

Recueil de Mathématiques

◆ Section 3 - Trigonométrie ◆

Clément CAMPANA

Février 2024

Table des matières

I	PREMIER PAS EN TRIGONOMÉTRIE	1
I.1	Construction d'un triangle	1
I.2	Fonctions trigonométriques	2
i	<i>Relation entre les longueurs des côtés d'un triangle rectangle</i>	2
ii	<i>Définition des fonctions trigonométriques élémentaires</i>	2
iii	<i>Lien entre ces trois fonctions</i>	3
II	CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE	4
II.1	Unité d'angle reine en Trigonométrie : le radian	4
II.2	Cercle trigonométrique	4
II.3	Lien avec les fonctions trigonométriques	5
i	<i>Retrouver le sinus et le cosinus de θ</i>	5
ii	<i>Retrouver la tangente de θ</i>	5
II.4	Périodicité et mesure principale	6
III	PROPRIÉTÉ DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES	7
III.1	Valeurs remarquables	7
III.2	Étude de fonction	9
i	<i>Représentation graphique</i>	9
ii	<i>Propriétés de ces fonctions</i>	9
IV	FONCTIONS INVERSES ARCSIN / ARCCOS / ARCTAN	9
IV.1	Représentation graphique	9
IV.2	Propriétés de ces fonctions	9
V	FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES	9
VI	LECTURE DE LA TABLE	9
VII	ANNEXE	9

I Premier pas en Trigonométrie

La Trigonométrie est, comme son nom l'indique, une discipline mathématique qui a comme objectif de "mesurer" les triangles.

Plus clairement, son but est de pouvoir déduire l'ensemble des informations disponibles dans un triangle à partir du minimum d'information sur ce triangle. Comme vu dans la Section 2, un triangle est un polygone à 3 côtés, et la somme des 3 angles d'un triangle vaut 180° , π rad ou 200 gr.

En général, en Trigonométrie, on se focalise principalement sur les *triangles rectangles*, puis on généralise les théorèmes que nous avons démontré à tous les triangles.

I.1 Construction d'un triangle

Les triangles ont une particularité les différenciant des autres polygones :

En connaissant la longueur de 3 côtés d'un triangle, il est possible de parfaitement construire ce triangle.

Dans les autres polygones, cette condition n'est pas suffisante pour le construire ¹.

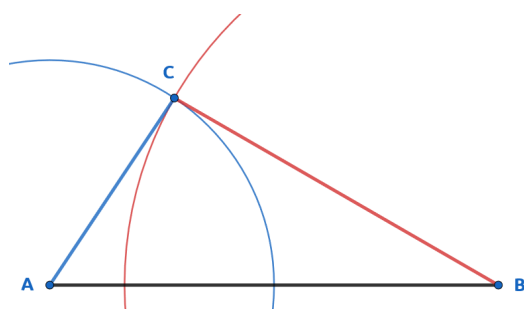
Pour tracer un triangle à l'aide de *trois longueurs*, il faut tracer un segment mesurant une des trois longueurs choisies, puis tracer deux cercle ayant comme centre les extrémités du segment et comme rayons les deux autres longueurs voulues pour le triangle. Les cercles se croisent en deux points, avec lesquelles on peut construire deux triangles symétriques.

Mais l'on peut aussi remplacer un des cercles ou les deux cercles par une ou des demi-droites, ayant un angle interne d'une valeur choisie. Cette demi-droite et le cercle ou ces deux demi-droites vont se croiser en un point, le troisième sommet du triangle.

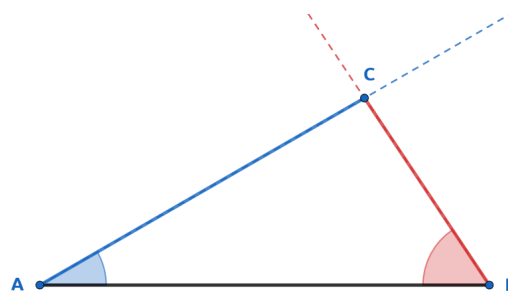
Voici un tableau récapitulatif des différentes possibilités de construction d'un triangle, en fonction du nombre d'informations connues sur celui-ci :

	Aucune longueur	1 longueur	2 longueurs	3 longueurs
Aucun angle	Inconstructible	Inconstructible	Inconstructible	Constructible
1 angle	Inconstructible	Inconstructible	Constructible	Constructible
2 ou 3 angles ²	Triangles semblables ³	Constructible	Constructible	Constructible

Nous pouvons en conclure qu'un triangle en particulier, est traçable à l'aide d'une longueur et de deux autres mesures (des angles ou des longueurs).



