Recueil de Mathématiques

⬢ Section 3 - Trigonométrie ⬢

Clément Campana
Juillet 2024

Table des matières

I Premier pas en Trigonométrie **1**

I.1 Construction d'un triangle . . . 1
I.2 Fonctions trigonométriques . . . 2
i *Relation entre les longueurs des côtés d'un triangle rectangle* *2*
ii *Définition des fonctions trigonométriques élémentaires* *2*
iii *Lien entre ces trois fonctions* *3*

II Cercle trigonométrique **4**

II.1 Unité d'angle reine en Trigonométrie : le radian . . . 4
II.2 Cercle trigonométrique . . . 4
II.3 Lien avec les fonctions trigonométriques . . . 5
i *Retrouver le sinus et le cosinus de θ* *5*
ii *Retrouver la tangente de θ* *5*
II.4 Périodicité et mesure principale . . . 6

III Propriété des fonctions trigonométriques **7**

III.1 Valeurs remarquables . . . 7
III.2 Étude de fonction . . . 8
i *Définition de ces fonctions* *8*
ii *Propriétés de ces fonctions* *8*
iii *Représentation graphique* *9*

IV Fonctions trigonométriques inverses **11**

V Formulaire trigonométrique **14**

VI Lecture de la table **15**

VI.1 Cas des angles négatifs . . . 15
VI.2 Utilisation inversée de la table . . . 15
VI.3 Approximation linéaire . . . 16
i *Interpolation linéaire* *16*
ii *Développement limité d'ordre 1* *16*

I Premier pas en Trigonométrie

La Trigonométrie est, comme son nom l'indique, une discipline mathématique qui a comme objectif de "mesurer" les triangles.

Plus clairement, son but est de pouvoir déduire l'ensemble des informations disponibles dans un triangle à partir du minimum d'information sur ce triangle. Comme vu dans la Section 2, un triangle est un polygone à 3 côtés, et la somme des 3 angles d'un triangle vaut 180°, π rad ou 200 gr.

En général, en Trigonométrie, on se focalise principalement sur les *triangles rectangles*, puis on généralise les théorèmes que nous avons démontré à tous les triangles.

I.1 Construction d'un triangle

Les triangles ont une particularité les différenciant des autres polygones :

En connaissant la longueur de 3 côtés d'un triangle, il est possible de parfaitement construire ce triangle.

Dans les autres polygones, cette condition n'est pas suffisante pour le construire [1].

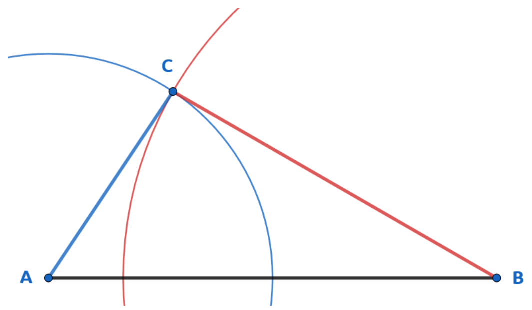
Pour tracer un triangle à l'aide de *trois longueurs*, il faut tracer un segment mesurant une des trois longueurs choisies, puis tracer deux cercle ayant comme centre les extrémités du segment et comme rayons les deux autres longueurs voulues pour le triangle. Les cercles se croisent en deux points, avec lesquelles ont peut construire deux triangles symétriques.

Mais l'on peut aussi remplacer un des cercles ou les deux cercles par une ou des demi-droites, ayant un angle interne d'une valeur choisie. Cette demi-droite et le cercle ou ces deux demi-droites vont se croiser en un point, le troisième sommet du triangle.

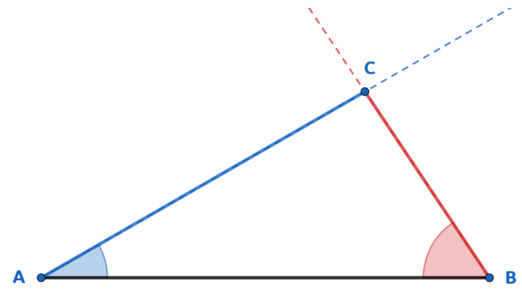
Voici un tableau récapitulatif des différentes possibilités de construction d'un triangle, en fonction du nombre d'informations connues sur celui-ci :

	Aucune longueur	**1 longueur**	**2 longueurs**	**3 longueurs**
Aucun angle	Inconstructible	Inconstructible	Inconstructible	Constructible
1 angle	Inconstructible	Inconstructible	Constructible	Constructible
2 ou 3 angles [2]	Triangles semblables [3]	Constructible	Constructible	Constructible

Nous pouvons en conclure qu'un triangle en particulier, est traçable à l'aide d'une longueur et de deux autres mesures (des angles ou des longueurs).



Triangle construit avec 3 longueurs



Triangle construit avec 1 longueur et 2 angles

Cette propriété unique aux triangles, nous sera très utile par la suite.

1. Par exemple, si l'on prend un quadrilatère donné, où l'on a fixé la longueur de 4 côtés, il est possible de "l'écraser" afin d'obtenir un autre quadrilatère ayant les mêmes longueurs de côtés. En revanche, les angles formés par les côtés de ce quadrilatère ne seront pas les mêmes que ceux du quadrilatère de départ.
Ainsi, à partir d'un losange, il est possible de créer un carré, en fonction des angles choisis entre les côtés.
Pour la même raison, les polygones ayant plus de côtés ne sont pas constructibles en connaissant uniquement les longueurs de leurs côtés.
2. En connaissant deux angles d'un triangle, il est possible de déduire le troisième, car la somme des trois angles d'un triangle correspond à un angle plat.
3. Avec deux ou trois angles, il n'est pas possible de construire un triangle en particulier, mais seulement une collection de triangles semblables entre-eux.

I.2 Fonctions trigonométriques

i Relation entre les longueurs des côtés d'un triangle rectangle

Prenons un triangle rectangle, dont (par définition) nous connaissons un des angles, son angle droit (qui vaut 90°, $\frac{\pi}{2}$ rad ou 100 gr).

Prenons un autre de ces angles, que nous appellerons α.

Nous connaissons ainsi deux angle, l'angle droit et l'angle α. Comme nous savons que la somme des trois angles du triangle vaut un angle plat, nous pouvons déduire la mesure du dernier angle. Notre troisième angle (que nous nommerons β) vaut en degré : $\beta = 180° - (90° + \alpha) = 90° - \alpha$

Maintenant, nous avons obtenues les mesures des trois angles du triangle. Comme vu plus précédemment dans le tableau, avec uniquement 3 angles, il est possible de construire une collection de **triangles tous semblables entre-eux**.

Afin d'être plus clair, nommons les côtés de notre triangle a, b et c, en fonction de leur taille. Le côté a sera le plus court, le côté intermédiaire sera le b et le plus long sera le c.

Prenons deux de triangles de cette collection, le triangle 1 et le triangle 2. Leurs côtés mesures a_1, b_1, c_1 et a_2, b_2, c_2. Comme ces triangles sont semblables, leurs côtés sont proportionnels entre-eux, ce qui signifie que $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

Cette propriété implique que, les rapports entre les côtés dans un triangle vont être égaux à ceux des mêmes côtés dans un autre triangle semblable au premier.

