CHƯƠNG 8. KIỂM ĐỊNH GIẢ THIẾT THỐNG KÊ

Bài 8.1. Kiểm định giả thiết về giá trị trung bình

I. Nguyên lý chung:

Bài toán kiểm định giả thiết thống kê là bài toán: căn cứ vào các số liệu thống kê cần phải đưa ra kết luận về một giả thiết thống kê nào đó mà ta quan tâm.

Một giả thiết thống kê là một giả thiết về phân bố xác suất của tập chính đang xét. Nếu phân bố xác suất đó được đặc trưng bởi các tham số (như XÁC SUẤT (tỷ lệ), giá trị trung bình hay phương sai, …), thì giả thiết thống kê là giả thiết về tham số của phân bố đó.

Từ nay trở đi ta sẽ hiểu một giả thiết là một giả thiết thống kê, một quy tắc dẫn tới quyết định chấp nhận hay bác bỏ giả thiết đã nêu gọi là một kiểm định (test) thống kê.

Giả thiết đưa ra kiểm định được ký hiệu H_0, đó là giả thiết mà ta nghi ngờ. Đối lập với giả thiết H_0 là đối thiết H_1. Chấp nhận H_0 nghĩa là bác bỏ H_1, ngược lại, bác bỏ H_0 nghĩa là chấp nhận H_1.

Câu hỏi đặt ra là: Chúng ta chấp nhận hay bác bỏ một giả thiết bằng cách nào? Để đưa ra quy tắc kiểm định, các nhà thống kê đều nhất trí với nhau nguyên lý sau đây:

"Nếu một biến cố có xác suất rất nhỏ thì trong một phép thử hay một vài phép thử, biến cố đó sẽ không xảy ra".

Như vậy, chúng ta sẽ bác bỏ H_0 nếu xuất hiện biến cố có xác suất nhỏ, tính trong điều kiện giả thiết H_0 đúng.

Chúng ta sẽ minh họa bởi các ví dụ sau:

Ví dụ 1. Gieo một đồng tiền 100 lần ta thấy xuất hiện mặt sấp 60 lần. Ta nghi ngờ rằng, xác suất xuất hiện mặt sấp lớn hơn xác suất xuất hiện mặt ngửa.

Gọi p là xác suất xuất hiện mặt sấp. Khi đó ta có bài toán kiểm định như sau:

- Giả thiết H_0: $p=1/2$
- Đối thiết H_1: $p>1/2$

Ta tính

$$P\{S_{100} \geq 60\} = P\left\{\frac{\hat{p}-0.5}{\sqrt{0.5x0.5/100}} \geq \frac{0.6-0.5}{\sqrt{0.5x0.5/100}}\right\} = Q(\frac{10(0.6-0}{0}$$

$$= Q(1.9) = 0.028717$$

Đây là một xác suất nhỏ, mà lại xảy ra trong một lần kiểm định. Vậy ta bác bỏ H_0, chấp nhận H_1.

Ví dụ 2. Một cuộc nghiên cứu ở Mỹ cho biết trẻ em Mỹ ở độ tuổi đến trường tiêu thụ trung bình 19.4 OZ sữa 1 ngày (1 OZ=28.35 g).

Trong một mẫu ngẫu nhiên gồm 140 trẻ em người ta tính được lượng sữa chúng uống trung bình một ngày là 18.5 OZ với độ lệch tiêu chuẩn là 6.8 OZ. Điều này có cho phép ta kết luận là lượng sữa tiêu thụ ít hơn 19.4 OZ hay không?

Giải

Gọi μ là lượng sữa tiêu thụ trung bình trong 1 ngày. Ta đi đến bài toán kiểm định giả thiết thống kê như sau:

- Giả thiết H_0: μ=19.4
- Đối thiết H_1: μ<19.4

Giả sử H_0 đúng, khi đó xác suất để trung bình mẫu

$\overline{X} \leq 18.5$ bằng bao nhiêu?

Do $\overline{X}$ có phân bố chuẩn (hoặc xấp xỉ chuẩn) với kỳ vọng là 19.4 và độ lệch chuẩn là $\frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{6.8}{\sqrt{140}} = 0.575$.

Vậy

$$P\{\overline{X} \leq 18.5\} \approx P\left\{Z \leq \frac{18.5-19.4}{0.575}\right\} = P\{Z \leq -1.57$$

.

Xác suất này không nhỏ lắm.

Vì vậy ta chưa có đủ cơ sở để bác bỏ giả thiết H_0. Nói cách khác, số liệu đã có chưa đủ cơ sở để bác bỏ giả thiết H_0.

Trong khi đưa ra quyết định, chúng ta có thể phạm phải 1 trong 2 loại sai lầm sau:

- *Sai lầm loại 1: Bác bỏ H_0 trong khi thực ra H_0 đúng*
- Sai lầm loại 2: Chấp nhận H_0 trong khi thực ra H_0 sai.

Sai lầm loại 1, tương tự như sai lầm của quan tòa, khi "Kết án nhầm" người vô tội; còn sai lầm loại 2 tương tự như sai lầm "Tha bổng" kẻ có tội.

Chúng ta mong muốn làm cực tiểu cả 2 loại sai lầm trên, nhưng khi đó chúng ta phải trả giá đắt về thời gian, tiền của và công sức.

Hơn nữa, khi ta giảm sai lầm loại này lại làm tăng sai lầm loại kia, và ngược lại.

Trong xã hội văn minh, người ta coi kết án nhầm người vô tội là 1 sai lầm nghiêm trọng hơn so với sai lầm tha bổng kẻ có tội.

Trong bài toán kiểm định cũng vậy, ta coi sai lầm loại 1 là nghiêm trọng hơn sai lầm loại 2. Cho nên, người ta cố định trước sai lầm loại 1. Xác suất mắc sai lầm loại 1 được gọi là mức ý nghĩa của tiêu chuẩn, ký hiệu là α. Xác suất mắc sai lầm loại 2 ký hiệu là β. Giá trị $1-\beta$ được gọi là LỰC LƯỢNG của tiêu chuẩn. Lực lượng của tiêu chuẩn là xác suất bác bỏ H_0 khi H_0 sai.

Mức ý nghĩa α của tiêu chuẩn thường được lấy là 0.05; 0.02 hoặc 0.01.

Trong tập các tiêu chuẩn có cùng mức ý nghĩa α, tiêu chuẩn nào có xác suất sai lầm loại 2 nhỏ nhất được xem là tiêu chuẩn "tốt nhất".

Các tiêu chuẩn được đưa ra ở chương này đều đã được chứng minh chặt chẽ về mặt toán học là các tiêu chuẩn tốt nhất.

Khi kiểm định thống kê dẫn tới chấp nhận H_0 là một quyết định dè dặt: Chấp nhận H_0, không có nghĩa là H_0 đúng, mà chỉ nên hiểu là với các số liệu hiện có, không có đủ cơ sở để bác bỏ H_0, cần phải nghiên cứu tiếp.

Các bước cần thiết trong việc giải một bài toán kiểm định giả thiết thống kê như sau:

1.Phát biểu giả thiết H_0 và đối thiết H_1

2.Chọn tiêu chuẩn (test) thống kê.

3.Định rõ mức ý nghĩa α (xác suất mắc sai lầm loại 1).

