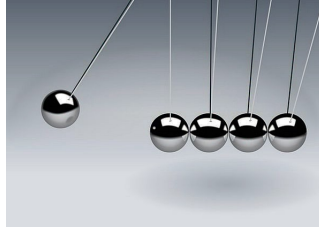


TP Méthodes Numériques : *Simulation d'impacts de billes*



Ce TP constitue une introduction à l'intégration en temps des équations différentielles à travers l'étude d'un modèle physique décrivant la réponse d'un alignement de billes à un impact. Il vous permettra de vous familiariser avec l'implémentation et l'utilisation de certains schémas (Euler explicite ou implicite) ainsi qu'avec la méthode de Cholesky pour la résolution de systèmes linéaires. Ce projet permettra également de vous exercer à l'utilisation de Scilab (en particulier à utiliser un solveur d'équations non linéaires et différents moyens de visualiser les résultats numériques).

Informations Pratiques

Les consignes ci-dessous sont à respecter lors de votre TP:

- **Travail en binôme.**
- Utiliser **Scilab** pour écrire vos programmes de calcul.
- Rédiger un **Compte-rendu**. Il n'y a qu'un seul rapport à rendre par binôme. Vous devez expliciter les méthodes employées, présenter et commenter avec soin les résultats obtenus. Le compte-rendu sera dactylographié. Nous conseillons d'utiliser le logiciel \LaTeX qui est beaucoup employé pour la rédaction d'articles scientifiques. Ce compte-rendu ne comportera pas de programmes. Les programmes Scilab seront fournis séparément; la lisibilité du code et la pertinence des commentaires seront pris en compte dans la note du TP.
- **Remise du rapport et des programmes.** Le TP est à rendre au plus tard le **02 Mai 2018**. Il faudra déposer sur **TEIDE** votre rapport sous la forme d'un fichier .pdf ainsi que vos programmes Scilab.
- **Séances de TP.** Nous répondrons à vos questions sur ce TP durant une séance organisée pour chaque groupe.
- **Contacts :**
 - guillaume.james@univ-grenoble-alpes.fr
 - arnaud.sengers@univ-grenoble-alpes.fr

1 Introduction

On considère un alignement de n billes sphériques en contact, soit dans une configuration où toutes les billes sont identiques, soit en alternant deux types de billes de masses différentes (dimensions ou matériaux différents) comme indiqué dans la figure 1. Nous allons étudier deux types d'équations d'évolution (non linéaire ou linéaire) modélisant la propagation d'impacts dans ces systèmes sous des hypothèses physiques différentes. L'étude numérique de ces modèles permettra d'observer comment le rapport entre les masses des billes, la présence de non-linéarités ou la fréquence d'un forçage influencent la propagation d'impulsions dans la chaîne.

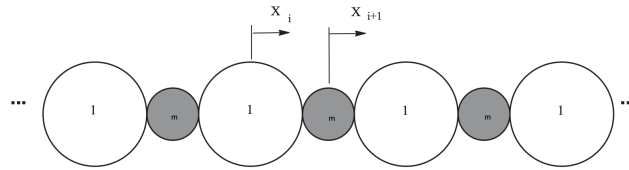


Figure 1: Système physique étudié dans le TP.

Les sections 2 et 3 décrivent les questions à traiter pour le TP :

- Dans la section 2, on résout une équation différentielle non linéaire modélisant la collision de deux billes identiques, en utilisant le schéma d'Euler explicite.
- La section 3 est dédiée à l'utilisation du schéma d'Euler implicite :
 - Dans la section 3.1, on généralise l'étude de la section 2 à un nombre arbitraire de billes pouvant comprendre deux types de billes différents. Lors de l'intégration en temps, un solveur d'équations non linéaires de Scilab est utilisé à chaque itération pour la résolution des équations implicites.
 - Dans la section 3.2, on résout une équation différentielle correspondant à une approximation linéaire des équations de la dynamique, en utilisant la méthode de Cholesky combinée au schéma implicite.

A la suite de la section 3, un appendice détaille l'interprétation physique des modèles. Sa lecture n'est pas indispensable pour la réalisation du TP mais elle permet de mieux comprendre les modèles et le sens physique des résultats.