Mathématiquement, cela signifie que, pour les côtés a et b de deux triangles semblables, on a $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$.

Démontrons cette propriété : $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \iff a_1 \times b_2 = a_2 \times b_1 \iff \frac{a_1 \times b_2}{b_1} = a_2 \iff \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$

Les démonstrations des relations entre les autres côtés sont analogues.

Cela signifie que les **rapports entre les longueurs** des côtés dans triangle, ne dépend que des mesures des angles.

De plus, comme nous sommes dans un triangle rectangle, tous les angles du triangle sont soit fixé à l'avance (l'angle droit), ou ne dépendent que de la mesure de l'angle α.

Et enfin, nous pouvons en conclure que les rapports entre tous les côtés d'un triangle rectangle, ne dépendent que de la mesure de l'angle α.

ii Définition des fonctions trigonométriques élémentaires

Comme montré plus tôt, les rapports en chaque côté d'un triangle rectangle, ne dépendent que de l'angle α (défini comme étant un autre angle que l'angle droit).

En revanche, ce rapport entre longueurs n'est pas simplement constant, il varie de manière complexe en fonction de l'angle α.

Pour prendre en compte ces variations, et donc pouvoir obtenir une relation chiffrée, les mathématiciens ont construits un grand arsenal de fonctions trigonométriques [4].

Les fonctions trigonométriques les plus utiles sont :

- La fonction sinus, notée sin.
- La fonction cosinus, notée cos.
- La fonction tangente, notée tan.

Dans ces relations, on utilise :

- L'angle α, définit précédemment.
- La cathète opposée à l'angle α (noté O et généralement appelée "côté opposé").
- La cathète adjacente à l'angle α (noté A et généralement appelée "côté adjacent").
- L'hypoténuse du triangle (noté H).

4. Une grande partie des fonctions trigonométriques créées sont rarement utiles, pour en savoir plus sur ces fonctions délaissées, rendez-vous en Annexe, à la page 18.

Voici les relations en questions, qui sont les définitions respectives de la fonction sinus, cosinus et tangente :

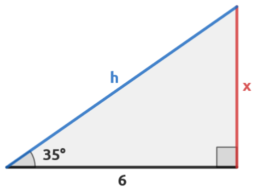
Fonction	**Définition**	**Résumé**
Sinus	$\sin(\alpha) = \dfrac{\text{Cathète Opposée}}{\text{Hypoténuse}}$	$\sin(\alpha) = \frac{\text{O}}{\text{H}} \Longrightarrow \text{S} = \text{O} \;/\; \text{H}$ *SOH*
Cosinus	$\cos(\alpha) = \dfrac{\text{Cathète Adjacente}}{\text{Hypoténuse}}$	$\cos(\alpha) = \frac{\text{A}}{\text{H}} \Longrightarrow \text{C} = \text{A} \;/\; \text{H}$ *CAH*
Tangente	$\tan(\alpha) = \dfrac{\text{Cathète Opposée}}{\text{Cathète Adjacente}}$	$\tan(\alpha) = \frac{\text{O}}{\text{A}} \Longrightarrow \text{T} = \text{O} \;/\; \text{A}$ *TOA*

Un bon moyen mnémotechnique pour retenir ces définitions, est l'expression "*Casse-toi !*". On peut l'obtenir en utilisant les résumés des définitions à droite, réarrangeant les définitions, en mettant celle du cosinus en premier. Ainsi, on obtient "*CAH, SOH, TOA*".

A l'aide de ces relations, il est possible de connaître toutes les longueurs de tous les côtés d'un triangle rectangle à l'aide uniquement de la mesure d'un de ses angles et d'une longueur d'un des côtés.

Exemple :

CAH	$\text{C} = \text{A} \;/\; \text{H}$	$\cos(35°) = \frac{6}{h}$	$h = \frac{6}{\cos(35°)} \approx 7,32$
TOA	$\text{T} = \text{O} \;/\; \text{A}$	$\tan(35°) = \frac{x}{6}$	$x = 6 \times \tan(35°) \approx 4,20$



iii Lien entre ces trois fonctions

De plus, il est possible d'établir un lien entre ces trois fonctions [5] :

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

Pour démontrer cette relation, on peut utiliser la définition de la tangente, puis remplacer les longueurs des côtés à l'aide des définitions des fonctions sinus et cosinus :

Cathète Opposée $= \sin(\alpha) \times$ Hypoténuse
Cathète Adjacente $= \cos(\alpha) \times$ Hypoténuse

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Cathète Opposée}}{\text{Cathète Adjacente}} = \frac{\sin(\alpha) \times \text{Hypoténuse}}{\cos(\alpha) \times \text{Hypoténuse}} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

5. Cette relation n'est vraie que si le dénominateur n'est pas nul.
Ainsi si $\alpha \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$, c'est à dire si $\exists k \in \mathbb{Z}, \alpha = k\pi + \frac{\pi}{2}$, alors la tangente de cet angle n'est pas définie.

II Cercle trigonométrique

II.1 Unité d'angle reine en Trigonométrie : le radian

Comme présenté dans la Section 2, il existe plusieurs unités d'angle différentes.

L'unité la plus utilisée est le degré, mais cette dernière n'est pas la plus adaptée en mathématique, en particulier en Trigonométrie, où l'on préfère utiliser le radian.

Pour en savoir plus sur les définitions des unités d'angle, rendez-vous dans la Section 2, dans la partie consacrée aux Angles.

Rappel de la définition du radian

Pour un angle donné, la mesure en radians de cet angle est égale à la longueur de l'arc de cercle intercepté par cet angle, sur un cercle de rayon 1.

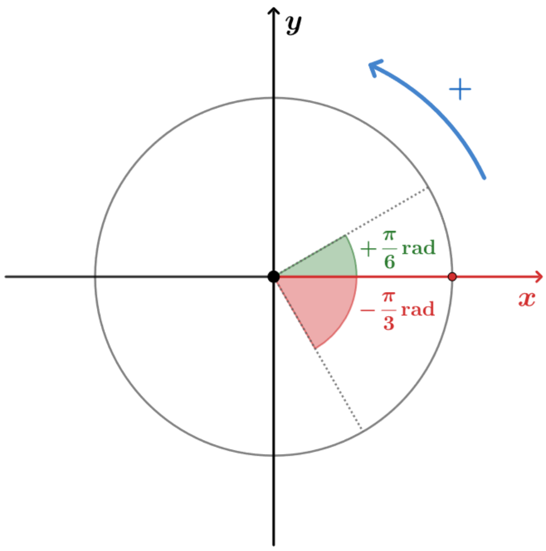
Ainsi, le radian est l'unité étant la plus cohérente mathématiquement, car elle est basée sur la longueur de l'arc de cercle formé. Cette cohérence a donné à cette unité un statut privilégié [6] en mathématique, en particulier en Trigonométrie.

Cependant, le périmètre d'un cercle étant égal à 2π, on retrouve la constante π un peu partout dans les mesures d'angles usuels. Cette constante rend l'utilisation de cette constante peu intuitive, ce qui explique certainement pourquoi cette unité, mathématiquement meilleure que le degré, ne s'est pas imposée au plus grand nombre comme remplaçante de cette vielle unité.

