x=4\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$.

Suy ra $S=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{16-16\sin^2 t}.4\cos t dt=48\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt$

$$=24\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=24\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=12\pi\text{ (đvdt).}$$

f) $S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin\frac{x}{2}\cos x-\cos x\right|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\cos x(\sin\frac{x}{2}-1)\right|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x-\sin\frac{x}{2}\cos x)dx$

$$=\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\frac{x}{2}(2\cos^2\frac{x}{2}-1)dx=1-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos^2\frac{x}{2}-1)\sin\frac{x}{2}dx$$

Đặt $t=\cos\frac{x}{2}\Rightarrow dt=-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}dx$

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=1;\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$S = 1 - \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (2t^2 - 1).(-2)dt = 1 - \left[2t - \frac{4t^3}{3}\right]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{5-2\sqrt{2}}{3} \text{ (đvdt)}.$$

g) $S = \int_{-1}^{2} \left|(x^2 - 2x) - x\right| dx = \int_{-1}^{2} \left|(x^2 - 3x)\right| dx$

$$= \int_{-1}^{0}(x^2 - 3x)dx + \int_0^2 (3x - x^2)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{31}{6} \text{ (đvdt)}.$$

2. a) $S = \int_1^4 \left|5^{x-2} - (3-x)\right| dx = \int_1^2 \left(3 - x - 5^{x-2}\right)dx + \int_2^4 (5^{x-2} - 3 + x)dx$

(Vì $x < 2$ thì $3 - x > 1 = 5^0 > 5^{x-2}$)

$$= \left[3x - \frac{x^2}{2} - \frac{5^{x-2}}{\ln 5}\right]_1^2 + \left[\frac{5^{x-2}}{\ln 5} - 3x + \frac{x^2}{2}\right]_2^4$$

$$= 6 - 2 - \frac{1}{\ln 5} - 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5\ln 5} + \frac{25}{\ln 5} - 12 + 8 - \frac{1}{\ln 5} + 6 - 2 = \frac{3}{2} + \frac{116}{5\ln 5} \text{ (đvdt)}.$$

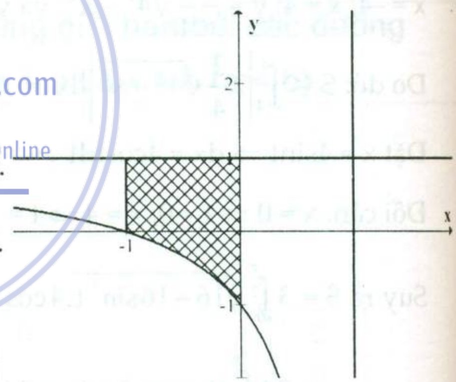
b) Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox là $x\sqrt{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$S = \int_0^1 \left|x\sqrt{x^2+1}\right| dx = \int_0^1 \left(x\sqrt{x^2+1}\right)dx$

Đặt $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2 + 1 \Rightarrow tdt = xdx$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{2}$.

Suy ra $S = \int_1^{\sqrt{2}} t.tdt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$ (đvdt).



3. a) Hình biểu diễn hình phẳng như hình bên.

Dựa vào hình vẽ ta có:

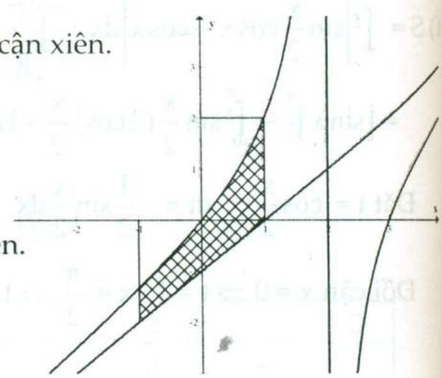
$S = \int_{-1}^{0} (y_{TCN} - y_C)dx$

$$= \int_{-1}^{0} \left(1 - \frac{x+1}{x-1}\right)dx = \int_{-1}^{0} \left(\frac{-2}{x-1}\right)dx = \left[-2\ln|x-1|\right]_{-1}^{0} = 2\ln 2 \text{ (đvdt)}.$$

b) (C): $y = \dfrac{x^2 - 3x}{x - 2}$, $x = -1$, $x = 1$ và đường tiệm cận xiên.

Ta có: $y' = \dfrac{x^2 - 4x + 6}{(x-2)^2}$;

TCĐ: $x = 2$; TCX: $y = x - 1$.



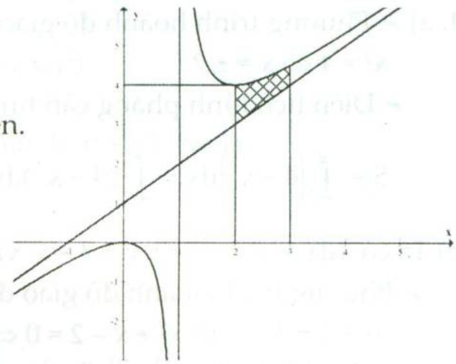
Hình biểu diễn của hình phẳng như hình bên.

Diện tích hình phẳng là

$S = \int_{-1}^{1} (y_C - y_{TCX})dx$

$$= \int_{-1}^{1}\left(x-1-\frac{2}{x-2}-x+1\right)dx = \int_{-1}^{1}\frac{-2}{x-2}dx = \Big[-2\ln|x-2|\Big]_{-1}^{1} = 2\ln 3 \text{ (đvdt).}$$

c) Ta có: $y' = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$;



TCĐ: $x = 1$; TCX: $y = x + 1$.

Hình biểu diễn của hình phẳng như hình bên.

Diện tích hình phẳng là

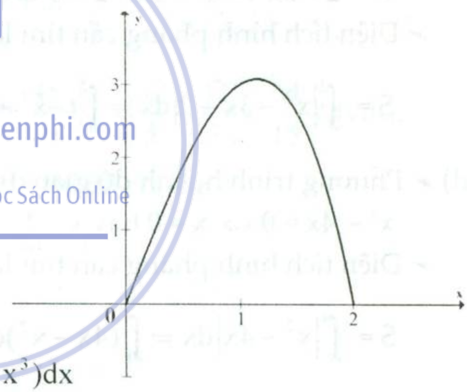
$$S = \int_2^3 \left(y_C - y_{TCX}\right)dx$$

$$= \int_2^3 \left(x+1+\frac{1}{x-1}-x-1\right)dx$$

$$= \int_2^3 \frac{1}{x-1}dx = \Big[2\ln|x-1|\Big]_2^3 = 2\ln 2 \text{ (đvdt).}$$

4. Cho hàm số $y = 4x - x^3$ $(0 \le x \le 2)$.

a) Vẽ đồ thị của hàm số



b) Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d): $y = mx$ là:

$4x - x^3 = mx$

$$\Leftrightarrow x(x^2+m-4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 4-m \end{array}\right. \quad (1)$$

Vì (d) chia hình phẳng giới hạn bởi (C) và Ox thành 2 phần nên

$0 < 4 - m < 2 \Leftrightarrow 2 < m < 4.$

Khi đó:

(1) $\Leftrightarrow x = 0$ hay $x = \sqrt{4-m} \in (0; 2)$.

$$\text{YCBT} \Leftrightarrow \int_0^{\sqrt{4-m}} (4x - x^3 - mx)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (4x - x^3)dx$$

$$\Leftrightarrow \left[(4-m)\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{\sqrt{4-m}} = \frac{1}{2}\left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(4-m)^2}{2} - \frac{(4-m)^2}{4} = \frac{1}{2}(8-4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(4-m)^2}{4} = 2 \Leftrightarrow (4-m)^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow 4 - m = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow m = 4 - 2\sqrt{2}.$$

Vậy m thỏa YCBT $\Leftrightarrow m = 4 - 2\sqrt{2}$.

Vấn đề 3: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f(x)$ và $y = g(x)$

1. a) ➢ Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là:
$x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

➢ Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = \int_{-2}^{2}\left|4 - x^2\right|dx = \int_{-2}^{2}(4 - x^2)dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{32}{3} \text{ (đvdt)}.$$

b) Ta có: (d): $x + y = 3 \Leftrightarrow y = 3 - x$ và (P): $y = x^2 + 1$.

➢ Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:
$x^2 + 1 = 3 - x \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hay $x = -2$.

➢ Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = \int_{-2}^{1}\left|(x^2 + 1) - (3 - x)\right|dx = \int_{-2}^{1}(-x^2 - x + 2)dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} = \frac{9}{2} \text{ (đvdt)}.$$

c) ➢ Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là:
$x^2 + 2 = 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hay $x = 2$.

➢ Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = \int_{1}^{2}\left|x^2 - 3x + 2\right|dx = \int_{1}^{2}(-x^2 + 3x - 2)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x\right]_{1}^{2} = \frac{1}{6} \text{ (đvdt)}.$$

d) ➢ Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là:
$x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = 4$.

➢ Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = \int_{0}^{4}\left|x^2 - 4x\right|dx = \int_{0}^{4}(4x - x^2)dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{4} = \frac{32}{3} \text{ (đvdt)}.$$

e) $x = e$, $y = 0$ và $y = \ln x$.

➢ Phương trình hoành độ giao điểm của đường $y = \ln x$ và đường $y = 0$ là:
$\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

➢ Diện tích hình phẳng cần tìm là: $S = \int_{1}^{e}\left|\ln x\right|dx = \int_{1}^{e}\ln x\,dx$

Đặt $u = \ln x \Rightarrow u' = \dfrac{1}{x}$;

$v' = 1$, chọn $v = x$.

Suy ra $S = \left[x\ln x\right]_{1}^{e} - \int_{1}^{e}dx = e - \left[x\right]_{1}^{e} = 1$ (đvdt).

f) ➢ Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là:
$x(x - 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = 1$ hay $x = 2$.

➢ Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = \int_0^2 |x(x-1)(x-2)|dx = \left|\int_0^1 (x^3-3x^2+2x)dx\right| + \left|\int_1^2 (x^3-3x^2+2x)dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_0^1\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_1^2\right| = \frac{1}{2} \text{ (đvdt)}$$

2. a) ➢ Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là:

$\sqrt{x} = \sqrt[3]{x} \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = 1$.

➢ Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = \int_0^1 \left|\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}\right|dx = \left|\int_0^1 (\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})dx\right|$$

Đặt $x = t^6$ $(t \geq 0) \Rightarrow dx = 6t^5dt$

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 1 \Rightarrow t = 1$

$$S = \left|\int_0^1 (t^3-t^2).6t^5dt\right| = \left|\int_0^1 (6t^8-6t^7)dt\right| = \left|\left[\frac{6t^9}{9}-\frac{6t^8}{8}\right]_0^1\right| = \left|\frac{6}{9}-\frac{6}{8}\right| = \frac{1}{12} \text{ (đvdt)}.$$

b) ➢ Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là:

$2x^2 = x^4 - 2x^2 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = \pm 2$.

➢ Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = \int_0^2 |x^4-4x^2|dx = \left|\int_0^2 (x^4-4x^2)dx\right| = \left|\frac{x^5}{5}-\frac{4x^3}{3}\right|_0^2 = \left|\frac{32}{5}-\frac{32}{3}\right| = \frac{64}{15} \text{ (đvdt)}.$$

c) ➢ Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là:

$\sqrt{4-x^2} = \dfrac{x^2}{3} \Leftrightarrow 9(4-x^2) = x^4 \Leftrightarrow x^4 + 9x^2 - 36 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 3 \\ x^2 = -12 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$.

➢ Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left|\sqrt{4-x^2}-\frac{x^2}{3}\right|dx = \frac{1}{3}\left|\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (3\sqrt{4-x^2}-x^2)dx\right|$$

$$= \frac{1}{3}\left|\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 3\sqrt{4-x^2}dx - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\right|$$

Đặt $x = 2\sin t \Rightarrow dx = 2\cos t\,dt$

Đổi cận $x = -\sqrt{3} \Rightarrow t = -\dfrac{\pi}{3}$; $x = \sqrt{3} \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{3}$

Suy ra $S = \dfrac{1}{3}\left|\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} 3\sqrt{4-4\sin^2 t}.2\cos t dt - 2\sqrt{3}\right| = \dfrac{1}{3}\left|\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} 12\cos^2 tdt - 2\sqrt{3}\right|$

$$= \frac{1}{3}\left|\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} 6(1+\cos 2t)dt - 2\sqrt{3}\right| = \frac{1}{3}\left|\left[6(t+\frac{\sin 2t}{2})\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} - 2\sqrt{3}\right|$$

$$= \frac{1}{3}\left|4\pi + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\right| = \frac{4\pi+\sqrt{3}}{3} \text{ (đvdt).}$$

d) ➢ Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là:

$$\frac{-2x+1}{x+1} = -\frac{x}{2}+1 \Leftrightarrow -4x+2 = -x^2 - x + 2x + 2$$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 5$.

➢ Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = \int_0^5 \left|\frac{-2x+1}{x+1} + \frac{x}{2} - 1\right| dx = \left|\int_0^5 (-2 + \frac{3}{x+1} + \frac{x}{2} - 1)dx\right|$$

$$= \left|\left.-3x + 3\ln|x+1| + \frac{x^2}{4}\right|_0^5\right| = \left|-15 + 3\ln 6 + \frac{25}{4}\right| = \frac{35}{4} - 3\ln 6 \text{ (đvdt).}$$

3. a) ➢ Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là:

$x^2 - 4 = -x^2 - 2x \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -2$.

➢ Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = \int_{-2}^{1}\left|(x^2-4)-(-x^2-2x)\right|dx = \left|\int_{-2}^{1}(2x^2+2x-4)dx\right|$$

$$= \left|\left.\frac{2x^3}{3} + x^2 - 4x\right|_{-2}^{1}\right| = \left|\frac{2}{3} + 1 - 4 + \frac{16}{3} - 4 - 8\right| = 9 \text{ (đvdt).}$$

b) ➢ Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là:

$x^2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 0$.

➢ Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = \int_0^1 \left|x^2 - \sqrt{x}\right| dx = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx = \left[\frac{2x\sqrt{x}}{3} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \text{ (đvdt).}$$

c) ➢ Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là:

$-x^2 + 2x = -3x \Leftrightarrow x^2 - 5x \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 5$.

➢ Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = \int_0^5 \left|x^2 - 5x\right| dx = \int_0^5 \left(5x - x^2\right)dx = \left[\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^5 = \frac{125}{2} - \frac{125}{3} = \frac{125}{6} \text{ (đvdt).}$$

d) ➢ Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là:

$2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = 0$.

➢ Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = \int_0^2 \left|2x - x^2\right| dx = \int_0^2 \left(2x - x^2\right)dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{4}{3} \text{ (đvdt).}$$

e) ➢ Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là:

$2 + \sin x = 1 + \cos^2 x \Leftrightarrow 2 + \sin x = 2 - \sin^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x + \sin x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 0 \text{ hay } x = \pi \ \ (\text{do } x \in [0; \pi])$$

➢ Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = \int_0^{\pi} \left|2 + \sin x - (1 + \cos^2 x)\right| dx = \int_0^{\pi} \left(\sin x + \sin^2 x\right) dx$$

$$= \int_0^{\pi} (\sin x + \frac{1 - \cos 2x}{2}) dx = \left[-\cos x + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi} = 2 + \frac{\pi}{2} \text{ (đvdt).}$$

4. ➢ Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường đã cho là:

$$\frac{4a^2 - 2ax - x^2}{1 + a^4} = \frac{x^2}{1 + a^4} \Leftrightarrow 2x^2 + 2ax - 4a^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \\ x = -2a \end{array}\right.$$

➢ Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = \int_{-2a}^{a} \left|\frac{2x^2 + 2ax - 4a^2}{1 + a^4}\right| dx = \frac{1}{1 + a^4} \int_{-2a}^{a} \left(4a^2 - 2ax - 2x^2\right) dx$$

$$= \frac{1}{1 + a^4}\left[4a^2 x - ax^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_{-2a}^{a} = \frac{9a^3}{1 + a^4}$$

➢ Ta có $S = \dfrac{9a^3}{1 + a^4} = \dfrac{27a^3}{3 + a^4 + a^4 + a^4} \le \dfrac{27a^3}{4\sqrt[4]{3a^{12}}} = \dfrac{27}{4\sqrt[4]{3}}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = \sqrt[4]{3}$.

Vậy với $a = \sqrt[4]{3}$ thì diện tích hình phẳng đạt giá trị lớn nhất và $\text{MaxS} = \dfrac{27}{4\sqrt[4]{3}}$ (đvdt).

5. ➢ Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường cong là:

$$\frac{x^2\sqrt{x^3 + 1}}{24} = x.2^{-x} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x\sqrt{x^3 + 1} = 24.2^{-x} \ (*) \end{array}\right.$$

Vì (*) có VT là hàm số tăng và VP là hàm số giảm nên (*) có duy nhất nghiệm là $x = 2$.

➢ Diện tích hình phẳng là

$$S = \int_0^2 \left|\frac{x^2\sqrt{x^3 + 1}}{24} - x2^{-x}\right| dx = \frac{1}{24}\left|\int_0^2 x^2\sqrt{x^3 + 1}\, dx - \int_0^2 24x.2^{-x} dx\right|$$

* Đặt $t = \sqrt{x^3 + 1} \Rightarrow t^2 = x^3 + 1 \Rightarrow 2tdt = 3x^2 dx \Rightarrow x^2 dx = \dfrac{2}{3} tdt$

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 1; x = 2 \Rightarrow t = 3$.

Do đó $I = \int_0^2 x^2\sqrt{x^3+1}dx = \int_0^2 \frac{2}{3}t^2dt = \left[\frac{2t^3}{9}\right]_0^2 = \frac{16}{9}$.

* Đặt $u = 24x \Rightarrow u' = 24$

$$v' = 2^{-x} \Rightarrow v = -\frac{2^{-x}}{\ln 2}$$

$$\Rightarrow J = \int_0^2 24x2^{-x}dx = \left[-\frac{24x.2^{-x}}{\ln 2}\right]_0^2 + \int_0^2 \frac{24.2^{-x}}{\ln 2}dx$$

$$= -\frac{12}{\ln 2} - \left[\frac{24.2^{-x}}{\ln^2 2}\right]_0^2 = -\frac{12}{\ln 2} - \frac{18}{\ln^2 2}$$

Vậy $S = \frac{1}{24}\left[\frac{16}{9} + \frac{12}{\ln 2} + \frac{18}{\ln^2 2}\right]$ (đvdt).

6. ➢ Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là:

$$\frac{x^2+2ax+3a^2}{1+a^4} = \frac{a^2-ax}{1+a^4} \Leftrightarrow x^2 + 3ax + 2a^2 = 0 \Leftrightarrow x = -a \text{ hay } x = -2a.$$

➢ Diện tích hình phẳng là:

$$S = \int_{-2a}^{-a}\left|\frac{x^2+2ax+3a^2}{1+a^4} - \frac{a^2-ax}{1+a^4}\right|dx = \frac{1}{1+a^4}\int_{-2a}^{-a}\left|x^2+3ax+2a^2\right|dx$$

$$= \frac{1}{1+a^4}\left|\frac{x^3}{3} + \frac{3ax^2}{2} + 2a^2x\right|_{-2a}^{-a} = \frac{a^3}{6(1+a^4)}$$

➢ Ta có $S = \frac{a^3}{2(3+a^4+a^4+a^4)} \le \frac{a^3}{2.4\sqrt[4]{3a^{12}}} = \frac{1}{8\sqrt[4]{3}}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = \sqrt[4]{3}$.

Vậy với $a = \sqrt[4]{3}$ thì diện tích hình phẳng đạt giá trị lớn nhất và $MaxS = \frac{1}{8\sqrt[4]{3}}$ (đvdt).

Vấn đề 4: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi nhiều hơn hai đồ thị

1. a) Ta có $y' = 2x - 2 \Rightarrow y'(3) = 4$

Phương trình tiếp tuyến của (P) tại M là (d): $y - 5 = 4(x-3) \Leftrightarrow y = 4x - 7$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = \int_0^3\left|(x^2-2x+2)-(4x-7)\right|dx = \int_0^3(x-3)^2dx = \left[\frac{(x-3)^3}{3}\right]_0^3 = 9 \text{ (đvdt)}.$$

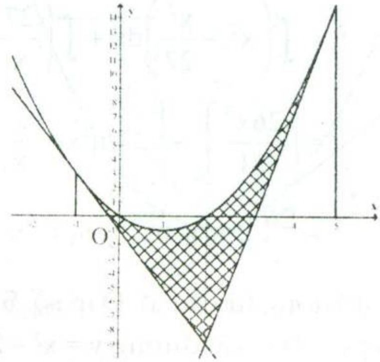
b) (P): $y = x^2 - 2x$ và hai tiếp tuyến của (P) vẽ từ điểm $A(2; -9)$

➢ *Gọi $(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến (d) với (P).*

Ta có: (d): $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 = (2x_0 - 2)(x - x_0) + x_0^2 - 2x_0$.

Mà (d) qua A nên $-9 = (2x_0 - 2)(2 - x_0) + x_0^2 - 2x_0$

$$\Leftrightarrow x_0^2 - 4x_0 - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ x_0 = 5 \end{array}\right.$$



Do đó có hai tiếp tuyến qua A là:

(d_1): $y = -4(x + 1) + 3 = -4x - 1$

(d_2): $y = 8(x - 5) + 15 = 8x - 25$.

Hình phẳng cần tìm có hình biểu diễn như hình vẽ bên.

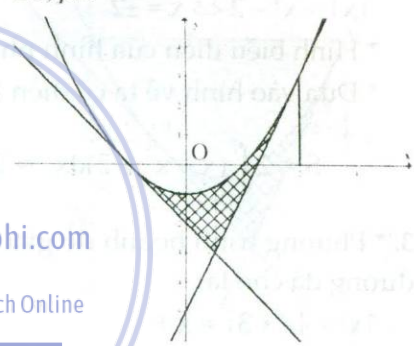
Diện tích hình phẳng là:

$$S = \int_{-1}^{2}[(x^2 - 2x) - (-4x - 1)]dx + \int_{2}^{5}[x^2 - 2x - (8x - 25)]dx$$

$$= \int_{-1}^{2}(x+1)^2 dx + \int_{2}^{5}(x-5)^2 dx$$

$$= \left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-1}^{2} + \left[\frac{(x-5)^3}{3}\right]_{2}^{5}$$

$$= \frac{27}{3} + \frac{27}{3} = 18 \text{ (đvdt)}.$$



c) ➢ Phương trình tiếp tuyến của (P) tại A là

d: $y = y'(-1)(x + 1) = -2x - 2$.

➢ Phương trình tiếp tuyến của (P) tại B là Δ: $y = y'(2)(x - 2) + 3 = 4x - 5$.

Ta có hình biểu diễn của hình phẳng như sau:

Dựa vào hình vẽ ta có diện tích hình phẳng là:

$$S = \int_{-1}^{\frac{1}{2}}(x^2 - 1 - (-2x - 2))dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2}(x^2 - 1 - (4x - 5))dx$$

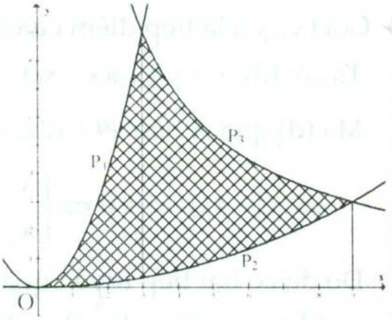
$$= \int_{-1}^{\frac{1}{2}}(x+1)^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2}(x-2)^2 dx = \left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-1}^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{9}{4} \text{ (đvdt)}.$$

2. a) * Phương trình hoành độ giao điểm của (P_1) và (P_2): $x^2 = \dfrac{x^2}{27} \Leftrightarrow x = 0$.

* Phương trình hoành độ giao điểm của (P_2) và (P_3): $\dfrac{x^2}{27} = \dfrac{27}{x} \Leftrightarrow x = 9$.

* Phương trình hoành độ giao điểm của (P_3) và (P_1): $\dfrac{27}{x} = x^2 \Leftrightarrow x = 3$.

Hình biểu diễn của hình phẳng như sau:



Dựa vào hình vẽ ta có diện tích hình phẳng là:

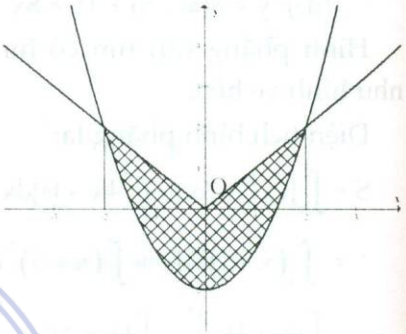
$$S = \int_0^3\left(x^2 - \frac{x^2}{27}\right)dx + \int_3^9\left(\frac{27}{x} - \frac{x^2}{27}\right)dx$$

$$= \left[\frac{26x^3}{81}\right]_0^3 + \left[27\ln|x| - \frac{x^3}{81}\right]_3^9$$

$$= \frac{26}{3} + 27\ln 9 - 27\ln 3 - 9 + \frac{1}{3} = 27\ln 3 \text{ (đvdt)}.$$

b) Tương tự câu a). Đáp số: $S = 8\ln 2$ (đvdt).

c) $y = |x|$ và đường $y = x^2 - 2$



* Phương trình hoành độ giao điểm của 2 đồ thị là:

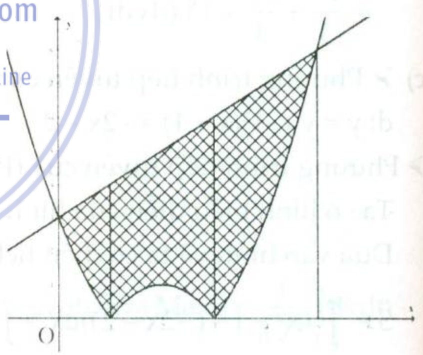
$|x| = x^2 - 2 \Leftrightarrow x = \pm 2.$

* Hình biểu diễn của hình phẳng như sau:

* Dựa vào hình vẽ ta có diện tích hình phẳng là:

$$S = 2\int_0^2 (x - x^2 + 2)dx = 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x\right]_0^2 = \frac{20}{3}.$$

3. * Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường đã cho là:



$|x^2 - 4x + 3| = x + 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x + 3 = x + 3 \\ x^2 - 4x + 3 = -x - 3 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x = 0 \text{ hoặc } x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5 \text{ hay } x = 0.$$

* Hình biểu diễn của hình phẳng như sau:

* Theo hình vẽ ta có diện tích hình phẳng là:

$$S = \int_0^1\left(x + 3 - x^2 + 4x - 3\right)dx + \int_1^3\left(x + 3 + x^2 - 4x + 3\right)dx + \int_3^5\left(x + 3 - x^2 + 4x - 3\right)dx$$

$$= \int_0^1\left(5x - x^2\right)dx + \int_1^3\left(x^2 - 3x + 6\right)dx + \int_3^5\left(5x - x^2\right)dx$$

$$= \left[\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 6x\right]_1^3 + \left[\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_3^5$$

$$= \frac{13}{6} + \frac{27}{2} - \frac{29}{6} + \frac{125}{6} - \frac{27}{2} = \frac{109}{6} \text{ (đvdt)}.$$

4. * Gọi $(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến d với (P).

Ta có d: $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 = (2x_0 - 2)(x - x_0) + x_0^2 - 2x_0$.

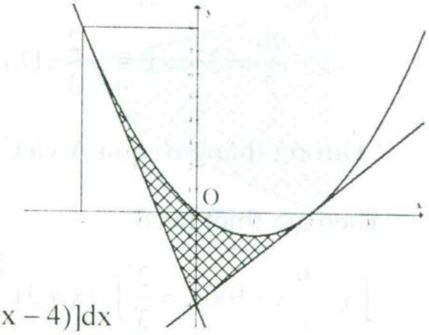
(d) qua A $\Leftrightarrow (2x_0 - 2)(-x_0) + x_0^2 - 2x_0 = -4$

$\Leftrightarrow x_0^2 = 4 \Leftrightarrow x_0 = \pm 2$.

Khi $x_0 = 2 \Rightarrow$ (d): $y = 2(x - 2) = 2x - 4$

Khi $x_0 = -2 \Rightarrow$ (d): $y = -6x - 4$.

Ta có hình biểu diễn như sau:



Dựa vào hình vẽ ta có diện tích hình phẳng là:

$$S = \int_{-2}^{0}\left(x^2 - 2x - (-6x - 4)\right)dx + \int_0^2 [x^2 - 2x) - (2x - 4)]dx$$

$$= \int_{-2}^{0}(x+2)^2\,dx + \int_0^2 (x-2)^2\,dx = \left[\frac{(x+2)^3}{3}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_0^2 = \frac{16}{3} \text{ (đvdt)}.$$

5. Ta có $y' = 2x - 4$

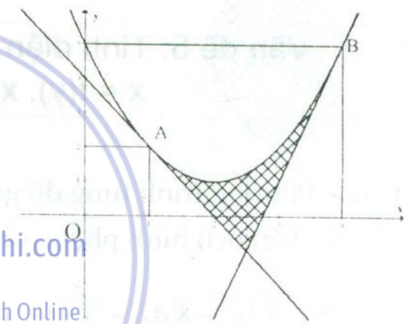
$\Rightarrow y'(1) = -2; y'(4) = 4.$

* Phương trình tiếp tuyến của (P) tại A là d:

$y - 2 = -2(x - 1) \Leftrightarrow y = -2x + 4$

* Phương trình tiếp tuyến của (P) tại B là

Δ: $y - 5 = 4(x - 4) \Leftrightarrow y = 4x - 11$.



* Giao điểm của Δ và d có hoành độ $x = \frac{5}{2}$.

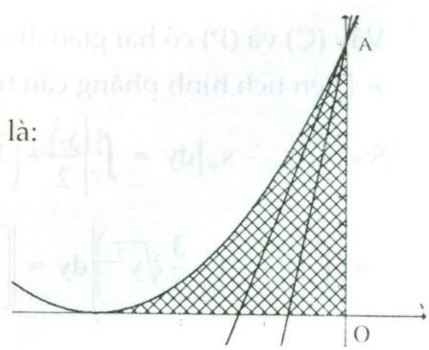
* Hình biểu diễn của hình phẳng như sau:

* Dựa vào hình vẽ ta có diện tích hình phẳng là:

$$S = \int_1^{\frac{5}{2}}\left(x^2 - 4x + 5 + 2x - 4\right)dx + \int_{\frac{5}{2}}^{4}(x^2 - 4x + 5 - 4x + 11)dx$$

$$= \int_1^{\frac{5}{2}}(x-1)^2\,dx + \int_{\frac{5}{2}}^{4}(x-4)^2\,dx = \left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_1^{\frac{5}{2}} + \left[\frac{(x-4)^3}{3}\right]_{\frac{5}{2}}^{4} = \frac{9}{4} \text{ (đvdt)}.$$

6. * Gọi B(b; 0) và C(c; 0) lần lượt là giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 thỏa mãn yêu cầu bài toán. $(-3 < c < b < 0)$.



