NỘI DUNG

4.1. KHÁI NIỆM CHUNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

4.1.1. Khái niệm phương trình vi phân

Một phương trình chứa biến độc lập, hàm của biến độc lập và các đạo hàm được gọi là phương trình vi phân, viết tắt PTVP

Cấp cao nhất của đạo hàm có mặt trong PTVP được gọi là cấp của PTVP

PTVP cấp n có dạng $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$

trong đó x là biến số độc lập, $y = y(x)$ là hàm số phải tìm, $y', y'', ..., y^{(n)}$ là các đạo hàm của hàm số $y = y(x)$

PTVP được gọi là tuyến tính cấp n nếu hàm số F là bậc nhất đối với $y, y', ..., y^{(n)}$, tức là phương trình có dạng

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

Nếu $f(x) \equiv 0$ thì người ta gọi đó là phương trình tuyến tính cấp n thuần nhất

4.1.2. Nghiệm của phương trình vi phân

- Hàm số $y = y(x)$ là một nghiệm của PTVP nếu như nó thoả mãn phương trình tức là thay nó vào phương trình sẽ nhận được đồng nhất thức

  Chẳng hạn với phương trình $y' = 2x$ ta có nghiệm $y = x^2$ và $y = x^2 + C$ trong đó C là hằng số tuỳ ý

- Giải hay tích phân một PTVP là tìm tất cả các nghiệm của nó. Về mặt hình học, mỗi nghiệm của PTVP là một đường cong (đồ thị của nghiệm), vì thế người ta gọi đường cong đó là đường cong tích phân của PTVP

- Nghiệm là hàm số dạng tường minh $y = y(x, C_1, ..., C_n)$ phụ thuộc các hằng số $C_1, ..., C_n$ được gọi là nghiệm tổng quát
- Khi cho các hằng số $C_1, ..., C_n$ các giá trị cụ thể ta có nghiệm riêng

Chẳng hạn phương trình vi phân

$$y' - 2xy = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = 2x \Leftrightarrow \ln|y| = x^2 + \ln|C| \Leftrightarrow y = Ce^{x^2}$$

có nghiệm tổng quát $y = Ce^{x^2}$, C là hằng số tùy ý

Nếu thêm điều kiện $y(0) = 5$ thì nhận được nghiệm riêng $y = 5e^{x^2}$

Ngoài ra phương trình vi phân có thể có nghiệm kỳ dị, tức là nghiệm không nằm trong họ nghiệm tổng quát. Xét phương trình $y' = 2\sqrt{y}, y \geq 0$ Giả sử $y \neq 0$ Chia cả 2 vế của phương trình cho $2\sqrt{y}$ ta được $(\sqrt{y})' = 1$ Do đó $\sqrt{y} = x + C$

Như vậy trong miền $D = \{(x,y), -\infty < x < +\infty, 0 < y < +\infty\}$ phương trình có nghiệm tổng quát là $y = (x + C)^2$ Ngoài ra phương trình còn có 1 nghiệm kì dị $y(x) = 0$

- Nghiệm dưới dạng hàm ẩn $\Phi(x,y,C_1,...,C_n)=0$ được gọi là tích phân tổng quát

- Khi cho các hằng số $C_1,...,C_n$ các giá trị cụ thể ta có tích phân riêng

Xét phương trình vi phân $6y'ye^{y^3}+y+2xy'=0$

$$6y'ye^{y^3}+y+2xy'=0 \Leftrightarrow 6y'y^2e^{y^3}+y^2+2xy'y=0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(e^{y^3}\right)'+\left(xy^2\right)'=0 \Leftrightarrow 2e^{y^3}+xy^2=C$$

Tích phân tổng quát $2e^{y^3}+xy^2=C$, C là hằng số tùy ý

Với điều kiện $y(0)=0$ ta được tích phân riêng

$$2e^{y^3}+xy^2=2$$

❖ Khi PTVP biểu diễn quá trình vật lý phụ thuộc vào thời gian có biến độc lập là thời gian t. Hệ thức giữa các giá trị của tham số đã biết tại thời điểm ban đầu $t = 0$ được gọi là các ***điều kiện đầu***

Chẳng hạn PTVP với hàm cần tìm $y(t)$ biểu diễn đoạn đường đi của chuyển động thẳng, khi đó

$y(t)\big|_{t=0} = y_0$ vị trí ban đầu

$y'(t)\big|_{t=0} = y_1$ vận ban tốc đầu

$y''(t)\big|_{t=0} = y_2$ gia tốc ban đầu …

là các điều kiện đầu

❖ Tìm nghiệm của PTVP thỏa mãn điều kiện đầu được gọi là bài toán Cauchy

4.2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

4.2.1. Đại cương về phương trình vi phân cấp 1

Dạng tổng quát của PTVP cấp 1: $F(x, y, y') = 0$

Nếu giải ra được y' theo x, y thì phương trình đã cho có dạng

$$y' = f(x, y)$$

Định lý tồn tại duy nhất nghiệm Cauchy-Peano

Định lý 4.1

Giả sử $f(x, y)$ liên tục trên miền D và giả sử (x_0, y_0) là một điểm nào đó thuộc D. Khi đó tồn tại nghiệm $y = y(x)$ trong lân cận x_0 thoả mãn $y_0 = y(x_0)$

Ngoài ra nếu $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ cũng liên tục trên miền D thì nghiệm tìm được là duy nhất

Ví dụ 4.1: Xét bài toán $y' = \frac{2y}{x}, y(x_0) = y_0$

Trong ví dụ này, $\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \frac{2y}{x}$ và $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2}{x}$ Cả 2 hàm đều xác định với mọi $x \neq 0$ Theo Định lý Cauchy-Peano, với mỗi $x_0 \neq 0$ tồn tại duy nhất nghiệm xác định trong một khoảng mở chứa x_0 . Bằng cách tách biến và lấy tích phân ta có thể tìm được nghiệm dưới dạng $y(x) = Cx^2$ với bất kỳ hằng số C nào. Tất cả các nghiệm này đều đi qua điểm (0,0) nhưng không có nghiệm nào đi qua bất cứ điểm $(0, y_0)$ với $y_0 \neq 0$ Do đó bài toán $y' = \frac{2y}{x}, y(0) = 0(*)$ có vô số nghiệm.

