Mathématiques

⬢ Arithmétique élémentaire ⬢

Clément Campana
Juillet 2022

Table des matières

I Préambule

Qu'est-ce qu'une Multiplication ?

La multiplication est souvent notée avec la *croix de multiplication* $\times$, l'astérisque *, le *point médian* $\cdot$ ou même parfois par l'absence de symbole.

Son résultat s'appelle le **produit** et les nombres que l'on multiplie sont les **facteurs**.

La multiplication de deux nombres a et b peut se dire à l'oral "a *multiplié par* b" ou "a *fois* b".

La multiplication de 2 nombres entiers correspond à une **addition répétée plusieurs fois**. Par exemple :

- 3 fois 4 correspond à $3 \times 4 = 4 + 4 + 4 = 12$
- 4 fois 3 correspond à $4 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$

Cette opération peut permettre de compter le nombre d'éléments rangés dans un rectangle ou de calculer l'aire d'un rectangle dont on connaît la longueur et la largeur. Elle peut aussi permettre de déterminer un prix d'achat connaissant le prix unitaire et la quantité achetée.

On peut remarquer dans l'exemple précédent que la multiplication est **commutative**, c'est à dire : $3 \times 4 = 4 \times 3$.

Qu'est-ce qu'une Division ?

La division est notée avec l'*obèle* $\div$, la *barre oblique* / ou sous forme de *fraction* $\frac{a}{b}$.

Son résultat s'appelle le **quotient** ou le **rapport**, le nombre que l'on divise est le **dividende** et celui par lequel on divise est le **diviseur**. Dans les exemples, a est le dividende et b est le diviseur.

La division de a par b peut se dire à l'oral "a *divisé par* b" ou "a *sur* b".

On peut voir le quotient $a \div b$ comme le nombre d'éléments dans une part, après la séparation de la quantité a en b parts égales : *Si on distribue 30 cartes à 5 personnes, chaque joueur aura reçu 6 cartes, car* $30 \div 5 = 6$.

On peut remarquer que la division est l'opération inverse [1] de la multiplication : *Si chacun des 5 joueurs a 6 cartes, alors au total 30 cartes ont été distribuées, car* $6 \times 5 = 30$.

Mais parfois, un rapport peut ne pas être un entier : $8 \div 3 = 2,666...$

On va donc devoir faire la distinction entre cette division ***exacte*** de la division avec un reste, on appelle cette division la ***division euclidienne***.

En général, la division exacte est notée sous forme fractionnaire : $\frac{8}{3} \simeq 2,667$.

La division euclidienne quant à elle, correspond plus à réécrire le dividende sous une forme différente. Son rôle est de le séparer en parts égales qui doivent être **entière**. Pour combler la différence, on ajoute une nouvelle valeur, le **reste** : $8 \div 3 \Longrightarrow 8 = 2 \times 3 + 2$.

Qu'est-ce qu'une Exponentiation ?

L'exponentiation (aussi appelé puissance) est notée de cette manière a^b, cette opération peut se dire à l'oral "a *puissance* b" ou "a *exposant* b". Cette opération consiste à multiplier a par lui-même b fois : $a^b = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{b \text{ facteurs}}$.

Cette interprétation n'est valide que si $b \in \mathbb{N}$, mais il est possible de généraliser cette opération si $b \in \mathbb{R}$, voici quelque propriétés importantes :

$$a^n \times a^m = a^{n+m} \parallel \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \parallel (a^n)^m = a^{n \times m} \parallel a^{-b} = \frac{1}{a^b} \parallel a^{\frac{1}{b}} = \sqrt[b]{a}$$

1. On parle plus précisément d'opération **réciproque**.

I.1 Poser une Multiplication

Pour calculer une multiplication à la main, on peut **poser** l'opération.

Calculons par exemple le produit de 57 et de 243. Pour faire ce calcul, on va décomposer un des facteurs en puissance de 10.

Voilà ce que ça donne en pratique :

57×243	
$= 57 \times (2 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 3 \cdot 1)$	Décomposition de 243
$= (57 \times 2) \cdot 100 + (57 \times 4) \cdot 10 + (57 \times 3) \cdot 1$	Distribution
$= (114) \cdot 100 + (228) \cdot 10 + (171) \cdot 1$	Calculs des multiplications
$= 11\,400 + 2\,280 + 171$	Additions des produits calculés
$= 13\,851$	

Voilà comment on pose l'opération de manière plus condensée :

$$\begin{array}{r} 5\;7 \\ \times\, 2\;4\;3 \\ \hline 1\;7\;1 \\ 2\;2\;8 \\ 1\;1\;4 \\ \hline 1\;3\;8\;5\;1 \end{array}$$

On calcul, dans un premier temps le produit de 57 par 3, on écrit le résultat sous la barre de multiplication.

Puis on s'occupe du chiffre des dizaines, on le multiplie lui aussi par 57. Cependant le résultat obtenu doit être décalé d'un cran vers la gauche, car on ne vient pas de calculer 57×4, mais plutôt $(57 \times 4) \cdot 10$. Ce 10 provient du fait que l'on manipule le chiffre des **dizaines**, et plus celui des **unités** ! Cet espace vide correspond au zéro que l'on obtient lorsque l'on multiplie par 10.

Et on continue avec le chiffre des centaines, on le multiplie par 57 et on note le résultat avec un décalage de 2 crans (car ici on calcul $(57 \times 2) \cdot 100$).

Et enfin pour terminer le calcul, on fait la somme des termes précédemment calculés (c'est à dire $171 + 2\,280 + 11\,400$), colonne par colonne, sans oublier les retenus et le fait que les espaces laissées vides représentent des 0.

On finit donc écrire sous le calcul le résultat de cette addition : $13\,851$.

Conclusion :

$$57 \times 243 = 13\,851$$

I.2 Poser une Division

Pour calculer une division à la main, on peut **poser** l'opération.

Calculons par exemple le quotient de 7945 par 26. Pour faire ce calcul, on va effectuer successivement plusieurs soustractions.
Voilà ce que ça donne en pratique :

$7945 \div 26$	
$= [79/26] \cdot 100 + ((79 \swarrow 26) \cdot 100 + 45) \div 26$	Division des centaines
$= 3 \cdot 100 + (1 \cdot 100 + 45) \div 26$	$79 = 3 \times 26 + 1$
$= 300 + [145/26] + ((145 \swarrow 26) \cdot 1) \div 26$	Division des unités
$= 300 + 5 + (15 \cdot 1) \div 26$	$145 = 5 \times 26 + 15$
$= 305 + 15 \div 26$	$\mathbf{7945 = 305 \times 26 + 15}$

Voilà comment on pose l'opération de manière plus condensée :

$$\begin{array}{r|l}
7\,9\,4\,5 & 2\,6 \\ \cline{2-2}
-\underline{7\,8} & 3\,0\,5 \\
1\,4 & \\
-\underline{0} & \\
1\,4\,5 & \\
-\underline{1\,3\,0} & \\
1\,5 &
\end{array}$$

Dans un premier temps, on calcul le nombre de fois qu'il est possible de soustraire 26 à 79 (le nombre de centaine). On peut le faire 3 fois, car $79 = 3 \times 26 + 1$. On note donc 3 à droite, sous le **diviseur**.
Ensuite à gauche, on calcul l'opération $79 - 78$, on écrit le résultat (1), sous la barre de soustraction. Puis, à droite du résultat de la soustraction, on réécrit le chiffre suivant du **dividende** (4).

Et on recommence les mêmes étapes avec le nombre que l'on vient d'écrire, c'est à dire celui qui est sous la barre de la soustraction précédemment calculée :

- Combien de fois il y a-t-il 26 dans 14 ? $\Longrightarrow$ **0**
- On note ce *0* sous le diviseur, après le *3* déjà écrit.
- On calcul la différence entre 14 et 0×26.
- À droite du résultat, on note le chiffre suivant du dividende.

- Combien de fois il y a-t-il 26 dans 145 ? $\Longrightarrow$ **5**
- On note ce *5* sous le diviseur, après le *30* déjà écrit.
- On calcul la différence entre 145 et 5×26.

Et enfin, nous pouvons lire le résultat de cette division, le nombre sous le diviseur est le **quotient** et le dernier résultat à gauche est le **reste**.

$$7945 = 305 \times 26 + 15$$

Opérations de la division euclidienne

Pour calculer une division euclidienne, 2 opérations sont utilisées :

$/$ La **Division entière** : $13 \div 3 = 4,333\ldots$ en revanche $13/3 = 4$
$\swarrow$ Le **Reste** de la division euclidienne : $13 \swarrow 3 = 1$ *aussi appelé **Modulo*** : $13 \equiv 1 \ [3]$

I.3 Décomposition en Facteur Premier

Pour simplifier les divisions, il est possible de décomposer le dividende et le diviseur (aussi respectivement appelé en écriture fractionnaire **numérateur** et **dénominateur**) en produit de nombre premier.

Un nombre premier est un nombre qui ne peut être divisé que par 1 et par lui-même. Voici les 100er nombres premiers :

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223	227	229
233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349
353	359	367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457	461	463
467	479	487	491	499	503	509	521	523	541

Exemple :

$$\frac{3846150}{454545} = \frac{76923 \times 5 \times 10}{90909 \times 5} = \frac{2849 \times 27 \times 5^2 \times 2}{10101 \times 9 \times 5} = \frac{407 \times 7 \times 3^3 \times 5^2 \times 2}{3367 \times 3 \times 3^2 \times 5}$$

$$= \frac{2 \times 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 37}{3^3 \times 5 \times 7 \times 13 \times 37} = 2 \times \frac{3^3}{3^3} \times \frac{5^2}{5} \times \frac{7}{7} \times \frac{11}{13} \times \frac{37}{37}$$

$$= 2 \times 1 \times 5 \times 1 \times \frac{11}{13} \times 1 = 2 \times 5 \times \frac{11}{13}$$

$$\frac{3846150}{454545} = \frac{110}{13}$$

Cette technique peut en théorie aussi s'appliquer aux calculs de multiplications, mais en pratique ça ne simplifie que très peu le calcul.

II Méthode Trachtenberg

La méthode Trachtenberg est un ensemble d'astuce permettant de calculer rapidement les multiplications par un nombre compris entre 3 et 13 et le multiplication de nombre composés de 2 ou 3 chiffres.

Origine

Jacow TRACHTENBERG (né le 17 juin 1888 à Odessa, mort à Zurich en 1953) était un ingénieur Juif russo-allemand et il a inventé la méthode de calcul mental Trachtenberg.

En 1934, il fuit les persécutions nazies pour se réfugier à Vienne, en Autriche, où il devient éditeur de revues et rédacteur technique. Pacifiste convaincu, il publie un ouvrage condamnant la politique de guerre, *Le Ministère de la Paix*. Le 11 mars 1938, il est arrêté par la police nazie autrichienne et envoyé en déportation au camp de Sachsenhausen. Au printemps 1944, sa femme réussit à acheter plusieurs gardiens, et à transmettre de fausses instructions de transfert. Il est alors emmené à Leipzig, puis à Trieste. En avril 1945, il s'échappe et gagne la Suisse.

Cette méthode de calcul a été inventée lors de sa détention au camps de Sachsenhausen, dans le but de garder un esprit sain lors de son emprisonnement.

Remarques introductives

1. Dans une multiplication de deux nombres (facteurs), le premier facteur, celui qui demande à être multiplié, est appelé **multiplicande** et le second facteur est le **multiplicateur**. Le résultat de l'opération est le produit.
   Pour faire simple, si on veut multiplier un gros nombre par x, le gros nombre est le *multiplicande* et le x est *multiplicateur*.

2. Chiffre et nombre sont deux notions distinctes. Un nombre est écrit à l'aide de chiffres.
   Les astuces de calcul décrites ci-dessous se basent sur une technique simple qui consiste à considérer chaque chiffre du *multiplicande* en tant que nombre sur lequel on applique la règle énoncée.
   Par abus de langage, mais pour simplifier la compréhension des astuces, le terme *chiffre* sera le seul utilisé, soit dans son sens strict, soit en remplacement du terme *nombre*.

3. Pour appliquer les astuces ci-dessous, il faut procéder au calcul des chiffres du produit de la droite vers la gauche (depuis les unités en remontant vers les chiffres de poids de plus en plus fort) à partir des chiffres du *multiplicande* dans le même ordre.

4. Il faut rajouter à gauche du *multiplicande* un nombre de zéros égal au nombre de chiffres dans le multiplicateur.
   Exemple 1 : En multipliant 325 par 6, on prend 0325 par 6.
   Exemple 2 : En multipliant 325 par 12, on prend 00325 par 12.

5. Quand on divise par deux un chiffre impair, on ne tient pas compte des chiffres après la virgule.
   Exemple 1 : $\frac{3}{2} = 1\cancel{,5}$
   Exemple 2 : $\frac{7}{2} = 3\cancel{,5}$

II.1 Multiplication par des nombres compris entre 3 et 13

Règle pour la Multiplication par 3

Soustraire le dernier chiffre à 10, le multiplier par 2 et ajouter 5 s'il est impair.

Soustraire les autres à 9, multiplier par 2, puis ajouter la moitié du voisin de droite et enfin ajouter 5 si le chiffre est impair (et ajouter éventuellement une retenue).

Quand on a terminé les chiffres du multiplicande, on écrit devant la moitié du chiffre de gauche moins 2.