* Đường thẳng d_1 qua A và B có phương trình là:

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{9} = 1 \Leftrightarrow y = -\frac{9}{b}x + 9.$$

* Theo giả thiết ta có:

$$\int_b^0 \left(-\frac{9}{b}x + 9\right)dx = \frac{1}{3}\int_{-3}^{0}(x+3)^2\,dx$$

$$\Leftrightarrow\left[-\frac{9x^2}{2b}+9x\right]_b^0=\frac{1}{3}\left[\frac{(x+3)^3}{3}\right]_{-3}^0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{9b}{2}=3 \Leftrightarrow b=-\frac{2}{3}.\ \text{Do đó } d_1\text{: } y=\frac{27}{2}x+9.$$

* Đường thẳng d_2 qua A và C nên có phương trình $\frac{x}{c}+\frac{y}{9}=1 \Leftrightarrow y=-\frac{9}{c}x+9$

Theo giả thiết ta có:

$$\int_c^0\left(-\frac{9}{c}x+9\right)dx=\frac{2}{3}\int_{-3}^0(x+3)^2dx \Leftrightarrow \left[-\frac{9x^2}{2c}+9x\right]_c^0=\frac{2}{3}\left[\frac{(x+3)^3}{3}\right]_{-3}^0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{9c}{2}=6 \Leftrightarrow b=-\frac{4}{3}.\ \text{Do đó } d_1\text{: } y=\frac{27}{4}x+9 \text{ (đvdt).}$$

Vấn đề 5: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = f(y)$, $x = g(y)$, $y = a$ và $y = b$ $(a < b)$

1. a) ➢ Phương trình tung độ giao điểm của (C) và (d) là $y^3 = 8 \Leftrightarrow y = 2$.

➢ Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S=\int_1^2\left|y^3-8\right|dy=\int_1^2(8-y^3)dy=\left[8y-\frac{y^4}{4}\right]_1^2=\frac{17}{4}\text{ (đvdt).}$$

b) Tọa độ giao điểm của (C) và (P) thỏa hệ:

$$\begin{cases} y^2=2x \\ 27y^2=8(x-1)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=2x \\ 27.2x=8(x-1)^3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4(x^3-3x^2+3x-1)-27x=0 \Leftrightarrow 4x^3-12x^2-15x-4=0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)(4x^2+4x+1)=0 \Leftrightarrow x=4 \text{ hay } x=-\frac{1}{2} \text{ (loại)}$$

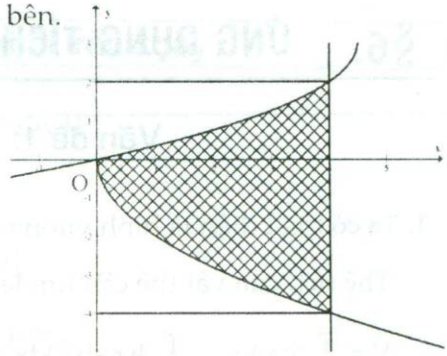
Vậy (C) và (P) có hai giao điểm là A(4; 2) và B(4; –2).

➢ Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S=\int_{-2}^2\left|x_C-x_P\right|dy=\int_{-2}^2\left|\frac{y^2}{2}-\left(1+\frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}\right)\right|dy$$

$$=\left|\int_{-2}^2\left(\frac{y^2}{2}-1-\frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}\right)\right|dy=\left|\left[\frac{y^3}{6}-y-\frac{3}{2}.\frac{3}{5}y\sqrt[3]{y^2}\right]_{-2}^2\right|=\frac{4}{3}+\frac{18\sqrt[3]{4}}{5}\text{ (đvdt).}$$

c) Ta có hình biểu diễn của hình phẳng như hình bên.



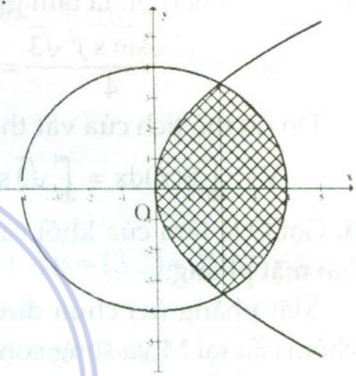
Diện tích hình phẳng là:

$$S = \int_{-4}^{0}\left(4 - \frac{y^2}{4}\right)dy + \int_{0}^{2}\left(4 - \frac{-y^2 + 6y}{2}\right)dy$$

$$= \left[4y - \frac{y^3}{12}\right]_{-4}^{0} + \left[4y + \frac{y^3}{6} - \frac{3y^2}{2}\right]_{0}^{2}$$

$$= 16 - \frac{64}{12} + 8 + \frac{8}{6} - 6 = 14 \text{ (đvdt).}$$

2. ➢ Phương trình tung độ giao điểm của (P) và (C) là:



$$\left(\frac{y^2}{6}\right)^2 + y^2 = 16 \Leftrightarrow y^4 + 36y^2 - 576 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 12 \Leftrightarrow y = 2\sqrt{3}.$$

➢ Diện tích của phần có gạch sọc là

$$S_1 = \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\left(\sqrt{16 - y^2} - \frac{y^2}{6}\right)dy$$

$$= \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\sqrt{16 - y^2}\,dy - \left[\frac{y^3}{18}\right]_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}$$

Đặt $y = 4\sin t \Rightarrow dy = 4\cos t\,dt$

Đổi cận $y = -2\sqrt{3} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{3}$; $y = 2\sqrt{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$

Do đó $S_1 = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{16 - 16\sin^2 t}.4\cos t\,dt - \frac{8\sqrt{3}}{3} = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}16\cos^2 t\,dt - \frac{8\sqrt{3}}{3}$

$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}8(1 + \cos 2t)dt - \frac{8\sqrt{3}}{3} = \left[8t + 4\sin 2t\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} - \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{16\pi}{3} + 4\sqrt{3} - \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{16\pi + 4\sqrt{3}}{3}$$

$$S_2 = S_{\text{hình tròn}} - S_1 = 16\pi - \frac{16\pi + 4\sqrt{3}}{3} = \frac{32\pi - 4\sqrt{3}}{3} \text{ (đvdt).}$$

§6. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ

Vấn đề 1: Tính thể tích của vật thể T

1. Ta có thiết diện là hình vuông có diện tích là $S(x) = \left(2\sqrt{1-x^2}\right)^2 = 4(1-x^2)$.

Thể tích của vật thể cần tìm là:

$$V = \int_{-1}^{1} S(x)dx = \int_{-1}^{1} 4(1-x^2)dx = \left[4(x-\frac{x^3}{3})\right]_{-1}^{1} = \frac{16}{3} \text{ (đvtt).}$$

2. Ta có thiết diện là tam giác đều có diện tích là

$$S(x) = \frac{(2\sqrt{\sin x})^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}\sin x.$$

Do đó thể tích của vật thể đã cho là

$$V = \int_0^{\pi} S(x)dx = \int_0^{\pi}\sqrt{3}\sin xdx = \sqrt{3}\left[-\cos x\right]_0^{\pi} = 2\sqrt{3} \text{ (đvtt).}$$

3. Gọi O là tâm của khối cầu sinh ra khối chõm cầu. Giới hạn khối chõm cầu bởi hai mặt phẳng:

Mặt phẳng (α) chứa đường tròn đáy của chõm cầu và mặt phẳng β tiếp xúc chõm cầu tại M và song song với (α).

Chọn trục Ox là trục qua M, trục Ox cắt (α) và (β) tại $R-h$ và h.

Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc trục Ox tại x $(R-h \le x \le h)$.

Ta có (P) cắt chõm cầu theo hình tròn có bán kính $r = \sqrt{R^2-x^2}$ nên có diện tích là: $S(x) = \pi(R^2-x^2)$

Do đó thể tích khối chõm cầu là:

$$V = \pi\int_{R-h}^{h} S(x)dx = \pi\int_{R-h}^{h}(R^2-x^2)dx = \pi\left[R^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{R-h}^{R}$$

$$= \pi\left[R^3 - R^2(R-h) - \frac{R^3}{3} + \frac{(R-h)^3}{3}\right] = \pi\left[R^2h - \frac{h\left[R^2+R(R-h)+(R-h)^2\right]}{3}\right]$$

$$= \frac{\pi h}{3}\left[3R^2-R^2-R(R-h)-R^2+2Rh-h^2\right] = \pi h^2\left[R-\frac{h}{3}\right] \text{ (ĐPCM).}$$

➢ Khối bán cầu bán kính R được coi là khối chõm cầu bán kính R, chiều cao là $h = R$.

Vì vậy thể tích khối bán cầu bán kính R là $V = \pi R^2(R-\frac{R}{3}) = \frac{2\pi R^3}{3}$ (đvtt).

Do đó thể tích của khối cầu bán kính R là $V = \frac{4\pi R^3}{3}$ (đvtt).

Vấn đề 2: Tính thể tích khối tròn xoay

1. ➢ Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và Ox là

$2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

➢ Thể tích khối tròn xoay tạo thành là:

$$V = \pi\int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi\int_0^2 \left(4x^2 - 4x^3 + x^4\right)dx$$

$$= \pi\left[\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \pi\left(\frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5}\right) = \frac{16\pi}{15} \text{ (đvtt).}$$

2. ➢ Phương trình tung độ giao điểm của đường $y = \sqrt{x}$ và trục Oy là:

$y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$.

➢ Thể tích khối tròn xoay tạo thành là:

$$V = \pi\int_0^1 x^2 dy = \pi\int_0^1 y^4 dy = \pi\left[\frac{y^5}{5}\right]_0^1 = \frac{\pi}{5} \text{ (đvtt).}$$

3. ➢ Đường thẳng AB qua A và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (3;3) = 3(1;1)$ nên:

AB: $1(x + 1) - 1(y - 1) = 0 \Leftrightarrow x - y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = x + 2$.

➢ Thể tích khối tròn xoay nhận được khi quay (H) quanh Ox là:

$$V = \pi\int_{-1}^2 \left[(x+2)^2 - x^4\right]dx = \pi\left[\frac{(x+2)^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^2 = \frac{72\pi}{5} \text{ (đvtt).}$$

4. * Phương trình hoành độ giao điểm của đường $y = \sqrt{x} - 1$ và đường $y = 0$ là:

$\sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

* Thể tích khối tròn xoay tạo thành là:

$$V = \pi\int_1^4 \left(\sqrt{x} - 1\right)^2 dx = \pi\int_1^4 \left(x - 2\sqrt{x} + 1\right)dx$$

$$= \pi\left[\frac{x^2}{2} - 2.\frac{2x\sqrt{x}}{3} + x\right]_1^4 = \frac{7\pi}{6} \text{ (đvtt).}$$

5. a) $V = \pi\int_0^1 x^2.e^{2x}dx$

Đặt $u = x^2 \Rightarrow u' = 2x$

$v' = e^{2x}$, chọn $v = \dfrac{e^{2x}}{2}$

Suy ra $V = \pi\left(\left[\dfrac{x^2e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 xe^{2x}dx\right) = \pi\left[\dfrac{e^2}{2} - \int_0^1 xe^{2x}dx\right]$

Đặt $u = x \Rightarrow u' = 1$

$v' = e^{2x} \Rightarrow v = \dfrac{e^{2x}}{2}$

Do đó $V = \pi\left[\dfrac{e^2}{2} - \left[\dfrac{xe^{2x}}{2}\right]_0^1 + \int_0^1 \dfrac{1}{2}e^{2x}dx\right] = \pi\left[\dfrac{e^2}{2} - \dfrac{e^2}{2} + \left[\dfrac{e^{2x}}{4}\right]_0^1\right] = \dfrac{\pi(e^2-1)}{4}$ (đvtt).

b) $V = \pi\int_1^e \ln^2 x dx$.

Đặt $u = \ln^2 x \Rightarrow u' = 2\ln x.\dfrac{1}{x}$

$v' = 1$, chọn $v = x$

Suy ra $V = \pi\left(\left[x\ln^2 x\right]_1^e - \int_1^e 2\ln x dx\right)$

Đặt $u = \ln x \Rightarrow u' = \dfrac{1}{x}$

$v' = 2$, chọn $v = 2x$

Do đó $V = \pi\left(\left[x\ln^2 x\right]_1^e - \left[2x\ln x\right]_1^e + \int_1^e 2dx\right) = \pi(e-2)$ (đvtt).

c) $V = \pi\int_0^\pi (\sin^2 x)^2 dx = \pi\int_0^\pi \left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx$

$= \dfrac{\pi}{4}\int_0^\pi \left(1 - 2\cos 2x + \dfrac{1+\cos 4x}{2}\right)dx = \dfrac{\pi}{8}\left[3x - 2\sin 2x + \dfrac{\sin 4x}{4}\right]_0^\pi = \dfrac{3\pi^2}{8}$ (đvtt).

d) $V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{\sin^6 x + \cos^6 x}\right)^2 dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 3\sin^2 x\cos^2 x)dx$

$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \dfrac{3}{4}\sin^2 2x\right)dx = \dfrac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4 - \dfrac{3(1-\cos 4x)}{2}\right)dx$

$= \dfrac{\pi}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (5 + 3\cos 4x)dx = \dfrac{\pi}{8}\left[5x + \dfrac{3}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{5\pi^2}{16}$ (đvtt).

6. Ta có khối tròn xoay do elip đã cho quay quanh Ox tạo nên cũng chính là khối tròn xoay tạo ra khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường sau quay quanh Ox tạo ra:

$x = -2$; $x = 2$; $y = 0$ và $y = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4}}$.

Do đó thể tích khối tròn xoay cần tìm là:

$V = \pi\int_{-2}^2 y^2 dx = \pi\int_{-2}^2 \left(1 - \dfrac{x^2}{4}\right)dx = \pi\left[x - \dfrac{x^3}{12}\right]_{-2}^2 = \pi\left[4 - \dfrac{16}{12}\right] = \dfrac{8\pi}{3}$ (đvtt).

7. Ta có thể tích vật thể cần tìm là:

$$V=\pi\int_1^4 x^2dy=\pi\int_1^4\left(\frac{4}{y^2}\right)dx=\pi\left[-\frac{4}{y}\right]_1^4=\pi(-1+4)=3\pi\ \text{(đvtt)}.$$

8. Ta có (C): $(x-2)^2+y^2=1 \Leftrightarrow (x-2)^2=1-y^2$

$\Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{1-y^2}\quad (y\in[-1;1])$

Ta thấy khối tròn xoay đã cho chính là khối tròn xoay nhận được khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y=\pm 1$; $x=2\pm\sqrt{1-y^2}$ quanh trục Oy.

Do đó thể tích của khối tròn xoay là:

$$V=\pi\int_{-1}^{1}\left[\left(2+\sqrt{1-y^2}\right)^2-\left(2-\sqrt{1-y^2}\right)^2\right]dy=\pi\int_{-1}^{1}8\sqrt{1-y^2}\,dy$$

Đặt $y=\sin t \Rightarrow dy=\cos t\,dt$

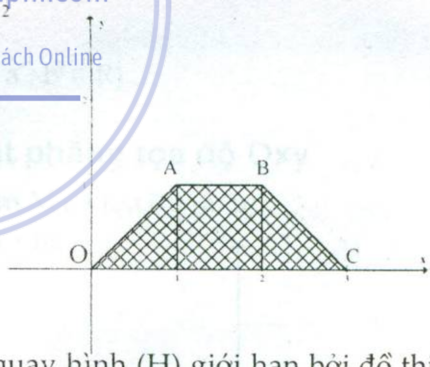
Đổi cận $y=-1\Rightarrow t=-\frac{\pi}{2}$; $y=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$.

Do đó $V=\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}8\sqrt{1-\sin^2 t}.\cos t\,dt=\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}8.\cos^2 t\,dt$

$$=4\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=4\pi\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=4\pi^2\ \text{(đvtt)}.$$

9. a) Vẽ đồ thị của hàm số f(x) (hình bên).

b) Ta có $I=\int_0^3 f(x)dx$ chính là diện tích của hình phẳng (H) chắn bởi đồ thị hàm số f(x) và trục Ox. Đó chính là diện tích của hình thang OABC.



Do đó $I=\int_0^3 f(x)dx=S_{OABC}=\frac{(1+3).1}{2}=2$.

c) Tính thể tích của hình tròn xoay sinh ra khi quay hình (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số f và trục Ox quanh trục Oy.

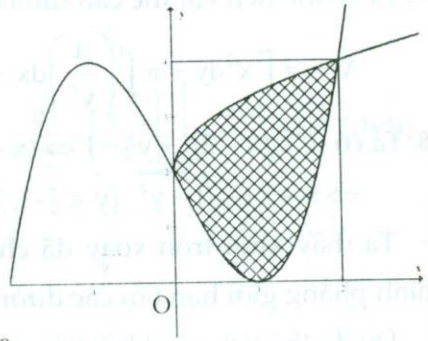
Ta có:

$$V=\pi\int_0^1\left(x_{BC}^2-x_{OA}^2\right)dy=\pi\int_0^1\left((3-x)^2-x^2\right)dy$$

$$=\pi\left(\left[\frac{(x-3)^3}{3}\right]_0^1-\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1\right)=\pi\left(\frac{-8+27}{3}-\frac{1}{3}\right)=6\pi\ \text{(đvtt)}.$$

10. Ta có phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (P) là:

$x^3-3x+2=\sqrt{2x}+2 \Leftrightarrow x^3-3x=\sqrt{2x}\qquad (*)$



Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x^3 - 3x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \sqrt{3}$

Ta có

(*) $\Leftrightarrow (x^3 - 3x)^2 = 2x$

$\Leftrightarrow x^5 - 6x^3 + 9x - 2 = 0$ hay $x = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)(x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 4x + 1) = 0$

hay $x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 4x + 1 = 0 \quad (**) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

(vì (**) $\Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 + 2x(x^2 - 2) + 1 = 0$ vô nghiệm do VT > 1, $\forall x \geq \sqrt{3}$).

Do đó thể tích vật thể cần tìm là:

$$V = \pi\int_0^2\left[\left(\sqrt{2x}\right)^2 - \left(x^3 - 3x\right)^2\right]dx = \pi\int_0^2\left(2x - x^6 + 6x^4 - 9x^2\right)dx$$

$$= \pi\left[x^2 - \frac{x^7}{7} + \frac{6x^5}{5} - 3x^3\right]_0^2 = \pi\left[4 - \frac{128}{7} + \frac{192}{5} - 24\right] = \frac{4\pi}{35} \text{ (đvtt).}$$

Chương IV: SỐ PHỨC

§1. SỐ PHỨC

A - TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

1. Số phức

Định nghĩa 1:

* Số phức z là một biểu thức có dạng z = a + bi, trong đó a và b là những số thực và i là số thỏa mãn $i^2 = -1$.
* i được gọi là *đơn vị ảo*, a được gọi là *phần thực* và b được gọi là *phần ảo* của số phức z.
* Tập hợp các số phức được kí hiệu là $\mathbb{C}$.

Đặc biệt :

* Số phức z = a + 0i có phần ảo bằng 0 được coi là số thực và viết là z = a.
* Số phức z = 0 + bi có phần thực bằng 0 được gọi là số ảo (hay số thuần ảo) và viết là z = bi.
* i = 0 + 1i = 1i.
* Số 0 = 0 + 0i vừa là số thực vừa là số ảo.

Định nghĩa 2:

Cho hai số phức z = a + bi và z' = a' + b'i (a, b, a', b' ∈ R).

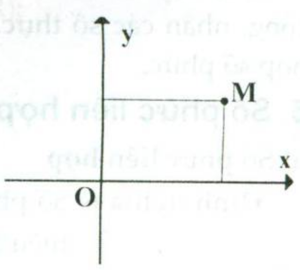
$z = z' \Leftrightarrow a = a'$ và $b = b'$

2. Biểu diễn hình học số phức trong mặt phẳng tọa độ Oxy

Mỗi số phức z = a + bi được biểu diễn bởi điểm M có tọa độ (a; b).

Mỗi điểm M(a; b) biểu diễn một số phức z = a + bi.

Ta kí hiệu M(z).



3. Phép cộng và phép trừ số phức

a) Phép cộng

➢ **Định nghĩa 3:**

Với z = a + bi , z' = a' + b'i ta định nghĩa:

$$z + z' = a + a' + (b + b')i$$

➢ **Tính chất**

* *Tính chất kết hợp:* $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$, $\forall z, z', z'' \in C$
* *Tính chất giao hoán:* $z + z' = z' + z$, $\forall z, z'' \in C$
* *Cộng với 0:* $z + 0 = 0 + z$, $\forall z \in C$

* Với mọi số phức z = a + bi, ta gọi số đối của z là −z, kí hiệu −z = −a − bi , thì ta có z + (−z) = (−z) + z = 0

b) Phép trừ

➢ **Định nghĩa 4**:

Với hai số phức z, z', ta định nghĩa $z - z' = z + (-z)$

Nếu $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$ ($a, b, a', b' \in R$) thì $z - z' = a - a' + (b - b')i$

c) Biểu diễn hình học của phép cộng và phép trừ hai số phức.

* Trong mặt phẳng phức, ta coi vectơ $\vec{u} = (a; b)$ biểu diễn số phức $z = a + bi$.
Như vậy số phức z được biểu diễn bởi điểm M cũng có nghĩa là được biểu diễn bởi vectơ $\overrightarrow{OM}$.

* Nếu vectơ $\vec{u}$, $\vec{u'}$ lần lượt biểu diễn các số phức z, z' thì:

$\vec{u} + \vec{u'}$ biểu diễn số phức $z + z'$;

$\vec{u} - \vec{u'}$ biểu diễn số phức $z - z'$.

4. Phép nhân số phức

a) Tích của hai số phức

Định nghĩa 5: Với $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$ ($a, b, a', b' \in R$), ta định nghĩa

$$zz' = aa' - bb' + (ab' + ba')i$$

b) Đặc biệt:

* Với $k \in R$ và $z = a + bi$ ($a, b \in R$) thì $kz = ka + kbi$

* $0z = 0, \forall z \in C$

c) Tính chất của phép nhân

* *Tính giao hoán*: $zz' = z'z, \forall z, z' \in C$

* *Tính kết hợp*: $(zz')z'' = z(z'z''), \forall z, z', z'' \in C$

* *Nhân với 1*: $1.z = z.1 = z, \forall z \in C$

Như vậy ta có thể thực hiện các phép tính cộng, nhân các số phức như phép cộng, nhân các số thực. Đặc biệt là các hằng đẳng thức vẫn đúng trong trường hợp số phức.

5. Số phức liên hợp và môđun của số phức

a) Số phức liên hợp

Định nghĩa 6: Số phức liên hợp của số phức $z = a + bi$ ($a, b \in R$) là $a - bi$, kí hiệu là $\bar{z}$.

$$\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$$

Nhận xét: * $z.\bar{z} = (a + bi)(a - bi) \Rightarrow z.\bar{z} = a^2 + b^2$.

* z và $\bar{z}$ được biểu diễn bởi 2 điểm đối xứng nhau qua trục Ox.

b) Môđun của số phức

Định nghĩa 7: Môđun của số phức $z = a + bi$ ($a, b \in R$) là số thực không âm $\sqrt{a^2 + b^2}$, kí hiệu là $|z|$.

Nhận xét:

* Nếu $z = a + bi$ ($a, b \in R$) thì $|z| = \sqrt{z.\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

* Nếu z là số thực thì môđun của z là giá trị tuyệt đối của số thực đó.

* Nếu $z = 0$ thì $|z| = 0$.

6. Phép chia cho số phức khác 0

Định nghĩa 8: Số nghịch đảo của số phức z khác 0 là số phức kí hiệu là z^{-1},

xác định bởi $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$

Phép chia số phức z' cho số phức z khác 0 : $\dfrac{z'}{z} = z'.z^{-1} = \dfrac{z'\overline{z}}{|z|^2}$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1. Thực hiện các phép tính trên C

I. PHƯƠNG PHÁP

Với $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$ ($a, b, a', b' \in R$), vận dụng các định nghĩa, ta có :

$z + z' = a + a' + (b + b')i$

$z - z' = a - a' + (b - b')i$

$zz' = aa' - bb' + (ab' + ba')i$

$$\frac{z'}{z} = \frac{z'\overline{z}}{|z|^2} = \frac{(a'+b'i)(a-bi)}{a^2+b^2} = \frac{a'a+b'b+(b'a-a'b)i}{a^2+b^2}.$$

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Viết các số phức sau đây dưới dạng $a + bi$ ($a, b \in R$):

a) $z = (2+i)^3 - (1+2i)^2 - (3-i)(2-i)$

b) $z = \dfrac{1+i}{1-i} + \dfrac{3-i}{2-i} - \dfrac{1+2i}{1+i}$

c) $z = \dfrac{(2+i)^2(1+i)}{2(1-i)-3(1+i)}$

Giải

a) $z = (2+i)^3 - (1+2i)^2 - (3-i)(2-i)$

$= 2^3 + 3.2^2i + 3.2i^2 + i^3 - [1 + 3.2i + 3.(2i)^2 + (2i)^3] - (6 - 3i - 2i + i^2)$

$= 8 + 12i - 6 - i - (1 + 6i - 12 - 8i) - (6 - 5i - 1) = 8 + 18i.$

b) $z = \dfrac{1+i}{1-i} + \dfrac{3-i}{2-i} - \dfrac{1+2i}{1+i} = \dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} + \dfrac{(3-i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} - \dfrac{(1+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$

$$= \frac{1+2i+i^2}{1+1} + \frac{6+i-i^2}{4+1} - \frac{1+i-2i^2}{1+1} = \frac{2i}{2} + \frac{7+i}{5} - \frac{3+i}{2} = -\frac{1}{10} + \frac{7}{10}i.$$

c) $z = \dfrac{(2+i)^2(1+i)}{2(1-i)-3(1+i)} = \dfrac{(4+i^2+4i)(1+i)}{-1-5i}$.

$$= -\frac{(3+4i)((1+i)}{1+5i} = -\frac{3+4i^2+7i}{1+5i} = \frac{(1-7i)(1-5i)}{(1+5i)(1-5i)}$$

$$= \frac{1+35i^2-12i}{1+25} = \frac{-34-12i}{26} = -\frac{17}{13} - \frac{6}{13}i.$$

Ví dụ 2. Thực hiện các phép tính sau đây và viết kết quả dưới dạng a + bi (a, b∈ R)

a) $\dfrac{(2+i)^5}{(1-2i)^3}$ b) $\dfrac{(1+i)^6}{(2-2i)^5}$

Giải

a) $\dfrac{(2+i)^5}{(1-2i)^3} = \left(\dfrac{2+i}{1-2i}\right)^3(2+i)^2 = \left(\dfrac{(2+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}\right)^3(4+4i^2+4i)$

$$= \left(\frac{5i}{1+4}\right)^3(3+4i) = i^3(3+4i) = -i(3+4i) = 4-3i.$$

b) $\dfrac{(1+i)^6}{(2-2i)^5} = \dfrac{(1+i)^6}{2^5(1-i)^5} = \dfrac{1}{32}.\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^5(1+i)$

$$= \frac{1}{32}.\left(\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right)^5(1+i) = \frac{1}{32}.\left(\frac{2i}{2}\right)^5(1+i)$$

$$= \frac{1}{32}.i^4.i(1+i) = \frac{1}{32}i(1+i) = -\frac{1}{32} + \frac{1}{32}i.$$

III. BÀI TẬP

1. Viết các số phức sau đây dưới dạng a + bi (a, b ∈ R):

a) $z = \dfrac{1-i\sqrt{2}}{\sqrt{5}-i\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{3}-i\sqrt{5}}$ b) $z = \dfrac{(7-8i)^{10}}{(8+7i)^{11}}$

2. Thực hiện các phép tính:

a) $(2+i)^3 - (2-i)^3$ b) $(1+\sqrt{2}\,i)^4 + (1-\sqrt{2}\,i)^4$

c) $\dfrac{(3+i)^4-(3-i)^4}{(2+i)^3+(2-i)^3}$ d) $\dfrac{(1-2i)^{13}}{(2+i)^{12}}$

e) $\dfrac{(2-3i)^5(3-2i)^2}{(3+2i)^7}$ f) $\dfrac{(2-3i)^8}{(3+2i)^7} + \dfrac{(5-4i)^9}{(4+5i)^8}$

3. Cho $z_1 = 1 - 3i$, $z_2 = 2 + i$, $z_3 = 3 - 4i$. Tính :

a) $z_1 + 2z_2 - \overline{z}_3$ b) $z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_3$ c) $\overline{z_1 z_2 z_3} + z_2^{\,2} z_3$

4. Tìm $m \in R$ để:

a) Số phức $z = 1 + (1 + mi) + (1 + mi)^2$ là số thuần ảo.

b) Số phức $z = \dfrac{m - 1 + 2(m-1)i}{1 - mi}$ là số thực.

5. Cho biết số phức z thỏa mãn $\dfrac{2z-1}{z+1}$ là số thực. Chứng minh z là số thực.

6. Cho $z = x + yi$ $(x, y \in R)$. Tìm điều kiện của x và y để :

a) z^2 là số thực b) z^2 là số thuần ảo.

Vấn đề 2. Giải phương trình và hệ phương trình đơn giản trên $\mathbb{C}$.

I. PHƯƠNG PHÁP

* Nếu đưa về phương trình bậc nhất theo z, ta tính z và thực hiện các phép tính số phức.

* Nếu phương trình chứa z, $|z|$, $\overline{z}$, ta đặt $z = x + yi$ $(x, y \in R)$

$\Rightarrow \overline{z} = x - yi$ và $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Sau đó ta biến đổi 2 vế theo x, y và cân bằng phần thực, phần ảo ở 2 vế để tính x, y.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau đây với ẩn z:

a) $(2 + i)z = z + 2i - 1$; b) $(1 - i)(z - 2i) = 2 + i$.

Giải

a) $(2 + i)z = z + 2i - 1 \Leftrightarrow z(2 + i - 1) = -1 + 2i$

$\Leftrightarrow z(1 + i) = -1 + 2i$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-1+2i}{1+i} \Leftrightarrow z = \frac{(-1+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-1-2i^2+i+2i}{1-i^2} = \frac{1+3i}{1+1}$$

$$\Leftrightarrow z = = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i.$$

b) $$(1 - i)(z - 2i) = 2 + i \Leftrightarrow z - 2i = \frac{2+i}{1-i} \Leftrightarrow z - 2i = \frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

$$\Leftrightarrow z - 2i = \frac{2+i^2+3i}{1-i^2} \Leftrightarrow z = \frac{1+3i}{2} + 2i \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} + \frac{7}{2}i.$$

Ví dụ 2. Tìm các số thực x, y trong các trường hợp sau:

a) $\frac{x+1}{1-i} = \frac{y-1}{1+i}$; b) $\frac{1}{x-i} + \frac{y}{3-3i} = 2+3i$;

c) $(x + i)(1 + yi) = (3 + 2i)x + 1 - 4i$.

