УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Вычислительная математика

Лабораторная работ №4

Аппроксимация и приближение функций

Преподаватель: Перл Ольга Вячеславовна
Выполнил: Ле Чонг Дат
Группа: P3231

2021 г.

1 Задание

Вариант: Интерполирование многочленом Лагранжа

Для интерполяции необходимо подготовить 3-4 набора данных (в зависимости от функции).

/* Исходные данные должны быть подготовлены следующим образом:

- Берем функцию
- Берем точки x (точки не обязательно упорядочены)
- значение y получаем на основе данных выбранной функции

Например:

- берем $\sin(x)$
- 1. берем 3-4 точки на интервале 0 по 2Пи (шаг более менее большой)
  2. берем 8-10 точек на интервале 0 по 2Пи (уменьшаем шаг)
  3. точки с предыдущего примера, только для одной точки изменяем значение y, например было 0.8, делаем -5, смотрим как ведет себя интерполяция.
  4. берем 8-10 точек на интервале 0 по 50Пи

*/

В итоге, должны получить график, на котором одним цветом исходная функция ($\sin(x)$), а другим цветом полученный график в результате интерполяции, и на графике должны быть отмечены сами точки (узлы) интерполяции.

Интерполяционный график должен пройти через исходные эти точки.

Программа должна позволять найти значение y (отдельное поле) для любого введенного x (рассчитывается на основе построенного интерполяционного многочлена).

2 Описание метода

2.1 Постановка задачи

Пусть функция $f(x)$ задана набором точек (x_i, y_i) на интервале $[a; b]$:

$$y_i = f(x_i); i = 1..n; a \leq x_i \leq b_i$$

Задача интерполяции: найти функцию $F(x)$, принимающую в точках x_i те же значения y_i. Тогда, **условие интерполяции**:

$$F(x_i) = y_i$$

2.2 Интерполирование многочленом Лагранжа

При глобальной интерполяции на всем интервале $[a;b]$ строится единый многочлен. Одной из форм записи интерполяционного многочлена для глобальной интерполяции является многочлен Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i * l_i$$

где $l_i(x)$ – базисные многочлены степени n:

$$l_i(x) = \prod_{j=1;j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

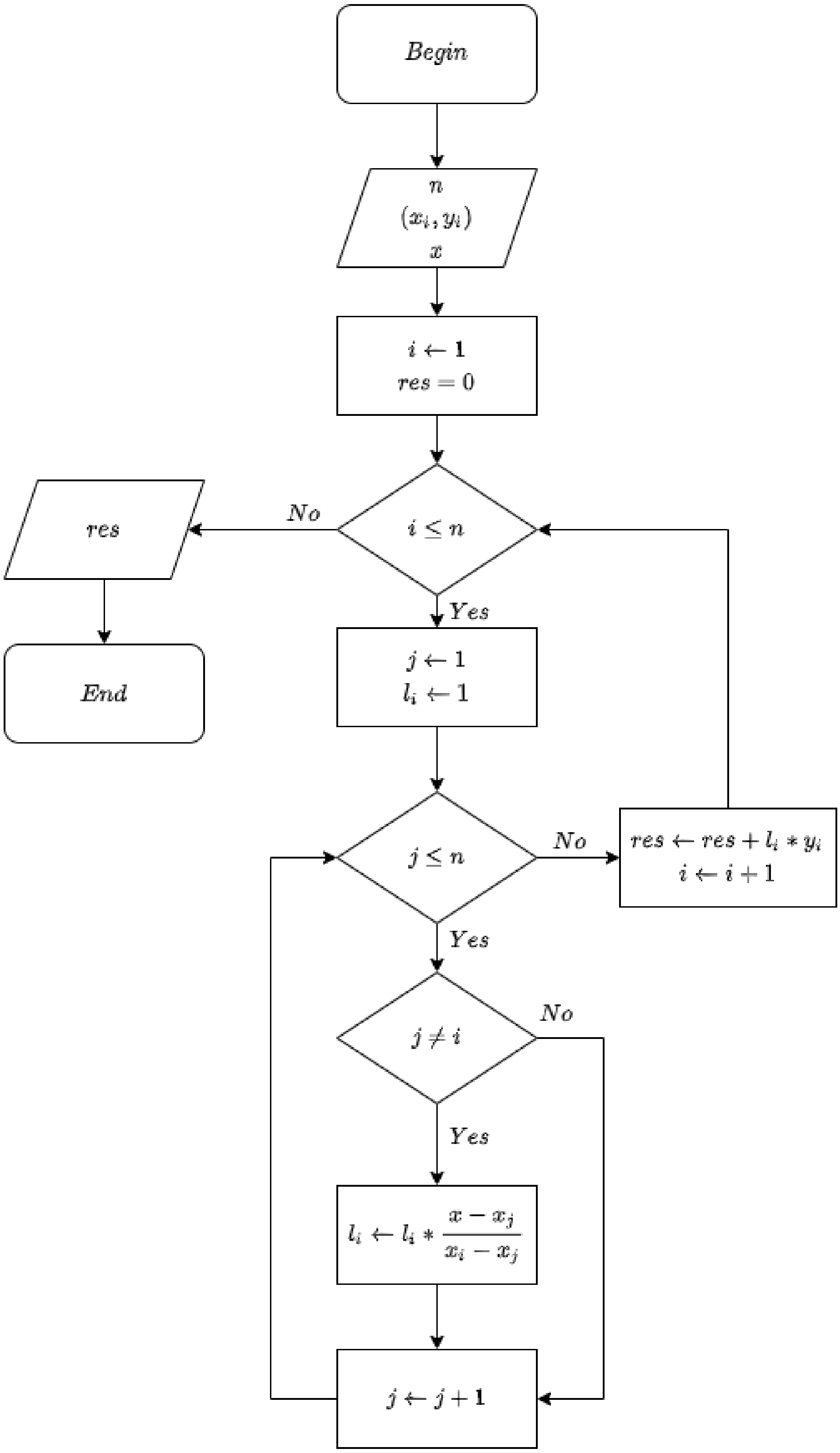
То есть многочлен Лагранжа можно записать в виде:

$$L_n(x) = \sum_{i=1}^{n} (y_i * \prod_{j=0;j!=i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j})$$

Многочлен $l_i(x)$ удовлетворяет условию $l_i(x_j) = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$. Это условие означает, что многочлен равен нулю при каждом x_j кроме x_i, то есть $x_1 x_2 ... x_{i-1} ... x_{i+1} x_{i+2} ... x_n$ – корни этого многочлена. Таким образом, степень многочлена $L_n(x)$ равна n и при $x \neq x_i$ обращаются в ноль все слагаемые суммы, кроме слагаемого с номером $i = j$, равного y_i.

3 Flowchart

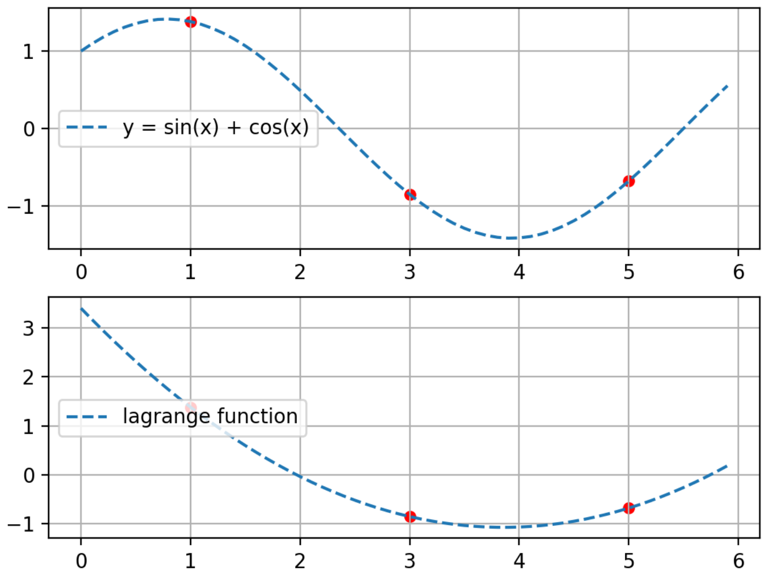
Метод Лагранжа


$Begin$
n
(x_i, y_i)
x
$i \leftarrow 1$
$res = 0$
$i \leq n$
No
res
End
Yes
$j \leftarrow 1$
$l_i \leftarrow 1$
$j \leq n$
No
$res \leftarrow res + l_i * y_i$
$i \leftarrow i + 1$
Yes
$j \neq i$
No
Yes
$l_i \leftarrow l_i * \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$
$j \leftarrow j + 1$