2 Simulation de la collision de deux billes par le schéma d'Euler explicite

On modélise la collision de deux billes identiques par le système :

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -(x_1 - x_2)_+^{3/2}, \quad (1)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = (x_1 - x_2)_+^{3/2}, \quad (2)$$

où $x_i(t)$ est le déplacement de la i ème bille par rapport à une position de référence représentée dans la figure 1 (les billes sont tangentes lorsque $x_1 = x_2$) et $(a)_+ = \max(a, 0)$. On note $v_i = \frac{dx_i}{dt}$ les vitesses des billes.

Question 1. On définit l'énergie mécanique du système en fonction des déplacements et des vitesses des billes de la manière suivante :

$$H = \frac{v_1^2}{2} + \frac{v_2^2}{2} + \frac{2}{5} (x_1 - x_2)_+^{5/2}. \quad (3)$$

Montrer que pour toute solution de (1)-(2) on a $\frac{dH}{dt} = 0$.

Remarque 2.1. Dans le système réel, l'énergie mécanique décroît avec le temps. Ce phénomène pourrait être décrit par des modèles plus fins prenant en compte les forces de frottement et la dissipation d'énergie lors des déformations.

Question 2. Expliciter la fonction

$$F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \\ Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} F_1(Y) \\ F_2(Y) \\ F_3(Y) \\ F_4(Y) \end{pmatrix}$$

telle que le système (1)-(2) s'écrive comme une équation différentielle dans \mathbb{R}^4 :

$$\frac{dY}{dt} = F(Y) \quad (4)$$

avec

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}.$$

Ecrire une fonction Scilab *rhs* qui prend en argument un vecteur $Y \in \mathbb{R}^4$ et renvoie $F(Y)$.

Question 3. Ecrire une fonction Scilab *eulerexp* qui calcule par le schéma d'Euler explicite la solution de l'équation (4) pour une condition initiale $Y(0) = Y^{(0)}$, pour $t \in [0, T]$, avec un pas d'intégration $h = T/N$. Cette fonction prendra en argument le vecteur $Y^{(0)} \in \mathbb{R}^4$, le temps maximal d'intégration T , le nombre N de points de discrétisation en temps, et renverra une matrice de taille $4 \times (N+1)$ contenant la solution numérique :

$$\begin{bmatrix} Y^{(0)} & | & Y^{(1)} & | & \dots & | & Y^{(k)} & | & \dots & | & Y^{(N)} \end{bmatrix},$$

où $Y^{(k)}$ désigne l'approximation de $Y(kh)$ par le schéma. Ce calcul fera appel à la fonction *rhs* définie précédemment.

Question 4. Calculer la solution pour la condition initiale $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $v_1(0) = 1$, $v_2(0) = 0$, $t \in [0, 4]$ et différents pas de temps $h = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$. Dans chaque cas, tracer les graphes des déplacements $x_1(t)$, $x_2(t)$ (on pourra inclure les deux graphes dans une même figure) et faire de même pour les vitesses $v_i(t)$. Vérifier qu'au delà d'un certain temps, les vitesses prennent des valeurs constantes $v_{i,\text{finale}}$ avec $v_{2,\text{finale}} > v_1(0)$. Ce résultat vous semble-t-il physiquement réaliste ? Qu'observez-vous pour $v_{2,\text{finale}} - v_1(0)$ lorsque $h \rightarrow 0$?

3 Simulation de la collision de n billes par le schéma d'Euler implicite

3.1 Modèle non linéaire

On modélise la collision de n billes par le système :

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -(x_1 - x_2)_+^{3/2}, \quad (5)$$

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = (x_{i-1} - x_i)_+^{3/2} - (x_i - x_{i+1})_+^{3/2}, \quad 2 \leq i \leq n-1, \quad (6)$$

$$m_n \frac{d^2 x_n}{dt^2} = (x_{n-1} - x_n)_+^{3/2}, \quad (7)$$

où $x_i(t)$ est le déplacement de la i ème bille par rapport à un équilibre de référence représenté dans la figure 1, m_i sa masse et $(a)_+ = \max(a, 0)$. On fixe $m_{2p+1} = 1$ et $m_{2p} = m$, où $m \in]0, 1]$ désigne un paramètre, et on note $M \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice diagonale de coefficients m_1, \dots, m_n .