Triangle construit avec 3 longueurs



Triangle construit avec 1 longueur et 2 angles

Cette propriété unique aux triangles, nous sera très utile par la suite.

1. Par exemple, si l'on prend un quadrilatère donné, où l'on a fixé la longueur de 4 côtés, il est possible de "l'écraser" afin d'obtenir un autre quadrilatère ayant les mêmes longueurs de côtés. En revanche, les angles formés par les côtés de ce quadrilatère ne seront pas les mêmes que ceux du quadrilatère de départ.

Ainsi, à partir d'un losange, il est possible de créer un carré, en fonction des angles choisis entre les côtés.

Pour la même raison, les polygones ayant plus de côtés ne sont pas constructibles en connaissant uniquement les longueurs de leurs côtés.

2. En connaissant deux angles d'un triangle, il est possible de déduire le troisième, car la somme des trois angles d'un triangle correspond à un angle plat.

3. Avec deux ou trois angles, il n'est pas possible de construire un triangle en particulier, mais seulement une collection de triangles semblables entre-eux.

I.2 Fonctions trigonométriques

i Relation entre les longueurs des côtés d'un triangle rectangle

Prenons un triangle rectangle, dont (par définition) nous connaissons un des angles, son angle droit (qui vaut 90° , $\frac{\pi}{2}$ rad ou 100 gr).

Prenons un autre de ces angles, que nous appellerons α .

Nous connaissons ainsi deux angle, l'angle droit et l'angle α . Comme nous savons que la somme des trois angles du triangle vaut un angle plat, nous pouvons déduire la mesure du dernier angle. Notre troisième angle (que nous nommerons β) vaut en degré : $\beta = 180^\circ - (90^\circ + \alpha) = 90^\circ - \alpha$

Maintenant, nous avons obtenues les mesures des trois angles du triangle. Comme vu plus précédemment dans le tableau, avec uniquement 3 angles, il est possible de construire une collection de **triangles tous semblables entre-eux**.

Afin d'être plus clair, nommons les côtés de notre triangle a , b et c , en fonction de leur taille. Le côté a sera le plus court, le côté intermédiaire sera le b et le plus long sera le c .

Prenons deux de triangles de cette collection, le triangle 1 et le triangle 2. Leurs côtés mesures a_1 , b_1 , c_1 et a_2 , b_2 , c_2 . Comme ces triangles sont semblables, leurs côtés sont proportionnels entre-eux, ce qui signifie que $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

Cette propriété implique que, les rapports entre les côtés dans un triangle vont être égaux à ceux des mêmes côtés dans un autre triangle semblable au premier.

Mathématiquement, cela signifie que, pour les côtés a et b de deux triangles semblables, on a $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$.

Démontrons cette propriété : $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \iff a_1 \times b_2 = a_2 \times b_1 \iff \frac{a_1 \times b_2}{b_1} = a_2 \iff \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$

Les démonstrations des relations entre les autres côtés sont analogues.

Cela signifie que les **rapports entre les longueurs** des côtés dans triangle, ne dépend que des mesures des angles.

De plus, comme nous sommes dans un triangle rectangle, tous les angles du triangle sont soit fixé à l'avance (l'angle droit), ou ne dépendent que de la mesure de l'angle α .

Et enfin, nous pouvons en conclure que les rapports entre tous les côtés d'un triangle rectangle, ne dépendent que de la mesure de l'angle α .

ii Définition des fonctions trigonométriques élémentaires

Comme montré plus tôt, les rapports en chaque côté d'un triangle rectangle, ne dépendent que de l'angle α (défini comme étant un autre angle que l'angle droit).

En revanche, ce rapport entre longueurs n'est pas simplement constant, il varie de manière complexe en fonction de l'angle α .

Pour prendre en compte ces variations, et donc pouvoir obtenir une relation chiffrée, les mathématiciens ont construits un grand arsenal de fonctions trigonométriques².