Giải

a) $\frac{x+1}{1-i} = \frac{y-1}{1+i} \Leftrightarrow (x + 1)(1 + i) = (y - 1)(1 - i)$

$\Leftrightarrow x + 1 + (x + 1)i = y - 1 - (y - 1)i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = y-1 \\ x+1 = -y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y = -2 \\ x+y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

b) Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{x-i} + \frac{y}{3-3i} = 2+3i \Leftrightarrow \frac{x+i}{(x-i)(x+i)} + \frac{y(1+i)}{3(1-i)(1+i)} = 2+3i$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+i}{x^2+1} + \frac{y+yi}{3(1+1)} = 2+3i \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+1} + \frac{y}{6} + i\left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{y}{6}\right) = 2+3i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{x^2+1} + \frac{y}{6} = 2 \\ \frac{1}{x^2+1} + \frac{y}{6} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-x}{x^2+1} = 1 \\ \frac{y}{6} = 3 - \frac{1}{x^2+1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x = 0 \\ \frac{y}{6} = 3 - \frac{1}{x^2+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 12 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x = -1 \\ y = 15 \end{cases}$$

c) $(x + i)(1 + yi) = (3 + 2i)x + 1 - 4i$

$\Leftrightarrow x - y + (1 + xy)i = 3x + 1 + (2x - 4)i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 3x+1 \\ 1 + xy = 2x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x-1 \\ 1 + x(-2x-1) = 2x - 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x-1 \\ 2x^2 + 3x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x = -\frac{5}{2} \\ y = 4 \end{cases}.$$

Ví dụ 3. Giải các phương trình sau với ẩn z:

a) $(z + \bar{z})(1 + i) + (\bar{z} - z)(2 + 3i) = 4 - i$;

b) $\frac{z+\bar{z}}{1+i} - \frac{i(z-\bar{z})}{2-2i} = 4+6i$.

Giải

Đặt $z = x + yi \Rightarrow \overline{z} = x - yi$

a) Ta có $\begin{cases} z + \overline{z} = 2x \\ \overline{z} - z = -2yi \end{cases}$

Phương trình $(z + \overline{z})(1 + i) + (\overline{z} - z)(2 + 3i) = 4 - i$ trở thành

$$2x(1 + i) - 2yi(2 + 3i) = 4 - i \Leftrightarrow 2x + 2xi - 4yi + 6y = 4 - i$$

$$\Leftrightarrow 2x + 6y + (2x - 4y)i = 4 - i \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 6y = 4 \\ 2x - 4y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Vậy $z = 1 + i$.

b) Phương trình $\dfrac{z + \overline{z}}{1 + i} - \dfrac{i(z - \overline{z})}{2 - 2i} = 4 + 6i$ trở thành

$$\frac{2x}{1+i} - \frac{2yi^2}{2(1-i)} = 4 + 6i \Leftrightarrow \frac{2x}{1+i} + \frac{2y}{2(1-i)} = 4 + 6i$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x(1-i) + y(1+i)}{(1+i)(1-i)} = 4 + 6i \Leftrightarrow \frac{2x + y + (-2x + y)i}{2} = 4 + 6i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 8 \\ -2x + y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 10 \end{cases}.$$

Vậy $z = -1 + 10i$.

Ví dụ 4. Tìm số phức z, w thỏa $\begin{cases} z + w = 4 + 3i \\ z - iw = 3 - 2i \end{cases}$.

Giải

Hệ phương trình $\begin{cases} z + w = 4 + 3i \\ z - iw = 3 - 2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z + w = 4 + 3i & (1) \\ (1 + i)w = 1 + 5i & (2) \end{cases}$

$$(2) \Rightarrow w = \frac{1 + 5i}{1 + i} = \frac{(1 + 5i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{1 + 5 - i + 5i}{1 + 1} = 3 + 2i$$

$(1) \Rightarrow z = 4 + 3i - w = 4 + 3i - 3 - 2i = 1 + i$

Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm: $\begin{cases} z = 1 + i \\ w = 3 + 2i \end{cases}$.

III. BÀI TẬP

1. Tìm $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa các hệ thức sau:

a) $(x + yi)(3 - 2i) = 13i$; b) $x(1 + i) - y(2 + 3i) = 10$;

c) $(x - 2)(1 - i) + (y + 1)(2 + i) = 2 + 4i$; d) $\dfrac{x}{1 + i} + \dfrac{y}{3 - 3i} = 2 + 3i$;

e) $\dfrac{x(1+i)}{2-i}-\dfrac{(x+y)(2+3i)}{1-2i}=y+1-2i$; f) $\dfrac{x+i}{1-i}=\dfrac{y-i}{1+i}$.

2. Giải các phương trình sau với ẩn z :

a) $(1+i)z=4-2i$ b) $(2i+1)(z+i)=1+i$ c) $\dfrac{z+i}{z}=2+i$

3. Giải các phương trình sau đây với ẩn z:

a) $\dfrac{2z-1}{z+i}=1+i$; b) $\dfrac{i}{z}=\dfrac{1}{2-i}+\dfrac{1}{3+6i}$;

c) $[(1+2i)\overline{z}+2-i][iz+\dfrac{1}{i}]=0$; d) $2z-\overline{z}=(z+\overline{z}+1)(1+i)-2$.

4. Giải các phương trình sau trong C:

a) $z^2=2\overline{z}$; b) $z^2-|z|^2+1=0$;

c) $z^2+|z|=0$; d) $\dfrac{\overline{z}^2+i}{z+1}=i$.

5. Giải các hệ phương trình sau với 2 ẩn x và w:

a) $\begin{cases}2z+w=4\\2i\,\overline{z}+\overline{w}=0\end{cases}$ b) $\begin{cases}z+w=\overline{w}+i\\z-w=\overline{z}+i\end{cases}$ c) $\begin{cases}z+w=1-\overline{w}\\2z+\overline{w}=2+i+w\end{cases}$

Vấn đề 3. Biểu diễn hình học của các số phức

I . PHƯƠNG PHÁP

1) Trong mặt phẳng phức, số phức $z=x+yi$ $(x, y \in R)$ có thể được biểu diễn bằng:

– điểm $M(x; y)$, kí hiệu $M(z)$

– vectơ $\overrightarrow{OM}=(x; y)$

– vectơ $\vec{u}=(x; y)$

2) Biểu diễn hình học của z, $-z$, $\overline{z}$

$M(z)$ và $M(-z)$ đối xứng qua gốc tọa độ .

$M(z)$ và $M(\overline{z})$ đối xứng qua trục Ox.

3) Biểu diễn hình học của $z+z'$, $z-z'$, kz ($k \in R$)

Gọi M, $\vec{u}$ biểu diễn số phức z và M', $\vec{v}$ biểu diễn số phức z'. Ta có :

$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'}$ và $\vec{u}+\vec{v}$ biểu diễn số phức $z+z'$;

$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{M'M}$ và $\vec{u}-\vec{v}$ biểu diễn số phức $z-z'$;

$k\overrightarrow{OM}$ và $k\vec{v}$ biểu diễn số phức kz.

4) Với M, A, B lần lượt biểu diễn số phức z, a, b thì:

$OM=|z|$; $AB=|b-a|$

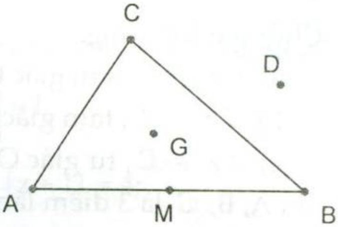
II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho 3 điểm A, B, C không thẳng hàng biểu diễn các số phức a, b, c. Gọi M là trung điểm AB, G là trọng tâm tam giác ABC và D là điểm đối xứng của A qua G. Các điểm M, G, D lần lượt biểu diễn các số phức m, g, d.

a) Tính các số phức m, g, d theo a, b, c.

b) Nếu thêm giả thiết $|a| = |b| = |c|$, chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều nếu và chỉ nếu $a + b + c = 0$.

Giải



a) M là trung điểm của AB

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

$\Leftrightarrow m = \frac{1}{2}(a + b)$

G là trọng tâm tam giác ABC

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \Leftrightarrow g = \frac{1}{3}(a + b + c)$

D là điểm đối xứng của A qua G $\Leftrightarrow$ G là trung điểm của AD

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} \Leftrightarrow 2g = a + d \Leftrightarrow d = 2g - a$

$\Leftrightarrow d = 2.\frac{1}{3}(a + b + c) - a \Leftrightarrow d = \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}c - \frac{1}{3}a$

b) Giả thiết $|a| = |b| = |c| \Leftrightarrow OA = OB = OC$

$\Leftrightarrow$ O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

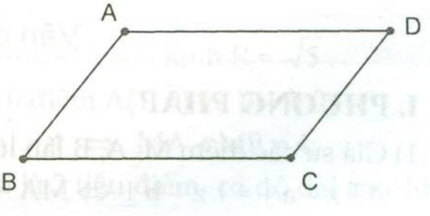
Như vậy tam giác ABC là tam giác đều $\Leftrightarrow O \equiv G$

$\Leftrightarrow g = 0 \Leftrightarrow a + b + c = 0.$

Ví dụ 2. Cho hình bình hành ABCD. Ba đỉnh A, B, C lần lượt biểu diễn các số phức $a = 2 - 2i$, $b = -1 + i$, $c = 5 + mi$ ($m \in \mathbb{R}$)

a) Tính d. b) Định m sao cho ABCD là hình chữ nhật.

Giải



a) ABCD là hình bình hành

$\Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow d - c = a - b$

$\Leftrightarrow d = a + c - b$

$\Leftrightarrow d = 2 - 2i + 5 + mi - (-1 + i)$

$\Leftrightarrow d = 8 + (m - 3)i.$

b) ABCD là hình chữ nhật

$\Leftrightarrow AC = BD \Leftrightarrow |c - a| = |d - b|$

$\Leftrightarrow |5 + mi - 2 + 2i| = |8 + (m - 3)i + 1 - i|$

$\Leftrightarrow |3 + (m+2)i| = |9 + (m-4)i|$

$\Leftrightarrow |3 + (m+2)i|^2 = |9 + (m-4)i|^2 \Leftrightarrow 3^2 + (m+2)^2 = 9^2 + (m-4)^2$

$\Leftrightarrow 9 + m^2 + 4m + 4 = 81 + m^2 - 8m + 16 \Leftrightarrow 12m = 84 \quad \Leftrightarrow m = 7.$

III. BÀI TẬP

1. Trong mặt phẳng phức, ba điểm M, A, B lần lượt biểu diễn các số phức z, $\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{3}\right)z$ và $\frac{i}{\sqrt{3}}z$.

Chứng minh rằng:

a) $\forall z \in \mathbb{C}$, tam giác OMA vuông tại M.

b) $\forall z \in \mathbb{C}$, tam giác MAB là tam giác vuông.

c) $\forall z \in \mathbb{C}$, tứ giác OMAB là hình chữ nhật.

2. Gọi A, B, C là 3 điểm lần lượt biểu diễn các số phức

$a = -1 - i,\ b = i,\ c = 1 + ki\ \ (k \in R)$

a) Định k để A, B, C thẳng hàng.

b) Xét hàm số $w = f(z) = z^2$. Đặt $a' = f(a)$, $b' = f(b)$, $c' = f(c)$. Tính a', b', c'.

c) Gọi A′, B′, C′ lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức a′, b′, c′. Định k để A′, B′, C′ là 3 điểm thẳng hàng.

d) Nếu $\vec{u}$, $\vec{v}$ lần lượt biểu diễn các số phức z, z′. Chứng minh rằng $\vec{u} \perp \vec{v}$ $\Leftrightarrow \frac{z}{z'}$ là số ảo. Áp dụng: tính k để tam giác A′B′C′ vuông tại A′.

3. Cho 3 điểm A, B, C lần lượt biểu diễn các số phức $a = 1$, $b = -1 + \alpha i$ và $c = b^2$.

a) Xác định các số phức được biểu diễn bởi các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$.

b) Xác định α sao cho A, B, C là 3 đỉnh của một tam giác.

c) Với điều kiện ở câu b) chứng minh rằng ABC là tam giác vuông.

d) Tìm số phức d biểu diễn bởi điểm D sao cho ABDC là hình chữ nhật.

4. Cho ba điểm A, B, C biểu diễn các số phức $a = 1 + i$, $b = a^2$ và $c = x - i$ ($x \in \mathbb{R}$). Tìm x sao cho:

a) Tam giác ABC vuông tại B. b) Tam giác ABC cân tại C.

Vấn đề 4. Tìm tập hợp điểm

I. PHƯƠNG PHÁP

1) Giả sử các điểm M, A, B lần lượt biểu diễn các số phức z, a, b.

* $|z - a| = |z - b| \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow$ M thuộc trung trực của đoạn AB.

* $|z - a| + |z - b| = k$ ($k \in \mathbb{R}$, $k > 0$, $k > |a - b|$) $\Leftrightarrow MA + MB = k \Leftrightarrow$ M thuộc elip (E) nhận A, B làm hai tiêu điểm và độ dài trục lớn bằng k.

2) Giả sử M và M′ lần lượt biểu diễn các số phức z và w = f (z).

Đặt z = x + yi và w = u + vi (x, y, u, v ∈ ℝ).

Hệ thức w = f (z) tương đương với 2 hệ thức liên hệ giữa x, y, u, v.

* Nếu biết một hệ thức giữa x, y, ta tìm được một hệ thức giữa u, v và suy ra được tập hợp các điểm M′.

* Nếu biết một hệ thức giữa u, v, ta tìm được một hệ thức giữa x, y và suy ra được tập hợp các điểm M.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z trong các trường hợp sau:

a) $|z+i| = |z-i|$; b) $\left|\dfrac{z+1-3i}{z-1+i}\right| = 1$;

c) $|z-2+i| = \sqrt{5}$; d) $|z-1| + |z+1| = 4$;

e) $\dfrac{2z+1}{z-1}$ là số ảo, $z \neq 1$; f) $\dfrac{z+1}{z-2i}$ là số thực, $z \neq 2i$;

g) $z_0z + \overline{z_0}z + 1 = 0$ với $z_0 = 1 - i$.

Giải

a) Đặt a = – i và b = i

Gọi A(0; –1) và B(0; 1) lần lượt biểu diễn các số phức a và b, suy ra

$|z+i| = |z-a| = MA$ và $|z-b| = MB$

Ta có $|z+i| = |z-i| \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow$ M thuộc đường trung trực của AB, đó chính là trục Ox. Vậy tập hợp các điểm M là trục Ox.

b) $\left|\dfrac{z+1-3i}{z-1+i}\right| = 1 \Leftrightarrow |z+1-3i| = |z-1+i|$ (1)

Đặt a = –1 + 3i biểu diễn bởi điểm A(–1; 3) và b = 1 – i được biểu diễn bởi điểm B(1; –1).

Ta có (1) $\Leftrightarrow |z-a| = |z-b| \Leftrightarrow MA = MB$.

Vậy tập hợp các điểm M là đường trung trực của đoạn AB.

c) Đặt a = 2 – i biểu diễn bởi điểm A(2; –1).

Ta có $|z-2+i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |z-a| = \sqrt{5} \Leftrightarrow MA = \sqrt{5}$.

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm A(2; –1), bán kính $R = \sqrt{5}$.

d) Đặt a = 1 và b = –1, lần lượt được biểu diễn bởi điểm A(1; 0) và B(–1; 0).

Ta có $|z-1| + |z+1| = 4 \Leftrightarrow |z-a| + |z-b| = 4 \Leftrightarrow MA + MB = 4$.

Vậy tập hợp các điểm M là elip (E) nhận A, B là 2 tiêu điểm, có độ dài trục lớn là 4.

e) Đặt z = x + yi (x, y ∈ R). Với z ≠ 1, ta có:

$$\frac{2z+1}{z-1}=\frac{2x+2yi+1}{x+yi-1}=\frac{(2x+1+2yi)(x-1-yi)}{(x-1+yi)(x-1-yi)}$$

$$=\frac{(2x+1)(x-1)+2y^2+i[2y(x-1)-y(2x+1)]}{(x-1)^2+y^2}$$

$\dfrac{2z+1}{z-1}$ là số ảo $\Leftrightarrow$ phần thực của $\dfrac{2z+1}{z-1}$ triệt tiêu

$\Leftrightarrow (2x+1)(x-1)+2y^2=0 \Leftrightarrow 2x^2-x-1+2y^2=0$

$\Leftrightarrow x^2-\dfrac{x}{2}+y^2-\dfrac{1}{2}=0 \;\Leftrightarrow\; (x^2-\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{16})+y^2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{16}$

$\Leftrightarrow \left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2+y^2=\dfrac{9}{16}.$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn (C), tâm $I(\frac{1}{4}; 0)$, bán kính $R=\frac{3}{4}$, bỏ đi điểm A(1; 0).

f) Đặt $z=x+yi$ ($x, y \in R$). Với $z \neq 2i$, ta có:

$$\frac{z+1}{z-2i}=\frac{x+1+yi}{x+(y-2)i}=\frac{(x+1+yi)(x-(y-2)i)}{(x+(y-2)i)(x-(y-2)i)}$$

$$=\frac{x(x+1)+y(y-2)+i[xy-(x+1)(y-2)]}{x^2+(y-2)^2}$$

$\dfrac{z+1}{z-2i}$ là số thực $\Leftrightarrow$ phần ảo triệt tiêu $\Leftrightarrow xy-(x+1)(y-2)=0$

$\Leftrightarrow xy-(xy-2x+y-2)=0 \;\Leftrightarrow 2x-y+2=0 \;\Leftrightarrow\; y=2x+2$

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng có phương trình $y=2x+2$, bỏ đi điểm A(0; 2) vì $z \neq 2i$.

g) Với $z_0=1-i$, đặt $z=x+yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), ta có:

$z_0.z=(1-i)(x+yi)=x+y+(y-x)i$; $\overline{z_0.z}=x+y-(y-x)i$

Như vậy $z_0z+\overline{z_0z}+1=0 \;\Leftrightarrow 2(x+y)+1=0 \;\Leftrightarrow\; 2x+2y+1=0.$

Tập hợp các điểm M là đường thẳng có phương trình $2x+2y+1=0$.

Ví dụ 2. Gọi M và M′ là các điểm lần lượt biểu diễn các số phức z và $z'=\dfrac{1}{z}$ $(z\neq 0)$.

Đặt $z=x+yi$ và $z'=x'+y'i$ ($x, y, x', y' \in \mathbb{R}$)

a) Tính x', y' theo x, y và tính x,y theo x', y'.

b) Cho M di động trên đường tròn (C) tâm A(–1; 1), bán kính $R=\sqrt{2}$. Tìm tập hợp các điểm M′.

c) Cho M di động trên đường thẳng (d): $y=x+1$, tìm tập hợp các điểm M′.

Giải

a) Ta có

$$z' = \frac{1}{\overline{z}} \Leftrightarrow z' = \frac{z}{z.\overline{z}} \Leftrightarrow z' = \frac{z}{|z|^2} \Leftrightarrow x' + y'i = \frac{x+yi}{x^2+y^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ y' = \dfrac{y}{x^2+y^2} \end{cases}.$$

Tương tự, ta có:

$$z' = \frac{1}{\overline{z}} \Leftrightarrow \overline{z} = \frac{1}{z'} \Leftrightarrow z = \frac{1}{\overline{z'}} \Leftrightarrow z = \frac{z'}{z'.\overline{z'}}$$

$$\Leftrightarrow x + yi = \frac{x' + y'i}{x'^2 + y'^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x'}{x'^2+y'^2} \\ y = \dfrac{y'}{x'^2+y'^2} \end{cases}.$$

b) Đường tròn (C), tâm A(–1; 1) bán kính $R = \sqrt{2}$ có phương trình:

$$(C): (x+1)^2 + (y-1)^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0.$$

Điểm M ∈ (C) ⇔ tọa độ M (x; y) thỏa phương trình: $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2 + 2x - 2y}{x^2+y^2} = 0 \ (\text{vì } x^2 + y^2 \neq 0 \text{ do } z \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x' - 2y' + 1 = 0 \ (\text{vì } \frac{x}{x^2+y^2} = x' \text{ và } \frac{y}{x^2+y^2} = y' \text{ theo kết quả câu a})$$

Suy ra tọa độ của điểm M′ (x′; y′) thỏa mãn phương trình $2x' - 2y' + 1 = 0$.

Vậy tập hợp các điểm M′ là đường thẳng có phương trình $2x - 2y + 1 = 0$.

c) Điểm M di động trên đường thẳng (d): $y = x + 1$ nên tọa độ của M(x; y) thỏa $y = x + 1$

$$\Leftrightarrow \frac{y'}{x'^2+y'^2} = \frac{x'}{x'^2+y'^2} + 1 \ (\text{vì theo câu a ta có } y = \frac{y'}{x'^2+y'^2} \text{ và } x = \frac{x'}{x'^2+y'^2}).$$

$$\Leftrightarrow y' = x' + x'^2 + y'^2 \Leftrightarrow x'^2 + y'^2 + x' - y' = 0.$$

Suy ra tọa độ của M′ (x′; y′) thỏa phương trình $x'^2 + y'^2 + x' - y' = 0$

Vậy tập hợp các điểm M′ là đường tròn (C′): $x^2 + y^2 + x - y = 0$.

III. BÀI TẬP

1. Gọi M và P lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) và $w = z^2$.

Tìm tập hợp các điểm P trong các trường hợp sau đây:

a) M thuộc đường thẳng (d): $y = 2x$

b) M thuộc đường thẳng (d): $y = x + 1$.

c) Chứng minh rằng $\forall\ z, z' \in \mathbb{C}$, ta có $|z . z'| = |z| . |z'|$. Từ đó suy ra $|z^2| = |z|^2$.
Tìm tập hợp các điểm P khi M thuộc đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 1$.

d) M thuộc hypebol (C): $y = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$.

2. Tìm tập hợp các điểm M(z) biết z thỏa hệ thức sau:

a) $|z - (2 + i)| = 1$; b) $|z + 1 - i| = |z - (3 - i)|$;

c) $\left|\frac{3-i}{z} - 4\right| = 4$; d) $|(1 - i)z - 4| = 2$;

e) $|z - 4| - |z + 4| = 4\sqrt{3}$.

3. Tìm tập hợp các điểm M(z) biết :

a) $w = \frac{z^2}{z-1}$ là số thực; b) $w = \frac{z^2}{z-i}$ là số thuần ảo;

c) $w = \frac{z+2+i}{z-i}$ là số thực; d) $w = \frac{z+2+i}{z-i}$ là số thuần ảo.

4. Cho điểm M biểu diễn số phức $z = x + yi$ ($x, y \in R$) và điểm P biểu diễn số phức $w = z^2$. Tìm tập hợp các điểm P trong các trường hợp sau:

a) M di động trên đường thẳng d: $y = x - 1$;

b) M di động trên đường tròn tâm O, bán kính $R = 2$;

c) $|z + 2 - i| = |z - 2 + i|$.

5. Gọi M(x; y) và P(x'; y') là điểm lần lượt biểu diễn các số phức z và $w = \frac{1}{z}$.

a) Tính x', y' theo x và y.

b) Tìm tập hợp điểm P biết M di động trên đường thẳng $y = -2x$ $(x \neq 0)$.

c) Tìm tập hợp các điểm P biết M di động trên đường thẳng $x = 1$.

§2. CĂN BẬC HAI CỦA SỐ PHỨC VÀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. Căn bậc hai của số phức

Định nghĩa

Cho số phức w. Mỗi số phức z thỏa mãn $z^2 = w$ được gọi là một căn bậc hai của w. Mỗi căn bậc hai của w là một nghiệm của phương trình $z^2 - w = 0$.

1. Trường hợp w là số thực

– Căn bậc hai của 0 là 0.

– Xét số thực $w = a \neq 0$

* Khi $a > 0$, ta có $z^2 - a = (z - \sqrt{a})(z + \sqrt{a})$.

Phương trình $z^2 - a = 0 \Leftrightarrow z = \sqrt{a}$ hoặc $z = -\sqrt{a}$.

Vậy số thực a dương có hai căn bậc hai là $\sqrt{a}$ và $-\sqrt{a}$.

* Khi $a < 0$, ta có $z^2 - a = z^2 - (-a i^2) = (z - \sqrt{-a}\, i)(z + \sqrt{-a}\, i)$.

Phương trình $z^2 - a = 0 \Leftrightarrow z = \sqrt{-a}\, i$ hoặc $z = -\sqrt{-a}\, i$.

Vậy số thực a âm có hai căn bậc hai là $\sqrt{-a}\, i$ và $-\sqrt{-a}\, i$.

Ví dụ: $-1 = i^2 \Rightarrow -1$ có hai căn bậc hai là i và $-i$

$-a^2 = a^2 i^2 \Rightarrow -a^2$ có 2 căn bậc hai là ai và $-ai$.

2. Trường hợp $w = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$)

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

z là căn bậc hai của w $\Leftrightarrow z^2 = w \Leftrightarrow (x + yi)^2 = a + bi$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xy\, i = a + bi \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này, ta luôn tính được 2 nghiệm (x, y).

Mỗi nghiệm (x, y) của hệ phương trình trên cho ta một căn bậc hai $z = x + yi$ của số phức $w = a + bi$.

Tóm tắt

- Số 0 có đúng 1 căn bậc hai là 0.
- Mỗi số phức khác 0 có đúng 2 căn bậc hai đối nhau.

Đặc biệt, số thực a dương có 2 căn bậc hai là $\sqrt{a}$ và $-\sqrt{a}$; số thực a âm có 2 căn bậc hai là $\sqrt{-a}\, i$ và $-\sqrt{-a}\, i$.

II. Phương trình bậc hai

Xét phương trình $A z^2 + B z + C = 0$ (1) (A, B, C là số phức và $A \neq 0$)

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

Nếu $\Delta \neq 0$, Δ có 2 căn bậc hai là δ và $-\delta$, phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt là $z_1 = \dfrac{-B + \delta}{2A}$ và $z_2 = \dfrac{-B - \delta}{2A}$.

Nếu $\Delta = 0$, phương trình (1) có nghiệm kép $z_1 = z_2 = -\dfrac{B}{2A}$

III. Định lí cơ bản của đại số

Định lí: Mọi phương trình bậc n luôn có n nghiệm phức (không nhất thiết phân biệt)

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1. Tính căn bậc hai, căn bậc bốn của một số phức w

I. PHƯƠNG PHÁP

* Để tính căn bậc hai $z = x + yi$ của số phức $w = a + bi$, ta giải phương trình

$$z^2 = w \Leftrightarrow (x + yi)^2 = a + bi \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xy\, i = a + bi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$. Tính x và y, suy ra z.

* Để tính căn bậc bốn của số phức w, trước hết ta tính căn bậc hai z của w. Sau đó ta lại tính căn bậc hai của căn z.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính căn bậc hai của các số phức sau:

a) -9 b) $3 + 4i$ c) $1 - \sqrt{3}\, i$ d) $-\dfrac{1}{4i}$

Giải

a) Gọi z là căn bậc hai của -9, ta có:

$z^2 = -9 \Leftrightarrow z^2 = 9i^2 \Leftrightarrow z = 3i$ hoặc $z = -3i$

Vậy -9 có 2 căn bậc hai là $3i$ và $-3i$

b) Gọi $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ là căn bậc hai của $3 + 4i$, ta có :

$$z^2 = 3 + 4i \Leftrightarrow (x + yi)^2 = 3 + 4i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xy\, i = 3 + 4i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 & (1) \\ xy = 2 & (2) \end{cases}$$

(2) $\Rightarrow x \neq 0$ và $y = \dfrac{2}{x}$.

(1) $\Rightarrow x^2 - \dfrac{4}{x^2} = 3 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$ (loại) hoặc $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Với $x = 2 \Rightarrow y = 1$; Với $x = -2 \Rightarrow y = -1$

Vậy $3 + 4i$ có 2 căn bậc hai là $2 + i$ và $-2 - i$.

c) $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ là căn bậc hai của $1 - \sqrt{3}\, i$

$$\Leftrightarrow (x + yi)^2 = 1 - \sqrt{3}\, i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xy\, i = 1 - \sqrt{3}\, i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 & (1) \\ 2xy = -\sqrt{3} & (2) \end{cases}$$

(2) $\Rightarrow x \neq 0$ và $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2x}$

(1) $\Rightarrow x^2 - \dfrac{3}{4x^2} = 1 \Leftrightarrow 4x^4 - 4x^2 - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = -\frac{1}{2}$ (loại) hoặc $x^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{2x} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{2x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Vậy có 2 căn bậc hai của $1-\sqrt{3}\,i$ là $z = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ và $-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

d) $z = x + yi$ $(x, y \in R)$ là căn bậc hai của $-\frac{1}{4i}$

$\Leftrightarrow z^2 = -\frac{1}{4i} \Leftrightarrow (x+yi)^2 = \frac{i^2}{4i}$

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = \frac{i}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{8x} \\ x^2 - \frac{1}{64x^2} = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{8x} \\ 64x^4 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{8x} \\ x^4 = \frac{1}{64} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{8x} \\ x^2 = \frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{8x} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

Vậy $-\frac{1}{4i}$ có 2 căn bậc hai là $z = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}i$ và $z = -(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}i)$

Nhận xét : mọi số phức đều có 2 căn bậc hai đối nhau .

Ví dụ 2. a) Tìm số phức z thỏa $z^2 = -164 + 48\sqrt{5}\,i$.

b) Tìm số phức w thỏa $w^4 = -164 + 48\sqrt{5}\,i$.

Giải

a) Đặt $z = x + yi$ $(x, y \in R)$, ta có:

$z^2 = -164 + 48\sqrt{5}\,i \Leftrightarrow (x+yi)^2 = -164 + 48\sqrt{5}\,i$

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xy\,i = -164 + 48\sqrt{5}\,i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -164 & (1) \\ xy = 24\sqrt{5} & (2) \end{cases}$

(2) $\Rightarrow x \neq 0$ và $y = \frac{24\sqrt{5}}{x}$

$(1) \Rightarrow x^2 - \left(\dfrac{24\sqrt{5}}{x}\right)^2 = -164 \Leftrightarrow x^4 + 164x^2 - 2880 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -180$ (loại)

$\Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4$

Với $x = 4 \Rightarrow y = 6\sqrt{5}$; Với $x = -4 \Rightarrow y = -6\sqrt{5}$.

Vậy có 2 số phức z thỏa mãn $z^2 = -164 + 48\sqrt{5}\,i$ và $z = \pm(4 + 6\sqrt{5}\,i)$

b) Ta có $z^2 = -164 + 48\sqrt{5}\,i$ và $w^4 = -164 + 48\sqrt{5}\,i$ suy ra

$w^4 = z^2 \Leftrightarrow (w^2 - z)(w^2 + z) = 0 \Leftrightarrow w^2 = \pm z$

Theo kết quả trên ta có $z = \pm(4 + 6\sqrt{5}\,i) \Rightarrow w^2 = 4 + 6\sqrt{5}\,i$ hoặc $w^2 = -4 - 6\sqrt{5}\,i$

Đặt $w = x + yi$ $(x, y \in R)$

Trường hợp 1:

Với $w^2 = 4 + 6\sqrt{5}\,i$, ta có $(x + yi)^2 = 4 + 6\sqrt{5}\,i$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xy\,i = 4 + 6\sqrt{5}\,i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 4 & (1) \\ 2xy = 6\sqrt{5} & (2) \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow x \neq 0$ và $y = \dfrac{3\sqrt{5}}{x}$

$(1) \Rightarrow x^2 - \left(\dfrac{3\sqrt{5}}{x}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 - 45 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = -5$ (loại) hoặc $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$

$x = 3 \Rightarrow y = \dfrac{3\sqrt{5}}{x} = \sqrt{5}$

$x = -3 \Rightarrow y = \dfrac{3\sqrt{5}}{x} = -\sqrt{5}$

Vậy $w = \pm(3 + \sqrt{5}\,i)$

Trường hợp 2:

Với $w^2 = -4 - 6\sqrt{5}\,i$, ta có $(x + yi)^2 = -4 - 6\sqrt{5}\,i$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xy\,i = -4 - 6\sqrt{5}\,i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -4 & (1) \\ 2xy = -6\sqrt{5} & (2) \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow x \neq 0$ và $y = -\dfrac{3\sqrt{5}}{x}$

$(1) \Rightarrow x^2 - \left(-\dfrac{3\sqrt{5}}{x}\right)^2 = -4 \Leftrightarrow x^4 + 4x^2 - 45 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = -9$ (loại) hoặc $x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$

$x = \sqrt{5} \Rightarrow y = -\dfrac{3\sqrt{5}}{x} = -3$

$x = -\sqrt{5} \Rightarrow y = -\dfrac{3\sqrt{5}}{x} = 3$

Vậy $w = \pm(\sqrt{5} - 3i)$

Kết luận: có 4 số phức w thỏa $w^4 = -164 + 48\sqrt{5}\,i$ là

$w = \pm(3 + \sqrt{5}\,i)$ và $w = \pm(\sqrt{5} - 3i)$

III. BÀI TẬP

1. Tính căn bậc hai của các số phức sau:

a) $-15 - 8i$ b) $1 + 4\sqrt{3}\,i$ c) -4 d) $-5 + 12i$

e) $-8 - 6i$ f) $24 - 10i$ g) $35 + 12i$.

