Mathématiques

⬢ Section 3 - Trigonométrie ⬢

Clément Campana
Juillet 2022

Table des matières

I Premier pas en Trigonométrie

La Trigonométrie est, comme son nom l'indique, une discipline mathématique qui a comme objectif de "mesurer" les triangles.

Plus clairement, son but est de pouvoir déduire l'ensemble des informations disponibles dans un triangle à partir du minimum d'information sur ce triangle. Comme vu dans la Section 2, un triangle est un polygone à 3 côtés, et la somme des 3 angles d'un triangle vaut 180°, π rad ou 200 gr.

En général, en Trigonométrie, on se focalise principalement sur les *triangles rectangles*, puis on généralise les théorèmes que nous avons démontré à tous les triangles.

I.1 Construction d'un triangle

Les triangles ont une particularité les différenciant des autres polygones :

En connaissant la longueur de 3 côtés d'un triangle, il est possible de parfaitement construire ce triangle.

Dans les autres polygones, cette condition n'est pas suffisante pour le construire [1].

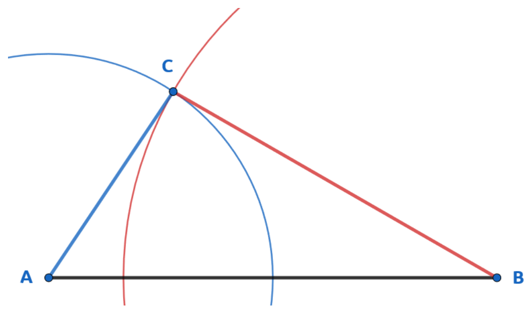
Pour tracer un triangle à l'aide de *trois longueurs*, il faut tracer un segment mesurant une des trois longueurs choisies, puis tracer deux cercle ayant comme centre les extrémités du segment et comme rayons les deux autres longueurs voulues pour le triangle. Les cercles se croisent en deux points, avec lesquelles ont peut construire deux triangles symétriques.

Mais l'on peut aussi remplacer un des cercles ou les deux cercles par une ou des demi-droites, ayant un angle interne d'une valeur choisie. Cette demi-droite et le cercle ou ces deux demi-droites vont se croiser en un point, le troisième sommet du triangle.

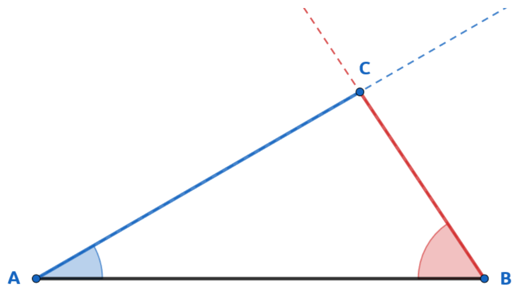
Voici un tableau récapitulatif des différentes possibilités de construction d'un triangle, en fonction du nombre d'informations connues sur celui-ci :

	Aucune longueur	**1 longueur**	**2 longueurs**	**3 longueurs**
Aucun angle	Inconstructible	Inconstructible	Inconstructible	Constructible
1 angle	Inconstructible	Inconstructible	Constructible	Constructible
2 ou 3 angles [2]	Triangles semblables [3]	Constructible	Constructible	Constructible

Nous pouvons en conclure qu'un triangle en particulier, est traçable à l'aide d'une longueur et de deux autres mesures (des angles ou des longueurs).



Triangle construit avec 3 longueurs



Triangle construit avec 1 longueur et 2 angles

Cette propriété unique aux triangles, nous sera très utile par la suite.

1. Par exemple, si l'on prend un quadrilatère donné, où l'on a fixé la longueur de 4 côtés, il est possible de "l'écraser" afin d'obtenir un autre quadrilatère ayant les mêmes longueurs de côtés. En revanche, les angles formés par les côtés de ce quadrilatère ne seront pas les mêmes que ceux du quadrilatère de départ.

Ainsi, à partir d'un losange, il est possible de créer un carré, en fonction des angles choisis entre les côtés.

Pour la même raison, les polygones ayant plus de côtés ne sont pas constructibles en connaissant uniquement les longueurs de leurs côtés.

2. En connaissant deux angles d'un triangle, il est possible de déduire le troisième, car la somme des trois angles d'un triangle correspond à un angle plat.

3. Avec deux ou trois angles, il n'est pas possible de construire un triangle en particulier, mais seulement une collection de triangles semblables entre-eux.