Les fonctions trigonométriques les plus utiles sont :

- La fonction sinus, notée \sin .
- La fonction cosinus, notée \cos .
- La fonction tangente, notée \tan .

Dans ces relations, on utilise :

- L'angle α , définit précédemment.
- La cathète opposée à l'angle α (noté O et généralement appelée "côté opposé").
- La cathète adjacente à l'angle α (noté A et généralement appelée "côté adjacent").
- L'hypoténuse du triangle (noté H).

2. Une grande partie des fonctions trigonométriques créées sont rarement utiles, pour en savoir plus sur ces fonctions délaissées, rendez-vous en Annexe, à la page 9.

Voici les relations en questions, qui sont les définitions respectives de la fonction sinus, cosinus et tangente :

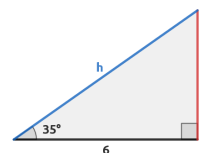
Fonction	Définition	Résumé
Sinus	$\sin(\alpha) = \frac{\text{Cathète Opposée}}{\text{Hypoténuse}}$	$\sin(\alpha) = \frac{O}{H} \Rightarrow S = O / H$ <i>SOH</i>
Cosinus	$\cos(\alpha) = \frac{\text{Cathète Adjacente}}{\text{Hypoténuse}}$	$\cos(\alpha) = \frac{A}{H} \Rightarrow C = A / H$ <i>CAH</i>
Tangente	$\tan(\alpha) = \frac{\text{Cathète Opposée}}{\text{Cathète Adjacente}}$	$\tan(\alpha) = \frac{O}{A} \Rightarrow T = O / A$ <i>TOA</i>

Un bon moyen mnémotechnique pour retenir ces définitions, est l'expression "*Casse-toi!*". On peut l'obtenir en utilisant les résumés des définitions à droite, réarrangeant les définitions, en mettant celle du cosinus en premier. Ainsi, on obtient "*CAH, SOH, TOA*".

A l'aide de ces relations, il est possible de connaître toutes les longueurs de tous les côtés d'un triangle rectangle à l'aide uniquement de la mesure d'un de ses angles et d'une longueur d'un des côtés.

Exemple :

$$\begin{array}{l|l|l|l}
 CAH & C = A / H & \cos(35^\circ) = \frac{6}{h} & h = \frac{6}{\cos(35^\circ)} \approx 7,32 \\
 TOA & T = O / A & \tan(35^\circ) = \frac{x}{6} & x = 6 \times \tan(35^\circ) \approx 4,20
 \end{array}$$



iii Lien entre ces trois fonctions

De plus, il est possible d'établir un lien entre ces trois fonctions :

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

Pour démontrer cette relation, on peut utiliser la définition de la tangente, puis remplacer les longueurs des côtés à l'aide des définitions des fonctions sinus et cosinus :

$$\begin{aligned}
 \text{Cathète Opposée} &= \sin(\alpha) \times \text{Hypoténuse} \\
 \text{Cathète Adjacente} &= \cos(\alpha) \times \text{Hypoténuse}
 \end{aligned}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Cathète Opposée}}{\text{Cathète Adjacente}} = \frac{\sin(\alpha) \times \text{Hypoténuse}}{\cos(\alpha) \times \text{Hypoténuse}} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

II Cercle trigonométrique

II.1 Unité d'angle reine en Trigonométrie : le radian

Comme présenté dans la Section 2, il existe plusieurs unités d'angle différentes.

L'unité la plus utilisée est le degré, mais cette dernière n'est pas la plus adaptée en mathématique, en particulier en Trigonométrie, où l'on préfère utiliser le radian.

Pour en savoir plus sur les définitions des unités d'angle, rendez-vous dans la Section 2, dans la partie consacrée aux Angles.

Rappel de la définition du radian

Pour un angle donné, la mesure en radians de cet angle est égale à la longueur de l'arc de cercle intercepté par cet angle, sur un cercle de rayon 1.

