Mục lục

Chương 1

Hàm sinh

Trong chương này và chương sau, ta tiếp tục nghiên cứu phép liệt kê, bắt đầu bằng khái niệm quan trọng: *hàm sinh*.

Xét bài toán tổ hợp lặp, chẳng hạn, tìm số nghiệm nguyên của phương trình $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 25$, trong đó $c_i \geq 0,\ \forall i = \overline{1,4}$. Nếu hạn chế thêm điều kiện, như $0 \leq c_i < 10,\ \forall i = \overline{1,4}$, ta sử dụng nguyên lý bù trừ. Ngoài ra, nếu thêm c_2 chẵn và c_3 là bội của 3, ta chia thành nhiều trường hợp, và áp dụng nguyên lý cộng.

Một trong các ứng dụng của hàm sinh là giải một cách linh hoạt các bài toán này, với các ràng buộc khá phong phú.

1.1 Ví dụ mở đầu

Ví dụ 1.1. Có bao nhiêu cách chia 12 vật (giống nhau) cho ba người A, B, C, sao cho A được ít nhất bốn vật, B và C có ít nhất hai vật, nhưng C không quá năm vật?
Đặt c_1, c_2, c_3 là số vật chia cho từng người A, B, C. Ta có

$$c_1 + c_2 + c_3 = 12 \quad \text{và} \quad 4 \leq c_1, 2 \leq c_2, 2 \leq c_3 \leq 5.$$

Ta tìm một cận trên của c_1, c_2 bởi đánh giá

$$c_1 = 12 - c_2 - c_3 \leq 12 - 2 - 2 = 8, \; c_2 = 12 - c_1 - c_3 \leq 12 - 4 - 2 = 6.$$

Từ đó, ta tìm được các cách chia 12 vật cho ba người, được mô tả trong bảng sau:

A	B	C	A	B	C
4	3	5	6	2	4
4	4	4	6	3	3
4	5	3	6	4	2
4	6	2	7	2	3
5	2	5	7	3	2
5	3	4	8	2	2
5	4	3			
5	5	2			

Mặt khác, hàm

$$f(x) = (x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8)(x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x^2 + x^3 + x^4 + x^5)$$

có các số hạng bằng x^{12} là $x^{c_1}x^{c_2}x^{c_3}$, trong đó $4 \leq c_1 \leq 8$, $2 \leq c_2 \leq 6$, $2 \leq c_3 \leq 5$, và $c_1 + c_2 + c_3 = 12$, nên hệ số của x^{12} trong $f(x)$ là số nghiệm cần tìm.
Hàm $f(x)$ gọi là *hàm sinh* cho các cách chia này. Ta cũng có thể dùng hàm

$$g(x) = (x^4 + x^5 + x^6 + \cdots + x^{12})(x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^{12})(x^2 + x^3 + x^4 + x^5)$$

hoặc

$$h(x) = (x^4 + x^5 + x^6 + \cdots)(x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)(x^2 + x^3 + x^4 + x^5)$$

để sinh các cách chia này, vì với ràng buộc đã cho, không thể có $x^{c_1}x^{c_2}x^{c_3} = x^{12}$ với $c_1 \geq 9$ hoặc $c_2 \geq 7$.

Ví dụ 1.2. Cho bốn loại bi với các màu đen, trắng, xanh, đỏ; mỗi loại ít nhất 24 viên. Có bao nhiêu cách chọn 24 viên từ chúng sao cho có một số chẵn bi trắng và ít nhất sáu bi đen.
Đa thức mô tả cho việc chọn mỗi loại bi như sau

1) trắng: $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{24}$, trong đó số hạng đầu 1 ngụ ý $1x^0$, vì 0 là số chẵn, và vì vậy có một khả năng mà không có bi trắng nào được chọn.

2) đen: $x^6 + x^7 + x^8 + \cdots + x^{24}$.

3) xanh (đỏ): $1 + x + x^2 + \cdots + x^{24}$.

Do đó, lời giải của bài toán là hệ số của x^{24} trong hàm sinh

$$f(x) = (1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{24})^2(x^6 + x^7 + \cdots + x^{24})(1 + x + x^2 + \cdots + x^{24}).$$

Tương tự Ví dụ 1.1, hệ số của x^{24} trong $f(x)$ và

$$g(x) = (1 + x^2 + x^4 + x^6 \cdots)^2(x^6 + x^7 + x^8 + \cdots)(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)$$

là như nhau.

Ví dụ 1.3. Có bao nhiêu nghiệm nguyên của phương trình $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 25$ nếu $c_i \geq 0, \; \forall i = \overline{1,4}$?
Một phát biểu khác của bài toán này, có bao nhiêu cách chia 25 vật (giống nhau) cho bốn người?
Việc chọn mỗi c_i, $1 \leq i \leq 4$, được mô tả bởi đa thức $1 + x + x^2 + \cdots + x^{25}$. Khi đó, đáp số của bài toán là

hệ số của x^{25} trong hàm sinh

$$f(x) = (1 + x + x^2 + \cdots + x^{25})^4,$$

và cũng là hệ số của x^{25} trong hàm sinh

$$g(x) = (1 + x + x^2 + \cdots + x^{25} + x^{26} + \cdots)^4.$$

1.2 Định nghĩa và ví dụ: kỹ thuật tính

Định nghĩa 1.1. *Cho dãy số thực $a_0, a_1, a_2, \ldots$ Hàm*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

gọi là hàm sinh của dãy này.