Nhưng bài toán $y' = \frac{2y}{x}, y(0) = y_0, y_0 \neq 0(**)$ không có nghiệm

4.2.2. Phương trình tách biến

Phương trình tách biến (phương trình với biến số phân li) là PTVP có dạng

$$f_1(x)dx = f_2(y)dy$$

Để giải phương trình dạng này ta lấy tích phân hai vế

Ví dụ 4.2 Tìm tích phân tổng quát của phương trình

$$x^3(y+1)dx + (x^4-1)(2-y)dy = 0$$

Với $y+1 \neq 0$ và $x^4-1 \neq 0$ ta có: $\dfrac{y-2}{y+1}dy = \dfrac{x^3}{x^4-1}dx$

$$\int\left(1-\frac{3}{y+1}\right)dy = \frac{1}{4}\int\frac{d(x^4-1)}{x^4-1} \Rightarrow y - 3\ln|y+1| = \frac{1}{4}\ln|x^4-1| + C$$

Ví dụ 4.3 Tìm nghiệm của bài toán Cauchy

$$y' = \cos(x+y) + \cos(x-y);\ y(0) = 0$$

$$y' = \cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cos y$$

Với điều kiện $\cos y \neq 0$ tức $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ta được

$$\frac{dy}{\cos y} = 2\cos x dx \Rightarrow \int \frac{dy}{\cos y} = 2\int \cos x dx + C$$

$$\Rightarrow \ln\left|\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| = 2\sin x + C$$

Từ điều kiện ban đầu suy ra: $\ln\left|\tan\frac{\pi}{4}\right| = C \Rightarrow C = 0$

Vậy nghiệm của bài toán Cauchy đã cho là

$$\ln\left|\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| = 2\sin x$$

4.2.3 Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

PTVP tuyến tính cấp 1 có dạng $y'+p(x)y=q(x)$ (1) trong đó

$p(x),q(x)$ liên tục trên (a,b).

Để giải (1) trước tiên ta giải PT thuần nhất tương ứng $y'+p(x)y=0$ (2)

Nếu $y\neq 0$ ta có thể viết (2) thành $\frac{dy}{y}=-p(x)dx$ Từ đó

$$\ln|y|=-\int p(x)dx+\ln|C|,$$

trong đó C là hằng số tùy ý, do đó $y=Ce^{-\int p(x)dx}$ (3) Đây là nghiệm

tổng quát của (2). Chú ý rằng $y=0$ cũng là 1 nghiệm của (2)

với C=0. Bây giờ xem C là một hàm số, ta tìm C để (3) thỏa mãn (1).

Lấy đạo hàm 2 vế của (3) rồi thế vào (1) ta được

$$\frac{dC}{dx} = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

Từ đó $C = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + K$

trong đó K là 1 hằng số tùy ý. Do đó

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(K + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right)$$

Phương pháp tìm nghiệm theo cách trên được gọi là phương pháp biến thiên hằng số

Nghiệm của PTVP tuyến tính cấp 1 có thể biểu diễn dưới dạng $y = \overline{y} + y^*$

trong đó $\overline{y} = Ke^{-\int p(x)dx}$ là nghiệm tổng quát của PTVP thuần nhất tương ứng.

$y^* = e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$ là một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất

Ví dụ 4.4 Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $y' - \frac{y}{x} = x$

$$\int p(x)dx = -\int \frac{dx}{x} = -\ln x = \ln \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow e^{\int p(x)dx} = \frac{1}{x}, e^{-\int p(x)dx} = x$$

$$\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx = \int x.\frac{1}{x}dx = x$$

Do đó nghiệm tổng quát có thể viết dưới dạng

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right) = x(C + x)$$

4.2.4. Phương trình đẳng cấp (thuần nhất)

Phương trình đẳng cấp là PTVP có dạng $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Phương trình này không thay đổi khi ta thay (x,y) bằng (kx,ky) với k là hằng số

Đặt $u = \frac{y}{x}$ với u là một hàm của x. Thay vào PT ta suy ra nếu $f(u) - u \neq 0$

thì $\frac{dx}{x} = \frac{du}{f(u) - u}$

Bằng cách tích phân hai vế, ta được $\ln|x| = \int \frac{du}{f(u) - u} = \Phi(u) + \ln|C|$

trong đó $\Phi(u)$ là một nguyên hàm của $\frac{1}{f(u) - u}$ Do đó $x = Ce^{\Phi\left(\frac{y}{x}\right)}$

Nếu $f(u) = u$ thì PT có dạng $y' = \frac{y}{x}$ thì nghiệm tổng quát của nó là y=Cx

Ví dụ 4.5 Giải phương trình $y' = \dfrac{x+ay}{ax-y}$ trong đó a là hằng số

Đây là PT thuần nhất vì vế phải có thể viết được dưới dạng $\dfrac{1+a\left(\dfrac{y}{x}\right)}{a-\left(\dfrac{y}{x}\right)}$

Đặt $u = \dfrac{y}{x}$ suy ra $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{a-u}{1+u^2}du$

Lấy tích phân cả 2 vế ta được $\ln|x| = a.\arctan u - \dfrac{1}{2}\ln(1+u^2) + \ln(|C|)$

hay $x\sqrt{1+u^2} = Ce^{a.\arctan u}$

Do đó $\sqrt{x^2+y^2} = Ce^{a.\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}$

Ví dụ 4.6: Giải PT $(3x^2+y^2)y+(y^2-x^2)xy'=0$

Đây là PT VP đẳng cấp vì ta có thể viết lại dưới dạng $y'=-\dfrac{\left(3+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2\right)\left(\dfrac{y}{x}\right)}{\left(\left(\dfrac{y}{x}\right)^2-1\right)}$

Đặt $u=\dfrac{y}{x}$ ta được $\dfrac{u^2-1}{2u(u^2+1)}du+\dfrac{dx}{x}=0$

Do $\dfrac{u^2-1}{2u(u^2+1)}=-\dfrac{1}{2u}+\dfrac{u}{u^2+1}$ nên $\ln\dfrac{|x|\sqrt{u^2+1}}{\sqrt{u}}=\ln|C|$

C là hằng số tùy ý. Do đó $\dfrac{x^2(u^2+1)}{u}=C^2$ hay $x(x^2+y^2)-Cy^2=0$

4.2.5. Phương trình vi phân toàn phần

Phương trình vi phân dạng $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

trong đó $P(x,y), Q(x,y)$ là những hàm số liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng trong miền D thỏa mãn điều kiện

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \ \forall (x,y) \in D$$

được gọi là PTVP toàn phần trên miền D

Điều kiện $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \ \forall (x,y) \in D$ suy ra tồn tại hàm $u(x,y)$ thỏa mãn $du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = P(x,y), \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = Q(x,y); \ \forall (x,y) \in D$$

(18)

Cụ thể, $$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy+K$$

hay $$u(x,y)=\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy+\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+K$$

trong đó x_0, y_0 là hai số nào đó thuộc miền D, K là hằng số tùy ý.