Et c'est pour cette raison que, par défaut, c'est cette unité qui sera utilisée à partir de maintenant.

II.2 Cercle trigonométrique

Pour représenter des angles et bien comprendre leur lien avec les fonctions trigonométriques, on utilise généralement le cercle trigonométrique. Ce cercle est centré autour de l'origine du repère et à un rayon égal à 1 :



Les angles représentés sur ce cercle sont orientés, c'est-à-dire qu'ils démarrent à partir d'une ligne et qu'il se terminent sur une autre ligne.

Leur orientation est indiqué par la flèche en haut à droite du cercle, ce sens, inverse au sens dans lequel tournent les aiguilles d'une montre, est appelé sens trigonométrique [7] (ou sens antihoraire). Comme ces angles sont orientés, il peuvent être **positifs** ou **négatifs**. On en déduit que l'angle vert est positif et le rouge est négatif.

Tous les angles représentables sur le cercle partent de l'axe des abscisses positives, représenté en rouge. Ainsi, les angles sont mesurés en partant de cette ligne de départ et en finissant sur un rayon du cercle.

Et donc, en tournant autour du cercle, on peut retrouver n'importe quelle angle possible.

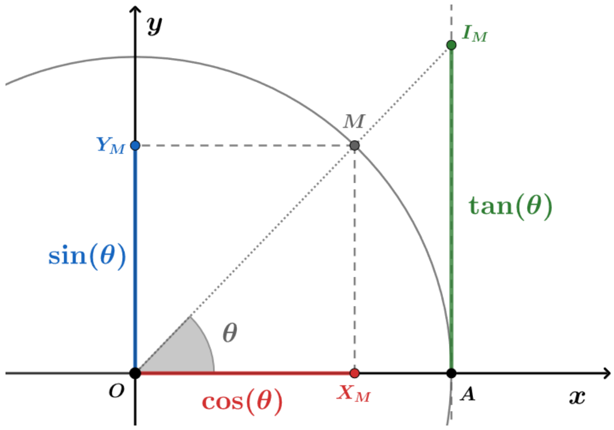
6. Au premier abord, le statut privilégié du radian ne semble pas solidement justifiée. C'est à dire que, mis à part la *beauté mathématique* de la définition du radian par rapport au degré, pourquoi cette unité est à préférer à une autre ?

Cette préférence provient de certaines propriétés mathématiques qui ne sont vrai que si l'unité d'angle est le radian. En particulier, lorsque l'on dérive ou intègre une fonction trigonométrique ou encore lorsque l'on utilise un développement limité de cette fonction trigonométrique. Dans ces cas, l'angle peut se retrouver en facteur, position où seule la mesure en radians d'un angle a un sens.

7. Le sens trigonométrique est une convention, qui a été choisie car elle est correspond au sens de rotation de la Terre autour de son axe de rotation, si l'on observe la Terre en se centrant sur le pôle Nord. Ce choix par des astronomes européens, vivant donc dans l'hémisphère nord.

II.3 Lien avec les fonctions trigonométriques

Sur le cercle trigonométrique, il est possible de retrouver simplement le sinus et le cosinus d'un angle représenté sur le cercle. Appelons cet angle θ, O le centre du cercle, et M le point d'intersection entre le rayon terminant l'angle et le cercle. Il est possible de construire un triangle rectangle OMX_M ayant pour hypoténuse le rayon du cercle.



i Retrouver le sinus et le cosinus de θ

À l'aide des définitions des fonctions sinus et cosinus, il facile de calculer les longueurs des côtés de ce triangle :

Cathète Adjacente = $\cos(\theta) \times$ Hypoténuse $\Longrightarrow$ Longueur de $[OX_M] = \cos(\theta) \times 1$
Cathète Opposée = $\sin(\theta) \times$ Hypoténuse $\Longrightarrow$ Longueur de $[MX_M] = \sin(\theta) \times 1$

De plus, il est possible de tracer un second triangle rectangle OMY_M ayant pour hypoténuse le rayon du cercle. Les longueurs des côtés de ce nouveau triangle sont les mêmes que celles du triangle OMX_M.

Ainsi on peut en conclure que, les coordonnées cartésiennes du point M sont $(\cos(\theta), \sin(\theta))$. Réciproquement, pour chaque point du cercle, il est possible d'obtenir le sinus et le cosinus de l'angle correspondant, en projetant ce point sur l'axe des abscisses et sur celui des ordonnées. [8]

ii Retrouver la tangente de θ

De plus, on peut aussi retrouver graphiquement la tangente :

- Prenez la droite tangente (géométriquement) au cercle, étant perpendiculaire à l'axe des abscisse positives et passant par A.
- Prolongez le rayon terminant l'angle θ. Cette demi-droite coupe la tangente géométrique en un point I_M.
- La longueur de $[AI_M] = \tan(\theta)$.

Démonstration : Nous savons que $OA = 1$, que $OX_M = \cos(\theta)$ et que $X_M M = \sin(\theta)$. De plus, nous pouvons remarquer que les triangles OMX_M et $OI_M A$ sont semblables, car ils sont équiangles.

Grâce à cette propriété, nous pouvons utiliser le théorèmes de Thalès, nous indiquant que $\frac{OX_M}{OA} = \frac{X_M M}{AI_M}$. En réarrangeant cette équation, on obtient :

$$AI_M = \frac{X_M M \times OA}{OX_M} = \frac{\sin(\theta) \times 1}{\cos(\theta)} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

Et comme présenté précédemment (à la page n°3), il existe un lien entre les trois fonctions trigonométriques élémentaires, à l'aide de ce lien, on démontre enfin que :

$$AI_M = \tan(\theta)$$

8. J'utilise un moyen mnémotechnique pour retenir quel axe est celui où l'on retrouve le sinus de l'angle. L'abréviation de sinus c'est sin, ce qui correspond au début du mot "singe", les singes montent dans les arbres, par conséquent l'axe des sinus est l'axe verticale de notre repère.

II.4 Périodicité et mesure principale

En tournant autour du cercle trigonométrique, il est possible d'obtenir un angle mesurant n'importe quel réel.

Ainsi, sur n'importe quel point du cercle, peut être représenté plusieurs angles ayant des mesures différant d'un certain nombre de tours du cercle.

Comme un tour complet du cercle correspond à un angle de 2π radians, pour un angle θ donné, les angles $\theta + 2\pi \times k$ (avec $k \in \mathbb{Z}$) tombent sur le même point du cercle.

Comme nous l'avons vu, la mesure d'un angle en radians est la longueur de l'arc de cercle intercepté par cet angle, ainsi les propriétés des fonctions trigonométriques seront nécessairement 2π-périodiques, c'est-à-dire qu'elles se répètent tous les 2π radians.

Par conséquent, nous allons nous intéresser uniquement à la mesure principale des angles représentés sur le cercle. La mesure principale d'un angle donné est la mesure d'un angle compris entre $-\pi$ rad et π rad, tombant sur le même point du cercle que l'angle initial.

De plus comme $-\pi$ rad et π rad sont les mêmes points du cercle, on dira que la mesure principale de $-\pi$ rad est π rad.