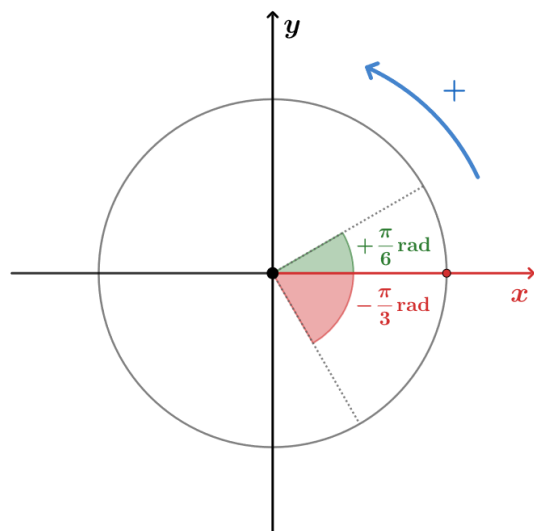
Ainsi, le radian est l'unité étant la plus cohérente mathématiquement, car elle est basée sur la longueur de l'arc de cercle formé. Cette cohérence a donné à cette unité un statut privilégié³ en mathématique, en particulier en Trigonométrie.

Cependant, le périmètre d'un cercle étant égal à 2π , on retrouve la constante π un peu partout dans les mesures d'angles usuels. Cette constante rend l'utilisation de cette constante peu intuitive, ce qui explique certainement pourquoi cette unité, mathématiquement meilleure que le degré, ne s'est pas imposée au plus grand nombre comme remplaçante de cette vieille unité.

Et c'est pour cette raison que, par défaut, c'est cette unité qui sera utilisée à partir de maintenant.

II.2 Cercle trigonométrique

Pour représenter des angles et bien comprendre leur lien avec les fonctions trigonométriques, on utilise généralement le cercle trigonométrique. Ce cercle est centré autour de l'origine du repère et à un rayon égal à 1 :



Les angles représentés sur ce cercle sont orientés, c'est-à-dire qu'ils démarrent à partir d'une ligne et qu'il se terminent sur une autre ligne.

Leur orientation est indiquée par la flèche en haut à droite du cercle, ce sens, inverse au sens dans lequel tournent les aiguilles d'une montre, est appelé sens trigonométrique⁴ (ou sens antihoraire). Comme ces angles sont orientés, ils peuvent être **positifs** ou **négatifs**. Ainsi l'angle vert est positif et le rouge est négatif.

Tous les angles représentables sur le cercle partent de l'axe des abscisses positives, représenté en rouge. Ainsi, les angles sont mesurés en partant de cette ligne de départ et en finissant sur un rayon du cercle.

Et donc, en tournant autour du cercle, on retrouve ainsi n'importe quelle angle possible.

3. Au premier abord, le statut privilégié du radian ne semble pas solidement justifiée. C'est à dire que, mis à part la *beauté mathématique* de la définition du radian par rapport au degré, pourquoi cette unité est-elle préférée à une autre ? Cette préférence provient de certaines propriétés mathématiques qui ne sont vraies que si l'unité d'angle est le radian. En particulier, lorsque l'on dérive ou intègre une fonction trigonométrique ou encore lorsque l'on utilise un développement limité de cette fonction trigonométrique.

Dans ces cas, l'angle peut se retrouver en facteur, position où seule la mesure en radians d'un angle a un sens.

4. Le sens trigonométrique est une convention, qui a été choisie car elle correspond au sens de rotation de la Terre autour de son axe de rotation, si l'on observe la Terre en se centrant sur le pôle Nord.

Ce choix a été fait car ce sens de rotation était étudié, en particulier en Europe, dans l'hémisphère Nord.

II.3 Lien avec les fonctions trigonométriques

Sur le cercle trigonométrique, il est possible de retrouver simplement le sinus et le cosinus d'un angle représenté sur le cercle. Appelons cet angle θ , O le centre du cercle, et M le point d'intersection du rayon terminant l'angle avec le cercle. Il est possible de construire un triangle rectangle OMX_M ayant pour hypoténuse le rayon du cercle.



i Retrouver le sinus et le cosinus de θ

Ainsi, à l'aide des définitions des fonctions sinus et cosinus, il est facile de calculer les longueurs des côtés de ce triangle :

$$\text{Cathète Adjacente} = \cos(\theta) \times \text{Hypoténuse} \implies \text{Longueur de } [OX_M] = \cos(\theta) \times 1$$

$$\text{Cathète Opposée} = \sin(\theta) \times \text{Hypoténuse} \implies \text{Longueur de } [MX_M] = \sin(\theta) \times 1$$

De plus, il est possible de tracer un second triangle rectangle OMY_M ayant pour hypoténuse le rayon du cercle. Les longueurs des côtés de ce nouveau triangle sont les mêmes que celles du triangle OMX_M .