Exemples :

1. $5\ 314 \times 3$

$(10-4) \times 2 = 12$	J'écris **2**, je retiens 1
$(9-1) \times 2 + (4/2) + 5$ (*1* est impair) $+1$ *(retenue)* $= 24$	J'écris **4**, je retiens 2
$(9-3) \times 2 + (1/2) + 5$ (*3* est impair) $+2$ *(retenue)* $= 19$	J'écris **9**, je retiens 1
$(9-5) \times 2 + (3/2) + 5$ (*5* est impair) $+1$ *(retenue)* $= 15$	J'écris **5**, je retiens 1
$(5/2) - 2 + 1$ *(retenue)* $= 1$	J'écris **1** à la suite du résultat

On lis le résultat : $\mathbf{5\ 314 \times 3 = 15\ 942}$

2. $3\ 267 \times 3$

$(10-7) \times 2 + 5$ (*7* est impair) $= 11$	J'écris **1**, je retiens 1
$(9-6) \times 2 + (7/2) + 1$ *(retenue)* $= 10$	J'écris **0**, je retiens 1
$(9-2) \times 2 + (6/2) + 1$ *(retenue)* $= 18$	J'écris **8**, je retiens 1
$(9-3) \times 2 + (2/2) + 5$ (3 est impair) $+1$ *(retenue)* $= 19$	J'écris **9**, je retiens 1
$(3/2) - 2 + 1$ *(retenue)* $= 0$	J'écris **0** à la suite du résultat

On lis le résultat : $\mathbf{3\ 267 \times 3 = 09\ 801}$ (9 801)

3. 189×3

$(10-9) \times 2 + 5$ (*9* est impair) $= 7$	J'écris **7** à la suite du résultat
$(9-8) \times 2 + (9/2) = 6$	J'écris **6** à la suite du résultat
$(9-1) \times 2 + (8/2) + 5$ (*1* est impair) $= 25$	J'écris **5**, je retiens 2
$(1/2) - 2 + 2$ *(retenue)* $= 0$	J'écris **0**, le 1er chiffre du résultat

On lis le résultat : $\mathbf{189 \times 3 = 0\ 567}$ (567)

. . . .

Règle pour la Multiplication par 4

Soustraire le dernier chiffre à 10 et ajouter 5 s'il est impair.

Soustraire les autres à 9, ajouter la moitié de leur voisin de droite et ajouter 5 si le chiffre est impair.

Et enfin, on écrit devant la moitié du chiffre de gauche moins 1.

Exemples :

1. $5\ 314 \times 4$

$(10-4) = 6$	**6** est l'unité du résultat
$(9-1) + (4/2) + 5$ (*1* est impair) $= 15$	J'écris **5**, je retiens 1
$(9-3) + (1/2) + 5$ (*3* est impair) $+1$ *(retenue)* $= 12$	J'écris **2**, je retiens 1
$(9-5) + (3/2) + 5$ (*5* est impair) $+1$ *(retenue)* $= 11$	J'écris **1**, je retiens 1
$(5/2) - 1 + 1$ *(retenue)* $= 2$	J'écris **2**, le 1er chiffre du résultat

On lis le résultat : $\mathbf{5\ 314 \times 4 = 21\ 256}$

2. $3\ 267 \times 4$

$(10-7) + 5$ (*7* est impair) $= 8$	**8** est l'unité du résultat
$(9-6) + (7/2) = 6$	J'écris **6** à la suite du résultat
$(9-2) + (6/2) = 10$	J'écris **0**, je retiens 1
$(9-3) + (2/2) + 5$ (*3* est impair) $+1$ *(retenue)* $= 13$	J'écris **3**, je retiens 1
$(3/2) - 1 + 1$ *(retenue)* $= 1$	J'écris **1**, le 1er chiffre du résultat

On lis le résultat : $\mathbf{3\ 267 \times 4 = 13\ 068}$

Règle pour la Multiplication par 5

Diviser les chiffres du multiplicande par 2, et ajouter 5 si leur voisin de gauche est impair.

Après avoir écrit les chiffres trouvés aux étapes précédentes, ajouter un 0 si le multiplicande est pair ou un 5 dans le cas contraire.

Exemples :

1. 413×5

$(4/2) = 2$	J'écris **2**, le 1er chiffre du résultat
$(1/2) = 0$	J'écris **0** à la suite du résultat
$(3/2) + 5$ (*1* est impair) $= 6$	J'écris **6** à la suite du résultat
On écrit 5 car le multiplicande est impair	**5** est l'unité du résultat

On lis le résultat : **413 × 5 = 2 065**

2. 812×5

$(8/2) = 4$	J'écris **4**, le 1er chiffre du résultat
$(1/2) = 0$	J'écris **0** à la suite du résultat
$(2/2) + 5$ (*1* est impair) $= 6$	J'écris **6** à la suite du résultat
On écrit 0 car le multiplicande est pair	**0** est l'unité du résultat

On lis le résultat : **812 × 5 = 4 060**

3. $5\ 036 \times 5$

$(5/2) = 2$	J'écris **2**, le 1er chiffre du résultat
$(0/2) + 5$ (*5* est impair) $= 5$	J'écris **5** à la suite du résultat
$(3/2) = 1$	J'écris **1** à la suite du résultat
$(6/2) + 5$ (*3* est impair) $= 8$	J'écris **8** à la suite du résultat
On écrit 0 car le multiplicande est pair	**0** est l'unité du résultat

On lis le résultat : **5 036 × 5 = 25 180**

....

Règle pour la Multiplication par 6

Ajouter la moitié du voisin de droite à chaque chiffre, et ajouter lui 5 si le chiffre est impair.

Exemples :

1. $5\ 314 \times 6$

On ajoute un 0 à gauche	**0**5314 *(cf. Remarque n°4)*
$4 + (0/2) = 4$	**4** est l'unité du résultat
$1 + (4/2) + 5$ (*1* est impair) $= 8$	J'écris **8** à la suite du résultat
$3 + (1/2) + 5$ (*3* est impair) $= 8$	J'écris **8** à la suite du résultat
$5 + (3/2) + 5$ (*5* est impair) $= 11$	J'écris **1** à la suite du résultat, je retiens 1
$0 + (5/2) + 1$ *(retenue)* $= 3$	J'écris **3**, le 1er chiffre du résultat

On lis le résultat : **5 314 × 6 = 31 884**

2. $3\ 267 \times 6$

On ajoute un 0 à gauche	**0**3267 *(cf. Remarque n°4)*
$7 + (0/2) + 5$ (*7* est impair) $= 12$	**2** est l'unité du résultat, je retiens 1
$6 + (7/2) + 1$ *(retenue)* $= 10$	J'écris **0** à la suite du résultat, je retiens 1
$2 + (6/2) + 1$ *(retenue)* $= 6$	J'écris **6** à la suite du résultat
$3 + (2/2) + 5$ (*3* est impair) $= 9$	J'écris **9** à la suite du résultat
$0 + (3/2) = 1$	J'écris **1**, le 1er chiffre du résultat

On lis le résultat : **3 267 × 6 = 19 602**

Règle pour la Multiplication par 7

Doubler chaque chiffre et ajouter la moitié du voisin de droite, ajouter 5 si ce chiffre est impair.

Exemples :

1. $5\ 314 \times 7$

On ajoute un 0 à gauche	**0**5314 *(cf. Remarque n° 4)*
$(4 \times 2) = 8$	**8** est l'unité du résultat
$(1 \times 2) + (4/2) + 5$ (*1* est impair) $= 9$	J'écris **9** à la suite du résultat
$(3 \times 2) + (1/2) + 5$ (*3* est impair) $= 11$	J'écris **1**, je retiens 1
$(5 \times 2) + (3/2) + 5$ (*5* est impair) $+1$ *(retenue)* $= 17$	J'écris **7**, je retiens 1
$(0 \times 2) + (5/2) + 1$ *(retenue)* $= 3$	J'écris **3**, le 1^{er} chiffre du résultat

On lis le résultat : **5 314 × 7 = 37 198**

2. $3\ 267 \times 7$

On ajoute un 0 à gauche	**0**3267 *(cf. Remarque n° 4)*
$(7 \times 2) + 5$ (*7* est impair) $= 19$	**9** est l'unité du résultat, je retiens 1
$(6 \times 2) + (7/2) + 1$ *(retenue)* $= 16$	J'écris **6**, je retiens 1
$(2 \times 2) + (6/2) + 1$ *(retenue)* $= 8$	J'écris **8** à la suite du résultat
$(3 \times 2) + (2/2) + 5$ (*3* est impair) $= 12$	J'écris **2**, je retiens 1
$(0 \times 2) + (3/2) + 1$ *(retenue)* $= 2$	J'écris **2**, le 1^{er} chiffre du résultat

On lis le résultat : **3 267 × 7 = 22 869**

. . . .

Règle pour la Multiplication par 8

Soustraire le dernier chiffre à 10 et doubler cette différence.

Soustraire les autres chiffres à 9 et doubler cette différence. Ajouter à ce résultat le voisin de droite et l'éventuelle retenue.

Enlever 2 au premier chiffre.

Exemples :

1. $5\ 314 \times 8$

$(10 - 4) \times 2 = 12$	**2** est l'unité du résultat, je retiens 1
$(9 - 1) \times 2 + 4 + 1$ *(retenue)* $= 21$	J'écris **1** à la suite du résultat, je retiens 2
$(9 - 3) \times 2 + 1 + 2$ *(retenue)* $= 15$	J'écris **5** à la suite du résultat, je retiens 1
$(9 - 5) \times 2 + 3 + 1$ *(retenue)* $= 12$	J'écris **2** à la suite du résultat, je retiens 1
$(5 - 2) + 1$ *(retenue)* $= 4$	J'écris **4**, le 1^{er} chiffre du résultat

On lis le résultat : **5 314 × 8 = 42 512**

2. $3\ 267 \times 8$

$(10 - 7) \times 2 = 6$	**6** est l'unité du résultat
$(9 - 6) \times 2 + 7 = 13$	J'écris **3** à la suite du résultat, je retiens 1
$(9 - 2) \times 2 + 6 + 1$ *(retenue)* $= 21$	J'écris **1** à la suite du résultat, je retiens 2
$(9 - 3) \times 2 + 2 + 2$ *(retenue)* $= 16$	J'écris **6** à la suite du résultat, je retiens 1
$(3 - 2) + 1$ *(retenue)* $= 2$	J'écris **2**, le 1^{er} chiffre du résultat

On lis le résultat : **3 267 × 8 = 26 136**

Règle pour la Multiplication par 9

Soustraire le dernier chiffre à 10
Soustraire les autres à 9 et ajouter le voisin de droite.
Soustraire 1 au premier chiffre.

Exemples :

1. 5 314 $\times$ 9

$(10-4)=6$	**6** est l'unité du résultat
$(9-1)+4=12$	J'écris **2** et je retiens 1
$(9-3)+1+1$ *(retenue)* $=8$	J'écris **8** à la suite du résultat
$(9-5)+3=7$	J'écris **7** à la suite du résultat
$(5-1)=4$	J'écris **4**, le 1^{er} chiffre du résultat

On lis le résultat : **5 314 × 9 = 47 826**

2. 3 267 $\times$ 9

$(10-7)=3$	**3** est l'unité du résultat
$(9-6)+7=10$	J'écris **0** et je retiens 1
$(9-2)+6+1$ *(retenue)* $=14$	J'écris **4** et je retiens 1
$(9-3)+2+1$ *(retenue)* $=9$	J'écris **9** à la suite du résultat
$(3-1)=2$	J'écris **2**, le 1^{er} chiffre du résultat

On lis le résultat : **3 267 × 9 = 29 403**

Règle pour la Multiplication par 10

Décaler tous les chiffres d'un rang vers la gauche et ajouter un 0 à droite.

Règle pour la Multiplication par 11

Recopier le dernier chiffre.
Additionner à chaque chiffre son voisin de gauche de ajouter l'éventuelle retenue.

Exemples :

1. 3 422 $\times$ 11

Recopier *2*	**2** est l'unité du résultat
$2+2=4$	J'écris **4** à la suite du résultat
$4+2=6$	J'écris **6** à la suite du résultat
$3+4=7$	J'écris **7** à la suite du résultat
$0+3=3$	J'écris **3**, le 1^{er} chiffre du résultat

On lis le résultat : **3 422 × 11 = 37 642**

2. 5 781 $\times$ 11

Recopier *1*	**1** est l'unité du résultat
$8+1=9$	J'écris **9** à la suite du résultat
$7+8=15$	J'écris **5** et je retiens 1
$5+7+1$ *(retenue)* $=13$	J'écris **3** et je retiens 1
$0+5+1$ *(retenue)* $=6$	J'écris **6**, le 1^{er} chiffre du résultat

On lis le résultat : **5 781 × 11 = 63 591**

Règle pour la Multiplication par 12

Doubler chaque chiffre, puis ajouter son voisin de droite.
Recopier le premier chiffre et ajouter lui éventuellement sa retenue.

Exemples :

1. 314×12

$4 \times 2 = 8$	**8** est l'unité du résultat
$1 \times 2 + 4 = 6$	J'écris **6** à la suite du résultat
$3 \times 2 + 1 = 7$	J'écris **7** à la suite du résultat
Recopier *3*	J'écris **3**, le 1^{er} chiffre du résultat

On lis le résultat : **314 × 12 = 3 768**

2. $5\ 267 \times 12$

$7 \times 2 = 14$	**4** est l'unité du résultat, je retiens 1
$6 \times 2 + 7 + 1$ *(retenue)* $= 20$	J'écris **0**, je retiens 2
$2 \times 2 + 6 + 2$ *(retenue)* $= 12$	J'écris **2**, je retiens 1
$5 \times 2 + 2 + 1$ *(retenue)* $= 13$	J'écris **3**, je retiens 1
$5 + 1$ *(retenue)* $= 6$	J'écris **6**, le 1^{er} chiffre du résultat

On lis le résultat : **5 267 × 12 = 63 204**

. . . .

Règle pour la Multiplication par 13

Tripler chaque chiffre, puis ajouter son voisin de droite.
Recopier le premier chiffre et ajouter lui éventuellement sa retenue.