Ainsi, pour un angle θ donné, sa mesure principale est définie comme étant comprise dans l'intervale $]-\pi, \pi]$.

III Propriété des fonctions trigonométriques

Les fonctions sinus, cosinus et tangente sont les trois fonctions trigonométriques les plus utilisées en mathématique. Ce sont les valeurs prisent par ces fonctions qui sont représentées dans la table.

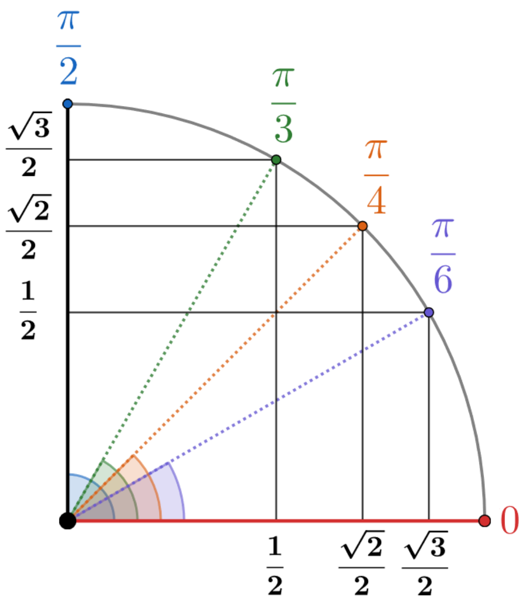
III.1 Valeurs remarquables

Voici un tableau regroupant les valeurs remarquables des fonctions sinus, cosinus et tangente :

Angle θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan(\theta)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Comme ces fonctions sont 2π-périodiques, les valeurs remarquables de ces fonctions se répètent tous les 2π radians. C'est pourquoi, dans ce tableau, les valeurs remarquables sont données pour les angles compris entre 0 et π radians.

Il est possible de retrouver facilement ces valeurs à l'aide du cercle trigonométrique, en se souvenant du schéma suivant :



Ce schéma représente une portion du cercle trigonométrique, dont les points ont une abscisse et une ordonnée positive. C'est la portion la plus utile du cercle trigonométrique.

Comment tracer ce schéma Pour tracer les 6 segments nous indiquant les valeurs de sinus et cosinus, des angles de $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{3}$, il faut tracer dans un premier les deux segments à l'abscisse et l'ordonnée égale à $\frac{1}{2}$.

Ces deux premiers segments croisent le cercle en deux points, le premier point est celui de l'angle $\frac{\pi}{6}$, et le second est celui de l'angle $\frac{\pi}{3}$. Maintenant que nous avons ces deux points, il est possible de tracer les deux segments à l'abscisse et l'ordonnée égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Pour obtenir les deux derniers segments, nous allons d'abords tracer le rayon passant par le point de d'intersection des deux premiers segments. Ce rayon coupe le cercle en un point, qui est celui correspondant à l'angle $\frac{\pi}{4}$. Et enfin, nous pouvons à l'aide de ce point, tracer les deux derniers segments.

Angles ayant des valeurs de sinus et cosinus exactes

On peut remarquer que les angles opposés à ceux du tableau ont aussi des valeurs de sinus et cosinus exactes. Leur cosinus restera le même, mais leur sinus sera négatif.

Il existe d'autres angles ayant des valeurs de sinus, de cosinus et de tangente exactes, certaines de ces valeurs sont présentés en Annexe, à la page 18.

III.2 Étude de fonction

i Définition de ces fonctions

Définition

Les fonction sinus et cosinus associe à tout réel x, le réel $\sin(x)$ et $\cos(x)$. La fonction tangente associe à la majorité des réels x, le réel $\tan(x)$.

Dans notre cas, x est un angle orienté suivant la convention du cercle trigonométrique, présenté plus tôt. De plus, nous considérons que x est exprimé en radians.

Ensemble de définition et d'arrivée

Pour les fonctions sinus et cosinus :

- Leur ensemble de définition est $\mathbb{R}$.
- Leur ensemble d'arrivée est l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.

Pour la fonction tangente :

- Son ensemble de définition est $\mathbb{R} \setminus \{\, k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
- Son ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$.

ii Propriétés de ces fonctions

Périodicité

Les fonctions sinus, cosinus et tangente sont 2π-périodiques. C'est à dire que, tout les 2π radians, ces fonctions se répètent.

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$, $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$ et $\tan(x) = \tan(x + 2\pi)$

Parité

La fonction sinus est impaire, la fonction cosinus est paire [9].

La fonction tangente est impaire sur l'intervale $\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$, elle n'est en revanche ni paire, ni impaire sur $\mathbb{R}$.

Variation sur $]-\pi\ ;\ \pi]$

Comme ces trois fonctions sont 2π-périodiques, nous pouvons nous intéresser uniquement à leur variation sur l'intervale $]-\pi\ ;\ \pi]$:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin(x)$	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0
$\cos(x)$	-1	↗	0	↗	1	↘	0	↘	-1
$\tan(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