2. a) Tính căn bậc hai của số phức $-23 - 4\sqrt{6}i$.

b) Tính căn bậc bốn của số phức $-23 - 4\sqrt{6}i$.

3. a) Tìm số phức z thỏa $z^4 = -1$.

b) Tìm số phức z thỏa mãn $\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^4 = -1$.

4. Giải phương trình

a) $\left(\dfrac{z-1}{z+i}\right)^4 = 1$ b) $\left(\dfrac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$

Vấn đề 2. Phương trình bậc hai

I. PHƯƠNG PHÁP

1. Dùng hằng đẳng thức đưa phương trình về dạng $(Az + B)^2 - C^2 = 0$ và biến đổi tương đương thành phương trình tích

$$(Az + B - C)(Az + B - C) = 0$$

2. Với phương trình $Az^2 + Bz + C = 0$.

Ta tính $\Delta = B^2 - 4AC$ và tính căn bậc hai của Δ.

Gọi δ là một căn bậc hai của Δ, suy ra nghiệm của phương trình là $z = \dfrac{-B \pm \delta}{2A}$.

3. Chú ý :

a) Ta chứng minh được mọi phương trình bậc hai hệ số thực, nếu $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$ và $y \neq 0$) là 1 nghiệm thì $\overline{z} = x - yi$ cũng là nghiệm của phương trình.

b) Do tính chất của phép nhân số phức, định lí Viet vẫn đúng cho phương trình bậc hai với ẩn $z \in \mathbb{C}$. Do đó các cách tính nhẩm nghiệm của phương trình bậc hai vẫn áp dụng được

Chẳng hạn : $A + B + C = 0 \Rightarrow z = 1,\ z = \dfrac{C}{A}$

$$A - B + C = 0 \Rightarrow z = -1,\ z = -\frac{C}{A}.$$

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải các phương trình bậc hai sau đây:

a) $z^2 + 4z - 5 = 0$; b) $(2z-1)^2 + 9 = 0$;

c) $z^2 - 8z + 16 - 2i = 0$; d) $z^2 + 3z + \frac{25}{4} = 0$.

Giải

a) Phương trình $z^2 + 4z - 5 = 0$ có các hệ số $A + B + C = 1 + 4 - 5 = 0$ nên phương trình có 2 nghiệm là $z_1 = 1$ và $z_2 = -5$.

b) Phương trình $(2z-1)^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow (2z-1)^2 = -9 \Leftrightarrow (2z-1)^2 = (3i)^2$

$\Leftrightarrow 2z - 1 = 3i$ hoặc $2z - 1 = -3i \Leftrightarrow z = \frac{1+3i}{2}$ hoặc $z = \frac{1-3i}{2}$

c) Phương trình $z^2 - 8z + 16 - 2i = 0 \Leftrightarrow (z-4)^2 = 2i$

$\Leftrightarrow (z-4)^2 = (1+i)^2 \Leftrightarrow z - 4 = 1 + i$ hoặc $z - 4 = -1 - i$.

$\Leftrightarrow z = 5 + i$ hoặc $z = 3 - i$.

d) $z^2 + 3z + \frac{25}{4} = 0$.

$\Delta = 3^2 - 4.\frac{25}{4} = -16 = (4i)^2$. Phương trình có 2 nghiệm là $z = \frac{-3 \pm 4i}{2}$.

Ví dụ 2. Giải các phương trình bậc hai hệ số phức sau đây:

a) $z^2 - 7z + 11 + 3i = 0$ b) $z^2 + 2(1-2i)z - (7+4i) = 0$

c) $z^2 - 2(2-i)z + 6 - 8i = 0$ d) $z^2 - (2+i)z + i + 1 = 0$

Giải

a) $z^2 - 7z + 11 + 3i = 0$

$\Delta = 49 - 44 - 12i = 5 - 12i$.

Đặt $\Delta = (x + yi)^2$, $x, y \in R$

Ta có $(x+yi)^2 = 5 - 12i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 & (1) \\ 2xy = -12 & (2) \end{cases}$

$(2) \Rightarrow x \neq 0$ và $y = -\frac{6}{x}$

$(1) \Rightarrow x^2 - \frac{36}{x^2} = 5 \Leftrightarrow x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = -4$ (loại) hoặc $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$.

$x = 3 \Rightarrow y = -2$; $x = -3 \Rightarrow y = 2$

Vậy $\Delta = (3-2i)^2$

Phương trình có 2 nghiệm là $z_1 = \frac{7+3-2i}{2} = 5 - i$ và $z_2 = \frac{7-3+2i}{2} = 2 + i$

b) $z^2 + 2(1 - 2i)z - (7 + 4i) = 0$

$\Delta' = (1 - 2i)^2 + 7 + 4i = 1 - 4 - 4i + 7 + 4i = 4$

Phương trình có 2 nghiệm là $z_1 = -1 + 2i + 2 = 1 + 2i$ và $z_2 = -1 + 2i - 2 = -3 + 2i$

c) $z^2 - 2(2 - i)z + 6 - 8i = 0$

$\Delta' = (2 - i)^2 - 6 + 8i = 4 - 1 - 4i - 6 + 8i = -3 + 4i.$

Đặt $-3 + 4i = (x + yi)^2$ $(x, y \in R)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 & (1) \\ 2xy = 4 & (2) \end{cases}$

(2) $\Rightarrow x \neq 0$ và $y = \dfrac{2}{x}$.

(1) $\Rightarrow x^2 - \dfrac{4}{x^2} = -3 \Leftrightarrow x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 1$ hoặc $x^2 = -4$ (loại) $\Leftrightarrow x = \pm 1$

$x = 1 \Rightarrow y = 2$; $x = -1 \Rightarrow y = -2$

Vậy $\Delta' = -3 + 4i = (1 + 2i)^2$

Phương trình có 2 nghiệm là $z_1 = 2 - i + 1 + 2i = 3 + i$ và $z_2 = 2 - i - 1 - 2i = 1 - 3i$

d) $z^2 - (2 + i)z + i + 1 = 0$

Phương trình có các hệ số thỏa $a + b + c = 1 - 2 - i + i + 1 = 0$, suy ra phương trình có 2 nghiệm là $z_1 = 1$ và $z_2 = 1 + i$.

Ví dụ 3.

a) Gọi z_1, z_2 là 2 nghiệm của phương trình bậc hai có hệ số phức $Az^2 + Bz + C = 0$ $(A \neq 0)$

Chứng minh rằng: $z_1 + z_2 = \dfrac{-B}{A}$ và $z_1.z_2 = \dfrac{C}{A}$

Áp dụng : Biết phương trình bậc hai $(1 - i)z^2 + Bz + C = 0$ có 2 nghiệm là $z_1 = 2$ và $z_2 = 1 + 2i$. Tính B và C.

b) Cho 2 số phức có tổng $z_1 + z_2 = S$ và tích $z_1.z_2 = P$. Chứng minh rằng z_1 và z_2 là 2 nghiệm của phương trình bậc hai $z^2 - Sz + P = 0$.

Áp dụng: Tìm 2 số phức có tổng bằng 4 và tích bằng y4 + 2i .

Giải

a) Phương trình $Az^2 + Bz + C = 0$ có $\Delta = B^2 - 4AC$. Gọi δ là một căn bậc hai của Δ.

Phương trình có 2 nghiệm là $z_1 = \dfrac{-B + \delta}{2A}$ và $z_2 = \dfrac{-B - \delta}{2A}$

Ta có $z_1 + z_2 = \dfrac{-B + \delta}{2A} + \dfrac{-B - \delta}{2A} = -\dfrac{B}{A}$

và $z_1.z_2 = \left(\dfrac{-B + \delta}{2A}\right)\left(\dfrac{-B - \delta}{2A}\right) = \dfrac{(-B)^2 - \delta^2}{4A^2} = \dfrac{B^2 - (B^2 - 4AC)}{4A^2} = \dfrac{C}{A}$

Áp dụng: $(1 - i)z^2 + Bz + C = 0$ có 2 nghiệm là $z_1 = 2$ và $z_2 = 1 + 2i$.

Áp dụng kết quả trên, ta có :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -\dfrac{B}{A} \\ z_1.z_2 = \dfrac{C}{A} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + (1+2i) = \dfrac{-B}{1-i} & (1) \\ 2.(1+2i) = \dfrac{C}{1-i} & (2) \end{cases}$$

(1) $\Rightarrow$ $B = (-1+i)(3+2i) = -3 + 2i^2 - 2i + 3i = -5 + i$

(2) $\Rightarrow$ $C = (1-i)(2+4i) = 2 - 4i^2 - 2i + 4i = 6 + 2i$

Vậy $B = -5 + i$ và $C = 6 + 2i$.

b) Hiển nhiên z_1 và z_2 là 2 nghiệm của phương trình bậc hai

$(z - z_1)(z - z_2) = 0$

$\Leftrightarrow$ $z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 z_2 = 0$

$\Leftrightarrow$ $z^2 - Sz + P = 0$.

Áp dụng:

Gọi 2 số phức phải tìm là z_1 và z_2. Theo giả thiết ta có

$S = z_1 + z_2 = 4$ và $P = z_1.z_2 = 4 + 2i$

Do đó z_1 và z_2 là 2 nghiệm của phương trình bậc hai

$z^2 - Sz + P = 0$ hay $z^2 - 4z + 4 + 2i = 0$.

Phương trình trên tương đương với $(z-2)^2 = -2i$

$\Leftrightarrow$ $(z-2)^2 = (1-i)^2$ $\Leftrightarrow$ $z - 2 = \pm(1-i)$

$\Leftrightarrow$ $z = 2 + 1 - i = 3 - i$ hoặc $z = 2 - 1 + i = 1 + i$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $z_1 = 3 - i$ và $z_2 = 1 + i$.

Ví dụ 4. Cho phương trình bậc hai hệ số thực $Az^2 + Bz + C = 0$ (1), với $A \neq 0$

a) Chứng minh rằng nếu phương trình (1) có 1 nghiệm thực z_1 thì nghiệm còn lại z_2 cũng là số thực.

b) Chứng minh rằng nếu phương trình (1) có 1 nghiệm z_0 không là số thực thì $\overline{z_0}$ cũng là 1 nghiệm.

Áp dụng: Tìm phương trình bậc hai hệ số thực biết phương trình có một nghiệm là $2 + i$.

Giải

a) Ta biết rằng phương trình bậc hai $Az^2 + Bz + C = 0$ (1) có 2 nghiệm là z_1 và z_2.

Theo công thức Viet ta có $z_1 + z_2 = -\dfrac{B}{A}$

Vì $A, B \in R$ nên $-\dfrac{B}{A} \in R$ và ta cũng có $z_1 \in R$. Vậy $z_2 \in R$

b) Ta có z_0 là nghiệm của phương trình $Az^2 + Bz + C = 0$ nên:

$Az_0^2 + Bz_0 + C = 0 \Rightarrow \overline{Az_0^2 + Bz_0} + C = 0$

Vì liên hợp của số thực là chính số thực đó, suy ra $A\left(\overline{z_0}\right)^2 + B\overline{z_0} + C = 0$.

Vậy $\overline{z_0}$ cũng là nghiệm của phương trình $Az^2 + Bz + C = 0$.

Áp dụng :

Theo chứng minh trên, phương trình bậc hai hệ số thực có một nghiệm là

$z_1 = 2 + i$ thì nghiệm kia là $z_2 = 2 - i$

Ta có $S = z_1 + z_2 = (2 + i) + (2 - i) = 4$

và $P = z_1.z_2 = (2 + i)(2 - i) = 4 - i^2 = 4 + 1 = 5$

Vậy z_1, z_2 là 2 nghiệm của phương trình bậc hai

$z^2 - Sz + P = 0$ hay $z^2 - 4z + 5 = 0$.

III. BÀI TẬP

1. Giải các phương trình sau:

a) $z^2 - 4z + 13 = 0$ b) $z^2 - (5 + 2i)z + 5 + 5i = 0$

c) $z^2 - 4z + 4 + 2i = 0$ d) $z^2 - (4 + i)z + 5 + i = 0$

2. Tìm phương trình bậc hai hệ số thực biết một nghiệm là $3 - 2i$.

3. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 + z + 1 = 0$.

a) Tính z_1, z_2 b) Chứng minh $z_1^2 = z_2$ và $z_2^2 = z_1$.

4. Tìm các số phức a và b sao cho phương trình $(2 + i)z^2 + az + b = 0$ có 2 nghiệm là

$z_1 = 3 + i$ và $z_2 = 1 - 2i$

5. Giải các phương trình sau:

a) $z^2 + 2|z| = 0$ b) $z^2 + i|z| = 0$

c) $iz^2 + |z| + 1 = 0$ d) $z^2 + \overline{z} = 0$

Vấn đề 3. Phương trình bậc ba: $Az^3 + Bz^2 + Cz + D = 0$ $(A \neq 0)$

I. PHƯƠNG PHÁP

Theo định lí cơ bản của đại số, phương trình bậc ba có đúng 3 nghiệm phức (không nhất thiết phân biệt).

1) Để giải phương trình bậc ba $Az^3 + B\,z^2 + Cz + D = 0$ $(A \neq 0)$ (1), ta cần biết một nghiệm z_0 của phương trình. Khi đó phương trình (1) được biến đổi thành phương trình tích:

$$(1) \Leftrightarrow (z - z_0)(Az^2 + b\,z + c) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z - z_0 = 0 \\ Az^2 + bz + c = 0 \end{array}\right.$$

Muốn xác định $Az^2 + b\,z + c$, ta có thể dùng một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta thực phép chia đa thức $Az^3 + Bz^2 + Cz + D$ cho $z - z_0$, thương sẽ là $Az^2 + bz + c$.

Cách 2: Dùng sơ đồ Horner để xác định các hệ số A, b, c của đa thức thương $Az^2 + bz + c$.

2) Đôi khi ta có thể xác định z_0 bằng cách nhẩm nghiệm như sau:

Nếu A + B + C + D = 0 thì phương trình có 1 nghiệm là $z_0 = 1$.

Nếu A – B + C – D = 0 thì phương trình có 1 nghiệm là $z_0 = -1$.

3) Việc biến đổi thành phương trình tích có thể thực hiện dễ dàng nếu ta có thể đặt nhân tử chung.

4) Ta biết rằng nếu 1 phương trình đa thức hệ số thực có 1 nghiệm phức $z_0 = x + yi$ ($x, y \in R$ và $y \neq 0$) thì $\overline{z_0} = x - yi$ cũng là 1 nghiệm. Như vậy:

* Mọi phương trình bậc 3 hệ số thực có ít nhất 1 nghiệm thực, nghĩa là

– hoặc có 3 nghiệm thực

– hoặc có 1 nghiệm thực và 2 nghiệm phức (không thực) liên hợp nhau.

* Muốn giải phương trình bậc 3 hệ số thực, ta thường phải tìm nghiệm thực của phương trình rồi biến đổi thành phương trình tích. Nghiệm thực này có thể tính chính xác nhờ máy tính bỏ túi (nếu là nghiệm hữu tỉ)

* Nếu biết phương trình bậc 3 hệ số thực P(z) = 0 có một nghiệm không là số thực z_0 thì $\overline{z_0}$ cũng là nghiệm, nên phương trình phải có dạng

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_0)(z - \overline{z_0}) = 0.$$

Chia P(z) cho $(z - z_0)(z - \overline{z_0}) = z^2 - (z_0 + \overline{z_0})z + z_0.\overline{z_0}$ sẽ tìm được thừa số $z - z_1$.

Như vậy phương trình có 3 nghiệm là z_0, $\overline{z_0}$ và z_1.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau:

a) $z^3 - (2 + i)z^2 + (2 + 2i)z - 2i = 0$ biết một nghiệm là $z_1 = i$.

b) $z^3 + 4z^2 + (4 + i)z + 3 + 3i = 0$ biết một nghiệm là $z_1 = -i$.

c) $z^3 - z^2 + (2 - 2i)z + 2 + 4i = 0$ biết một nghiệm là $z_1 = 1 - i$.

Giải

a) Chia đa thức $P(z) = z^3 - (2 + i)z^2 + (2 + 2i)z - 2i$ cho $z - i$ ta được:

Phương trình $z^3 - (2 + i)z^2 + (2 + 2i)z - 2i = 0$

$$\Leftrightarrow (z - i)(z^2 - 2z + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} z - i = 0 & (1) \\ z^2 - 2z + 2 = 0 & (2) \end{array}\right.$$

(1) $\Leftrightarrow z = i$

(2) $\Leftrightarrow z^2 - 2z + 2 = 0$. Ta có: $\Delta' = 1 - 2 = -1 = i^2$.

(2) $\Leftrightarrow z = 1 + i$ hoặc $z = 1 - i$

Vậy phương trình có 3 nghiệm: $z_1 = i$, $z_2 = 1 + i$ và $z_3 = 1 - i$.

b) Chia đa thức $P(z) = z^3 + 4z^2 + (4 + i)z + 3 + 3i$ cho $z + i$

Phương trình $z^3 + 4z^2 + (4 + i)z + 3 + 3i = 0$

$$\Leftrightarrow (z + i)(z^2 + (4 - i)z + 3 - 3i) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} z + i = 0 & (1) \\ z^2 + (4 - i)z + 3 - 3i = 0 & (2) \end{array}\right.$$

(1) $\Leftrightarrow z = -i$

(2) $\Leftrightarrow z^2 + (4 - i)z + 3 - 3i = 0$

$\Delta = (4 - i)^2 - 12 + 12i = 16 - 1 - 8i - 12 + 12i = 3 + 4i$

Đặt $3 + 4i = (x + yi)^2$, x và y $\in$ R

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = 3 + 4i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 & \text{(i)} \\ 2xy = 4 & \text{(ii)} \end{cases}$

(ii) $\Rightarrow x \neq 0$ và $y = \dfrac{2}{x}$

(i) $\Rightarrow x^2 - \dfrac{4}{x^2} = 3 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = -1$ (loại) hoặc $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

$x = 2 \Rightarrow y = 1$; $x = -2 \Rightarrow y = -1$

Vậy $\Delta = (2 + i)^2$.

Phương trình $z^2 + (4 - i)z + 3 - 3i = 0$ có 2 nghiệm là

$z = \dfrac{-4 + i + 2 + i}{2} = -1 + i$ và $z = \dfrac{-4 + i - 2 - i}{2} = -3$

Vậy phương trình $z^3 + 4z^2 + (4 + i)z + 3 + 3i = 0$ có 3 nghiệm là :

$z_1 = -i$, $z_2 = -1 + i$ và $z_3 = -3$

c) Chia đa thức $P(z) = z^3 - z^2 + (2 - 2i)z + 2 + 4i$ cho $z - (1 - i)$

Phương trình $z^3 - z^2 + (2 - 2i)z + 2 + 4i = 0$

$\Leftrightarrow (z - 1 + i)(z^2 - iz + 1 - 3i) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} z - 1 + i = 0 & (1) \\ z^2 - iz + 1 - 3i = 0 & (2) \end{array}\right.$

(1) $\Leftrightarrow z = 1 - i$

(2) $\Leftrightarrow z^2 - iz + 1 - 3i = 0$

$\Delta = i^2 - 4 + 12i = -5 + 12i$

Đặt $-5 + 12i = (x + yi)^2$ với x, y $\in$ R

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = -5 + 12i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 & \text{(i)} \\ 2xy = 12 & \text{(ii)} \end{cases}$

(ii) $\Leftrightarrow x \neq 0$ và $y = \dfrac{6}{x}$

(i) $\Leftrightarrow x^2 - \dfrac{36}{x^2} = -5 \Leftrightarrow x^4 + 5x^2 - 36 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 4$ hoặc $x^2 = -9$ (loại) $\Leftrightarrow x = \pm 2$

$x = 2 \Rightarrow y = 3$; $x = -2 \Rightarrow y = -3$

Vậy $\Delta = (2 + 3i)^2$

Phương trình (2) có 2 nghiệm là $z = \dfrac{i + 2 + 3i}{2} = 1 + 2i$ và $z = \dfrac{i - 2 - 3i}{2} = -1 - i$

Vậy phương trình $z^3 - z^2 + (2 - 2i)z + 2 + 4i = 0$ có 3 nghiệm là

$z_1 = 1 - i$, $z_2 = 1 + 2i$ và $z_3 = -1 - i$.

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau:

a) $z^3 - (1 + 2i)z^2 + 2(1 + i)z - 2 = 0$

b) $z^3 - 2iz^2 + (2 - i)z + 3 + i = 0$

c) $z^3 - (2 + i)z^2 + z - 2 - i = 0$

Giải

a) Các hệ số của phương trình $z^3 - (1 + 2i)z^2 + 2(1 + i)z - 2 = 0$ thỏa mãn :

$A + B + C + D = 1 - 1 - 2i + 2(1 + i) - 2 = 0$

Vậy phương trình nhận $z = 1$ là nghiệm .

Chia đa thức $P(z) = z^3 - (1 + 2i)z^2 + 2(1 + i)z - 2$ cho $z - 1$:

Phương trình $z^3 - (1 + 2i)z^2 + 2(1 + i)z - 2 = 0$ tương đương với

$$(z - 1)(z^2 - 2iz + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} z - 1 = 0 & (1) \\ z^2 - 2iz + 2 = 0 & (2) \end{array}\right.$$

(1) $\Leftrightarrow x = 1$.

(2) $\Leftrightarrow z^2 - 2iz + 2 = 0$

$\Delta' = (-i)^2 - 2 = -1 - 2 = -3 = 3i^2$

Phương trình (2) có 2 nghiệm là $z = i \pm i\sqrt{3} = (1 \pm \sqrt{3})i$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm là

$z_1 = 1$, $z_2 = (1 + \sqrt{3})i$ và $z_3 = (1 - \sqrt{3})i$

b) Các hệ số của phương trình $z^3 - 2iz^2 + (2 - i)z + 3 + i = 0$ thỏa mãn :

$A - B + C - D = 1 + 2i + 2 - i - 3 - i = 0$ nên phương trình nhận $z = -1$ là 1 nghiệm .

Chia đa thức $P(z) = z^3 - 2iz^2 + (2 - i)z + 3 + i$ cho $z - (-1)$

Phương trình $z^3 - 2iz^2 + (2 - i)z + 3 + i = 0$ tương đương với

$$(z + 1)[\, z^2 - (1 + 2i)z + 3 + i] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} z + 1 = 0 & (1) \\ z^2 - (1 + 2i)z + 3 + i = 0 & (2) \end{array}\right.$$

(1) $\Leftrightarrow z = -1$

(2) $\Leftrightarrow z^2 - (1 + 2i)z + 3 + i = 0$

$\Delta = (1 + 2i)^2 - 12 - 12i = 1 - 4 + 4i - 12 - 12i = -15 - 8i$

Đặt $-15 - 8i = (x + yi)^2$, với $x, y \in R$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = -15 - 8i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -15 & (i) \\ 2xy = -8 & (ii) \end{cases}$$

(ii) $\Leftrightarrow x \neq 0$ và $y = -\dfrac{4}{x}$

(i) $\Leftrightarrow x^2 - \dfrac{16}{x^2} = -15 \Leftrightarrow x^4 + 15x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1$ hoặc $x^2 = -16$ (loại)

$\Leftrightarrow x = \pm 1$

$x = 1 \Rightarrow y = -4$; $x = -1 \Rightarrow y = 4$

Vậy $\Delta = (1 - 4i)^2$

Phương trình (2) có 2 nghiệm là

$$z = \frac{1 + 2i + 1 - 4i}{2} = 1 - i \text{ hoặc } z = \frac{1 + 2i - 1 + 4i}{2} = 3i$$

Kết luận : Phương trình $z^3 - 2iz^2 + (2 - i)z + 3 + i = 0$ có 3 nghiệm là:

$z_1 = -1$, $z_2 = 1 - i$ và $z_3 = 3i$

c) Phương trình $z^3 - (2 + i)z^2 + z - 2 - i = 0$ tương đương với

$z^2(z - 2 - i) + z - 2 - i = 0$

$\Leftrightarrow (z - 2 - i)(z^2 + 1) = 0$

$\Leftrightarrow z - 2 - i = 0$ hoặc $z^2 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow z = 2 + i$ hoặc $z^2 = -1$

$\Leftrightarrow z = 2 + i$ hoặc $z = \pm i$

Vậy phương trình $z^3 - (2 + i)z^2 + z - 2 - i = 0$ có 3 nghiệm là

$z_1 = 2 + i$, $z_2 = i$ và $z_3 = -i$.

III. BÀI TẬP

1. Giải các phương trình:

a) $z^3 - (1 + i)z^2 + az + b - 4i = 0$, a, b $\in$ R và biết phương trình có 1 nghiệm là $z = 1 + i$.

b) $z^3 + aiz^2 + (i - b)z - 2 - 2i = 0$, a, b $\in$ R và biết phương trình có 1 nghiệm là $z = 1 - i$.

2. Giải các phương trình:

a) $2z^3 + 9z^2 + 14z + 5 = 0$

b) $z^3 - 7z^2 + 17z - 15 = 0$

c) $z^3 - (6 + \sqrt{2})z^2 + (13 + 6\sqrt{2})z - 13\sqrt{2} = 0$ biết phương trình có 1 nghiệm là $z_1 = 3 - 2i$.

3. Giải các phương trình:

a) $z^3 - 2z^2 + 25z + b = 0$, b $\in$ R và biết phương trình có nghiệm thuần ảo.

b) $z^3 + bz^2 + (9 - i)z - 6 + 2i = 0$, b $\in$ R và biết phương trình có nghiệm thực.

Vấn đề 4. Phương trình bậc bốn $Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E = 0$ $(A \neq 0)$

I. PHƯƠNG PHÁP

1) Với dạng phương trình trùng phương, ta đặt $w = z^2$, sẽ đưa về phương trình bậc hai theo w.

Giải phương trình này, tính w rồi lại giải phương trình $w = z^2$ để tính z.

2) Cho phương trình $P(z) = Az^4 + B z^3 + Cz^2 + Dz + E = 0$ (1).

Nếu $A + B + C + D + E = 0$ thì phương trình (1) có một nghiệm là $z = 1$. Chia P(z) cho $z - 1$, phương trình (1) tương đương với phương trình

$$(z - 1)(Az^3 + b z^2 + c z + d) = 0.$$

3) Nếu $A - B + C - D + E = 0$ thì (1) có một nghiệm là $z = -1$. Chia P(z) cho $z + 1$, phương trình (1) tương đương với phương trình

$$(z + 1)(Az^3 + b z^2 + c z + d) = 0.$$

Như vậy ta nên viết các hệ số của phương trình để xem phương trình có rơi vào 2 trường hợp đặc biệt này không .

4) Trường hợp phương trình hệ số thực, nếu biết 1 nghiệm z_0 (không là số thực) thì $\overline{z_0}$ cũng là nghiệm.

Do đó phương trình có dạng $(z - z_0)(z - \overline{z_0})(Az^2 + bz + c) = 0$.

Khai triển phương trình này và đồng nhất với phương trình đã cho sẽ tìm được hệ số b và c.

Giải phương trình $Az^2 + bz + c = 0$ ta được 2 nghiệm z_1, z_2.

Như vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm là: z_0, $\overline{z_0}$, z_1 và z_2.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải các phương trình:

a) $z^4 + 4z^2 - 5 = 0$

b) $z^4 - (8 + 8i)z^2 + 63 + 16i = 0$

c) $iz^4 + 2(1 + 2i)z^2 + 8 = 0$

Giải

a) $z^4 + 4z^2 - 5 = 0$

Ta coi là phương trình bậc hai theo z^2, phương trình có 2 nghiệm

$z^2 = 1$ hoặc $z^2 = -5 = 5i^2$

$\Leftrightarrow\ z = \pm 1$ hoặc $z = \pm \sqrt{5}\, i$

b) Đặt $w = z^2$, phương trình $z^4 - (8 + 8i)z^2 + 63 + 16i = 0$ (1) trở thành

$w^2 - (8 + 8i)w + 63 + 16i = 0$

$\Leftrightarrow\ w^2 - 2(4 + 4i)w + 63 + 16i = 0$ (2)

$\Delta' = (4 + 4i)^2 - 63 - 16i = 32i - 63 - 16i = -63 + 16i = (1 + 8i)^2$

Phương trình (2) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} w = 4 + 4i + 1 + 8i = 5 + 12i \\ w = 4 + 4i - 1 - 8i = 3 - 4i \end{array}\right.$

$w = 5 + 12i \Leftrightarrow z^2 = 5 + 12i = (3 + 2i)^2 \Leftrightarrow z = \pm (3 + 2i)$

$w = 3 - 4i \Leftrightarrow z^2 = 3 - 4i = (2 - i)^2 \Leftrightarrow z = \pm (2 - i)$

Vậy phương trình (1) có 4 nghiệm là: $z = \pm (3 + 2i)$ và $z = \pm (2 - i)$

c) $iz^4 + 2(1 + 2i)z^2 + 8 = 0$

Đặt $w = z^2$, phương trình $iz^4 + 2(1 + 2i)z^2 + 8 = 0$ (1) trở thành

$$iw^2 + 2(1 + 2i)w + 8 = 0 \quad (2)$$

$$\Delta' = (1 + 2i)^2 - 8i = 1 + 4i^2 + 4i - 8i = 1 + 4i^2 - 4i = (1 - 2i)^2$$

Phương trình (2) có 2 nghiệm là: $w_1 = \dfrac{-1 - 2i + 1 - 2i}{i} = -4$

và $w_2 = \dfrac{-1 - 2i - 1 + 2i}{i} = -\dfrac{2}{i} = -\dfrac{2i}{i^2} = 2i$

$w = -4 \Leftrightarrow z^2 = 4i^2 \Leftrightarrow z = \pm 2i$

$w = 2i \Leftrightarrow z^2 = (1 + i)^2 \Leftrightarrow z = \pm(1 + i)$

Vậy phương trình $iz^4 + 2(1 + 2i)z^2 + 8 = 0$ có 4 nghiệm là: $z = \pm 2i$ và $z = \pm(1 + i)$.

