УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Вычислительная математика

Лабораторная работ №3

Интегрирование

Преподаватель: Перл Ольга Вячеславовна
Выполнил: Ле Чонг Дат
Группа: P3231

2021 г.

1 Задание

Вариант: Метод прямоугольников

- Пользователь выбирает функцию, интеграл которой он хочет вычислить (3-5 функций), из тех, которые предлагает программа.
- В численный метод должен быть передан параметр-агрегат на подпрограмму вычисления значения функции в точке x.
- Пользователь задает пределы интегрирования и точность.
- **NOTE!** Если нижний предел интегрирования $\geq$ верхнего предела - интеграл должен считаться корректно!

  В результате должны получить:

  - значение интеграла;
  - количество разбиений, на которое пришлось разбить;
  - полученную погрешность;

2 Описание метода

2.1 Постановка задачи

Пусть требуется вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, где $f(x)$ – непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция.

2.2 Метод прямоугольников

Вычисление интеграла $S = \int_a^b f(x)\,dx$ равносильно вычислению площади некоторой фигуры – криволинейной трапеции с параллельными «основаниями» $x = a$, $x = b$ и «боковыми сторонами» $y = 0$, $y = f(x)$

Разобьем интервал интегрирования на n равных частей, каждая длиной $h = \frac{b-a}{n}$.

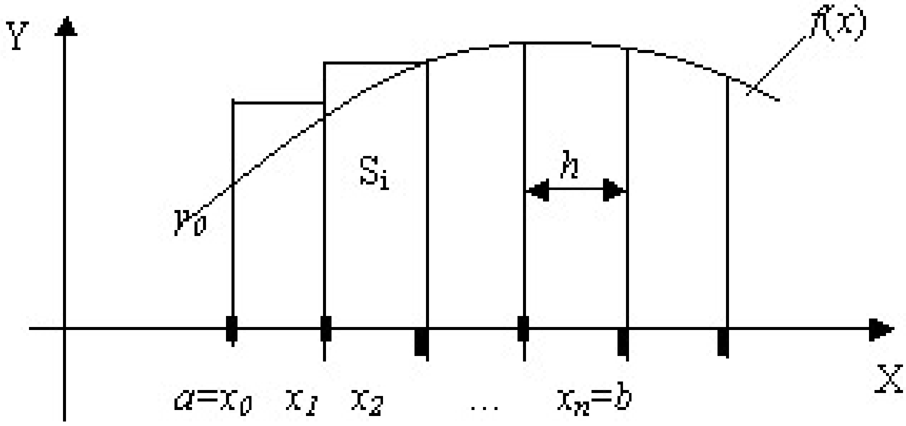
Приближенное значение интеграла получается в виде суммы площадей n прямоугольников, высота которых равна значению $f(x)$ на левом краю каждого подинтервала

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \approx hy_0 + hy_1 + ... + hy_{n-1} = h(y_0 + y_1 + ... + hy_{n-1})$$

То есть формула численного интегрирования имеет вид:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \approx h\sum_{i=0}^{n-1} y_i$$

и называется формулой «левых» прямоугольников.



Если в качестве приближенного значения площади для каждого подинтервала принять площадь прямоугольника, высота которого равна значению $f(x)$ на правом краю подинтервала, то формула численного интегрирования имеет вид:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \approx h \sum_{i=1}^{n} y_i$$

и называется формулой «правых» прямоугольников.