Do đó PTVP có tích phân tổng quát $u(x,y)=C$

Ví dụ 4.7 Giải PTVP $(3x^2+4xy^2)dx+(4x^2y-y^3)dy=0$

Đặt $P=3x^2+4xy^2, Q=4x^2y-y^3; \dfrac{\partial P}{\partial y}=8xy=\dfrac{\partial Q}{\partial x}, \forall(x,y)$

Vậy phương trình đã cho là PTVP toàn phần

$$\Rightarrow \exists u(x,y)\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=P=3x^2+4xy^2\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=Q=4x^2y-y^3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u=x^3+2x^2y^2+f(y)\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=4x^2y+f'(y)\end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(y)=-y^3 \Rightarrow f(y)=-\frac{y^4}{4}+C \Rightarrow u=x^3+2x^2y^2-\frac{y^4}{4}+C$$

Phương trình có tích phân tổng quát

$$x^3+2x^2y^2-\frac{y^4}{4}=C$$

Thừa số tích phân

Phương trình vi phân dạng $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ **(*)**

Không thỏa mãn điều kiện $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}, \ \forall (x,y) \in D$

Hàm số $\alpha(x,y)$ thoả mãn điều kiện

$$\frac{\partial}{\partial x}(\alpha Q) = \frac{\partial}{\partial y}(\alpha P), \forall (x,y) \in D$$

được gọi là thừa số tích phân của PTVP **(*)**

Xét PTVP toàn phần $\alpha P dx + \alpha Q dy = 0$ **(**)**

Có thể chứng minh được $U(x,y) = C$ là nghiệm của PTVP toàn phần **(**)** khi và chỉ khi $U(x,y) = C$ là nghiệm của PTVP **(*)**

Thừa số tích phân dạng đặc biệt

- $$\frac{1}{-Q}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=\varphi(x)\Rightarrow \alpha(x)=e^{\int \varphi(x)dx}$$

- $$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=\varphi(y)\Rightarrow \alpha(y)=e^{\int \varphi(y)dy}$$

Ví dụ 4.8 Xét PTVP $2\sin y^2 dx + xy\cos y^2 dy = 0$

$$P = 2\sin y^2,\ Q = xy\cos y^2 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = y\cos y^2,\ \frac{\partial P}{\partial y} = 4y\cos y^2$$

$$\frac{1}{-Q}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=\frac{3}{x}\Rightarrow \alpha = e^{3\int \frac{dx}{x}} = x^3$$

Nhận được PTVP toàn phần $2x^3 \sin y^2 dx + x^4 y \cos y^2 dy = 0$

$$\Rightarrow \exists u(x,y) \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x^3 \sin y^2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = x^4 y \cos y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \dfrac{1}{2} x^4 \sin y^2 + f(y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = x^4 y \cos y^2 + f'(y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(y) = 0 \Rightarrow f(y) = C \Rightarrow u = \frac{1}{2} x^4 \sin y^2 + C$$

Tích phân tổng quát của PTVP

$$x^4 \sin y^2 = C$$

Ví dụ 4.9 Tìm tích phân tổng quát PTVP

$$(x^2+y^2)dx+(2xy+xy^2+\frac{x^3}{3})dy=0$$

$$P=x^2+y^2,\ \ Q=2xy+xy^2+\frac{x^3}{3} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=2y+y^2+x^2,\ \frac{\partial P}{\partial y}=2y$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\frac{1}{P}=1\Rightarrow \alpha(y)=e^{\int dy}=e^y$$

Nhận được PTVP toàn phần $e^y(x^2+y^2)dx+e^y(2xy+xy^2+\frac{x^3}{3})dy=0$

$$\Rightarrow \exists u(x,y)\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=e^y(x^2+y^2)\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=e^y(2xy+xy^2+\dfrac{x^3}{3})\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=e^y(\dfrac{x^3}{3}+xy^2)+f(y)\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=e^y(2xy+xy^2+\dfrac{x^3}{3})+f'(y)\end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(y)=0\Rightarrow f(y)=C\Rightarrow u=e^y(\frac{x^3}{3}+xy^2)+C$$

Tích phân tổng quát của PTVP $e^y(\frac{x^3}{3}+xy^2)=C$

4.3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 2

4.3.1. Khái niệm phương trình vi phân cấp 2

Dạng tổng quát của PTVP cấp 2

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad \text{hay} \quad y'' = f(x, y, y')$$

Định lý 4.2 ***Định lý tồn tại duy nhất nghiệm Cauchy-Peano***

Cho phương trình $y'' = f(x, y, y')$ và $(x_0, y_0, y'_0) \in V \subset \mathbb{R}^3$

Nếu hàm số $f(x, y, y')$ liên tục trên miền V thì tồn tại nghiệm $y = y(x)$ trong lân cận x_0 thoả mãn $y_0 = y(x_0),\ y'_0 = y'(x_0)$

Ngoài ra nếu $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, y'),\ \dfrac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y')$ cũng liên tục trên miền V thì nghiệm tìm được là duy nhất

4.3.2. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2

❖ PTVP tuyến tính cấp 2 có dạng

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad \textbf{(*)}$$

trong đó $p(x),\ q(x),\ f(x)$ liên tục trên khoảng (a,b)

