GIẢI TÍCH II

Trường Đại học Công nghệ

Đại học Quốc gia Hà nội

Giảng viên: TS. Nguyễn Văn Quang

E-mail: nvquang.imech@gmail.com

Đánh giá kiểm tra:

- A: Điểm thành phần (40%)
  - Điểm chuyên cần, điểm bài tập: 10%
  - Điểm thi giữa kỳ: 30%
- B: Điểm thi cuối kỳ (60%)
- Điểm kết thúc môn học = A*0.4 + B*0.6

Tài liệu:

1. Nguyễn Đình Trí. Toán học cao cấp, tập 3. NXB Giáo dục, 2006.
2. Nguyễn Thủy Thanh. Bài tập giải tích, tập 1,2,3. NXB Giáo dục, 2002.
3. Trần Đức Long. Bài tập Giải tích, tập 1,2,3. NXB ĐHQGHN, 2005.
4. Nguyễn Thừa Hợp. Giải tích, tập 1,2,3. NXB ĐHQGHN, 2004.
5. James Stewart. Calculus, 7th Edition, 2010.

Nội dung:

- Chương 1: Mở đầu, giới hạn, liên tục
- Chương 2: Đạo hàm, vi phân
- Chương 3: Tích phân bội hai
- Chương 4: Tích phân bội ba
- Chương 5: Tích phân đường
- Chương 6: Tích phân mặt
- Chương 7: Phương trình vi phân

Nội dung Chương 1

1. **Hàm hai biến**

2. **Mặt bậc hai**

3. **Giới hạn**

4. **Liên tục**

1. Hàm hai biến

Ví dụ

Nhiệt độ T tại một điểm trên bề mặt trái đất tại một thời điểm t cho trước phụ thuộc vào kinh độ x và vĩ độ y của điểm này. Chúng ta có thể coi T là một hàm theo hai biến x và y, ký hiệu:

$$T = T(x, y)$$

Thể tích V của một bình hình trụ phụ thuộc vào bán kính đáy r và chiều cao h. Thực tế ta biết $V = \pi r^2 h$. Khi đó V là một hàm hai biến theo r và h: $V(r, h) = \pi r^2 h$.

1. Hàm hai biến

Định nghĩa

Cho $D \subseteq R^2$. Hàm hai biến là một ánh xạ:

$$f : D \to R$$

$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

Ký hiệu: $f = f(x, y)$.

D được gọi là miền xác định của f.

Miền giá trị của f: $E = \{a \in R \mid \exists (x, y) \in D : a = f(x, y)\}$

Nếu f cho bởi biểu thức đại số: Miền xác định là tập hợp tất cả các giá trị của x và y, sao cho biểu thức có nghĩa.

Miền giá trị là tập hợp tất cả các số thực mà hàm có thể nhận được.

1. Hàm hai biến

Ví dụ

Hàm hai biến:

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-y}$$

Miền xác định: $D = \{(x,y) \in R^2 \mid x+y+1 \geq 0, x \neq y\}$

$$f(3,2) = \frac{\sqrt{3+2+1}}{3-2} = \sqrt{6}$$

Ví dụ

Hàm hai biến:

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

Miền xác định: $D = R^2$

Miền giá trị: $E_f = R_+ = [0,+\infty)$

$$f(x+y,x-y) = (x+y)^2 + (x-y)^2 = 2(x^2+y^2)$$

$$f(x,x) = x^2 + x^2 = 2x^2$$

1. Hàm hai biến

Ví dụ

Hàm hai biến:

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2+y^2}} & , \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Miền xác định: $D=R^2$

Miền giá trị: $E_f=[0,1)$

2. Mặt bậc hai

Nhắc lại

Phương trình tổng quát mặt bậc hai trong hệ tọa độ Descartes $Oxyz$ là:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0$$

Từ Đại số tuyến tính, để vẽ mặt bậc hai:

1) Đưa dạng toàn phương (màu đỏ) về dạng chính tắc bằng biến đổi trực giao.

2) Tìm phép biến đổi, xác định trục tọa độ mới.

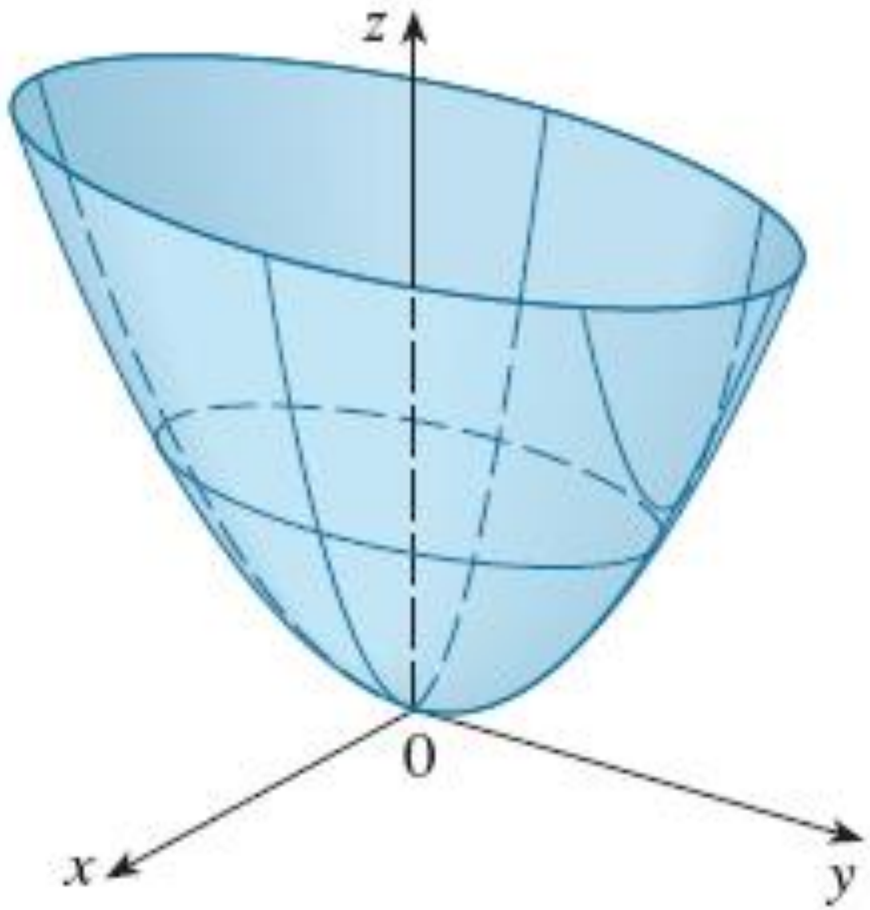
3) Vẽ hình.

