CHƯƠNG 1: PHÉP TÍNH VI PHÂN CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

Phép tính vi phân hàm nhiều biến số là sự mở rộng một cách tự nhiên và cần thiết của phép tính vi phân hàm một biến số.

Các bài toán thực tế thường xuất hiện sự phụ thuộc một biến số vào hai biến số hoặc nhiều hơn.

Chẳng hạn nhiệt độ T của một chất lỏng biến đổi theo độ sâu z và thời gian t theo công thức $T = e^{-t}z$.

Nhiệt lượng toả ra trên dây dẫn phụ thuộc điện trở dây, cường độ của dòng và thời gian dẫn điện theo công thức $Q = 0,24RI^2t$

Vì vậy, khảo sát hàm số nhiều biến số vừa mang tính tổng quát vừa mang tính thực tiễn.

1.1. KHÔNG GIAN $\mathbb{R}^n$. KHÁI NIỆM KHOẢNG CÁCH, LÂN CẬN

* $\mathbb{R}^n = \left\{ M(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,n} \right\}$

* Cho $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, N(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Khoảng cách giữa M và N kí hiệu là $d(M,N)$

$$d(M,N) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

* Cho $M_0 \in \mathbb{R}^n$ và $\varepsilon > 0$

Tập $\left\{ M \in \mathbb{R}^n : d(M, M_0) < \varepsilon \right\}$ được gọi là ε - lân cận của M_0.

* Cho $E \subset \mathbb{R}^n$. Điểm $T \in E$ được gọi là điểm trong của E nếu tồn tại một ε - lân cận nào đó của T nằm hoàn toàn trong E.

* Điểm $B \in \mathbb{R}^n$ được gọi là điểm biên của E nếu mọi ε - lân cận của B đều chứa những điểm thuộc E và không thuộc thuộc E.

Biên của E là tập hợp tất cả các điểm biên của E.

* Tập E được gọi là mở nếu mọi điểm của nó đều là điểm trong, được gọi là đóng nếu nó chứa biên của nó.

Ví dụ: Cho $M_0 \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0$

* Tập $\left\{ M \in \mathbb{R}^n : \ d(M, M_0) < \varepsilon \right\}$

là tập mở (gọi là quả cầu mở tâm M_0, bán kính ε)

* Tập $\left\{ M \in \mathbb{R}^n : \ d(M, M_0) \leq \varepsilon \right\}$

là tập đóng (gọi là quả cầu đóng tâm M_0, bán kính ε)

* Tập E được gọi là bị chặn hay giới nội nếu tồn tại một quả cầu đóng nào đó chứa nó.

1.2. GIỚI HẠN VÀ SỰ LIÊN TỤC CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

1.2.1. Khái niệm hàm nhiều biến, miền xác định và đồ thị của hàm hai biến

- Cho $D \subset \mathbb{R}^n$, ánh xạ

$$D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longmapsto f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

được gọi là một hàm số của n biến số xác định trên *D*.

D được gọi là miền xác định của hàm số f

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ được gọi là các biến số.

* Nếu hàm số được cho bởi một biểu thức thì miền xác định của hàm số là tập hợp các điểm làm cho biểu thức có nghĩa.

* Cho hàm hai biến $z = f(x, y)$ với $(x, y) \in D$

Tập hợp $\{M(x, y, z) : (x, y) \in D, z = f(x, y)\} \subset \mathbb{R}^3$

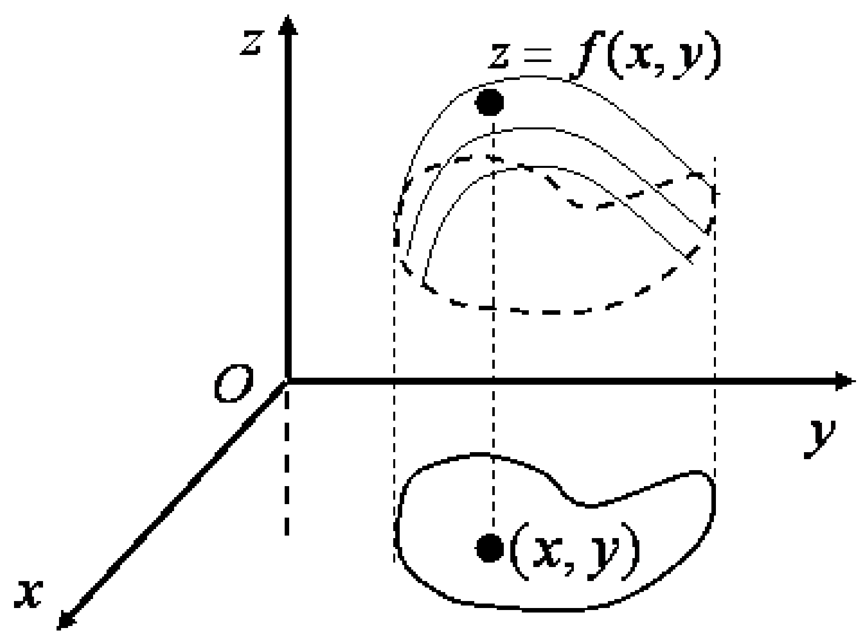
được gọi là đồ thị của hàm số *f*.