Question 5. On définit l'énergie mécanique du système en fonction des déplacements et des vitesses des billes de la manière suivante :

$$H = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 + \frac{2}{5} \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})_+^{5/2}. \quad (8)$$

Montrer que pour toute solution de (5)-(6)-(7) on a $\frac{dH}{dt} = 0$.

Remarque 3.1. Dans le système réel, l'énergie mécanique décroît avec le temps. Ce phénomène pourrait être décrit à partir de modèles plus réalistes que (5)-(6)-(7).

On approche (5)-(6)-(7) par le **schéma d'Euler implicite** avec un pas de discrétisation h . Par la suite, $x_i^{(k)}$ désigne l'approximation numérique de $x_i(kh)$ et on note $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})^T \in \mathbb{R}^n$. Le schéma s'écrit :

$$m_1 \frac{x_1^{(k+1)} - 2x_1^{(k)} + x_1^{(k-1)})}{h^2} = -(x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)})_+^{3/2}, \quad (9)$$

pour $2 \leq i \leq n-1$:

$$m_i \frac{x_i^{(k+1)} - 2x_i^{(k)} + x_i^{(k-1)})}{h^2} = (x_{i-1}^{(k+1)} - x_i^{(k+1)})_+^{3/2} - (x_i^{(k+1)} - x_{i+1}^{(k+1)})_+^{3/2}, \quad (10)$$

$$m_n \frac{x_n^{(k+1)} - 2x_n^{(k)} + x_n^{(k-1)})}{h^2} = (x_{n-1}^{(k+1)} - x_n^{(k+1)})_+^{3/2}. \quad (11)$$

On notera

$$v_i^{(k)} = \frac{x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}}{h}$$

l'approximation numérique de la vitesse $\frac{dx_i}{dt}(kh)$.

Question 6. Montrer que le schéma d'Euler implicite (9)-(10)-(11) s'écrit

$$M(x^{(k+1)} - 2x^{(k)} + x^{(k-1)}) - h^2 f(x^{(k+1)}) = 0, \quad (12)$$

pour une fonction

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

qu'on explicitera.

Question 7. Dans cette question, $x^{(k)}$ et $x^{(k-1)}$ désignent deux vecteurs quelconques de \mathbb{R}^n . Ecrire une fonction Scilab `feulerimp` qui prend en argument un vecteur $y \in \mathbb{R}^n$ et renvoie $M(y - 2x^{(k)} + x^{(k-1)}) - h^2 f(y)$ (il s'agit donc de la fonction à annuler lorsqu'on souhaite calculer $x^{(k+1)}$ à partir de $x^{(k)}$ et $x^{(k-1)}$ dans le schéma implicite).

Question 8. Ecrire un programme Scilab qui calcule la solution numérique $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}$ correspondant au schéma d'Euler implicite (12) à partir de valeurs données de $x^{(0)}$ et $x^{(-1)}$. Ce programme comprend une boucle dans laquelle on calcule $x^{(k+1)}$ à partir des valeurs de $x^{(k)}$ et $x^{(k-1)}$ calculées lors des itérations antérieures. A chaque itération, on pourra utiliser le solveur d'équations non linéaires `fsolve` pour ce calcul (voir l'aide de Scilab pour plus d'informations sur la fonction `fsolve`). Ceci s'effectue avec l'instruction $x^{(k+1)} = \text{fsolve}(x^{\text{app}}, \text{feulerimp})$, où x^{app} est une approximation de la solution recherchée qu'on doit fournir à `fsolve`, et `feulerimp` est la fonction dont on recherche un zéro. On pourra utiliser $x^{\text{app}} = x^{(k)}$ (le pas h étant petit, $x^{(k)}$ est proche de $x^{(k+1)}$).

On fixe maintenant $n = 21$ et on résout numériquement l'équation différentielle pour $t \in [0, T]$ avec $T = 60 = Nh$. Pour initialiser le schéma implicite, on fixe $x^{(0)} = 0$, $x_1^{(-1)} = -h$, $x_i^{(-1)} = 0$ pour tout $i = 2, \dots, n$. Ce choix correspond aux conditions initiales $x_i(0) = 0$ pour $1 \leq i \leq n$, $\frac{dx_1}{dt}(0) = 1$, $\frac{dx_i}{dt}(0) = 0$ pour $i = 2, \dots, n$.