Hàm sinh chính là khai triển Maclaurin, và $a_i = \dfrac{f^{(i)}(0)}{i!}$ là số cách chọn i vật thỏa mãn điều kiện cho trước. Ở đây ta không để cập đến tính hội tụ của chuỗi.

Ví dụ 1.4. Với $n \in \mathbb{R}$, hàm $(1+x)^n$ có khai triển Maclaurin

$$\begin{aligned}(1+x)^n = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n}{r} x^r &= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!} x^r \\ &= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \cdots,\end{aligned}$$

là hàm sinh của dãy $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots$

```
quit                                          # thoát phiên làm việc trước đó
from sympy import *                           # khai báo thư viện sympy
i,n,x = symbols('i n x')                      # khai báo biến bất định (symbolic)
s = Sum( binomial(n,i) * x**i, (i,0,oo) )    # ∑_{i=0}^{∞} x^i, hai chữ o viết liền nhau ngụ ý +∞
s                                             # xem biểu thức của s
s.doit()                                      # tính s, chọn biểu thức "phù hợp":
```

$$\begin{cases} (x+1)^n & \text{for } (\operatorname{re}(n) \le -1 \wedge |x| < 1) \vee (|x| \le 1 \wedge \operatorname{re}(n) > 0) \vee (\operatorname{re}(n) \le 0 \wedge |x| \le 1 \wedge \operatorname{re}(n) > -1 \wedge x \ne -1) \\ \sum_{i=0}^{n} x^i \binom{n}{i} & \text{otherwise} \end{cases}$$

```
f = (1+x)**n
f.series(x,0,6)                               # khai triển Maclaurin của f tới x^5
print( f.series(x,0,6) )                      # biểu diễn biểu thức bằng ký tự
# Phân tích mỗi số hạng thành thừa số để rút ra quy luật
(n**5/120 - n**4/12 + 7*n**3/24 - 5*n**2/12 + n/5).factor()
```

a) Nếu $n \in \mathbb{Z}^+$ thì $\binom{n}{r} = 0,\ \forall r > n$. Khi đó

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{k} x^r = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^n$$

là hàm sinh dãy $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}, 0, 0, 0, \ldots$

Thay vai trò x bởi ax hoặc x^m, ta có

$$(1+ax)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}ax + \binom{n}{2}a^2x^2 + \cdots + \binom{n}{n}a^nx^n$$
$$(1+x^m)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x^m + \binom{n}{2}x^{2m} + \cdots + \binom{n}{n}x^{mn}.$$

b) Với $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$\binom{-n}{r} = \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-r+1)}{r!} = \frac{(-1)^r n(n+1)\dots(n+r-1)}{r!}$$
$$= (-1)^r \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!r!} = (-1)^r \binom{n+r-1}{r}.$$

Đặc biệt $\binom{-1}{r} = (-1)^r$. Do đó

$$\frac{1}{1-x} = [1+(-x)]^{-1} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-1}{r}(-x)^r = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r(-x)^r$$
$$= \sum_{r=0}^{\infty} x^r = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

Thay vai trò x bởi ax hoặc x^m, được

$$\frac{1}{1-ax} = 1 + ax + a^2x^2 + a^3x^3 + \cdots$$
$$\frac{1}{1-x^m} = 1 + x^m + x^{2m} + x^{3m} + \cdots$$

Ví dụ 1.5. Với $n \in \mathbb{N}$,

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

là hàm sinh của dãy $\underbrace{1, 1, 1, \dots, 1}_{n+1}, 0, 0, 0, \dots$

```
Sum(x**i, (i,0,n) ).doit()   # {n + 1 for x = 1; (1 - x^(n+1))/(1 - x) otherwise}, bạn đọc tự khai báo biến
```

Cho $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$, và hằng số k. Khi đó

a) $f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{\infty}(a_i + b_i)x^i$.

b) $kf(x) = \sum_{i=0}^{\infty}(ka_i)x^i$.

c) $f(x)g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$, trong đó $c_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k} = a_0b_i + a_1b_{i-1} + a_2b_{i-2} + \cdots + a_ib_0$, với $i \in \mathbb{N}$. Dãy (c_i) gọi tích chập của hai dãy (a_i) và (b_i).

Một số phép toán tuyến tính đối với $f(x)$, chẳng hạn đạo hàm và tích phân, được tính bằng cách thực hiện phép toán đó cho mọi số hạng của tổng.