Đó thường là một mặt trong $\mathbb{R}^3$.

Mặt này có hình chiếu vuông góc

lên mặt phẳng *x*O*y* là miền *D*.

Nếu D là miền xác định của hàm số f thì f(D) được gọi là miền giá trị của hàm số f.



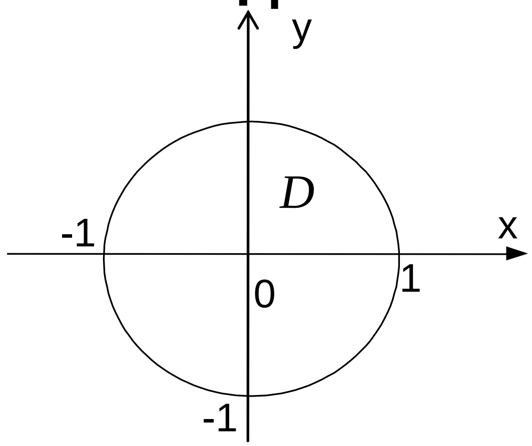
Ví dụ: Tìm miền xác định của hàm số sau:

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

Giải:

Miền xác định là tập các điểm $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sao cho

$$x^2 + y^2 \le 1$$



Ngoài ra, nếu mặt S xác định bởi PT $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

thì hình chiếu của S lên mặt phẳng xoy là miền D

xác định bởi: $x^2 + y^2 \le 1.$

Ví dụ: Tìm miền xác định và miền giá trị của hàm số sau:

$$z = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$$

Giải: z xác định khi $4 - x^2 \geq 0, 1 - y^2 \geq 0$ hay

$$-2 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1$$

Từ đó MXĐ của z là hình chữ nhật $-2 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1$

Do MGT của $\sqrt{4 - x^2}$ là [0,2] và MGT của $\sqrt{1 - y^2}$ là [0,1] nên

MGT của z là [0,3]

Ví dụ: Tìm MXĐ và MGT của hàm số sau: $z = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right)$

Giải: z xác định khi $-1 \leq \frac{y}{x} \leq 1, x \neq 0$ hay

$$\begin{cases} x > 0 \\ -x \leq y \leq x \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x < 0 \\ x \leq y \leq -x \end{cases}$$

MGT của z là $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Ví dụ: Tìm MXĐ và MGT của hàm số sau:

$$z = \arctan\left(\frac{x-y}{1+x^2y^2}\right)$$

Giải: Do MXĐ của hàm $\arctan$ là $\mathbb{R}$ và MXĐ của hàm $\dfrac{x-y}{1+x^2y^2}$ là $\mathbb{R}$ nên MXĐ của z là $\mathbb{R}$.

MGT của $\dfrac{x-y}{1+x^2y^2}$ là $\mathbb{R}$ vì với k bất kỳ ta chọn $x = 0, y = -k$ thì $\dfrac{x-y}{1+x^2y^2} = k$

Từ đó MGT của z là $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

Ví dụ: Tìm MXĐ và MGT của hàm số sau: $z = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$

Giải: z xác định khi $\sin(x^2 + y^2) \geq 0$ hay

$$2k\pi \leq x^2 + y^2 \leq (2k + 1)\pi$$

trong đó k là số nguyên không âm

MGT của z là $[0,1]$

1.2.2. Giới hạn của hàm nhiều biến

Định nghĩa: Dãy điểm $M_n(x_n, y_n)$ được gọi là dần đến

điểm $M_0(x_0, y_0)$ khi $n \to \infty$ nếu

$$\lim_{n\to\infty} d(M_0, M_n) = 0 \text{ hay } \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0 \end{cases}$$

Kí hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M_0$ hoặc $M_n \to M_0$ khi $n \to \infty$

ĐN: Cho hàm số $f(M)=f(x,y)$ xác định trên miền *D*.

Điểm $M_0(x_0,y_0)$ có thể thuộc *D* hoặc không thuộc *D*.