Ainsi on peut en conclure que, les coordonnées cartésiennes du point M sont $(\cos(\theta), \sin(\theta))$. Réciproquement, pour chaque point du cercle, il est possible d'obtenir le sinus et le cosinus de l'angle correspondant, en projetant ce point sur l'axe des abscisses et sur celui des ordonnées.⁵

ii Retrouver la tangente de θ

De plus, on peut aussi retrouver graphiquement la tangente :

- Prenez la droite tangente (géométriquement) au cercle, étant perpendiculaire à l'axe des abscisses positives et passant par A .
- Prolongez le rayon terminant l'angle θ . Cette demi-droite coupe la tangente géométrique en un point I_M .
- La longueur de $[AI_M] = \tan(\theta)$.

Démonstration : Nous savons que $OA = 1$, que $OX_M = \cos(\theta)$ et que $X_MM = \sin(\theta)$. De plus, nous pouvons remarquer que les triangles OMX_M et OI_MA sont semblables, car ils sont équiangles.

Grâce à cette propriété, nous pouvons utiliser le théorème de THALÈS, nous indiquant que $\frac{OX_M}{OA} = \frac{X_MM}{AI_M}$. En réarrangeant cette équation, on obtient :

$$AI_M = \frac{X_MM \times OA}{OX_M} = \frac{\sin(\theta) \times 1}{\cos(\theta)} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

Et comme présenté précédemment (à la page n°3), il existe un lien entre les trois fonctions trigonométriques élémentaires, à l'aide de ce lien, on démontre enfin que :

$$AI_M = \tan(\theta)$$

5. J'ai trouvé un moyen mnémotechnique pour retenir quel axe est celui où l'on retrouve le sinus de l'angle.

L'abréviation de sinus c'est sin, ce qui correspond au début du mot "singe", les singes montent dans les arbres, par conséquent l'axe des sinus est l'axe verticale de notre repère.

II.4 Périodicité et mesure principale

En tournant autour du cercle trigonométrique, il est possible d'obtenir un angle mesurant n'importe quel réel.

Ainsi, sur n'importe quel point du cercle, peuvent être représenter plusieurs angles ayant des mesures différant d'un certain nombre de tours du cercle.

Comme un tour complet du cercle correspond à un angle de 2π radians, ainsi, pour un angle θ donné, les angles $\theta + 2\pi \times k$ (avec $k \in \mathbb{Z}$) tombent sur le même point du cercle.

Comme nous l'avons vu, la mesure d'un angle en radians est la longueur de l'arc de cercle intercepté par cet angle, ainsi les propriétés des fonctions trigonométriques seront nécessairement 2π -périodiques, c'est-à-dire qu'elles se répètent tous les 2π radians.

Par conséquent, nous allons nous intéresser uniquement à la mesure principale des angles représentés sur le cercle. La mesure principale d'un angle donné est la mesure d'un angle compris entre $-\pi$ rad et π rad, tombant sur le même point du cercle que l'angle initial.

De plus comme $-\pi$ rad et π rad sont les mêmes points du cercle, on dira que la mesure principale de $-\pi$ rad est π rad.

Ainsi, pour un angle θ donné, sa mesure principale est définie comme étant comprise dans l'intervalle $] -\pi, \pi]$.

III Propriété des fonctions trigonométriques

Les fonctions sinus, cosinus et tangente sont les trois fonctions trigonométriques les plus utilisées en mathématique. Ce sont les valeurs prises par ces fonctions qui sont représentées dans la table.

III.1 Valeurs remarquables

Voici un tableau regroupant les valeurs remarquables des fonctions sinus, cosinus et tangente :