Question 9. On considère l'approximation numérique de l'énergie mécanique du système en $t = kh$:

$$H^{(k)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (v_i^{(k)})^2 + \frac{2}{5} \sum_{i=1}^{n-1} (x_i^{(k)} - x_{i+1}^{(k)})_+^{5/2}. \quad (13)$$

Tracer le graphe de $H^{(k)}$ en fonction de $t = kh$ pour $m = 1$, $m = 0.5$ et différents pas de temps $h = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$. Vérifier que l'énergie décroît avec le temps. Que constatez-vous lorsque h diminue ?

Question 10. On fixe $h = 10^{-3}$. Lorsque $m = 1$, tracer en fonction du temps $t = kh$ les graphes des vitesses $v_i^{(k)}$ pour les billes $i = 1, 7, 11, 15, 19, 20, 21$ (représenter les différents graphes sur la même figure). A l'aide de la fonction `sgrayplot` (voir l'aide de Scilab), représenter en niveaux de gris les valeurs des forces de contact $(x_i^{(k)} - x_{i+1}^{(k)})_+^{3/2}$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et $0 \leq t = kh \leq T$ (si nécessaire, l'espace mémoire utilisable pour les calculs peut être augmenté avec la fonction `stacksize`). Commenter les résultats obtenus.

Question 11. Refaire l'étude de la question précédente pour $m = 0.5$. Comparer les résultats obtenus pour $m = 1$ et $m = 0.5$.

Question 12. On fixe $h = 10^{-2}$. Tracer en fonction de $m \in [0.1, 1]$ le graphe de la vitesse d'éjection $v_n^{(N)}$ de la dernière particule (de masse unité). Quelle valeur de m faut-il choisir pour que cette vitesse soit minimale ? (la chaîne de billes agit dans ce cas comme un absorbeur de chocs).

3.2 Modèle linéaire

On considère l'équation différentielle linéaire dans \mathbb{R}^n :

$$m_1 \frac{d^2 u_1}{dt^2} = u_2 - u_1 + f_1(t), \quad (14)$$

$$m_i \frac{d^2 u_i}{dt^2} = u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}, \quad 2 \leq i \leq n-1, \quad (15)$$

$$m_n \frac{d^2 u_n}{dt^2} = u_{n-1} - 2u_n, \quad (16)$$

avec $m_{2p+1} = 1$ et $m_{2p} = m$, où $m \in]0, 1]$ désigne un paramètre. Les solutions $u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$ représentent (dans une approximation linéaire) les déplacements des billes dans une chaîne fortement comprimée (cf. appendice). La première bille est soumise à une force extérieure $f_1(t)$ dont la valeur sera précisée plus loin.

On approche (14)-(15)-(16) par le schéma d'Euler implicite avec un pas de discrétisation h , pour $t \in [0, T]$ avec $T = Nh$. On note $u_i^{(k)}$ l'approximation numérique de $u_i(kh)$, $v_i^{(k)} = \frac{u_i^{(k)} - u_i^{(k-1)}}{h}$ celle de la vitesse $\frac{du_i}{dt}(kh)$, et $u^{(k)} = (u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \dots, u_n^{(k)})^T \in \mathbb{R}^n$. Le schéma s'écrit :

$$m_1 \frac{u_1^{(k+1)} - 2u_1^{(k)} + u_1^{(k-1)}}{h^2} = u_2^{(k+1)} - u_1^{(k+1)} + f_1((k+1)h), \quad (17)$$

pour $2 \leq i \leq n-1$:

$$m_i \frac{u_i^{(k+1)} - 2u_i^{(k)} + u_i^{(k-1)}}{h^2} = u_{i+1}^{(k+1)} - 2u_i^{(k+1)} + u_{i-1}^{(k+1)}, \quad (18)$$

$$m_n \frac{u_n^{(k+1)} - 2u_n^{(k)} + u_n^{(k-1)}}{h^2} = u_{n-1}^{(k+1)} - 2u_n^{(k+1)}. \quad (19)$$

On note $M \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice diagonale de coefficients m_1, \dots, m_n .

Question 13. Montrer que le schéma (17)-(18)-(19) s'écrit

$$A u^{(k+1)} = b^{(k)}, \quad (20)$$

où $A = M + h^2 D$, $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique, tridiagonale qu'on explicitera, et $b^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur à préciser.