I.2 Fonctions trigonométriques

i Relation entre les longueurs des côtés d'un triangle rectangle

Prenons un triangle rectangle, dont (par définition) nous connaissons un des angles, son angle droit (qui vaut 90°, $\frac{\pi}{2}$ rad ou 100 gr).

Prenons un autre de ces angles, que nous appellerons α.

Nous connaissons ainsi deux angle, l'angle droit et l'angle α. Comme nous savons que la somme des trois angles du triangle vaut un angle plat, nous pouvons déduire la mesure du dernier angle. Notre troisième angle (que nous nommerons β) vaut en degré : $\beta = 180° - (90° + \alpha) = 90° - \alpha$

Maintenant, nous avons obtenues les mesures des trois angles du triangle. Comme vu plus précédemment dans le tableau, avec uniquement 3 angles, il est possible de construire une collection de **triangles tous semblables entre-eux**.

Afin d'être plus clair, nommons les côtés de notre triangle a, b et c, en fonction de leur taille. Le côté a sera le plus court, le côté intermédiaire sera le b et le plus long sera le c.

Prenons deux de triangles de cette collection, le triangle 1 et le triangle 2. Leurs côtés mesures a_1, b_1, c_1 et a_2, b_2, c_2. Comme ces triangles sont semblables, leurs côtés sont proportionnels entre-eux, ce qui signifie que $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

Cette propriété implique que, les rapports entre les côtés dans un triangle vont être égaux à ceux des mêmes côtés dans un autre triangle semblable au premier.

Mathématiquement, cela signifie que, pour les côtés a et b de deux triangles semblables, on a $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$.

Démontrons cette propriété : $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \iff a_1 \times b_2 = a_2 \times b_1 \iff \frac{a_1 \times b_2}{b_1} = a_2 \iff \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$

Les démonstrations des relations entre les autres côtés sont analogues.

Cela signifie que les **rapports entre les longueurs** des côtés dans triangle, ne dépend que des mesures des angles.

De plus, comme nous sommes dans un triangle rectangle, tous les angles du triangle sont soit fixé à l'avance (l'angle droit), ou ne dépendent que de la mesure de l'angle α.

Et enfin, nous pouvons en conclure que les rapports entre tous les côtés d'un triangle rectangle, ne dépendent que de la mesure de l'angle α.

ii Définition des fonctions trigonométriques élémentaires

Comme montré plus tôt, les rapports en chaque côté d'un triangle rectangle, ne dépendent que de l'angle α (défini comme étant un autre angle que l'angle droit).

En revanche, ce rapport entre longueurs n'est pas simplement constant, il varie de manière complexe en fonction de l'angle α.

Pour prendre en compte ces variations, et donc pouvoir obtenir une relation chiffrée, les mathématiciens ont construits un grand arsenal de fonctions trigonométriques [2].

Les fonctions trigonométriques les plus utiles sont :

- La fonction sinus, notée sin.
- La fonction cosinus, notée cos.
- La fonction tangente, notée tan.

Dans ces relations, on utilise :

- L'angle α, définit précédemment.
- La cathète opposée à l'angle α (noté O et généralement appelée "côté opposé").
- La cathète adjacente à l'angle α (noté A et généralement appelée "côté adjacent").
- L'hypoténuse du triangle (noté H).

2. Une grande partie des fonctions trigonométriques créées sont rarement utiles, pour en savoir plus sur ces fonctions délaissées, rendez-vous en Annexe, à la page 6.

Voici les relations en questions, qui sont les définitions respectives de la fonction sinus, cosinus et tangente :

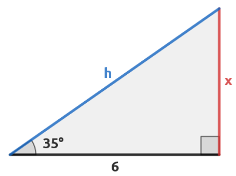
Fonction	**Définition**	**Résumé**	
Sinus	$\sin(\alpha) = \dfrac{\text{Cathète Opposée}}{\text{Hypoténuse}}$	$\sin(\alpha) = \frac{\text{O}}{\text{H}} \Longrightarrow \text{S} = \text{O} \ / \ \text{H}$	*SOH*
Cosinus	$\cos(\alpha) = \dfrac{\text{Cathète Adjacente}}{\text{Hypoténuse}}$	$\cos(\alpha) = \frac{\text{A}}{\text{H}} \Longrightarrow \text{C} = \text{A} \ / \ \text{H}$	*CAH*
Tangente	$\tan(\alpha) = \dfrac{\text{Cathète Opposée}}{\text{Cathète Adjacente}}$	$\tan(\alpha) = \frac{\text{O}}{\text{A}} \Longrightarrow \text{T} = \text{O} \ / \ \text{A}$	*TOA*

Un bon moyen mnémotechnique pour retenir ces définitions, est l'expression "*Casse-toi !*". On peut l'obtenir en utilisant les résumés des définitions à droite, réarrangeant les définitions, en mettant celle du cosinus en premier. Ainsi, on obtient "*CAH, SOH, TOA*".