2. Mặt bậc hai

Nhắc lại

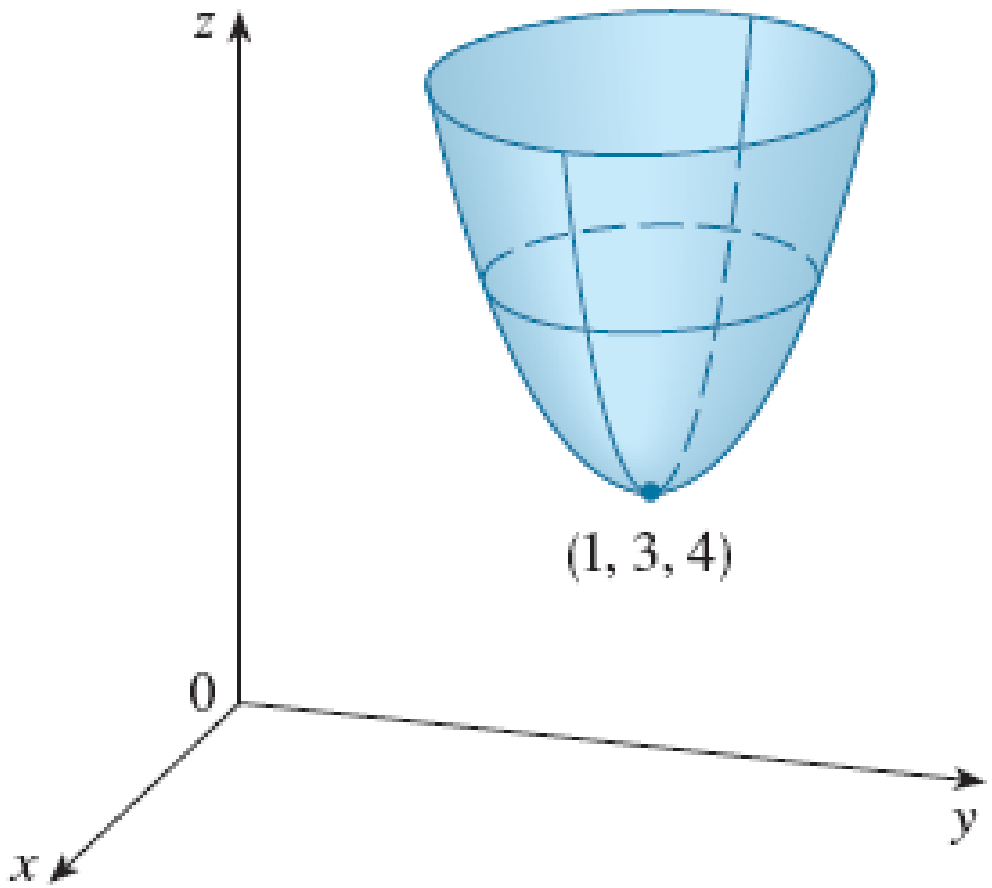
Mặt paraboloid elliptic:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



Nhắc lại

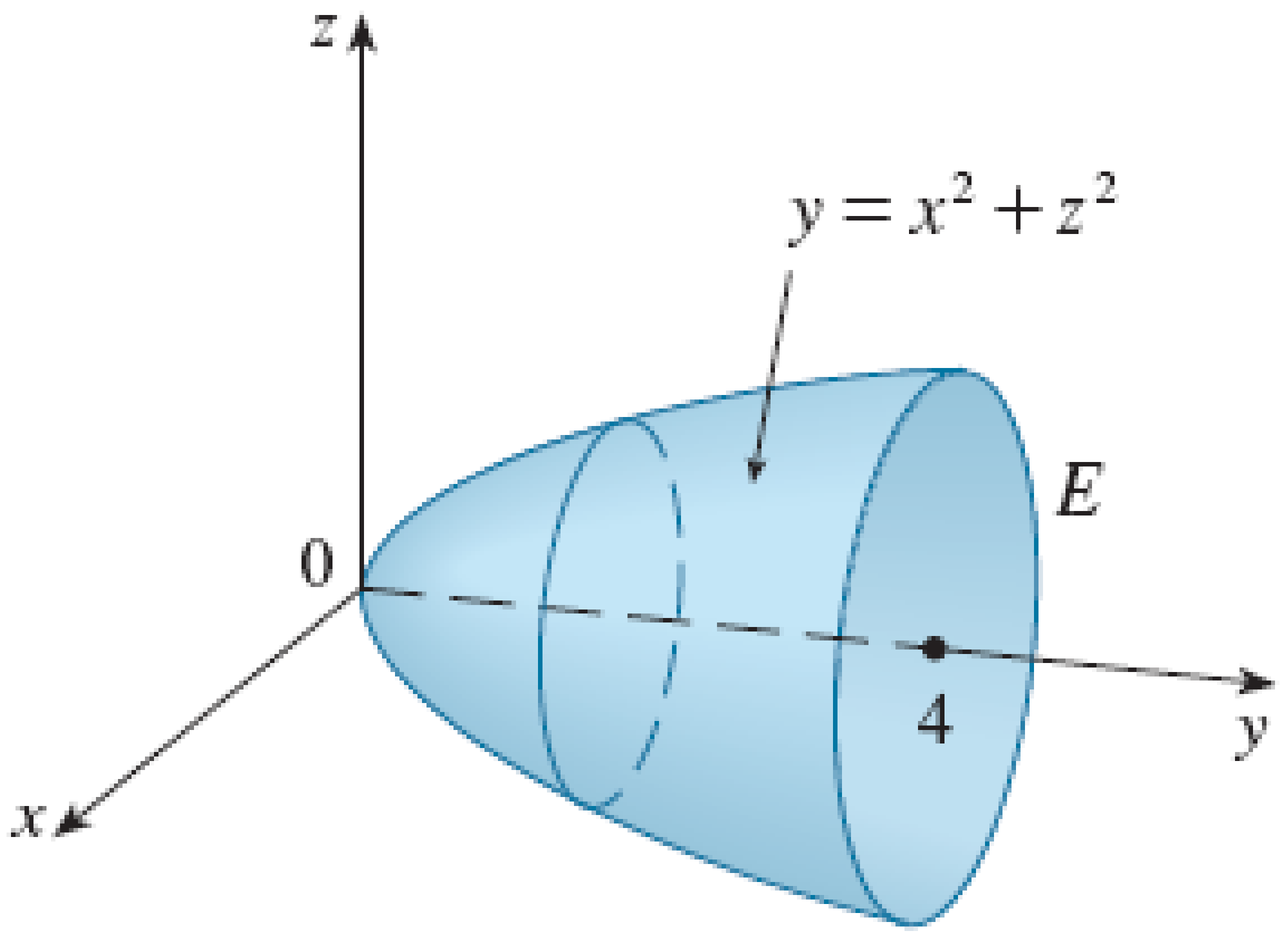
Mặt paraboloid elliptic: $z = (x-1)^2 + (y-3)^2 + 4$