Exemples :

1. 321×13

$1 \times 3 = 3$	**3** est l'unité du résultat
$2 \times 3 + 1 = 7$	J'écris **7** à la suite du résultat
$3 \times 3 + 2 = 11$	J'écris **1** et je retiens 1
$3 + 1$ *(retenue)* $= 4$	J'écris **4**, le 1^{er} chiffre du résultat

On lis le résultat : **321 × 13 = 4 173**

2. $1\ 247 \times 13$

$7 \times 3 = 21$	**1** est l'unité du résultat, je retiens 2
$4 \times 3 + 7 + 2$ *(retenue)* $= 21$	J'écris **1**, je retiens 2
$2 \times 3 + 4 + 2$ *(retenue)* $= 12$	J'écris **2**, je retiens 1
$1 \times 3 + 2 + 1$ *(retenue)* $= 6$	J'écris **6** à la suite du résultat
Recopier 1	J'écris **1**, le 1^{er} chiffre du résultat

On lis le résultat : **1 247 × 13 = 16 211**

II.2 Multiplications des nombres composés de 2 ou 3 chiffres

Multiplication de nombres à 2 chiffres

On prends deux nombres des formes $\overline{a_1a_0}$ et $\overline{b_1b_0}$, pour les multiplier, on calcule :

- $a_0 \times b_0$
- $a_1 \times b_0 + a_0 \times b_1$ (le *produit en croix*)
- $a_1 \times b_1$

On les additionne ensuite les résultats obtenues, en tenant compte des décalages. Dans l'exemple, on effectue l'addition en même temps que le calcul des produits, en ajoutant directement les retenues.

Exemples :

1. 47×53

$7 \times 3 = 21$	**1** est l'unité du résultat, je retiens 2
$4 \times 3 + 7 \times 5 + 2$ *(retenue)* $= 49$	J'écris **9**, je retiens 4
$4 \times 5 + 4$ *(retenue)* $= 24$	J'écris **24**, le 1er *chiffre* du résultat

On lis le résultat : $\mathbf{47 \times 53 = 2\ 491}$

2. 64×89

$4 \times 9 = 36$	**6** est l'unité du résultat, je retiens 3
$6 \times 9 + 4 \times 8 + 3$ *(retenue)* $= 89$	J'écris **9**, je retiens 8
$6 \times 8 + 8$ *(retenue)* $= 56$	J'écris **56**, le 1er *chiffre* du résultat

On lis le résultat : $\mathbf{64 \times 89 = 5\ 696}$

....

Multiplication de nombres à 3 chiffres

On prends deux nombres des formes $\overline{a_2a_1a_0}$ et $\overline{b_2b_1b_0}$, pour les multiplier, on calcule :

- $a_0 \times b_0$
- $a_1 \times b_0 + a_0 \times b_1$
- $a_2 \times b_0 + a_1 \times b_1 + a_0 \times b_2$
- $a_2 \times b_1 + a_1 \times b_2$
- $a_2 \times b_2$

On les additionne ensuite les sommes obtenues, en tenant compte des décalages. Dans l'exemple, on effectue l'addition en même temps que le calcul des produits, en utilisant et en ajoutant les retenues.

Exemples :

1. 247×153

$7 \times 3 = 21$	**1** est l'unité du résultat, je retiens 2
$4 \times 3 + 7 \times 5 + 2$ *(retenue)* $= 49$	J'écris **9**, je retiens 4
$2 \times 3 + 4 \times 5 + 7 \times 1 + 4$ *(retenue)* $= 37$	J'écris **7**, je retiens 3
$2 \times 5 + 4 \times 1 + 3$ *(retenue)* $= 17$	J'écris **7**, je retiens 1
$2 \times 1 + 1$ *(retenue)* $= 3$	J'écris **3**, le 1er chiffre du résultat

On lis le résultat : $\mathbf{247 \times 153 = 37\ 791}$

2. 752×649

$2 \times 9 = 18$	**8** est l'unité du résultat, je retiens 1
$5 \times 9 + 2 \times 4 + 1$ *(retenue)* $= 54$	J'écris **4**, je retiens 5
$7 \times 9 + 5 \times 4 + 2 \times 6 + 5$ *(retenue)* $= 100$	J'écris **0**, je retiens 10
$7 \times 4 + 5 \times 6 + 10$ *(retenue)* $= 68$	J'écris **8**, je retiens 6
$7 \times 6 + 6$ *(retenue)* $= 48$	J'écris **48**, le 1er *chiffre* du résultat

On lis le résultat : $\mathbf{752 \times 649 = 488\ 048}$

III Critères de Divisibilité

Cette partie détaille les critères de divisibilité des nombres inférieurs à 100 étant premiers ou des puissances de nombre premier.

Seul les critères des nombres premiers sont présentés, car on peut décomposer n'importe quel entier en produit de nombre premier. En appelant $\{p_1, \cdots, p_r\}$ l'ensemble des nombres premier, on peut dire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists(\lambda_1, \cdots, \lambda_r) \in \mathbb{N}^r,$$

$$n = p_1^{\lambda_1} \times \cdots \times p_r^{\lambda_r}$$

Par exemple : $12 = 2^2 \times 3^1$ donc un nombre est divisible par 12 si et seulement s'il est divisible par $2^2 = 4$ et par 3.

On représentera un entier naturel a de $k+1$ chiffres par $\overline{a_k \dots a_1 a_0}$, où a_0 est le chiffre des unités, a_1 des dizaines, a_2 des centaines, etc. L'entier k désignera l'indice du chiffre de poids le plus fort du nombre.

On appellera n le nombre dont on cherche à trouver les diviseurs.

On utilisera une notation spécial pour dire que n est divisible par un nombre a :

$$n \text{ est divisible par } a \iff \frac{n}{a} \in \mathbb{N} \iff a \text{ divise } n \iff {}^{a}\big|_{n}$$

III.1 Critères de divisibilité des nombres jusqu'à 10

${}^{1}\big\|_{n}$	${}^{2}\big\|_{n} \Leftrightarrow n_0 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$
${}^{3}\big\|_{n} \Leftrightarrow {}^{3}\big\|_{n_k + \dots + n_0}$	${}^{4}\big\|_{n} \Leftrightarrow {}^{4}\big\|_{2n_1 + n_0}$
${}^{5}\big\|_{n} \Leftrightarrow n_0 \in \{0, 5\}$	${}^{6}\big\|_{n} \Leftrightarrow {}^{2}\big\|_{n} \text{ et } {}^{3}\big\|_{n}$
${}^{7}\big\|_{n} \Leftrightarrow {}^{7}\big\|_{\overline{n_k \dots n_2 n_1} - 2n_0}$	${}^{8}\big\|_{n} \Leftrightarrow {}^{2}\big\|_{4n_2 + 2n_1 + n_0}$
${}^{9}\big\|_{n} \Leftrightarrow {}^{9}\big\|_{n_k + \dots + n_0}$	${}^{10}\big\|_{n} \Leftrightarrow n_0 = 0$

Détails et Démonstrations des critères de divisibilité disponibles en **Annexe** (page 29).

III.2 Critère de divisibilité des nombres premiers jusqu'à 100

Critère de divisibilité par 11

Première Méthode

Soit $A = \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} n_{2i}$ et $B = \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} n_{2i-1}$, $^{11}|_{n} \Leftrightarrow {}^{11}|_{A-B}$

Exemple :

19 382 est-il divisible par 11 ?

$A = n_0 + n_2 + n_4 = 2 + 3 + 1 = 6$
$B = n_1 + n_3 = 8 + 9 = 17$
$A - B = 6 - 17 = -11$

On peut aussi faire le calcul en alternant les "+" et les "−"
$A - B = n_0 - n_1 + n_2 - n_3 + n_4 = 2 - 8 + 3 - 9 + 1 = -11$

$^{11}|_{19\,382}$ car $^{11}|_{-11}$

Remarque :

Un nombre de 3 chiffres est divisible par 11 si $n_2 + n_0 = n_1$ ou $n_2 + n_0 = 11 + n_1$.

Deuxième Méthode

$$^{11}|_{n} \Leftrightarrow {}^{11}|_{\overline{n_k\ n_{k-1}} + \ldots + \overline{n_3\ n_2} + \overline{n_1\ n_0}}$$

Exemple :

$^{11}|_{19\,382}$ car $^{11}|_{1\ +\ 93\ +\ 82} \Leftrightarrow {}^{11}|_{176} \Leftrightarrow {}^{11}|_{1\ +\ 76} \Leftrightarrow {}^{11}|_{77}$

Troisième Méthode

$$^{11}|_{n} \Leftrightarrow {}^{11}|_{\overline{n_k\ \ldots\ n_2\ n_1}\ -\ n_0}$$

Exemple :

$^{11}|_{3\,432}$ car $^{11}|_{343\ -\ 2} \Leftrightarrow {}^{11}|_{341} \Leftrightarrow {}^{11}|_{34\ -\ 1} \Leftrightarrow {}^{11}|_{33}$

. . . .

Critère de divisibilité par 13

$$^{13}|_{n} \Leftrightarrow {}^{13}|_{\overline{n_k\ \ldots\ n_2\ n_1}\ +\ 4n_0}$$

Exemples :

$^{13}|_{312}$ car $^{13}|_{31\ +\ 4\times 2} \Leftrightarrow {}^{13}|_{39}$
$^{13}|_{1\,664}$ car $^{13}|_{166\ +\ 4\times 4} \Leftrightarrow {}^{13}|_{182} \Leftrightarrow {}^{13}|_{18\ +\ 4\times 2} \Leftrightarrow {}^{13}|_{26}$

Démonstration de la 3ème méthode du critère de divisibilité par 11 disponible en **Annexe** (page 30).

Critère de divisibilité par 17

$$^{17}\Big|_{n} \Leftrightarrow {}^{17}\Big|_{\overline{n_k\ \dots\ n_2\ n_1}\ -\ 5n_0}$$

Exemples :

$^{17}|_{3\,723}$ car $^{17}|_{372\ -\ 5\times 3} \Leftrightarrow {}^{17}|_{357} \Leftrightarrow {}^{17}|_{35\ -\ 5\times 7} \Leftrightarrow {}^{17}|_{0}$

$^{17}|_{5\,933}$ car $^{17}|_{593\ -\ 5\times 3} \Leftrightarrow {}^{17}|_{578} \Leftrightarrow {}^{17}|_{57\ -\ 5\times 8} \Leftrightarrow {}^{17}|_{17}$

....

Critère de divisibilité par 19

$$^{19}\Big|_{n} \Leftrightarrow {}^{19}\Big|_{\overline{n_k\ \dots\ n_2\ n_1}\ +\ 2n_0}$$

Exemple :

$^{19}|_{6\,859}$ car $^{19}|_{685\ +\ 2\times 9} \Leftrightarrow {}^{19}|_{703} \Leftrightarrow {}^{19}|_{70\ +\ 2\times 3} \Leftrightarrow {}^{19}|_{76} \Leftrightarrow {}^{19}|_{7\ +\ 2\times 6} \Leftrightarrow {}^{19}|_{19}$

....

Critère de divisibilité par 23

Première Méthode

$$^{23}\Big|_{n} \Leftrightarrow {}^{23}\Big|_{\overline{n_k\ \dots\ n_2\ n_1}\ +\ 7n_0}$$

Exemple :

$^{23}|_{3\,151}$ car $^{23}|_{315\ +\ 7\times 1} \Leftrightarrow {}^{23}|_{322} \Leftrightarrow {}^{23}|_{32\ +\ 7\times 2} \Leftrightarrow {}^{23}|_{46}$

Deuxième Méthode *(plus adaptée pour les grands nombres)*

$$^{23}\Big|_{n} \Leftrightarrow {}^{23}\Big|_{\overline{n_k\ \dots\ n_3\ n_2}\ +\ 3\left(\overline{n_1\ n_0}\right)}$$

Exemple :

$^{23}|_{3\,151}$ car $^{23}|_{31\ +\ 3\times 511} \Leftrightarrow {}^{23}|_{184} \Leftrightarrow {}^{23}|_{18\ +\ 7\times 4} \Leftrightarrow {}^{23}|_{46}$

....

Critère de divisibilité par 29

$$^{29}\Big|_{n} \Leftrightarrow {}^{29}\Big|_{\overline{n_k\ \dots\ n_2\ n_1}\ +\ 3n_0}$$

Exemple :

$^{29}|_{75\,168}$ car $^{29}|_{7\,516\ +\ 3\times 8} \Leftrightarrow {}^{29}|_{7540} \Leftrightarrow {}^{29}|_{754} \Leftrightarrow {}^{29}|_{75\ +\ 3\times 4} \Leftrightarrow {}^{29}|_{87}$

Critère de divisibilité par 31

$$31\Big|_{n} \Leftrightarrow 31\Big|_{\overline{n_k\ ...\ n_2\ n_1}\ -\ 3n_0}$$

. . . .

Critère de divisibilité par 37

<u>*Première Méthode*</u> *(pour les nombres à 3 chiffres)*

Soit $\lambda = \min(n_2, n_1, n_0)$. Soient $a = n_2 - \lambda$, $b = n_1 - \lambda$ et $c = n_0 - \lambda$.

- Si $a, b, c = 0$, alors $37\big|_n$.
- Si parmi a, b et c, 2 d'entre eux sont égaux à 0, alors n **n'est pas divisible par** 37.
- Si parmi a, b et c, un seul d'entre eux vaut à 0, alors :

  Si $a = 0$, alors $37\big|_n \Leftrightarrow 37\big|_{\overline{bc}} \Leftrightarrow \overline{bc} \in \{37, 74\}$.
  Si $b = 0$, alors $37\big|_n \Leftrightarrow 37\big|_{\overline{ca}} \Leftrightarrow \overline{ca} \in \{37, 74\}$.
  Si $c = 0$, alors $37\big|_n \Leftrightarrow 37\big|_{\overline{ab}} \Leftrightarrow \overline{ab} \in \{37, 74\}$.