Ví dụ 1.6. Với $k \in \mathbb{N}$, hàm $f_k(x) = 0^k + 1^k x + 2^k x^3 + 3^k x^3 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} i^k x^i$ sinh dãy $0^n, 1^n, 2^n, 3^n, ...$, tức là dãy $a_i = i^k$. Ta có $f_k'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} i^{k+1} x^{i-1}$, suy ra

$$xf_k'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} i^{k+1} x^i = f_{k+1}(x),$$

trong đó $f_0(x) = 1 + x + x^2 + \cdots = \dfrac{1}{1-x}$. Một số hàm đầu tiên của dãy hàm này

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= xf_0'(x) = \frac{x}{(1-x)^2} = 0 + 1x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots \\
f_2(x) &= xf_1'(x) = \frac{x^2+x}{(1-x)^3} = 0^2 + 1^2x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + \cdots \\
f_3(x) &= xf_2'(x) = \frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4} = 0^3 + 1^3x + 2^3x^2 + 3^3x^3 + \cdots \\
f_4(x) &= xf_3'(x) = \frac{x^4+11x^3+11x^2+x}{(1-x)^5} = 0^4 + 1^4x + 2^4x^2 + 3^4x^3 + \cdots \\
f_5(x) &= xf_4'(x) = \frac{x^5+26x^4+66x^3+26x^2+x}{(1-x)^6} = 0^4 + 1^4x + 2^4x^2 + 3^4x^3 + \cdots \\
f_6(x) &= xf_5'(x) = \frac{x^6+57x^5+302x^4+302x^3+57x^2+x}{(1-x)^7} = 0^5 + 1^5x + 2^5x^2 + 3^5x^3 + \cdots
\end{aligned}$$

Trong mã Python dưới dây, dòng 1–3 hỗ trợ tính toán trong quá trình chứng minh hệ thức đệ quy, và dòng 4–7 tính các hàm $f_k(x)$ với $1 \le k \le 6$, trong đó dòng 6, 7 được tinh chỉnh để tính tử số của $f_k(x)$ [mẫu số là $(1-x)^{k+1}$]. Hệ số của các tử số này là các số Euler.

```
1 s = Sum(i**k * x**i, (i,0,oo) )
2 diff(s,x)                         # $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{i i^k x^i}{x} = \sum_{i=0}^{\infty} i^{k+1} x^{i-1}$
3 (x*diff(s,x)).simplify()          # $\sum_{i=0}^{\infty} i^{n+1} x^i$
4 f = 1/(1-x)
5 for n in range(1,7):              # tránh dùng biến bất định k hay i
6   f = x*diff(f).cancel().factor()
7   display(f, ((-1)**(n+1) * (x-1)**(n+1) * f).expand())
8 s.subs(k,10).doit()               # tính $f_{10}(x)$, mất những 2 phút!
```

Ví dụ 1.7. a) Theo Ví dụ 1.4, hàm sinh của dãy $1, 1, 1, \ldots$ là $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Do đó hàm $g(x) = f(x) - x^2$ sinh dãy $1, 1, 0, 1, 1, \ldots$, và hàm $g(x) = x^2 + 2x^3$ sinh dãy $1, 1, 1, 3, 1, 1, \ldots$

```
( 1/(1-x)-x**2 ).series(x,0,10)
s = 1+x+0*x**2 + Sum(x**i, (i,3,oo))
s.doit().simplify() # $\begin{cases} \frac{-x^3+(x-1)(x+1)}{x-1} & \text{for } |x| < 1 \\ x + \sum_{i=3}^{\infty} x^i + 1 & \text{otherwise} \end{cases}$
print( s.doit().simplify() )
( (-x**3 + (x - 1)*(x + 1))/(x - 1) ).apart()
```

b) Sử dụng kết quả của Ví dụ 1.6, hàm sinh của dãy $a_i = i^2 + i$, với $i \ge 0$, cụ thể, dãy 0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, ... là

$$f_2(x) + f_1(x) = \frac{x^2+x}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{2x}{(1-x)^3}.$$

```
( (x**2+x)/(1-x)**3 + x/(1-x)**2 ).simplify()      # hoặc tính trực tiếp:
```

```
Sum( (i**2+i)* x**i, (i,0,oo) ).doit().simplify()   #
```

$$\begin{cases} -\frac{2x}{(x-1)^3} & \text{for } |x| < 1 \\ \sum_{i=0}^{\infty} ix^i (i+1) & \text{otherwise} \end{cases}$$

Ví dụ 1.8. Tìm hệ số của x^5 trong hàm sinh $(1-2x)^{-7}$.

Trong khai triển $(1+x)^n$ trong Ví dụ 1.4, thay x bởi $-2x$, ta có $(1-2x)^{-7} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-7}{r} (-2x)^r$. Do đó, hệ số của x^5 là $\binom{-7}{5}(-2)^5 = 14\,784$. Mỗi phép tính sau đều cho ta kết quả này

```
binomial(-7,5)* (-2)**5
((1-2*x)**-7).series(x,0,6)
((1-2*x)**-7).diff(x,5).subs(x,0)/factorial(5)   #
```

$$\frac{f^{(5)}(0)}{5!}$$

Ví dụ 1.9. Hàm

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[3]{1+3x}} = (1+3x)^{-1/3} &= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1/3)(-1/3-1)(-1/3-2)\ldots(-1/3-r+1)}{r!}(3x)^r \\ &= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3r-2)}{r!} x^r \end{aligned}$$

sinh dãy $1, -1, \frac{1\cdot 4}{2!}, -\frac{1\cdot 4\cdot 7}{3!}, \ldots, (-1)^r \frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3r-2)}{r!}, \ldots$

Ví dụ 1.10. Xác định hệ số của x^{15} trong $f(x) = (x^2 + x^3 + x^4 + \ldots)^4$.
Ta có

$$f(x) = [x^2(1+x+x^2+\ldots)]^4 = \Big(x^2 \frac{1}{1-x}\Big)^4 = x^8(1-x)^{-4},$$

nên hệ số của x^{15} trong $f(x)$ là hệ số của x^7 trong $(1-x)^{-4}$, và bằng $\binom{-4}{7}(-1)^7 = 120$.