2. Mặt bậc hai

Nhắc lại

Mặt paraboloid elliptic: $y = x^2 + z^2$

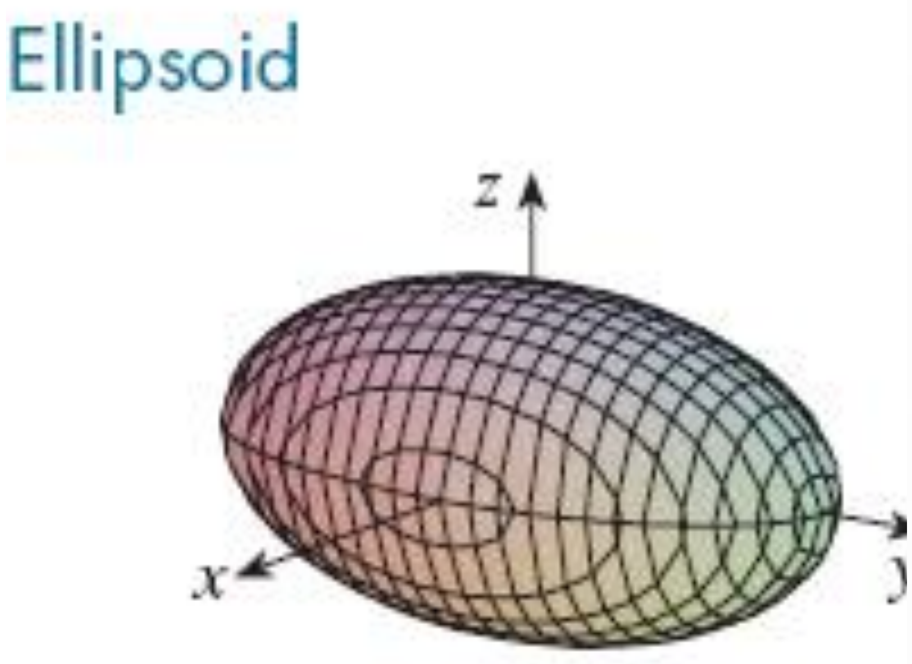


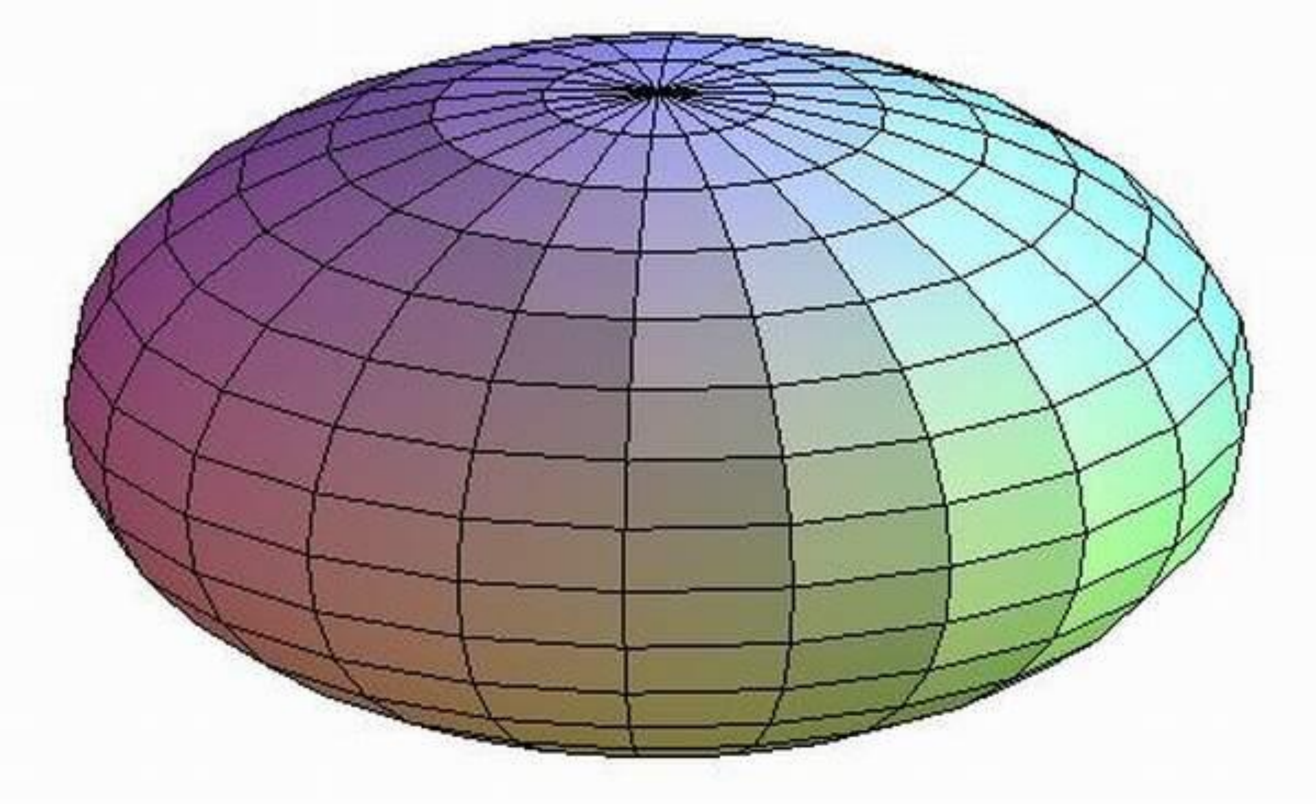
2. Mặt bậc hai

Nhắc lại

Mặt ellipsoid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

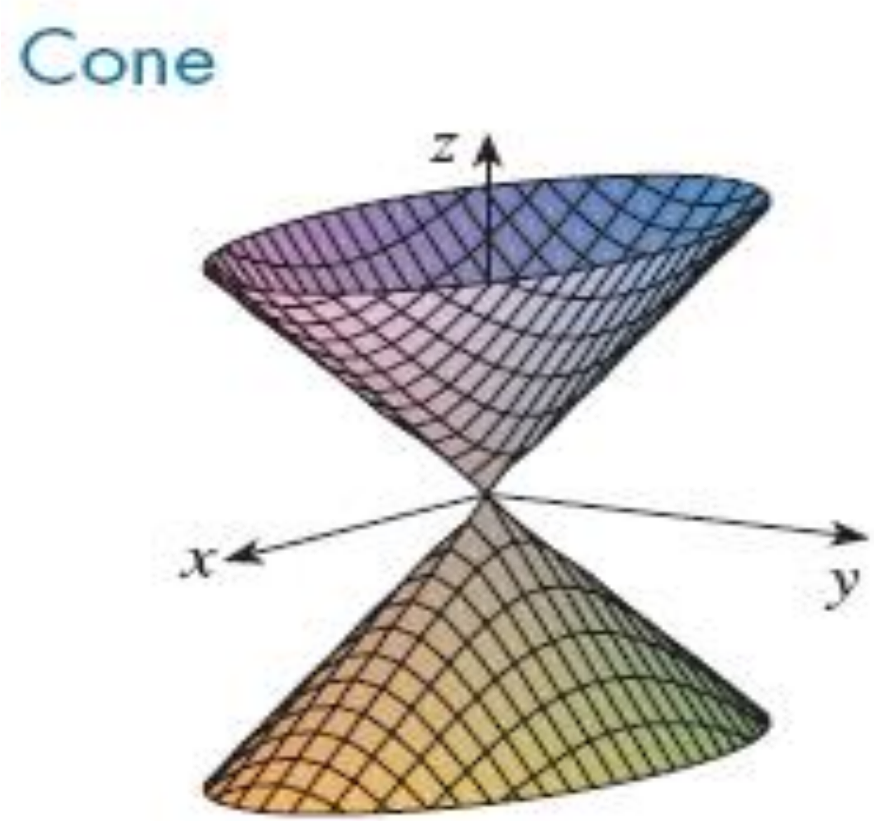


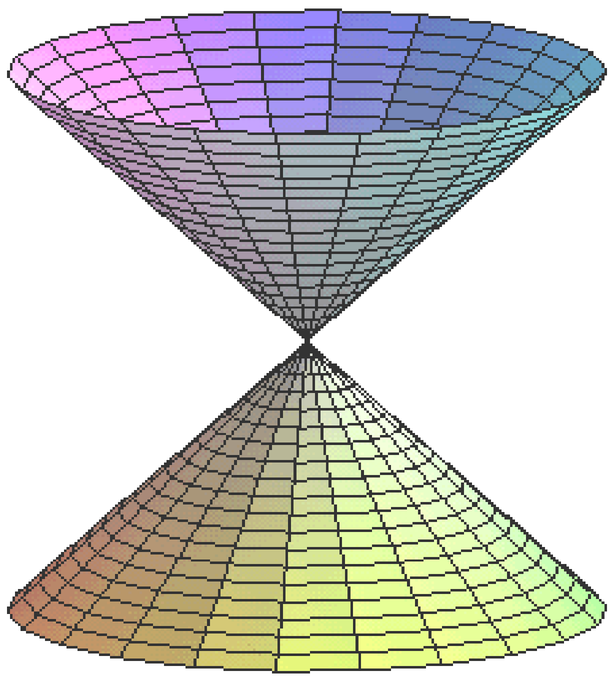