Exemple :

925 est-il divisible par 37 ?
$\lambda = \min(9, 2, 5) = 2$
$a = 9 - 2 = 7$, $b = 2 - 2 = 0$ et $c = 5 - 2 = 3$

Parmi a, b et c, seul un d'entre eux vaut 0, nous sommes dans le troisième cas.
Comme $b = 0$, on en conclue que $37\big|_n \Leftrightarrow 37\big|_{\overline{ca}} \Leftrightarrow \overline{ca} \in \{37, 74\}$

$\overline{ca} = 37$, donc $37\big|_n$

<u>*Deuxième Méthode*</u>

$$37\Big|_{n} \Leftrightarrow 37\Big|_{\overline{n_k\ ...\ n_2\ n_1}\ -\ 11n_0}$$

. . . .

Critère de divisibilité par 41

$$41\Big|_{n} \Leftrightarrow 41\Big|_{\overline{n_k\ ...\ n_2\ n_1}\ -\ 4n_0}$$

. . . .

Critère de divisibilité par 43

$$43\Big|_{n} \Leftrightarrow 43\Big|_{\overline{n_k\ ...\ n_3\ n_2}\ -\ 3\left(\overline{n_1\ n_0}\right)}$$

. . . .

Critère de divisibilité par 47

$$47\Big|_{n} \Leftrightarrow 47\Big|_{\overline{n_k\ ...\ n_3\ n_2}\ +\ 8\left(\overline{n_1\ n_0}\right)}$$

Critère de divisibilité par 53

Première Méthode (*plus adaptée pour les grands nombres*)

$$53\Big|n \Leftrightarrow 53\Big|\overline{n_k\ \dots\ n_3\ n_2} - 9\left(\overline{n_1\ n_0}\right)$$

Deuxième Méthode

$$53\Big|n \Leftrightarrow 53\Big|\overline{n_k\ \dots\ n_2\ n_1} + 16n_0$$

....

Critère de divisibilité par 59

$$59\Big|n \Leftrightarrow 59\Big|\overline{n_k\ \dots\ n_2\ n_1} + 6n_0$$

....

Critère de divisibilité par 61

$$61\Big|n \Leftrightarrow 61\Big|\overline{n_k\ \dots\ n_2\ n_1} - 6n_0$$

....

Critère de divisibilité par 67

$$67\Big|n \Leftrightarrow 67\Big|\overline{n_k\ \dots\ n_3\ n_2} - 2\left(\overline{n_1\ n_0}\right)$$

....

Critère de divisibilité par 71

$$71\Big|n \Leftrightarrow 71\Big|\overline{n_k\ \dots\ n_2\ n_1} - 7n_0$$

....

Critère de divisibilité par 73

Il n'existe pas de critère de divisibilité par 73 simple et classique, néanmoins on peut tout de même s'en sortir grâce au Ruban de Pascal, et plus précisément à un critère qui en découle :
Le Critère de divisibilité par un facteur de $10^\alpha \pm 1$ *(page 18)*.

$$73\Big|n \Leftrightarrow 73\Big|\overline{n_k n_{k-1} n_{k-2} n_{k-3}} - \dots \pm \overline{n_7 n_6 n_5 n_4} \pm \overline{n_3 n_2 n_1 n_0}$$

Il faut alterner les + et les −, en commençant par un −.

....

Critère de divisibilité par 79

$$79\Big|n \Leftrightarrow 79\Big|\overline{n_k\ \dots\ n_2\ n_1} + 8n_0$$

Critère de divisibilité par 83

$$^{83}\Big|_{n} \Leftrightarrow {}^{83}\Big|_{\overline{n_k\ \dots\ n_2\ n_1}\ +\ 25n_0}$$

. . . .

Critère de divisibilité par 89

$$^{89}\Big|_{n} \Leftrightarrow {}^{89}\Big|_{\overline{n_k\ \dots\ n_2\ n_1}\ +\ 9n_0}$$

. . . .

Critère de divisibilité par 97

$$^{97}\Big|_{n} \Leftrightarrow {}^{97}\Big|_{\overline{n_k\ \dots\ n_2\ n_1}\ -\ 29n_0}$$

III.3 Méthode du Ruban de Pascal

Cette méthode permet de tester la divisibilité d'un entier n, ici écrit en base 10, par n'importe quel entier d.

Le principe est de remplacer, dans le nombre $n = n_k \times 10^k + \cdots + n_1 \times 10 + n_0$, chaque puissance de 10 par son reste r dans la division euclidienne par d (on peut aussi prendre $r - d$ au lieu de r).

Exemples :

- Pour $d = 7$, on peut remplacer 1, 10, 100, ... par 1, 3, 2, $-1, -3, -2$, 1, 3, 2, ... (suite périodique). On dit qu'une *clé de divisibilité par* 7 en base 10 est $(1, 3, 2, -1, -3, -2)$.

  Le nombre $n = \overline{n_k\ \dots\ n_1\ n_0}$ est divisible par 7 si et seulement si le nombre suivant l'est :

  $$n_0 + 3\times n_1 + 2\times n_2 \quad - n_3 - 3\times n_4 - 2\times n_5 \quad + n_6 + 3\times n_7 + 2\times n_8 \quad - n_9 - 3\times n_{10} - 2\times n_{11} \dots$$
  $= A + 3B + 2C$, avec
  $A = n_0 - n_3 + n_6 - n_9 + \dots,$
  $B = n_1 - n_4 + n_7 - n_{10} + \dots$ et
  $C = n_2 - n_5 + n_8 - n_{11} + \dots$

  $$^{7}\Big|_{n} \Leftrightarrow {}^{7}\Big|_{A\ +\ 3B\ +\ 2C}$$

- Pour $d = 13$, une *clé de divisibilité par 13* en base 10 est $(1, -3, -4, -1, 3, 4)$.

  Le nombre $n = \overline{n_k\ \dots\ n_1\ n_0}$ est divisible par 13 si et seulement si le nombre suivant l'est :

  $$n_0 - 3\times n_1 - 4\times n_2 \quad - n_3 + 3\times n_4 + 4\times n_5 \quad + n_6 - 3\times n_7 - 4\times n_8 \quad - n_9 + 3\times n_{10} + 4\times n_{11} \dots$$
  $= A - 3B - 4C$, avec
  $A = n_0 - n_3 + n_6 - n_9 + \dots,$
  $B = n_1 - n_4 + n_7 - n_{10} + \dots$ et
  $C = n_2 - n_5 + n_8 - n_{11} + \dots$

  $$^{13}\Big|_{n} \Leftrightarrow {}^{13}\Big|_{A\ -\ 3B\ -\ 4C}$$

La méthode du Ruban de Pascal est détaillé en **Annexe** (page 31).

Critère de divisibilité par un facteur de $10^\alpha \pm 1$

Dans la méthode du ruban, pour certains diviseur d, la clé de divisibilité est plus simple lorsqu'on considère n comme écrit dans la base 10^α, avec un α bien choisi.

En particulier, la clé de divisibilité en base 10^α sera $(1, -1)$ si d est un diviseur de $10^\alpha + 1$, et elle sera simplement (1) si d est un diviseur de $10^\alpha - 1$. On a déjà utilisé de ce critère avec 11 (facteur de $10^1 + 1$ et de $10^2 - 1$), 7 et 13 (pour les très grands nombres) (facteurs de $10^3 + 1$) et 27 (facteur de $10^3 - 1$).

En résumé :

- Si d est un diviseur de $10^\alpha+1$, pour savoir si un nombre n est divisible par d, il faut séparer ce nombre par tranches de α chiffres en partant des unités et d'insérer alternativement des $-$ et des $+$ entre les tranches. On effectue l'opération ainsi écrite et le résultat est divisible par d si et seulement si le nombre considéré au départ l'était.

Somme alternée des tranches dans le cas des diviseurs de $10^\alpha + 1$.

Divisibilité par	11	101	7	13	77	91	143	73	137	17	19	133	23	121
Taille des tranches	1	2	3					4		8	9		11	

- Si d est un diviseur de $10^\alpha - 1$, pour savoir si un nombre n est divisible par d, il faut séparer ce nombre par tranches de α chiffres en partant des unités et d'insérer uniquement des $+$ entre les tranches. On effectue l'opération ainsi écrite et le résultat est divisible par d si et seulement si le nombre considéré au départ l'était. (On peut remarquer que $\forall \alpha \in \mathbb{N}$, ${}^{3}|_{10^{\alpha}-1}$ et ${}^{9}|_{10^{\alpha}-1}$)

Somme des tranches dans le cas des diviseurs de $10^\alpha - 1$.

Divisibilité par	11	33	99	27	37	111	41	123	21	39	63	117	81	53	79	31
Taille des tranches	2			3			5		6				9	13		15

III.4 Critères de divisibilité des puissances de 2, 3 et 5

Soit $\alpha \in \mathbb{N}$.

Critère de divisibilité par 2^α

$$2^\alpha \big|_n \Leftrightarrow 2^\alpha \big|_{\overline{n_{\alpha-1}\ ...\ n_1\ n_0}}$$

Exemples :

$2^4 \big|_n \Leftrightarrow 16 \big|_{\overline{n_3\ n_2\ n_1\ n_0}}$
$2^5 \big|_n \Leftrightarrow 32 \big|_{\overline{n_4\ n_3\ n_2\ n_1\ n_0}}$

$32 \big|_{87\,753\,216\,864}$ car $32 \big|_{16\,864}$

....

Critère de divisibilité par 3^α

$$3^\alpha \big|_n \Leftrightarrow 3^\alpha \big|_{\overline{n_k\ ...\ n_{b\alpha}} + ... + \overline{n_{2\alpha-1}\ ...\ n_{1\alpha}} + \overline{n_{\alpha-1}\ ...\ n_0}}$$

Exemples :

$3^2 \big|_n \Leftrightarrow 9 \big|_{\overline{n_k\ n_{2b}} + ... + \overline{n_5\ n_4} + \overline{n_3\ n_2} + \overline{n_1\ n_0}}$
$3^3 \big|_n \Leftrightarrow 27 \big|_{\overline{n_k\ n_{2b+1}\ n_{2b}} + ... + \overline{n_8\ n_7\ n_6} + \overline{n_5\ n_4\ n_3} + \overline{n_2\ n_1\ n_0}}$

$27 \big|_{2\,417\,638\,212}$ car $27 \big|_{002\ +\ 417\ +\ 638\ +\ 212} \Leftrightarrow 27 \big|_{1\,269} \Leftrightarrow 27 \big|_{1+269} \Leftrightarrow 27 \big|_{270}$

....

Critère de divisibilité par 5^α

$$5^\alpha \big|_n \Leftrightarrow 5^\alpha \big|_{\overline{n_{\alpha-1}\ ...\ n_1\ n_0}}$$

Exemples :

$5^3 \big|_n \Leftrightarrow 125 \big|_{\overline{n_2\ n_1\ n_0}}$
$5^4 \big|_n \Leftrightarrow 625 \big|_{\overline{n_3\ n_2\ n_1\ n_0}}$

$625 \big|_{5\,470\,759\,375}$ car $625 \big|_{9\,375}$

IV Les Logarithmes

Origine

Les logarithmes ont d'abord été utilisés pour transformer les multiplications et les divisions qui sont difficiles à calculer, en additions et soustraction. Avec l'arrivée des ordinateurs, ils ont perdus cette utilité...

Mais depuis leur création en 1614 par *John* NAPIER (francisé et prononcé NEPER), ils ont acquis beaucoup d'autres utilités en science, car ils permettent de modéliser de manière *logarithmique* le son, la lumière ou encore les tremblements de terre. Ces phénomènes ont la particularité d'évoluer sur de très grande plage, qui s'étale sur beaucoup d'ordres de grandeur différents. D'où l'intérêt de l'échelle logarithme, qui nous permet représenter linéairement ces ordres de grandeur.

La fonction $\log_{10}()$ associe à chaque $x \in \mathbb{R}$ positif et non nul, un autre réel y qui, tel que 10 à la puissance y vaut x. Plus concrètement, voila ce que ça donne en équation :

$$x = 10^y = 10^{\log_{10}(x)}$$

Types de Logarithme

Il existe plusieurs types de logarithme en fonction de la **base** a, dans laquelle il est exprimé, ils sont notés et définis de la manière suivante :

$\log_a(x)$	$x = a^{\log_a(x)}$
Logarithme de x exprimé dans la base a.	*Définition générales des logarithmes.*

Logarithme décimal

Certain logarithme sont si important que l'on leur a donné des noms. C'est le cas du logarithme en base 10 qui est appelé **logarithme décimale**. Cette base est très pratique car c'est celle dans laquelle nous comptons, grâce à ça, ce logarithme a des propriétés intéressantes :

$\log_{10}(10) = 1$	$\log_{10}(100) = 2$	$\log_{10}(10^n) = n$

Par simplification, on note le logarithme décimal simplement : $\log(x)$

C'est dans cette base là que les logarithmes de la table sont exprimés, car leur coté décimal nous permettrons de calculer le logarithme d'un nombre bien plus simplement.

Logarithme népérien

Le **logarithme népérien** est exprimé en base **e**, qui est un nombre irrationnel (il n'a pas de valeur exact, il vaut environ 2,718 281 828 459 045 235 . . .). **e** occupe une place très importante dans les mathématiques, il a pour certain, la même place que le nombre π.

Ce logarithme est considéré comme étant celui le plus important pour les mathématiciens, car on le retrouve dans beaucoup d'équation. Mais pour simplifier le calcul de produit ou de quotient, on préfère utiliser le logarithme décimale ($\log(x)$).