❖ PTVP tuyến tính cấp 2 thuần nhất tương ứng

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad \textbf{(**)}$$

Định lý 4.3

Nếu y_1 và y_2 là nghiệm của PTVP **(**)** thì $C_1y_1 + C_2y_2$ với C_1, C_2 là các hằng số tuỳ ý, cũng là nghiệm của **(**)**

$$(C_1y_1 + C_2y_2)'' + p(x)(C_1y_1 + C_2y_2)' + q(x)(C_1y_1 + C_2y_2)$$
$$= C_1\left[y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1\right] + C_2\left[y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2\right] \equiv 0$$

❖ Hai hàm $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ xác định trên (a,b) gọi là phụ thuộc tuyến tính trong (a,b) nếu tồn tại hai hằng số α_1,α_2 không đồng thời bằng 0 sao cho

$$\alpha_1\varphi_1(x)+\alpha_2\varphi_2(x)\equiv 0,\ \forall x\in(a,b)$$

❖ Ngược lại, tức là đẳng thức chỉ xảy ra khi $\alpha_1=\alpha_2=0$ thì nói rằng $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ là độc lập tuyến tính trên (a,b). Dễ dàng chỉ ra rằng: hai hàm số độc lập tuyến tính khi và chỉ khi tỷ số của chúng không phải là hằng số

❖ Định thức Wronski của hai hàm $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ được định nghĩa và ký hiệu

$$W\left[\varphi_1(x),\ \varphi_2(x)\right]=\begin{vmatrix}\varphi_1(x) & \varphi_2(x)\\ \varphi'_1(x) & \varphi'_2(x)\end{vmatrix}$$

Định lý 4.4

1. Nếu các hàm $\varphi_1(x) = k\varphi_2(x)$ phụ thuộc tuyến tính trên (a,b) thì định thức Wronski bằng 0

$$W[\varphi_1,\varphi_2] = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix} \equiv 0, \forall x \in (a,b)$$

$\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ phụ thuộc tuyến tính $\Rightarrow \varphi_1(x) = k\varphi_2(x)$

$$\Rightarrow W[\varphi_1,\varphi_2] = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k\varphi_2 & \varphi_2 \\ k\varphi_2' & \varphi_2' \end{vmatrix} \equiv 0, \forall x \in (a,b)$$

Do đó nếu tồn tại $x_0 \in (a,b)$ sao cho $W[\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0)] \neq 0$

thì $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ độc lập

Định lý 4.4 (tiếp)

2. Ngược lại, nếu hai nghiệm y_1, y_2 của PTVP tuyến tính cấp 2 thuần nhất **(**)** là độc lập tuyến tính trên (a,b) thì

$$W(x) = W\left[y_1, y_2\right] \neq 0,\ \forall x \in (a,b)$$

Định lý 4.5

Nếu y_1, y_2 là hai nghiệm độc lập tuyến tính của PTVP **(**)** thì nghiệm tổng quát của PTVP **(**)** có dạng

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số tuỳ ý

Định lý 4.6

Nếu biết $y_1 \neq 0$ là nghiệm của **(**)** thì có thể tìm được nghiệm y_2 của **(**)** độc lập tuyến tính với y_1 có trong dạng

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p(x)dx} dx$$

Đặt $y_2(x) = y_1(x)u(x)$

$$y_1''u + 2y_1'u' + y_1u'' + p(x)\left[y_1'u + y_1u'\right] + q(x)y_1u = 0$$

$$u\left(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1\right) + y_1\left\{u'' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} + p(x)\right)u'\right\} = 0$$

Ta chọn $u(x) \neq C$ thoả mãn $u'' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} + p(x)\right)u' = 0$ Đặt $v = u'$

$$v = Ce^{-2\int \frac{y_1'}{y_1}dx}.e^{-\int p(x)dx} = Ce^{-2\ln y_1}.e^{-\int p(x)dx} = C\frac{1}{y_1^2}.e^{-\int p(x)dx}$$

$$C = 1 \Rightarrow u(x) = \int \frac{1}{y_1^2(x)}.e^{-\int p(x)dx} dx$$

Ví dụ 4.10

Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$

biết một nghiệm riêng $y_1 = \frac{\sin x}{x}$

$$y_2 = \frac{\sin x}{x}\int \frac{x^2.e^{-\int \frac{2}{x}dx}}{\sin^2 x}dx = \frac{\sin x}{x}\int \frac{x^2.e^{-2\ln x}}{\sin^2 x}dx$$

$$= \frac{\sin x}{x}\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \frac{\sin x}{x}(-\cot x) = -\frac{\cos x}{x}$$

Vậy PTVP nghiệm tổng quát

$$y = \frac{1}{x}\left(C_1 \sin x + C_2 \cos x\right)$$

Ví dụ 4.11 Giải phương trình $x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0$

biết rằng nó có một nghiệm là hàm lũy thừa

Đặt $y_1 = x^\alpha$ vào phương trình, ta sẽ có

$$x^2(\ln x - 1)\alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2} - \alpha x^\alpha + x^\alpha = 0, \forall x \in (a,b)$$

$$\Rightarrow \alpha(\ln x - 1)(\alpha - 1) - \alpha + 1 = 0, \forall x \in (a,b)$$

$$\Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow y_1 = x$$

$$y_2 = x\int \frac{e^{\int \frac{xdx}{x^2(\ln x - 1)}}}{x^2}dx = x\int \frac{e^{\int \frac{d\ln x}{\ln x - 1}}}{x^2}dx = x\int \frac{e^{\ln(\ln x - 1)}}{x^2}dx$$

$$= x\int \frac{\ln x - 1}{x^2}dx = x\left[-\frac{1}{x}(\ln x - 1) + \int \frac{dx}{x^2}\right] = -\ln x$$

Vậy nghiệm tổng quát là $y = C_1 x + C_2 \ln x$

❖ PTVP tuyến tính cấp 2 có dạng

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad \textbf{(*)}$$

❖ PTVP tuyến tính cấp 2 thuần nhất tương ứng

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad \textbf{(**)}$$

Định lý 4.8

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân không thuần nhất **(*)** bằng tổng nghiệm tổng quát của phương trình vi phân thuần nhất **(**)** cộng với một nghiệm riêng bất kỳ của phương trình vi phân không thuần nhất **(*)**

$$y = \overline{y} + y^*$$

- $\overline{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ là nghiệm tổng quát của **(**)**
- y^* là một nghiệm riêng của **(*)**