Nhắc lại

Mặt nón hai phía:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

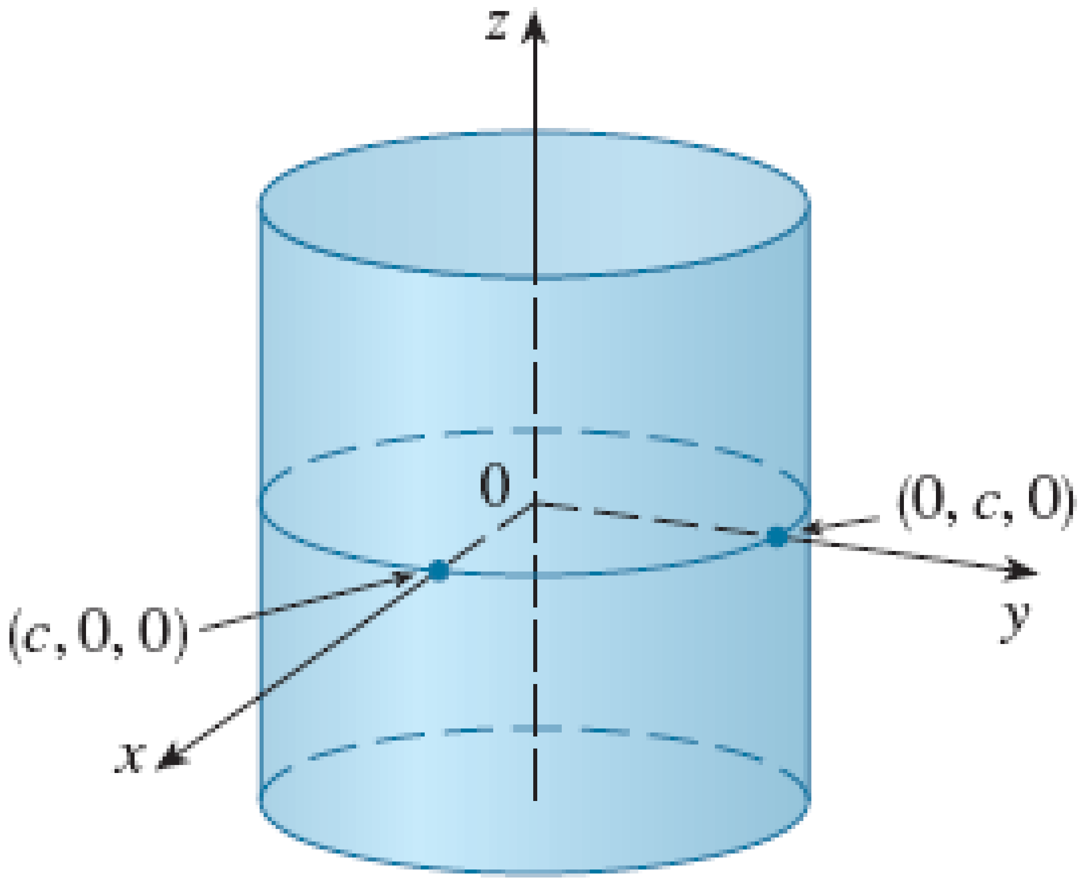




Nhắc lại

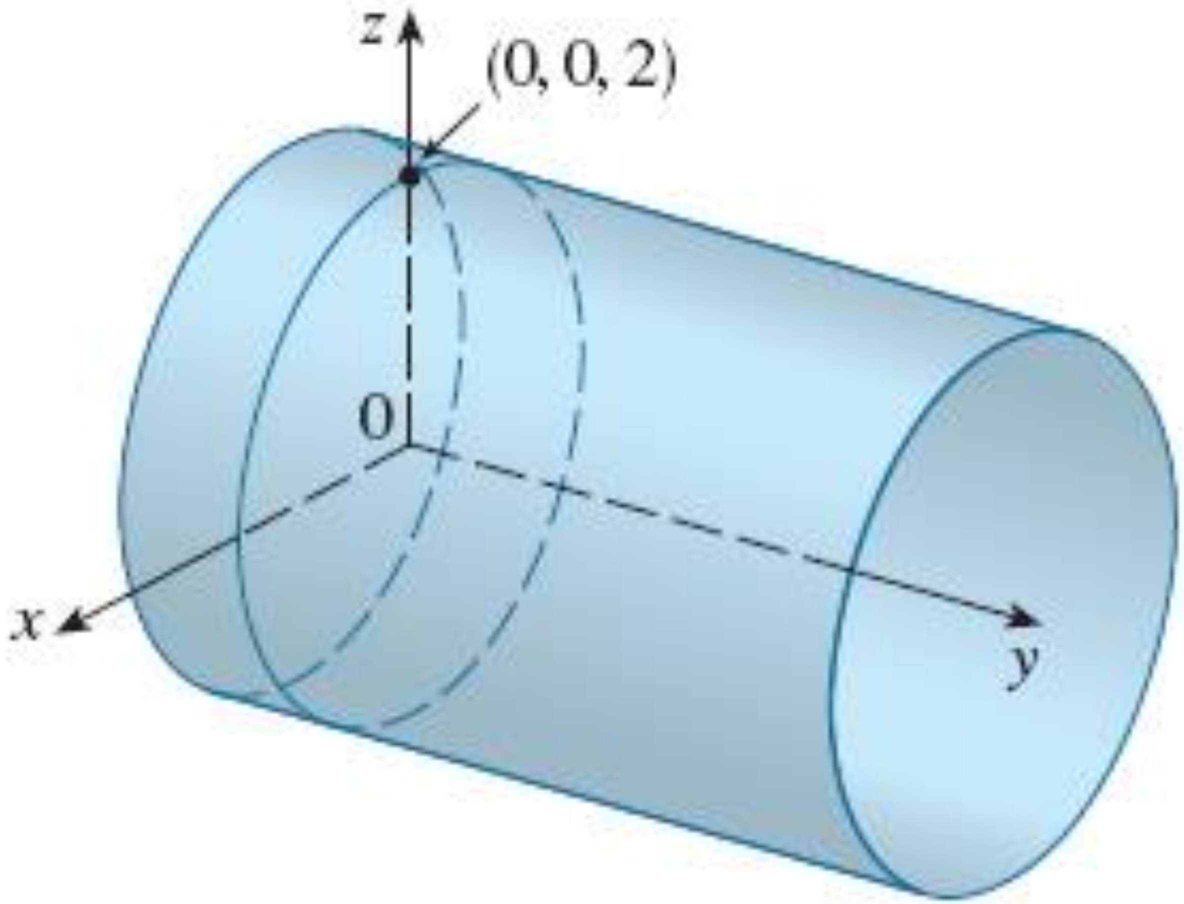
Mặt trụ: trong phương trình thiếu hoặc x, hoặc y, hoặc z.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Nhắc lại