On note ce logarithme : $\ln(x)$

De plus, à partir de $\ln(x)$, on peut retrouver le logarithme de n'importe quelle base grâce à cette relation :

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

IV.1 Propriétés des Logarithmes

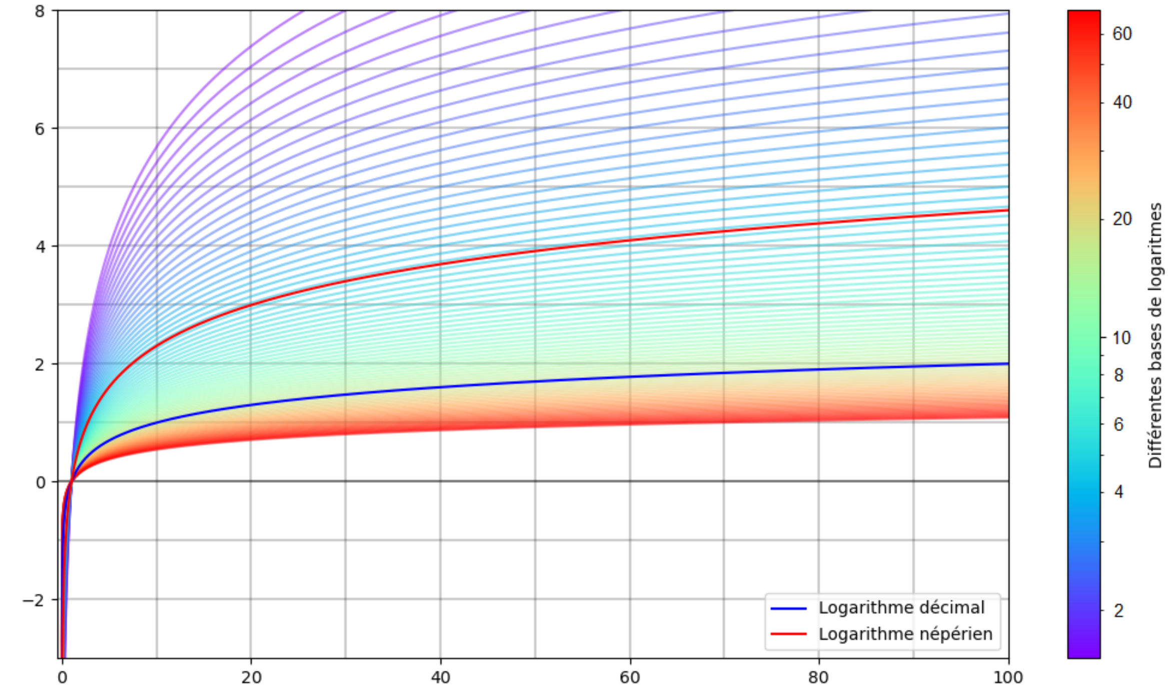
Transformation des multiplications et des divisions, en additions et en soustractions :

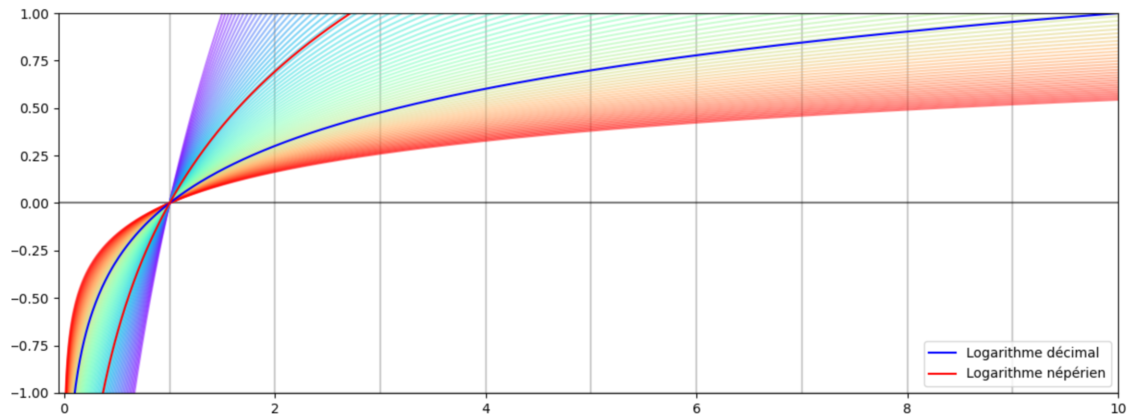
$$\begin{aligned}\log_a(x \times y) &= \log_a(x) + \log_a(y)\\ \log_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a(x) - \log_a(y)\end{aligned}$$

En partant de ces propriétés élémentaires, on peut aussi transformer des puissances :

$$\begin{aligned}\log_a(x^n) &= \quad n\log_a(x)\\ \log_a\left(\frac{1}{x^n}\right) &= -n\log_a(x)\end{aligned}$$

Représentations graphiques





Les démonstrations propriétés et d'autres propriétés sont en **Annexe** (page 34).

IV.2 Lecture de la table

La table donne, pour les réels compris entre 1,000 0 et 9,999 9, les 9 premières décimales de leur logarithmes décimaux. Sa précision est très élevée, en pratique 4 à 5 décimales peuvent suffire.

$\forall x \in [1, 10[,\ \log(x) \in [0, 1[$, c'est pour cela que seules les décimales sont affichées.

Concrètement, comment faire pour trouver le logarithme de, par exemple 27,148 ?

On factorise ce nombre :	$27{,}148 = 10 \times 2{,}714\,8$	
Première propriété :	$\log(27{,}148) = \log(10) + \log(2{,}714\,8)$	$\log_a(x \times y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
	$\log(27{,}148) = 1 + \log(2{,}714\,8)$	$\log(10) = 1$
Mais combien vaut le logarithme de 2,714 8 ?		
Pour le savoir, on découpe le nombre comme ceci : $2,714 \mid 8$		
On recherche la ligne **2,741** et on lit la valeur de la colonne **8**		(c'est à dire la 9$^{\text{ème}}$ colonne)
On sait maintenant que :	$\log(2{,}714\,8) = 0{,}433\,737\,841$	

$$\log(27{,}148) = 1 + 0{,}433\,737\,841 = \mathbf{1{,}433\,737\,841}$$

Un logarithme est composé de 2 parties :

- La partie entière (1), qui indique l'ordre de grandeur du nombre (ici il est compris entre 10 et 100). On appelle ce nombre la ***caractéristique***.
- La partie décimale (433 737 841), qui porte le nom de ***mantisse*** et qui est lue dans la table.

Cette table peut aussi être utilisée dans l'autre sens, si l'on cherche la valeur x tel que $\log(x) = 0{,}763\,240\,757$ ou, autrement dit la valeur de $10^{0{,}763\,240\,757}$, il faut trouver le nombre tel que son logarithme décimal vaille à 0,763 240 757. Il suffit donc de parcourir la table (où les valeurs croissent au fur et à mesure de la descente) et de chercher ! *Dans cet exemple, x vaut 5,797 5.*

IV.3 Cologarithme

Le Cologarithme sert à simplifier toujours plus les calculs, son but est de transformer les soustraction de logarithmes en addition de logarithmes.

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x) \quad = \quad \operatorname{colog}_a(x)$$

On définit le cologarithme de la manière suivante :

- On change le signe de la caractéristique et on soustrait 1 à cette nouvelle caractéristique.
- Si la caractéristique est négative, on change sa notation pour passer de $-x$ à $\overline{x}$.
- On retranche tous les chiffres de la mantisse à 9 et le dernier de droite à 10.

Dans cette écriture, la *mantisse* est positive et la *caractéristique* est algébrique. Son signe est indiqué (lorsqu'il est négatif) au-dessus. Lorsqu'on effectue un calcul, on fait toujours la somme (arithmétique) des mantisses et la somme algébrique des caractéristiques.

Exemple :

$\log\left(\frac{1}{72}\right)$	$= \operatorname{colog}(72)$	$\log\left(38 \times \frac{1}{72}\right)$	$= \log(38) - \log(72)$
$\log(72)$	$= 1,857\,332\,496$		$= \log(38) + \operatorname{colog}(72)$
$\operatorname{colog}(72)$	$= \overline{2},142\,667\,504$		$= 1{,}579\,783\,596 + \overline{2},142\,667\,504$
			$= 1{,}579\,783\,596 - 2 + 0{,}142\,667\,504$
			$= (1-2) + 0{,}579\,783\,596 + 0{,}142\,667\,504$
			$= -1{,}722\,451\,100$
$10^{-1{,}722\,451\,100}$	$= 0,1 \times 5{,}277\,8$	$38 \times \frac{1}{72}$	$= 0{,}527\,78$ *(Valeur calculée)*
			$= 0{,}527\,777\,778$ *(Véritable valeur)*

Démonstrations des propriétés des cologarithmes disponibles en **Annexe** (page 35)

IV.4 Utilisation des logarithmes pour réaliser des calculs

Les logarithmes nous permette de simplifier les calculs de produit et de quotient grâce aux propriétés vu dans la partie précédente. Pour cela, on va suivre une démarche que l'on retrouve beaucoup en Mathématique : Le théorème du parapluie.

Pour marcher sous la pluie en restant sec, on peut utiliser un parapluie. Mais attention, pour rester bien sec, il faut l'utiliser astucieusement !

$$\text{Départ en intérieur} \xrightarrow{\text{Ouverture du parapluie}} \text{Marche sous la pluie} \xrightarrow{\text{Fermeture du parapluie}} \text{Arrivée en intérieur}$$

On va ici faire de même pour réaliser notre calcul :

$$\text{Calcul initial complexe} \xrightarrow{\log(x)} \text{Calcul simplifié} \xrightarrow{10^x} \text{Résultat du calcul initial}$$

<u>*Calcul d'un produit* :</u> $254\,860 \times 89\,642$

$= 10^{\log(254\,860)} \times 10^{\log(89\,642)}$	Transformation du produit
$= 10^{\log(254\,860)+\log(89\,642)}$	Regroupement des puissances
$= 10^{\log(100\,000\times 2{,}548\,60)+\log(10\,000\times 8{,}964\,2)}$	Séparation des facteurs
$= 10^{\log(100\,000)+\log(2{,}548\,60)+\log(10\,000)+\log(8{,}964\,2)}$	$\log_a(x\times y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
$= 10^{5+\log(2{,}548\,60)+4+\log(8{,}964\,2)}$	
$\approx 10^{5+0{,}406\,301\,679+4+0{,}952\,511\,538}$	**<u>Lecture de la table</u>**
$= 10^{10{,}358\,813\,217}$	
$= 10^{10} \times 10^{0{,}358\,813\,217}$	Séparation des puissances
$\approx 10\,000\,000\,000 \times 2{,}284\,6$	**<u>Lecture inversée de la table</u>**
$254\,860 \times 89\,642 \approx 22\,846\,000\,000$	Valeur calculée
$254\,860 \times 89\,642 = 22\,846\,160\,120$	Véritable valeur

<u>*Calcul d'un quotient* :</u> $55\,464 \div 34\,541$

$= 10^{\log(55\,464)} \div 10^{\log(34\,541)}$	Transformation du quotient
$= 10^{\log(55\,464)-\log(34\,541)}$	Regroupement des puissances
$= 10^{\log(10\,000\times 5{,}546\,4)-\log(10\,000\times 3{,}454\,1)}$	Séparation des facteurs
$= 10^{\log(10\,000)+\log(5{,}546\,4)-(\log(10\,000)+\log(3{,}454\,1))}$	$\log_a(x\times y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
$= 10^{4+\log(5{,}546\,4)-4-\log(3{,}454\,1)}$	
$= 10^{4+\log(5{,}546\,4)-4+\text{colog}(3{,}454\,1)}$	*log(3,454 1) = 0,538 334 907*
$\approx 10^{(4-4)+0{,}744\,011\,187+\bar{1}{,}461\,665\,093}$	**<u>Lecture de la table</u>**
$= 10^{(4-4-1)+0{,}744\,011\,187+0{,}461\,665\,093}$	
$= 10^{(-1)+1{,}205\,676\,280}$	
$= 10^{0} \times 10^{0{,}205\,676\,280}$	Séparation des puissances
$\approx 1 \times 1{,}605\,7$	**<u>Lecture inversée de la table</u>**
$55\,464 \div 34\,541 \approx 1{,}605\,7$	Valeur calculée
$55\,464 \div 34\,541 = 1{,}605\,743\,899$	Véritable valeur

<u>*Calcul d'une puissance*</u> : $68{,}453^{17}$

$= 10^{\log(68{,}453^{17})}$	Transformation de la puissance
$= 10^{17\times\log(68{,}453)}$	$\log_a(x^n) = n\log_a(x)$
$= 10^{17\times\log(10\times 6{,}845\,3)}$	Séparation des facteurs
$= 10^{17\times(\log(10)+\log(6{,}845\,3))}$	$\log_a(x\times y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
$= 10^{17\times 1+17\times\log(6{,}845\,3)}$	
$\approx 10^{17+17\times 0{,}835\,392\,486}$	**<u>Lecture de la table</u>**
$= 10^{17} \times 10^{10^{\log(17)+\log(0{,}835\,392\,486)}}$	Calcul du produit à l'aide de logarithmes
$= 10^{17} \times 10^{10^{\log(10)+\log(1.7)+\log(0.1)+\log(8{,}353\,924\,86)}}$	
$= 10^{17} \times 10^{10^{1+\log(1.7)+(-1)+\log(8{,}353\,924\,86)}}$	$\log(8{,}353\,9) = 0{,}921\,889\,272$
$\approx 10^{17} \times 10^{10^{0{,}230\,448\,921+0{,}921\,889\,272}}$	**<u>2ème Lecture de la table</u>**
$= 10^{17} \times 10^{10^{1{,}152\,338\,193}}$	
$= 10^{17} \times 10^{10^{1+0{,}152\,338\,193}}$	
$= 10^{17} \times 10^{10^{1}\times 10^{0{,}152\,338\,193}}$	$10^{0{,}152\,349\,508} = 1{,}420\,2$
$\approx 10^{17} \times 10^{10\times 1{,}420\,2}$	**<u>Lecture inversée de la table</u>**
$= 10^{17} \times 10^{14{,}202}$	
$= 10^{17} \times 10^{14+0{,}202}$	
$= 10^{17} \times 10^{14} \times 10^{0{,}202}$	$10^{0{,}202\,024\,895} = 1{,}592\,3$
$\approx 10^{31} \times 1{,}592\,3$	**<u>2ème Lecture inversée de la table</u>**
$68{,}453^{17} \approx 1{,}592\,300\,000 \times 10^{31}$	Valeur calculée
$68{,}453^{17} = 1{,}591\,007\,637 \times 10^{31}$	Véritable valeur

<u>*Remarque*</u> :

- Ce calcul peut aussi s'appliquer au calcul de racine, car $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ et $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$.