Hàm số $f(M)$ được gọi là có giới hạn $l\in\mathbb{R}$ khi M

dần đến M_0 nếu: $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0:(\forall M\in D),$

$$0<d(M_0,M)<\delta\Rightarrow\left|f(M)-l\right|<\varepsilon$$

Kí hiệu $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=l$ hoặc $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f\left(x,y\right)=l$

hoặc $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f\left(x,y\right)=l.$

Định lí: Hàm số $f(M)$ có giới hạn l khi M dần đến M_0 nếu với mọi dãy điểm $M_n(x_n, y_n)$ $(M_n \in D \setminus (x_0, y_0))$ dần đến M_0, ta có: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = l.$

- Muốn chứng minh sự không tồn tại giới hạn của hàm nhiều biến số, ta chỉ cần chỉ ra tồn tại hai dãy $(x_n, y_n), (x'_n, y'_n)$ cùng dần đến (x_0, y_0) nhưng $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(x'_n, y'_n)$ hoặc chỉ ra hai quá trình $(x, y) \to (x_0, y_0)$ khác nhau mà $f(x, y)$ tiến tới hai giới hạn khác nhau.

Chú ý:

Đối với hàm nhiều biến, các khái niệm giới hạn vô hạn, các tính chất của giới hạn đều tương tự như ở hàm một biến số

Chẳng hạn $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2} = +\infty$$

Ví dụ: Tìm giới hạn $$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^3 - 2xy)$$

Giải: $$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^3 - 2xy) = 1^3 - 2.1.2 = -3.$$

Ví dụ: Tìm giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Giải: Cách 1

$$0 \le \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}.|y| \le |y|,\ \forall (x,y) \ne (0,0)$$

mà $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} |y| = 0$ nên $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = 0$

Vậy $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$

Cách 2: Đặt $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$

$$(x,y) \to 0 \Rightarrow r \to 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos\varphi\sin\varphi}{r} = \lim_{r\to 0} r\cos\varphi\sin\varphi = 0$$

Ví dụ: Tìm $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1+x^2+y^2}{y^2}(1-\cos y)$$

Giải: $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1+x^2+y^2}{y^2}(1-\cos y) =$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1+x^2+y^2}{y^2}.2\sin^2\frac{y}{2}$$

Do $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(1+x^2+y^2) = 1, \lim_{y\to 0}\frac{2\sin^2\frac{y}{2}}{y^2} = \frac{1}{2}$$

nên ta có $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{1}{2}$$

Cách 2: Đặt $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$

$$(x, y) \to 0 \Rightarrow r \to 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(1 + x^2 + y^2)}{y^2}(1 - \cos y) = \lim_{r\to 0} \frac{(1 + r^2)}{r^2\sin^2\varphi}\big(1 - \cos(r\sin\varphi)\big) =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{1 + r^2}{r^2\sin^2\varphi} \frac{(r\sin\varphi)^2}{2} = \lim_{r\to 0} \frac{(1 + r^2)}{2} = \frac{1}{2}$$

Ví dụ: Tìm $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$

Giải: Cách 1

$$|x^2y^2\ln(x^2+y^2)| \le \left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2 |\ln(x^2+y^2)|.$$

Đặt $t = x^2+y^2$. Do

$$\lim_{t\to0^+} \frac{t^2}{4}|\ln t| = \lim_{t\to0^+} \frac{\ln t}{\frac{4}{t^2}} = \lim_{t\to0^+} \frac{\frac{1}{t}}{\frac{-8}{t^3}} = \lim_{t\to0^+} \frac{-t^2}{8} = 0$$

nên theo nguyên lý kẹp $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2\ln(x^2+y^2) = 0$ Do đó

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2} = 1$$

Cách 2: Đặt $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$

$$(x,y) \to 0 \Rightarrow r \to 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2\ln(x^2+y^2) = \lim_{r\to 0} r^2\cos^2\varphi r^2\sin^2\varphi\ln(r^2)$$

$$= \lim_{r\to 0} 2r^4\ln r.\cos^2\varphi\sin^2\varphi$$

$$\lim_{r\to 0} 2r^4\ln r = \lim_{r\to 0}\frac{2\ln r}{r^{-4}} = \lim_{r\to 0}\frac{\frac{2}{r}}{-4r^{-5}} = -\frac{1}{2}\lim_{r\to 0} r^4 = 0$$

Do đó $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2\ln(x^2+y^2) = 0$ và $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2} = 1$

Ví dụ: Tìm $L = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$

Giải:

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2\sin^2\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)}{\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)}{x^2y^2} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)}{x^2y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^2+y^2}{2}}{x^2y^2}$$

$$\frac{x^2+y^2}{2x^2y^2} \geq \frac{y^2}{2x^2y^2} = \frac{1}{2x^2} \to +\infty$$ khi $x \to 0$