Tổng quát, với $n \in \mathbb{N}$, hệ số của x^n trong $f(x)$: (a) là 0, khi $0 \le n \le 7$, và (b) khi $n \ge 8$, là hệ số của x^{n-8} trong $(1-x)^{-4}$, là $\binom{-4}{n-8}(-1)^{n-8} = (-1)^{n-8}\binom{4+(n-8)-1}{n-8}(-1)^{n-8} = \binom{n-5}{n-8}$.

Ví dụ 1.11. Nhắc lại bài toán đếm tổ hợp lặp, có bao nhiêu cách chọn r vật từ n loại vật?
Việc chọn mỗi vật được mô tả bằng đa thức $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$. Do đó, số cách chọn r vật từ n loại vật, $r = 0, 1, 2, \ldots$, có hàm sinh

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^n.$$

Ta cần tìm hệ số của x^r trong $f(x) = \Big(\frac{1}{1-x}\Big)^n = (1-x)^{-n}$, đó là

$$\binom{-n}{r}(-1)^r = (-1)^r\binom{n+r-1}{r}(-1)^r = \binom{n+r-1}{r}.$$

Ví dụ 1.12. Một tổng riêng của số nguyên dương n là một cách viết n thành tổng của một dãy số nguyên dương –có tính đến thứ tự các số trong dãy. Có bao nhiêu tổng riêng của số nguyên dương n?
Xét mỗi trường hợp cụ thể, tổng riêng của n gồm i số, với $i = 1, 2, \ldots$ Ta chọn i số nguyên dương, mà mỗi lần chọn được mô tả bằng đa thức $x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{x}{1-x}$, nên sau i lần chọn, số cách để được tổng bằng n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, có hàm sinh

$$f_i(x) = \Big(\frac{x}{1-x}\Big)^i.$$

Trong mỗi trường hợp này, ta cần tìm hệ số của x^n trong $f_i(x)$. Theo quy tắc cộng, ta cần tìm tổng các hệ số của x^n trong các hàm $f_i(x)$ với $i = 1, 2, ...$, tức là hệ số của x^n trong hàm

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{x}{1-x}\right)^i = \frac{x}{1-2x} = x\frac{1}{1-2x}$$
$$= x[1 + 2x + (2x)^2 + (2x)^3 + \cdots] = 2^0x + 2^1x^2 + 2^2x^3 + 2^3x^4 + \cdots$$

và đó là 2^{n-1}.
Chẳng hạn, với $n = 4$, các tổng riêng của n được trình bày trong bảng sau

i	Hàm sinh $f_i(x)$	Số hạng chứa x^4	Phân hoạch
1	$x + x^2 + x^3 + \cdots$	x^4	4
2	$(x + x^2 + x^3 + \cdots)^2$	x^1x^3, x^2x^2, x^3x^1	$1+3, 2+2, 3+1$
3	$(x + x^2 + x^3 + \cdots)^3$	$x^1x^1x^2, x^1x^2x^1, x^2x^1x^1$	$1+1+2, 1+2+1, 2+1+1$
4	$(x + x^2 + x^3 + \cdots)^4$	$x^1x^1x^1x^1$	$1+1+1+1$

Ví dụ 1.13. Có bao nhiêu tổng riêng đối xứng của $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là đọc từ trái sang phải hay từ phải sang trái đều như nhau?
Ta liệt kê các tổng riêng đối xứng cho $n = 6$ và $n = 7$.

	$n = 6$	$n = 7$
1)	6	7
2)	$1+4+1$	$1+5+1$
3)	$2+2+2$	$2+3+2$
4)	$1+1+2+1+1$	$1+1+3+1+1$
5)	$3+3$	$3+1+3$
6)	$1+2+2+1$	$1+2+1+2+1$
7)	$2+1+1+2$	$2+1+1+1+2$
8)	$1+1+1+1+1+1$	$1+1+1+1+1+1+1$

Với tổng riêng có một số lẻ các số, số chính giữa gọi là *tâm*.

a) Nếu $n = 2k + 1$, với $k \in \mathbb{Z}^+$, tổng riêng đối xứng phải có một số lẻ các số, và tâm cũng là số lẻ, đặt là $2i + 1$, với $i = \overline{0, k}$. Nếu tâm là n, ứng với $i = k$, ta có một tổng riêng là n. Nếu $0 \leq i \leq k - 1$, thì mỗi bên của tâm là các tổng riêng của $\frac{n-(2i+1)}{2} = \frac{(2k+1)-(2i+1)}{2} = k - i$. Theo Ví dụ 1.12, số tổng riêng này là $2^{(k-i)-1}$. Theo quy tắc cộng, số tổng riêng đối xứng của n là

$$1 + \sum_{i=0}^{k-1} 2^{k-i-1} = 2^k.$$

b) Nếu $n = 2k$, với $k \in \mathbb{Z}^+$. Xét hai khả năng:

   1) Nếu tổng riêng có tâm, thì tâm là số chẵn, ký hiệu $2i$, với $i = \overline{1, k}$. Nếu tâm là n, ứng với $i = k$, ta có một tổng riêng. Nếu $1 \leq i \leq k - 1$, thì mỗi bên của tâm là các tổng riêng của $\frac{n-2i}{2} = \frac{2k-2i}{2} = k - i$, với $2^{(k-i)-1}$ tổng riêng. Số tổng riêng có tâm của n là

$$1 + \sum_{i=1}^{k-1} 2^{k-i-1} = 2^{k-1}.$$

   2) Nếu tổng riêng không có tâm, thì mỗi bên là các tổng riêng của k, với 2^{k-1} tổng riêng.

   Do đó số tổng riêng của $n = 2k$ là $2^{k-1} + 2^{k-1} = 2^k$.

   Tổng quát, n có $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ tổng riêng đối xứng.

Ví dụ 1.14. Có bao nhiêu cách chia 24 vật cho bốn người sao cho mỗi người nhận được ít nhất ba vật, nhưng không quá tám vật?

Số vật chia cho mỗi người được mô tả bằng đa thức $x^3 + x^4 + \cdots + x^8$, nên số cách chia n vật cho bốn người, $n = 0, 1, 2, ...$, có hàm sinh

$$f(x) = (x^3 + x^4 + \cdots + x^8)^4.$$

Ta cần tìm hệ số của x^{24} trong $f(x)$, với

$$\begin{aligned} f(x) &= [x^3(1 + x + x^2 + \cdots + x^5)]^4 = x^{12}\Big(\frac{1 - x^6}{1 - x}\Big)^4 = x^{12}\big(1 - x^6\big)^4(1 - x)^{-4} \\ &= x^{12}\sum_{i=0}^{4}\binom{4}{i}(-x^6)^i \times \sum_{i=0}^{\infty}\binom{-4}{i}(-x)^i, \end{aligned}$$

tức là hệ số của x^{12} trong tích hai biểu thức tổng của $f(x)$, và bằng

$$\sum_{0 \le i \le 2,\ j = 12 - 6i}\binom{4}{i}(-1)^i \times \binom{-4}{j}(-1)^j = 125.$$

Ví dụ 1.15. Chứng minh $\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Ta có

$$(1 + x)^{2n} = [(1 + x)^n]^2 = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i,$$

nên hệ số của x^n ở hai vế bằng nhau, tức là

$$\binom{2n}{n} = \sum_{0 \le i \le n,\ i + j = n}\binom{n}{i}\binom{n}{j} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n - i} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2.$$

Ví dụ 1.16. Xác định hệ số của x^8 trong $f(x) = \dfrac{1}{(x - 3)(x - 2)^2}$.

Ta có

$$f(x) = -\frac{1}{x - 2} - \frac{1}{(x - 2)^2} + \frac{1}{x - 3} = \frac{1}{2}\frac{1}{1 - \frac{x}{2}} - \frac{1}{4}(1 - \frac{x}{2})^{-2} - \frac{1}{3}\frac{1}{1 - \frac{x}{3}},$$

nên hệ số của x^8 trong $f(x)$ là

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}\Big)^8 - \frac{1}{4}\binom{-2}{8}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^8 - \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{3}\Big)^8 = -\frac{7}{2^{10}} - \frac{1}{3^9}.$$

Ví dụ 1.17. Có bao nhiêu tập con bốn phần tử của tập $S = \{1, 2, 3, ..., 15\}$ không có hai số nguyên liên tiếp.

$$1 \underbrace{\ \le\ }_{c_1} a_1 \underbrace{\ <\ }_{c_2} a_2 \underbrace{\ <\ }_{c_3} a_3 \underbrace{\ <\ }_{c_4} a_4 \underbrace{\ \le\ }_{c_5} 15$$

Ký hiệu bốn số chọn được $1 \le a_1 < a_2 < a_3 < a_4 \le 15$. Đặt $c_1 = a_1 - 1$, $c_2 = a_2 - a_1$, $c_3 = a_3 - a_2$, $c_4 = a_3 - a_3$ và $c_5 = 15 - a_4$, ta có điều kiện tương đương $c_1, c_5 \ge 0$, $c_2, c_3, c_3 \ge 2$, và $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 = 14$. Hàm sinh khi chọn mỗi c_1, c_5 là $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$, và khi chọn mỗi c_2, c_3, c_4 là $x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$. Do đó hàm sinh của tổng năm số này là

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^2(x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^3 = \frac{x^6}{(1 - x)^5},$$

và ta cần tìm hệ số của x^14 trong $f(x)$, hay hệ số của x^8 trong $(1 - x)^{-5}$. Đó là $\binom{-5}{8}(-1)^8 = 495$.

Ví dụ 1.18. Với $f(x) = \dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ và $g(x) = \dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$, ta có

$$f(x)g(x) = \frac{1}{1-x}\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots$$

Do đó, dãy 1, 0, 1, 0, 1, 0, ... là tích chập của hai dãy 1, 1, 1,... và 1, −1, 1, −1, ...