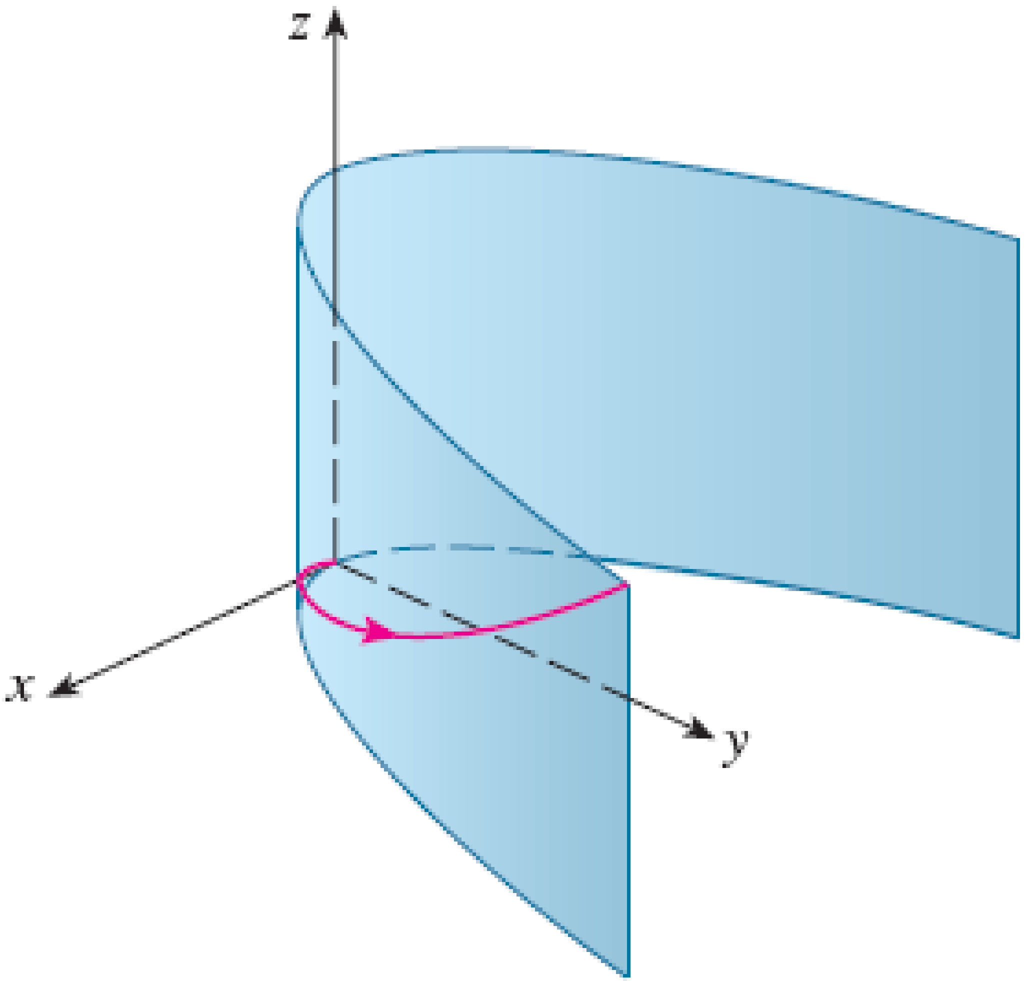
Mặt trụ: $x^2 + z^2 = 4$

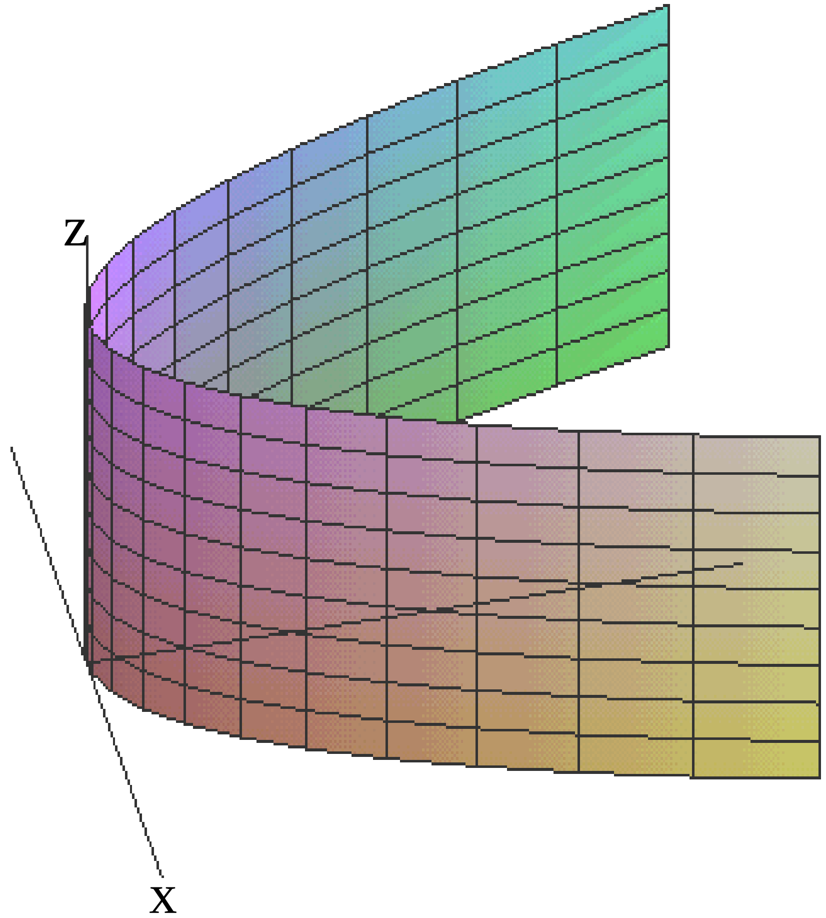


2. Mặt bậc hai

Nhắc lại

Mặt trụ: $y = x^2$

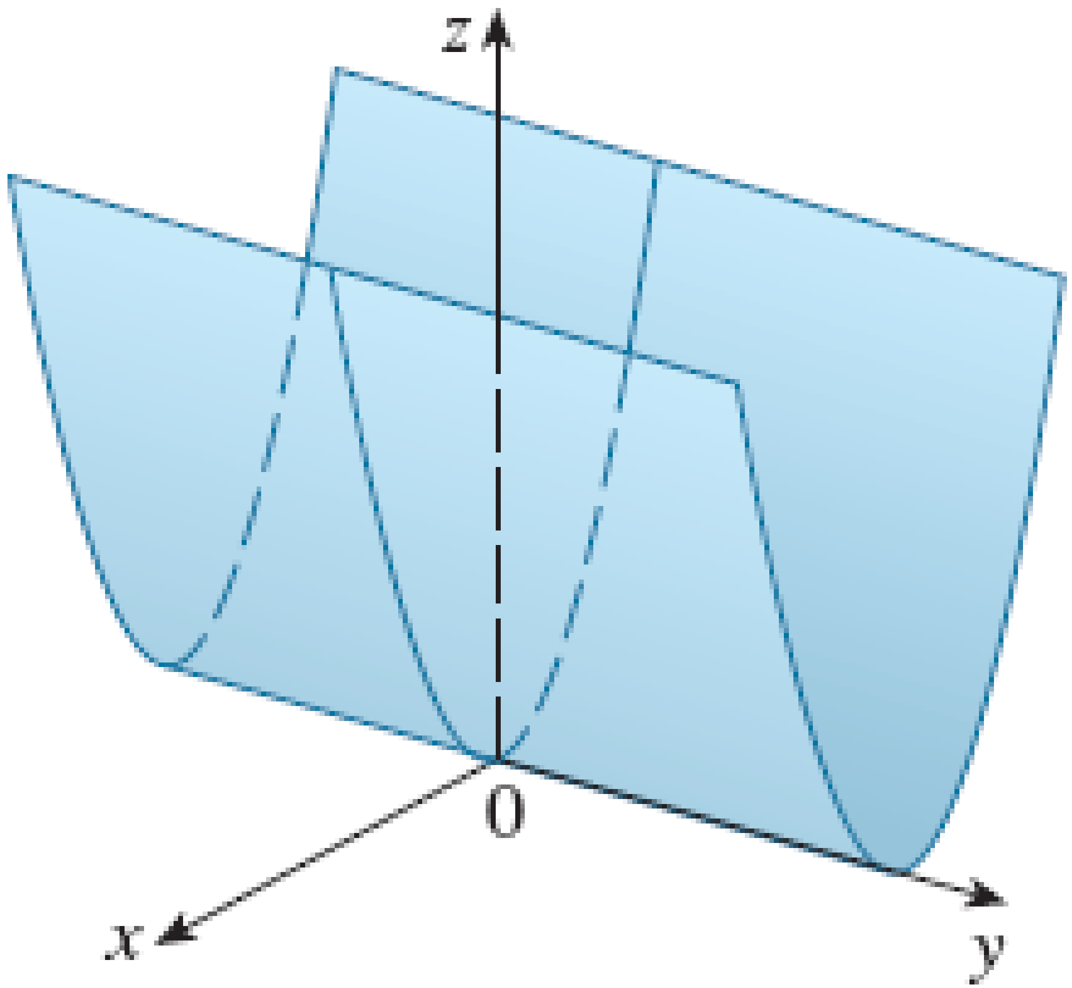




2. Mặt bậc hai

Nhắc lại

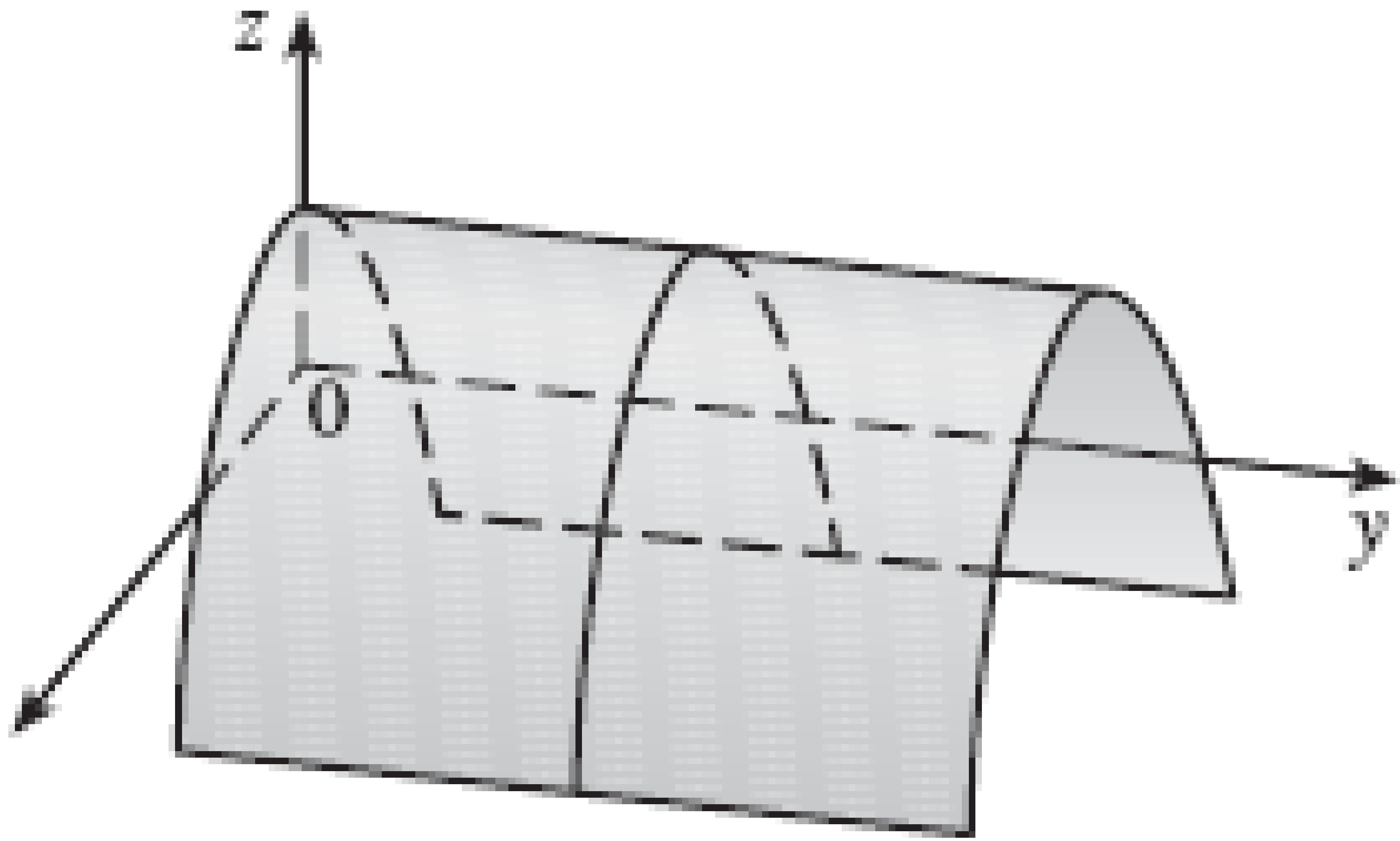
Mặt trụ: $z = x^2$



2. Mặt bậc hai

Nhắc lại

Mặt trụ: $z = 2 - x^2$



Ví dụ

Cho 2 hàm số $f(x, y), g(x, y)$ hãy xét các giá trị của nó khi (x, y) tiến tới (0, 0).

$$f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

$$g(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Ví dụ

$$f(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

TABLE I Values of $f(x, y)$

x \ y	−1.0	−0.5	−0.2	0	0.2	0.5	1.0
−1.0	0.455	0.759	0.829	0.841	0.829	0.759	0.455
−0.5	0.759	0.959	0.986	0.990	0.986	0.959	0.759
−0.2	0.829	0.986	0.999	1.000	0.999	0.986	0.829
0	0.841	0.990	1.000		1.000	0.990	0.841
0.2	0.829	0.986	0.999	1.000	0.999	0.986	0.829
0.5	0.759	0.959	0.986	0.990	0.986	0.959	0.759
1.0	0.455	0.759	0.829	0.841	0.829	0.759	0.455

3. Giới hạn

Ví dụ

$$g(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

TABLE 2 Values of $g(x, y)$

$x \backslash y$	−1.0	−0.5	−0.2	0	0.2	0.5	1.0
−1.0	0.000	0.600	0.923	1.000	0.923	0.600	0.000
−0.5	−0.600	0.000	0.724	1.000	0.724	0.000	−0.600
−0.2	−0.923	−0.724	0.000	1.000	0.000	−0.724	−0.923
0	−1.000	−1.000	−1.000		−1.000	−1.000	−1.000
0.2	−0.923	−0.724	0.000	1.000	0.000	−0.724	−0.923
0.5	−0.600	0.000	0.724	1.000	0.724	0.000	−0.600
1.0	0.000	0.600	0.923	1.000	0.923	0.600	0.000

3. Giới hạn

Nhận xét