Nếu y_1^*, y_2^* là hai nghiệm riêng của phương trình vi phân không thuần nhất **(*)** thì hàm số $y = y_1^* - y_2^*$ là một nghiệm của phương trình vi phân thuần nhất tương ứng **(**)**

Định lý 4.9 (***Nguyên lý chồng chất nghiệm***)

Nếu y_1^*, y_2^* lần lượt là các nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$$
$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$$

thì $y^* = y_1^* + y_2^*$ là nghiệm riêng của phương trình

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$

$$\begin{cases} y_1^{*''} + p(x)y_1^{*'} + q(x)y_1^* = f_1(x) \\ y_2^{*''} + p(x)y_2^{*'} + q(x)y_2^* = f_2(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (y_1^{*''} + y_2^{*''}) + p(x)(y_1^{*'} + y_2^{*'}) + q(x)(y_1^* + y_2^*) = f_1(x) + f_2(x)$$

Ví dụ 4.12 Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$(2x-x^2)y''+2(x-1)y'-2y=-2$$

biết rằng phương trình có hai nghiệm riêng $y^*_1=1,\ y^*_2=x$

$\Rightarrow y_1=x-1$ là một nghiệm của PTVP thuần nhất

$$y''-\frac{2(x-1)}{(x^2-2x)}y'+\frac{2}{(x^2-2x)}y=0$$

Nghiệm thứ hai của PTVP thuần nhất, độc lập với nghiệm y_1

$$y_2=(x-1)\int\frac{1}{(x-1)^2}e^{\int\frac{2(x-1)}{x^2-2x}dx}dx=(x-1)\int\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}dx=x^2-x+1$$

Phương trình đã cho có nghiệm tổng quát

$$y=\overline{y}+y^*_1=C_1(x-1)+C_2(x^2-x+1)+1$$

Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

Giả sử y_1, y_2 là hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính của phương trình vi phân thuần nhất

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Khi đó có thể tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân không thuần nhất

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

bằng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange dưới dạng

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$$

thỏa mãn

$$\begin{cases} C'_1 y_1 + C'_2 y_2 = 0 \\ C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 = f(x) \end{cases}$$

Ví dụ 4.13 Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$y''+\frac{2x}{x^2+1}y'=\frac{1}{x^2+1}$$

Xét phương trình thuần nhất tương ứng $y''+\frac{2x}{x^2+1}y'=0$

Dễ nhận thấy phương trình thuần nhất có một nghiệm là $y_1=1$

Nghiệm thứ hai $y_2=\int e^{\int -\frac{2x}{x^2+1}dx}dx=\int\frac{dx}{x^2+1}=\arctan x$

Sử dụng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

$y^*=C_1(x)+C_2(x)\arctan x$ thỏa mãn $\begin{cases} C'_1+C'_2\arctan x=0 \\ C'_1.0+C'_2.\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{1}{1+x^2} \end{cases}$

$C'_2=1\Rightarrow C_2=x+K_2$

$$C'_1=-\arctan x\Rightarrow C_1=-\int\arctan x dx=-x.\arctan x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+K_1$$

$$y=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+K_1+K_2\arctan x$$

4.3.3 Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng

❖ PTVP tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng có dạng

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (*)$$

trong đó p, q là các hằng số thực, $f(x)$ liên tục trên (a,b)

❖ PTVP tuyến tính cấp 2 thuần nhất tương ứng

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (**)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (**)

Ta tìm nghiệm riêng của (**) dưới dạng $y = e^{kx}$, k = const

$y' = k.e^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$ Thay vào phương trình (**) ta được

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0 \Rightarrow k^2 + pk + q = 0$$

Phương trình đặc trưng $k^2 + pk + q = 0 \quad (***)$

Xét phương trình đặc trưng $k^2 + pk + q = 0$ **(***)**

1) Nếu **(***)** cho 2 nghiệm thực khác nhau k_1, k_2 thì **(**)** có nghiệm tổng quát

$$\overline{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

2) Nếu **(***)** có 2 nghiệm thực trùng nhau và bằng k thì **(**)** có nghiệm tổng quát

$$\overline{y} = e^{kx}(C_1 + C_2 x) \qquad y_2(x) = e^{kx}\int \frac{1}{e^{2kx}} e^{-\int p dx} dx = xe^{kx}; k = -\frac{p}{2}$$

3) Nếu **(***)** có hai nghiệm phức $k = \alpha \pm i\beta$ thì PTVP **(**)** có nghiệm tổng quát

$$\overline{y} = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$$

$$y_1 = \frac{e^{\alpha x + i\beta x} + e^{\alpha x - i\beta x}}{2}$$

$$y_2 = \frac{e^{\alpha x + i\beta x} - e^{\alpha x - i\beta x}}{2i}$$

Ví dụ 4.14 Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $y''+5y'+6y=0$

Phương trình đặc trưng $k^2+5k+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k_1=-3 \\ k_2=-2 \end{array}\right.$

Vậy nghiệm tổng quát của PTVP đã cho là $\overline{y}=C_1e^{-3x}+C_2e^{-2x}$

Ví dụ 4.15 Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $y''-2y'+y=0$

Phương trình đặc trưng $k^2-2k+1=0$ có nghiệm $k_1=k_2=1$

Vậy nghiệm tổng quát của PTVP đã cho là $\overline{y}=e^x(C_1+C_2x)$

Ví dụ 4.16 Tìm nghiệm của bài toán Cauchy $y''-4y'+13y=0; \begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=1 \end{cases}$

Phương trình đặc trưng: $k^2-4k+13=0 \Leftrightarrow k=2\pm 3i$

Nghiệm tổng quát $\overline{y}=e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$

$$y(0)=1=C_1;\ y'(0)=1=2C_1+3C_2 \Rightarrow C_2=-\frac{1}{3} \Rightarrow y=e^{2x}(\cos 3x-\frac{1}{3}\sin 3x)$$

Nhận xét 4.2

- Ta có thể tìm nghiệm tổng quát của PTVP tuyến tính cấp 2 hệ số hằng thuần nhất bằng cách giải phương trình đặc trưng tương ứng
- Để tìm nghiệm riêng của PTVP tuyến tính cấp 2 không thuần nhất ta có thể sử dụng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange và nguyên lý chồng chất nghiệm