Do đó $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{2x^2y^2} = +\infty$$

Cách 2: Đặt $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$

$$(x, y) \to 0 \Rightarrow r \to 0$$

$$L = \lim_{r\to 0} \frac{1 - \cos(r^2)}{r^2 . r^2\cos^2\varphi . r^2\sin^2\varphi} = \lim_{r\to 0} \frac{\frac{r^4}{2}}{r^6\cos^2\varphi\sin^2\varphi}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi} = +\infty$$

Ví dụ: Tìm giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$

Giải: Cách 1: Đặt $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$ Lấy dãy điểm $M_n\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right)$,

ta có $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M_0(0,0)$ và

$$\lim_{n\to\infty} f(M_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}.\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}.$$

Mặt khác, nếu lấy dãy điểm

$M'_n\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{2}{n}\right)$, có $\lim\limits_{n\to\infty} M'_n = M_0(0,0)$ nhưng

$$\lim_{n\to\infty} f(M'_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}.\frac{2}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^2}} = \frac{2}{5} \neq \frac{1}{2}.$$

Vậy giới hạn đã cho không tồn tại.

Cách 2: Đặt $y = kx$ Khi $x \to 0$

$$f(x, kx) = \frac{\sin(kx^2)}{x^2(1+k^2)} \sim \frac{kx^2}{x^2(1+k^2)} = \frac{k}{1+k^2}$$ phụ thuộc vào

k nên giới hạn đã cho không tồn tại.

Cách 3: $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Đặt $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi,$ khi đó

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\varphi . r\sin\varphi}{r^2} = \cos\varphi\sin\varphi$$

phụ thuộc vào φ nên giới hạn đã cho không tồn tại.

Ví dụ: a) CMR không tồn tại $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\ln(x^2+2^y)}{\sqrt{x^2+4y^2}}$

b) Tính giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\ln\left(x^2+2^{(y^2)}\right)}{\sqrt{x^2+4y^2}}$

Giải: a) Cách 1: Đặt $x = 2r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$

Khi đó $\sqrt{x^2+4y^2} = 2r$

$$(x,y) \to (0,0) \Rightarrow r \to 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln\left(x^2+2^y\right)}{\sqrt{x^2+4y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{\ln\left(4r^2\cos^2\varphi + 2^{r\sin\varphi}\right)}{2r}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{4r^2\cos^2\varphi + 2^{r\sin\varphi} - 1}{2r}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{4r^2\cos^2\varphi}{2r} + \lim_{r\to 0} \frac{2^{r\sin\varphi} - 1}{2r}$$

$$= 0 + \lim_{r\to 0} \frac{2^{r\sin\varphi} - 1}{r\sin\varphi} \lim_{r\to 0} \frac{r\sin\varphi}{2r} = \ln 2 . \frac{\sin\varphi}{2}$$

Do giới hạn phụ thuộc vào góc φ nên giới hạn không tồn tại

Cách 2

Đặt $f(x,y) = \dfrac{\ln(x^2+2^y)}{\sqrt{x^2+4y^2}}$ Lấy dãy điểm $M_n\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right)$, ta có

$$\lim_{n\to+\infty} M_n = M_0(0,0) \text{ và } \lim_{n\to+\infty} f(M_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\dfrac{1}{n^2}+2^{\frac{1}{n}}\right)}{\sqrt{\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{4}{n^2}}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{n^2}+2^{\frac{1}{n}}-1}{\dfrac{\sqrt{5}}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{\sqrt{5}}{n}} + \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\dfrac{\sqrt{5}}{n}}$$

$$= 0 + \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{n}\ln 2}{\dfrac{\sqrt{5}}{n}} = \frac{\ln 2}{\sqrt{5}}$$

Lấy dãy điểm $M'_n\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)$, ta có $\lim\limits_{n\to+\infty} M'_n = M_0(0,0)$ và

$$\lim_{n\to+\infty} f(M'_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{n^2}+2^{\frac{2}{n}}\right)}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{16}{n^2}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^2}+2^{\frac{2}{n}}-1}{\frac{\sqrt{17}}{n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{\sqrt{17}}{n}} + \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{\frac{2}{n}}-1}{\frac{\sqrt{17}}{n}} = 0 + \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2}{n}\ln 2}{\frac{\sqrt{17}}{n}} = \frac{2\ln 2}{\sqrt{17}}$$

Do đó không tồn tại giới hạn.