- $f(x,y), g(x,y)$ đều không xác định tại (0,0).
- Khi (x,y) dần đến (0,0): các giá trị của $f(x,y)$ dần tới 1, các giá trị của $g(x,y)$ không tiến tới bất kỳ một giá trị nào.
- Dự đoán:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1.$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ không tồn tại.}$$

Định nghĩa giới hạn kép

Cho hàm hai biến $f = f(x, y), M_0(x_0, y_0) \in R^2$ sao cho M_0 là điểm tụ của D_f.

- Ta nói giới hạn của hàm f khi (x, y) dẫn đến điểm M_0 bằng a, nếu:

$$\forall (x_n, y_n) \in D_f \xrightarrow[n\to\infty]{} (x_0, y_0) \Rightarrow f(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} a$$

Ký hiệu của giới hạn (kép): $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = a$

- $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall (x,y) \in D_f, (x,y) \neq (x_0, y_0), \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$

Khi đó: $|f(x,y) - a| < \varepsilon.$

Ký hiệu khác của giới hạn (kép): $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y) = a$

3. Giới hạn

Tính chất của giới hạn

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)}[f(x,y)+g(x,y)]=\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f+\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g$

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)}[f(x,y)\cdot g(x,y)]=\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f\cdot\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g$

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)}\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}=\dfrac{\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)}{\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)}$, neu $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g\neq 0$

4. Neu $f(x,y)\le g(x,y)\le h(x,y)$ va

$\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f=\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} h=M$, thì $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g=M$.

3. Giới hạn

Ví dụ

Tìm giới hạn nếu tồn tại hoặc chứng minh không tồn tại:

$$I = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x + y\sin\frac{1}{x} \right)$$

$$0 \le |f(x,y)| = \left| x + y\sin\frac{1}{x} \right| \le |x| + \left| y\sin\frac{1}{x} \right| \le |x| + |y|$$

$$0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x + y\sin\frac{1}{x} \right) = 0.$$

3. Giới hạn

Ví dụ

Tìm giới hạn nếu tồn tại, hoặc chứng tỏ giới hạn không tồn tại:

$$I = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2 y}{x^2 + y^2}$$

$$0 \le |f(x,y)| = \left| \frac{3x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \le 3|y|, \text{ vì } \frac{x^2}{x^2 + y^2} \le 1.$$

$$0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$$

3. Giới hạn

Ví dụ

Tìm giới hạn:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

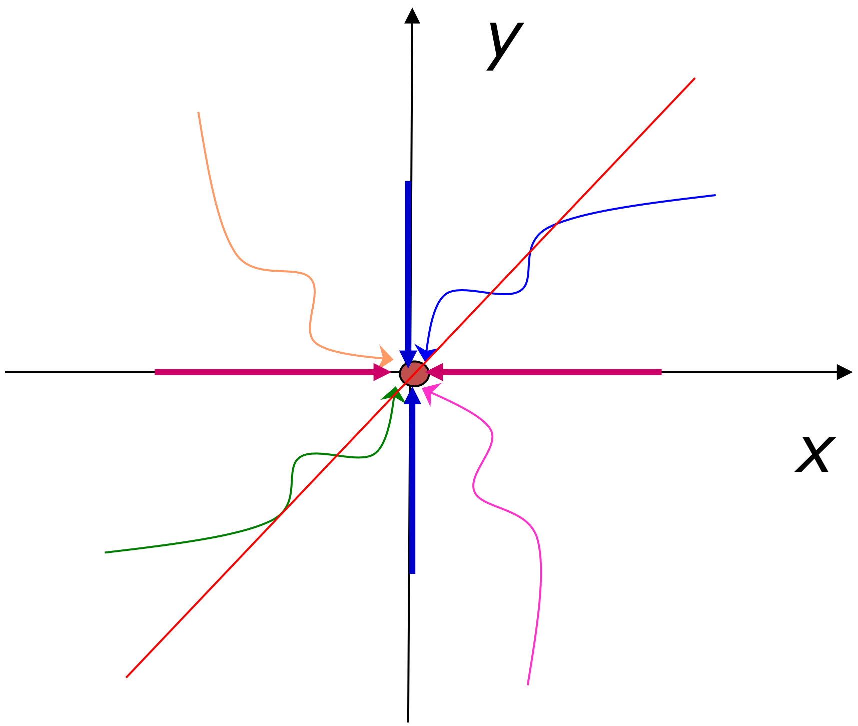
Dọc theo trục Ox:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{0}{x^2} = 0$$

Dọc theo trục $y = x$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

Do đó: không tồn tại giới hạn (kép).