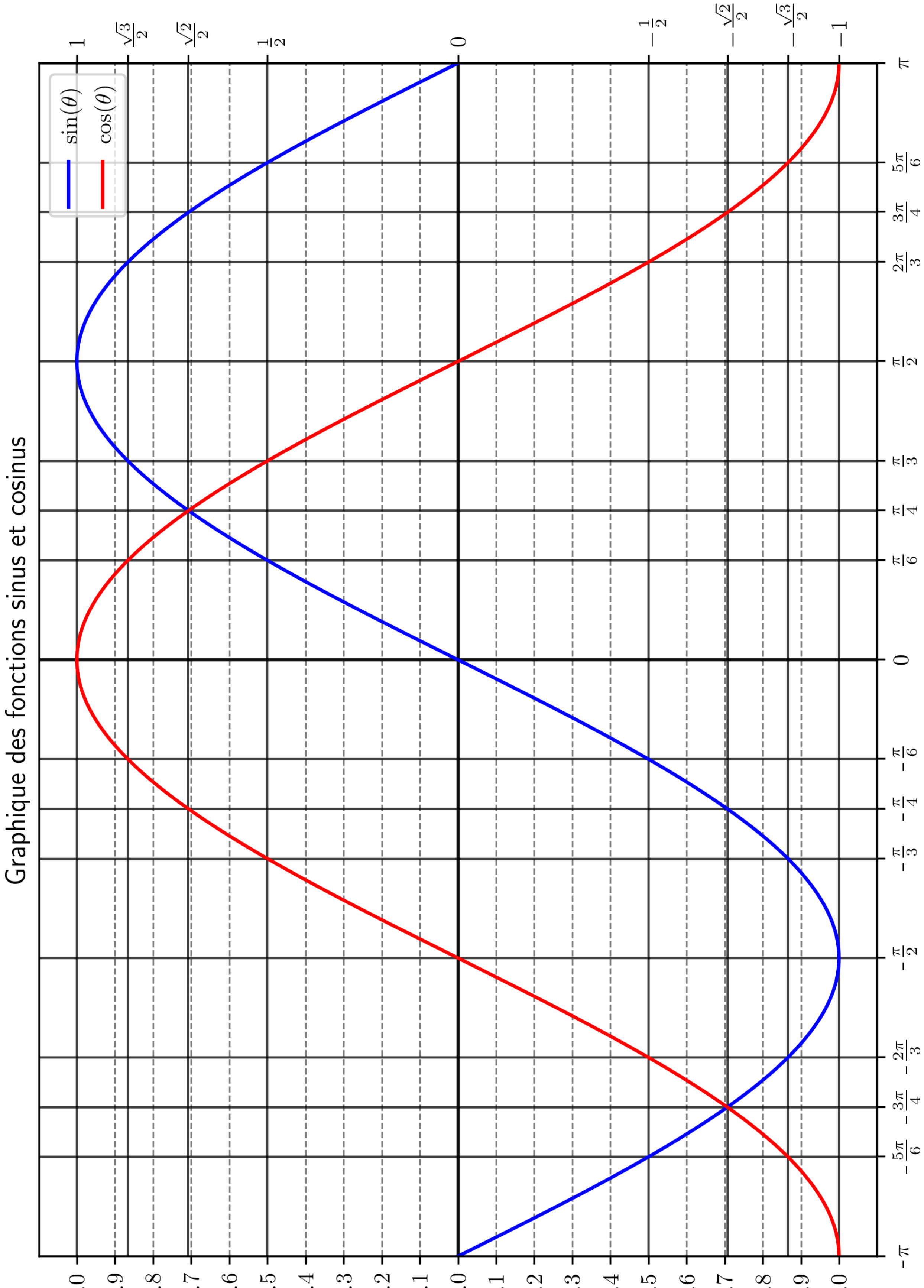
Dérivée

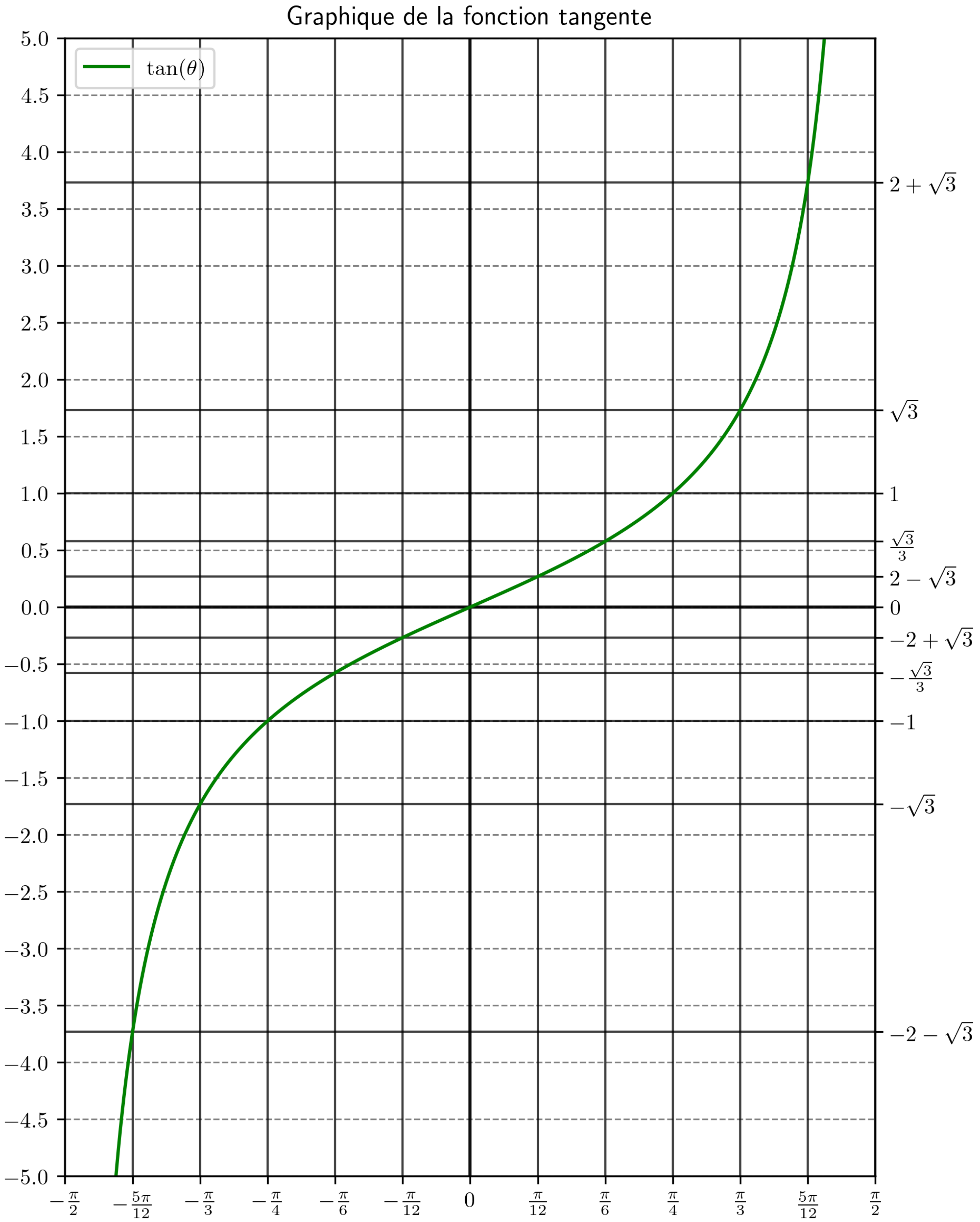
$$\begin{aligned}
\sin'(u(x)) &= u'(x) \times \cos(u(x)) \\
\cos'(u(x)) &= -u'(x) \times \sin(u(x)) \\
\tan'(u(x)) &= u'(x) \times (1 + \tan^2(u(x))) = \frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}
\end{aligned}$$

Démonstration de ces propriétés en Annexe, à la page 18.

9. Une fonction f est impaire, si $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -f(x)$. Une fonction f est paire, si $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x)$.

iii Représentation graphique




Graphique de la fonction tangente
$\tan(\theta)$
5.0
4.5
4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
−2.5
−3.0
−3.5
−4.0
−4.5
−5.0
$2+\sqrt{3}$
$\sqrt{3}$
1
$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$2-\sqrt{3}$
0
$-2+\sqrt{3}$
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
-1
$-\sqrt{3}$
$-2-\sqrt{3}$
$-\frac{\pi}{2}$ $-\frac{5\pi}{12}$ $-\frac{\pi}{3}$ $-\frac{\pi}{4}$ $-\frac{\pi}{6}$ $-\frac{\pi}{12}$ 0 $\frac{\pi}{12}$ $\frac{\pi}{6}$ $\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{3}$ $\frac{5\pi}{12}$ $\frac{\pi}{2}$

IV Fonctions trigonométriques inverses

Etude de fonction

Définition

Les fonctions trigonométriques inverses sont les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques. Ce sont les fonctions arcsinus, arccosinus et arctangente. Elles sont notées arcsin, arccos et arctan.

Elle nous permettent de retrouver quel angle correspond a une certaine valeur de sinus, de cosinus ou de tangente. Ou encore, elles nous permettent de retrouver la longueur de l'*arc* du cercle trigonométrique[10] donnant ce sinus ce cosinus ou cette tangente. C'est pour cette raison que l'on retrouve le préfixe *arc* dans leur nom.