Ví dụ 2. Cho phương trình bậc bốn hệ số thực

$$P(z) = z^4 - 4z^3 + 9z^2 + mz + 20 = 0,\ m \in R.$$

Biết phương trình có 1 nghiệm $z_1 = -2i$. Tính m và các nghiệm còn lại.

Giải

Vì $z_1 = -2i$ là nghiệm của phương trình $z^4 - 4z^3 + 9z^2 + mz + 20 = 0$

Nên ta có $(-2i)^4 - 4(-2i)^3 + 9(-2i)^2 + m(-2i) + 20 = 0$

$\Leftrightarrow 16 - 32i - 36 - 2mi + 20 = 0$

$\Leftrightarrow (-32 - 2m)i = 0 \Leftrightarrow m = -16$

Phương trình trở thành $P(z) = z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 16z + 20 = 0$ (1)

Ta biết rằng nếu một phương trình đa thức hệ số thực nhận z_1 là một nghiệm phức, không thực, $z_1 = x + yi$ ($x, y \in R, y \neq 0$) thì $\overline{z_1} = x - yi$ cũng là nghiệm của phương trình. Như vậy phương trình nhận 2 nghiệm là $z_1 = -2i$ và $z_2 = 2i$. Do đó phương trình (1) phải có dạng :

$P(z) = (z - 2i)(z + 2i)(z^2 + az + b) = 0$ $(a, b \in R)$

$\Leftrightarrow P(z) = (z^2 + 4)(z^2 + az + b) = 0$

$\Leftrightarrow P(z) = z^4 + az^3 + (b + 4)z^2 + 4az + 4b = 0$ (2)

Đồng nhất hệ số của 2 phương trình (1) và (2) ta được $a = -4$ và $b = 5$.

Vậy phương trình $P(z) = z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 16z + 20 = 0$ (1)

$$\Leftrightarrow (z^2 + 4)(z^2 - 4z + 5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 + 4 = 0 \\ z^2 - 4z + 5 = 0 \end{array}\right.$$

$z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -4 \Leftrightarrow z = \pm 2i$

$z^2 - 4z + 5 = 0$ $(\Delta' = 4 - 5 = -1 = i^2)$

$\Leftrightarrow z = 2 \pm i.$

Vậy phương trình có 4 nghiệm: $z = \pm 2i$ và $z = 2 \pm i$.

III. BÀI TẬP

1. Giải phương trình sau biết phương trình có nghiệm thực:

$$P(z) = z^4 + z^3 - (3 + i)z^2 - 4z + 4i - 4 = 0.$$

2. Giải phương trình sau, biết phương trình có nghiệm thuần ảo:

$$P(z) = z^4 + 2iz^3 - z^2 + 2iz - 2 = 0$$

3. Giải phương trình $z^4 - 3z^3 + (2 - i)z^2 + 3z - 3 + i = 0$ (1).

§3. DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC VÀ ỨNG DỤNG

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

I. Số phức dưới dạng lượng giác

1. Acgumen của số phức khác 0

Định nghĩa 1

Cho số phức $z \neq 0$. Gọi M là điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn số z. Số đo (bằng radian) của mỗi góc lượng giác (Ox, OM) được gọi là một acgumen của z.

Chú ý:

* Nếu φ là một acgumen của z thì mọi acgumen của z có dạng $\varphi + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
* Hai số phức z và mz (m là số thực dương) có acgumen sai khác $k2\pi$, các điểm biểu diễn chúng thuộc cùng một tia gốc O.

2. Dạng lượng giác của số phức

Định nghĩa 2

Cho số phức $z \neq 0$, gọi r là môđun của z và φ là một acgumen của z thì số phức z được viết dưới dạng $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Chú ý: * Dạng $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ được gọi là dạng lượng giác của z.

* Dạng $z = a + bi$ ($a, b \in R$) được gọi là dạng đại số của z.

II. Nhân và chia số phức dưới dạng lượng giác

Định lí

Nếu $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ và $z' = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$, ($r \geq 0$, $r' \geq 0$)

thì $zz' = r.r'\,[\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')]$ và $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'}[\cos(\varphi - \varphi') + i\sin(\varphi - \varphi')]$.

III. Công thức Moivre

1. Công thức Moivre

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + \sin n\varphi)$$

Đặc biệt khi $r = 1$, ta có $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$.

2. Ứng dụng vào lượng giác

Đối chiếu công thức Moivre và khai triển lũy thừa bậc n của nhị thức $\cos\varphi + i\sin\varphi$, ta có thể biểu diễn $\cos n\varphi$ và $\sin n\varphi$ theo các lũy thừa của $\cos\varphi$ và $\sin\varphi$.

Ví dụ : cos3φ + i sin3φ = (cosφ + i sinφ)3

$\Leftrightarrow$ cos3φ + isin3φ = cos³φ + 3cos²φ.(isinφ) + 3cosφ.(isinφ)² + (isinφ)³

$\Leftrightarrow$ cos3φ + i sin3φ = cos³φ – 3cosφ.sin²φ + i(3cos²φ.sinφ – sin³φ)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi.\sin^2\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi \\ \sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi.\sin\varphi - \sin^3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi \end{cases}.$$

3. Căn bậc hai của số phức dưới dạng lượng giác

Số phức z = r(cosφ + isinφ), r > 0 có 2 căn bậc hai là

$$\sqrt{r}(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}) \text{ và } -\sqrt{r}(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}) = \sqrt{r}\left(\cos(\frac{\varphi}{2}+\pi) + i\sin(\frac{\varphi}{2}+\pi)\right)$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: Viết số phức dưới dạng lượng giác

I. PHƯƠNG PHÁP

1. Để viết số phức z = a + bi (a, b ∈ R) dưới dạng lượng giác $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

– Tìm $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

– Đặt $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ và $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, từ đó suy ra φ là một acgumen của z.

2. Chú ý các công thức biến đổi lượng giác :

$$1 + \cos2\varphi + i\sin2\varphi = 2\cos^2\varphi + 2i\sin\varphi.\cos\varphi = 2\cos\varphi\,[\cos\varphi + i\sin\varphi]$$

$$1 + i\tan\varphi = 1 + i\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác :

a) 4 b) 2i c) $1 - i\sqrt{3}$

d) $\sqrt{3} - i\sqrt{3}$ e) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{3}i$ f) $\dfrac{7\sqrt{3}}{3} - 7i$

Giải

a) $4 = 4(1 + 0i) = 4(\cos 0 + i\sin 0)$.

b) $2i = 2(0 + i) = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$.

c) $1 - i\sqrt{3} = 2(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2\,[\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})]$

d) $\sqrt{3} - i\sqrt{3} = \sqrt{3}(1 - i) = \sqrt{6}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{6}\,[\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})]$.

e) $\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}i = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2}{3}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$.

f) $\frac{7\sqrt{3}}{3} - 7i = \frac{7\sqrt{3}}{3}\left(1 - i\sqrt{3}\right) = \frac{14\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{14\sqrt{3}}{3}[\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})]$.

Ví dụ 2. Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác:

a) $(1 + 3i)(1 + 2i)$ b) $(1 + i)[1 + (\sqrt{3} - 2)i]$.

c) $(\sqrt{2} - 2i)[\sqrt{2} + (3\sqrt{2} - 4)i]$ d) $\frac{3-i}{1+2i}$.

Giải

a) $(1 + 3i)(1 + 2i) = 1 + 6i^2 + 3i + 2i = -5 + 5i = 5(-1 + i)$

$= 5\sqrt{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}) = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

b) $(1 + i)[1 + (\sqrt{3} - 2)i] = 1 - (\sqrt{3} - 2) + (\sqrt{3} - 2 + 1)i$

$= 3 - \sqrt{3} + (\sqrt{3} - 1)i = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{3} - 1)i$

$= (\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + i) = 2(\sqrt{3} - 1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2(\sqrt{3} - 1)(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$.

c) $(\sqrt{2} - 2i)[\sqrt{2} + (3\sqrt{2} - 4)i] = (2 + 6\sqrt{2} - 8) + (6 - 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2})i$

$= (6\sqrt{2} - 6) + (6 - 6\sqrt{2})i = (6\sqrt{2} - 6)(1 - i)$

$= \sqrt{2}(6\sqrt{2} - 6)(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i) = (12 - 6\sqrt{2})[\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})]$.

d) $\frac{3-i}{1-2i} = \frac{(3-i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{3+2+6i-i}{1-(2i)^2} = \frac{5+5i}{1+4} = 1 + i$

$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$.

III. BÀI TẬP

1. Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác :

a) $(2 + i)(3 + i)$ b) $\frac{2\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{6 - 2i}$

c) $(\sqrt{2} + 2i)(\sqrt{3} + (9 - 4\sqrt{6})i)$ d) $(1 - i)(1 + (\sqrt{3} + 2)i)$

e) $(\sqrt{3} - 2i)(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}i)$ f) $2\sqrt{2} + \frac{2\sqrt{6}}{3}i$.

2. Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác :

a) $\sqrt{2} + 1 + i$ b) $2 - \sqrt{3} + i$ c) $1 + (\sqrt{2} + 1)i$

d) $2 + \sqrt{3} - i$ e) $1 + (2 - \sqrt{3})i$ f) $1 - (2 + \sqrt{3})i$

3. Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác :

a) $1+\dfrac{i}{\sqrt{3}}$ b) $1+\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})i$.

Vấn đề 2. Áp dụng công thức Moivre để thực hiện các phép tính.

I. PHƯƠNG PHÁP

Ta vận dụng công thức Moivre và các công thức lượng giác để tính toán:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$$

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi' + i\sin\varphi') = \cos(\varphi+\varphi') + i\sin(\varphi+\varphi')$$

$$\frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\varphi' + i\sin\varphi'} = \cos(\varphi-\varphi') + i\sin(\varphi-\varphi')$$

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Tính giá trị của các số phức sau và viết kết quả dưới dạng $a+bi$ $(a, b \in R)$:

a) $A = (\cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7})(\cos\frac{3\pi}{14} + i\sin\frac{3\pi}{14})$

b) $B = \dfrac{(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5})^3}{(\cos\frac{\pi}{15}+i\sin\frac{\pi}{15})^4}$ c) $C = \dfrac{i\sqrt{3}}{(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})^5}$

d) $D = \dfrac{[\sqrt{2}(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})]^{10}\,[\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})]}{[2(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6})]^5}$

Giải

Áp dụng công thức Moivre ta có:

a) $A = (\cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7})(\cos\frac{3\pi}{14} + i\sin\frac{3\pi}{14})$

$= \cos(\frac{2\pi}{7}+\frac{3\pi}{14}) + i\sin(\frac{2\pi}{7}+\frac{3\pi}{14}) = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$

b) $B = \dfrac{(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5})^3}{(\cos\frac{\pi}{15}+i\sin\frac{\pi}{15})^4} = \dfrac{\cos\frac{3\pi}{5}+i\sin\frac{3\pi}{5}}{\cos\frac{4\pi}{15}+i\sin\frac{4\pi}{15}}$

$= \cos(\frac{3\pi}{5}-\frac{4\pi}{15}) + i\sin(\frac{3\pi}{5}-\frac{4\pi}{15}) = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$.

c) $C = \dfrac{i\sqrt{3}}{(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})^5} = \dfrac{\sqrt{3}(0+i)}{(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})^5} = \dfrac{\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})}{\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}}$

$= \sqrt{3}\,[\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{6})] = \sqrt{3}\,[\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})]$

$= \sqrt{3}\,(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i.$

d) $D = \dfrac{[\sqrt{2}(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})]^{10}\,[\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})]}{[\,2(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6})\,]^5}$

$= \dfrac{32\sqrt{3}\left(\cos\frac{20\pi}{3} + i\sin\frac{20\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{32\left(\cos\frac{35\pi}{6} + i\sin\frac{35\pi}{6}\right)}$

$= \sqrt{3}[\cos(\frac{20\pi}{3} + \frac{\pi}{3} - \frac{35\pi}{6}) + i\sin(\frac{20\pi}{3} + \frac{\pi}{3} - \frac{35\pi}{6})]$

$= \sqrt{3}\,(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}) = \sqrt{3}(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}) = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$

Ví dụ 2: Chứng minh:

a) $A = \left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^9 + \left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^9$ là một số thực.

b) $B = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^7 - \left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^7$ là số thuần ảo.

c) $C = (1+i\sqrt{3})^6(1-i)^5 + (1+i)^5(1-i\sqrt{3})^6$ là số thực.

d) $D = \dfrac{(1+i\sqrt{3})^5}{(1-i)^4} + \dfrac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1+i)^4}$ là số thực.

Giải

a) $A = \left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^9 + \left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^9 = (\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})^9 + (\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))^9$

$= \cos\frac{9\pi}{4} + i\sin\frac{9\pi}{4} + \cos(-\frac{9\pi}{4}) + i\sin(-\frac{9\pi}{4})$

$= \cos\frac{9\pi}{4} + i\sin\frac{9\pi}{4} + \cos\frac{9\pi}{4} - i\sin\frac{9\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow$ A là số thực.

b) $B = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^7 - \left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^7 = (\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3})^7 - (\cos(-\dfrac{\pi}{3}) + i\sin(-\dfrac{\pi}{3}))^7$

$= \cos\dfrac{7\pi}{3} + i\sin\dfrac{7\pi}{3} - [\cos(-\dfrac{7\pi}{3}) + i\sin(-\dfrac{7\pi}{3})]$

$= \cos\dfrac{7\pi}{3} + i\sin\dfrac{7\pi}{3} - \cos\dfrac{7\pi}{3} + i\sin\dfrac{7\pi}{3} = 2i\sin\dfrac{\pi}{3} = 2i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = i\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ B là số thuần ảo.

c) $C = (1+i\sqrt{3})^6(1-i)^5 + (1+i)^5(1-i\sqrt{3})^6$

$= \left[2(\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{3}}{2})\right]^6\left[\sqrt{2}(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{i}{\sqrt{2}})\right]^5 + \left[\sqrt{2}(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{i}{\sqrt{2}})\right]^5\left[2(\dfrac{1}{2}-\dfrac{i\sqrt{3}}{2})\right]^6$

$= 2^6(\sqrt{2})^5(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3})^6[\cos(-\dfrac{\pi}{4})+i\sin(-\dfrac{\pi}{4})]^5 +$

$+ 2^6(\sqrt{2})^5(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4})^5[\cos(-\dfrac{\pi}{3})+i\sin(-\dfrac{\pi}{3})]^6$

$= 2^8\sqrt{2}\,(\cos\dfrac{6\pi}{3}+i\sin\dfrac{6\pi}{3})[\cos(-\dfrac{5\pi}{4})+i\sin(-\dfrac{5\pi}{4})] +$

$+ 2^8\sqrt{2}\,(\cos\dfrac{5\pi}{4}+i\sin\dfrac{5\pi}{4})[\cos(-\dfrac{6\pi}{3})+i\sin(-\dfrac{6\pi}{3})]$

$= 2^8\sqrt{2}\,[\cos\dfrac{5\pi}{4} - i\sin\dfrac{5\pi}{4} + \cos\dfrac{5\pi}{4} + i\sin\dfrac{5\pi}{4}]$

$= 2^8\sqrt{2}\,(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}) = -2^9 = -512 \Rightarrow$ C là số thực.

d) $D = \dfrac{(1+i\sqrt{3})^5}{(1-i)^4} + \dfrac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1+i)^4} = \dfrac{2^5(\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{3}}{2})^5}{(\sqrt{2})^4(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{i}{\sqrt{2}})^4} + \dfrac{2^5(\dfrac{1}{2}-\dfrac{i\sqrt{3}}{2})^5}{(\sqrt{2})^4(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{i}{\sqrt{2}})^4}$

$$= \dfrac{2^5\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^5}{2^2\left[\cos(-\dfrac{\pi}{4})+i\sin(-\dfrac{\pi}{4})\right]^4} + \dfrac{2^5\left[\cos(-\dfrac{\pi}{3})+i\sin(-\dfrac{\pi}{3})\right]^5}{2^2(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4})^4}$$

$$= 8\dfrac{\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\sin\dfrac{5\pi}{3}}{\cos(-\pi)+i\sin(-\pi)} + 8\dfrac{\cos(-\dfrac{5\pi}{3})+i\sin(-\dfrac{5\pi}{3})}{\cos\pi+i\sin\pi}$$

$= \dfrac{8\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)}{-1} + \dfrac{8\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)}{-1} = -8\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right) - 8\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right) = -8$. Vậy D là số thực.

Ví dụ 3: Viết các số phức sau dưới dạng đại số:

a) $A = \left(1 + \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)^4 + \left(1 + \cos\frac{5\pi}{3} - i\sin\frac{5\pi}{3}\right)^4$

b) $B = \dfrac{1 + \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^4}{1 + \left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)^4}$ c) $C = \dfrac{1 - \left(\cos\frac{8\pi}{3} - i\sin\frac{8\pi}{3}\right)^2}{1 - \left(\cos\frac{8\pi}{3} + i\sin\frac{8\pi}{3}\right)^2}$

Giải

a) $A = \left(1 + \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)^4 + \left(1 + \cos\frac{5\pi}{3} - i\sin\frac{5\pi}{3}\right)^4$

$= \left(2\cos^2\frac{5\pi}{6} + 2i\sin\frac{5\pi}{6}\cos\frac{5\pi}{6}\right)^4 + \left(2\cos^2\frac{5\pi}{6} - 2i\sin\frac{5\pi}{6}\cos\frac{5\pi}{6}\right)^4$

$= \left[2\cos\frac{5\pi}{6}(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})\right]^4 + \left[2\cos\frac{5\pi}{6}(\cos\frac{5\pi}{6} - i\sin\frac{5\pi}{6})\right]^4$

$= \left[2\cos\frac{5\pi}{6}(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})\right]^4 + \left[2\cos\frac{5\pi}{6}(\cos(-\frac{5\pi}{6}) + i\sin(-\frac{5\pi}{6})\right]^4$

$= \left(-\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)^4\left(\cos\frac{20\pi}{6} + i\sin\frac{20\pi}{6}\right) + \left(-\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)^4\left[\cos(-\frac{20\pi}{6}) + i\sin(-\frac{20\pi}{6})\right]$

$= 9\,[\,2\cos\frac{20\pi}{6}\,] = 18\cos(\frac{10\pi}{3}) = 18\cos(-\frac{2\pi}{3}) = 18\,(-\frac{1}{2}) = -9.$

b) $B = \dfrac{1 + \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^4}{1 + \left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)^4} = \dfrac{1 + \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^4}{1 + \left(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})\right)^4}$

$= \dfrac{1 + \cos\frac{4\pi}{6} + i\sin\frac{4\pi}{6}}{1 + \cos(-\frac{4\pi}{6}) + i\sin(-\frac{4\pi}{6})} = \dfrac{1 + \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}}{1 + \cos(-\frac{2\pi}{3}) + i\sin(-\frac{2\pi}{3})}$

$= \dfrac{1 + \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}}{1 + \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}} = \dfrac{2\cos^2\frac{\pi}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{2\cos^2\frac{\pi}{3}\left(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})\right)}$

$= \cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}.$

c) $C = \dfrac{1-\left(\cos\frac{8\pi}{3} - i\sin\frac{8\pi}{3}\right)^2}{1-\left(\cos\frac{8\pi}{3} + i\sin\frac{8\pi}{3}\right)^2} = \dfrac{1-\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^2}{1-\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^2}$.

$$= \dfrac{1-\left(\cos(-\frac{2\pi}{3}) + i\sin(-\frac{2\pi}{3})\right)^2}{1-\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^2} = \dfrac{1-\left(\cos(-\frac{4\pi}{3}) + i\sin(-\frac{4\pi}{3})\right)}{1-\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^2}$$

$$= \dfrac{2\sin^2(-\frac{2\pi}{3}) - 2i\sin(-\frac{2\pi}{3})\cos(-\frac{2\pi}{3})}{2\sin^2\frac{2\pi}{3} - 2i\sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{3}} = \dfrac{2\sin^2\frac{2\pi}{3} + 2i\sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{3}}{2\sin^2\frac{2\pi}{3} - 2i\sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{3}}$$

$$= \dfrac{2\sin\frac{2\pi}{3}(\sin\frac{2\pi}{3} + i\cos\frac{2\pi}{3})}{2\sin\frac{2\pi}{3}(\sin\frac{2\pi}{3} - i\cos\frac{2\pi}{3})} = \dfrac{\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})}{\cos(-\frac{\pi}{6}) - i\sin(-\frac{\pi}{6})} = \dfrac{\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})}{\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}}$$

$$= \cos(-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}) = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

III. BÀI TẬP

1. Thực hiện các phép tính và viết kết quả dưới dạng a + bi (a, b ∈ R)

a) $3(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}).2(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4})$ b) $\dfrac{2(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5})}{3(\cos\frac{2\pi}{15} - i\sin\frac{2\pi}{15})}$

c) $\dfrac{[\sqrt{2}(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})]^{10}.\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})}{[2(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6})]^5}$

2. Thực hiện phép tính:

a) $\dfrac{(1-i\sqrt{3})^{24} - (1+i\sqrt{3})^{12}}{(1-i)^{24}}$ b) $\dfrac{\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{13}.\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6}{(\sqrt{3}+i)^5}$

c) $\dfrac{(1-i)^8}{(1+i\sqrt{3})^5} + \dfrac{(1+i)^8}{(1-i\sqrt{3})^5}$ d) $\dfrac{(1-i\sqrt{3})^6}{(1+i)^8} + \dfrac{(1+i\sqrt{3})^6}{(1-i)^8}$

3. Cho $z = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$. Tính:

a) $A = z^{12} + z^6 + 1$ b) $B = z^9 + z^6 + z^3 + 1$

c) $C = z^8 + 2z^4 + z^2$ d) $D = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \ldots + z^8$

e) $E = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots - z^9 + z^{10}$ f) $F = z^{2009} - z^{2010} + z^{2011}$

4. a) Chứng minh rằng: $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ và $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

b) Cho số phức $z = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$. Tính:

$$A = z^2 + z + 2 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2};\ B = z^2 - z + 2i + \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}.$$

5. Thu gọn: $A = \left(1+\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)^4 + \left(1+\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}\right)^4$

$$B = \left(1+\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16}\right)^3 - \left(1+\cos\frac{\pi}{16} - i\sin\frac{\pi}{16}\right)^3$$

$$C = \frac{1+(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})^2}{1+(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6})^2}$$

6. Cho $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Tính $w = z^{2009} + z^{2010} + z^{2011}$.

7. Cho số phức z thỏa $z + \frac{1}{z} = 1$. Tính : $A = z^{114} + \frac{1}{z^{114}}$ và $B = z^{165} + \frac{1}{z^{165}}$.

Vấn đề 3. Tính môđun và acgumen của số phức

I. PHƯƠNG PHÁP

1) Với $z = a + bi$ ($a, b \in R$), ta có môđun của z là $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

và một acgumen của z là φ thỏa $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$.

2) Với $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ thì môđun của z là r và một acgumen của z là φ.

Đặc biệt, ta chú ý các biến đổi sau đây để suy ra môđun và một acgumen của z

3) Với $z = r(\cos\varphi - i\sin\varphi) \Rightarrow z = r[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)]$.

4) Với $z = r(\sin\varphi + i\cos\varphi)$, ta biến đổi $z = r\,[\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) + i\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi)]$.

5) Với $z = r[1 + \cos\varphi + i\sin\varphi]$, ta có $z = r\,[2\cos^2\frac{\varphi}{2} + 2i\sin\frac{\varphi}{2}.\cos\frac{\varphi}{2}]$.

$$\Rightarrow z = 2r\cos\frac{\varphi}{2}(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}).$$

6) Với $z = r(1 + i\tan\varphi) \Rightarrow z = r(1 + \dfrac{i\sin\varphi}{\cos\varphi}) = \dfrac{r}{\cos\varphi}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Tính môđun và một acgumen của các số phức sau:

a) $z = \dfrac{5-i}{2-3i}$ b) $z = \dfrac{18+8i}{4-9i}$ c) $z = \left(\dfrac{1-3i}{2-i}\right)^5$ d) $z = \left(\dfrac{3\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-2i}\right)^3$

Giải

a) $z = \dfrac{5-i}{2-3i} = \dfrac{(5-i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \dfrac{10+3+15i-2i}{4+9} = \dfrac{13+13i}{13} = 1+i$

$= \sqrt{2}(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{i}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4})$

Gọi r và φ là một acgumen của số phức z, ta có: $r = \sqrt{2}$; $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

b) $z = \dfrac{18+8i}{4-9i} = \dfrac{(18+8i)(4+9i)}{(4-9i)(4+9i)} = \dfrac{72-72+162i+32i}{16+81} = 2i$

$= 2(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2})$. Vậy $r = 2$; $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

c) $z = \left(\dfrac{1-3i}{2-i}\right)^5 = \left(\dfrac{(1-3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}\right)^5 = \left(\dfrac{2+3-6i+i}{4+1}\right)^5 = \left(\dfrac{5-5i}{5}\right)^5 = (1-i)^5$

$= \left[\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)\right]^5 = \left[\sqrt{2}[\cos(-\dfrac{\pi}{4}) + i\sin(-\dfrac{\pi}{4})]\right]^5$

$= (\sqrt{2})^5[\cos(-\dfrac{5\pi}{4}) + i\sin(-\dfrac{5\pi}{4})] = 4\sqrt{2}[\cos(-\dfrac{5\pi}{4}) + i\sin(-\dfrac{5\pi}{4})]$

Vậy $r = 4\sqrt{2}$; $\varphi = -\dfrac{5\pi}{4}$.

d) $z = \left(\dfrac{3\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-2i}\right)^3$

Ta có $\dfrac{3\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-2i} = \dfrac{(3\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}+2i)}{(\sqrt{3}-2i)(\sqrt{3}+2i)} = \dfrac{9-2+(6\sqrt{3}+\sqrt{3})i}{3+4} = \dfrac{7+7\sqrt{3}\,i}{7}$

$= 1 + i\sqrt{3} = 2(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i) = 2(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3})$.

Suy ra $z = \left(\dfrac{3\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-2i}\right)^3 = [2(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3})]^3 = 2^3(\cos\pi + i\sin\pi)$

Vậy $r = 8$ và $\varphi = \pi$.

Ví dụ 2: Tìm môđun và một acgumen của các số phức sau:

a) $z = 1 + \cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}$ b) $z = 1 + \cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3}$

c) $z = 1 - \cos\dfrac{2\pi}{5} + i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ d) $z = -1 - \sin\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{6}$

Giải

a) $z = 1 + \cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4} = 2\cos^2\dfrac{\pi}{8} + 2i\sin\dfrac{\pi}{8}.\cos\dfrac{\pi}{8}$

$= 2\cos\dfrac{\pi}{8}(\cos\dfrac{\pi}{8} + i\sin\dfrac{\pi}{8})$. Vậy $r = 2\cos\dfrac{\pi}{8}$; $\varphi = \dfrac{\pi}{8}$.

b) $z = 1 + \cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3} = 2\cos^2\dfrac{\pi}{6} - 2i\sin\dfrac{\pi}{6}.\cos\dfrac{\pi}{6}$

$= 2\cos\dfrac{\pi}{6}(\cos\dfrac{\pi}{6} - i\sin\dfrac{\pi}{6}) = 2\cos\dfrac{\pi}{6}[\cos(-\dfrac{\pi}{6}) + i\sin(-\dfrac{\pi}{6})]$

Vậy $r = 2\cos\dfrac{\pi}{6} = \sqrt{3}$; $\varphi = -\dfrac{\pi}{6}$.

c) $z = 1 - \cos\dfrac{2\pi}{5} + i\sin\dfrac{2\pi}{5} = 2\sin^2\dfrac{\pi}{5} + 2i\sin\dfrac{\pi}{5}.\cos\dfrac{\pi}{5}$

$= 2\sin\dfrac{\pi}{5}[\sin\dfrac{\pi}{5} + i\cos\dfrac{\pi}{5}] = 2\sin\dfrac{\pi}{5}(\cos\dfrac{3\pi}{10} + i\sin\dfrac{3\pi}{10})$.

Vậy $r = 2\sin\dfrac{\pi}{5}$; $\varphi = \dfrac{3\pi}{10}$.

d) $z = -1 - \sin\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{6} = -1 - \cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}$

$= -2\cos^2\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{12}$

$= 2\cos\dfrac{\pi}{12}(-\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}) = 2\cos\dfrac{\pi}{12}(\cos\dfrac{11\pi}{12} + i\sin\dfrac{11\pi}{12})$

Vậy $r = 2\cos\dfrac{\pi}{12}$; $\varphi = \dfrac{11\pi}{12}$.

III. BÀI TẬP

1. Tìm môđun và một acgumen của các số phức sau:

a) $z = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}i$; b) $z = 2 - \sqrt{2} - i\sqrt{2}$;

c) $z = 2\sqrt{3} + 3 + i\sqrt{3}$; d) $z = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3}i$.

2. Gọi z_1, z_2 là 2 nghiệm của phương trình $z^2 - 2iz - 4 = 0$, z_1 có phần thực âm. Tính môđun và acgumen của các số phức sau:

a) $w = z_1^2.z_2$; b) $w = \frac{z_1}{z_2 - 2}$; c) $w = (z_1 - 2)(z_2 - 2)$; d) $w = \overline{z_1}.(2 - \overline{z_2})$.

3. Tìm môđun và một acgumen của số phức z thỏa mãn phương trình $\frac{1+z^2}{1-z^2} = i$.

Vấn đề 4. Áp dụng công thức Moivre để tính căn bậc n của số phức

I. PHƯƠNG PHÁP

1. Tính căn bậc hai của số phức w

Theo định nghĩa, căn bậc hai của số phức w là số phức z thỏa $z^2 = w$

* Căn bậc hai của 0 là 0.

* Với $w \neq 0$, $w = R(\cos\theta + i\sin\theta)$, $R > 0$, ta đặt $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ thì ta có:

$$z^2 = w \Leftrightarrow r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) = R(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = R \\ 2\varphi = \theta + k2\pi, k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{R} \\ \varphi = \frac{\theta}{2} + k\pi, k \in Z \end{cases}.$$

Lấy k = 0, 1, ta được 2 giá trị của φ.

* Một số phức $w = R(\cos\theta + i\sin\theta)$, $R > 0$, có hai căn bậc hai là

$$z_1 = \sqrt{R}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) \text{ và } z_2 = \sqrt{R}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)\right]$$

hay $z = \pm\sqrt{R}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$.

* Hai căn bậc hai của $w \neq 0$ được biểu diễn trong mặt phẳng phức bởi 2 điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ O.