Chú ý

Nếu (x, y) tiến tới (a, b) theo ít nhất 2 cách khác nhau, mà giá trị hàm $f(x, y)$ dần tới các giới hạn khác nhau thì:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$$

không tồn tại.

3. Giới hạn

Ví dụ

Tìm giới hạn (nếu có) hoặc chứng tỏ không tồn tại:

$$I = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+2y^2}{x^2+y^2}$$

Chọn dãy $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, 0\right) \xrightarrow{n\to+\infty} (0,0)$. Khi đó: $f(x_n, y_n) = f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = 1$

Chọn dãy thứ hai $(x'_n, y'_n) = \left(0, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n\to+\infty} (0,0)$

Khi đó $f(x'_n, y'_n) = f\left(0, \frac{1}{n}\right) = 2.$

Vậy tồn tại hai dãy dần đến (0,0) nhưng giá trị của f tại những điểm đó tiến đến hai số khác nhau, suy ra không tồn tại giới hạn đã cho.

3. Giới hạn

Ví dụ

Tìm giới hạn (nếu có) hoặc chứng tỏ không tồn tại:

$$I = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Chọn $y = kx$, khi đó:

$$f(x,y) = f(x,kx) = \frac{k}{1+k^2}$$

$f(x,y)$ là một đại lượng phụ thuộc vào k, mà k thay đổi nên không tồn tại giới hạn.

3. Giới hạn

Ví dụ

Tìm giới hạn (nếu có) hoặc chứng tỏ không tồn tại:

$$I = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6}$$

Chọn dãy $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, 0\right) \xrightarrow{n\to+\infty} (0,0)$. Khi đó: $f(x_n, y_n) = f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = 0.$

Chọn dãy thứ hai $(x'_n, y'_n) = \left(\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n\to+\infty} (0,0)$

Khi đó $f(x'_n, y'_n) = f\left(\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$

Vậy tồn tại hai dãy dần đến (0,0) nhưng giá trị của f tại những điểm đó tiến đến hai số khác nhau, suy ra không tồn tại giới hạn đã cho.

3. Giới hạn

Ví dụ

Tìm giới hạn (nếu có) hoặc chứng tỏ không tồn tại:

$$I = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

Chọn dãy $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, 0\right) \xrightarrow{n\to+\infty} (0,0)$. Khi đó: $f(x_n, y_n) = f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = 0.$

Chọn dãy thứ hai $(x'_n, y'_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n\to+\infty} (0,0)$

Khi đó $f(x'_n, y'_n) = f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = 1.$

Vậy tồn tại hai dãy dần đến (0,0) nhưng giá trị của *f* tại những điểm đó tiến đến hai số khác nhau, suy ra không tồn tại giới hạn đã cho.

Ví dụ

Tìm giới hạn (nếu có) hoặc chứng tỏ không tồn tại:

$$I = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{1-\sqrt[3]{1+xy}}$$

Đặt $t = xy$, khi đó $(x, y) \to (0,0)$ thì $t \to 0$:

$$I = \lim_{t\to 0} \frac{t}{1-\sqrt[3]{1+t}} = -3$$

3. Giới hạn

Ví dụ

Tìm giới hạn (nếu có) hoặc chứng tỏ không tồn tại:

$$I = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y}{\sqrt{x^2 + y + 9} - 3}$$

Đặt $t = x^2 + y$, khi đó $(x, y) \to (0,0)$ thì $t \to 0$:

$$I = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sqrt{t + 9} - 3} = 6$$

3. Giới hạn

Ví dụ

Tìm giới hạn (nếu có) hoặc chứng tỏ không tồn tại:

$$I = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

Sử dụng hệ tọa độ cực, đặt $x = rcost, y = rsint$.

Vì $x^2 + y^2 = r^2$, nên khi $x \to 0, y \to 0$ thì $r \to 0, t \to a, a$ tùy ý.

$$I = \lim_{(r,t)\to(0,a)} \frac{r.cost.r^4.sin^4 t}{r^4}$$

$$= \lim_{(r,t)\to(0,a)} r.cost.sin^4 t$$

$$= 0$$

4. Liên tục

Định nghĩa

Hàm số $f(x,y)$ được gọi là liên tục tại (x_0,y_0), nếu:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

Hàm được gọi là liên tục trên miền D nếu nó liên tục tại mọi điểm trên miền D.

Tổng, hiệu, tích của hai hàm liên tục là hàm liên tục.

Thương của hai hàm liên tục là hàm liên tục (nếu hàm ở mẫu khác 0).

Hàm hợp của hai hàm liên tục là hàm liên tục (tại những điểm thích hợp).

4. Liên tục

Định nghĩa

Các hàm sau đây được gọi là hàm sơ cấp cơ bản:

1) Hàm mũ; 2) Hàm lũy thừa; 3) Hàm lượng giác; 4) Hàm lượng giác ngược; 5) Hàm logarit; 6) Hàm hằng.

Hàm thu được từ các hàm sơ cấp cơ bản bằng hữu hạn các phép toán: cộng, trừ, nhân, chia, lấy hàm hợp được gọi là hàm sơ cấp.

Các phép toán: cộng, trừ, nhân, chia, lấy hàm hợp các hàm sơ cấp là hàm sơ cấp.

Định lý

Hàm sơ cấp liên tục trên tập xác định.

Ví dụ

Tìm các điểm gián đoạn của hàm sau:

$$f(x,y)=\frac{xy}{x+y}$$

Đây là hàm sơ cấp nên liên tục tại những điểm mà nó xác định.

Suy ra những điểm gián đoạn của hàm số là đường thẳng $x+y=0$.

4. Liên tục

Ví dụ

Khảo sát tính liên tục của hàm sau R^2:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^3+y^3}=\frac{\sin t}{t}\xrightarrow{t\to 0}1 \qquad \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}=\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^3+y^3}\cdot\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

$$0\le\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|\le|x|+|y| \qquad \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=1.0=0=f(0,0)$$

Suy ra f liên tục tại (0,0). Vậy hàm đã cho liên tục trên R^2.

4. Liên tục

Ví dụ

Tìm tất cả các giá trị của a để hàm số liên tục tại điểm (0,0):

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ a, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Ta có $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ không tồn tại.

Vậy hàm không liên tục tại (0,0). Không tồn tại a.