Fonctions réciproques

Ce sont des fonctions réciproques, comme pour la fonction racine carrée et la fonction carrée. Ainsi, pour tout x dans leur ensemble d'arrivée, on a : $f^{-1}(f(x)) = x$. C'est pour cela que ces fonctions sont parfois notées $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ et $\tan^{-1}$.

Mais comme pour la fonction carré, la réciproque n'est vrai que dans certaines conditions[11]. Dans le cas des fonctions trigonométriques, ces fonctions étant périodiques, nous devons sélectionner un intervalle de définition, qui servira d'ensemble d'arrivée de chacune de ces fonctions.

Ensemble de définition et d'arrivée

Fonction	**Ensemble de définition**	**Ensemble d'arrivée**
arcsin	$[-1\ ;\ 1]$	$[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}]$
arccos	$[-1\ ;\ 1]$	$[0\ ;\ \pi]$
arctan	$\mathbb{R}$	$\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$

Variation sur leur ensemble de définition respectif

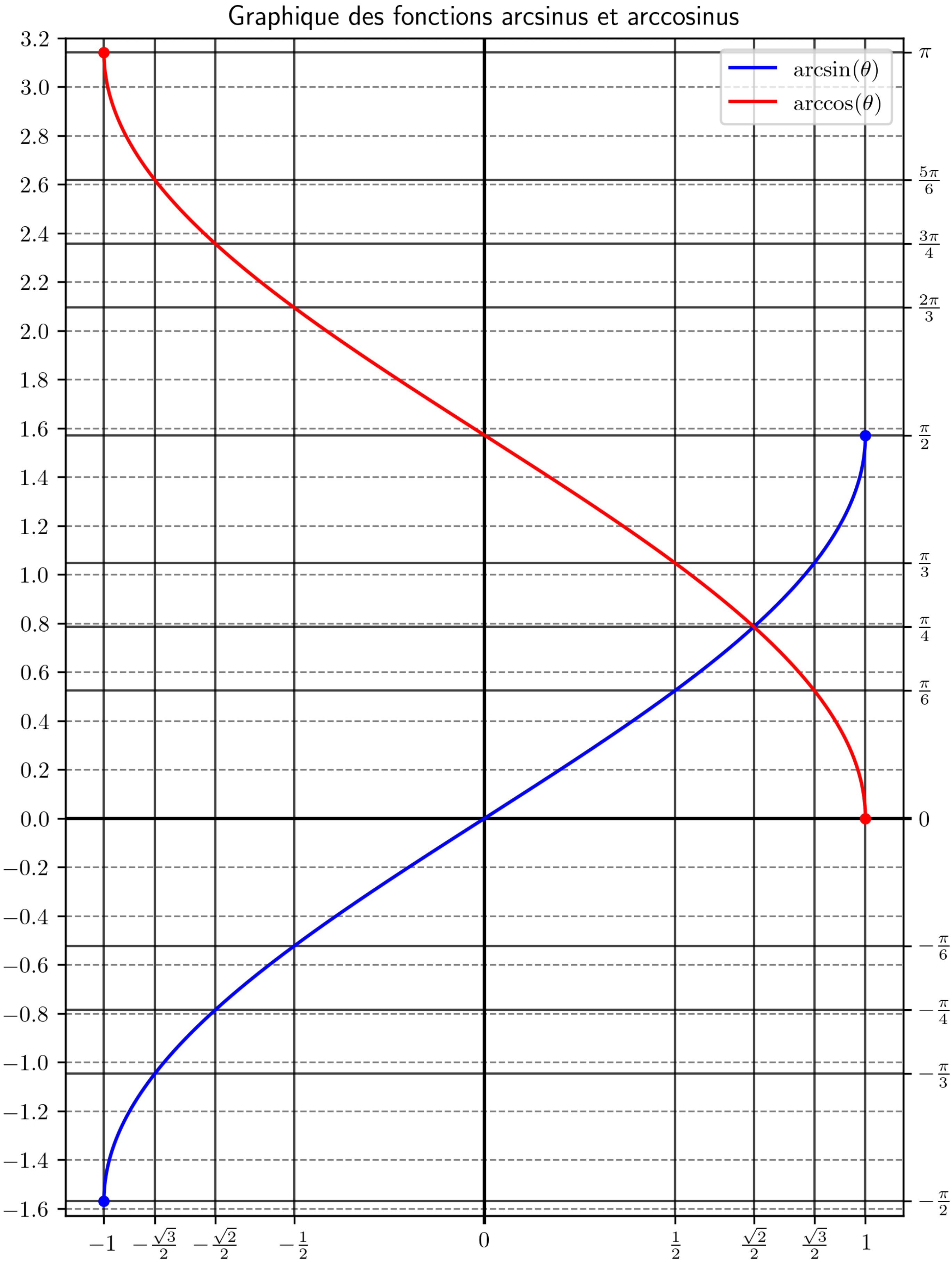
x	-1		0		1
$\arcsin(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\frac{\pi}{2}$
$\arccos(x)$	π	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

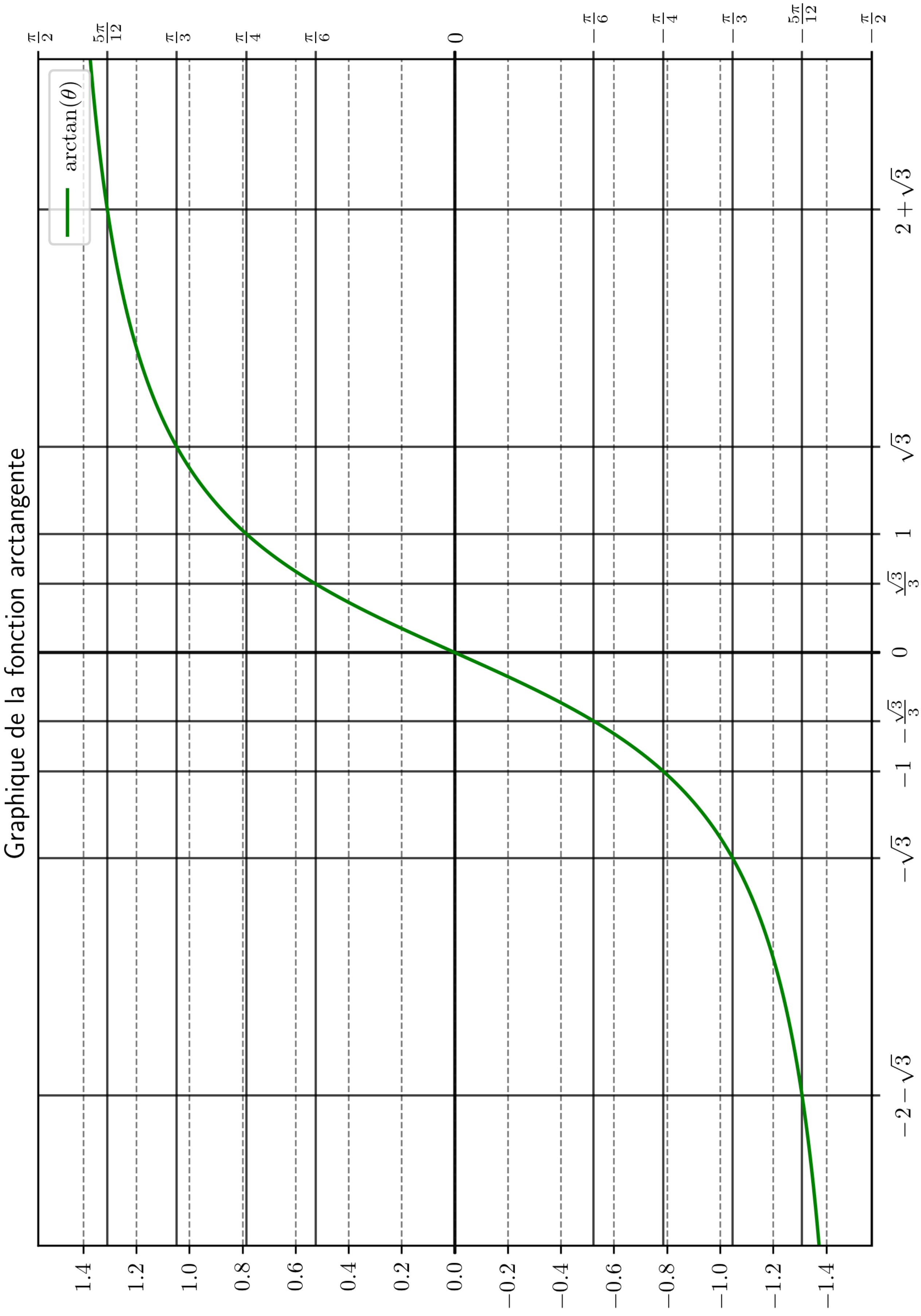
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\arctan(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\frac{\pi}{2}$