Cách 1

b) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln\left(x^2+2^{\left(y^2\right)}\right)}{\sqrt{x^2+4y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{\ln\left(r^2\cos^2\varphi+2^{\left(r^2\sin^2\varphi\right)}\right)}{2r}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\varphi + 2^{\left(r^2\sin^2\varphi\right)} - 1}{2r}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\varphi}{2r} + \lim_{r\to 0} \frac{2^{\left(r^2\sin^2\varphi\right)} - 1}{2r}$$

$$= 0 + \lim_{r\to 0} \frac{2^{\left(r^2\sin^2\varphi\right)} - 1}{r^2\sin^2\varphi} \lim_{r\to 0} \frac{r^2\sin^2\varphi}{2r} = \ln 2.0 = 0$$

Cách 2

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln\left(x^2 + 2^{\left(y^2\right)}\right)}{\sqrt{x^2+4y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + 2^{\left(y^2\right)} - 1}{\sqrt{x^2+4y^2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4y^2}} + \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2^{\left(y^2\right)} - 1}{\sqrt{x^2+4y^2}}$$

Do $0 \le \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4y^2}} \le \frac{x^2}{\sqrt{x^2}} = \frac{x^2}{|x|} = |x| \to 0$ nên

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4y^2}} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2^{(y^2)}-1}{\sqrt{x^2+4y^2}} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2^{(y^2)}-1}{y^2} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{\sqrt{x^2+4y^2}}$$

$$= \ln 2. \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{\sqrt{x^2+4y^2}}$$

Do $0 \le \dfrac{y^2}{\sqrt{x^2+4y^2}} \le \dfrac{y^2}{\sqrt{4y^2}} = \dfrac{|y|}{2} \to 0$ nên

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{\sqrt{x^2+4y^2}} = 0 \text{ và } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2^{(y^2)}-1}{\sqrt{x^2+4y^2}} = 0$$

Vì vậy $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln\left(x^2+2^{(y^2)}\right)}{\sqrt{x^2+4y^2}} = 0$$

1.2.3. Tính liên tục của hàm số nhiều biến số

Định nghĩa

* Cho hàm số $f(M)$ xác định trên miền D và $M_0 \in D$.

Hàm số $f(M)$ được gọi là liên tục tại M_0 nếu

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$$

Nhận xét: Đặt $\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$

$f(x, y)$ liên tục tại (x_0, y_0) nếu $\Delta f(x_0, y_0) \to 0$

khi $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$

* Hàm số $f(M)$ được gọi là liên tục trên miền D nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc D.

** Hàm số nhiều biến liên tục cũng có những tính chất giống hàm một biến liên tục.*

Ví dụ: Xét tính liên tục của hàm số sau:

$$f(x,y)=\cos\left(x^2-e^{-2x}+xy\right).$$

Giải:

Do f là hàm hợp của các hàm cơ bản nên f là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}^2$

Ví dụ: Xét tính liên tục của hàm số sau:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{khi } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{khi } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Giải: Rõ ràng f là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

Do $0\leq\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right|=\left|\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right||x|\leq\dfrac{1}{2}|x|\to 0$ khi $(x,y)\to(0,0)$

nên $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$ Từ đó f liên tục tại (0,0).

1.3. ĐẠO HÀM RIÊNG VÀ VI PHÂN TOÀN PHẦN

1.3.1. Đạo hàm riêng. Đạo hàm riêng cấp cao

A. Đạo hàm riêng

- Cho hàm số $f(x, y)$ xác định trên miền *D* và

$M_0(x_0, y_0) \in D.$ Cố định $y = y_0,$

nếu hàm số một biến $x \mapsto f(x, y_0)$ có đạo hàm tại x_0

thì đạo hàm đó được gọi là đạo hàm riêng của f theo biến

x tại $(x_0, y_0).$ Kí hiệu là: $f'_x(x_0, y_0)$ hay $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

* Tương tự, đạo hàm riêng của f theo biến y tại (x_0, y_0)

kí hiệu là: $f'_y(x_0, y_0)$ hay $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

- ***Nhận xét:***

Khi tính đạo hàm riêng của hàm số theo biến số nào, ta coi hàm số chỉ phụ thuộc biến số ấy, các biến còn lại là hằng số, rồi tính như với đạo hàm của hàm một biến.

Ví dụ:

a) Cho $u = x^3 y$, tính $u'_x(1,2)$, $u'_y(1,1)$

b) Cho $u = x^{2y} (x > 0)$, tính $u'_x(x,y)$, $u'_y(x,y)$.

Giải:

a) $u'_x(x,y) = 3x^2 y \Rightarrow u'_x(1,2) = 6$

$u'_y(x,y) = x^3 \Rightarrow u'_y(1,1) = 1$

b) $u'_x = 2yx^{2y-1}$, $u'_y = 2x^{2y} \ln x$.