Analyse et Critique

Ces méthodes sont mathématiquement parfaitement véridiques, mais en pratique la table limite la précision des résultats obtenues. Si l'on reprend le calcul du produit *254 860 × 89 642*, on remarque que le résultat n'est précis qu'à 5 chiffres près.

La table, en lecture inversée, associe à chaque nombre entre 0 et 1 un autre nombre compris entre 1 et 10. Ce deuxième nombre n'est donné dans la table qu'avec 5 chiffres, c'est d'ici que provient le manque de précision du produit.

En réalité : $10^{10} \times 10^{0{,}358\,813\,217} = 22\,846\,160\,158{,}234\,503$

La précision est meilleure mais elle n'est pas parfaite non plus à cause de la première lecture du tableau, qui est limitée à 9 chiffres significatifs.

Contrairement aux calculs de produit et de quotient, la méthode naïve consistant à utiliser un maximum de formule pour simplifier un maximum les calculs ne donne pas un résultat très précis pour calculer une puissance. Ici nous n'avons que 3 chiffres de juste, alors que précédemment, nous en avions 5 de correct.

Ce manque de précision s'explique par les **4** approximations effectuées lors de la lecture de la table, et plus précisément par les lectures *inverses*, et surtout par la toute dernière.

Améliorer la précision des mesures

Il existe quatre solutions pour obtenir des résultats plus précis :

- **Découper le calcul :**
  On peut séparer les facteurs de notre calcul en plus petits facteurs, reprenons l'exemple du calcul du produit *254 860 × 89 642* :

$$
\begin{aligned}
&= (254 \cdot 10^3 + 860) \times (89 \cdot 10^3 + 642)\\
&= (254 \cdot 10^3)(89 \cdot 10^3) + (254 \cdot 10^3)(642) + (860)(89 \cdot 10^3) + (860)(642)\\
&= (254)(89) \cdot 10^6 + \big[(254)(642) + (860)(89)\big] \cdot 10^3 + (860)(642)\\
&= 10^{\log(254)+\log(89)} \cdot 10^6 + \big[10^{\log(254)+\log(642)} + 10^{\log(860)+\log(89)}\big] \cdot 10^3 + 10^{\log(860)+\log(642)}\\
&= 10^{2{,}404\,833\,717+1{,}949\,390\,007} \cdot 10^6\\
&\quad + \big[10^{2{,}404\,833\,717+2{,}807\,535\,028} + 10^{2{,}934\,498\,451+1{,}949\,390\,007}\big] \cdot 10^3\\
&\quad + 10^{2{,}934\,498\,451+2{,}807\,535\,028}\\
&= 10^{4{,}354\,223\,724} \cdot 10^6 + \big[10^{5{,}212\,368\,745} + 10^{4{,}883\,888\,458}\big] \cdot 10^3 + 10^{5{,}742\,033\,479}\\
&= 10^{0{,}354\,223\,724} \cdot 10^{10} + \big[10^{1{,}212\,368\,745} + 10^{0{,}883\,888\,458}\big] \cdot 10^7 + 10^{0{,}742\,033\,479} \cdot 10^5\\
&= 2{,}260\,6 \cdot 10^{10} + \big[16{,}307 + 7{,}654\,0\big] \cdot 10^7 + 5{,}521\,2 \cdot 10^5\\
&= 2{,}260\,6 \cdot 10^{10} + 23{,}961 \cdot 10^7 + 5{,}521\,2 \cdot 10^5\\
&= 22\,846\,162\,120 \text{ (Valeur calculée)}\\
&= 22\,846\,160\,120 \text{ (Véritable valeur)}
\end{aligned}
$$

  Pour améliorer la précision, il est possible de découper encore plus les facteurs du calcul.

- **Lire entre les lignes :**
  On peut approximer la valeur d'un logarithme en supposant localement qu'il évolue linéairement. Pour avoir plus de détail, rendez-vous dans la section correspondante (page 26).

- **Pourquoi faire simple :**
  Dans le cas du calcul de la puissance, on aurait aussi pu se contenter de faire la multiplication *17 × 0,835 392 486* manuellement, on peut se satisfaire d'avoir transformer notre puissance complexe en multiplication plus simple :

$$
\begin{aligned}
&= 10^{17+17\times 0{,}835\,392\,486}\\
&= 10^{17+14{,}201\,672\,262}\\
&= 10^{31} \times 10^{0{,}201\,672\,262}\\
&= 1{,}591\,0 \times 10^{31}
\end{aligned}
$$

- **Faire autrement :**
  Il existe d'autres méthodes pour calculer des puissances, comme par exemple l'Exponentiation rapide (cette méthode est détaillée à la page 28)

Remarque :

Les calculs présentés sont des exemples simples bien choisis, avec des nombres n'ayant que 5 chiffres, ce qui correspond (comme par hasard) à la précision de la table.

Donc comment faire si les nombres que l'on manipule ont plus de 5 chiffres ?

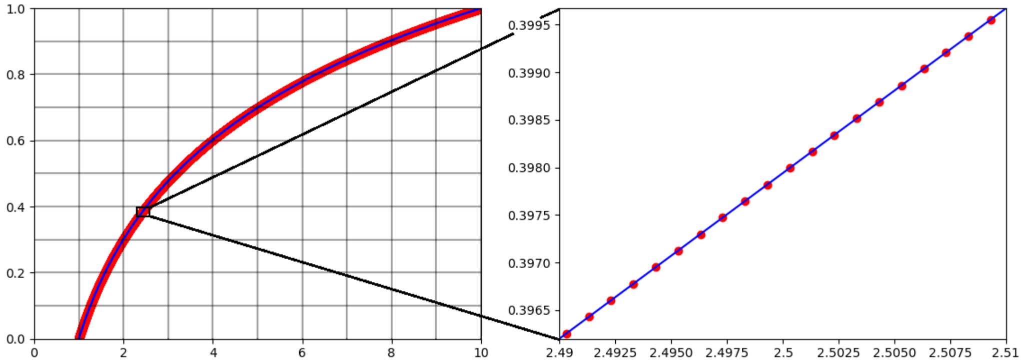
On peut décomposer les facteurs en plus petits facteurs :

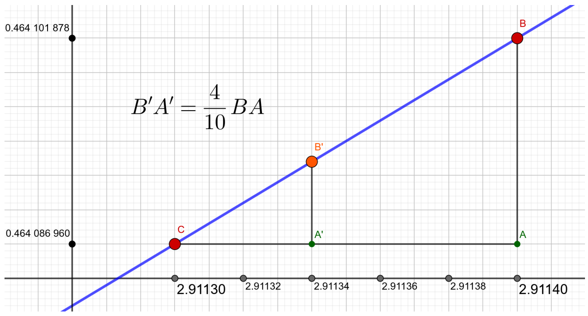
$$
\begin{aligned}
&1\,554\,548\,431 \times 6\,224\,814\,231\\
&\quad= (15\,545 \cdot 10^5 + 48\,431) \times (62\,248 \cdot 10^5 + 14\,231)\\
&\quad= (15\,545 \cdot 10^5)(62\,248 \cdot 10^5) + (15\,545 \cdot 10^5)(14\,231) + (48\,431)(62\,248 \cdot 10^5) + (48\,431)(14\,231)\\
&\quad= (15\,545)(62\,248) \cdot 10^{10} + \big[(15\,545)(14\,231) + (48\,431)(62\,248)\big] \cdot 10^5 + (48\,431)(14\,231)\\
&\quad= 967\,640\,000 \cdot 10^{10} + \big[221\,220\,000 + 3\,014\,700\,000\big] \cdot 10^5 + 689\,220\,000\\
&\quad= 9\,676\,723\,592\,689\,220\,000 \text{ (Valeur calculée)}\\
&\quad= 9\,676\,775\,196\,067\,521\,561 \text{ (Véritable valeur)}
\end{aligned}
$$

IV.5 Approximation linéaire du logarithme

À l'aide de la table et de quelques calculs, on peut approximer des logarithmes de nombre ayant plus de 5 décimales. Pour cela, on suppose que l'évolution entre deux logarithmes déjà connus est linéaire.

Sur les courbes ci-dessous, les points rouges représentent les valeurs calculées dans la table, et la courbe bleue est la courbe exacte du logarithme décimale.





Pour calculer cette approximation, on peut utiliser le théorème de Thalès.

Calculons par exemple : $\log(2{,}911\,34)$

$$
\begin{array}{lll|l}
\log(2{,}911\,34) & \approx \log(2{,}911\,30) + \frac{4}{10} \times (\log(2{,}911\,40) - \log(2{,}911\,30)) & & \text{Théorème de Thalès} \\
& \approx 0{,}464\,086\,960 + 10^{-1} \times 4 \times (0{,}000\,014\,918) & & \underline{\textbf{Lecture de la table}} \\
& = 0{,}464\,086\,960 + 10^{-6} \times 4 \times (1{,}491\,8) & & \\
& = 0{,}464\,086\,960 + 10^{-6} \times 10^{\log(4)\ +\ \log(1{,}491\,8)} & & \text{Calcul du produit} \\
& \approx 0{,}464\,086\,960 + 10^{-6} \times 10^{0{,}602\,059\,991\ +\ 0{,}173\,710\,603} & & \\
& = 0{,}464\,086\,960 + 10^{-6} \times 10^{0{,}775\,770\,594} & & \\
& \approx 0{,}464\,086\,960 + 0{,}000\,005\,967\,2 & & \underline{\textbf{Lecture de la table}} \\
& & & \\
& = 0{,}464\,092\,927\,2 \to 10^{0{,}464\,092\,927\,2} = 2{,}911\,339\,998\,953 & & \text{Valeur calculée} \\
& = 0{,}464\,092\,927\,4 \to 10^{0{,}464\,092\,927\,4} = 2{,}911\,340\,000\,294 & & \text{Véritable valeur}
\end{array}
$$

Il est possible d'utiliser cette approximation dans l'autre sens, c'est à dire de trouver la valeur de, par exemple $10^{0{,}845\,672\,172}$. Dans la table, on peut lire : $7{,}009\,2 < 10^{0{,}845\,672\,172} < 7{,}009\,3$.

On cherche donc un réel x, tel que $10^{0{,}845\,672\,172} = 7{,}009\,2 + 10^{-5} \times x$

$$
\begin{array}{ll|l}
\log(10^{0{,}845\,672\,172}) & \approx \log(7{,}009\,20) + \frac{x}{10} \times (\log(7{,}009\,30) - \log(7{,}009\,20)) & \text{Théorème de Thalès} \\
& & \\
0{,}845\,672\,172 & \approx 0{,}845\,668\,452 + 10^{-1} \times x \times (0{,}845\,674\,648 - 0{,}845\,668\,452) & \underline{\textbf{Lecture de la table}} \\
& \approx 0{,}845\,668\,452 + x \times 0{,}000\,000\,619\,6 & \\
& & \\
x & = \frac{0{,}845\,672\,172 - 0{,}845\,668\,452}{0{,}000\,000\,619\,6} = \frac{0{,}000\,003\,720\,0}{0{,}000\,000\,619\,6} = \frac{37\,200}{6\,196} = \cdots & \text{Calcul du quotient} \\
& \approx 6{,}003\,9 & \underline{\textbf{Lecture de la table}} \\
& & \\
10^{0{,}845\,672\,172} & = 7{,}009\,2 + 10^{-5} \times 6{,}003\,9 & \\
& = 7{,}009\,260\,039 & \text{Valeur calculée} \\
& = 7{,}009\,260\,034 & \text{Véritable valeur}
\end{array}
$$

IV.6 Changement de base de Logarithme

Comme vu dans la présentation du logarithme népérien, il est possible de passer d'une base à une autre grâce à cette formule :

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Mais comme vous le savez, les logarithmes de la table sont dans la base décimale !
Donc comment faire pour obtenir un logarithme dans une autre base ?