1.3 Phân hoạch số nguyên

Xét bài toán phân hoạch số nguyên dương n thành tổng các số nguyên dương, không quan tâm thứ tự các số hạng. Ký hiệu $p(n)$ là số các phân hoạch như vậy. Chẳng hạn

$p(1) = 1$: 1
$p(2) = 2$: $2 = 1 + 1$
$p(3) = 3$: $3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1$
$p(4) = 5$: $4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$
$p(5) = 7$: $5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

Ta muốn tính $p(n)$ mà không phải liệt kê mọi phân hoạch. Mỗi số nguyên 1, 2, 3,... có thể có mặt một hoặc nhiều lần, hoặc không có mặt trong phân hoạch. Giá trị thu được khi chọn chúng được mô tả bằng đa thức $1+x+x^2+x^3+\cdots$, $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots$, $1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots$,... Do đó, $p(n)$ là hệ số của x^n trong

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots)\cdots(1 + x^n + x^{2n} + x^{3n} + \cdots)$$
$$= \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^3}\cdots\frac{1}{1-x^n} = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-x^i},$$

hoặc trong

$$g(x) = \sum_{0\le i\le n} x^i \times \sum_{0\le 2i\le n} x^{2i} \times \sum_{0\le 3i\le n} x^{3i} \times \cdots \times \sum_{0\le ni\le n} x^{ni}.$$

Tổng quát, (1) hệ số của x^r trong $f(x)$ là số phân hoạch, không quan tâm thứ tự, của r mà mỗi số hạng không quá n, và (2) với $0 \le r \le n$, hệ số này là $p(r)$.

Ví dụ 1.19. Có bao nhiêu cách để một đại lý quảng cáo mua n phút ($n \in \mathbb{Z}^+$) phát sóng trên truyền hình, biết khoảng thời gian cho mỗi quảng cáo trên truyền hình là 30, 60, và 120 giây?
Ký hiệu a, b, c là số các khoảng thời gian 30, 60, 120 giây cần mua. Khi đó $a, b, c \in \mathbb{N}$, và $30a+60b+120c = 60n$ hay $a + 2b + 4c = 2n$. Hàm sinh tương ứng là

$$f(x) = (1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x^4 + x^8 + \cdots) = \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^4},$$

và hệ số của x^{2n}, tức là số phân hoạch của $2n$ thành tổng các số 1, 2, và 4, là số cách cần tìm.

Ví dụ 1.20. Tìm hàm sinh cho $p_d(n)$, là số phân hoạch, không quan tâm thứ tự, của số nguyên dương n thành các số hạng khác nhau.
Chẳng hạn, xét 11 phân hoạch của 6:

1) $1+1+1+1+1+1$	4) $1+1+4$	7) $1+2+3$	10) $3+3$
2) $1+1+1+1+2$	5) $1+1+2+2$	8) $2+2+2$	
3) $1+1+1+3$	6) $1+5$	9) $2+4$	11) 6

Các phân hoạch (6), (7), (9), và (11) có các số hạng khác nhau, nên $p_d(6) = 4$.
Khi tính $p_d(n)$, mỗi $i \in \mathbb{Z}^+$ có thể không được chọn, hoặc được chọn đúng một lần, tương ứng với đa thức $1 + x^i$. Do đó hàm sinh của các phân hoạch này là

$$P_d(x) = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)\cdots = \prod_{i=1}^{\infty}(1 + x^i),$$

và $p_d(n)$ là hệ số của x^n trong $(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)$. Ta có thể kiểm tra lại $p_d(6)=4$.

Ví dụ 1.21. Đặt $p_o(n)$ là số phân hoạch $n \in \mathbb{Z}^+$ thành các số lẻ. Hàm sinh dãy $p_o(0)=1, p_o(1), p_o(2), \ldots$ là

$$\begin{aligned}P_o(x) &= (1+x+x^2+x^3+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)(1+x^5+x^{10}+\cdots)\left(1+x^7+x^{14}+\cdots\right)\cdots\\ &= \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^3}\frac{1}{1-x^5}\frac{1}{1-x^7}\cdots = \frac{1-x^2}{1-x}\frac{1-x^4}{1-x^2}\frac{1-x^6}{1-x^3}\frac{1-x^8}{1-x^4}\cdots\\ &= (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\cdots = P_d(x).\end{aligned}$$

Do đó $p_o(n) = p_d(n)$.
Trong Ví dụ 1.20, số phân hoạch của 6 thành các số lẻ là $p_o(6) = p_d(6) = 4$, là các phân hoạch (1), (3), (6), và (10).