4.Chọn miền bác bỏ giả thiết H_0.

5.Tính giá trị của tiêu chuẩn thống kê từ mẫu quan sát được.

6.Kết luận: Bác bỏ hay chấp nhận giả thiết, tùy thuộc vào việc giá trị của tiêu chuẩn có rơi vào miền bác bỏ giả thiết hay không.

II. Kiểm định giả thiết về giá trị trung bình:

Giả sử $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ là mẫu ngẫu nhiên được rút từ biến ngẫu nhiên chuẩn X có $EX=\mu$, $DX=\sigma^2$ (Nếu X không chuẩn thì $n\geq120$).

3.A.1. Đối thiết hai phía: Xét BTKĐGT

Giả thiết H_0 : $\mu=\mu_0$

Đối thiết H_1: $\mu\neq\mu_0$, với mức ý nghĩa α cho trước.

1.Nếu phương sai $\sigma^2 = \sigma_0^2$ đã biết

Bài toán dạng 1:

Các bước tiến hành như sau:

+ Bước 1:

Giả thiết $H_0 : \mu = \mu_0$

Đối thiết $H_1 : \mu \neq \mu_0$

+ Bước 2: Xác định hàm tiêu chuẩn

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}}$$

+ Bước 3: Xác định mức ý nghĩa α

Do đối thiết 2 phía và hàm tiêu chuẩn z nên ta tra α/2 phân vị của phân phối chuẩn tắc, tra bảng hoặc Excel:

$z_{\alpha/2}$ =NORMSINV(1-α/2)

α	10%	5%	2%	1%
$z_{\alpha/2}$	1.645	1.96	2.326	2.576

+Bước 4: Xác định miền bác bỏ

S={(X_1, X_2, …, X_n):|z|>$z_{\alpha/2}$}

+Bước 5: Dựa vào TB mẫu $\bar{x}$ để tính $z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}}$

+Bước 6: Nếu |z|>$z_{\alpha/2}$ thì ta bác bỏ H_0.

Nếu |z|<=$z_{\alpha/2}$ chấp nhận giả thiết H_0.

Bài toán dạng 2:

Các bước tiến hành như sau:

+ Bước 1:

Giả thiết $H_0 : \mu = \mu_0$

Đối thiết $H_1 : \mu > \mu_0$

+ Bước 2: Xác định hàm tiêu chuẩn

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_0 / \sqrt{n}}$$

+ Bước 3: Xác định mức ý nghĩa α

Do đối thiết 1 phía và hàm tiêu chuẩn z nên ta tra α phân vị của phân phối chuẩn, tra bảng hoặc Excel:

z_α =NORMSINV(1-α)

α	5%	2.5%	2%	1%	0.5%
z_α	1.645	1.96	2.054	2.326	2.576

+Bước 4: Xác định miên bác bỏ

$S=\{(X_1, X_2, \ldots, X_n): z>z_\alpha\}$

+Bước 5: Dựa vào TB mẫu $\bar{x}$ tính $z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$

+Bước 6: Nếu $z>z_\alpha$ thì ta bác bỏ H_0.

Nếu $z<=z_\alpha$ chấp nhận giả thiết H_0.

Ví dụ 2. Tập chính X có phân phối chuẩn với giá trị trung bình μ chưa biết, σ_0 =5.2, n=25, TB mẫu $\bar{x} = 27.56$. Với mức ý nghĩa α=0.05, hãy kiểm định bài toán sau:

- Giả thiết H_0: μ=26
- Đối thiết H_1: μ≠26.

Giải

Các bước tiến hành như sau:

+ Bước 1:

Giả thiết $H_0: \mu = 26$

Đối thiết $H_1: \mu \neq 26$

+ Bước 2: Xác định hàm tiêu chuẩn

$$z = \frac{\bar{x}-26}{5.2/\sqrt{25}}$$

+ Bước 3: Xác định mức ý nghĩa α=0.05

Do đối thiết 2 phía và hàm tiêu chuẩn z nên ta tra α/2 phân vị của phân phối chuẩn, tra bảng hoặc Excel:

$z_{\alpha/2}$ =NORMSINV(1-α/2)=1.96

+Bước 4: Xác định miên bác bỏ

$S=\{(X_1, X_2, \ldots, X_n): |z|>1.96\}$

+Bước 5: Dựa vào mẫu $\bar{x} = 27.6$ và

$$z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} = \frac{27.6-26}{5.2/5} = 1.6$$

+Bước 6:Vì |z|=1.6 <$z_{0.025}$=1.96, nên ta chấp nhận giả thiết H_0.

Ví dụ 3. Tập chính X có phân phối chuẩn với giá trị trung bình μ chưa biết, σ_0 =5.2, n=25, TB mẫu $\overline{x} = 27.56$. Với mức ý nghĩa α=0.05, hãy kiểm định bài toán sau:

- Giả thiết H_0: μ=26
- Đối thiết H_1: μ > 26.

Giải

Các bước tiến hành như sau:

+ Bước 1:

Giả thiết $H_0 : \mu = 26$

Đối thiết $H_1 : \mu > 26$

+ Bước 2: Xác định hàm tiêu chuẩn

$$z = \frac{\overline{x} - 26}{5.2/\sqrt{25}}$$

+ Bước 3: Xác định mức ý nghĩa α=0.05

Do đối thiết 1 phía và hàm tiêu chuẩn z nên ta tra α phân vị của phân phối chuẩn, tra bảng hoặc Excel:

z_α =NORMSINV(1-α)=1.645

+Bước 4: Xác định miên bác bỏ

S={(X_1, X_2, …, X_n): z>1.645}

+Bước 5: Dựa vào mẫu $\overline{x} = 27.6$ và $z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} = \frac{27.6 - 26}{5.2/5} = 1.6$

+Bước 6:Vì z=1.6 <$z_{0.05}$=1.645, nên ta chấp nhận giả thiết H_0.

Bài toán dạng 3:

Các bước tiến hành như sau:

+ Bước 1:

Giả thiết $H_0 : \mu = \mu_0$

Đối thiết $H_1 : \mu < \mu_0$

+ Bước 2: Xác định hàm tiêu chuẩn

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}}$$

+ Bước 3: Xác định mức ý nghĩa α

Do đối thiết 1 phía và hàm tiêu chuẩn z nên ta tra α phân vị của phân phối chuẩn, tra bảng hoặc Excel:

=NORMSINV(1-α)

+Bước 4: Xác định miên bác bỏ

$S=\{(X_1, X_2, \ldots, X_n): z<-z_\alpha\}$

+Bước 5: Dựa vào mẫu tính $\bar{x}$ và $z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}}$

+Bước 6: Nếu $z< - z_\alpha$ thì ta bác bỏ H_0.

Nếu $z=>- z_\alpha$ chấp nhận giả thiết H_0.