A l'aide de ces relations, il est possible de connaître toutes les longueurs de tous les côtés d'un triangle rectangle à l'aide uniquement de la mesure d'un de ses angles et d'une longueur d'un des côtés.

Exemple :

CAH	C = A / H	$\cos(35°) = \frac{6}{h}$	$h = \frac{6}{\cos(35°)} \approx 7,32$
TOA	T = O / A	$\tan(35°) = \frac{x}{6}$	$x = 6 \times \tan(35°) \approx 4,20$



iii Lien entre ces trois fonctions

De plus, il est possible d'établir un lien entre ces trois fonctions :

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

Pour démontrer cette relation, on peut utiliser la définition de la tangente, puis remplacer les longueurs des côtés à l'aide des définitions des fonctions sinus et cosinus :

Cathète Opposée $= \sin(\alpha) \times$ Hypoténuse
Cathète Adjacente $= \cos(\alpha) \times$ Hypoténuse

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Cathète Opposée}}{\text{Cathète Adjacente}} = \frac{\sin(\alpha)\times\text{Hypoténuse}}{\cos(\alpha)\times\text{Hypoténuse}} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

II Cercle trigonométrique et radian

Le degré (unité largement utilisé) n'est pas très adaptée en mathématique, où l'on préfère utiliser le radian.

II.1 Définitions des unités

i Définition du degré

Un degré est définit comme étant l'angle formé par un arc de cercle 360 fois plus petit qu'un cercle ayant le même rayon que cet arc. Ce choix de découpe en 360 parts est très pratique (car 360 est un nombre divisible par beaucoup d'autres).

Cependant, le choix de nombre de part étant arbitraire, il n'est pas agréable à utiliser dans des mathématiques poussées**(Nombre complexe : $e^{ix} = \cos(x) + i \times \sin(x)$), la construction artificielle de cette unité pose problème, n'étant pas compatible avec d'autres propriétés mathématiques.

C'est pour cela que l'on a inventé le radian, une unité cohérente avec le reste des mathématiques.

ii Définition du grade

????

iii Définition du radian

Le radian est une unité d'angle définit, à l'aide de la longueur de l'arc de cercle, ayant un rayon égal 1, délimité par l'angle mesuré.

Cette définition semble au premier abord plus naturelle que la définition précédente, comme elle est directement basée sur la longueur de l'arc de cercle formé. De plus, grâce à cette définition, certaines formules deviennent fonctionnelles.**

Cependant, le périmètre d'un cercle étant égal à 2π, on retrouve la constante π un peu partout dans les mesures d'angles usuels. Cette constante peut rendre l'utilisation de cette constante peu intuitive, ce qui explique certainement pourquoi cette unité, mathématiquement meilleure que le degré, ne s'est pas imposée au plus grand nombre comme remplaçante de cette vielle unité.

iv Conversion d'une unité à une autre

x degré $\Rightarrow y$ radian : $y = x \times \frac{2\pi}{360} = x \times \frac{\pi}{180}$
x radian $\Rightarrow y$ degré : $y = x \times \frac{360}{2\pi} = x \times \frac{180}{\pi}$
x degré $\Rightarrow y$ grade : $y = x \times \frac{400}{360} = x \times \frac{10}{9}$
x radian $\Rightarrow y$ grade : $y = x \times \frac{400}{2\pi} = x \times \frac{200}{\pi}$
x grade $\Rightarrow y$ degré : $y = x \times \frac{360}{400} = x \times \frac{9}{10}$
x grade $\Rightarrow y$ radian : $y = x \times \frac{2\pi}{400} = x \times \frac{\pi}{200}$
Valeurs approchées et Logarithmes des constantes : ...

II.2 Cercle trigonométrique

En mathématique (et en science plus globalement), l'unité reine est le radian, c'est donc cette dernière que nous allons utiliser ici, à partir de maintenant.

Pour représenter des angles et bien comprendre leur lien avec les fonctions trigonométriques, on utilise généralement le cercle trigonométrique. Ce cercle est centré autour de l'origine du repère et à un rayon égal à 1, ce cercle est représenté ci-dessous.

