ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ

ĐỀ THI HẾT MÔN
HỌC KỲ II - NĂM HỌC 2017 - 2018

<u>Đề thi số: 1</u>

Bài thi môn: Giải Tích II — **Số tín chỉ:** 4

Lớp: MAT1042-21, MAT1042-23 — **Thời gian làm bài:** 90 phút

<u>Câu 1</u> (2.0 đ). Cho hàm số: $z=(x-y)\cdot\sqrt{x^2+y^2}$. Tính $z'_x(0,0), z'_y(0,0)$.

<u>Câu 2</u> (2.0 đ). Tính tích phân hai lớp: $\iint\limits_D x^2dxdy$, D là miền phẳng được giới hạn bởi các đường: $y=x^2, x=y^2$.

<u>Câu 3</u> (2.0 đ). Tính tích phân: $I=\oint\limits_C (xy+x+y+\sin^3 x)dx+(xy+x-y+2^y)dy$, với C là đường tròn: $x^2+y^2=2x+2y$, chiều C ngược chiều kim đồng hồ.

<u>Câu 4</u> (2.0 đ). Tính diện tích mặt cầu bán kính R.

<u>Câu 5</u> (2.0 đ). Giải phương trình vi phân: $y''-y=2x+1-xe^x$.

---------- Hết ----------

Sinh viên không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên sinh viên:……..……………………..; Số báo danh:……………………………….

Đáp án - Đề số 1

Câu 1 (2.0 đ):

(1.0) $z'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{z(x,0)-z(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$.

(1.0) $z'_y(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{z(0,y)-z(0,0)}{y}=\lim\limits_{x\to 0}\left(-|y|\right)=0$.

Câu 2 (2.0 đ):

(1.0) Vẽ hình. $D=\left\{0\le x\le 1, x^2\le y\le\sqrt{x}\right\}$.

(1.0) Do đó, $\iint\limits_D x^2dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}}x^2dy=\int\limits_0^1\left(x^{5/2}-x^4\right)dx=\left[\dfrac{2}{7}x^{7/2}-\dfrac{1}{5}x^5\right]_0^1=\dfrac{3}{35}$.

Câu 3 (2.0 đ):

(0.5) Vẽ hình. Ta có: $P=xy+x+y+\sin^3 x\,;Q=xy+x-y+2^y$.

$\Rightarrow P'_y=x+1;Q'_x=y+1$: các đạo hàm riêng liên tục trên miền D được giới hạn bởi đường cong kín C.

(0.5) Dùng công thức Green đối với đường cong kín C:

$$I=\iint\limits_D\left(Q'_x-P'_y\right)dxdy=\iint\limits_D\left(y-x\right)dxdy.$$

(0.5) Đặt: $x=1+r\cos\varphi, y=1+r\sin\varphi, |J|=r, D_{r\varphi}=\left\{0\le\varphi\le 2\pi, 0\le r\le\sqrt{2}\right\}$.

(0.5) Do đó, $I=\iint\limits_{D_{r\varphi}}r^2\left(\sin\varphi-\cos\varphi\right)drd\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\left(\sin\varphi-\cos\varphi\right)d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{2}}r^2dr=$

$$=\left[-\sin\varphi-\cos\varphi\right]_0^{2\pi}\cdot\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}}=0 .$$

Câu 4 (2.0 đ):

(0.5) Phương trình nửa trên mặt cầu S: $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

$$dS=\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}=\frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} .$$

Hình chiếu của nửa trên mặt cầu xuống mp xOy là miền $D_{xy}=\left\{x^2+y^2\le R^2\right\}$.

(0.5) Diện tích của mặt cầu: $DT=2\iint\limits_S dS=2\iint\limits_{D_{xy}}\dfrac{Rdxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$.

(0.5) Đặt: $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi, |J|=r, D_{r\varphi}=\left\{0\le\varphi\le 2\pi, 0\le r\le R\right\}$.

(0.5) Do đó, $DT=2R\iint\limits_{D_{r\varphi}}\dfrac{rdrd\varphi}{\sqrt{R^2-r^2}}=-R\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R\left(R^2-r^2\right)^{-1/2}d\left(R^2-r^2\right)=$

$$= -4\pi R \cdot \sqrt{R^2 - r^2}\,\Big]_0^R = 4\pi R^2 \ .$$

<u>Câu 5 (2.0 đ)</u>

<u>(0.5)</u> Pt không thuần nhất: $y'' - y = 2x + 1 - xe^x$

Pt thuần nhất: $y'' - y = 0$

Pt đặc trưng: $k^2 - 1 = 0 \rightarrow k = 1, k = -1$

Nghiệm tổng quát của pt thuần nhất: $y^*(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

<u>(0.5)</u> Nghiệm riêng của pt không thuần nhất tìm dưới dạng:

$$\bar{y}(x) = Ax + B + x \cdot e^x \cdot (Cx + D)$$

<u>(1.0)</u> Dùng phương pháp đồng nhất thức: $A = -2, B = -1, C = -\frac{1}{4}, D = \frac{1}{4}$

Nghiệm tổng quát của pt không thuần nhất:

$$y(x) = y^*(x) + \bar{y}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 2x - 1 + xe^x\left(-\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\right).$$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ

ĐỀ THI HẾT MÔN
HỌC KỲ II - NĂM HỌC 2017 - 2018

Đề thi số: 2

Bài thi môn: Giải Tích II **Số tín chỉ:** 4

Lớp: MAT1042-21, MAT1042-23 **Thời gian làm bài:** 90 phút

Câu 1 (2.0 đ). Cho hàm số: $z=(2x-y)\cdot\sqrt{x^2+y^2}$. Tính $z'_x(0,0), z'_y(0,0)$.