Ví dụ 3. GS $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ với μ chưa biết, σ=5.2, n=36, TB mẫu $\bar{x} = 27.56$. Với mức ý nghĩa α=0.05, hãy kiểm định bài toán sau:

- Giả thiết H_0: μ=29.64
- Đối thiết H_1: μ<29.64

Giải

+ Bước 1:

Giả thiết $H_0 : \mu = 29.64$

Đối thiết $H_1 : \mu < 29.64$

+ Bước 2: Xác định hàm tiêu chuẩn

$$z = \frac{\bar{x} - 29.64}{5.2 / \sqrt{36}}$$

+ Bước 3: Xác định mức ý nghĩa α=0.05

Do đối thiết 1 phía và hàm tiêu chuẩn z nên ta tra α=0.05 phân vị của phân phối chuẩn, tra bảng hoặc Excel:

=NORMSINV(1-0.05)=1.645

+Bước 4: Xác định miên bác bỏ

$S=\{(X_1, X_2, \ldots, X_n): z<-1.645\}$

+Bước 5: Dựa vào mẫu tính $\bar{x} = 27.56$ và

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} = \frac{27.56 - 29.64}{5.2 / \sqrt{36}} = -2.4$$

+Bước 6: Vì z=-2.4 < z_α=-1.645 nên ta bác bỏ giả thiết H_0, chấp nhận đối thiết H_1, nghĩa là chấp nhận giá trị TB $\mu < 29.64$.

2.Nếu σ^2 chưa biết:

Trong trường hợp này ta phải giả thiết về tính chuẩn của biến ngẫu nhiên X, cỡ mẫu nhỏ hơn 30.

Chúng ta có 3 dạng kiểm định:

Dạng 1. Đối thiết 2 phía

Giả thiết $H_0 : \mu = \mu_0$

Đối thiết $H_1 : \mu \neq \mu_0$

Hàm tiêu chuẩn sử dụng ở đây là $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n}.$

Với mức ý nghĩa α ta phải tra α/2 phân vị của phân phối Student n-1 bậc tự do: $t_{\alpha/2,\, n-1}$.

Nếu tra bằng Excel: $t_{\alpha/2,\, n-1}$=TINV(α, n-1).

Ví dụ 4. GS X~N(μ,σ^2) với μ chưa biết, σ^2 chưa biết, n=16, TB mẫu $\bar{x} = 27.56$, s=5.2 . Với mức ý nghĩa α=0.05, hãy kiểm định bài toán sau:

- Giả thiết H_0: μ=26
- Đối thiết H_1: μ≠26

Giải

+ Bước 1:

Giả thiết $H_0 : \mu = 26$

Đối thiết $H_1 : \mu \neq 26$

+ Bước 2: Xác định hàm tiêu chuẩn

$$t = \frac{\bar{x} - 26}{5.2/\sqrt{16}}$$

+ Bước 3: Xác định mức ý nghĩa α=0.05

Do đối thiết 2 phía và hàm tiêu chuẩn t nên ta tra α=0.025 phân vị của phân phối Student với 15 bậc tự do, tra bảng hoặc Excel:

=TINV(0.05,15)=2.13

+Bước 4: Xác định miên bác bỏ

S={(X_1, X_2, …, X_n): |t|>2.13}

+Bước 5: Dựa vào mẫu tính $\bar{x} = 27.56$ và $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{27.56 - 26}{5.2/\sqrt{16}} = 1.2$

+Bước 6: Vì $|t|=1.2 < t_{\alpha/2,15}=2.13$ nên ta chấp nhận giả thiết H_0 nghĩa là chấp nhận giá trị TB $\mu=26$.

Dạng 2. Đối thiết 1 phía lớn hơn

Giả thiết $H_0 : \mu = \mu_0$

Đối thiết $H_1 : \mu > \mu_0$

Ví dụ 5:

GS $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ với μ chưa biết, σ^2 chưa biết, n=16, TB mẫu $\bar{x} = 29.12$, s=5.2 . Với mức ý nghĩa $\alpha=0.05$, hãy kiểm định bài toán sau:

- Giả thiết H_0: $\mu=26$
- Đối thiết H_1: $\mu>26$
- Giải

+ Bước 1:

- Giả thiết $H_0 : \mu = 26$
- Đối thiết $H_1 : \mu > 26$

+ Bước 2: Xác định hàm tiêu chuẩn

$$t = \frac{\bar{x} - 26}{5.2/\sqrt{16}}$$

+ Bước 3: Xác định mức ý nghĩa $\alpha=0.05$

Do đối thiết 1 phía và hàm tiêu chuẩn t nên ta tra $\alpha=0.05$ phân vị của phân phối Student với 15 bậc tự do, tra bảng hoặc Excel:

=TINV(0.10,15)=1.75

+Bước 4: Xác định miên bác bỏ

$S=\{(X_1, X_2, \ldots, X_n): t>1.75\}$

+Bước 5: Dựa vào mẫu tính $\overline{x} = 29.12$ và $t = \frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{29.12-26}{5.2/\sqrt{16}} = 2.4$

+Bước 6: Vì t=2.4 > $t_{\alpha,15}$=1.75 nên ta bác bỏ giả thiết H_0 nghĩa là chấp nhận giá trị TB μ >26.

Dạng 3. Đối thiết 1 phía nhỏ hơn

Giả thiết $H_0 : \mu = \mu_0$

Đối thiết $H_1 : \mu < \mu_0$

Ví dụ 6:

GS X~N(μ,σ^2) với μ chưa biết, σ^2 chưa biết, n=16, TB mẫu $\overline{x} = 24.12$, s=5.2 . Với mức ý nghĩa α=0.05, hãy kiểm định bài toán sau:

- Giả thiết H_0: μ=26
- Đối thiết H_1: μ<26
- Giải

+ Bước 1:

- Giả thiết $H_0 : \mu = 26$
- Đối thiết $H_1 : \mu < 26$

+ Bước 2: Xác định hàm tiêu chuẩn

$$t = \frac{\overline{x}-26}{5.2/\sqrt{16}}$$

+ Bước 3: Xác định mức ý nghĩa α=0.05

Do đối thiết 1 phía và hàm tiêu chuẩn t nên ta tra α=0.05 phân vị của phân phối Student với 15 bậc tự do, tra bảng hoặc Excel:

=TINV(0.10,15)=1.75

+Bước 4: Xác định miên bác bỏ

S={(X_1, X_2, …, X_n): t<-1.75}

+Bước 5: Dựa vào mẫu tính $\bar{x} = 24.12$ và $t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{29.12-26}{5.2/\sqrt{16}} = 2.4$

+Bước 6: Vì t=2.4 > $t_{\alpha,15}$=1.75 nên ta bác bỏ giả thiết H_0 nghĩa là chấp nhận giá trị TB μ >26.

Hàm tiêu chuẩn sử dụng ở đây là $t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s}\sqrt{n}.$

- Xuất phát từ mẫu đã cho ta tính $\bar{x}$, s^2 và $t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s}\sqrt{n}.$
- Với α đã cho, tra bảng phân phối Student với n-1 bậc tự do ta tìm được $t_{\alpha/2,n-1}$ từ hệ thức $P\left\{|T_{n-1}| > t_{\alpha/2,n-1}\right\} = \alpha$, trong đó T_{n-1} là biến ngẫu nhiên Student với n-1 bậc tự do.

So sánh t và $t_{\alpha/2,n-1}$:

- Nếu $|t| > t_{\alpha/2,n-1}$ ta bác bỏ giả thiết H_0
- Nếu $|t| < t_{\alpha/2,n-1}$ ta chấp nhận giả thiết H_0 .