Dérivée

$$\begin{aligned}
\arcsin'(u(x)) &= \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}} \\
\arccos'(u(x)) &= -\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}} \\
\arctan'(u(x)) &= \frac{u'(x)}{1+u(x)^2} \quad = \quad \frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}
\end{aligned}$$

10. Pour rappel, la longueur d'un arc de cercle délimité par un angle θ, est égale à θ, si :
    - Le rayon du cercle est égal à 1, ce qui est le cas dans le cercle trigonométrique.
    - L'angle est exprimé en radians, par définition de cette unité.
11. $\forall x \in \mathbb{R}^+, x = \sqrt{x^2} = \sqrt{x}^2$.
    Mais dans $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = |x|$ et $\sqrt{x}^2$ n'est pas toujours définie (car $\forall x \in \mathbb{R}^-, \sqrt{x}$ n'est pas définie)


Graphique des fonctions arcsinus et arccosinus
$\arcsin(\theta)$
$\arccos(\theta)$
3.2
3.0
2.8
2.6
2.4
2.2
2.0
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1.0
−1.2
−1.4
−1.6
π
$\frac{5\pi}{6}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{6}$
0
$-\frac{\pi}{6}$
$-\frac{\pi}{4}$
$-\frac{\pi}{3}$
$-\frac{\pi}{2}$
-1
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$-\frac{1}{2}$
0
$\frac{1}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
1


Graphique de la fonction arctangente
$\arctan(\theta)$
$-2-\sqrt{3}$
$-\sqrt{3}$
-1
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
0
$\frac{\sqrt{3}}{3}$
1
$\sqrt{3}$
$2+\sqrt{3}$
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1.0
-1.2
-1.4
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{5\pi}{12}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{6}$
0
$-\frac{\pi}{6}$
$-\frac{\pi}{4}$
$-\frac{\pi}{3}$
$-\frac{5\pi}{12}$
$-\frac{\pi}{2}$

V Formulaire trigonométrique

Définition

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \quad \text{et} \quad \cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \quad \text{et} \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Théorème de Pythagore

$\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$

Formules d'addition

$\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$	En développant $e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$, puis en
$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$	identifiant partie réelle et partie imaginaire.
$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$	$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \dots$

Formules de duplication

$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a) = \frac{2\tan(a)}{1+\tan^2(a)}$$

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a) = \frac{1-\tan^2(a)}{1+\tan^2(a)}$$

$$\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$$

Formules de réduction des carrés

$$\sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2} \quad \Big| \quad \cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2} \quad \Big| \quad \tan^2(a) = \frac{1-\cos^2(a)}{1+\cos^2(a)}$$

Formules de linéarisation

$2\sin(a)\sin(b) = \cos(a-b) - \cos(a+b)$	Schéma de démonstration :
$2\cos(a)\cos(b) = \cos(a-b) + \cos(a+b)$	$\cos(a)\cos(b) = \Re\left(e^{ia}\cos(b)\right)$
$2\sin(a)\cos(b) = \sin(a-b) + \sin(a+b)$	$= \Re\left(e^{ia}\frac{e^{ib}+e^{-ib}}{2}\right) = \dots$

Transformation de sommes en produits

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$-\cos(p) + \cos(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

VI Lecture de la table

La table donne, pour les angles compris entre 0° et 179,9°, avec un pas de 0,1°, son sinus, cosinus et sa tangente avec 9 décimales de précision, et les logarithmes décimaux des valeurs absolues[12] des sinus, cosinus et la tangente de l'angle. Sa précision est très élevée, en pratique les 3 premières décimales peuvent souvent suffire.

Une autre table allant de −180° et 180°, avec un pas de 5°, est aussi disponible.

Dans la table, on retrouve l'angle en degré et en radian. Dans le reste de cette partie, nous utiliserons le degré, car cette unité est plus facilement manipulable.

VI.1 Cas des angles négatifs

Comme la première table ne va que de 0° à 179,9° (de 0 à π radians), il est nécessaire de connaître les propriétés des fonctions trigonométriques pour retrouver des angles négatifs.

Pour cela, nous allons utiliser la parité des fonctions trigonométriques :

Le sinus est une fonction impaire, donc	$\sin(x) = -\sin(-x)$
Le cosinus est une fonction paire, donc	$\cos(x) = \cos(-x)$
La tangente est une fonction impaire, donc	$\tan(x) = -\tan(-x)$

Ainsi par exemple, pour obtenir les valeurs de sinus, cosinus et tangente pour un angle de −37° :

$$\begin{array}{lclclcl}
\sin(-37°) & = & -\sin(-1 \times (-37°)) & = & -\sin(37°) & = & -0{,}601\,815\,023 \\
\cos(-37°) & = & \cos(-1 \times (-37°)) & = & \cos(37°) & = & 0{,}798\,635\,510 \\
\tan(-37°) & = & -\tan(-1 \times (-37°)) & = & -\tan(37°) & = & -0{,}753\,554\,050
\end{array}$$

VI.2 Utilisation inversée de la table

La table peut aussi être utilisée pour retrouver l'angle correspondant à une certaine valeur de sinus, cosinus ou tangente. C'est-à-dire, rechercher la valeur renvoyée par les fonctions trigonométriques réciproques (arcsinus, arccosinus et arctangente).

La simple recherche de l'angle dans la table, donnant une certaine valeur, une fois cet angle passé par une des fonctions trigonométriques, ne donne pas forcément un angle en résultat. Dans certains cas, aucun ou plusieurs angles peuvent correspondre à la valeur recherchée, alors que les fonctions réciproques associe à chaque valeur de leur ensemble de définition, un unique angle.