Ví dụ:

Cho $u = x^2 z\operatorname{arctg}\dfrac{y}{z}$, tính $u'_x(x,y,z)$, $u'_y(x,y,z)$, $u'_z(x,y,z)$.

Giải:

$$u'_x(x,y,z) = 2xz\operatorname{arctg}\frac{y}{z}$$

$$u'_y(x,y,z) = x^2 z\frac{1}{1+\frac{y^2}{z^2}}\frac{1}{z} = \frac{x^2z^2}{y^2+z^2}$$

$$u'_z(x,y,z) = x^2\operatorname{arctg}\frac{y}{z} + x^2 z\frac{1}{1+\frac{y^2}{z^2}}\frac{-y}{z^2} = x^2\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{z} - \frac{yz}{y^2+z^2}\right)$$

B. Đạo hàm riêng cấp cao

Các đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng cấp một (nếu tồn tại) sẽ được gọi là các đạo hàm riêng cấp hai của *f*.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f''_{xx}=f''_{x^2},\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f''_{xy},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f''_{yx},\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f''_{yy}=f''_{y^2}.$$

Tương tự, các đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng cấp hai (nếu có) gọi là các đạo hàm riêng cấp ba, ...

Ví dụ: Cho hàm số $f(x,y) = x^3y - x^2y^2.$

Tính các đạo hàm riêng cấp một, cấp hai của f.

Giải:

* Các đạo hàm riêng cấp một:

$f'_x = 3x^2y - 2xy^2,$ $\qquad f'_y = x^3 - 2x^2y$

* Các đạo hàm riêng cấp hai:

$f''_{x^2} = 6xy - 2y^2,$ $\qquad f''_{xy} = 3x^2 - 4xy$

$f''_{yx} = 3x^2 - 4xy,$ $\qquad f''_{y^2} = -2x^2$

* Nhận xét: Ở VD này $f''_{xy} = f''_{yx}.$

Ví dụ: Cho $f(x,y,z) = e^{x-2y+4z}$

Có $f'_x = e^{x-2y+4z}$, $f''_{x^2} = e^{x-2y+4z}$, $f^{(3)}_{x^2y} = -2e^{x-2y+4z}$

$f''_{xy} = -2e^{x-2y+4z}$, $f^{(3)}_{xyx} = -2e^{x-2y+4z}$,

$f^{(3)}_{xyz} = -8e^{x-2y+4z}$.

Nhận xét: Ở VD này $f^{(3)}_{x^2y} = f^{(3)}_{xyx}$

Định lý (Định lí Schwarz):

Nếu hàm số $f(x,y)$ có các đạo hàm riêng f''_{xy}, f''_{yx} trong một lân cận của $M_0(x_0, y_0)$ và các đạo hàm riêng này liên tục tại M_0 thì $f''_{xy} = f''_{yx}$ tại M_0.

Định lý cũng đúng cho hàm n biến bất kì. Chẳng hạn, xét hàm $f(x,y,z)$ *ta có:*

$f'''_{xyz} = f'''_{xzy} = f'''_{yxz} = \ldots$ *nếu các đạo hàm riêng này liên tục.*

1.3.2. Vi phân toàn phần. Vi phân cấp cao

A. Vi phân toàn phần

a. Định nghĩa:

Cho hàm số $u=f(x,y)$ xác định trong miền D chứa (x_0,y_0)

Nếu số gia toàn phần của hàm số tại (x_0,y_0) có dạng

$$\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A.\Delta x+B.\Delta y+\alpha.\Delta x+\beta.\Delta y$$

trong đó A, B là những số chỉ phụ thuộc vào (x_0,y_0), còn α,β dần đến 0 khi $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$ thì nói rằng hàm số $f(x,y)$ khả vi tại M_0

Biểu thức $A.\Delta x+B.\Delta y$ được gọi là vi phân toàn phần của hàm số tại M_0 và kí hiệu là $df(x_0,y_0)$, hay $du(x_0,y_0)$

Như vậy $\quad \mathrm{d}f(x_0,y_0)=A.\Delta x+B.\Delta y$

Hàm số $u=f(x,y)$ được gọi là khả vi trong miền D nếu nó khả vi tại mọi điểm của miền D.