Như vậy miền tiêu chuẩn là:

$$S = \left\{(X_1, X_2, ..., X_n) : \frac{|\bar{x}-\mu_0|}{s}\sqrt{n} \geq t_{\alpha/2,n-1}\right\}.$$

3.A. 2. Đối thuyết một phía: Xét BTKĐGT H_0 : $\mu=\mu_0$ với đối thuyết H_1: $\mu>\mu_0$, với mức ý nghĩa α cho trước.

1.Nếu σ^2 đã biết

Các bước tiến hành như sau:

- Xuất phát từ mẫu đã cho tính $\bar{x}$ và $z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$
- Tìm giá trị z(α) từ bảng sao cho Φ(z(α))=1-α.

So sánh u và u(α):

- Nếu $z \geq z(\alpha)$ ta bác bỏ H_0.

- Nếu $z < z(\alpha)$ ta chấp nhận H_0.

Như vậy miền tiêu chuẩn là:

$$S = \left\{(X_1, X_2, ..., X_n) : \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \geq z(\alpha)\right\}$$

2.Nếu σ^2 chưa biết:

Trong trường hợp này ta phải giả thiết về tính chuẩn của biến ngẫu nhiên X và n<30.

- Xuất phát từ mẫu đã cho ta tính $\bar{x}$, s^2 và $t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s}\sqrt{n}.$

- Với α đã cho, tra bảng phân phối Student với n-1 bậc tự do ta tìm được $t_{\alpha,n-1}$ từ hệ thức $P\{T_{n-1} \geq t_{\alpha,n-1}\} = \alpha$, trong đó T_{n-1} là biến ngẫu nhiên Student với n-1 bậc tự do.

So sánh t và $t_{\alpha,n-1}$:

- Nếu $t \geq t_{\alpha,n-1}$ ta bác bỏ giả thiết H_0

- Nếu $t < t_{\alpha,n-1}$ ta chấp nhận giả thiết H_0.

Như vậy miền tiêu chuẩn là:

$$S = \left\{(X_1, X_2, ..., X_n) : \frac{\bar{x}-\mu_0}{s}\sqrt{n} \geq t_{\alpha,n-1}\right\}$$

Ví dụ 4. μ chưa biết, σ chưa biết, n=16, X~N(μ,σ²). TB mẫu $\bar{x} = 27.56$, $S^2=5,2^2$. Với mức ý nghĩa α=0.05, hãy kiểm định bài toán sau:

- Giả thiết H_0: μ=26

- Đối thiết H_1: μ > 26

3. A. 3. Đối thuyết một phía: Xét BTKĐGT H_0 : μ=μ₀ với đối thuyết H_1: μ<μ₀, với mức ý nghĩa α cho trước.

1.Nếu σ^2 đã biết

Các bước tiến hành như sau:

- Xuất phát từ mẫu đã cho tính $\bar{x}$ và $z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

- Tìm giá trị z(α) từ bảng sao cho Φ(z(α))=1-α.

So sánh z và z(α):

- Nếu $z \leq -z(\alpha)$ ta bác bỏ H_0 .

- Nếu $z > -z(\alpha)$ ta chấp nhận H_0 .

Như vậy miền tiêu chuẩn là:

$$S = \left\{(X_1, X_2, ..., X_n) : \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \le -z(\alpha)\right\}$$

2.Nếu σ^2 chưa biết:

Trong trường hợp này ta phải giả thiết về tính chuẩn của biến ngẫu nhiên X và cỡ mẫu n<30.

- Xuất phát từ mẫu đã cho ta tính $\bar{x}$, s^2 và $t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s}\sqrt{n}.$

- Với α đã cho, tra bảng phân phối Student với n-1 bậc tự do ta tìm được $t_{\alpha,n-1}$ từ hệ thức $P\{T_{n-1} \ge t_{\alpha,n-1}\} = \alpha$, trong đó T_{n-1} là biến ngẫu nhiên Student với n-1 bậc tự do.

So sánh t và $t_{\alpha,n-1}$:

- Nếu $t \le -t_{\alpha,n-1}$ ta bác bỏ giả thiết H_0

- Nếu $t > -t_{\alpha,n-1}$ ta chấp nhận giả thiết H_0 .

Như vậy miền tiêu chuẩn là:

$$S = \left\{(X_1, X_2, ..., X_n) : \frac{\bar{x}-\mu_0}{s}\sqrt{n} \le -t_{\alpha,n-1}\right\}$$

Bài tập

Giả sử ta có mẫu ngẫu nhiên cỡ n=10 với các giá trị mẫu:

6.5; 5; 5.5; 8; 6.5; 10; 10; 8; 6.5; 7

Giả thiết mẫu từ bnn chuẩn. Hãy kiểm định giả thiết với mức ý nghĩa α=5%:

H_0: μ = 7;

H_1: μ > 7.

a) Giả sử đã biết phương sai lý thuyết σ_0=2;
b) Giả thiết chưa biết phương sai.

Bài 8.2. Kiểm định giả thiết về tỷ lệ

Giả sử (X_1, X_2, …, X_n) là mẫu ngẫu nhiên, trong đó:

$$X_i = \begin{cases} 1 \ khi \ có A \\ 0 \ khi không có A \end{cases}, \quad p=P(A)$$

Như vậy, $P(X_i=1)=P(A)=p$, $P(X_i=0)=P(\overline{A})=1-p=q$.

Khi đó, nếu đặt $m = \sum_{i=1}^{n} X_i;\ thì \quad m \approx B(n,p)$

Nếu n lớn ($n \geq 30$), và min(m, n-m)≥5, thì $\frac{m}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$, có phân phối xấp xỉ chuẩn. Lý luận tương tự tương tự trường hợp 3.A. Ta nhận được các miền tiêu chuẩn để kiểm định giả thuyết H_0 : $p=p_0$ với các đối thiết $p \neq p_0$, $p>p_0$, $p<p_0$ mức ý nghĩa α tương ứng như sau:

$$H_0 : p = p_0 \ và H_1 : p \neq p_0;\ S = \left\{ \frac{|m/n - p_0|}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n} \geq z(\alpha/2) \right\}$$

$$H_0 : p = p_0 \ và H_1 : p > p_0;\ S = \left\{ \frac{m/n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n} \geq z(\alpha) \right\}$$

$$H_0 : p = p_0 \ và H_1 : p < p_0;\ S = \left\{ \frac{m/n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n} \leq -z(\alpha) \right\}$$

Ví dụ: p_0=45%, n=200, m=80, α=5%, xem dự đoán có đúng không?

Giải

+ Bước 1:

- Giả thiết H_0: p=0.45
- Đối thiết H_1: $p \neq 0.45$

+ Bước 2: Vì $np_0=90$, và $n(1-p_0)=110$ nên ta có hàm tiêu chuẩn:

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0 q_0 / n}} = \frac{\hat{p} - 0.45}{\sqrt{0.45 * 0.55 / 200}}$$

+ Bước 3: với $\alpha=0.05$ và hàm z-tiêu chuẩn ở bước 2, dang BT 1 ta tra $z_{\alpha/2}=z_{0.025}=1.96$.
+ Bước 4:

$$S=\left\{\frac{|m/n-p_0|}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n}\geq 1.96\right\}$$

+ Bước 5:

$$z=\frac{\frac{80}{200}-0.45}{\sqrt{0.45x0.55}}\sqrt{200}=-1.42$$

+ Bước 6 : Kiểm tra ta thấy $|z|=1.42<z_{\alpha/2}=1.96$.
Kết luận: Chấp nhận giả thiết H_0.