Ví dụ 4.17 Tìm nghiệm tổng quát PTVP $y'' - y = \dfrac{e^x}{e^x+1}$

Phương trình đặc trưng $k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k = \pm 1$

Xét $y = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^x$

$$\begin{cases} C'_1 e^{-x} + C'_2 e^x = 0 \\ -C'_1 e^{-x} + C'_2 e^x = \dfrac{e^x}{1+e^x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' = -\dfrac{1}{2}\dfrac{e^{2x}}{1+e^x} \\ C_2' = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{e^x+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int \dfrac{e^{2x}dx}{e^x+1} \\ C_2 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \dfrac{dx}{e^x+1} \end{cases}$$

$$y = \frac{e^{-x}}{2}\left[\ln(e^x+1) - e^x + C_1\right] + \frac{e^x}{2}\left[x - \ln(e^x+1) + C_2\right]$$

- PTVP tuyến tính cấp 2 hệ số hằng không thuần nhất với hàm $f(x)$ đặc biệt sau đây có công thức tìm nghiệm riêng tương ứng

Trường hợp 1: $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$

- Nếu α không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng thì phương trình **(*)** có nghiệm riêng dạng

$$y^* = e^{\alpha x} Q_n(x)$$

- Nếu α là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng thì phương trình **(*)** có nghiệm riêng dạng

$$y^* = x e^{\alpha x} Q_n(x)$$

- Nếu α là nghiệm kép của phương trình đặc trưng thì phương trình **(*)** có nghiệm riêng dạng

$$y^* = x^2 e^{\alpha x} Q_n(x)$$

trong đó $P_n(x), Q_n(x)$ là các đa thức bậc n

Trường hợp 2: $f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + P_m(x)\sin\beta x\right]$

- Nếu $\alpha \pm i\beta$ không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng thì phương trình **(*)** có một nghiệm riêng dạng

$$y^* = e^{\alpha x}\left[Q_k(x)\cos\beta x + R_k(x)\sin\beta x\right]$$

trong đó $Q_k(x),\ R_k(x)$ là các đa thức bậc $k = \max(n,m)$

- Nếu $\alpha \pm i\beta$ là nghiệm của phương trình đặc trưng thì phương trình **(*)** có một nghiệm riêng dạng

$$y^* = xe^{\alpha x}\left[Q_k(x)\cos\beta x + R_k(x)\sin\beta x\right]$$

trong đó $Q_k(x),\ R_k(x)$ là các đa thức bậc $k = \max(n,m)$

Ví dụ 4.18 Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân

$$y''+2y'-3y=e^x x+x^2$$

Phương trình đặc trưng $k^2+2k-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k_1=1 \\ k_2=-3 \end{array}\right.$

Nghiệm tổng quát của PTVP thuần nhất $\overline{y}=C_1e^{-3x}+C_2e^x$

Nghiệm riêng $y^*_1=xe^x(ax+b)$ $y^*_1{}'=e^x(ax^2+bx+2ax+b)$

$$y^*_1{}''=e^x(ax^2+bx+4ax+2b+2a) \Rightarrow y^*_1=\frac{x}{8}e^x(x-1)$$

Nghiệm riêng $y^*_2=ax^2+bx+c$ $y^*_2{}'=2ax+b$ $y^*_2{}''=2a$

$$\Rightarrow y^*_2=x^2-4x+14$$

Nghiệm tổng quát của PTVP không thuần nhất

$$y=\overline{y}+y^*_1+y^*_2=C_1e^{-3x}+C_2e^x+\frac{x}{8}e^x(x-1)+x^2-4x+14$$

Ví dụ 4.19 Tìm nghiệm của bài toán Cauchy

$$y''-4y'+4y=e^{2x}(x+1),\ y(0)=y'(0)=1$$

Phương trình đặc trưng $k^2-4k+4=0 \Leftrightarrow k_1=k_2=2$

Nghiệm tổng quát của PTVP thuần nhất $\overline{y}=\left(C_1+C_2x\right)e^{2x}$

Nghiệm riêng $y^*=x^2e^{2x}(ax+b)$ $y^*{}'=e^{2x}(2ax^3+2bx^2+3ax^2+2bx)$

$$y^*{}''=e^{2x}(4ax^3+4bx^2+12ax^2+6ax+8bx+2b) \Rightarrow y^*=\frac{1}{6}x^2e^{2x}(x+3)$$

$$y=\overline{y}+y^*=e^{2x}(C_1+C_2x)+\frac{1}{6}x^2e^{2x}(x+3)$$

$$y'=e^{2x}(2C_1+C_2+2C_2x)+\frac{1}{6}e^{2x}(2x^3+9x^2+6x)$$

$$y(0)=C_1=1 \Rightarrow y'(0)=2C_1+C_2=1$$

$$C_1=1, C_2=-1 \Rightarrow y=e^{2x}(1-x)+\frac{1}{6}x^2e^{2x}(x+3)$$

Ví dụ 4.20 Tìm nghiệm tổng quát của PTVP $y'' + y' = x\cos x$

Phương trình đặc trưng $k^2 + k = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = -1 \end{cases}$

Nghiệm tổng quát của PTVP thuần nhất $\bar{y} = C_1 + C_2 e^{-x}$

Nghiệm riêng $y^* = (ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x$

$$y^{*\prime} = (cx+a+d)\cos x + (-ax+c-b)\sin x$$

$$y^{*\prime\prime} = (-ax+2c-b)\cos x + (-cx-2a-d)\sin x$$

Thế vào PTVP, ta có

$$\big((c-a)x + a + 2c + d - b\big)\cos x + \big(-(a+c)x + c - 2a - b - d\big)\sin x = x\cos x$$

$$\begin{cases} c - a = 1 \\ a + 2c + d - b = 0 \\ a + c = 0 \\ c - 2a - b - d = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}, b = 1, c = \frac{1}{2}, d = \frac{1}{2}$$

Vậy nghiệm tổng quát là $y = C_1 + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2}(x-2)\cos x + \frac{1}{2}(x+1)\sin x$