b. Điều kiện cần của hàm số khả vi

Định lí: Nếu $f(x,y)$ khả vi tại (x_0,y_0) thì liên tục tại đó

Định lí: Nếu $f(x,y)$ khả vi tại (x_0,y_0) thì hàm số có các đạo hàm riêng tại (x_0,y_0) và

$$A = f'_x(x_0, y_0),\ B = f'_y(x_0, y_0)$$

Từ định lý trên ta có thể viết vi phân của hàm số $u=f(x,y)$ tại (x_0,y_0)

$$\mathrm{d} f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$$

Vi phân của hàm số $u = f(x,y)$ tại (x,y) bất kỳ được ký hiệu

$$\mathrm{d} f = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y \quad \text{hoặc} \quad \mathrm{d} u = u'_x \Delta x + u'_y \Delta y$$

$$\text{hoặc} \quad \mathrm{d} f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y \quad \text{hoặc} \quad \mathrm{d} u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y$$

Xét hai hàm số đặc biệt $g(x,y)=x$ và $h(x,y)=y$, ta có

$$dx = dg(x, y) = 1\cdot \Delta x \quad dy = dh(x, y) = 1\cdot \Delta y$$

Vậy vi phân toàn phần của $f(x,y)$ tại (x_0,y_0) có thể viết dưới dạng

$$\mathrm{d} f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\,\mathrm{d} x + f'_y(x_0, y_0)\,\mathrm{d} y$$

Nhận xét: $f(x,y)$ có thể có các ĐHR tại (x_0, y_0) nhưng không khả vi tại (x_0, y_0).

c. Điều kiện đủ để hàm số khả vi

Định lý:

Nếu hàm số $u = f(x,y)$ có các ĐHR $f_x'(x,y), f_y'(x,y)$ liên tục tại $M_0(x_0, y_0)$ thì $f(x,y)$ khả vi tại M_0.

Chú ý: *Tính chất khả vi của tổng, tích, thương hai hàm nhiều biến cũng giống như ở hàm một biến.*

Ví dụ:

Cho $f(x,y) = x\cos xy$, tính $df\left(1,\dfrac{\pi}{4}\right)$ với $\Delta x = 0,01; \Delta y = 0,02$

Giải:

$$f'_x(x,y) = \cos xy - xy\sin xy \Rightarrow f'_x\left(1,\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$f'_y(x,y) = -x^2\sin xy \Rightarrow f'_y\left(1,\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$df\left(1,\frac{\pi}{4}\right) = f'_x\left(1,\frac{\pi}{4}\right)dx + f'_y\left(1,\frac{\pi}{4}\right)dy = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right).\Delta x - \frac{\sqrt{2}}{2}.\Delta y$$

Ứng với $\Delta x = 0,01; \Delta y = 0,02$ thì

$$df\left(1,\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right).0,01 - \frac{\sqrt{2}}{2}.0,02 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{\pi}{4}\right).0,01$$

Ví dụ: Cho $f(x,y) = (x-y)e^{xy^2}$, tính $df(x,y)$.

Giải:

$$f'_x(x,y) = e^{xy^2} + y^2(x-y)e^{xy^2},$$

$$f'_y(x,y) = -e^{xy^2} + 2yx(x-y)e^{xy^2}$$

$$df(x,y) = f'_x dx + f'_y dy =$$
$$\left(e^{xy^2} + y^2(x-y)e^{xy^2}\right)dx + \left(-e^{xy^2} + 2yx(x-y)e^{xy^2}\right)dy.$$

Ví dụ: Cho $f(x,y,z) = xyz^2$, tính $df(x,y,z)$.

Giải:

$$f'_x(x,y,z) = yz^2,\ f'_y(x,y,z) = xz^2,\ f'_z(x,y,z) = 2xyz$$

$$\Rightarrow df(x,y,z) = f'_x(x,y,z)dx + f'_y(x,y,z)dy + f'_z(x,y,z)dz$$

$$= yz^2dx + xz^2dy + 2xyzdz.$$

d. Áp dụng vi phân để tính gần đúng

Giả sử hàm số $f(x,y)$ khả vi tại (x_0,y_0), ta có:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0).\Delta x + f'_y(x_0,y_0).\Delta y \ (*)$$

Ví dụ: Tính gần đúng $\operatorname{arctg}\dfrac{1,05}{0,97}$.

Giải:

Xét hàm số $f(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$

$$f'_x(x,y)=\frac{1}{1+\dfrac{x^2}{y^2}}\frac{1}{y}=\frac{y}{y^2+x^2},\ f'_y(x,y)=\frac{1}{1+\dfrac{x^2}{y^2}}.\frac{-x}{y^2}=-\frac{x}{y^2+x^2}$$

Áp dụng công thức **(*)** với $x_0=y_0=1,\ \Delta x=0,05,\ \Delta y=-0,03$

ta có: $\operatorname{arctg}\dfrac{1,05}{0,97}\approx f(1,1)+f'_x(1,1).0,05+f'_y(1,1).(-0,03)$

$$=\operatorname{arctg}\frac{1}{1}+\frac{1}{2}.0,05+\frac{1}{2}.0,03=\frac{\pi}{4}+0,04\approx 0,785+0,04=0,825$$

Ví dụ:

Một hình trụ bằng kim loại có chiều cao h = 20 cm và bán kính đáy r = 4 cm. Khi nóng lên h và r nở thêm các đoạn $\Delta h = \Delta r$ = 0,1 cm.

