УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Вычислительная математика

Лабораторная работа №1

Решение систем линейных алгебраических уравнений

Преподаватель: Перл Ольга Вячеславовна
Выполнил: Ле Чонг Дат
Группа: P3231

2021 г.

1 Задание

Вариант: Метод Гаусса

- Размерность n $\leq$ 20 (задается из файла или с клавиатуры - по выбору конечного пользователя)
- Должно быть предусмотрено чтение исходных данных как из файла, так и ввод с клавиатуры.
- Должна быть реализована возможность ввода коэффициентов матрицы как с клавиатуры, так и из файла. Также предусмотреть случайные коэффициенты.
- Обязательно: Тестовые данные на матрице большого размера (5*5 / 6*6...) + в отчёт с решением.
- Для точных методов(Гаусс и главные элементы) должно быть реализовано:
  - Вычисление определителя
  - Вывод треугольной матрицы (включая преобразованный столбец B)
  - Столбец неизвестных
  - Столбец невязок

2 Описание метода

2.1 Problem

Дана система n линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с m неизвестными. Вам предлагается решить систему: определить, нет ли у нее решения, ровно одно решение или бесконечное количество решений. И если есть хоть одно решение, найдите любое из них.

Формально задача формулируется так: решить систему:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2m}x_m = b_2 \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nm}x_m = b_n \end{gathered}$$

где коэффициенты a_{ij} (для i от 1 до n, для j от 1 до m) и b_i (i от 1 до n) известны и переменные x_i (i от 1 до m) неизвестны.

Эта задача также имеет простое матричное представление:

$$Ax = B$$

где A - это матрица размера $n*m$ коэффициентов a_{ij}, а B - вектор-столбец размера n.

2.2 Метод Гаусса

Алгоритм представляет собой последовательное исключение переменных в каждом уравнении, пока в каждом уравнении не останется только одна оставшаяся переменная.

Исключение Гаусса основано на двух простых преобразованиях:

- Можно поменять местами два уравнения
- Любое уравнение можно заменить линейной комбинацией этой строки (с ненулевым коэффициентом) и некоторых других строк (с произвольными коэффициентами).

На первом этапе алгоритм Гаусса-Жордана делит первую строку на a_{11}. Затем алгоритм добавляет первую строку к оставшимся строкам, так что все коэффициенты в первом столбце становятся нулями. Для этого в i-th строку мы должны добавить первую строку, умноженную на $-a_{11}$. Обратите внимание, что эта операция также должна выполняться с вектором B. В некотором смысле он ведет себя так, как если бы вектор B был m+1-th столбцом матрицы A.

В результате после первого шага первый столбец матрицы A будет состоять из 1 в первой строке и 0 в остальных строках.

Аналогично выполняем второй шаг алгоритма, где рассматриваем второй столбец второй строки. Сначала строка делится на a_{22} , затем он вычитается из других строк, так что весь второй столбец становится 0 (кроме второй строки).

Продолжим этот процесс для всех столбцов матрицы A. Если $n = m$, то A станет единичной матрицей.

2.3 Поиск поворотного элемента

В описанной схеме не учтены многие детали. На i-м шаге, если a_{ii} равно нулю, мы не можем напрямую применить описанный метод. Вместо этого мы должны сначала выбрать поворотную строку: найти одну строку матрицы, в которой i-й столбец не равен нулю, а затем поменять местами две строки.