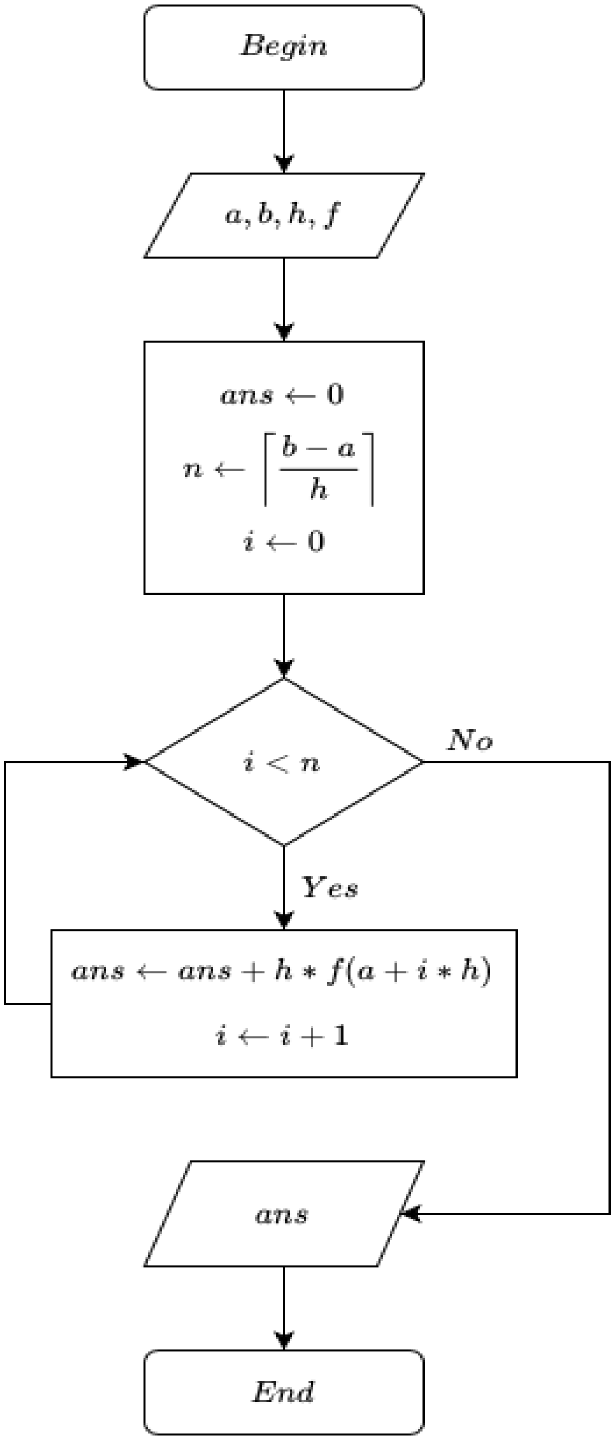
Существует третья модификация метода прямоугольников – метод «средних» прямоугольников. В этом случае в качестве приближенного значения площади для каждого подинтервала принимается площадь прямоугольника, высота которого равна значению $f(x)$ в средней точке подинтервала

Тогда формула численного интегрирования имеет вид:

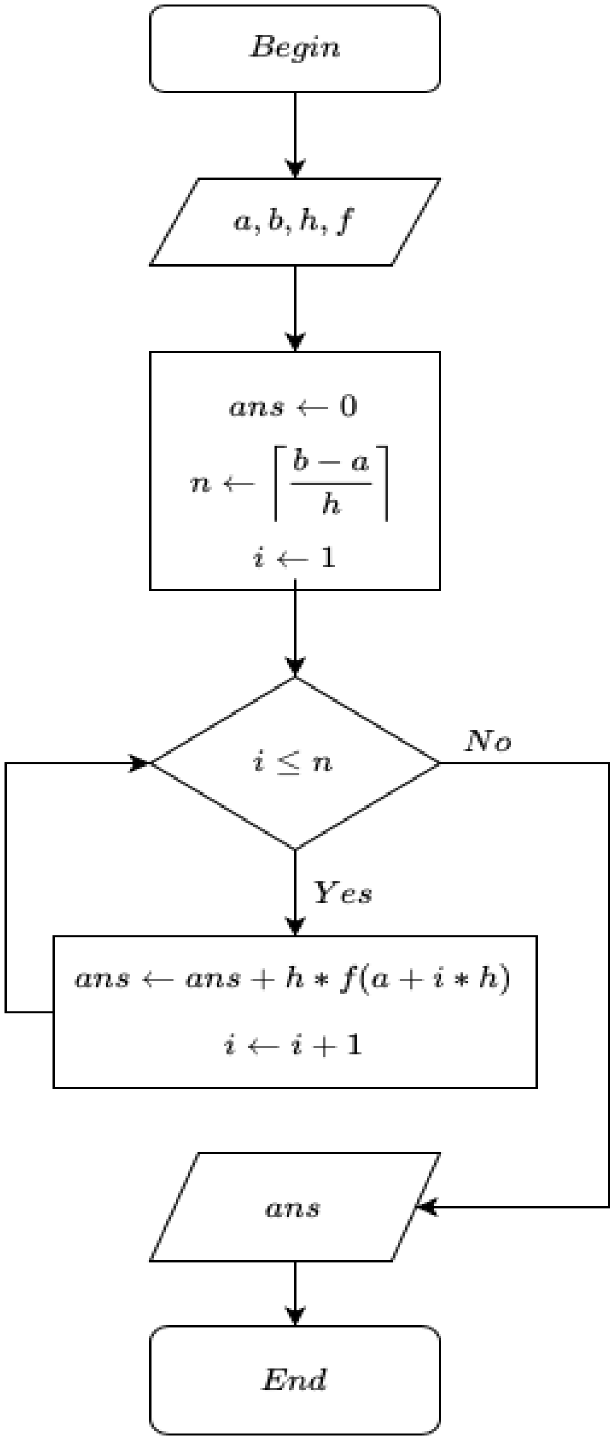
$$S = \int_a^b f(x)\,dx \approx h \sum_{i}^{n} f(\frac{x_i + x_{i-1}}{2})$$