Ví dụ 4.21 Tìm nghiệm tổng quát của PTVP

$$y''+2y'+2y=e^{-x}(1+\sin x)$$

Phương trình đặc trưng $k^2+2k+2=0 \Leftrightarrow k=-1\pm i$

Nghiệm tổng quát của PTVP thuần nhất $\overline{y}=e^{-x}\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)$

Nghiệm riêng $y^*_1=xe^{-x}\left(a\cos x+b\sin x\right)$

$$y^*_1{}'=e^{-x}\left((bx-ax+a)\cos x+(b-bx-ax)\sin x\right)$$

$$y^*_1{}''=e^{-x}\left((2b-2a-2bx)\cos x+(-2b-2a+2ax)\sin x\right)$$

Thế vào PTVP, ta có

$$2b\cos x-2a\sin x=\sin x\Rightarrow\ b=0,\ a=-\frac{1}{2}\ \Rightarrow y^*_1=-\frac{xe^{-x}}{2}\cos x$$

Nghiệm riêng $y^*_2=ce^{-x}$

$$y^*_2{}'=-ce^{-x},\ y^*_2{}''=ce^{-x}\Rightarrow c=1\ \Rightarrow y^*_2=e^{-x}$$

Vậy nghiệm tổng quát là

$$y=\overline{y}+y^*_1+y^*_2=e^{-x}\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)+e^{-x}(1-\frac{x}{2}\cos x)$$

4.4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1

4.4.1. Các khái niệm cơ bản về hệ phương trình vi phân cấp 1

- Hệ phương trình vi phân cấp 1 có dạng

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{cases}$$

trong đó x là biến độc lập, $y_1, \ldots, y_n$ là các hàm phải tìm, được gọi là hệ PTVP cấp 1 dạng chính tắc

- Nghiệm của hệ là các hàm $y_1, \ldots, y_n$, sao cho thay nó vào hệ ta nhận được đồng nhất thức

- Nghiệm tổng quát của hệ là các hàm $y_1,...,y_n$, trong đó các thành phần của véc tơ phụ thuộc vào x và n hằng số tùy ý $K_1,K_2,...,K_n$ có tính chất bất kì một nghiệm nào của hệ cũng được suy ra từ các hàm đó với n hằng số $K_1=K_{1_0}$, $K_2=K_{2_0}$,..., $K_n=K_{n_0}$. Nghiệm này được gọi là nghiệm riêng của hệ PTVP
- Sự tồn tại và duy nhất nghiệm

Nếu véc tơ hàm $(f_1,..., f_n)$ liên tục trong miền $V\subset\mathbb{R}^{n+1}$ chứa điểm $M_0(x_0,y_{1_0},...,y_{n_0})$ thì hệ có nghiệm $(y_1,...,y_n)$ trong lân cận điểm $M_0(x_0,y_{1_0},...,y_{n_0})$ và thỏa mãn $y_i(x_0)=y_{i_0}$

Nếu thêm điều kiện: các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}$; $i,\ j=1,...,n$ liên tục trong miền $V\subset\mathbb{R}^{n+1}$ thì nghiệm $(y_1,...,y_n)$ trong lân cận điểm $M_0(x_0,y_{1_0},...,y_{n_0})$ và thỏa mãn $y_i(x_0)=y_{i_0}$ là duy nhất

4.4.2. Phương pháp giải hệ phương trình vi phân cấp 1

Phương pháp khử

- Bằng cách lấy đạo hàm $n-1$ lần hai vế của một trong các phương trình của hệ và dùng các phép thế thích hợp ta có thể nhận được một PTVP cấp n đối với một hàm số y_m nào đó

- Sau khi giải PTVP này, ta nhận được nghiệm tổng quát của nó: $y_m = y_m\left(x, K_1, ..., K_n\right)$

- Tiếp tục thế hàm số này vào các PTVP còn lại ta sẽ nhận được nghiệm tổng quát của hệ PTVP đã cho

Ví dụ 4.22 Tìm nghiệm tổng quát của hệ PTVP $\begin{cases} x' = y + e^{2t} \\ y' = -x + 2e^{2t} \end{cases}$

Sau khi lấy đạo hàm hai vế phương trình thứ nhất và thay vào phương trình thứ hai ta nhận được

$$x'' + x = 4e^{2t}$$

Giải PTVP tuyến tính cấp hai này ta được nghiệm

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{4}{5} e^{2t}$$

Từ phương trình thứ nhất của hệ, ta có

$$y = x' - e^{2t} = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + \frac{3}{5} e^{2t}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là

$$\begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{4}{5} e^{2t} \\ y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + \frac{3}{5} e^{2t} \end{cases}$$

4.4.3. Hệ phương trình vi phân với hệ số hằng

Hệ PTVP cấp 1 dạng

$$\begin{cases} y_1' = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} y_i \\ y_2' = \sum_{i=1}^{n} a_{2i} y_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = \sum_{i=1}^{n} a_{ni} y_i \end{cases}$$

trong đó $a_{ij},\ i, j = 1, 2, \ldots, n$ là các hằng số thực được gọi là hệ PTVP tuyến tính thuần nhất có hệ số hằng số dạng chính tắc

Phương pháp tìm nghiệm

Chúng ta tìm nghiệm không tầm thường của hệ PTVP tuyến tính thuần nhất hệ số hằng trong dạng

$$\left(\alpha_1 e^{\lambda x}, \alpha_2 e^{\lambda x}, \ldots, \alpha_n e^{\lambda x}\right), \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i > 0$$

Đạo hàm và thay vào ta nhận được hệ phương trình đại số tuyến tính thuần nhất có $n+1$ ẩn số: $\lambda, \ \alpha_1, \ldots, \ \alpha_n$

$$\begin{cases} \left(a_{11}-\lambda\right)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22}-\lambda)\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)\alpha_n = 0 \end{cases}$$

Điều kiện $\alpha_1,...,\alpha_n$ không đồng thời không bằng 0 suy ra $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng λ