Détaillons les différents cas possibles :

Fonction arcsinus *Ensemble de définition* : $[-1;1]$ *Ensemble d'arrivée* : $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Soit $x \in [-1;1]$, on cherche l'angle $\theta = \arcsin(x)$; il faut donc que $\sin(\theta) = x$, avec $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

- Cas n°1 : Si $x = 1$, alors $\theta = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$.
- Cas n°2 : Si $x \in]0;1[$, alors $\exists! \theta_1 \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et $\exists! \theta_2 \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$ dans la table tel que $\sin(\theta_1) = \sin(\theta_2) = x$, mais seul $\theta_1 = \arcsin(x)$.
- Cas n°3 : Si $x = 0$, alors $\theta = \arcsin(0) = 0$.
- Cas n°4 : Si $x \in [-1;0[$, alors il n'y a aucun angle θ dans la table tel que $\theta = \arcsin(x)$. Cependant, on peut retrouver $\arcsin(x)$ en utilisant la parité de la fonction arcsinus. En effet $\arcsin(x) = -\arcsin(-x)$, et comme $-x$ est positif, on peut réutiliser la solution des cas n°1 et n°2.

Fonction arccosinus *Ensemble de définition* : $[-1;1]$ *Ensemble d'arrivée* : $[0;\pi]$

La table est définie sur l'intervalle $[0;\pi[$, donc $\forall x \in]-1;1]$, on retrouve dans la table un angle θ tel que $\theta = \arccos(x)$.

Seul le cas où $x = -1$ n'est pas dans la table, $\arccos(-1) = \pi$.

12. Il n'est pas possible d'obtenir le logarithme d'un nombre négative. Si vous utilisez ces logarithmes, n'oubliez de prendre en compte le signe du nombre !

Fonction arctangente *Ensemble de définition* : $\mathbb{R}$ *Ensemble d'arrivée* : $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on cherche l'angle $\theta = \arctan(x)$; il faut donc que $\tan(\theta) = x$, avec $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$.

- Cas n°1 : Si $x \in \mathbb{R}^+$, alors $\exists! \theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ dans la table tel que $\theta = \arctan(x)$.
- Cas n°2 : Si $x = 0$, alors $\theta = \arctan(0) = 0$.
- Cas n°3 : Si $x \in \mathbb{R}^-$, alors $\exists! \alpha \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[, x = \tan(\alpha)$, ainsi par périodicité de la fonction tangente $\theta = \alpha - \pi$.

Remarque : Lorsque $|x| > 10$, la précision de la table pour la fonction tangente est plus faible. Il peut alors être intéressant de passer par une approximation linéaire.

VI.3 Approximation linéaire

Prenons une fonction f et un réel x appartenant à son domaine de définition.

L'approximation linéaire sert à obtenir une valeur approchée $f(x)$, dans le cas où nous ne connaîtrions pas cette valeur.

Il existe deux méthodes d'approximation linéaire, l'interpolation linéaire et le développement limité d'ordre 1.

i Interpolation linéaire

Lors d'une interpolation linéaire, on suppose que la fonction f évolue linéairement entre deux points connus (dans notre cas, ce seront ceux listés dans la table).

Avec cette hypothèse et en utilisant les points $A\,(a\ ; f(a))$ et $B\,(b\ ; f(b))$, qui encadrent x dans la table (avec $a < x < b$, a et b étant les plus proches possibles de x dans la table), nous pouvons obtenir une valeur approchée de $f(x)$, en utilisant la formule suivante :

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \times (x - a)$$

Cette formule correspond à l'équation de la droite passant par les points A et B. L'approximation sera donc parfaite si la fonction f est linéaire entre a et b.

ii Développement limité d'ordre 1

Le développement limité d'ordre 1 est une autre méthode d'approximation linéaire, où l'on considère que la fonction f garde la même allure que sa tangente (géométrique) en un point.

Nous allons utiliser l'équation de la tangente (géométrique) en un point a de la fonction f, ce correspond aussi au développement limité d'ordre 1 [13] de f en a :

$$f(x) \approx f(a) + f'(a) \times (x - a)$$

L'approximation est parfaite lors que $x = a$, et elle se déteriore plus on s'éloigne de a.

Voici les formules dans le cas où f est une fonction trigonométrique :

$$\begin{aligned}
\sin(x) &\approx \sin(a) + \cos(a) \times (x - a) \\
\cos(x) &\approx \cos(a) - \sin(a) \times (x - a) \\
\tan(x) &\approx \tan(a) + \tfrac{1}{\cos^2(a)} \times (x - a) \quad = \quad \tan(a) + \tfrac{2}{1+\cos(2a)} \times (x - a)
\end{aligned}$$

13. Il est possible d'utiliser des développements limités d'ordre supérieur, pour approximer encore plus précisément la fonction f. Pour en savoir plus, rendez-vous en Annexe, à la page 18.

Cette méthode est très efficace pour les valeurs proches de celles de la table, et permet d'obtenir une approximation très précise.

Comme pour les la table logarithmique présentée dans la première section, il est possible d'approximer les valeurs de sinus, cosinus et tangente, d'un angle se trouvant entre deux angles de la table.

Ce calcul peut être fait via une approximation linéaire, où l'on considère que la fonction est linéaire entre deux points de la table.

Cette approximation est très bonne car la résolution de la table est très fine, et les fonctions trigonométriques varient doucement [14].

La formule d'approximation linéaire est la suivante :

$$f(x) \approx f(a) + f'(a) \times (x - a) \quad \text{avec } f'(a) \text{ la dérivée de } f \text{ en } a.$$

L'approximation linéaire consiste à approximer une fonction par une droite, afin de simplifier les calculs. Cette méthode est souvent utilisée pour les fonctions trigonométriques, et est particulièrement efficace pour les angles proches de 0.

14. Si l'on ne tient pas des parties où la courbe de la tangente est proche de ses asymptotes.

VII Annexe

Fonctions trigonométriques chelous

Fonctions trigonométriques chelous selon Github copilot :

- La fonction sinus, notée sin.
- La fonction cosinus, notée cos.
- La fonction tangente, notée tan.
- La fonction cotangente, notée cot.
- La fonction sécante, notée sec.
- La fonction cosécante, notée csc.
- La fonction exsecante, notée exsec.
- La fonction excosécante, notée excsc.
- La fonction versine, notée vers.
- La fonction coversine, notée covers.
- La fonction haversine, notée havers.
- La fonction hacoversine, notée hacovers.
- La fonction exverse, notée exvers.
- La fonction excovers, notée excovers.
- La fonction vercosine, notée vercos.
- La fonction coverscosine, notée coverscos.
- La fonction havercosine, notée havercos.
- La fonction hacoverscosine, notée hacoverscos.
- La fonction exvercosine, notée exvercos.
- La fonction excoverscosine, notée excoverscos.
- La fonction exsecant, notée exsec.
- La fonction excosecant, notée excsc.
- La fonction exsecant, notée exsec.

Valeurs de sinus et cosinus exactes

Démonstration des propriétés des fonctions trigonométrique élémentaires

Développement limité