Question 14. Montrer que la matrice A est symétrique définie positive.

On se propose de résoudre les systèmes linéaires (20) par la méthode de Cholesky. On rappelle le résultat :

Théorème 3.1 (Cholesky). *Soit A une matrice symétrique définie positive. Alors il existe une unique matrice triangulaire inférieure L telle que $A = L L^T$ et $L_{ii} > 0$ pour tout i .*

Comme la matrice A de (20) est tridiagonale, seuls les coefficients diagonaux et sous-diagonaux de L sont non nuls. Ainsi, pour gagner en efficacité, on stockera la matrice L dans deux vecteurs (un de taille n pour les coefficients diagonaux et un de taille $n - 1$ pour les coefficients sous-diagonaux).

Question 15. *Ecrire une fonction `factorise` qui prend en argument la diagonale et la sous-diagonale d'une matrice A symétrique définie positive et tridiagonale et qui renvoie deux vecteurs `linf` et `ldiag` contenant la sous-diagonale et la diagonale de la matrice L .*

Une fois cette factorisation obtenue, la résolution d'un système $A u = b$ se décompose comme suit :

$$L L^T u = b \Leftrightarrow \begin{cases} L y = b \\ L^T u = y. \end{cases} \quad (21)$$

Question 16. *Ecrire une fonction `descente` qui calcule la solution y du système $L y = b$. Cette fonction prendra pour arguments les coefficients non nuls de L (`linf`, `ldiag`) et le vecteur b .*

Question 17. *Ecrire une fonction `remonte` qui calcule la solution u du système $L^T u = y$. Cette fonction prendra pour arguments les coefficients non nuls de L (`linf`, `ldiag`) et le vecteur y .*

Pensez à tester les fonctions `factorise`, `descente`, `remonte` sur un système linéaire de votre choix dont la solution est connue.

Question 18. *Ecrire un programme Scilab qui calcule la solution numérique $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(N)}$ correspondant au schéma d'Euler implicite (20) à partir de valeurs données de $u^{(0)}$ et $u^{(-1)}$. Ce programme débute par la factorisation de Cholesky de A avec la fonction `factorise`. Ensuite, on réalise une boucle dans laquelle $u^{(k+1)}$ est déterminé à partir des valeurs de $u^{(k)}$ et $u^{(k-1)}$ calculées lors des itérations antérieures. Pour cela on fait appel aux fonctions `descente` et `remonte`.*

Dans les calculs qui suivent, le système est initialement au repos, i.e. $u(0) = 0$, $\frac{du}{dt}(0) = 0$. Le schéma implicite est donc initialisé par $u^{(0)} = u^{(-1)} = 0$.

Question 19. *On fixe $m = 1$ et $n = 63$. La force extérieure $f_1(t)$ appliquée à la première bille est $f_1(t) = t$ pour tout $t \in [0, 1/2]$, $f_1(t) = 1 - t$ pour $t \in [1/2, 1]$ et $f_1(t) = 0$ en dehors de l'intervalle $[0, 1]$. On résout numériquement l'équation différentielle pour $t \in [0, T]$ avec $T = 135$ et $h = 10^{-3}$. Tracer en fonction du temps $t = k h$ les graphes des vitesses $v_i^{(k)}$ pour les billes $i = 1, 8, 32, 48, 63$. Tracer le graphe donnant les vitesses $v_i^{(k)}$ en fonction de i au temps $t = k h = T/4$. A l'aide de la fonction `sgrayplot`, représenter les valeurs des énergies cinétiques $\frac{1}{2} m_i (v_i^{(k)})^2$ pour $1 \leq i \leq n$ et $0 \leq t = k h \leq T$ (pour économiser de l'espace mémoire, on pourra restreindre l'affichage aux temps $t = k p h$, pour un entier fixé $p > 1$ bien choisi et $k \geq 0$). Commenter les résultats. Comparer les caractéristiques de la solution du système linéaire avec celles de la solution calculée dans la question 10 pour le système non linéaire.*

Question 20. On fixe $m = 0.6$ et $n = 31$. La première bille est soumise à une force extérieure $f_1(t) = a(t) \sin(\omega t)$ avec $a(t) = \tanh(t)$ pour tout $t \geq 0$ (\tanh désigne la fonction tangente hyperbolique). Le paramètre ω règle la fréquence du forçage. On résout numériquement l'équation différentielle pour $t \in [0, T]$ avec $T = 95$ et $h = 5 \cdot 10^{-3}$. Tracer en fonction de $\omega \in [1.2, 2.4]$ le graphe de $e(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \|v_n^{(\cdot)}\|_\infty / \|v_1^{(\cdot)}\|_\infty$, i.e. le rapport des vitesses maximales de la dernière bille et de la première. Qu'observe-t-on ?