2. Tính căn bậc n của số phức w

Căn bậc n của số phức w là số phức z thỏa $z^n = w$

* Căn bậc n của 0 là 0

* Với $w \neq 0$, $w = R(\cos\theta + i\sin\theta)$, $R > 0$, ta đặt $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ thì ta có:

$$z^n = w \Leftrightarrow r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = R(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\Leftrightarrow r^n = R \text{ và } n\varphi = \theta + k2\pi, k \in Z$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt[n]{R} \text{ và } \varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{k2\pi}{n}$$

Lấy k = 0, 1, 2, ..., n – 1, ta được n giá trị của φ

* Một số phức w = R (cosθ + i sinθ), R > 0, có n căn bậc n (n ≥ 3) được biểu diễn trong mặt phẳng phức bởi n điểm là đỉnh của n – giác đều nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính $\sqrt[n]{R}$.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Tìm căn bậc hai của các số phức sau và viết dưới dạng lượng giác:

$$w = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Giải

Ta có: $w = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$.

Đặt $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ là một căn bậc hai của w, ta có:

$$z^2 = w \Leftrightarrow r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ 2\varphi = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \varphi = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in Z \end{cases}.$$

Vậy w có 2 căn bậc hai là: $z_1 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$ và $z_2 = \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}$.

Ví dụ 2. Tính căn bậc ba của các số phức sau: $w = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Giải

Ta có: $w = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})$

w có môđun R = 1 và một acgumen là $\theta = -\frac{\pi}{4}$

Suy ra căn bậc ba của w là số phức z có

– môđun $r = \sqrt[3]{1} = 1$;

– một acgumen $\varphi = \frac{\theta}{3} + \frac{k2\pi}{3} = -\frac{\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3}, k \in Z$.

Với k = 0, 1, 2 ta có 3 giá trị của φ:

$$\varphi_1 = -\frac{\pi}{12};\ \varphi_2 = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{12};\ \varphi_3 = -\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3} = \frac{15\pi}{12} = \frac{5\pi}{4}.$$

Vậy $w = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ có 3 căn bậc ba là :

$$z_1 = \cos(-\frac{\pi}{12}) + i\sin(-\frac{\pi}{12});\ z_2 = \cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12};\ z_3 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}.$$

Ví dụ 3: Tính căn bậc bốn của các số phức sau và viết dưới dạng lượng giác: w = i.

Giải

Ta có: $w = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ có môđun R = 1 và một acgumen $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Suy ra căn bậc bốn của w là số phức z có:

– môđun r = 1

– một acgumen $\varphi = \frac{0}{4} + \frac{k2\pi}{4} = \frac{\pi}{8} + \frac{k2\pi}{4} = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$

Lấy k = 0, 1, 2, 3, ta có 4 giá trị của φ:

$\varphi_1 = \frac{\pi}{8}$ $\qquad\qquad \varphi_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{8}$

$\varphi_3 = \frac{\pi}{8} + \pi = \frac{9\pi}{8}$ $\qquad\qquad \varphi_4 = \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{2} = \frac{13\pi}{8}$

Vậy w = i có 4 căn bậc bốn là:

$z_1 = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$ $\qquad\qquad z_2 = \cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}$

$z_3 = \cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}$ $\qquad\qquad z_4 = \cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8}$

III. BÀI TẬP

1. Tính căn bậc hai của

a) $w = (1 + i)(\sqrt{3} + i)$; $\qquad$ b) $w = \sqrt{3} - i$; $\qquad$ c) w = 4 + 4i.

2. Tính căn bậc ba của

a) $w = -1 + i\sqrt{3}$; $\qquad$ b) w = 2 – 2i; $\qquad$ c) w = i.

d) $w = -4 + 4\sqrt{3}i$

3. Tính căn bậc bốn của $w = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

4. a) Viết $z_0 = \sqrt{3} + i$ dưới dạng lượng giác.

b) Tính z_0^4 và suy ra các căn bậc 4 của $w = -8 + 8i\sqrt{3}$

5. Tính căn bậc năm của w = i .

Vấn đề 5. Áp dụng công thức Moivre để chứng minh các hệ thức lượng giác

I. PHƯƠNG PHÁP

1) Tính cosnx và sinnx theo cosx và sinx :

Ta có $(\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx$

Khai triển nhị thức ở vế trái, đồng nhất phần thực và phần ảo của 2 vế, ta tính được cosnx và sin nx theo cosx và sinx.

2) Công thức rút gọn các biểu thức lượng giác :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \cos(\theta + \varphi) + i\sin(\theta + \varphi)$$

$$\frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \cos(\theta - \varphi) + i\sin(\theta - \varphi).$$

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Áp dụng công thức Moivre, tính các biểu thức sau theo sinx và cosx:

a) cos2x , sin 2x. b) cos3x, sin3x.

c)cos4x, sin 4x. d) cos5x, sin5x.

Giải

a) Ta có $\cos 2x + i\sin 2x = (\cos x + i\sin x)^2$

$\Leftrightarrow \cos 2x + i\sin 2x = \cos^2 x - \sin^2 x + 2i\sin x.\cos x$

Vậy $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ và $\sin 2x = 2\sin x.\cos x$.

b) Ta có: $\cos 3x + i\sin 3x = (\cos x + i\sin x)^3$

$\Leftrightarrow \cos 3x + i\sin 3x = \cos^3 x + 3\cos^2 x \,.\, i\sin x + 3\cos x.(i\sin x)^2 + (i\sin x)^3$.

$\Leftrightarrow \cos 3x + i\sin 3x = (\cos^3 x - 3\cos x.\sin^2 x) + i(3\cos^2 x.\sin x - \sin^3 x)$.

Vậy $\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x.\sin^2 x$

$= \cos^3 x - 3\cos x.(1 - \cos^2 x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

và $\sin 3x = 3\cos^2 x.\sin x - \sin^3 x$

$= 3(1 - \sin^2 x)\sin x - \sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

c) Ta có $\cos 4x + i\sin 4x = (\cos x + i\sin x)^4$

$\Leftrightarrow \cos 4x + i\sin 4x = (\cos^2 x - \sin^2 x + 2i\sin x.\cos x)^2$

$\Leftrightarrow \cos 4x + i\sin 4x = (\cos^2 x - \sin^2 x)^2 - (2\sin x\cos x)^2 + 2i(2\sin x\cos x)(\cos^2 x - \sin^2 x)$

Vậy $\cos 4x = (\cos^2 x - \sin^2 x)^2 - (2\sin x.\cos x)^2$

$= \cos^4 x + \sin^4 x - 2\sin^2 x.\cos^2 x - 4\sin^2 x.\cos^2 x$

$= \cos^4 x + \sin^4 x - 6\sin^2 x.\cos^2 x$

$= \cos^4 x + (1 - \cos^2 x)^2 - 6\cos^2 x.(1 - \cos^2 x)$

$= 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$

$\sin 4x = 4\sin x.\cos x.(\cos^2 x - \sin^2 x)$

d) Ta có $\cos 5x + i\sin 5x = (\cos x + i\sin x)^5$

$\Leftrightarrow \cos 5x + i\sin 5x = \cos^5 x + 5\cos^4 x.\, i\sin x + 10\cos^3 x(i^2.\sin^2 x) +$

$+ 10\cos^2 x.(i^3.\sin^3 x) + 5\cos x.(i^4\sin^4 x) + i^5\sin^5 x$.

$\Leftrightarrow$ $\cos 5x + i\sin 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x.\sin^2 x + 5\cos x.\sin^4 x +$
$+ i(5\cos^4 x.\sin x - 10\cos^2 x\sin^3 x + \sin^5 x)$

Vậy $\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x.\sin^2 x + 5\cos x.\sin^4 x$
$= \cos^5 x - 10\cos^3 x.(1-\cos^2 x) + 5\cos x(1-\cos^2 x)^2$
$= \cos^5 x - 10\cos^3 x.(1-\cos^2 x) + 5\cos x.(1+\cos^4 x - 2\cos^2 x)$
$= 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$

và $\sin 5x = 5\cos^4 x.\sin x - 10\cos^2 x.\sin^3 x + \sin^5 x$
$= 5(1-\sin^2 x)^2.\sin x - 10(1-\sin^2 x)\sin^3 x + \sin^5 x$
$= 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x$

Ví dụ 2: Rút gọn các biểu thức:
$A = 1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos 9x$
$B = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin 9x$

Giải

Ta có:
$A + iB = (1 + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos 9x) + i(\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin 9x)$
$= 1 + (\cos x + i\sin x) + (\cos 2x + i\sin 2x) + \ldots + (\cos 9x + i\sin 9x)$
$= 1 + (\cos x + i\sin x) + (\cos x + i\sin x)^2 + \ldots + (\cos x + i\sin x)^9$

$$= \frac{1-(\cos x + i\sin x)^{10}}{1-(\cos x + i\sin x)}$$

$$= \frac{1-\cos 10x - i\sin 10x}{1-\cos x - i\sin x} = \frac{2\sin^2 5x - 2i\sin 5x\cos 5x}{2\sin^2\frac{x}{2} - 2i\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\sin 5x}{\sin\frac{5x}{2}}.\frac{\sin 5x - i\cos 5x}{\sin\frac{x}{2} - i\cos\frac{x}{2}} = \frac{\sin 5x}{\sin\frac{5x}{2}}.\frac{\cos(\frac{\pi}{2}-5x) - i\sin(\frac{\pi}{2}-5x)}{\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}) - i\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2})}$$

$$= \frac{\sin 5x}{\sin\frac{5x}{2}}.\frac{\cos(-\frac{\pi}{2}+5x) + i\sin(-\frac{\pi}{2}+5x)}{\cos(-\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2})}$$

$$= \frac{\sin 5x}{\sin\frac{5x}{2}}.[\cos(5x-\frac{x}{2}) + i\sin(5x-\frac{x}{2})] = \frac{\sin 5x}{\sin\frac{5x}{2}}.(\cos\frac{9x}{2} + i\sin\frac{9x}{2}).$$

Vậy $A = \dfrac{\sin 5x}{\sin\frac{5x}{2}}.\cos\dfrac{9x}{2}$ và $B = \dfrac{\sin 5x}{\sin\frac{5x}{2}}.\sin\dfrac{9x}{2}$

III. BÀI TẬP

1. a) Chứng minh hệ thức:

$$1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x \cdot \cos\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \qquad (1)$$

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x \cdot \sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \qquad (2)$$

b) Áp dụng kết quả trên, suy ra giá trị của biểu thức

$$E = \cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{4\pi}{2n+1} + \cos\frac{6\pi}{2n+1} + \ldots + \cos\frac{2n\pi}{2n+1}.$$

2. Giải phương trình $z^5 = 1$. Từ đó suy ra giá trị đúng của $\cos\frac{2\pi}{5}$ và $\sin\frac{2\pi}{5}$.

3. Cho $z = \cos\theta + i\sin\theta$. Chứng minh :

a) $z^2 + z + 2 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 2(\cos 2\theta + \cos\theta + 1)$

b) $z^2 - z + 2i + \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} = 2i(\sin 2\theta - \sin\theta + 1)$

c) $z^3 - \frac{1}{z^3} = 2i\sin 3\theta$

d) $\left(z - \frac{1}{z}\right)^3 = -8i\sin^3\theta$

e) $z^3 - z + \frac{1}{z} - \frac{1}{z^3} = 2i(\sin 3\theta - \sin\theta)$.

HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

§1. SỐ PHỨC

Vấn đề 1. Thực hiện các phép tính trên $\mathbb{C}$

1. a) $z = \dfrac{1-i\sqrt{2}}{\sqrt{5}-i\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{3}-i\sqrt{5}}$

$= \dfrac{(1-i\sqrt{2})(\sqrt{5}+i\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-i\sqrt{3})(\sqrt{5}+i\sqrt{3})} + \dfrac{(\sqrt{2}+i)(\sqrt{3}+i\sqrt{5})}{(\sqrt{3}-i\sqrt{5})(\sqrt{3}+i\sqrt{5})}$

$= \dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{6}+i\sqrt{3}-i\sqrt{10})+(\sqrt{6}-\sqrt{5}+i\sqrt{10}+i\sqrt{3})}{5+3} = \dfrac{2\sqrt{6}+2i\sqrt{3}}{8} = \dfrac{\sqrt{6}}{4} + \dfrac{i\sqrt{3}}{4}.$

b) $z = \dfrac{(7-8i)^{10}}{(8+7i)^{11}} = \left(\dfrac{7-8i}{8+7i}\right)^{10} \dfrac{1}{8+7i} = \left(\dfrac{(7-8i)(8-7i)}{(8+7i)(8-7i)}\right)^{10} \dfrac{8-7i}{(8+7i)(8-7i)}$

$= \left(\dfrac{56+56i^2-49i-64i}{64+49}\right)^{10} \dfrac{8-7i}{64+49} = \left(\dfrac{-113i}{113}\right)^{10} \dfrac{8-7i}{113}$

$= (-i)^{10} \dfrac{8-7i}{113} = (i^2)^5 \dfrac{8-7i}{113} = -\dfrac{8}{113} + \dfrac{7i}{113}.$

2. Đáp số: a) $22i$ b) -14 c) $48i$

d) $-2-i$ e) $\dfrac{-120-119i}{169}$ f) $8-2i$

3. a) $z_1 + 2z_2 - \overline{z_3} = (1-3i) + 2(2+i) - \overline{(3-4i)}$

$= 1 - 3i + 4 + 2i - (3+4i) = 2 - 5i.$

b) $z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_3} = (1-3i)\overline{(2+i)} + (2+i)\overline{(3-4i)}$

$= (1-3i)(2-i) + (2+i)(3+4i) = 2 - 3 - 7i + 6 - 4 + 11i = 1 + 4i.$

c) $\overline{z_1 z_2 z_3} + {z_2}^2 z_3 = \overline{z_1}.\overline{z_2}.\overline{z_3} + {z_2}^2 z_3 = (1+3i)(2-i)(3+4i) + (2+i)^2(3-4i)$

$= (2+3+5i)(3+4i) + (4-1+4i)(3-4i) = (5+5i)(3+4i) + (3+4i)(3-4i)$

$= 15 - 20 + 35i + 9 + 16 = 20 + 35i.$

4. a) $z = 1 + (1+mi) + (1+mi)^2 = 1 + 1 + mi + 1 + 2mi + i^2m^2 = 3 - m^2 + 3mi$

z là số thuần ảo $\Leftrightarrow 3 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{3}$

b) $z = \dfrac{m-1+2(m-1)i}{1-mi} = \dfrac{(m-1+2(m-1)i)(1+mi)}{(1-mi)(1+mi)}$

$= \dfrac{m-1-m(2m-2)+[m(m-1)+2m-2]i}{1+m^2}.$

z là số thực $\Leftrightarrow m(m-1)+2m-2=0 \Leftrightarrow m^2+m-2=0$

$\Leftrightarrow m=1$ hoặc $m=-2$.

5. Ta biết rằng số phức w là số thực $\Leftrightarrow \overline{w}=w$. Do đó

$$\frac{2z-1}{z+1} \text{ là số thực} \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{2z-1}{z+1}\right)}=\frac{2z-1}{z+1} \Leftrightarrow \frac{2\overline{z}-1}{\overline{z}+1}=\frac{2z-1}{z+1}$$

$$\Leftrightarrow (2\overline{z}-1)(z+1)=(2z-1)(\overline{z}+1)$$

$$\Leftrightarrow 2z.\overline{z}+2\overline{z}-z-1=2z.\overline{z}+2z-\overline{z}-1$$

$$\Leftrightarrow z=\overline{z} \qquad \Leftrightarrow z \text{ là số thực.}$$

6. Đáp số: a) $xy=0$ b) $x^2=y^2$.

Vấn đề 2. Giải phương trình và hệ phương trình đơn giản trên $\mathbb{C}$

1. Đáp số: a) $x=-2, y=3$ b) $x=10, y=30$ c) $x=0, y=1$

d) $x=-1, y=15$. e) $x=\frac{15}{13}, y=\frac{10}{13}$ f) $x=y=-1$.

2. a) $1-3i$ b) $\frac{3}{5}-\frac{6i}{5}$ c) $\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$

3. a) Điều kiện $z \neq -i$

$$\frac{2z-1}{z+i}=1+i \Leftrightarrow 2z-1=(1+i)(z+i) \Leftrightarrow 2z-1=(1+i)z+i+i^2$$

$$\Leftrightarrow (2-1-i)z=i-1+1 \Leftrightarrow (1-i)z=i$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{i}{1-i}=\frac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{i+i^2}{1+1} \Leftrightarrow z=-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}.$$

b) Điều kiện $z \neq 0$

$$\frac{i}{z}=\frac{1}{2-i}+\frac{1}{3+6i} \Leftrightarrow \frac{i}{z}=\frac{1}{2-i}+\frac{1}{3(1+2i)} \Leftrightarrow \frac{i}{z}=\frac{2+i}{4+1}+\frac{1-2i}{3(1+2i)(1-2i)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{i}{z}=\frac{2+i}{5}+\frac{1-2i}{3(1+4)} \Leftrightarrow \frac{i}{z}=\frac{3(2+i)}{15}+\frac{1-2i}{15} \Leftrightarrow \frac{i}{z}=\frac{7+i}{15}.$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{15i}{7+i}=\frac{15i(7-i)}{(7+i)(7-i)}=\frac{15+105i}{49+1} \Leftrightarrow z=\frac{3}{10}+\frac{21}{10}i.$$

c) Phương trình $[(1+2i)\overline{z}+2-i][iz+\frac{1}{i}]=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} iz+\frac{1}{i}=0 & (1) \\ (1+2i)\overline{z}+2-i=0 & (2) \end{array}\right.$$

(1) $\Leftrightarrow i^2z+1=0 \Leftrightarrow -z+1=0 \Leftrightarrow z=1$

$$(2) \Leftrightarrow \overline{z} = \frac{-2+i}{1+2i} \Leftrightarrow \overline{z} = \frac{(-2+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{-2+2+i+4i}{1+4}$$

$$\Leftrightarrow \overline{z} = i \Leftrightarrow z = -i.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm: z = 1 và z = – i

d) Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Phương trình $2z - \overline{z} = (z + \overline{z} + 1)(1 + i) - 2$ có

Vế trái = 2x + 2yi – (x – yi) = x + 3yi

Vế phải = (2x + 1)(1 + i) – 2 = 2x – 1 + (2x + 1)i

Như vậy phương trình trở thành x + 3yi = 2x – 1 + (2x + 1)i

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x - 1 \\ 3y = 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Vậy phương trình có 1 nghiệm $z = 1 + i$.

4. Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in R$) $\Rightarrow \overline{z} = x - yi$.

a) Phương trình $z^2 = 2\overline{z}$ trở thành

$$x^2 - y^2 + 2xyi = 2x - 2yi \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 2x & (1) \\ xy = -y & (2) \end{cases}$$

(2) $\Leftrightarrow y(x + 1) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ hoặc $x = -1$

Với y = 0, (1) $\Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ hoặc x = 2

Với x = –1, (1) $\Rightarrow y^2 = 3 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}$

Vậy phương trình có 4 nghiệm: z = 0, z = 2, $z = -1 + i\sqrt{3}$ và $z = -1 - i\sqrt{3}$

b) Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in R$). Phương trình $z^2 - |z|^2 + 1 = 0$ trở thành

$$x^2 - y^2 + 2xyi - (x^2 + y^2) + 1 = 0 \Leftrightarrow -2y^2 + 1 + 2xyi = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2y^2 + 1 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} y = 0 \\ y^2 = \frac{1}{2} \end{cases} (VN) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm: $z = \frac{1}{\sqrt{2}}i$ và $z = -\frac{1}{\sqrt{2}}i$.

c) Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in R$). Phương trình $z^2 + |z| = 0$ trở thành

$$x^2 - y^2 + 2xyi + \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -y^2 + \sqrt{y^2} = 0 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + \sqrt{x^2} = 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = |y| \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = \pm y \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 + y = 0 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x = 0 \\ y^2 - y = 0 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm : $z = 0$, $z = i$, $z = -i$.

d) Phương trình $\dfrac{\overline{z}^2 + i}{z+1} = i \Leftrightarrow \overline{z}^2 + i = iz + i$.

Đặt $z = x + yi$ $(x, y \in R)$ thì phương trình trở thành

$(x - yi)^2 = i(x + yi) \Leftrightarrow x^2 - y^2 - 2xyi = -y + xi$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -y \\ -2xy = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + y = 0 \\ x(2y+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -y^2 + y = 0 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} y = -\dfrac{1}{2} \\ x^2 - \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} y = -\dfrac{1}{2} \\ x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm: $z = 0$, $z = i$, $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$ và $z = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$

5. a) $\begin{cases} 2z + w = 4 \\ 2i\,\overline{z} + \overline{w} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z + w = 4 \\ -2iz + w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z + w = 4 \\ (2+2i)z = 4 \end{cases}$

(phương trình thứ hai được thay bằng phương trình hệ quả do trừ các vế của 2 phương trình đã cho)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \dfrac{2}{1+i} \\ w = 4 - 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \dfrac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} \\ w = 4 - 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \dfrac{2(1-i)}{1+1} \\ w = 4 - 2(1-i) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 - i \\ w = 2 + 2i \end{cases}$$

b) $\begin{cases} z + w = \overline{w} + i \\ z - w = \overline{z} + i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z + (w - \overline{w}) = i \\ (z - \overline{z}) - w = i \end{cases}$.

Đặt $z = x + yi$, $w = u + vi$ $(x, y, u, v \in R)$, hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} x + yi + 2vi = i \\ 2yi - u - vi = i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + (y + 2v)i = i \\ -u + (2y - v)i = i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y + 2v = 1 \\ u = 0 \\ 2y - v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ u = 0 \\ y + 2v = 1 \\ 2y - v = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ u = 0 \\ y = \dfrac{3}{5} \\ v = \dfrac{2}{5} \end{cases}$$. Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm là $\begin{cases} z = \dfrac{3}{5}i \\ w = \dfrac{1}{5}i \end{cases}$.

c) $\begin{cases} z + w = 1 - \overline{w} \\ 2z + \overline{w} = 2 + i + w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z + (w + \overline{w}) = 1 \\ 2z + (\overline{w} - w) = 2 + i \end{cases}$

Đặt $z = x + yi$ và $w = u + vi$ $(x, y, u, v \in \mathbb{R})$ thì hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} x + yi + 2u = 1 \\ 2x + 2yi - 2vi = 2 + i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2u + yi = 1 \\ 2x + (2y - 2v)i = 2 + i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2u = 1 \\ y = 0 \\ 2x = 2 \\ 2y - 2v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ u = 0 \\ v = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm là : $\begin{cases} z = 0 \\ w = -\dfrac{1}{2}i \end{cases}$

Vấn đề 3. Biểu diễn hình học của các số phức

1. a) Đặt $a = \left(\dfrac{3 + i\sqrt{3}}{3}\right)z$ và $b = \dfrac{i}{\sqrt{3}}z$.

Ta có : $OM = |z|$

$$OA = |a| = \left|\frac{3 + i\sqrt{3}}{3}\right| |z| = \left|1 + \frac{1}{\sqrt{3}}i\right| |z| = \sqrt{1 + \frac{1}{3}}\, |z| = \frac{2}{\sqrt{3}} |z|$$

$$MA = |a - z| = \left|(1 + \frac{i}{\sqrt{3}})z - z\right| = \left|\frac{i}{\sqrt{3}}\right| |z| = \frac{1}{\sqrt{3}} |z|$$

Tam giác OMA vuông tại M $\Leftrightarrow OM^2 + MA^2 = OA^2$

$$\Leftrightarrow |z|^2 + \frac{1}{3}|z|^2 = \frac{4}{3}|z|^2 \text{ đúng } \forall\, z \in \mathbb{C}$$

b) Ta có $MA = |a - z| = \left|(1 + \dfrac{i}{\sqrt{3}})z - z\right| = \left|\dfrac{i}{\sqrt{3}}\right| |z| = \dfrac{1}{\sqrt{3}} |z|$

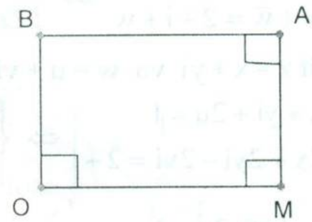
$$MB = |b - z| = \left|\frac{i}{\sqrt{3}}z - z\right| = \left|\frac{i}{\sqrt{3}} - 1\right| |z| = |z| \sqrt{\frac{1}{3} + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}}|z|$$

$$AB = |b - a| = \left|\frac{i}{\sqrt{3}}z - (1 + \frac{i}{\sqrt{3}})z\right| = |z|$$

Ta có $MA^2 + AB^2 = (\frac{1}{\sqrt{3}}|z|)^2 + |z|^2 = \frac{1}{3}|z|^2 + |z|^2 = \frac{4}{3}|z|^2 = MB^2$ đúng $\forall z \in \mathbb{C}$.

Vậy tam giác MAB vuông tại A với mọi $z \in \mathbb{C}$.

c) Xét tam giác MOB, ta có:



$OB = |b| = \left|\frac{i}{\sqrt{3}}z\right| = \frac{|z|}{\sqrt{3}}$; $OM = |z|$

và $MB = |b - z| = \left|\frac{2}{\sqrt{3}}\right| |z|$. Suy ra:

$$OM^2 + OB^2 = |z|^2 + \frac{|z|^2}{3} = \frac{4|z|^2}{3} = MB^2.$$

Vậy tam giác MOB vuông tại O với mọi $z \in \mathbb{C}$.

Tứ giác OMAB có 3 góc vuông nên là hình chữ nhật.

2. a) A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \alpha \overrightarrow{BC}$ $(\alpha \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow a - b = \alpha(c - b)$

$\Leftrightarrow \frac{a-b}{c-b} = \alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{a-b}{c-b}$ là số thực.

Ta có $\frac{a-b}{c-b} = \frac{-1-i-i}{1+ki-i} = \frac{-1-2i}{1+(k-1)i} = \frac{(-1-2i)[1-(k-1)i]}{[1+(k-1)i][1-(k-1)i]}$

$$= \frac{-1-2i+(k-1)i-2i}{1+(k-1)^2} = \frac{1-2k+(k-3)i}{1+(k-1)^2}.$$

Suy ra $\frac{a-b}{c-b}$ là số thực $\Leftrightarrow k - 3 = 0 \Leftrightarrow k = 3$.

b) Ta có:

$a' = f(a) = a^2 = (-1 - i)^2 = (1 + i)^2 = 1 + i^2 + 2i = 2i$

$b' = f(b) = b^2 = i^2 = -1$

$c' = f(c) = c^2 = (1 + ki)^2 = 1 - k^2 + 2ki$

c) Ta có A', B', C' phân biệt $\Leftrightarrow$ a', b', c' đôi một khác nhau.

Hiển nhiên $a' \neq b'$.

Ta có $a' = c' \Leftrightarrow 2i = 1 - k^2 + 2ki \Leftrightarrow 1 - k^2 = 0$ và $2k = 2 \Leftrightarrow k = 1$

suy ra $a' \neq c' \Leftrightarrow k \neq 1$

Ta có $b' = c' \Leftrightarrow -1 = 1 - k^2 + 2ki \Leftrightarrow -1 = 1 - k^2$ và $k = 0 \Leftrightarrow k \in \phi$.

Vậy $b' \neq c'$.

Tóm lại A′, B′, C′ phân biệt ⇔ $k \neq 1$.

Ta có A′, B′, C′ thẳng hàng ⇔ $\overrightarrow{B'C'} = \alpha\overrightarrow{B'A'}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)

$$\Leftrightarrow c' - b' = \alpha\ (a' - b') \Leftrightarrow \frac{c'-b'}{a'-b'} \text{ là số thực.}$$

$$\frac{c'-b'}{a'-b'} = \frac{2-k^2+2ki}{1+2i} = \frac{(2-k^2+2ki)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$$

$$= \frac{1}{5}[2-k^2+4k+(-4+2k^2+2k)i]$$

Suy ra $\dfrac{c'-b'}{a'-b'}$ là số thực ⇔ $2k^2 + 2k - 4 = 0$

⇔ $k = 1$ hoặc $k = -2$ ⇔ $k = -2$ (vì $k \neq 1$)

Vậy A′, B′, C′ là 3 điểm phân biệt thẳng hàng ⇔ $k = -2$

d) Đặt $z = x + yi$, $z' = x' + y'i$, và $\vec{u}$, $\vec{v}$ lần lượt biểu diễn số phức z, z′

⇒ $\vec{u} = (x; y)$ và $\vec{v} = (x'; y')$.

Ta có $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{x+yi}{x'+y'i} = \dfrac{(x+yi)(x'-y'i)}{(x'+y'i)(x'-y'i)} = \dfrac{xx'+yy'+(x'y-xy')i}{x'^2+y'^2}$

Theo bài ra $\dfrac{z}{z'}$ là số ảo ⇔ $xx' + yy' = 0$ ⇔ $\vec{u}.\vec{v} = 0$ ⇔ $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Xét tam giác A′B′C′. Ta có

$\overrightarrow{A'C'}$ biểu diễn số phức $z = c' - a' = 1 - k^2 + (2k - 2)i$

và $\overrightarrow{A'B'}$ biểu diễn số phức $z' = b' - a' = -1 - 2i$

$$\frac{z}{z'} = \frac{(1-k^2)+(2k-2)i}{-1-2i} = \frac{[(1-k^2)+(2k-2)i](-1+2i)}{(-1-2i)(-1+2i)}$$

$$= \frac{1}{5}\left[-1+k^2-2(2k-2)+(2-2k^2-2k+2)i\right]$$

Theo chứng minh trên: tam giác A′B′C′ vuông tại A′ ⇔ $\overrightarrow{A'C'} \perp \overrightarrow{A'B'}$

⇔ $\dfrac{z}{z'}$ là số ảo ⇔ $-1 + k^2 - 4k + 4 = 0$ ⇔ $k^2 - 4k + 3 = 0$

⇔ $k = 1$ (loại) hoặc $k = 3$ ⇔ $k = 3$

3. Đáp số:

a) $b - a = -2 + \alpha i$, $c - a = -\alpha^2 - 2\alpha i$, $c - b = 2 - \alpha^2 - 3\alpha i$.

b) Điều kiện là A, B, C phân biệt và không thẳng hàng ⇔ $\alpha \neq 0$.

c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$. d) $d = 1 - \alpha^2 - \alpha i$.

4. Đáp số: a) $x = -3$ b) $x = -2$.

Vấn đề 4. Tìm tập hợp điểm

1. Đặt $z = x + yi$ và $w = u + vi$ ($x, y, u, v \in R$), ta có:

$$w = z^2 \Leftrightarrow u + vi = (x + yi)^2 \Leftrightarrow u + vi = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$

a) M thuộc đường thẳng (d): $y = 2x$

$\Rightarrow$ Tọa độ của P thỏa mãn $\begin{cases} u = x^2 - 4x^2 \\ v = 2x(2x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -3x^2 \leq 0 \\ v = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -3x^2 \leq 0 \\ v = -\dfrac{4}{3}u \end{cases}$.