1. Nếu ma trận hệ số của hệ PTVP có n giá trị riêng phân biệt $\lambda_1,\ \lambda_2,...,\ \lambda_n$ và các véc tơ riêng tương ứng là $\left(\alpha_1^1,\ \alpha_2^1,...,\alpha_n^1\right),...,\ \left(\alpha_1^n,\ \alpha_2^n,...,\alpha_n^n\right)$ thì nghiệm tổng quát của hệ PTVP được tìm trong dạng:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = K_1 \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_2^1 \\ \cdots \\ \alpha_n^1 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 x} + \cdots + K_n \begin{pmatrix} \alpha_1^n \\ \alpha_2^n \\ \cdots \\ \alpha_n^n \end{pmatrix} e^{\lambda_n x}$$

$K_1,\ K_2,...,\ K_n$ là các hằng số tùy ý

2. Nếu giá trị riêng λ_k là nghiệm thực bội m của phương trình đặc trưng ma trận hệ số thì m số hạng ứng với $e^{\lambda_k x}$ trong dạng nghiệm của hệ PTVP sẽ được thay bằng tổng

$$\left(\begin{pmatrix} \alpha_1^{1k} \\ \alpha_2^{1k} \\ \dots \\ \alpha_n^{1k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1^{2k} \\ \alpha_2^{2k} \\ \dots \\ \alpha_n^{2k} \end{pmatrix} x + \cdots + \begin{pmatrix} \alpha_1^{mk} \\ \alpha_2^{mk} \\ \dots \\ \alpha_n^{mk} \end{pmatrix} x^{m-1} \right) e^{\lambda_k x}$$

3. Trường hợp đa thức đặc trưng có nghiệm phức ta cũng tìm nghiệm của hệ PTVP dạng trên sau đó sử dụng tính chất tuyến tính để nhận được nghiệm dưới dạng thực

Ví dụ 4.23 Giải hệ $\begin{cases} y' = y + 2z \\ z' = 4y + 3z \end{cases}$

Phương trình đặc trưng của hệ $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$

có nghiệm $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1.$ Ứng với $\lambda_1 = 5$ Hệ phương trình để xác định

để xác định vecto riêng $\begin{cases} (1-5)p_1 + 2p_2 = 0 \\ 4p_1 + (3-5)p_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4p_1 - 2p_2 = 0$

Lấy $p_1 = 1, p_2 = 2$ Vậy vecto riêng ứng với $\lambda_1 = 5$ là (1,2). Tương tự vecto riêng ứng với $\lambda_2 = -1$ là (1,-1).

Do đó hệ nghiệm cơ bản là $y_1 = e^{5x}, z_1 = 2e^{5x}$

$$y_2 = e^{-x}, z_2 = -e^{-x}$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ là

$$y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-x}, z = 2C_1 e^{5x} - C_2 e^{-x}$$

Ví dụ 4.24: Tìm nghiệm của bài toán Cauchy

$$\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = -x + 5y \\ x(0) = 0,\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Phương trình đặc trưng $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 4)^2 = 0$

Nghiệm tổng quát của hệ PTVP được viết trong dạng $\begin{cases} x = (A_1 + B_1 t)e^{4t} \\ y = (A_2 + B_2 t)e^{4t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = (B_1 + 4A_1 + 4B_1 t)e^{4t} \\ y' = (B_2 + 4A_2 + 4B_2 t)e^{4t} \end{cases}$

Thay vào hệ PTVP ta có

$$\begin{cases} B_1 + 4A_1 + 4B_1 t = 3A_1 + A_2 + (3B_1 + B_2)t \\ B_2 + 4A_2 + 4B_2 t = -A_1 + 5A_2 + (-B_1 + 5B_2)t \end{cases}$$

Đồng nhất hệ số nhận được

$$\begin{cases} B_1 + 4A_1 = 3A_1 + A_2 \\ B_2 + 4A_2 = -A_1 + 5A_2 \\ 4B_1 = 3B_1 + B_2 \\ 4B_2 = -B_1 + 5B_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B_1 = -A_1 + A_2 \\ B_2 = -A_1 + A_2 \\ B_1 = B_2 \end{cases}$$

Đặt $B_1 = B_2 = K_1,\ A_1 = K_2,\ A_2 = K_1 + K_2$

$$\begin{cases} x = (K_2 + K_1 t)e^{4t} \\ y = (K_1 + K_2 + K_1 t)e^{4t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(0) = K_2 = 0 \\ y(0) = K_1 + K_2 = 1 \Rightarrow K_1 = 1 \end{cases}$$

Nghiệm của bài toán Cauchy của PTVP đã cho có dạng

$$\begin{cases} x = te^{4t} \\ y = (1+t)e^{4t} \end{cases}$$

Ví dụ 4.25

Giải hệ PTVP $\begin{cases} y' = y - 5z \\ z' = 2y - z \end{cases}$

Phương trình đặc trưng của hệ $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 9 = 0$

có nghiệm $\lambda_1 = 3i, \lambda_2 = -3i.$ Vectơ riêng ứng với $\lambda_1 = 3i$ là $(5, 1-3i)$

Do đó ta có nghiệm

$$y_1 = 5e^{3ix} = 5\cos 3x + i5\sin 3x$$

$$z_1 = (1+3i)e^{-3ix} = (\cos 3x + 3\sin 3x) + i(\sin 3x - 3\cos 3x)$$

Vectơ riêng ứng với $\lambda_1 = -3i$ là $(5, 1+3i)$. Do đó ta có nghiệm

$$y_2 = 5e^{-3ix} = 5\cos 3x - i5\sin 3x$$

$$z_2 = (1+3i)e^{-3ix} = (\cos 3x + 3\sin 3x) - i(\sin 3x - 3\cos 3x)$$

Ta có thể chọn hệ nghiệm cơ bản là

$$\overline{y_1} = \frac{y_1 + y_2}{2} = 5\cos 3x, \overline{z_1} = \frac{z_1 + z_2}{2} = \cos 3\text{x}+3\sin 3\text{x}.$$

$$\overline{y_2} = \frac{y_1 - y_2}{2i} = 5\sin 3x, \overline{z_2} = \frac{z_1 - z_2}{2i} = \sin 3\text{x} - 3\cos 3\text{x}.$$

Nghiệm tổng quát được tìm có dạng

$$y = 5C_1\cos 3\text{x}+5\text{C}_2 \sin 3x, z = C_1(\cos 3\text{x}+3\sin 3\text{x}) + C_2(\sin 3\text{x}-3\cos 3\text{x})$$