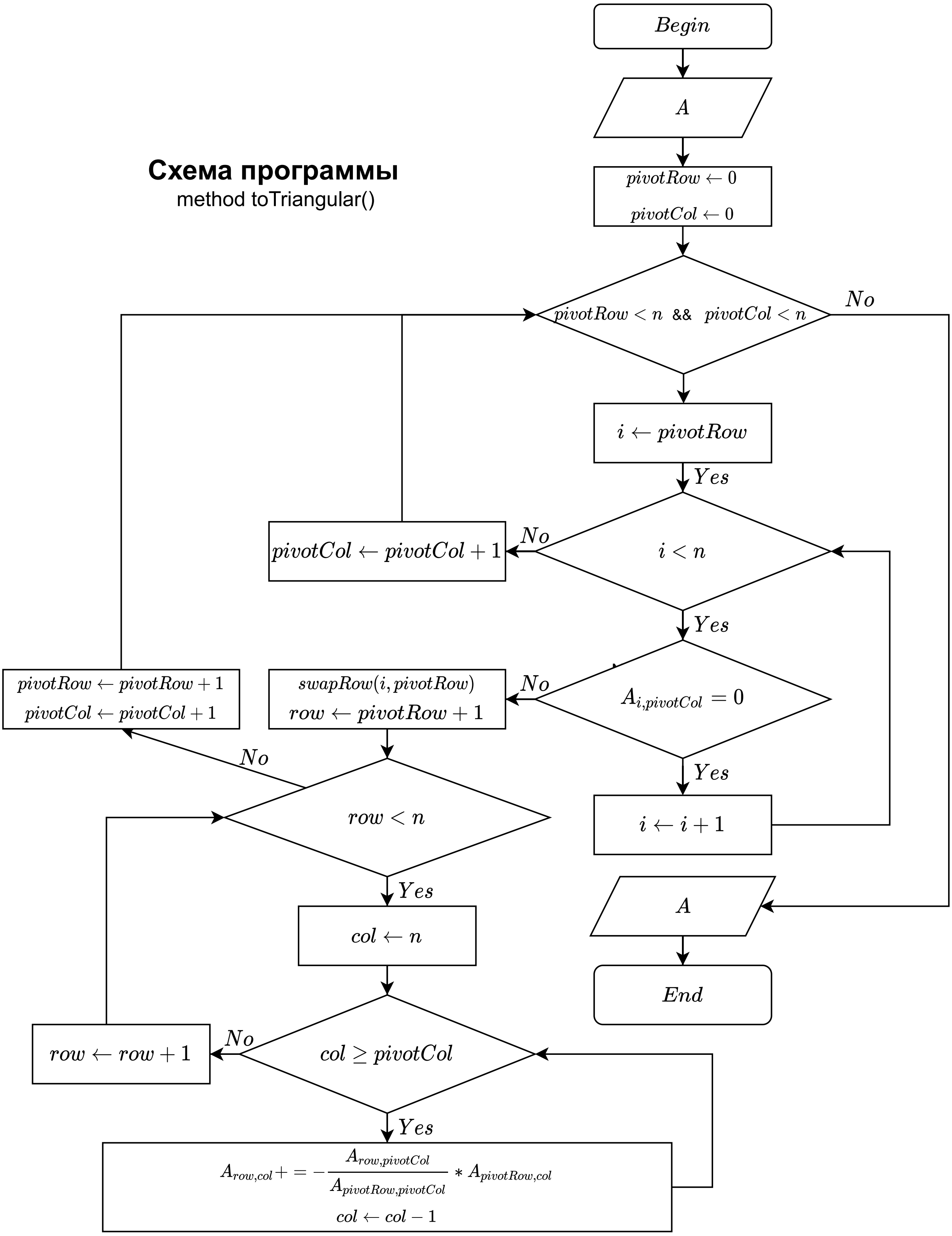
2.4 Complexity

Теперь мы должны оценить сложность этого алгоритма. Алгоритм состоит из m фаз, в каждой фазе:

Найти и перетасовать поворотную строку. Это требует $O(n + m)$ при использовании эвристики, упомянутой выше. Если ключевой элемент в текущем столбце найден - тогда мы должны добавить это уравнение ко всем остальным уравнениям, что требует времени $O(nm)$. Таким образом, окончательная сложность алгоритма составляет $O(min(n, m).nm)$. В случае $n = m$ сложность будет просто $O(n^3)$.

3 Flowchart

Схема программы
method toTriangular()



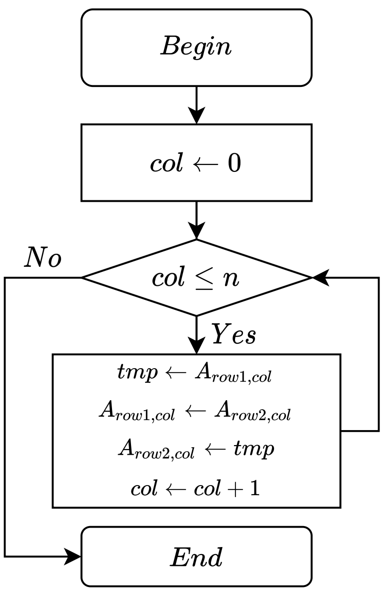


Схема подпрограммы
method swapRow(row1, row2)

4 Примеры

4.1 5x5 Matrix + Read from file

```
> Welcome to the gauss world!
> Usage: [options]
> Options:
> -h            Print app command line options
> -o            Read matrix from file
> -r            Auto generate random matrix
> Please enter your file's name: test04.txt
> Original matrix:
>          1          2          3          4          5        111
>          3         -1          2         -3          7         50
>          4          2         -7          8          2         62
>          3          1          0          2          6         83
>          1          1          1          1          1         32
> A triangular form of the matrix is:
>      1.000      2.000      3.000      4.000      5.000    111.000
>      0.000     -7.000     -7.000    -15.000     -8.000   -283.000
>      0.000      0.000    -13.000      4.857    -11.143   -139.429
>      0.000      0.000      0.000     -0.780      0.143     -4.956
>      0.000      0.000      0.000      0.000     -2.225    -20.028
> A determinant of the matrix is: -158.000
> A solution of the linear system is: [2.000, 7.000, 6.000, 8.000, 9.000]
> A residual of the linear system is: [0.000, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000]
```