Bài 3. Phương pháp p-giá trị

Các kỹ thuật mà ta đã kiểm định ở các tiết trước được gọi là phương pháp kiểm định truyền thống. Trong mục này chúng ta sẽ trình bày một phương pháp khác hiện được các nhà thống kê sử dụng khá rộng rãi gọi là phương pháp p-giá trị.

Xét bài toán kiểm định:

- Giả thiết H_0: $\mu=\mu_0$
- Đối thiết H_1: $\mu<\mu_0$

Các số liệu mẫu cho ta giá trị của n, $\overline{X}=\overline{x_0}$ và S. Ta muốn kiểm định xem số liệu đã cho có cho phép ta bác bỏ H_0 hay không?
Ta lý luận bằng phản chứng: Giả sử H_0 là đúng, ta hãy tính xem xác suất để trung bình mẫu bé hơn hay bằng giá trị quan sát được $\overline{x_0}$ bằng bao nhiêu. Nếu xác suất này "nhỏ" theo một nghĩa nào đó, ta sẽ bác bỏ H_0, do theo nguyên lý xác suất nhỏ, biến cố đó rất ít xảy ra trong một phép thử. Nếu xác suất đó khá "lớn" thì ta không có cơ sở để bác bỏ H_0.

Giá trị của xác suất này $p=P\left\{\overline{X}\leq\overline{x_0}\right\}$ (tính trong điều kiện H_0 đúng), được gọi là p-giá trị.

Tương tự, đối với bài toán kiểm định:

- Giả thiết H_0: $\mu=\mu_0$
- Đối thiết H_1: $\mu>\mu_0$

Thì p-giá trị là xác suất $p=P\left\{\overline{X}\geq\overline{x_0}\right\}$, tính dưới giả thiết H_0 đúng.
Còn với bài toán kiểm định 2 phía:

- Giả thiết H_0: $\mu=\mu_0$
- Đối thiết H_1: $\mu\neq\mu_0$

Thì p-giá trị trong trường hợp kiểm định 2 phía này gấp đôi p-giá trị trong trường hợp 1 phía, tức là:

$$p = 2P\{\overline{X} \geq \overline{x_0}\} \text{ nếu } P\{\overline{X} \geq \overline{x_0}\} < P\{\overline{X} \leq \overline{x_0}\},$$

và ngược lại:

$$p = 2P\{\overline{X} \leq \overline{x_0}\} \text{ nếu } P\{\overline{X} \leq \overline{x_0}\} < P\{\overline{X} \geq \overline{x_0}\},$$

p-giá trị được các nhà thống kê sử dụng theo 2 cách. Một số người chỉ đơn thuần tính p-giá trị, còn việc có bác bỏ giả thiết H_0 hay không thì để lại cho nhà quản lý tự quyết định lấy.

Khi làm như vậy, nhà thống kê có một số hướng dẫn chung như sau:

- Nếu p>0.05, ta không đủ cơ sở để bác bỏ H_0.
- Nếu 0.01<p<0.05, ta có đủ cơ sở để bác bỏ H_0.
- Nếu p<0.01, ta có một cơ sở rất mạnh, hùng hồn để bác bỏ H_0.

Cách thứ 2 là sử dụng p-giá trị kết hợp với mức ý nghĩa α đã cho.

Ta tính p-giá trị và so sánh nó với α:

Nếu $p \leq 0.05$, ta bác bỏ H_0.

Nếu p>α, ta chưa có cơ sở bác bỏ H_0. Nói cách khác: p-giá trị chính là mức ý nghĩa thấp nhất mà ta có thể bác bỏ H_0.

Ví dụ 15. Từ một tập hợp chính có trung bình μ (chưa biết), người ta lấy ra một mẫu kích thước n=36 và tính được $\overline{x} = 5040$ và S=780. Sử dụng phương pháp p-giá trị, hãy kiểm định:

- Giả thiết H_0: μ=4700
- Đối thiết H_1: μ>4700

Mức ý nghĩa α=0.02.

Giải. Ta tính p-giá trị $P\{\overline{X} \geq 5040\}$.

Dưới giả thiết H_0, vì n=36>30, $\overline{X}$ là BNN có xấp xỉ phân phối chuẩn với kỳ vọng là 4700 và độ lệch chuẩn là:

$$\frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{780}{\sqrt{36}} = 130$$

Vậy

$$P\{\overline{X} \geq 5040\} = 1 - P\{\overline{X} \leq 5040\} = 1 - \Phi\left(\tfrac{5040-4700}{130}\right) = 1 - \Phi(2.62)$$

= 1-0.9956=0.0044.

Vậy p-giá trị là 0.0044. Giá trị này nhỏ hơn mức ý nghĩa α=0.02. Vậy ta bác bỏ H_0 và chấp nhận H_1.

Ví dụ 16. Từ một tập hợp chính có trung bình μ (chưa biết), người ta lấy ra một mẫu kích thước n=140 và tính được $\overline{x} = 18.5$ và S=6.8. Với mức ý nghĩa α=0.05, hãy kiểm định:

- Giả thiết H_0: $\mu=19.4$
- Đối thiết H_1: $\mu<19.4$

  Giải. Ta tính p-giá trị $P\left\{\overline{X} \le 18.5\right\}$.

Dưới giả thiết H_0, vì n=140>30, $\overline{X}$ là BNN có xấp xỉ phân phối chuẩn với kỳ vọng là 19.4 và độ lệch chuẩn là:

$$\frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{6.8}{\sqrt{140}} = 0.575$$

Vậy $P\left\{\overline{X} \le 18.5\right\} = \Phi(\frac{18.5-19.4}{0.575}) = \Phi(-1.57) = 0.0582$

Vậy p-giá trị là 0.0582. Giá trị này lớn hơn mức ý nghĩa $\alpha=0.05$. Vậy ta không có cơ sở bác bỏ H_0.

Ví dụ 19. Cơ quan cảnh sát giao thông cho rằng 80% số người lái xe trên đường là có bằng lái. Kiểm tra ngẫu nhiên 200 người lái xe, cảnh sát giao thông thấy chỉ có 150 người có bằng lái xe. Số liệu này có chứng tỏ tỷ lệ người có bằng lái xe thấp hơn 80% hay không?

Dùng phương pháp p-giá trị với mức ý nghĩa $\alpha=2\%$.

Giải

- Giả thiết H_0: p=0.8
- Đối thiết H_1: p<0.8

  Ta có n=200; m=150; f=150/200=0.75.

  Vì $np_0=200x0.6=160>10$

  $n(1-p_0)=200x0.2=40>10$

  Nên f có phân bố xấp xỉ chuẩn với kỳ vọng là 0.8 và độ lệch chuẩn là

  $$\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{200}} = \sqrt{\frac{0.8x0.2}{200}} = 0.028.$$

  Khi đó p-giá trị là:

  $$p = P\left\{f \le 0.75\right\} = \Phi(\frac{0.75-0.8}{0.028}) = \Phi(-1.786) = 0.03705.$$

  Ta nhận thấy p-giá trị lớn hơn mức ý nghĩa $\alpha=0.02$. Vậy ta chấp nhận H_0. Tỷ lệ người có bằng lái xe thực tế là 80%.