Appendice :

Compléments concernant les modèles physiques

Cette section fournit des informations sur la façon dont les modèles non linéaire (équations (5)-(6)-(7)) et linéaire (équations (14)-(15)-(16)) sont obtenus et sur leur interprétation. Pour plus de détails on pourra par exemple consulter la monographie : *N.-S. Nguyen et B. Brogliato, Multiple impacts in dissipative granular chains, Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics 72, Springer, 2014.*

Considérons le système représenté dans la figure 1. Lorsqu'on néglige les oscillations internes des billes, les différentes sources de dissipation d'énergie, et sous une hypothèse de petites déformations, les forces d'interaction entre billes sont décrites par la théorie du contact de Hertz. A partir de la relation fondamentale de la dynamique, on obtient alors une équation différentielle pour les positions des billes que nous allons expliciter. On désigne par m_1, m_2, \dots, m_n les masses des billes, qui vérifient $m_i = m_{i+2}$ pour le type de chaîne considérée ici. On considère un état d'équilibre du système dans lequel les billes sont tangentes et non comprimées, et on note $x_i(t)$ ($1 \leq i \leq n$) le déplacement du centre de la i ème bille par rapport à sa position d'équilibre (voir figure 1). La force de contact exercée par la bille $i+1$ sur la bille i est alors $-k(x_i - x_{i+1})_+^{3/2}$, où on note $(a)_+ = \max(a, 0)$ et la raideur k dépend des coefficients élastiques des billes et de leurs rayons. L'exposant $3/2$ a une origine géométrique (le rayon de la surface de contact varie comme la racine carrée de la compression des billes) et la partie positive $(\cdot)_+$ provient de l'absence de force lorsque les billes ne sont pas en contact. On peut noter que les déformations des billes (et donc $x_i - x_{i+1}$) sont typiquement très petites (de l'ordre de quelques microns), mais ce n'est pas le cas des forces de contact entre billes car les constantes de raideur k sont très grandes. A cause de la relation non linéaire entre déformations des billes et contraintes, les équations de la dynamique sont non linéaires et s'écrivent :

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2)_+^{3/2}, \quad (22)$$

$$m_i \ddot{x}_i = k(x_{i-1} - x_i)_+^{3/2} - k(x_i - x_{i+1})_+^{3/2}, \quad 2 \leq i \leq n-1, \quad (23)$$

$$m_n \ddot{x}_n = k(x_{n-1} - x_n)_+^{3/2}, \quad (24)$$

où l'on note $\ddot{x}_i = \frac{d^2 x_i}{dt^2}$. Les équations pour les billes 1 et n correspondent aux conditions aux limites dites *libres* (absence de forces agissant à gauche de la première bille et à droite de la dernière). En effectuant un choix d'échelles appropriées, on peut se ramener à des quantités sans dimension, ce qui conduit au modèle (5)-(6)-(7) où $k = 1$, $m_{2p+1} = 1$, $m_{2p} = m \in]0, 1]$ (les billes d'indice i impair étant les plus lourdes dans cette étude).

La donnée des n positions initiales $x_i(0)$ et n vitesses initiales $\dot{x}_i(0)$ ($\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$) détermine une solution unique du système (22)-(23)-(24), mais celle-ci ne peut être calculée explicitement, et on ne sait démontrer que peu de choses “à la main” sur le comportement qualitatif des solutions. Il est donc nécessaire d’étudier la dynamique du système numériquement. Pour cela, on considère dans la plus grande partie du TP le schéma d’Euler implicite. Par rapport au schéma d’Euler explicite, le schéma implicite a l’avantage de faire décroître l’énergie mécanique du système (plus ou moins vite suivant la valeur du pas de discrétisation). Cet effet du schéma n’est pas physiquement irréaliste, et on peut même montrer que cette décroissance se rapproche mathématiquement de la dissipation visco-élastique lors du contact entre billes. Par ailleurs, l’introduction de schémas d’ordre plus élevé n’est pas tout à fait évidente, car la régularité des solutions de (22)-(23)-(24) est généralement limitée (la fonction $r \mapsto r^{3/2}$ n’étant pas C^2 en $r = 0$, on a $x_i \in C^3$ et $\dot{x}_i \in C^2$).