4.2 7 * 7 Matrix + Read from file

```
> Welcome to the gauss world!
> Usage: [options]
> Options:
> -h            Print app command line options
> -o            Read matrix from file
> -r            Auto generate random matrix
> Please enter your file's name: test05.txt
> Original matrix:
>         21        219          2          2          1          0         30         20
>       -100        220        330          4          2          9         20        200
>         39         29         17         38         29         30       -100          1
>         29         38         48         20         28         99       1000          2
>        282       -159         29         18         28        292         19         80
>         29         10         19         27        873          2        188       1000
>         19         56         78         79         93         45         51       -100
> A triangular form of the matrix is:
>     21.000    219.000      2.000      2.000      1.000      0.000     30.000     20.000
>      0.000   1262.857    339.524     13.524      6.762      9.000    162.857    295.238
>      0.000      0.000    114.836     38.331     29.165     32.692   -107.005     52.161
>      0.000      0.000      0.000    -18.760     -1.510     67.767   1101.070    -16.640
>      0.000      0.000      0.000      0.000   -160.548   -843.325 -14146.233    382.393
>      0.000      0.000      0.000      0.000      0.000  -4500.348 -74825.147   3024.657
>      0.000      0.000      0.000      0.000      0.000      0.000   -177.168   -134.884
> A determinant of the matrix is: -7313351956627139.012
> A solution of the linear system is: [12.843, -1.275, 5.692, -2.627, 0.558, -13.325, 0.761]
> A residual of the linear system is: [0.004, 0.556, 0.013, 0.002, 0.039, 0.542, 0.059]
```

4.3 10 * 10 random matrix

```
Please enter the size of random matrix: 10
> Original matrix:
>    129.794    461.212    738.007    685.414    878.670    785.668    671.337    468.362    606.790    185.600    255.335
>    311.872    220.446    184.594     44.047    696.422    796.121    609.273    729.212    270.161     11.880    694.378
>    116.699    492.287    698.496    255.576    605.801    393.434    199.652     78.596    163.978    690.023     63.605
>    639.091    700.749    658.508    827.934    889.713    561.852    500.600    304.505    129.201    588.391    412.059
>    823.546    902.858    815.593    205.269    353.735    474.597    421.920    129.822    279.460    657.829    981.666
>    485.478    886.912    695.772    422.811    728.351    287.440    441.330    346.762     33.853    589.603    302.522
>    527.779    698.858    620.593    291.495    477.241    340.781    393.255     43.496    931.540    582.665    816.621
>    856.721      2.293    801.114    855.961    644.816    513.676    557.804    462.542    190.833    744.074    535.546
>    113.841    244.804    387.875    156.290    731.684    816.632     58.114    571.168     78.824    481.849     61.819
>    381.606    473.696    639.837    497.267    275.758    808.611    442.439    946.022    745.921    408.407    545.464
> A triangular form of the matrix is:
>    129.794    461.212    738.007    685.414    878.670    785.668    671.337    468.362    606.790    185.600    255.335
>      0.000   -887.765  -1588.706  -1602.881  -1414.866  -1091.700  -1003.831   -396.179  -1187.848   -434.084     80.853
>      0.000      0.000   -103.935   -500.807   -307.905   -408.402   -491.707   -377.146   -485.432    485.201   -158.901
>      0.000      0.000      0.000   1084.956   -444.325   -725.935   -247.098   -700.819     14.816   -329.753   -735.348
>      0.000      0.000      0.000      0.000   -983.799   -591.515   -228.475   -598.328    275.590   -466.943     23.741
>      0.000      0.000      0.000      0.000      0.000   1212.564   1722.426   1574.725   1860.726  -2315.212   1584.703
>      0.000      0.000      0.000      0.000      0.000      0.000     60.078   -129.008    813.308     28.714    318.553
>      0.000      0.000      0.000      0.000      0.000      0.000      0.000   5332.170 -20482.661  -2716.172  -7828.356
>      0.000      0.000      0.000      0.000      0.000      0.000      0.000      0.000   2312.674     64.630    670.447
>      0.000      0.000      0.000      0.000      0.000      0.000      0.000      0.000      0.000    725.092    101.583
> A determinant of the matrix is: -832662113214670891104687 3254.365
> A solution of the linear system is: [0.851, 0.112, -0.365, -0.457, -0.294, 0.494, 0.724, -0.298, 0.286, 0.140]
> A residual of the linear system is: [0.038, 0.426, 0.032, 0.440, 0.379, 0.110, 0.015, 1.064, 0.026, 0.070]
```

5 Вывод

Во многих реализациях, когда $a_{ii} \neq 0$, вы можете видеть, что люди по-прежнему меняют местами i-ю строку какой-нибудь поворотной строкой, используя некоторые эвристики, такие как выбор поворотной строки с максимальным абсолютным значением a_{ji}. Эта эвристика используется для уменьшения диапазона значений матрицы на более поздних этапах. Без этой эвристики даже для матриц размером около 20 ошибка будет слишком большой и может вызвать переполнение для типов данных с плавающей запятой.