Facile, il suffit d'adapter la formule vue plus haut :

$$\log_a(x) = \tfrac{\ln(x)}{\ln(a)} \quad \Longleftrightarrow \quad \ln(x) = \log_a(x) \times \ln(a)$$

Ce résultat est vrai pour toutes les bases, y compris la base décimale, on sait donc que :

$$\ln(x) = \log_{10}(x) \times \ln(10)$$

On peut donc remplacer $\ln(x)$:

$$\log_a(x) \times \ln(a) = \log_{10}(x) \times \ln(10) \iff \log_a(x) = \log_{10}(x) \times \tfrac{\ln(10)}{\ln(a)} \iff$$

$$\log_a(x) = \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(a)} = 10^{\log(\log_{10}(x)) - \log(\log_{10}(a))}$$

a	$\dfrac{1}{\log_{10}(a)}$	$\log(\ln(a))$	$-\log(\log_{10}(a))$
2	3,321 928 094 887 362	−0,159 174 538 954 862	0,521 390 227 654 325
2.5	2,512 941 594 732 060	−0,037 966 706 228 034	0,400 182 394 927 497
e	2,302 585 092 994 046	0	0,362 215 688 699 463
3	2,095 903 274 289 385	0,040 844 452 568 921	0,321 371 236 130 543
4	1,660 964 047 443 681	0,141 855 456 709 120	0,220 360 231 990 344
5	1,430 676 558 073 393	0,206 674 227 491 119	0,155 541 461 208 344
6	1,285 097 208 938 469	0,253 279 708 340 476	0,108 935 980 358 987
7	1,183 294 662 454 938	0,289 122 783 172 642	0,073 092 905 526 821
8	1,107 309 364 962 454	0,317 946 715 764 801	0,044 268 972 934 662
9	1,047 951 637 144 692	0,341 874 448 232 902	0,020 341 240 466 561
10	1	0,362 215 688 699 463	0
11	0,960 252 567 789 128	0,379 830 211 523 892	−0,017 614 522 824 429
12	0,926 628 408 029 127	0,395 310 078 283 252	−0,033 094 389 583 789
13	0,897 711 717 502 623	0,409 078 794 792 035	−0,046 863 106 092 572
14	0,872 502 869 549 156	0,421 448 824 727 484	−0,059 233 136 028 021
15	0,850 274 153 727 603	0,432 656 710 921 376	−0,070 441 022 221 913
16	0,830 482 023 721 841	0,442 885 452 373 101	−0,080 669 763 673 638
17	0,812 711 509 291 959	0,452 279 278 600 139	−0,090 063 589 900 676
18	0,796 639 770 196 912	0,460 953 705 047 035	−0,098 738 016 347 571
19	0,782 011 483 099 541	0,469 002 558 388 783	−0,106 786 869 689 320
20	0,768 621 786 840 241	0,476 502 998 175 098	−0,114 287 309 475 634

V Exponentiation Rapide

Pour calculer la puissance n^p, la méthode naïve et immédiate est de multiplier n par lui-même p fois. Cependant, il existe des méthodes plus efficaces, où le nombre d'opérations nécessaires n'est plus de l'ordre de p mais de l'ordre de $\log(p)$.

On peut réécrire l'exposant p en somme de plus petits exposants de cette manière : $p = \sum_{i \leq d} a_i 2^i$ avec $a_i \in \{0, 1\}$, on constate que :

$$n^p = (n^{2^0})^{a_0} \times (n^{2^1})^{a_1} \times (n^{2^2})^{a_2} \times \cdots \times (n^{2^d})^{a_d}.$$

Il faut ainsi d opérations pour calculer tous les n^{2^i}, puis d opérations supplémentaires pour former le produit des $(n^{2^i})^{a_i}$. Le nombre total d'opérations est donc $2d$, qui est bien de l'ordre du logarithme de p. Cette simple remarque algébrique conduit à l'algorithme présenté dans la section suivante.

Algorithme

Soit n un entier strictement supérieur à 1, supposons que l'on sache calculer, pour chaque réel x, toutes les puissances x^k de x, pour tout k, tel que $1 \leq k < n$.

- Si n est pair alors $x^n = (x^2)^{\frac{n}{2}}$. Il suffit alors de calculer $y^{\frac{n}{2}}$ pour $y = x^2$.
- Si n est impair et $n > 1$, alors $x^n = x(x^2)^{\frac{n-1}{2}}$. Il suffit de calculer $y^{\frac{n-1}{2}}$ pour $y = x^2$ et de multiplier le résultat par x.

Cette remarque nous amène à l'algorithme récursif suivant qui calcule x^n pour un entier strictement positif n :

$$x^n = \begin{cases} x & \text{si } n = 1 \\ (x^2)^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ x \times (x^2)^{\frac{n-1}{2}} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

En comparant à la méthode ordinaire qui consiste à multiplier x par lui-même $n - 1$ fois, cet algorithme nécessite de l'ordre de $\mathrm{O}(\log n)$ multiplications et ainsi accélère le calcul de x^n de façon spectaculaire pour les grands entiers.

Exemple

Calculons 65^{27} :

$$\begin{array}{l|l}
= 65 \times (65^2)^{\frac{27-1}{2}} & \text{27 est impair} \\
= 65 \times (4\,225)^{13} & \\
= 65 \times 4\,225 \times (4\,225^2)^{\frac{13-1}{2}} & \text{13 est impair} \\
= 65 \times 4\,225 \times (17\,850\,625)^{6} & \\
= 65 \times 4\,225 \times (17\,850\,625^2)^{\frac{6}{2}} & \text{6 est pair} \\
= 65 \times 4\,225 \times (318\,644\,812\,890\,625)^{3} & \\
= 8\,885\,065\,410\,379\,260\,901\,802\,741\,051\,591\,932\,773\,590\,087\,890\,625 &
\end{array}$$

Comme on peut le voir avec cet exemple, la méthode fonctionne bien, mais elle est complexe à utiliser en pratique, surtout si l'exposant est grand. Cette méthode est bien plus pratique pour un ordinateur, qui est bien plus à l'aise avec les multiplications qu'avec les puissances.

Néanmoins en combinant cette méthode avec les logarithmes, on peut toujours plus simplifier les calculs.

VI Annexe

VI.1 Démonstration des Critères de Divisibilité de 2 à 10

Critère de Divisibilité par 2

$$2\big|_n \iff \exists p \in \mathbb{Z}, \quad n = 2p$$

$$p_0 \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \iff n_0 \in \{0,2,4,6,8\}$$

$$2\big|_n \iff n_0 \in \{0,2,4,6,8\}$$

Critère de Divisibilité par 3

$$3\big|_n \iff \exists p \in \mathbb{Z}, \quad n = 3p$$

$$n = \sum_{i=0}^{k} n_i \cdot 10^i = 3p \iff p = \sum_{i=0}^{k} n_i \cdot \frac{10^i}{3} = \sum_{i=0}^{k} n_i \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{10^i - 1}{3}\right) = \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{k} n_i + \sum_{i=0}^{k} n_i \cdot \frac{10^i-1}{3}$$

$$3\big|_n \iff p \in \mathbb{Z} \iff \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{k} n_i + \sum_{i=0}^{k} n_i \cdot \frac{10^i-1}{3} \in \mathbb{Z} \iff \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{k} n_i \in \mathbb{Z}$$

$$3\big|_n \iff 3\big|_{n_k + \ldots + n_0}$$

Critère de Divisibilité par 4

$$4\big|_n \iff n \equiv 0 \quad [4]$$

$$\begin{array}{r|r|r} \overline{n_k \ \ldots \ n_1 \ n_0} \equiv 0 \ \ [4] & \overline{n_k \ \ldots \ n_2} \cdot 100 + \overline{n_1 \ n_0} \equiv 0 \ \ [4] & 10 \cdot n_1 + n_0 \equiv 0 \ \ [4] \\ (8+2) \cdot n_1 + n_0 \equiv 0 \ \ [4] & 8 \cdot n_1 + 2 \cdot n_1 + n_0 \equiv 0 \ \ [4] & 2 \cdot n_1 + n_0 \equiv 0 \ \ [4] \end{array}$$

$$4\big|_n \iff 4\big|_{2n_1 + n_0}$$

Critère de Divisibilité par 5

Démonstration analogue au Critère de Divisibilité par 2

Critère de Divisibilité par 6

$$6\big|_n \iff 2 \times 3\big|_n \iff 2\big|_n \text{ et } 3\big|_n$$

Critère de Divisibilité par 8

$$8\big|_n \iff n \equiv 0 \quad [8]$$

$$\begin{array}{r|r|r} \overline{n_k \ \ldots \ n_1 \ n_0} \equiv 0 \ \ [8] & \overline{n_k \ \ldots \ n_3} \cdot 1000 + \overline{n_2 \ n_1 \ n_0} \equiv 0 \ \ [8] & 100 \cdot n_2 + 10 \cdot n_1 + n_0 \equiv 0 \ \ [8] \\ \multicolumn{2}{r|}{(96+4) \cdot n_2 + (8+2) \cdot n_1 + n_0 \equiv 0 \ \ [8]} & 4 \cdot n_2 + \ 2 \cdot n_1 + n_0 \equiv 0 \ \ [8] \end{array}$$

$$4\big|_n \iff 4\big|_{4n_2 + 2n_1 + n_0}$$

Critère de Divisibilité par 9

Démonstration analogue au Critère de Divisibilité par 3

Critères de divisibilité par 7

Il existe plusieurs méthodes pour savoir si un nombre est divisible par 7. Celles qui sont présentées sont adaptées à différentes tailles de nombres.

Première méthode

$$7 \big| n \Leftrightarrow 7 \big| \overline{n_k \ ... \ n_2 \ n_1} + 5n_0$$

Démonstration :

$$\begin{array}{r|r|r} \overline{n_k \dots n_1 \ n_0} \equiv 0 \ \ [7] & 10 \cdot \overline{n_k \dots n_1} + n_0 \equiv 0 \ \ [7] & 10 \cdot \overline{n_k \dots n_1} + 50n_0 - 49n_0 \equiv 0 \ \ [7] \\ 10 \cdot \overline{n_k \dots n_1} + 50n_0 \equiv 0 \ \ [7] & 10 \cdot (\overline{n_k \dots n_1} + 5n_0) \equiv 0 \ \ [7] & \overline{n_k \dots n_1} + 5n_0 \equiv 0 \ \ [7] \end{array}$$

Deuxième méthode

$$7 \big| n \Leftrightarrow 7 \big| \overline{n_k \ ... \ n_2 \ n_1} - 2n_0$$

Démonstration :

$$\begin{array}{r|r|r} \overline{n_k \dots n_1 \ n_0} \equiv 0 \ \ [7] & 10 \cdot \overline{n_k \dots n_1} + n_0 \equiv 0 \ \ [7] & 10 \cdot \overline{n_k \dots n_1} - 20n_0 + 21n_0 \equiv 0 \ \ [7] \\ 10 \cdot \overline{n_k \dots n_1} - 20n_0 \equiv 0 \ \ [7] & 10 \cdot (\overline{n_k \dots n_1} - 2n_0) \equiv 0 \ \ [7] & \overline{n_k \dots n_1} - 2n_0 \equiv 0 \ \ [7] \end{array}$$

Troisième méthode ***(Critère pour un grand nombre)***

Pour les grands nombres, la méthode du Ruban de Pascal est la plus pratique pour savoir si un nombre est divisible par 7, pour avoir plus de détail, rendez-vous à la page 18.

$$7 \big| n \Leftrightarrow 7 \big| \overline{n_k \ n_{k-1} \ n_{k-2}} - \ ... \ \pm \overline{n_5 \ n_4 \ n_3} \pm \overline{n_2 \ n_1 \ n_0}$$

Il faut alterner les + et les −, en commençant par un −.

. . . .

Démonstration du troisième Critère de divisibilité par 11

$$\begin{array}{r|r|r} \overline{n_k \dots n_1 \ n_0} \equiv 0 \ \ [11] & 10 \cdot \overline{n_k \dots n_1} + n_0 \ \ \equiv 0 \ \ [11] & 11 \cdot \overline{n_k \dots n_1} - \overline{n_k \dots n_1} + n_0 \equiv 0 \ \ [11] \\ -\overline{n_k \dots n_1} + n_0 \equiv 0 \ \ [11] & -1 \cdot (\overline{n_k \dots n_1} - n_0) \equiv 0 \ \ [11] & \overline{n_k \dots n_1} - n_0 \equiv 0 \ \ [11] \end{array}$$

VI.2 Ruban de Pascal

Le terme ruban de Pascal renvoie à une technique servant en particulier à déterminer si un entier n est divisible par un entier d en utilisant les chiffres de l'écriture de n dans une base b. Les fondements théoriques de cette méthode relèvent de la théorie de congruence sur les entiers. Le ruban permet, plus précisément, de calculer la classe de congruence de n modulo d.

Blaise PASCAL a proposé sa méthode dans *De numeribus multiplicibus* avant que cette théorie ne soit établie.

Construction d'un ruban

n désigne le nombre dont on souhaite connaître la divisibilité par le nombre noté d et b désigne la base dans laquelle n est écrit.

Le principe des rubans est d'identifier, pour chaque puissance de la base b, le reste dans sa division euclidienne par d. Pour une base $b = 10$ et $d = 7$, on a :

- $10^0 = 0 \times 7 + \mathbf{1}$
- $10^1 = 1 \times 7 + \mathbf{3}$
- $10^2 = 14 \times 7 + \mathbf{2}$
- $10^3 = 142 \times 7 + \mathbf{6}$
- $10^4 = 1428 \times 7 + \mathbf{4}$
- $10^5 = 14285 \times 7 + \mathbf{5}$
- $10^6 = 142857 \times 7 + \mathbf{1}$
- $10^7 = 1428571 \times 7 + \mathbf{3}$
- $10^8 = 14285714 \times 7 + \mathbf{2}$
- $10^9 = 142857142 \times 7 + \mathbf{6}$

Ceci produit la suite $(1, 3, 2, 6, 4, 5,\ 1, 3, 2, 6, \dots)$ qui semble se répéter. La suite des restes constitue le *ruban de Pascal* en base b pour le diviseur d. C'est ce ruban que l'on utilisera pour savoir si n est divisible par d.