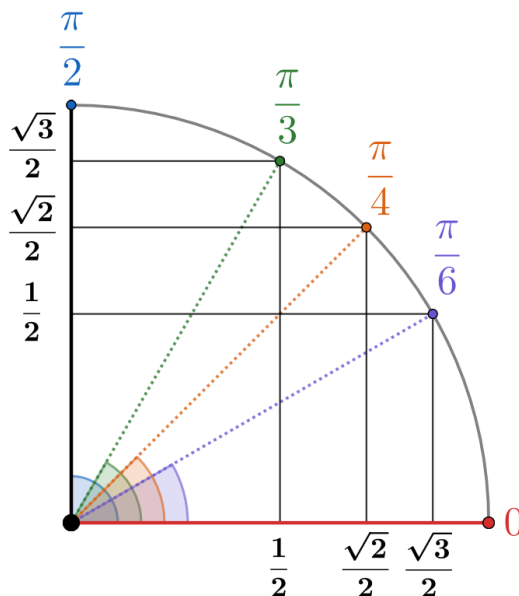
Angle θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan(\theta)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Angle θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan(\theta)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Comme ces fonctions sont 2π -périodiques, les valeurs remarquables de ces fonctions se répètent tous les 2π radians.

C'est pourquoi, dans ce tableau, les valeurs remarquables sont données pour les angles compris entre 0 et π radians.

Il est possible de retrouver facilement ces valeurs à l'aide du cercle trigonométrique, en se souvenant du schéma suivant :



Ce schéma représente une portion du cercle trigonométrique, dont les points ont une abscisse et une ordonnée positive. C'est la portion la plus utile du cercle trigonométrique.

Comment tracer ce schéma Pour tracer les 6 segments nous indiquant les valeurs de sinus et cosinus, des angles de $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{3}$, il faut tracer dans un premier les deux segments à l'abscisse et l'ordonnée égale à $\frac{1}{2}$.

Ces deux premiers segments croisent le cercle en deux points, le premier point est celui de l'angle $\frac{\pi}{6}$, et le second est celui de l'angle $\frac{\pi}{3}$. Maintenant que nous avons ces deux points, il est possible de tracer les deux segments à l'abscisse et l'ordonnée égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Pour obtenir les deux derniers segments, nous allons d'abord tracer le rayon passant par le point d'intersection des deux premiers segments. Ce rayon coupe le cercle en un point, qui est celui correspondant à l'angle $\frac{\pi}{4}$. Et enfin, nous pouvons à l'aide de ce point, tracer les deux derniers segments.

Angles ayant des valeurs de sinus et cosinus exactes Il existe d'autres angles ayant des valeurs de sinus et cosinus exactes, les valeurs d'angles dans le tableau ci-dessus sont les valeurs les plus utiles.

On peut remarquer que les angles opposés à ceux du tableau ont aussi des valeurs de sinus et cosinus exactes. Leur cosinus restera le même, mais leur sinus sera négatif.

D'autres angles ont des valeurs de sinus et cosinus exactes, certaines de ces valeurs sont présentées en Annexe, à la page 10.

III.2 Étude de fonction

i Représentation graphique

Graph (0,5p)

ii Propriétés de ces fonctions

Propriétés simples (parité, périodicité, etc.) (0,5p) => Démonstration en Annexe Propriétés plus complexes (1p) => Démonstration en Annexe (Lien vers formules trigonométriques) Variation, Dérivé (1p)

IV Fonctions inverses arcsin / arccos / arctan

Définition (0,5p)

IV.1 Représentation graphique

Graph (0,5p)

IV.2 Propriétés de ces fonctions

V Formules trigonométriques

normalesup.org/dconduche/prepas/PT/cours/ChapitreFicheTrigo.pdf

VI Lecture de la table

VII Annexe

Fonctions trigonométriques chelous

Fonctions trigonométriques chelous selon Github copilot :

- La fonction sinus, notée sin.
- La fonction cosinus, notée cos.
- La fonction tangente, notée tan.
- La fonction cotangente, notée cot.
- La fonction sécante, notée sec.
- La fonction cosécante, notée csc.
- La fonction exsecante, notée exsec.
- La fonction excosécante, notée excsc.
- La fonction versine, notée vers.
- La fonction coversine, notée covers.
- La fonction haversine, notée havers.
- La fonction hacoversine, notée hacovers.
- La fonction exverse, notée exvers.
- La fonction excovers, notée excovers.
- La fonction vercosine, notée vercos.
- La fonction coverscosine, notée coverscos.
- La fonction havercosine, notée havercos.
- La fonction hacoverscosine, notée hacoverscos.
- La fonction exvercosine, notée exvercos.
- La fonction excoverscosine, notée excoverscos.
- La fonction exsecant, notée exsec.
- La fonction excosecant, notée excsc.
- La fonction exsecant, notée exsec.

Valeurs de sinus et cosinus exactes