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

Un angle représenté sur ce cercle est "orienté", c'est-à-dire qu'il commence et qu'il termine aux extrémités le définissant.

L'axe de départ de tous les angles représentables sur le cercle est l'axe des abscisses (plus précisément, l'axe des abscisses positives). L'angle est mesuré entre deux demi-droites, celui des abscisses positives et une autre servant à terminer l'angle, ces deux demi-droites partent de l'origine du repère.

L'orientation des angles correspond au sens indiqué par la flèche en haut à droite du cercle, ce sens, inverse au sens horaire (celui dans lequel tournent les aiguilles d'une montre), est appelé sens trigonométrique (ou sans antihoraire).

Cette orientation donne un signe aux angles, ainsi les angles α et β sont des angles positif et les angles γ et θ sont négatifs. En tournant autour du cercle, on retrouve ainsi n'importe quelle angle possible.

II.3 Lien avec les fonctions trigonométriques

Sur le cercle trigonométrique, il est possible de retrouver simplement le sinus et le cosinus d'un angle représenté sur le cercle. Appelons cet angle θ. En effet, en projetant le point A (celui étant à l'intersection entre le cercle et la demi-droite terminant l'angle étudié) sur l'axe des abscisses, alors on forme le point X_A, et à l'aide des calculs vus précédemment, on trouve que la longueur du segment $[\mathrm{O}X_A]$ est égal à $\cos(\theta)$. En effet, le triangle $\mathrm{OA}X_A$ est un triangle rectangle, il est donc possible d'utiliser la formule définissant le cosinus, soit :

$\cos(\theta) = \frac{\text{Cathète Adjacente}}{\text{Hypoténuse}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{H}}$

Dans notre cas, on a donc :

$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{O}X_A}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{O}X_A}{1}$

Ainsi $\mathrm{O}X_A = \cos(\theta)$

Il est également possible de projeter le point A sur l'axe des ordonnées, pour former le point Y_A. Et de manière analogue, on démontre aisément que $\mathrm{O}Y_A = \sin(\theta)$.

J'ai trouvé un moyen mnémotechnique pour retenir quel axe est celui où l'on retrouve le sinus de l'angle. L'abréviation de sinus c'est sin, ce qui correspond au début du mot "singe", les singes montent dans les arbres, alors l'axe des sinus est l'axe verticale de notre repère.

De plus, on peut aussi retrouver graphiquement la tangente, pour un angle θ, c'est la longueur du segment perpendiculaire à la droite (OA) tangente (géométrique) au cercle trigonométrique qui intercepte l'axe des abscisses.

II.4 Arithmétique modulaire

L'arithmétique modulaire est une branche de l'arithmétique étudiant le reste dans la division euclidienne d'un nombre, en fonction d'un autre, qu'on appellera module.

L'etude se fait uniquement sur les restes de cette division euclidienne, ainsi les valeurs étudiées pouvant

II.5 Mesure principale

III Propriété des fonctions sin / cos / tan

III.1 Valeurs remarquables

Annexe autres valeurs remarquables

III.2 Propriétés de ces fonctions

III.3 Représentation graphique

III.4 Étude de fonction (Variation, ...)

IV Fonctions inverses arcsin / arccos / arctan

IV.1 Propriétés de ces fonctions

IV.2 Représentation graphique

V Formules trigonométriques

normalesup.org/ dconduche/prepas/PT/cours/ChapitreFicheTrigo.pdf)

VI Lecture de la table

VII Annexe

Fonctions trigonométriques chelous

Fonctions trigonométriques chelous selon Github copilot :

- La fonction sinus, notée sin.
- La fonction cosinus, notée cos.
- La fonction tangente, notée tan.
- La fonction cotangente, notée cot.
- La fonction sécante, notée sec.
- La fonction cosécante, notée csc.
- La fonction exsecante, notée exsec.
- La fonction excosécante, notée excsc.
- La fonction versine, notée vers.
- La fonction coversine, notée covers.
- La fonction haversine, notée havers.
- La fonction hacoversine, notée hacovers.
- La fonction exverse, notée exvers.
- La fonction excovers, notée excovers.
- La fonction vercosine, notée vercos.
- La fonction coverscosine, notée coverscos.
- La fonction havercosine, notée havercos.
- La fonction hacoverscosine, notée hacoverscos.
- La fonction exvercosine, notée exvercos.
- La fonction excoverscosine, notée excoverscos.
- La fonction exsecant, notée exsec.
- La fonction excosecant, notée excsc.
- La fonction exsecant, notée exsec.