Premiers rubans en base 10

Les premiers rubans de Pascal en base 10 sont :

1. $(0,\ 0,\ \dots)$
2. $(1, 0,\ 1, 0,\ \dots)$
3. $(1,\ 1,\ \dots)$
4. $(1, 2, 0,\ 1, 2, 0,\ \dots)$
5. $(1, 0,\ 1, 0,\ \dots)$
6. $(1, 4, 4,\ 1, 4, 4,\ \dots)$
7. $(1, 3, 2, 6, 4, 5,\ 1, 3, 2, 6,\ \dots)$
8. $(1, 2, 4, 0,\ 1, 2, 4, 0,\ \dots)$
9. $(1,\ 1,\ \dots)$

Usage d'un ruban pour la divisibilité

L'utilisation d'un ruban de Pascal pour tester la divisibilité passe par la transformation du nombre fourni en un autre plus petit ayant le même reste dans la division par d.

Commençons par un exemple, cherchons à savoir si 123 456 789 est divisible par 3.

Le ruban de Pascal de 3 est $(1, 1, 1, 1, 1 \dots)$, le nouveau nombre est donc :

$$1 \cdot 1\ +\ 1 \cdot 2\ +\ 1 \cdot 3\ +\ 1 \cdot 4\ +\ 1 \cdot 5\ +\ 1 \cdot 6\ +\ 1 \cdot 7\ +\ 1 \cdot 8\ +\ 1 \cdot 9 = 45$$

Et est-ce que 123 456 789 est divisible par 7 ?

Il faut commencer par aligner le dividende avec le ruban de 7 en commençant par la droite, pour cela on écrit 123 456 789 à l'envers :

9 8 7 6 5 4 3 2 1
1 3 2 6 4 5 1 3 2

Ensuite, on fait la somme des produits entre les chiffres et les éléments du ruban :

$$9 \cdot 1 \; + \; 8 \cdot 3 \; + \; 7 \cdot 2 \; + \; 6 \cdot 6 \; + \; 5 \cdot 4 \; + \; 4 \cdot 5 \; + \; 3 \cdot 1 \; + \; 2 \cdot 3 \; + \; 1 \cdot 2 = 134$$

Si on le souhaite, on peut alors recommencer :

4 3 1
1 3 2 6 4 5 1 3 2

Ce qui nous donne $4 \times 1 + 3 \times 3 + 1 \times 2 = 15$, essayons encore une fois :

5 1
1 3 2 6 4 5 1 3 2

$5 + 3 = 8$ n'est pas multiple de 7, 123 456 789 non plus, tout comme 134 ou 15.

Par ailleurs, tous ces nombres ont le même reste dans une division par 7 : ce reste est 1. Par commodité, on peut aussi écrire le ruban de droite à gauche, et dans ce cas garder l'ordre naturel des chiffres dans l'écriture de n.

Correction du critère de divisibilité

L'explication du fonctionnement des rubans de Pascal se fait naturellement à travers les congruences. On dit que a congru à b modulo c si, pour la division euclidienne par c, a et b ont même reste (ou encore si $a - b$ est multiple de c).

On le note $a \equiv b \quad [c]$

Par exemple : $8 \equiv 13 \equiv 3 \quad [5]$

Deux résultats sont importants concernant les congruences :

$$\begin{array}{lcl} a \equiv b \quad [m],\ c \equiv d \quad [m] & \Longleftrightarrow & a \times c \;\equiv\; b \times d \quad [m] \\ a \equiv b \quad [m],\ c \equiv d \quad [m] & \Longleftrightarrow & a + c \;\equiv\; b + d \quad [m] \end{array}$$

Le but est ici de montrer que la somme des produits (élément du ruban $\times$ chiffre) est congrue au nombre lui-même :

$$\begin{array}{rl} b^i \equiv r_i \quad [d] & \text{Par construction} \\ n_i \times b^i \equiv n_i \times r_i \quad [d] & \text{Par produit de congruences} \\ n = \sum_i n_i \times b^i \equiv \sum_i n_i \times r_i \quad [d] & \text{Par somme de congruences} \end{array}$$

Avec : n_i le chiffre dans l'écriture de n en base b et r_i l'élément du ruban de d en base b. La conséquence directe de la dernière ligne est que si d divise n alors d divise aussi $\sum_i n_i \times r_i$.

Quelques propriétés des rubans

- Le nombre de restes possibles dans la division par d est fini et égal à d (de 0 à $d - 1$). Il y aura donc nécessairement de la répétition dans le ruban de Pascal.
- Si un 0 apparaît dans le ruban, tous les éléments suivants seront des zéros car si b^p est un multiple de d, toutes les puissances suivantes, qui sont des multiples de b^p, seront aussi des multiples de d. Dans ce cas, à partir du rang p, le ruban est constant.

VI.3 Critère de divisibilité générique : La méthode d'élimination des unités

La méthode d'élimination des unités est un critère de divisibilité par d en base 10, cette méthode nous donne accès à énormément de critère de divisibilité pour un grand nombre de diviseur. Pour l'appliquer, il suffit de trouver un entier relatif m tel que $10m - 1$ soit un multiple de d (on scrute donc les nombres de la forme $+\ \overline{n_k\ \ldots\ n_2\ n_1\ 9}$ ou $-\ \overline{n_k\ \ldots\ n_2\ n_1\ 1}$).

Il suffit alors d'ajouter m fois le chiffre des unités au nombre de dizaines.

Par exemple pour $d = 7$, l'entier $m = -2$ convient car $10m - 1 = -21 = -3d$. Pour tester la divisibilité de 7 485, on calcule $748 + (-2) \times 5 = 738$ et l'on réitère en partant de 738. De proche en proche, 7 485 est un multiple de 7 si et seulement si le nombre final est un multiple de 7 (voir démonstration plus bas).

Exemples :

$3 \times 3 = 9 = \mathbf{1} \times 10 - 1$	On prendra $\overline{n_k\ \ldots\ n_2\ n_1} + n_0$ pour la divisibilité par 3 ou 9.
$-3 \times 7 = -\mathbf{2} \times 10 - 1$	On prendra $\overline{n_k\ \ldots\ n_2\ n_1} - \mathbf{2}n_0$ pour la divisibilité par 7 ou 3.
$-11 = -\mathbf{1} \times 10 - 1$	On prendra $\overline{n_k\ \ldots\ n_2\ n_1} - n_0$ pour la divisibilité par 11.
$13 \times 3 = \mathbf{4} \times 10 - 1$	On prendra $\overline{n_k\ \ldots\ n_2\ n_1} + \mathbf{4}n_0$ pour la divisibilité par 13 ou 3.
$-17 \times 3 = -\mathbf{5} \times 10 - 1$	On prendra $\overline{n_k\ \ldots\ n_2\ n_1} - \mathbf{5}n_0$ pour la divisibilité par 17 ou 3.
$29 = \mathbf{3} \times 10 - 1$	On prendra $\overline{n_k\ \ldots\ n_2\ n_1} + \mathbf{3}n_0$ pour la divisibilité par 29.
$-31 = -\mathbf{3} \times 10 - 1$	On prendra $\overline{n_k\ \ldots\ n_2\ n_1} - \mathbf{3}n_0$ pour la divisibilité par 31.
$-41 = -\mathbf{4} \times 10 - 1$	On prendra $\overline{n_k\ \ldots\ n_2\ n_1} - \mathbf{4}n_0$ pour la divisibilité par 41.

Démonstration

On choisi notre diviseur d pour qu'il ne soit pas divisible par 2 et 5, on dit qu'il est premier avec 10. Grâce à cette propriété, le théorème de Bachet-Bézout nous dit qu'il existe un entier m tel que $10m \equiv 1 \quad [d]$.

$$d \,\Big|\, n \iff n \equiv 0 \quad [d]$$

$$\begin{array}{r|l|l}
\overline{n_k \ldots n_1\ n_0} \equiv 0 \quad [d] & \overline{n_k \ldots n_1} \cdot 10 + n_0 \equiv 0 \quad [d] & m \times (\overline{n_k \ldots n_1} \cdot 10 + n_0) \equiv 0 \quad [d] \\
10m \cdot \overline{n_k \ldots n_1} + m \cdot n_0 \equiv 0 \quad [d] & \multicolumn{2}{l}{1 \cdot \overline{n_k \ldots n_1} + m \cdot n_0 \equiv 0 \quad [d] \quad \textit{car} \quad \textit{10m} \equiv \textit{1} \quad [d]}
\end{array}$$

$$d \,\Big|\, n \iff d \,\Big|\, \overline{n_k\ \ldots\ n_2\ n_1} + m \cdot n_0$$

Remarque

Si $10m - 1$ est multiple de d alors $10(m \pm d) - 1$ aussi. Par exemple, pour $d = 7$, on a choisi ci-dessus $m = -2$ (la solution la plus proche de 0) mais on pourrait tout aussi bien choisir, par exemple, $m = -2 + 7 = 5$ $(10m - 1 = 49)$.

VI.4 Propriétés des Logarithmes

Aujourd'hui, on définit mathématiquement le Logarithme de manière différente à ce qui a été présenté à la page 20. On définit dans un premier temps le Logarithme Népérien, notion que l'on étendra à toutes les autres bases.

Définition du Logarithme népérien

Pour $x > 0$, on pose $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$

$$\begin{array}{rccc} \ln : & \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln(x) \end{array} \quad \text{est la fonction logarithme népérien}$$

Autrement dit, ln est l'unique primitive de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$ qui s'annule en 1.

Par définition, on sait que :
- ln est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$
- $\ln(1) = 0$

Théorème : $\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$

Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$ fixé, et $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln(ax) - \ln(x) \end{array}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, et $f'(x) = \frac{a}{ax} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$

Donc f est constante : $\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f(x) &= f(1) \\ &= \ln(a) - \ln(1) \\ &= \ln(a) \end{aligned}$

$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(ax) - \ln(x) = \ln(a)$
En posant $x = b$, on obtient : $\forall a, b \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

Corolaires

- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln\left(x \times \frac{1}{x}\right) = \ln(1) = 0$
  C'est à dire : $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
- Par récurrence : $\forall n, a \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}^{+*}$, $\ln(a^n) = n\ln(a)$
- $\forall n, a \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}^{+*}$, $\ln(a^{-n}) = \ln\left(\frac{1}{a^n}\right) = -\ln(a^n) = -n\ln(a)$

Logarithme de base quelconque

Soit $a \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$, on définit la fonction logarithme dans la base a comme cela :

$$\begin{array}{rccc} \log_a : & \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{array}$$

Autres propriétés logarithmiques utiles

En posant $x + y = x\,y\left(\frac{x+y}{xy}\right) = x\left(1 + \frac{y}{x}\right)$, on obtient :

$$\log_a(x+y) \quad = \quad \log_a(x) + \log_a(y) - \log_a\left(\frac{xy}{x+y}\right) \quad = \quad \log_a(x) + \log_a\left(1 + \frac{y}{x}\right)$$

Propriété du Cologarithme

Le Cologarithme sert à simplifier les calculs, à l'aide de cette formule.

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x) \quad = \quad \mathrm{colog}_a(x)$$

En définissant le cologarithme de la manière suivante :

- On change le signe de la caractéristique et on soustrait 1 à cette nouvelle caractéristique.
- Si la caractéristique est négative, on change sa notation pour passer de $-x$ à $\overline{x}$.
- On retranche tous les chiffres de la mantisse à 9 et le dernier de droite à 10.

Démonstration de cette formule

Pour démontrer l'utilité des cologarithmes, il faut prouver que $\mathrm{colog}_a(x) = -\log_a(x)$.
Soit $n = \log_a(x) = \overline{n_0\ ,\ n_{-1}\ \ldots\ n_{-(k-1)}\ n_{-k}}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{colog}_a(x) &= \overline{(-n_0-1)\ ,\ n_{-1}\ \ldots\ n_{-(k-1)}\ n_{-k}} \\
&= \overline{(-n_0-1)\ ,\ (9-n_{-1})\ \ldots\ (9-n_{-(k-1)})\ (10-n_{-k})} \\
&= \overline{0\ ,\ 9\ \ldots\ 9\ (10)} - \overline{(-n_0-1)\ ,\ n_{-1}\ \ldots\ n_{-(k-1)}\ n_{-k}} \\
&= 1 - \overline{(-n_0-1)\ ,\ n_{-1}\ \ldots\ n_{-(k-1)}\ n_{-k}}
\end{aligned}$$

Ici nous avons un problème, si l'on continue le calcul sur les unités on obtient : $1-(-n_0-1) = 1+n_0+1 = n_0+2$, résultat qui ne corresponds pas au résultat que l'on souhaitait $(-n_0)$.

C'est pour cette raison que l'on va pas utiliser les cologarithmes de manière classique, on va faire la somme des mantisse de manière arithmétique (c'est à dire de manière *classique*, en tenant compte des signes négatifs) et la somme des caractéristiques de manière algébrique (on ne tiendra donc pas compte des soustractions).

Donc reprenons :

$$\begin{aligned}
&= 1 - \overline{(-n_0-1)\ ,\ n_{-1}\ \ldots\ n_{-(k-1)}\ n_{-k}} \\
&= [1+(-n_0-1)] - \overline{0\ ,\ n_{-1}\ \ldots\ n_{-(k-1)}\ n_{-k}} \\
&= -n_0 - \overline{0\ ,\ n_{-1}\ \ldots\ n_{-(k-1)}\ n_{-k}} \\
&= -\overline{n_0\ ,\ n_{-1}\ \ldots\ n_{-(k-1)}\ n_{-k}} \\
&= -n
\end{aligned}$$

$$\mathrm{colog}_a(x) = -\log_a(x)$$

En passant par cette astuce de différenciation des sommes des caractéristiques et des mantisses, on obtient bien le résultat souhaité. On peut donc utiliser les cologarithmes à condition de bien faire attention à sommer les caractéristiques et les mantisses de la bonne manière.