Bài 4. Kiểm định giả thiết về giá trị của nhiều xác suất

Giả sử $B_1, B_2, \ldots, B_k$ là họ các biến cố đôi 1 xung khắc và đầy đủ của không gian mẫu S của phép thử ngẫu nhiên E. Ta quan tâm tới xác suất (chưa biết) của các biến cố B_i, i=1, 2, …, k này. Bài toán kiểm định là:

-Giả thiết H_0: $(P(B_1), P(B_2), \ldots, P(B_k))=(p_1, p_2, \ldots, p_k)$.

-Đối thiết H_1: $(P(B_1), P(B_2), \ldots, P(B_k))\neq(p_1, p_2, \ldots, p_k)$.

Trong đó $0<p_i<1$ và $p_1+p_2+\ldots+p_k=1$.
Tiến hành phép thử E n-lần độc lập, giả sử có n_i lần xảy ra biến cố B_i (i=1, 2, …, k), $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$.
Ta biểu diễn kết quả bởi bảng tần số sau:

Biến cố	B_1	B_2	…	B_k	Tổng
Tần số quan sát	n_1	n_2	…	n_k	n

Các số $\hat{n}_i = np_i, i = 1,2,\ldots,k$ được gọi là tần số lý thuyết. Nếu giả thiết H_0 đúng thì theo luật số lớn $\hat{n}_i$ và n_i xấp xỉ nhau.
Ta sẽ bác bỏ giả thiết H_0 khi các tần số quan sát "khác xa" các tần số lý thuyết theo 1 nghĩa nào đó. Khoảng cách giữa các tần số quan sát và lý thuyết được đo bởi tiêu chuẩn thống kê "Khi-bình phương":

$$T = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - \hat{n}_i)^2}{\hat{n}_i}$$

Ta sẽ bác bỏ H_0 khi T lớn một cách có ý nghĩa. Miền bác bỏ H_0 sẽ có dạng: Δ={T>c}, ở đây, c là một hằng số phụ thuộc mức α đã chọn.
Người ta chứng minh được rằng nếu giả thiết H_0 đúng và nếu các tần số lý thuyết $\hat{n}_i \geq 5, i = 1,2,\ldots,k$ thì T sẽ có phân phối xấp xỉ phân phối χ^2 với k-1 bậc tự do. Tra bảng phân phối χ^2 với k-1 bậc tự do ta sẽ tìm được $\chi^2_{k-1}(\alpha)$ thỏa mãn:

$$P\{T > \chi^2_{k-1}(\alpha)\} = \alpha .$$

Như vậy $c = \chi^2_{k-1}(\alpha)$ là phân vị mức α của phân phối χ^2 với k-1 bậc tự do.

Ví dụ: Gieo 1 con xúc xắc 600 lần. Số lần xuất hiện các mặt được cho bởi bảng sau:

1	2	3	4	5	6	Tổng
106	92	97	105	88	112	600

Có thể coi con xúc xắc đó là cân đối, đồng chất được không? Mức ý nghĩa là 0.05.

Giải

Tần số lý thuyết:

1	2	3	4	5	6	Tổng
100	100	100	100	100	100	600

Tính tiêu chuẩn thống kê "Khi-bình phương":

$$T = \frac{(106-100)^2}{100} + \frac{(92-100)^2}{100} + \frac{(97-100)^2}{100} +$$

$$\frac{(105-100)^2}{100} + \frac{(88-100)^2}{100} + \frac{(112-100)^2}{100} = 4.22$$

Tra bảng phân phối

$$c = \chi^2_{k-1}(\alpha) = \chi^2_{6-1}(0.05) = 11.0705$$

So sánh: T=4.22<11.0705

Bài 8.5. Kiểm định giả thiết về phương sai

Giả sử X là đại lượng ngẫu nhiên có phân bố chuẩn
$N(\mu, \sigma^2)$. Tập hợp chính ở đây là tập tất cả các giá trị có thể của X. Xét một mẫu ngẫu nhiên cỡ n. Như ta đã biết, phương sai mẫu S^2 là một ước lượng không chệch cho phương sai σ^2 của tập hợp chính.
Bây giờ ta xét bài toán kiểm định giả thiết:

Trường hợp 1:

- Giả thiết H_0: $\sigma^2=\sigma_0^2$
- Đối thiết H_1: $\sigma^2<\sigma_0^2$

Tính $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$, χ^2 có phân phối Khi – bình phương với n-1 bậc tự do. Dựa vào mức ý nghĩa α, ta tra bảng giá trị

$$c = \chi^2_{n-1}(1-\alpha).$$

So sánh T với $c = \chi^2_{n-1}(1-\alpha)$, nếu:

- $T < c = \chi^2_{n-1}(1-\alpha)$: Bác bỏ H_0.
- $\chi^2 \geq c = \chi^2_{n-1}(1-\alpha)$: Chấp nhận H_0.

Trường hợp 2:

- Giả thiết H_0: $\sigma^2=\sigma_0^2$
- Đối thiết H_1: $\sigma^2>\sigma_0^2$

Tính $T = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$, T có phân phối Khi – bình phương với n-1 bậc tự do. Dựa vào mức ý nghĩa α, ta tra bảng giá trị

$$c = \chi^2_{n-1}(\alpha).$$

So sánh T với $c = \chi^2_{n-1}(\alpha)$, nếu:

- $T > c = \chi^2_{n-1}(\alpha)$: Bác bỏ H_0.

- $T \le c = \chi^2_{n-1}(\alpha)$: Chấp nhận H_0.

Trường hợp 3:

- Giả thiết H_0: $\sigma^2=\sigma_0^2$
- Đối thiết H_1: $\sigma^2\neq\sigma_0^2$

Tính $T = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$, T có phân phối Khi – bình phương với n-1 bậc tự do. Dựa vào mức ý nghĩa α, ta tra bảng giá trị

$$c_1 = \chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)$$

$$c_2 = \chi^2_{n-1}(\alpha/2)$$

.

So sánh T với $c_1 = \chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)$ $c_2 = \chi^2_{n-1}(\alpha/2)$, nếu:

- $T < c_1 = \chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)$ hoặc $T > c_2 = \chi^2_{n-1}(\alpha/2)$: Bác bỏ H_0.
- $c_1 = \chi^2_{n-1}(1-\alpha/2) \le T \le c_2 = \chi^2_{n-1}(\alpha/2)$: Chấp nhận H_0.

Ví dụ:

- Giả thiết H_0: $\sigma^2=0.2^2$
- Đối thiết H_1: $\sigma^2>0.2^2$

S=0.3, n=12, $\sigma_0=0.2$, $\alpha=5\%$.

Tính

$$T=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=\frac{(12-1)x0.3^2}{0.2^2}=24.75>19.67514=\chi^2_{11}(0.05)$$

Vậy, ta bác bỏ giả thiết H_0, chấp nhận đối thiết H_1.