Vậy tập hợp các điểm P là tia (d'): $y = -\dfrac{4}{3}x$, với $x \leq 0$.

b) M thuộc đường thẳng (d): $y = x + 1$

$\Rightarrow$ Tọa độ P thỏa mãn $\begin{cases} u = x^2 - (x+1)^2 \\ v = 2x(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -2x - 1 \\ v = 2x^2 + 2x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-u-1}{2} \\ v = 2\left(\dfrac{-u-1}{2}\right)^2 + 2\left(\dfrac{-u-1}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-u-1}{2} \\ v = \dfrac{1}{2}(u^2 + 2u + 1) - u - 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-u-1}{2} \\ v = \dfrac{1}{2}u^2 - \dfrac{1}{2} \end{cases}$. Vậy tập hợp các điểm P là parabol (P): $y = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}$.

c) Đặt $z = x + yi$ và $z' = x' + y'i$ ($x, y, x', y' \in R$), ta có :

$$z.z' = xx' - yy' + (xy' + x'y)i$$

$$\Rightarrow |z.z'|^2 = (xx' - yy')^2 + (xy' + x'y)^2$$
$$= [(xx')^2 + (yy')^2 - 2xx'yy'] + [(xy')^2 + (x'y)^2 + 2xx'yy']$$
$$= (xx')^2 + (yy')^2 + (xy')^2 + (x'y)^2.$$

Mặt khác

$(|z|.|z'|)^2 = |z|^2.|z'|^2 = (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2) = (xx')^2 + (yy')^2 + (xy')^2 + (x'y)^2$

Vậy $|zz'| = |z|.|z'|$.

Suy ra $|z^2| = |z.z| = |z|.|z| = |z|^2$.

M thuộc đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1$

$\Leftrightarrow |w| = |z^2| = |z|^2 = 1$ (theo chứng minh trên)

Vậy tập hợp các điểm P là đường tròn (C) : $x^2 + y^2 = 1$.

d) M thuộc hypebol (C): $y = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$. Suy ra tọa độ điểm P (u; v) thỏa:

$$\begin{cases} u = x^2 - \frac{1}{x^2} \\ v = 2x.\frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = x^2 - \frac{1}{x^2}. \\ v = 2 \end{cases}$$

Vậy tập hợp các điểm P là đường thẳng có phương trình $y = 2$.

2. Đáp số:

a) Đường tròn tâm A(2 ; 1) bán kính R = 1;

b) Đường trung trực của đoạn AB với A(–1; 1) , B(3; –1);

c) Đường trung trực của đoạn OA , A($\frac{3}{4}$; $-\frac{1}{4}$);

d) Đường tròn tâm A (2; –2) bán kính R = $\sqrt{2}$;

e) Elip (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$;

f) Nhánh trái của Hypebol (H): $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$.

3. Đáp số:

a) w là số thực $\Leftrightarrow$ phần ảo của w bằng 0.

Tập hợp các điểm M là đường tròn tâm A(1; 0) bán kính R = 1 hợp với trục Ox bỏ đi điểm A(1; 0).

b) w là số thuần ảo $\Leftrightarrow$ phần thực của w bằng 0

Tập hợp các điểm M là đường tròn tâm B(0; 1) bán kính R = 1 hợp với trục Oy bỏ đi điểm B(0; 1).

c) Đường thẳng $y = x + 1$ bỏ đi điểm (0; 1).

d) Đường tròn tâm I(–1; 0) bán kính R = $\sqrt{2}$, bỏ đi điểm (0; 1).

4. Đáp số: a) Parabol $y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$.

b) Đường tròn tâm O, bán kính R′ = 4.

c) Tia $y = -\frac{4}{3}x$ với $x \leq 0$.

5. Đáp số: a) $x' = \frac{x}{x^2 + y^2}$ và $y' = \frac{-y}{x^2 + y^2}$.

b) Tập hợp các điểm P là đường thẳng $y = 2x$ $(x \neq 0)$.

c) Đường tròn tâm I($\frac{1}{2}$; 0) bán kính R = $\frac{1}{2}$, bỏ điểm O(0; 0).

§2. CĂN BẬC HAI CỦA SỐ PHỨC VÀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Vấn đề 1. Tính căn bậc hai, căn bậc bốn của một số phức w.

1. Đáp số: a) $\pm(1-4i)$ b) $\pm(2+\sqrt{3}\,i)$ c) $\pm 2i$

d) $\pm(2+3i)$ e) $\pm(1-3i)$ f) $\pm(5-i)$

g) $\pm(6+i)$

2. Đáp số: a) Có hai căn bậc hai là: $\pm(1-2\sqrt{6}\,i)$.

b) Có bốn căn bậc hai là : $\pm(\sqrt{3}+i\sqrt{2})$; $\pm(\sqrt{2}-i\sqrt{3})$

3. a) $z^4=-1 \Leftrightarrow z^4=i^2 \Leftrightarrow (z^2-i)(z^2+i)=0 \Leftrightarrow z^2=\pm i$.

Với $z^2=i$, đặt $z=x+yi$ ($x, y \in R$) ta có

$$(x+yi)^2=i \Leftrightarrow x^2-y^2+2xyi=i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=0 & (1)\\ 2xy=1 & (2)\end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow x\neq 0 \text{ và } y=\frac{1}{2x}$$

$$(1) \Rightarrow x^2=\frac{1}{4x^2} \Leftrightarrow x^4=\frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y=\frac{1}{2x}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y=\frac{1}{2x}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Vậy $z=\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

Với $z^2=-i$, ta có

$$(x+yi)^2=-i \Leftrightarrow x^2-y^2+2xyi=-i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=0 & (1)\\ 2xy=-1 & (2)\end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow x\neq 0 \text{ và } y=-\frac{1}{2x}$$

$$(1) \Rightarrow x^2=\frac{1}{4x^2} \Leftrightarrow x^4=\frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y=-\frac{1}{2x}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y=-\frac{1}{2x}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Vậy $z = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$.

<u>**Kết luận :**</u> $z^4 = -1 \Leftrightarrow z = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$ hoặc $z = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$

b) Theo kết quả câu a) ta có:

$$\left(\frac{z-1}{z+i}\right)^4 = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{z-1}{z+i} = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) \\ \frac{z-1}{z+i} = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) \end{array}\right.$$

Xét 4 trường hợp:

Trường hợp 1

$$\frac{z-1}{z+i} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \Leftrightarrow \sqrt{2}z - \sqrt{2} = (1+i)(z+i)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}z - \sqrt{2} = z + i + iz - 1$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2} - 1 - i)z = \sqrt{2} - 1 + i \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{2}-1+i}{\sqrt{2}-1-i} = \frac{(\sqrt{2}-1+i)(\sqrt{2}-1+i)}{(\sqrt{2}-1-i)(\sqrt{2}-1+i)}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{(\sqrt{2}-1)^2 - 1 + 2(\sqrt{2}-1)i}{(\sqrt{2}-1)^2+1} = \frac{2-2\sqrt{2}+2(\sqrt{2}-1)i}{4-2\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}+(\sqrt{2}-1)i}{2-\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1-\sqrt{2}+(\sqrt{2}-1)i}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} \qquad \Leftrightarrow z = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$$

Trường hợp 2

$$\frac{z-1}{z+i} = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \Leftrightarrow \sqrt{2}z - \sqrt{2} = (-1-i)(z+i)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}z - \sqrt{2} = -z - iz - i - i^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}z - \sqrt{2} = -z - iz - i + 1 \Leftrightarrow (\sqrt{2}+1+i)z = \sqrt{2}+1-i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{2}+1-i}{\sqrt{2}+1+i} \quad \frac{(\sqrt{2}+1-i)^2}{(\sqrt{2}+1+i)(\sqrt{2}+1-i)} = \frac{(\sqrt{2}+1)^2 + i^2 - 2(\sqrt{2}+1)i}{(\sqrt{2}+1)^2+1}$$

$$= \frac{2+2\sqrt{2}-2(\sqrt{2}+1)i}{4+2\sqrt{2}}.$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{2}+1-(\sqrt{2}+1)i}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1-(\sqrt{2}+1)i}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} \Leftrightarrow z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$$

Trường hợp 3

$$\frac{z-1}{z+i} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \Leftrightarrow \sqrt{2}z - \sqrt{2} = (1-i)(z+i)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}z - \sqrt{2} = z - iz + i - i^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}z - \sqrt{2} = z - iz + i + 1 \Leftrightarrow (\sqrt{2} - 1 + i)z = \sqrt{2} + 1 + i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{2}+1+i}{\sqrt{2}-1+i} = \frac{(\sqrt{2}+1+i)(\sqrt{2}-1-i)}{(\sqrt{2}-1+i)(\sqrt{2}-1-i)} = \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)+1+i(\sqrt{2}-1-\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)^2+1}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2-2i}{4-2\sqrt{2}} = \frac{1-i}{2-\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow z = \frac{1}{2-\sqrt{2}} - \frac{i}{2-\sqrt{2}}.$$

Trường hợp 4

$$\frac{z-1}{z+i} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \Leftrightarrow \sqrt{2}z - \sqrt{2} = (-1+i)(z+i)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}z - \sqrt{2} = -z + iz - i + i^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}z - \sqrt{2} = -z + iz - i - 1 \Leftrightarrow (\sqrt{2} + 1 - i)z = \sqrt{2} - 1 - i.$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{2}-1-i}{\sqrt{2}+1-i} = \frac{(\sqrt{2}-1-i)(\sqrt{2}+1+i)}{(\sqrt{2}+1-i)(\sqrt{2}+1+i)} = \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)+1+i(\sqrt{2}-1-\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)^2+1}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2-2i}{4+2\sqrt{2}} = \frac{1-i}{2+\sqrt{2}} \Leftrightarrow z = \frac{1}{2+\sqrt{2}} - \frac{i}{2+\sqrt{2}}.$$

<u>**Kết luận**</u>: $\left(\frac{z-1}{z+i}\right)^4 = -1 \Leftrightarrow z = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$ hoặc $z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$

hoặc $z = \frac{1}{2-\sqrt{2}} - \frac{i}{2-\sqrt{2}}$ hoặc $z = \frac{1}{2+\sqrt{2}} - \frac{i}{2+\sqrt{2}}$.

4. Đáp số:

a) Phương trình có ba nghiệm là: 0; 1 – i ; $\frac{1-i}{2}$.

b) Phương trình có bốn nghiệm là: 0; – 2; $-\frac{1}{5} \pm \frac{3}{5}i$.

Vấn đề 2. Phương trình bậc hai

1. Đáp số: a) $2 \pm 3i$ b) $2 + i$; $3 + i$

c) $3 - i$; $1 + i$ d) $3 + 2i$; $1 - i$

2. Đáp số: $z^2 - 6z + 13 = 0$.

3. Đáp số: a) $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

4. Đáp số: $a = -9 - 2i$; $b = 15 - 5i$

5. Đáp số: Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in R$) $\Rightarrow z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$

a) *cách 1*: Phương trình $z^2 + 2|z| = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = -2\sqrt{x^2 + y^2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -2\sqrt{x^2+y^2} & (1) \\ 2xy = 0 & (2) \end{cases}$$

(2) $\Rightarrow$ $x = 0$ hoặc $y = 0$

Với $x = 0$, (1) $\Leftrightarrow -y^2 = -2\sqrt{y^2} \Leftrightarrow y^2 = 2|y| \Leftrightarrow y^2 = 2y$ hoặc $y^2 = -2y$

$\Leftrightarrow$ $y = 0$ hoặc $y = 2$ hoặc $y = -2$

Suy ra $z = 0$ hoặc $z = 2i$ hoặc $z = -2i$

Với $y = 0$, (1) $\Leftrightarrow x^2 = -2\sqrt{x^2} \Leftrightarrow x^2 + 2|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Suy ra $z = 0$

Vậy phương trình $z^2 + 2|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ hoặc $z = 2i$ hoặc $z = -2i$

Cách 2: Ta giải phương trình hệ quả rồi thử lại.

Phương trình $z^2 + 2|z| = 0$ (1) $\Rightarrow z^2 = -2|z|$

$\Rightarrow |z^2| = |-2|z|| \Rightarrow |z|^2 = 2|z|$

$\Rightarrow |z| = 0$ hoặc $|z| = 2$

Với $|z| = 0 \Rightarrow z = 0$

Với $|z| = 2$, (1) $\Rightarrow z^2 + 4 = 0 \Rightarrow z^2 = -4 \Rightarrow z^2 = 4i^2 \Rightarrow z = \pm 2i$

Thử lại: ta thế các giá trị của z vừa tìm được vào phương trình (1)

Với $z = 0$, ta có $z^2 = 0 \Rightarrow$ phương trình (1) được nghiệm đúng.

Với $z = \pm 2i$, ta có $z^2 = (\pm 2i)^2 = 4i^2 = -4$ và $2|z| = 2|\pm 2i| = 2.2 = 4$

Vậy phương trình $z^2 + 2|z| = 0$ được nghiệm đúng.

Kết luận: phương trình có 3 nghiệm là: $z_1 = 0$, $z_2 = 2i$ và $z_3 = -2i$

b) Phương trình $z^2 + i|z| = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = -i\sqrt{x^2+y^2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 & (1) \\ 2xy = -\sqrt{x^2+y^2} & (2) \end{cases}$$

(1) $\Leftrightarrow$ $y = \pm x$

Với $y = x$, (2) $\Leftrightarrow 2x^2 = -\sqrt{2x^2} \Leftrightarrow 2x^2 + \sqrt{2x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ suy ra $y = 0$

Vậy $z = 0$

Với $y = -x$, (2) $\Leftrightarrow -2x^2 = -\sqrt{2x^2} \Leftrightarrow 2x^2 = |x|\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2 = x\sqrt{2} \\ 2x^2 = -x\sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$$

$x = 0 \Rightarrow y = 0$

$x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Vậy $z = 0$ hoặc $z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$ hoặc $z = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$.

Kết luận phương trình có 3 nghiệm là :

$z_1 = 0,\ z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$ và $z_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$

c) Đặt $z = x + yi$ $(x, y \in R)$

Phương trình $iz^2 + |z| + 1 = 0 \Leftrightarrow i(x^2 - y^2 + 2xyi) + \sqrt{x^2 + y^2} + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (-2xy + \sqrt{x^2 + y^2} + 1) + (x^2 - y^2)i = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 & (1) \\ -2xy + \sqrt{x^2 + y^2} + 1 = 0 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \text{ hoặc } x = -y & (1) \\ -2xy + \sqrt{x^2 + y^2} + 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Với $x = y$, (2) $\Leftrightarrow -2x^2 + \sqrt{2x^2} + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - |x|\sqrt{2} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2|x|^2 - |x|\sqrt{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow |x| = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{10}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-\sqrt{2} \mp \sqrt{10}}{4}$

suy ra $y = x = \frac{-\sqrt{2} \mp \sqrt{10}}{4}$

Với $y = -x$, (2) $\Leftrightarrow 2x^2 + \sqrt{2x^2} + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + |x|\sqrt{2} + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2|x|^2 + |x|\sqrt{2} + 1 = 0$ (vô nghiệm)

Kết luận : Phương trình $iz^2 + |z| + 1 = 0$ có 2 nghiệm là:

$z_1 = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{10}}{4} + \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{10}}{4}i$ và $z_2 = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{10}}{4} + \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{10}}{4}i$

d) Đặt $z = x + yi$ $(x, y \in R)$

Phương trình $z^2 + \overline{z} = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi + x - yi = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + x + (2xy - y)i = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y(2x - 1) = 0 \\ x^2 - y^2 + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ hoặc } x = \frac{1}{2} & (1) \\ x^2 - y^2 + x = 0 & (2) \end{cases}$

Với $y = 0$, (2) $\Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -1$

Với $x = \frac{1}{2}$, (2) $\Leftrightarrow y^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Kết luận : Phương trình $z^2 + \overline{z} = 0$ có 4 nghiệm là:

$z_1 = 0;\quad z_2 = -1;\ z_3 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};\ z_4 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vấn đề 3. Phương trình bậc ba: $Az^3 + Bz^2 + Cz + D = 0$ $(A \neq 0)$

1. a) $z = 1 + i$ là nghiệm của phương trình $z^3 - (1+i)z^2 + az + b - 4i = 0$

$\Leftrightarrow (1+i)^3 - (1+i)(1+i)^2 + a(1+i) + b - 4i = 0$

$\Leftrightarrow a + b + (a-4)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ a - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 4,\ b = -4$

Phương trình trở thành $z^3 - (1+i)z^2 + 4z - 4 - 4i = 0$.

Vì phương trình có một nghiệm là $z = 1 + i$, chia đa thức

$P(z) = z^3 - (1+i)z^2 + 4z - 4 - 4i$ cho $z - 1 - i$, ta có:

$z^3 - (1+i)z^2 + 4z - 4 - 4i = 0 \Leftrightarrow (z - 1 - i)(z^2 + 4) = 0$

$\Leftrightarrow z = 1 + i$ hoặc $z^2 = -4 = 4i^2$

$\Leftrightarrow z = 1 + i$ hoặc $z = \pm 2i$

Vậy phương trình có 3 nghiệm $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2i$ và $z_3 = -2i$.

b) $z = 1 - i$ là nghiệm của phương trình $z^3 + aiz^2 + (i - b)z - 2 - 2i = 0$

$\Leftrightarrow (1-i)^3 + ai(1-i)^2 + (i - b)(1-i) - 2 - 2i = 0$

$\Leftrightarrow (1 - 3i + 3i^2 - i^3) + ai(1 - 2i + i^2) + (i - i^2 - b + bi) - 2 - 2i = 0$

$\Leftrightarrow 1 - 3i - 3 + i + 2a + i + 1 - b + bi - 2 - 2i = 0$

$\Leftrightarrow -3 + 2a - b + (b-3)i = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 + 2a - b = 0 \\ b - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \end{cases}.$

Phương trình trở thành $z^3 + 3iz^2 + (i - 3)z - 2 - 2i = 0$

Biết $z = 1 - i$ là 1 nghiệm, chia $P(z) = z^3 + 3iz^2 + (i-3)z - 2 - 2i$ cho $z - 1 + i$, ta được:

$z^3 + 3iz^2 + (i-3)z - 2 - 2i = 0 \Leftrightarrow (z - 1 + i)[z^2 + (1+2i)z + 2i] = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z - 1 + i = 0 \quad (1) \\ z^2 + (1+2i)z + 2i = 0 \quad (2) \end{array}\right.$

(1) $\Leftrightarrow z = 1 - i$

(2) $\Leftrightarrow z^2 + (1+2i)z + 2i = 0$ $(A - B + C = 0)$

$\Leftrightarrow z = -1$ hoặc $z = -2i$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm là: $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -1$ và $z_3 = -2i$.

2. a) Ta thấy phương trình $2z^3 + 9z^2 + 14z + 5 = 0$ nhận $z = -\frac{1}{2}$ là nghiệm.

Chia đa thức $P(z) = 2z^3 + 9z^2 + 14z + 5$ cho $z + \frac{1}{2}$, ta được:

$2z^3 + 9z^2 + 14z + 5 = 0 \Leftrightarrow (z + \frac{1}{2})(2z^2 + 8z + 10) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z + \frac{1}{2} = 0 \quad (1) \\ z^2 + 8z + 10 = 0 \ (2) \end{array}\right.$

(1) $\Leftrightarrow$ $z = -\frac{1}{2}$

(2) $\Leftrightarrow$ $2z^2 + 8z + 10 = 0$ $\Leftrightarrow$ $z^2 + 4z + 5 = 0$

$\Delta' = 4 - 5 = -1 = i^2$

$z = -2 \pm i$

Vậy phương trình có 3 nghiệm là : $z_1 = -1/2$, $z_2 = -2 + i$ và $z_3 = -2 + i$.

b) Ta thấy phương trình $z^3 - 7z^2 + 17z - 15 = 0$ có 1 nghiệm là $z = 3$.

Chia đa thức $P(z) = z^3 - 7z^2 + 17z - 15$ cho $z - 3$, ta được:

$$z^3 - 7z^2 + 17z - 15 = 0 \Leftrightarrow (z-3)(z^2 - 4z + 5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} z - 3 = 0 & (1) \\ z^2 - 4z + 5 = 0 & (2) \end{array}\right.$$

(1) $\Leftrightarrow$ $z = 3$

(2) $\Leftrightarrow$ $z^2 - 4z + 5 = 0$ ($\Delta' = 4 - 5 = -1 = i^2$) $\Leftrightarrow z = 2 \pm i$

Vậy phương trình có 3 nghiệm là: $z_1 = 3$, $z_2 = 2 + i$ và $z_3 = 2 - i$.

c) Phương trình $z^3 - (6 + \sqrt{2})z^2 + (13 + 6\sqrt{2})z - 13\sqrt{2} = 0$ hệ số thực có 1 nghiệm là $z = 3 - 2i$, suy ra $z = 3 + 2i$ cũng là nghiệm.

Do đó phương trình phải có dạng $(z - z_1)(z - 3 + 2i)(z - 3 - 2i) = 0$.

Chia đa thức $P(z) = z^3 - (6 + \sqrt{2})z^2 + (13 + 6\sqrt{2})z - 13\sqrt{2}$ cho

$(z - 3 + 2i)(z - 3 - 2i) = z^2 - 6z + 13$, ta được thương là $z - \sqrt{2}$

Phương trình $z^3 - (6 + \sqrt{2})z^2 + (13 + 6\sqrt{2})z - 13\sqrt{2} = 0$ tương đương với

$(z - \sqrt{2})(z - 3 + 2i)(z - 3 - 2i) = 0$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm là: $z_1 = \sqrt{2}$, $z_2 = 3 - 2i$ và $z_3 = 3 + 2i$.

3. a) Gọi nghiệm thuần ảo của phương trình là ai ($a \in R$)

$\Rightarrow$ ai thỏa mãn phương trình: $(ai)^3 - 2(ai)^2 + 25ai + b = 0$

$$\Leftrightarrow -a^3i + 2a^2 + 25ai + b = 0 \Leftrightarrow 2a^2 + b + (-a^3 + 25a)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = -25a^2 & (1) \\ a(25 - a^2) = 0 & (2) \end{cases}$$

$a = 0 \Rightarrow b = 0$ (loại)

$a = \pm 5 \Rightarrow b = -50$.

Vậy phương trình có 2 nghiệm ảo là $\pm 5i$ và phương trình có dạng :

$z^3 - 2z^2 + 25z - 50 = 0$ với $z = 2$ là nghiệm thực.

<u>**Kết luận :**</u> phương trình đã cho có 3 nghiệm là: $z_1 = 2$, $z_2 = 5i$ và $z_3 = -5i$

b) Gọi x là nghiệm thực của phương trình

$z^3 + bz^2 + (9 - i)z - 6 + 2i = 0$, $b \in R$, ta có:

$x^3 + bx^2 + (9 - i)x - 6 + 2i = 0$

$\Leftrightarrow$ $x^3 + bx^2 + 9x - 6 + (2 - x)i = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x = 0 \\ x^3 + bx^2 + 9x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ b = -5 \end{cases}.$$

Suy ra phương trình có dạng: $z^3 - 5z^2 + (9-i)z - 6 + 2i = 0$, với $z = 2$ là nghiệm thực của phương trình

Chia đa thức $P(z) = z^3 - 5z^2 + (9-i)z - 6 + 2i$ cho $z - 2$, ta có:

$$z^3 - 5z^2 + (9-i)z - 6 + 2i = 0$$

$$\Leftrightarrow (z-2)(z^2 - 3z + 3 - i) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} z - 2 = 0 & (1) \\ z^2 - 3z + 3 - i = 0 & (2) \end{array}\right.$$

(1) $\Leftrightarrow z = 2$

(2) $\Leftrightarrow z^2 - 3z + 3 - i = 0$; $\Delta = 9 - 12 + 4i = -3 + 4i = (1 + 2i)^2$

$$\Rightarrow z = \frac{3 \pm (1 + 2i)}{2} \Leftrightarrow z = 2 + i \text{ hoặc } z = 1 - i$$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm là: $z_1 = 2$, $z_2 = 2 + i$ và $z_3 = 1 - i$.

Vấn đề 4. phương trình bậc bốn $Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E = 0$ $(A \neq 0)$

1. Gọi $z = x$ là nghiệm thực của phương trình, ta có:

$$x^4 + x^3 - (3+i)x^2 - 4x + 4i - 4 = 0 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4 + i(-x^2 + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 4 = 0 \\ x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 2$$

Như vậy phương trình được biến đổi thành phương trình tích có dạng:

$$(z-2)(z+2)(z^2 + az + b) = 0$$

$$\Leftrightarrow (z^2 - 4)(z^2 + az + b) = 0$$

$$\Leftrightarrow z^4 + az^3 + (b-4)z^2 - 4az - 4b = 0 \qquad (2)$$

Đồng nhất phương trình (1) và (2) ta được: $\begin{cases} a = 1 \\ b - 4 = -3 - i \\ -4a = -4 \\ -4b = 4i - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 - i \end{cases}$

Vậy phương trình (1) tương với:

$$(z^2 - 4)(z^2 + z + 1 - i) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} z^2 = 4 & (i) \\ z^2 + z + 1 - i = 0 & (ii) \end{array}\right.$$

* $z^2 = 4 \Leftrightarrow z = \pm 2$

* $z^2 + z + 1 - i = 0$, $\Delta = 1 - 4 + 4i = -3 + 4i = (1 + 2i)^2$

$$z = \frac{-1 + 1 + 2i}{2} = i \text{ hoặc } \frac{-1 - 1 - 2i}{2} = -1 - i$$

Kết luận: Phương trình đã cho có 4 nghiệm: $z_1 = 2$, $z_2 = -2$, $z_3 = i$ và $z_4 = -1 - i$.

2. Gọi nghiệm thuần ảo của phương trình là xi ($x \in R$), ta có

$$x^4i^4 + 2i\,x^3i^3 - x^2i^2 + 2i.xi - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2(x^2 + 2x + 1) - 2(x + 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2(x+1)^2 - 2(x+1) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x + 1)[x^2(x+1) - 2] = 0$$
$$\Leftrightarrow (x + 1)(x^3 + x^2 - 2) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 = 0 \\ x^3 + x^2 - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = 1$$

Vậy 2 nghiệm thuần ảo của phương trình là $z = \pm i$.

Phương trình được viết lại thành

$$(z - i)(z + i)(z^2 + az + b) = 0 \quad (a, b \in C)$$
$$\Leftrightarrow (z^2 + 1)(z^2 + az + b) = 0$$
$$\Leftrightarrow z^4 + az^3 + (b + 1)z^2 + az + b = 0$$

Đồng nhất phương trình này với phương trình đã cho ta được :

$$\begin{cases} a = 2i \\ b + 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 2i \text{ và } b = -2.$$

Phương trình trở thành

$$(z - i)(z + i)(z^2 + 2iz - 2) = 0$$
$$\Leftrightarrow z = \pm i \text{ hoặc } z^2 + 2iz - 2 = 0$$
$$\Delta' = i^2 + 2 = -1 + 2 = 1 \Rightarrow z = -i \pm 1$$

Kết luận: Phương trình đã cho có 4 nghiệm là: $z_{1,2} = \pm i$, $z_3 = 1 - i$ và $z_4 = 1 - i$

3. Các hệ số của phương trình là: $A = 1$; $B = -3$; $C = 2 - i$; $D = 3$; $E = -3 + i$

Ta có $A + B + C + D + E = 0$. Suy ra phương trình có 1 nghiệm $z = 1$

Chia đa thức $P(z) = z^4 - (3 + 2i)z^3 + (2 - i)z^2 + (3 + 2i)z - 3 + i$ cho $(z - 1)$, ta biến đổi :

(1) $\Leftrightarrow (z - 1)[z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i] = 0$

$\Leftrightarrow z = 1$ hoặc $z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i = 0$ (2)

Phương trình (2) lại có các hệ số thỏa mãn: $A' - B' + C' - D' = 1 + 2 - i - 3 + i = 0$.

Do đó phương trình (2) có 1 nghiệm $z = -1$

(2) $\Leftrightarrow (z + 1)(z^2 - 3z + 3 - i) = 0$

$\Leftrightarrow z = -1$ hoặc $z^2 - 3z + 3 - i = 0$ (3)

Phương trình (3) có $\Delta = 9 - 12 + 4i = -3 + 4i = (1 + 2i)^2$

(3) có 2 nghiệm là $z = 1 - i$ và $z = 2 + i$.

Kết luận: Phương trình (1) có 4 nghiệm là : $z = \pm 1$, $z = 1 - i$ và $z = 2 + i$.

§3. DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC VÀ ỨNG DỤNG

Vấn đề 1. Viết số phức dưới dạng lượng giác

1. a) $5\sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ b) $\frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

c) $(18\sqrt{2} - 12\sqrt{3})(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$ d) $(2\sqrt{3}+2)(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

e) $\frac{14\sqrt{3}}{3}(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3}))$ f) $\frac{4\sqrt{6}}{3}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

2. a) $\sqrt{2}+1+i = \sqrt{2}\,(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i) = \sqrt{2}\,(1 + \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

$$= \sqrt{2}\left(2\cos^2\frac{\pi}{8} + 2i\sin\frac{\pi}{8}.\cos\frac{\pi}{8}\right) = 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$$

b) $2 - \sqrt{3} + i = 2[\,1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\,] = 2\,(1 + \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$

$$= 2(2\cos^2\frac{5\pi}{12} + 2i\sin\frac{5\pi}{12}.\cos\frac{5\pi}{12}) = 4\cos\frac{5\pi}{12}\,(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12})$$

c) $1 + (\sqrt{2}+1)i = (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) + (\sqrt{2}+1)i$

$$= (\sqrt{2}+1)\,(\sqrt{2}-1+i) = \sqrt{2}\,(\sqrt{2}+1)(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})$$

$$= \sqrt{2}\,(\sqrt{2}+1)\,(1 + \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$$

$$= \sqrt{2}\,(\sqrt{2}+1)\,(2\cos^2\frac{3\pi}{8} + 2i\sin\frac{3\pi}{8}.\cos\frac{3\pi}{8})$$

$$= 2\sqrt{2}\,(\sqrt{2}+1)\cos\frac{3\pi}{8}.[\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}]$$

d) $1 + (2-\sqrt{3})i = (2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3})i$

$$= (2-\sqrt{3})\,(2+\sqrt{3}+i) = 2(2-\sqrt{3})\,(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2})$$

$$= 2(2-\sqrt{3})\,(1 + \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$$

$$= 2(2-\sqrt{3})\,(2\cos^2\frac{\pi}{12} + 2i\sin\frac{\pi}{12}.\cos\frac{\pi}{12})$$

$$= 4(2-\sqrt{3})\cos\frac{\pi}{12}.(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$$

e) Đáp số: $4(2-\sqrt{3})\cos\frac{\pi}{12}\,(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})$

f) Đáp số: $4(2+\sqrt{3})\sin\frac{\pi}{12}\,[\cos(-\frac{5\pi}{12})+i\sin(-\frac{5\pi}{12})]$

3. a) $1+\frac{i}{\sqrt{3}}=1+i\tan\frac{\pi}{6}=1+i\,\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}}(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$

$=\frac{2}{\sqrt{3}}(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$

b) **Cách 1:** $1+\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})\,i=1+\tan\frac{\pi}{3}+(1-\tan\frac{\pi}{3})\,i$

$=1+\frac{\sin(\frac{\pi}{3})}{\cos(\frac{\pi}{3})}+(1-\frac{\sin(\frac{\pi}{3})}{\cos(\frac{\pi}{3})})i$

$=\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{3})}(\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3})+\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{3})}(\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}).i$

$=\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{3})}(\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3})-\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{3})}(\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{3}).i$

$=\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{3})}\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{3})}\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}).i$

$=2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12})=2\sqrt{2}[\cos(-\frac{\pi}{12})+i\sin(-\frac{\pi}{12})]$

Cách 2: $1+\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})\,i=(1+\sqrt{3})(1+\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}i)$

$=(1+\sqrt{3})(1+\frac{\tan(\frac{\pi}{4})-\tan(\frac{\pi}{3})}{1+\tan(\frac{\pi}{4}).\tan(\frac{\pi}{3})}i)$

$=(1+\sqrt{3})[1+i\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3})]=(1+\sqrt{3})[1+i\tan(-\frac{\pi}{12})]$

$=(1+\sqrt{3})[1+i\frac{\sin(-\frac{\pi}{12})}{\cos(-\frac{\pi}{12})}]=\frac{1+\sqrt{3}}{\cos(\frac{\pi}{12})}[\cos(-\frac{\pi}{12})+i\sin(-\frac{\pi}{12})]$

Mà $\cos\frac{\pi}{12} = \cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

Do đó: $1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})\,i = \dfrac{1+\sqrt{3}}{\cos(\frac{\pi}{12})}\left[\cos(-\frac{\pi}{12}) + i\sin(-\frac{\pi}{12})\right]$

$$= 2\sqrt{2}\,[\cos(-\frac{\pi}{12}) + i\sin(-\frac{\pi}{12})].$$

Vấn đề 2. Áp dụng công thức Moivre để thực hiện các phép tính

1. Đáp số: a) $-3\sqrt{3} - 3i$; b) $\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i$; c) $-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

2. Đáp số: a) $2^{12} - 1$; b) $\frac{27}{32}(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)$; c) $\frac{1}{2}$; d) 8

3. Ta có $z = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2} = \cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})$

a) $z^{12} = [\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})]^{12} = \cos(-\frac{12\pi}{3}) + i\sin(-\frac{12\pi}{3})$

$\quad = \cos(-4\pi) + i\sin(-4\pi) = 1$

$z^6 = [\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})]^6 = \cos(-\frac{6\pi}{3}) + i\sin(-\frac{6\pi}{3})$

$= \cos(-2\pi) + i\sin(-2\pi) = 1$

Vậy $A = z^{12} + z^6 + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$

b) $z^9 = [\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})]^9 = \cos(-\frac{9\pi}{3}) + i\sin(-\frac{9\pi}{3})$

$= \cos(-3\pi) + i\sin(-3\pi) = -1$

$z^6 = 1$ (chứng minh trên)

$z^3 = [\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})]^3 = \cos(-\frac{3\pi}{3}) + i\sin(-\frac{3\pi}{3})$

$= \cos(-\pi) + i\sin(-\pi) = -1$

Vậy $B = z^9 + z^6 + z^3 + 1 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0$

Cách khác: Ta có thể coi B là tổng của 1 cấp số nhân có 4 số hạng, số hạng đầu là 1 và công bội là $z^3 \neq 1$.