Ví dụ 1.22. Lập hàm sinh cho số phân hoạch lẻ của số nguyên dương n, sao cho mỗi số lẻ hoặc không xuất hiện trong phân hoạch, hoặc có số lần xuất hiện là lẻ. Chẳng hạn

n	Phân hoạch
1	1
2	không có
3	3, 1 + 1 + 1
4	3 + 1

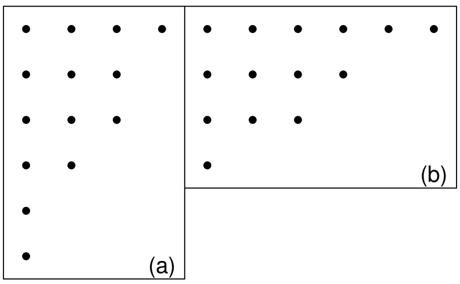
Việc chọn mỗi số lẻ $2i+1$, $i \in \mathbb{N}$, được mô tả bằng đa thức $x^0 + x^{2i+1} + x^{3(2i+1)+x^{5(2i+1)}} + \cdots = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} x^{(2k+1)(2i+1)}$.

Hàm sinh cần tìm là

$$f(x) = \prod_{i=0}^{\infty}\Big(1 + \sum_{k=0}^{\infty} x^{(2k+1)(2i+1)}\Big).$$

Một ý tưởng để biểu diễn phân hoạch số nguyên là *đồ thị Ferrers*, gồm một số hàng, mỗi hàng có các dấu chấm, sao cho số chấm hàng dưới không quá hàng trên. Số chấm trên mỗi hàng ứng với một số hạng của phân hoạch.

Trong Hình 1.1 là các đồ thị Ferrers cho hai phân hoạch của 14: (a) 4 + 3 + 3 + 2 + 1 + 1 và (b) 6 + 4 + 3 + 1. Ở đây, hai đồ thị này là *chuyển vị* của nhau.



Hình 1.1

1.4 Hàm sinh mũ

Định nghĩa 1.2. *Với dãy số thực $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$,*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2\frac{x^2}{2!} + a_3\frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{x^i}{i!}$$

gọi là hàm sinh mũ của dãy.

Các hệ số a_i, $i \in \mathbb{N}$, là số cách xắp xếp i vật nào đó –có thể có lặp– vào i vị trí.

Ví dụ 1.23. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ là hàm sinh mũ của dãy 1, 1, 1,. . . (e^x là hàm sinh của dãy $1, 1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \ldots$)

Cho k loại vật, trong đó loại i có n_i vật, $i = \overline{1, k}$. Hàm sinh mũ của số cách sắp xếp n vật trong các vật này, $n = 0, 1, 2, \ldots$, là

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x^2}{2!} + a_3 \frac{x^3}{3!} + \cdots \\ &= \prod_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{n_i} \frac{x^j}{j!} = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n_1}}{n_1!}\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n_2}}{n_2!}\right) \cdots \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n_k}}{n_k!}\right). \end{aligned}$$

Ví dụ 1.24. Số cách sắp xếp a_n của n chữ trong từ ENGINE, $n = 0, 1, 2, \ldots$, có hàm sinh mũ

$$\begin{aligned} f(x) &= \underbrace{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right)}_{\text{E}} \underbrace{(1 + x)}_{\text{G}} \underbrace{(1 + x)}_{\text{I}} \underbrace{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right)}_{\text{N}} \\ &= \frac{x^6}{4} + \frac{3x^5}{2} + \frac{17x^4}{4} + 7x^3 + 7x^2 + 4x + 1. \end{aligned}$$

Chẳng hạn, $\frac{a_4}{4!} = \frac{17}{4}$, hay $a_4 = 102$, gồm các cách xếp bốn chữ, được phân loại bởi số chữ được chọn mỗi loại, tương ứng với một số hạng khi khai triển $f(x)$ theo luật phân phối, mà hệ số của nó tỷ lệ với số hoán vị lặp của các chữ này, như bảng sau:

G	I	N	N	$1 \times x \times x \times \frac{x^2}{2!}$	$\frac{4!}{2!}$	E	I	N	N	$x \times 1 \times x \times \frac{x^2}{2!}$	$\frac{4!}{2!}$
E	G	N	N	$x \times x \times 1 \times \frac{x^2}{2!}$	$\frac{4!}{2!}$	E	G	I	N	$x \times x \times x \times x$	$4!$
E	E	N	N	$\frac{x^2}{2!} \times 1 \times 1 \times \frac{x^2}{2!}$	$\frac{4!}{2!\,2!}$	E	E	I	N	$\frac{x^2}{2!} \times 1 \times x \times x$	$\frac{4!}{2!}$
E	E	G	N	$\frac{x^2}{2!} \times x \times 1 \times x$	$\frac{4!}{2!}$	E	E	G	I	$\frac{x^2}{2!} \times x \times x \times 1$	$\frac{4!}{2!}$

Ví dụ 1.25. Xét khai triển Maclaurin của e^x và e^{-x}:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \quad \text{và} \quad e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots.$$

Khi đó

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \quad \text{và} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots.$$

Ví dụ 1.26. Trước đây, để liên lạc trên biển, mỗi tàu mang theo 48 lá cờ, mỗi loại đen, trắng, xanh, đỏ có 12 chiếc. Mỗi tín hiệu quy ước tương ứng với một cách xếp 12 cờ trong 48 cờ đó dọc mạn thuyền.

a) Có bao nhiêu tín hiệu sử dụng một số chẵn cờ xanh và một số lẻ cờ đen?