Bài 8.6. So sánh hai giá trị trung bình

Giả sử ta có hai mẫu ngẫu nhiên $(X_1,X_2,...,X_{n_1})$ rút ra từ biến ngẫu nhiên $X\approx F_1(x)$, $(Y_1,Y_2,...,Y_{n_2})$ rút ra từ biến ngẫu nhiên $Y\approx F_2(y)$

Bài toán đặt ra là: kiểm tra xem hai mẫu trên có phải được rút ra từ một phân phối hay không, tức là:

$$F_1(x)\equiv F_2(x)\ \ hay\ F_1(x)\neq F_2(x).$$

Trong mục này ta xét bài toán đơn giản hơn là so sánh hai giá trị EX và EY.

Ký hiệu

$$\mu_1=EX,\mu_2=EY,\sigma_1^2=DX,\sigma_2^2=DY$$

Giả thiết H_0: $\mu_1=\mu_2$, đối thiết H_1: $\mu_1\neq\mu_2$.

1.Nếu σ_1^2,σ_2^2 đã biết

Trong trường hợp này ta cần phải giả thiết hoặc X và Y có phân phối chuẩn hoặc mẫu n_1, n_2 đủ lớn ($n_1\geq 30$, $n_2\geq 30$). Lý luận tương tự ta được các miền tiêu chuẩn mức ý nghĩa α tương ứng như sau:

$$H_0:\mu_1=\mu_2\ và\ H_1:\mu_1\neq\mu_2;\ \ S=\left\{|z|=\frac{|\bar{x}-\bar{y}|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\geq z_{\alpha/2}\right\}$$

$$H_0:\mu_1=\mu_2\ và\ H_1:\mu_1>\mu_2;\ \ S=\left\{z=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\geq z_{\alpha/2}\right\}$$

$$H_0:\mu_1=\mu_2 \text{ và } H_1:\mu_1<\mu_2;\;\; S=\left\{ z=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\le -z_{\alpha/2} \right\}$$

Ví dụ 1. GS từ hai tập hợp chính có phân bố chuẩn X và Y ta lấy hai mẫu độc lập với cỡ mẫu tương ứng là $n_1=40$ và $n_2=50$. Trung bình mẫu tính được là $\bar{x}=130, \bar{y}=140$.

GS $E(X)=\mu_1$(chưa biết) , biết $V(X)=\sigma_1^2=80$.
GS $E(Y)=\mu_2$(chưa biết) , biết $V(Y)=\sigma_2^2=100$.
Với mức ý nghĩa $\alpha=1\%$, kiểm định bài toán :
- Giả thiết H_0 : $\mu_1=\mu_2$
- Đối thiết H_1 : $\mu_1\neq\mu_2$

Giải

Ta có

$$T=\frac{130-140}{\sqrt{\frac{80}{40}+\frac{100}{50}}}=-5$$

Với $\alpha=1\%$, ta có $u_{\alpha/2}=2.576$.
Vì $|T|=5>2.576$, nên ta bác bỏ giả thiết H_0.
Ví dụ 2. Với mức ý nghĩa $\alpha=5\%$ hãy kiểm định giả thiết sau :
a) - Giả thiết H_0 : $\mu_1=\mu_2$
    - Đối thiết H_1 : $\mu_1>\mu_2$
Với số liệu như sau :

$$n_1=50; n_2=32; \bar{x}=105; \bar{y}=98; \sigma_1^2=105; \sigma_2^2=256$$

b) - Giả thiết H_0 : $\mu_1=\mu_2$
    - Đối thiết H_1 : $\mu_1<\mu_2$
Với số liệu như sau :

$$n_1=25; n_2=35; \bar{x}=20; \bar{y}=25; \sigma_1^2=36; \sigma_2^2=64$$

Giải

a)

$$T=\frac{105-98}{\sqrt{\frac{105}{50}+\frac{256}{32}}}=2.203$$

Do $T=2.203>u_\alpha=1.645$, nên ta bác bỏ giả thiết H_0.

b)

$$T = \frac{20-25}{\sqrt{\frac{36}{25}+\frac{64}{35}}} = -2.77$$

Do T=-2.77<$-z_\alpha$=-1.645, nên ta bác bỏ giả thiết H_0.

2. Nếu σ_1^2, σ_2^2 chưa biết nhưng mẫu lớn (n_1>30, n_2>30), trong trường hợp này ta vẫn vận dụng test thống kê như trong phần 1. trong đó các phương sai chưa biết σ_1^2, σ_2^2 trong T được thay bởi các phương sai mẫu: S_1^2, S_2^2. Như vậy test thống kê được dùng ở đây là:

$$T = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}$$

Khi n_1, n_2>30 thì theo định lý giới hạn trung tâm, T có phân bố xấp xỉ phân bố chuẩn tắc cho dù X và Y không có phân bố chuẩn.

Ví dụ 3. Người ta tiến hành một cuộc nghiên cứu về điểm trung bình của các vận động viên thể dục năm 1970 và năm 1995. Một mẫu gồm 35 VĐV của năm 1970 có số điểm trung bình là 267 với độ lệch tiêu chuẩn là 27. Một mẫu gồm 40 vận động viên của năm 1995 có số điểm trung bình là 255 với độ lệch tiêu chuẩn là 30. Kiểm định xem có sự khác nhau hay không giữa hai thế hệ vận động viên của năm 1970 và 1995? Mức ý nghĩa α=5%.

Giải

Bài toán kiểm định là:

- Giả thiết H_0 : $\mu_1=\mu_2$
- Đối thiết H_1 : $\mu_1\neq\mu_2$

Ta có $$T = \frac{267-255}{\sqrt{\frac{27^2}{35}+\frac{30^2}{40}}} = 1.823$$

Do T=1.823<$z_{\alpha/2}$=1.96, nên ta chấp nhận H_0. Vậy không có cơ sở để khẳng định có sự khác nhau giữa hai thế hệ vận động viên.

3.Nếu σ_1^2, σ_2^2 chưa biết mẫu nhỏ (n_1<30, n_2<30)

Trong trường hợp này ta phải giả thiết

$$X \approx N(\mu_1, \sigma^2); Y \approx N(\mu_2, \sigma^2).$$

Các bước làm như sau:

- Xuất phát từ hai mẫu đã cho ta tính $\overline{x}, \overline{y}, s_x^2, s_y^2$.
- Tính

$$t = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_x^2 + (n_2 - 1)s_y^2}{n_1 + n_2 - 2}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}}$$

- Với α đã cho, tra bảng phân phối Student tìm được $t_{n_1+n_2-2}(\alpha/2)$ hoặc $t_{n_1+n_2-2}(\alpha)$. Các miền tiêu chuẩn như sau:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \text{ và } H_1 : \mu_1 \neq \mu_2; \; S = \left\{ |t| \geq t_{n_1+n_2-2}(\alpha/2) \right\}$$

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \text{ và } H_1 : \mu_1 > \mu_2; \; S = \left\{ t \geq t_{n_1+n_2-2}(\alpha) \right\}$$

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \text{ và } H_1 : \mu_1 < \mu_2; \; S = \left\{ t \leq -t_{n_1+n_2-2}(\alpha) \right\}$$

Ví dụ 5. Cơ quan hàng không vụ trụ Mỹ (NASA) đã ký hợp đồng với 2 công ty A và B sản xuất thử pin dùng cho vệ tinh viễn thông.
Dựa trên kết quả của các pin thử nghiệm, NASA sẽ quyết định chọn công ty nào làm nhà cung cấp pin cho vệ tinh viễn thông. Công ty A đã sản xuất thử được 10 chiếc, có tuổi thọ trung bình là 4.8 năm và độ lệch tiêu chuẩn là 1.1 năm. Công ty B sản xuất thử được 12 chiếc, với tuổi thọ trung bình 4.3 năm và độ lệch tiêu chuẩn là 0.9 năm.
GS rằng tuổi thọ của pin do A và B cung cấp có phân bố chuẩn và phương sai như nhau. Với mức ý nghĩa α=1%, kiểm định xem có sự khác nhau về tuổi thọ trung bình của 2 loại pin hay không?