Câu 2 (2.0 đ). Tính tích phân hai lớp: $\iint\limits_D \sqrt{x}dxdy$, D là miền phẳng được giới hạn bởi các đường: $y=x^2, x=y^2$.

Câu 3 (2.0 đ). Tính tích phân: $I=\oint\limits_C (xy+x+y+\sin^3 x)dx+(xy+x-y+2^y)dy$, với C là đường tròn: $x^2+y^2=2x-2y$, chiều C ngược chiều kim đồng hồ.

Câu 4 (2.0 đ). Tính diện tích mặt cầu bán kính R.

Câu 5 (2.0 đ). Giải phương trình vi phân: $y''-y=3x+2xe^x$.

---------- **Hết** ----------

Sinh viên không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên sinh viên:……..……………………..; Số báo danh:……………………………….

Đáp án - Đề số 2

Câu 1 (2.0 đ):

(1.0) $z'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{z(x,0)-z(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(2|x|)=0$.

(1.0) $z'_y(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{z(0,y)-z(0,0)}{y}=\lim\limits_{x\to 0}(-|y|)=0$.

Câu 2 (2.0 đ):

(1.0) Vẽ hình. $D=\left\{0\le x\le 1, x^2\le y\le \sqrt{x}\right\}$.

(1.0) Do đó, $\iint\limits_D \sqrt{x}dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}}\sqrt{x}dy=\int\limits_0^1\left(x-x^{5/2}\right)dx=\left[\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{2}{7}x^{7/2}\right]_0^1=\dfrac{3}{14}$.

Câu 3 (2.0 đ):

(0.5) Vẽ hình. Ta có: $P=xy+x+y+\sin^3 x\,;Q=xy+x-y+2^y$.

$\Rightarrow P'_y=x+1;Q'_x=y+1$: các đạo hàm riêng liên tục trên miền D được giới hạn bởi đường cong kín C.

(0.5) Dùng công thức Green đối với đường cong kín C:

$$I=\iint\limits_D\left(Q'_x-P'_y\right)dxdy=\iint\limits_D(y-x)dxdy.$$

(0.5) Đặt: $x=1+r\cos\varphi, y=-1+r\sin\varphi, |J|=r, D_{r\varphi}=\left\{0\le\varphi\le 2\pi, 0\le r\le\sqrt{2}\right\}$.

(0.5) Do đó, $I=\iint\limits_{D_{r\varphi}}\left[r^2(\sin\varphi-\cos\varphi)-2r\right]drd\varphi=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{2}}\left[r^2(\sin\varphi-\cos\varphi)-2r\right]dr=$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\sin\varphi-\frac{2\sqrt{2}}{3}\cos\varphi-2\right)d\varphi=-4\pi.$$

Câu 4 (2.0 đ):

(0.5) Phương trình của nửa trên mặt cầu S: $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

$$dS=\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}=\frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

Hình chiếu của nửa trên mặt cầu xuống mp xOy là miền $D_{xy}=\left\{x^2+y^2\le R^2\right\}$.

(0.5) Diện tích của mặt cầu: $DT=2\iint\limits_S dS=2\iint\limits_{D_{xy}}\dfrac{Rdxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$.

(0.5) Đặt: $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi, |J|=r, D_{r\varphi}=\left\{0\le\varphi\le 2\pi, 0\le r\le R\right\}$.

(0.5) Do đó, $DT=2R\iint\limits_{D_{r\varphi}}\dfrac{rdrd\varphi}{\sqrt{R^2-r^2}}=-R\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R\left(R^2-r^2\right)^{-1/2}d\left(R^2-r^2\right)=$

$$= -4\pi R \cdot \sqrt{R^2 - r^2}\,\Big]_0^R = 4\pi R^2 \ .$$

<u>Câu 5 (2.0 đ)</u>

<u>(0.5)</u> Pt không thuần nhất: $y'' - y = 3x + 2xe^x$

Pt thuần nhất: $y'' - y = 0$

Pt đặc trưng: $k^2 - 1 = 0 \to k = 1,\, k = -1$

Nghiệm tổng quát của pt thuần nhất: $y^*(x) = C_1e^x + C_2e^{-x}$

<u>(0.5)</u> Nghiệm riêng của pt không thuần nhất tìm dưới dạng:

$$\overline{y}(x) = Ax + B + x \cdot e^x \cdot (Cx + D)$$

<u>(1.0)</u> Dùng phương pháp đồng nhất thức: $A = -3, B = 0, C = \frac{1}{2}, D = -\frac{1}{2}$

Nghiệm tổng quát của pt không thuần nhất:

$$y(x) = y^*(x) + \overline{y}(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} - 3x + xe^x\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right).$$