3 Flowchart

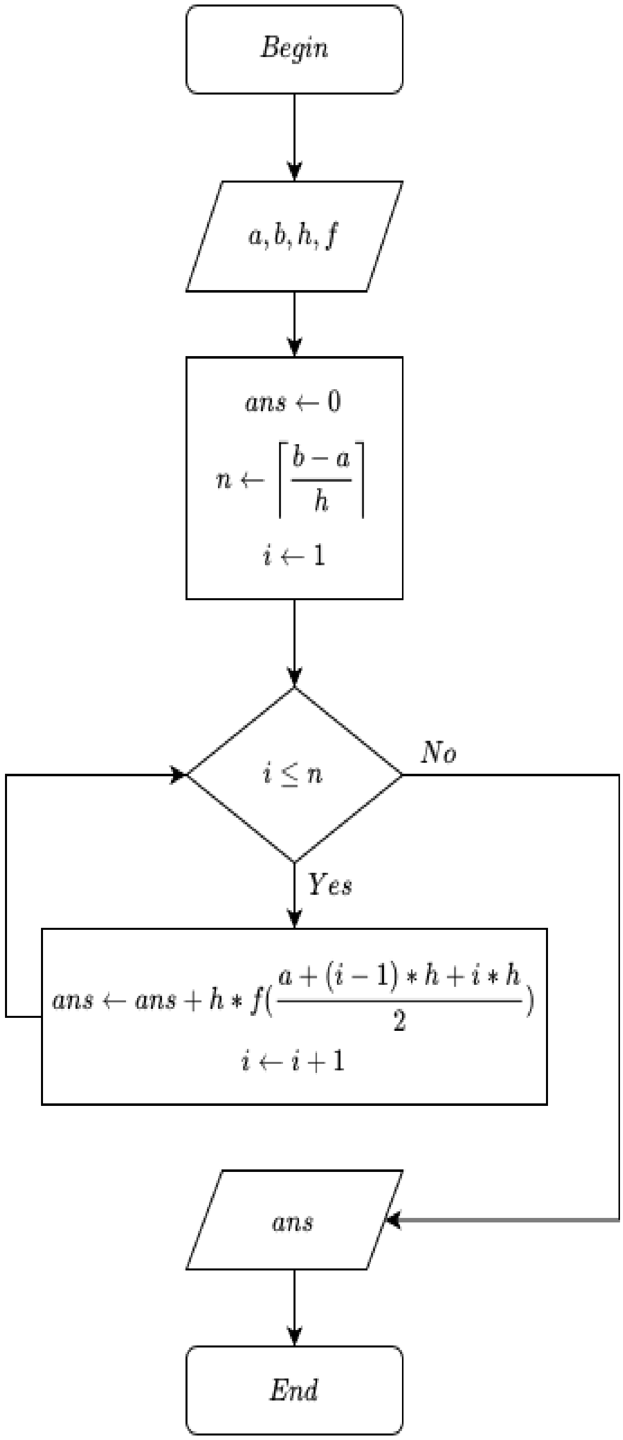
3.1 Метод «левых» прямоугольников



3.2 Метод «правых» прямоугольников



3.3 Метод «средних» прямоугольников



4 Примеры

4.1 Метод «левых» прямоугольников ($a \geq b$)

```
> Welcome to the integral world!
-------------------- INTEGRAL --------------------
> Which integral do you want to choose?
> 0. 3x^2 + 2
> 1. sin(x) + 4x^3 - x
> 2. e^x + cos(x) - x^3
> 3. ln(x) - e^x
> 4. 1/x
> Enter your variant: 0
-------------------- STRATEGY --------------------
> Which strategy do you want to choose?
> 0. Left rectangle method
> 1. Right rectangle method
> 2. Middle rectangle method
> Enter your variant: 0
-------------------- ESTIMATOR --------------------
> Which estimator do you want to choose?
> 0. Runge estimate method
> Enter your variant: 0
> Enter your parameters (a, b, epsilon): 2 -2 0.001
-------------------- Result --------------------
> Result: -24.016647
> Number of iterations: 180
> Number of splits: 3
> Error: 0.000938
> Do you want to continue? (Y/N):
```

4.2 Метод «правых» прямоугольников

```
> Welcome to the integral world!
-------------------- INTEGRAL --------------------
> Which integral do you want to choose?
> 0. 3x^2 + 2
> 1. sin(x) + 4x^3 - x
> 2. e^x + cos(x) - x^3
> 3. ln(x) - e^x
> 4. 1/x
> Enter your variant: 3
-------------------- STRATEGY --------------------
> Which strategy do you want to choose?
> 0. Left rectangle method
> 1. Right rectangle method
> 2. Middle rectangle method
> Enter your variant: 1
-------------------- ESTIMATOR --------------------
> Which estimator do you want to choose?
> 0. Runge estimate method
> Enter your variant: 0
> Enter your parameters (a, b, epsilon): -5 10 0.0001
2021/03/30 21:14:39 Error: The interval is not continuos
```

4.3 Метод «средних» прямоугольников ($a \leq b$)

```
> Welcome to the integral world!
-------------------- INTEGRAL --------------------
> Which integral do you want to choose?
> 0. 3x^2 + 2
> 1. sin(x) + 4x^3 - x
> 2. e^x + cos(x) - x^3
> 3. ln(x) - e^x
> 4. 1/x
> Enter your variant: 1
-------------------- STRATEGY --------------------
> Which strategy do you want to choose?
> 0. Left rectangle method
> 1. Right rectangle method
> 2. Middle rectangle method
> Enter your variant: 2
-------------------- ESTIMATOR --------------------
> Which estimator do you want to choose?
> 0. Runge estimate method
> Enter your variant: 0
> Enter your parameters (a, b, epsilon): 2 10 0.0001
-------------------- Result --------------------
> Result: 9936.422895
> Number of iterations: 10240
> Number of splits: 7
> Error: 0.000029
> Do you want to continue? (Y/N): █
```

5 Вывод

Метод прямоугольников - один из наименее точных методов, однако он дает нам довольно точное приближение в случае, когда функция не сильно меняется на подынтервалах. Погрешность этого правила оценивается по следующей формуле:

$$error = \frac{(b-a)^3}{24n^2}M$$

где M - максимум второй производной функции f. Согласно этой формуле, мы видим, что существенное влияние значения ошибки оказывает количество подинтервалов n - чем больше n, тем меньше ошибка.