Hàm sinh mũ của số cách xếp a_n của n lá cờ, $n = 0, 1, 2, \ldots, 12$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \underbrace{\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)}_{\text{xanh}} \underbrace{\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)}_{\text{đen}} \underbrace{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^2}_{\text{đỏ, trắng}} \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \sinh 2x. \end{aligned}$$

Ta cần tìm a_{12}. Hệ số của x^{12} trong $f(x)$ là $\frac{a_{12}}{12!} = \frac{4\,096}{467\,775}$. Suy ra $a_{12} = 4\,194\,304$.

Tổng quát, vì $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x}\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \frac{1}{4}(e^{4x} - 1)$, nên $\frac{a_n}{n!} = \frac{1}{4} \times \frac{4^n}{n!} \Rightarrow a_n = 4^{n-1}$, với $1 \le n \le 12$.

b) Có bao nhiêu tín hiệu dùng hoặc không dùng cờ trắng, hoặc ít nhất ba cờ trắng.

Tương tự ý (a), hàm sinh mũ của số cách xếp b_n của n lá cờ, $n = 0, 1, \dots, 12$:

$$f(x) = \underbrace{\left(1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)}_{\text{trắng}}\underbrace{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^3}_{\text{đen, xanh, đỏ}}$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2} - x + e^x\right)e^{3x}.$$

Ta cần tìm b_{12}. Hệ số của x^{12} trong $g(x)$ là $\frac{b_{12}}{12!} = \frac{5\,377\,109}{239\,500\,800} \Rightarrow b_{12} = 10\,754\,218$.

Tổng quát, biến đổi $g(x) = e^{4x} - \frac{x^2}{2}e^{3x} - xe^{3x}$ cho ta hệ số của x^n là $\frac{b_n}{n!} = \frac{4^n}{n!} - \frac{1}{2}\frac{3^{n-2}}{(n-2)!} - \frac{3^{n-1}}{(n-1)!}$, với $2 \le n \le 12$. Từ đó $b_n = 4^n - 3^n n\frac{n+5}{18}$.

Ví dụ 1.27. Có bao nhiêu toàn ánh từ tập A cỡ m vào tập B cỡ n?

Đặt $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$. Mỗi toàn ánh $f : A \to B$ tương ứng 1–1 với dãy $f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_m)$ các phần tử của B, và mỗi phần tử của B xuất hiện ít nhất một lần trong dãy. Tức là, mỗi toàn ánh được xem như một cách xếp m phần tử của B trên n vị trí sao cho mỗi phần tử của B xuất hiện ít nhất một lần. Hàm sinh mũ của số cách xếp như vậy là

$$f(x) = \left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^n = (e^x - 1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^x)^{n-k}(-1)^k$$

trong đó

$$(e^x)^{n-k} = e^{(n-k)x} = 1 + [(n-k)x] + \frac{[(n-k)x]^2}{2!} + \frac{[(n-k)x]^3}{3!} + \cdots$$

nên hệ số của x^m trong $f(x)$ là $\frac{o_m}{m!} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{(n-k)^m}{m!}$, với o_m là số toàn ánh cần tìm. Ta có $o_m = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^m$.

1.5 Toán tử tổng

Cho hai hàm sinh $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ và $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$. Nhắc lại, hàm $f(x)g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ sinh tích chập $c_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k} = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + a_2 b_{i-2} + \cdots + a_i b_0$, với $i \in \mathbb{N}$. Nếu chọn $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$, tức là $b_i = 1$, $\forall i \in \mathbb{N}$, thì $c_i = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + c_i$. Hàm $\frac{f(x)}{1-x}$ sinh dãy các tổng $a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, a_0 + a_1 + a_2 + a_3, \dots$, và $\frac{1}{1-x}$ gọi là *toán tử tổng*.

Ví dụ 1.28. Số Catalan[a] c_n là số cách tính tích các ma trận $A = A_0 A_1 A_2 \cdots A_n$. Ta có các cách đặt dấu ngoặc sau A_k, với $k = \overline{0, n-1}$:

$$A = \underbrace{(A_0 A_1 A_2 \ldots A_k)}_{c_k \text{ cách}} \underbrace{(A_{k+1} A_{k+2} \ldots A_n)}_{c_{n-k-1} \text{ cách}} \Rightarrow c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-k-1},$$

với $c_1 = 1 = c_0^2 \Rightarrow c_0 = 1$. Xét $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, ta có $[f(x)]^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ với $a_n = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k} = c_{n+1}$. Suy ra

$$[f(x)]^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} x^n = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} x^{n+1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = \frac{1}{x}[f(x) - 1]$$

$$\Rightarrow x[f(x)]^2 - f(x) + 1 = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Hệ số của x^n trong $f(x)$, tương ứng với mỗi nghiệm, là

$$c_n = \pm \frac{1}{2} \binom{\frac{1}{2}}{n+1} (-4)^{n+1} = \pm \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots(\frac{1}{2}-n)}{(n+1)!} (-4)^{n+1}$$

Ta chọn nghiệm $f(x)$ ứng với dấu $-$ để hệ số này dương. Cuối cùng,

$$c_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{(n+1)!} 2^n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \frac{2^n}{n!(n+1)} = \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

[a]Engène Charles Catalan, 1814-1894, nhà toán học Bỉ