Dans la section 3.1 du TP, on calcule la solution pour une condition initiale correspondant à un impact de la première bille sur la chaîne, i.e. $\dot{x}_1(0) = v > 0$ (un choix d’échelles approprié permet de se ramener à $v = 1$), $\dot{x}_i(0) = 0$ pour $i = 2, \dots, n$, et $x_i(0) = 0$ pour $i = 1, \dots, n$. On considère un nombre impair n de billes et on souhaite étudier suivant la valeur du rapport de masses m si une proportion plus ou moins importante de l’énergie cinétique initialement possédée par la première bille peut être transmise à la dernière bille après l’impact.

Une variante intéressante du système physique décrit précédemment s’obtient en présence d’une précompression de la chaîne, qui conduit à un nouvel état d’équilibre $x_i = -\delta i$, où $\delta > 0$ dépend de la force de compression appliquée aux deux bouts de la chaîne. Pour étudier les fluctuations des billes autour de cet équilibre, il est pratique de poser $x_i(t) = -\delta i + u_i(t)$. Lorsque les billes restent toujours en contact, i.e. $u_i - u_{i-1} < \delta$, on obtient le système

$$m_i \ddot{u}_i = k(\delta + u_{i-1} - u_i)^{3/2} - k(\delta + u_i - u_{i+1})^{3/2}. \quad (25)$$

Lorsque la compression des billes fluctue très peu, i.e. lorsque $|u_i - u_{i-1}| \ll \delta$, on introduit une approximation linéaire du modèle :

$$m_i \ddot{u}_i = \tilde{k}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}), \quad (26)$$

où $\tilde{k} = \frac{3}{2}k\delta^{1/2}$. Ce modèle, qui s’interprète plus généralement comme une chaîne de masses reliées par des ressorts linéaires, apparaît dans de nombreux contextes en physique. Le caractère linéaire du modèle permet de le simuler à moindre coût (par rapport au modèle (25)), car chaque itération du schéma d’Euler implicite nécessite la résolution d’un système linéaire tridiagonal dont la matrice reste inchangée (à l’opposé, (25) requiert la résolution d’un système d’équations non linéaires à chaque itération). Cependant l’applicabilité de (26) est limitée aux faibles oscillations des billes et à des intervalles de temps transitoires.

Pour l’étude du modèle linéarisé (26) dans la section 3.2 du TP, on suppose le système initialement au repos ($u_i(0) = \dot{u}_i(0) = 0$ pour $i = 1, \dots, n$), on considère des conditions aux limites fixes en fin de chaîne (i.e. il existe une $(n+1)$ ème bille maintenue fixe) et forcées par $f_1(t)$ en début de chaîne. Cela correspond aux équations suivantes en $i = 1$ et $i = n$:

$$m_1 \ddot{u}_1 = \tilde{k}(u_2 - u_1) + f_1(t), \quad (27)$$

$$m_n \ddot{u}_n = \tilde{k}(u_{n-1} - u_n) - \tilde{k}u_n. \quad (28)$$

L'équation (26) s'applique aux billes d'indice $i = 2, \dots, n - 1$. En effectuant un choix d'échelles appropriées, on peut se ramener à des quantités sans dimension, fixer $\tilde{k} = 1$, $m_{2p+1} = 1$, $m_{2p} = m \in]0, 1]$ et renormaliser la force $f_1(t)$. Cela conduit au système (14)-(15)-(16).

Dans le TP, on étudie si une proportion plus ou moins importante de l'énergie cinétique transmise à la première bille lors de l'application de la force $f_1(t)$ peut être transmise à la dernière bille, en fonction de la fréquence du forçage. Par ailleurs, une comparaison des profils d'ondes obtenus dans les simulations des modèles (5)-(6)-(7) et (14)-(15)-(16) (cette fois pour un forçage de type impulsif) permet d'évaluer l'effet d'une précompression de la chaîne sur la propagation des chocs.