Giải

Bài toán kiểm định là:

- Giả thiết $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

- Đối thiết $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

Các số liệu đã cho như sau:

Công ty A: $n_1 = 10; \bar{x} = 4.8; s_1 = 1.1$.

Công ty B: $n_2 = 12; \bar{y} = 4.3; s_2 = 0.9$.

Phương sai chung của ước lượng là:

$$s^2 = \frac{(10-1)(1.1)^2 + (12-1)(0.9)^2}{10+12-2} = \frac{19.8}{20} = 0.99.$$

Vậy $$T = \frac{4.8-4.3}{\sqrt{0.99(\frac{1}{10}+\frac{1}{12})}} = \frac{0.5}{0.426} = 1.174$$

Tra bảng phân phối Student 1-0.005 phân vị với 20 bậc tự do ta được 2.845.

Do |T|<2.845, nên ta không đủ cơ sở bác bỏ H_0.

4.Khoảng tin cậy cho hiệu số μ_1-μ_2:

Khi bài toán kiểm định dẫn tới bác bỏ H_0, ta dẫn tới bài toán tìm khoảng tin cậy cho hiệu số μ_1-μ_2.

Trong trường hợp σ_1^2, σ_2^2 đã biết, có thể chứng minh được rằng BNN

$$T = \frac{\bar{x} - \bar{y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Có phân bố chuẩn tắc N(0, 1). Khi đó, khoảng tin cậy γ cho hiệu số μ_1-μ_2 là:

$$\bar{x} - \bar{y} \pm u_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Trong trường hợp σ_1^2, σ_2^2 chưa biết nhưng mẫu lớn

(n_1, n_2>30) ta thay σ_1^2, σ_2^2 bởi S_1^2, S_2^2 và nhận được khoảng tin cậy xấp xỉ γ:

$$\bar{x} - \bar{y} \pm u_{\alpha/2} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

Và không cần giả thiết 2 tập chính có phân bố chuẩn.

5.Phương pháp so sánh từng cặp:

Giả sử (X, Y) là một cặp gồm hai đại lượng ngẫu nhiên (nói chung phụ thuộc nhau), với $E(X)=\mu_1$, $E(Y)=\mu_2$.
Chúng ta cần so sánh μ_1 và μ_2.
Xét D=X-Y, khi đó ta đưa BT so sánh về BT kiểm định về giá trị TB.

Bài 8.7. So sánh hai tỷ lệ

Xét hai tập hợp chính I và II và một đặc tính A nào đó mà mỗi cá thể của hai tập chính đó thể có hay không. Ta muốn so sánh tỷ lệ cá thể có đặc tính A của tập chính I với tỷ lệ cá thể có đặc tính A của tập chính II.

Giả sử ta có hai mẫu ngẫu nhiên $(X_1, X_2, ..., X_{n_1})$ trong đó

$$P(X_i = 1) = p_1,\ P(X_i = 0) = q_1 = 1 - p_1, m_1 = \sum_{i=1}^{n_1} X_i$$

Và mẫu $(Y_1, Y_2, ..., Y_{n_2})$ trong đó

$$P(Y_j = 1) = p_2,\ P(Y_j = 0) = q_2 = 1 - p_2, m_2 = \sum_{j=1}^{n_2} Y_j$$

Giả thiết H_0: $p_1=p_2$ đối thiết H_1: $p_1 \neq p_2$, $p_1>p_2$, $p_1<p_2$
Vì $EX_i=p_1$, $EY_j=p_2$, $DX_i=p_1(1-p_1)$, $DY_j=p_2(1-p_2)$ nên so sánh hai xác suất p_1, p_2 chính là so sánh hai giá trị trung bình với phương sai chưa biết. Nếu H_0 đúng thì $DX_i=DY_j=\sigma^2$. Khi đó

$$D(\overline{X} - \overline{Y}) = \sigma^2 (\tfrac{1}{n_1} + \tfrac{1}{n_2}).$$

Ước lượng của σ^2

$$\frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}.(1 - \frac{m_1+m_2}{n_1+n_2})$$

ĐK áp dụng: $m_1+m_2 \geq 10$ và $n_1+n_2- m_1-m_2 \geq 10$.

Với n_1, n_2 đủ lớn ta xấp xỉ phân phối $T = \frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{V(\overline{X}-\overline{Y})}}$ bởi phân phối xấp xỉ chuẩn N(0, 1).
Từ đó ta nhận được các tiêu chuẩn mức α tương ứng như sau:

$$u = \frac{\frac{m_1}{n_1} - \frac{m_2}{n_2}}{\sqrt{\frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}.\frac{n_1+n_2-m_1-m_2}{n_1+n_2}}\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}}.$$

Nếu H_0: $p_1=p_2$, H_1: $p_1\neq p_2$ thì $S=\{|u|\geq u(\alpha/2)\}$
Nếu H_0: $p_1=p_2$, H_1: $p_1>p_2$ thì $S=\{u\geq u(\alpha)\}$
Nếu H_0: $p_1=p_2$, H_1: $p_1<p_2$ thì $S=\{u\leq -u(\alpha)\}$
Ví dụ 15. Công ty Coca-cola đang n/c cải tiến sản phẩm. Với công thức cũ khi cho 500 người dùng thử thì có 120 người ưa thích. Với công thức mới khi cho 1000 người khác dùng thử thì có 300 người ưa thích.
Với mức ý nghĩa $\alpha=2\%$, kiểm định xem công thức mới đưa vào có làm tăng tỷ lệ người ưa thích hay không?
Giải
H_0: $p_1=p_2$, H_1: $p_1>p_2$

$$u=\frac{\frac{m_1}{n_1}-\frac{m_2}{n_2}}{\sqrt{\frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}.\frac{n_1+n_2-m_1-m_2}{n_1+n_2}}\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1n_2}}}$$

$$=\frac{\frac{300}{1000}-\frac{120}{500}}{\sqrt{\frac{300+120}{1000+500}.\frac{1000+500-300-120}{1000+500}}.\sqrt{\frac{1000+5000}{1000x500}}}=2.4.$$

$u_\alpha=u_{0.02}=2.054$
Do $u>u_\alpha=2.054$, nên ta bác bỏ H_0.

Giả sử X và Y là 2 BNN có phân bố chuẩn, $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$,
Chúng ta cần so sánh μ_1 và μ_2 dựa trên 2 mẫu quan sát độc lập của X và Y.