Suy ra ta có $B = z^9 + z^6 + z^3 + 1 = \dfrac{u_1(1-q^4)}{1-q} = \dfrac{1-(z^3)^4}{1-z^3} = \dfrac{1-z^{12}}{1-z^3}$

Với $z^3 = -1$ và $z^{12} = 1$ (theo chứng minh trên).

Vậy $B = 0$

c) Ta có: $z^2 = [\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})]^2 = \cos(-\frac{2\pi}{3}) + i\sin(-\frac{2\pi}{3})$

$$= \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

$z^4 = [\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})]^4 = \cos(-\frac{4\pi}{3}) + i\sin(-\frac{4\pi}{3})$

$$= \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

$z^8 = [\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})]^8 = \cos(-\frac{8\pi}{3}) + i\sin(-\frac{8\pi}{3})$

$$= \cos(-\frac{2\pi}{3}) + i\sin(-\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

Vậy $C = z^8 + 2z^4 + z^2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} + 2(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}) + -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = -2.$

d) Ta có $D = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \ldots + z^8$ là tổng của 1 cấp số nhân có 9 số hạng, số hạng đầu là 1, công bội bằng $z \neq 1$.

Suy ra $D = \dfrac{z^9 - 1}{z - 1}$ với $z^9 = -1$ (chứng minh trên)

$$D = \frac{z^9-1}{z-1} = \frac{-1-1}{-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{1+i\sqrt{3}} = \frac{4(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})} = \frac{4(1-i\sqrt{3})}{1+3} = 1 - i\sqrt{3}.$$

e) $E = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots - z^9 + z^{10}$ là tổng của 1 cấp số nhân có 11 số hạng, số hạng đầu là 1, công bội bằng $q = -z$.

Ta có $E = \dfrac{q^{11}-1}{q-1} = \dfrac{(-z)^{11}-1}{-z-1} = \dfrac{-z^{11}-1}{-z-1} = \dfrac{z^{11}+1}{z+1}$

Với $z = \cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z + 1 = \frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

và $z^{11} = \cos(-\frac{11\pi}{3}) + i\sin(-\frac{11\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow z^{11} + 1 = \frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}.$

Vậy $E = \dfrac{z^{11}+1}{z+1} = \dfrac{\dfrac{3}{2}+\dfrac{i\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{3}{2}-\dfrac{i\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{3+i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$

$= \dfrac{(\sqrt{3}+i)^2}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)} = \dfrac{3-1+2i\sqrt{3}}{3+1} = \dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{3}}{2}$.

f) $F = z^{2009} - z^{2010} + z^{2011} = z^{2009}(1 - z + z^2)$

Với $z = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ và $z^2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow 1 - z + z^2 = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{i\sqrt{3}}{2} = 0$

Vậy $F = 0$.

4. a) $\sin\dfrac{\pi}{12} = \sin(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}) = \sin\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4} - \sin\dfrac{\pi}{4}.\cos\dfrac{\pi}{3}$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\cos\dfrac{\pi}{12} = \cos(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}) = \cos\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4} + \sin\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{3}$

$= \dfrac{1}{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

b) Theo câu a), ta có $z = \cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12} \Rightarrow |z| = 1$

$\Rightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow z.\bar{z} = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{z} = \bar{z}$ và $\dfrac{1}{z^2} = \bar{z}^2$

Ta có $A = z^2 + z + 2 + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z^2} = (z^2 + \dfrac{1}{z^2} + 2) + (z + \dfrac{1}{z})$

$= (z^2 + \bar{z}^2 + 2.z.\bar{z}) + (z + \bar{z}) =$

$= (z + \bar{z})^2 + (z + \bar{z})$ với $z + \bar{z} = 2\cos\dfrac{\pi}{12}$

suy ra $A = (2\cos\dfrac{\pi}{12})^2 + 2\cos\dfrac{\pi}{12} = 2.(2\cos^2\dfrac{\pi}{12}) + 2\cos\dfrac{\pi}{12}$

$= 2.(1+\cos\dfrac{\pi}{6}) + 2\cos\dfrac{\pi}{12}$

$= 2(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}) + 2.\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = 2 + \sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $A = \dfrac{4+2\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

$B = z^2 - z + 2i + \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} = z^2 - \frac{1}{z^2} + 2i - (z - \frac{1}{z})$

$= z^2 - \overline{z}^2 + 2i - (z - \overline{z}) = z - \overline{z})(z + \overline{z}) + 2i - (z - \overline{z})$

$= 2i.\sin\frac{\pi}{12}.2\cos\frac{\pi}{12} + 2i - 2i\sin\frac{\pi}{12}$

$= 2i\sin\frac{\pi}{6} + 2i - 2i\sin\frac{\pi}{12} = 2i(\sin\frac{\pi}{6} + 1 - \sin\frac{\pi}{12})$

$= 2i(\frac{1}{2} + 1 - \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}) = 2i(\frac{6 - \sqrt{6} + \sqrt{2}}{4})$. Vậy $B = \frac{6 - \sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}i$.

5. Đáp số: $A = 2^4\sqrt{2}.\cos^4\frac{\pi}{16}$ $B = 16i.\cos^3\frac{\pi}{32}.\sin\frac{3\pi}{32}$ $C = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

6. Đáp số: w = 0

7. Đáp số: A = 2, B = – 2.

Vấn đề 3. Tính modun và acgumen của số phức

1. Ta kí hiệu r và φ lần lượt là môđun và acgumen của số phức z, ta có

a) $z = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i = 1 + \cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}$

$= 2\cos^2\frac{\pi}{8} - 2i\sin\frac{\pi}{8}.\cos\frac{\pi}{8} = 2\cos\frac{\pi}{8}(\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8})$

$= 2\cos\frac{\pi}{8}[\cos(-\frac{\pi}{8}) + i\sin(-\frac{\pi}{8})]$

Vậy $r = 2\cos\frac{\pi}{8}$; $\varphi = -\frac{\pi}{8}$.

b) $z = 2 - \sqrt{2} - i\sqrt{2} = 2(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}) = 2(1 - \cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4})$

$= 2(2\sin^2\frac{\pi}{8} - 2i\sin\frac{\pi}{8}.\cos\frac{\pi}{8}) = 4\sin\frac{\pi}{8}(\sin\frac{\pi}{8} - i\cos\frac{\pi}{8})$

$= 4\sin\frac{\pi}{8}(\cos\frac{3\pi}{8} - i\sin\frac{3\pi}{8}) = 4\sin\frac{\pi}{8}[\cos(-\frac{3\pi}{8}) + i\sin(-\frac{3\pi}{8})]$

Vậy $r = 4\sin\frac{\pi}{8}$; $\varphi = -\frac{3\pi}{8}$.

c) $z = 2\sqrt{3} + 3 + i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$

$= 2\sqrt{3}(1 + \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = 2\sqrt{3}(2\cos^2\frac{\pi}{12} + 2i\sin\frac{\pi}{12}.\cos\frac{\pi}{12})$

$= 4\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{12}(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$

Vậy $r = 4\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{12}$; $\varphi = \frac{\pi}{12}$.

d) $z = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3}i = -\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}i = \frac{2}{3}\left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

$= \frac{2}{3}\left(-2\sin^2\frac{\pi}{12} + 2i\sin\frac{\pi}{12}.\cos\frac{\pi}{12}\right) = \frac{4}{3}\sin\frac{\pi}{12}\left(-\sin\frac{\pi}{12} + i\cos\frac{\pi}{12}\right)$

$= \frac{4}{3}\sin\frac{\pi}{12}\left(\sin(-\frac{\pi}{12}) + i\cos(-\frac{\pi}{12})\right) = \frac{4}{3}\sin\frac{\pi}{12}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$

Vậy $r = \frac{4}{3}\sin\frac{\pi}{12}$; $\varphi = \frac{7\pi}{12}$.

2. Ta gọi r và φ lần lượt là môđun và một acgumen của số phức w.

Giải phương trình $z^2 - 2iz - 4 = 0$: $\Delta' = i^2 + 4 = -1 + 4 = 3$

Phương trình có 2 nghiệm là:

$z_1 = -\sqrt{3} + i = 2(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$, z_1 có phần thực âm.

và $z_2 = \sqrt{3} + i = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

a) Ta có: $z_1^2 = 4(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$; $z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

Suy ra:

$w = z_1^2.z_2 = 4.2.[\cos(\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{6})] = 8(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6})$

Vậy w có môđun và một acgumen là: $r = 8$; $\varphi = \frac{11\pi}{6}$.

b) Ta có: $z_2 - 2 = \sqrt{3} + i - 2 = 2(-1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = 2(-1 + \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

$= 2(-2\sin^2\frac{\pi}{12} + 2i\sin\frac{\pi}{12}.\cos\frac{\pi}{12}) = 4\sin\frac{\pi}{12}(-\sin\frac{\pi}{12} + i\cos\frac{\pi}{12})$

$= 4\sin\frac{\pi}{12}[\sin(-\frac{\pi}{12}) + i\cos(-\frac{\pi}{12})] = 4\sin\frac{\pi}{12}(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12})$

Suy ra : $w = \frac{z_1}{z_2 - 2} = \dfrac{2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})}{4\sin\frac{\pi}{12}(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12})}$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}\left(\cos(\frac{5\pi}{6} - \frac{7\pi}{12}) + i\sin(\frac{5\pi}{6} - \frac{7\pi}{12})\right)$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}\left(\cos\frac{3\pi}{12} + i\sin\frac{3\pi}{12}\right) = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Vậy $w = \dfrac{z_1}{z_2 - 2}$ có môđun và một acgumen là $r = \dfrac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}$; $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

c) **Cách 1:** Ta có $z_2 - 2 = 4\sin\frac{\pi}{12}(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12})$ (theo chứng minh trên)

và $z_1 - 2 = -\sqrt{3} + i - 2 = 2(-1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = 2(-1 - \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

$$= 2(-2\cos^2\frac{\pi}{12} + 2i\sin\frac{\pi}{12}.\cos\frac{\pi}{12}) = 4\cos\frac{\pi}{12}(-\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$$

$$= 4\cos\frac{\pi}{12}(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12})$$

Suy ra

$$w = (z_1 - 2)(z_2 - 2) = 4\cos\frac{\pi}{12}(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}).4\sin\frac{\pi}{12}(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12})$$

$$= 16\sin\frac{\pi}{12}.\cos\frac{\pi}{12}[\cos(\frac{11\pi}{12} + \frac{7\pi}{12}) + i\sin(\frac{11\pi}{12} + \frac{7\pi}{12})]$$

$$= 8\sin\frac{\pi}{6}.(\cos\frac{18\pi}{12} + i\sin\frac{18\pi}{12})$$

$$= 8\sin\frac{\pi}{6}.(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$$

$$= 4(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$$

Vậy $w = (z_1 - 2)(z_2 - 2)$ có môđun và một acgumen là $r = 4$; $\varphi = \dfrac{3\pi}{2}$.

Cách 2:

Trong trường hợp này, ta có thể áp dụng công thức Viet

$$z_1 + z_2 = 2i \text{ và } z_1.z_2 = -4$$

Ta có $w = (z_1 - 2)(z_2 - 2) = z_1.z_2 - 2(z_1 + z_2) + 4 = -4 - 2.2i + 4 = 4i$

$$= 4(0 - i) = 4(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$$

d) $w = \overline{z_1}.(2 - \overline{z_2}) \Rightarrow \overline{w} = \overline{\overline{z_1}.(2 - \overline{z_2})} = z_1.(2 - z_2) = -z_1.(z_2 - 2)$

Với $-z_1 = -2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) = 2(-\cos\frac{5\pi}{6} - i\sin\frac{5\pi}{6})$

$$= 2\,[\cos(\frac{5\pi}{6} - \pi) + i\sin(\frac{5\pi}{6} - \pi)] = 2[\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})]$$

và $z_2 - 2 = 4\sin\frac{\pi}{12}\,(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12})$

Suy ra $\overline{w} = -z_1.(z_2 - 2)$

$$= 2[\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})].4\sin\frac{\pi}{12}(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12})$$

$$= 8\sin\frac{\pi}{12}.[\cos(-\frac{\pi}{6} + \frac{7\pi}{12}) + i\sin(-\frac{\pi}{6} + \frac{7\pi}{12})]$$

$$= 8\sin\frac{\pi}{12}.(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12})$$

$\Rightarrow w = 8\sin\frac{\pi}{12}.(\cos\frac{5\pi}{12} - i\sin\frac{5\pi}{12}) = 8\sin\frac{\pi}{12}.[\cos(-\frac{5\pi}{12}) + i\sin(-\frac{5\pi}{12})]$

Vậy $w = \overline{z_1}.(2 - \overline{z_2})$ có môđun và một acgumen là $r = 8\sin\frac{\pi}{12}$; $\varphi = -\frac{5\pi}{12}$

3. Ta có $\frac{1+z^2}{1-z^2} = i \Leftrightarrow 1 + z^2 = i - iz^2 \Leftrightarrow (1+i)z^2 = -1 + i \Leftrightarrow z^2 = \frac{-1+i}{1+i}$

$$z^2 = \frac{-(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-(1+i^2-2i)}{1+1} = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow |z| = 1$, đặt $z = \cos\varphi + i\sin\varphi \Rightarrow z^2 = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$

Ta có $z^2 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow 2\varphi = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} + k\pi.$

Chọn $k = 0, 1$, ta được $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ và $\varphi_2 = \frac{5\pi}{4}$.

Vậy có 2 số phức z thỏa $\frac{1+z^2}{1-z^2} = i$:

z_1 có môđun $r = 1$, một acgumen là $\varphi = \frac{\pi}{4}$

và z_2 có môđun $r = 1$, một acgumen $\varphi = \frac{5\pi}{4}$.

Vấn đề 4. Áp dụng công thức Moivne để tính căn bậc n của số phức.

1. a) $w = (1+i)(\sqrt{3}+i) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$= 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$\Leftrightarrow w = \sqrt{8}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$

Vậy w có 2 căn bậc hai là:

$z_1 = \sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{5\pi}{24} + i\sin\frac{5\pi}{24}\right)$ và

$z_2 = \sqrt[4]{8}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{24}+\pi\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{24}+\pi\right)\right] = \sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{29\pi}{24} + i\sin\frac{29\pi}{24}\right)$

b) Đáp số: $\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$; $\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$

c) Đáp số: $2\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$; $2\sqrt[4]{2}\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{8}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{8}\right)\right]$;

2. a) $w = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow$ w có môđun R = 2 và một acgumen $\theta = \frac{2\pi}{3}$

Suy ra căn bậc ba của w là số phức z có

– môđun $r = \sqrt[3]{2}$

– một acgumen $\varphi = \frac{\theta}{3} + \frac{k2\pi}{3} = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in Z$.

Lấy k = 0, 1, 2 , φ có 3 giá trị

$\varphi_1 = \frac{2\pi}{9}$; $\varphi_2 = \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} = \frac{8\pi}{9}$; $\varphi_3 = \frac{2\pi}{9} + \frac{4\pi}{3} = \frac{14\pi}{9}$

Vậy $w = -1 + i\sqrt{3}$ có 3 căn bậc ba là:

$z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9}\right)$

$z_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{8\pi}{9} + i\sin\frac{8\pi}{9}\right)$

$z_3 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{14\pi}{9} + i\sin\frac{14\pi}{9}\right)$

b) $\sqrt{2}\,(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12})$; $\sqrt{2}\,[\cos(-\frac{11\pi}{12}) + i\sin(-\frac{11\pi}{12})]$; $\sqrt{2}\,[\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})]$

c) $\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$; $\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}$; $\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2})$

d) $2(\cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9})$; $2(\cos\frac{8\pi}{9} + i\sin\frac{8\pi}{9})$; $2[\cos(-\frac{4\pi}{9}) + i\sin(-\frac{4\pi}{9})]$

3. $w = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}$ có môđun $R = 1$ và một acgumen $\theta = \frac{7\pi}{6}$.

Suy ra căn bậc bốn của w là số phức z có:

– môđun $r = 1$

– một acgumen $\varphi = \frac{\theta}{4} + \frac{k2\pi}{4} = \frac{7\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$

Lấy k = 0, 1, 2, 3 ta có 4 giá trị của φ:

$\varphi_1 = \frac{7\pi}{24}$ $\qquad \varphi_2 = \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi}{2} = \frac{19\pi}{24}$

$\varphi_3 = \frac{7\pi}{24} + \pi = \frac{31\pi}{24}$ $\qquad \varphi_4 = \frac{7\pi}{24} + \frac{3\pi}{2} = \frac{43\pi}{24}$

Vậy $w = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ có 4 căn bậc bốn là:

$z_1 = \cos\frac{7\pi}{24} + i\sin\frac{7\pi}{24}$ $\qquad z_2 = \cos\frac{19\pi}{24} + i\sin\frac{19\pi}{24}$

$z_3 = \cos\frac{31\pi}{24} + i\sin\frac{31\pi}{24}$ $\qquad z_4 = \cos\frac{43\pi}{24} + i\sin\frac{43\pi}{24}$

4. Đáp số: a) $z_0 = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

b) $z_0^4 = -8 + 8i\sqrt{3}$

Các căn bậc bốn của $-8 + 8i\sqrt{3}$ là:

$z_0 = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$, $z_1 = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$,

$z_2 = 2(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6})$ và $z_3 = 2(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$

5. Căn bậc năm của số phức $w = i$ là số phức z thỏa $z^5 = i$.

Vì $|z^5| = |i| = 1 \Leftrightarrow |z|^5 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$. Đặt $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, ta có:

$z^5 = i \Leftrightarrow (\cos\varphi + i\sin\varphi)^5 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow \cos5\varphi + i\sin5\varphi = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$

$$\Leftrightarrow 5\varphi = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{10} + \frac{k2\pi}{5}, k \in Z$$

Lấy k = 0, 1, 2, 3, 4 , ta được 5 giá trị của φ:

$\varphi_1 = \frac{\pi}{10}$; $\varphi_2 = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{2}$; $\varphi_3 = \frac{\pi}{10} + \frac{4\pi}{5} = \frac{9\pi}{10}$;

$\varphi_4 = \frac{\pi}{10} + \frac{6\pi}{5} = \frac{13\pi}{10}$; $\varphi_5 = \frac{\pi}{10} + \frac{8\pi}{5} = \frac{17\pi}{10}$.

Vậy có 5 căn bậc năm của i là:

$z_1 = \cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10}$ $z_2 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$

$z_3 = \cos\frac{9\pi}{10} + i\sin\frac{9\pi}{10}$ $z_4 = \cos\frac{13\pi}{10} + i\sin\frac{13\pi}{10}$

$z_5 = \cos\frac{17\pi}{10} + i\sin\frac{17\pi}{10}$

Vấn đề 5. Áp dụng công thức Moivne để chứng minh các hệ thức lượng giác

1. Đặt $A = 1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx$

và $B = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx$

Ta có:

$$A + iB = (1 + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx) + i(\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx)$$

$$= 1 + (\cos x + i\sin x) + (\cos 2x + i\sin 2x) + (\cos 3x + i\sin 3x) + \ldots + (\cos nx + i\sin nx)$$

$$= 1 + (\cos x + i\sin x) + (\cos x + i\sin x)^2 + (\cos x + i\sin x)^3 + \ldots + (\cos x + i\sin x)^n$$

$$= \frac{1 - (\cos x + i\sin x)^{n+1}}{1 - (\cos x + i\sin x)} = \frac{1 - \cos(n+1)x - i\sin(n+1)x}{1 - \cos x - i\sin x}$$

$$= \frac{2\sin^2\frac{(n+1)x}{2} - 2i\sin\frac{(n+1)x}{2}.\cos\frac{(n+1)x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2} - 2i\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} . \frac{\sin\frac{n+1}{2}x - i\cos\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2} - i\cos\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} . \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{(n+1)x}{2}) - i\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{(n+1)x}{2})}{\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}) - i\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2})}$$

$$= \frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \frac{\cos(-\frac{\pi}{2}+\frac{(n+1)x}{2})+i\sin(-\frac{\pi}{2}+\frac{(n+1)x}{2})}{\cos(-\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2})+i\sin(-\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2})}$$

$$= \frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} . \cos\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{(n+1)x}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{(n+1)x}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} .(\cos\frac{nx}{2} + i\sin\frac{nx}{2})$$

$$\Rightarrow\ A + iB = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} . \left(\cos\frac{nx}{2} + i\sin\frac{nx}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\ A = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x . \cos\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \text{ và } B = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x . \sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

Vậy $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx = \dfrac{\sin\frac{n+1}{2}x . \cos\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ (1)

$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx = \dfrac{\sin\frac{n+1}{2}x . \sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ (2).

b) Đặt $x = \dfrac{2\pi}{n+1}$, ta có

$$E = \cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{4\pi}{2n+1} + \cos\frac{6\pi}{2n+1} + \ldots + \cos\frac{2n\pi}{2n+1}$$

hay $E = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx$

Theo kết quả trên, ta có

$$1 + E = 1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x . \cos\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$\Rightarrow 1+E=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}.\frac{2\pi}{2n+1}\right).\cos\left(\frac{n}{2}.\frac{2\pi}{2n+1}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}.\frac{2\pi}{2n+1}\right)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{n+1}{2n+1}.\pi+\frac{n}{2n+1}.\pi\right)+\sin\left(\frac{n+1}{2n+1}.\pi-\frac{n}{2n+1}.\pi\right)\right]}{\sin\frac{\pi}{2n+1}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left[\sin\pi+\sin\frac{\pi}{2n+1}\right]}{\sin\frac{\pi}{2n+1}}.$$

$\Rightarrow 1+E=\frac{1}{2}$. Vậy $E=-\frac{1}{2}$.

2. Vì $|z^5|=1 \Rightarrow |z|=1$, nên ta đặt $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$.

Phương trình $z^5=1 \Leftrightarrow (\cos\varphi+i\sin\varphi)^5=1$

$\Leftrightarrow \cos5\varphi+i\sin5\varphi=\cos k2\pi+i\sin k2\pi \ (k\in Z)$

$\Leftrightarrow 5\varphi=k2\pi \Leftrightarrow \varphi=\frac{k2\pi}{5}$

Chọn k = 0, 1, 2, 3 và 4, ta được 5 giá trị của φ: 0, $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{5}$, $\frac{6\pi}{5}$ và $\frac{8\pi}{5}$

Phương trình $z^5=1$ có 5 nghiệm $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$.

Ta xét nghiệm $z=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$.

Mặt khác, đặt $z=x+yi$ ($x, y\in R$).

Ta có : $z^5=(x+yi)^5$

$=x^5+5x^4.yi+10x^3(yi)^2+10x^2(yi)^3+5x(yi)^4+(yi)^5$

$=x^5+5x^4.yi-10x^3y^2-10x^2y^3i+5xy^4+y^5i$

$=(x^5-10x^3y^2+5xy^4)+i(5x^4y-10x^2y^3+y^5)$

Do đó phương trình $z^5=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^5-10x^3y^2+5xy^4=1 & (1)\\ 5x^4y-10x^2y^3+y^5=0 & (2)\end{cases}$

Ta nhận xét rằng:

* x và y > 0, $x^2+y^2=1$

* Vì $\frac{\pi}{3}<\frac{2\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$ nên $0<\cos\frac{2\pi}{5}<\frac{1}{2}$ suy ra $0<x^2=\cos^2\frac{2\pi}{5}<\frac{1}{4}$

Từ (2), suy ra: $5x^4-10x^2y^2+y^4=0$

$\Leftrightarrow 5x^4 - 10x^2(1 - x^2) + (1 - x^2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow 5x^4 - 10x^2 + 10x^4 + 1 - 2x^2 + x^4 = 0$

$\Leftrightarrow 16x^4 - 12x^2 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{6+2\sqrt{5}}{16} \approx 0{,}65$ (loại vì lớn hơn $\dfrac{1}{4}$) hoặc $x^2 = \dfrac{6-2\sqrt{5}}{16} \approx 0{,}095$

Suy ra $x^2 = \dfrac{6-2\sqrt{5}}{16} = \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 \Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

$\Rightarrow y^2 = 1 - x^2 = 1 - \dfrac{6-2\sqrt{5}}{16} = \dfrac{10+2\sqrt{5}}{16} = \dfrac{2(5+\sqrt{5})}{16} \Rightarrow y = \dfrac{\sqrt{2}.\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4}$

<u>**Kết luận:**</u> $\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ và $\sin\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{2}.\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4}$

3. Dùng các kết quả sau đây và kết hợp với các hằng đẳng thức quen thuộc để chứng minh.

$|z| = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{z} = \bar{z}$; $z + \bar{z} = 2\cos\theta$; $z - \bar{z} = 2i\sin\theta$. (Bạn đọc tự giải)

MỤC LỤC

HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

SÁCH PHÁT HÀNH TẠI

★HỆ THỐNG NHÀ SÁCH & SIÊU THỊ CỦA
CÔNG TI CỔ PHẦN VĂN HÓA DU LỊCH GIA LAI TRÊN TOÀN QUỐC

★HỆ THỐNG NHÀ SÁCH & SIÊU THỊ CỦA
CÔNG TI CỔ PHẦN VĂN HÓA PHƯƠNG NAM TRÊN TOÀN QUỐC

ĐÀ NẴNG:	**NS MINH TRÍ** – 103 Lý Thái Tổ
QUẢNG NGÃI:	**NS TRẦN QUỐC TUẤN** – 526 Quang Trung
NHA TRANG:	**CÔNG TY CP PHS** – 34 – 36 Thống Nhất – Nha Trang
	SIÊU THỊ TÂN TIẾN – 11 Lê Thành Phương
BÌNH THUẬN:	**NS HƯNG ĐẠO** – 328 Trần Hưng Đạo – TP. Phan Thiết
ĐỒNG NAI:	**NS KIM NGÂN** – 88 Cách Mạng Tháng Tám – TP. Biên Hòa
VŨNG TÀU:	**NS ĐÔNG HẢI** – 38 Lý Thường Kiệt
	NS ABC – 204 Bình Giã
GIA LAI:	**CÔNG TY SÁCH TBTH** – 40B Hùng Vương
DAKLAK:	**NS GIÁO DỤC** – 19 Trường Chinh
	NS LÝ THƯỜNG KIỆT – 55 – 57 Lý Thường Kiệt
KONTUM:	**CÔNG TY CP SÁCH TBTH** – 129 Phan Đình Phùng
LÂM ĐỒNG:	**CÔNG TY CP SÁCH TBTH** – 09 Nguyễn Văn Cừ – Đà Lạt
DĂK NÔNG:	**NS GIÁO DỤC** – 30 Trần Hưng Đạo – Gia Nghĩa
TÂY NINH:	**NS VĂN NGHỆ** – 295 Đường 30 tháng 4
LONG AN:	**CÔNG TY PHS** – 04 Võ Văn Tần – TX. Tân An
TIỀN GIANG:	**CÔNG TY CP SÁCH TBTH** – 22 Hùng Vương – TP. Mỹ Tho
CẦN THƠ:	**CÔNG TY CP SÁCH TBTH** – 132 Đường 30 tháng 4
	NS HỒNG ÂN – 94 Xô Viết Nghệ Tĩnh
HẬU GIANG:	**CÔNG TY SÁCH TBTH** – 50 Nguyễn Thái Học – TX Vị Thanh
ĐỒNG THÁP:	**NS VIỆT HƯNG** – 200 Nguyễn Huệ – TP. Cao Lãnh
BẾN TRE:	**CÔNG TY CP SÁCH TBTH** – 03 Đồng Khởi
SÓC TRĂNG:	**NS TRẺ** – 41 Trần Hưng Đạo
	NS TRANG – 112 Nguyễn Thị Minh Khai
BẠC LIÊU:	**CÔNG TY CP SÁCH TBTH** – 59 Lý Thường Kiệt – Phường 3
	TRUNG TÂM PHS – 57 Hoàng Văn Thụ
KIÊN GIANG:	**NS ĐÔNG HỒ I** – 98B Trần Phú – Rạch Giá
	NS ĐÔNG HỒ II – 989 Nguyễn Trung Trực – Rạch Giá
CÀ MAU:	**CÔNG TY CP SÁCH TBTH** – 26 – 28 Lê Lợi – Phường 2
BÌNH DƯƠNG:	**NHÀ SÁCH 277** – 518 Cách Mạng Tháng Tám – Thủ Dầu Một

ISBN: 978-604-62-1293-5

8 935092 759869

Giá: 96.000đ