4 Примеры

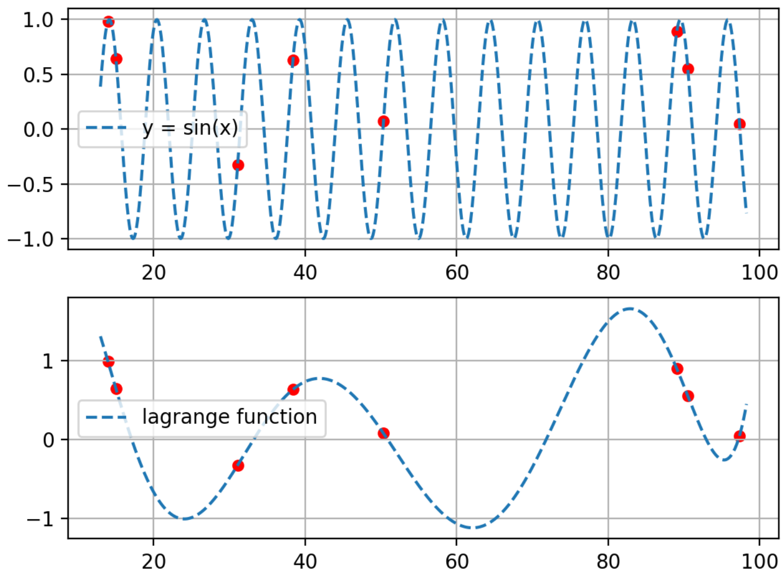
4.1 Метод Лагранжа с предопределенным набором (x_i, y_i)

```
letrongdat@MacBook-Pro-cua-Le lab-4 % python3 main.py
> -------------------- Welcome to interpolation world --------------------
> Please choose your function:
> 0. y = sin(x)
> 1. y = sin(x) + cos(x)
> 2. y = 3x^3 - 2x^2 + 2
> Enter your option: 1
------------------------------------------------------------
> Please choose the way to generate interpolation points:
> 0. Manual
> 1. Auto generate (random points)
> Enter your option: 0
> Enter x(s): 1 3 5
```



4.2 Метод Лагранжа со случайными числами.

```
letrongdat@MacBook-Pro-cua-Le lab-4 % python3 main.py
> -------------------- Welcome to interpolation world --------------------
> Please choose your function:
> 0. y = sin(x)
> 1. y = sin(x) + cos(x)
> 2. y = 3x^3 - 2x^2 + 2
> Enter your option: 0
------------------------------------------------------------
> Please choose the way to generate interpolation points:
> 0. Manual
> 1. Auto generate (random points)
> Enter your option: 1
> Enter a number of points: 8
```



5 Вывод

Выражение применимо как для равноотстоящих, так и для не равноотстоящих узлов. Погрешность интерполяции методом Лагранжа зависит от свойств функции $f(x)$, от расположения узлов интерполяции и точки x. Полином Лагранжа имеет малую погрешность при небольших значениях $n(n < 20)$. При больших n погрешность начинает расти, что свидетельствует о том, что метод Лагранжа не сходится (то есть его погрешность не убывает с ростом n).

Многочлен Лагранжа в явном виде содержит значения функций в узлах интерполяции, поэтому он удобен, когда значения функций меняются, а узлы интерполяции неизменны. Число арифметических операции, необходимых для построения многочлена Лагранжа, пропорционально n^2 и является наименьшим для всех форм записи. К недостаткам этой формы записи можно отнести то, что с изменением числа узлов приходится все вычисления проводить заново.

Кусочно-линейная и кусочно-квадратичная локальные интерполяции являются частными случаями интерполяции многочленом Лагранжа.