Hãy tính gần đúng thể tích hình trụ khi nóng lên.

Giải:

$$V = \pi r^2 h$$

$$V'_r = 2\pi rh, V'_h = \pi r^2$$

$$V(r+\Delta r, h+\Delta h) \approx \pi r^2 h + 2\pi rh\Delta r + \pi r^2 \Delta h$$

$$\approx \pi.4^2.20 + 2\pi.4.20.0,1 + \pi.4^2.0,1 \approx \pi.337,6\,(cm^3)$$

B. Vi phân cấp cao

$$d^2 f = d(df) = d(f'_x dx + f'_y dy)$$

$$d^3 f = d(d^2 f)$$

....

$$d^n f = d(d^{n-1} f).$$

* Công thức vi phân cấp 2:

$$d^2 f = d(df) = \left(f'_x dx + f'_y dy \right)'_x dx + \left(f'_x dx + f'_y dy \right)'_y dy$$

$$= f''_{x^2} dx^2 + f''_{yx} dy dx + f''_{xy} dx dy + f''_{y^2} dy^2.$$

Giả sử các đạo hàm riêng hỗn hợp liên tục, theo định lý Schwarz, ta có:

$$d^2 f = f''_{x^2} dx^2 + 2 f''_{xy} dxdy + f''_{y^2} dy^2.$$

** Kí hiệu tượng trưng*

$$df = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right) f$$

$$\Rightarrow d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f$$

Ví dụ: Cho $z = \arctan\dfrac{x}{y}$, tính d^2z và $d^2z(0,1)$.

Giải:

$$d^2z = z''_{x^2}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{y^2}dy^2$$

$$z'_x = \frac{y}{x^2+y^2}, \qquad z'_y = \frac{-x}{x^2+y^2}$$

$$z''_{x^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad z''_{xy} = z''_{yx} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad z''_{y^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Rightarrow d^2z = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}dx^2 + 2\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dxdy + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}dy^2$$

$$d^2z(0,1) = -2dxdy.$$

1.3.3. Đạo hàm riêng và vi phân của hàm số hợp

A. Đạo hàm riêng của hàm số hợp

Định lí:

Xét hàm số hợp $z = z(x, y)$ với $x = x(s,t),\ y = y(s,t)$

Giả sử z'_x, z'_y liên tục. Khi đó:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t}$$

* Trường hợp tổng quát, khi $z = f(u_1, u_2, ..., u_m)$ và mỗi biến $u_k \ (k = \overline{1, m})$ là hàm số của các biến $x_1, x_2, ..., x_n$ thì

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{\partial z}{\partial u_1}.\frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial z}{\partial u_2}.\frac{\partial u_2}{\partial x_i} + ... + \frac{\partial z}{\partial u_m}.\frac{\partial u_m}{\partial x_i}$$

($\dfrac{\partial z}{\partial u_k}$ liên tục với mọi $k = 1, ..., m$)

* *Đặc biệt, khi* $z = f(x, y), y = y(x)$ thì $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}.\dfrac{dy}{dx}$

Khi $z = f(x, y), x = x(t), y = y(t)$ thì $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial x}.\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial y}.\dfrac{dy}{dt}$

Ví dụ: Cho $u = e^{2x}\ln y, \quad x = st, \quad y = t^2 - s^2$

Tính các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial u}{\partial s}, \dfrac{\partial u}{\partial t}.$

Giải:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial s} = 2e^{2x}\ln y.t + e^{2x}.\frac{1}{y}.(-2s) =$$

$$= 2e^{2st}\left[t\ln(t^2 - s^2) - \frac{s}{t^2 - s^2}\right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t} = 2e^{2x}\ln y.s + e^{2x}.\frac{1}{y}.2t =$$

$$= 2e^{2st}\left[s\ln(t^2 - s^2) + \frac{t}{t^2 - s^2}\right]$$

Ví dụ: Cho $u = \dfrac{1}{r}, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$

Tính $\Delta u = u''_{x^2} + u''_{y^2} + u''_{z^2}.$

Giải:

$$u'_x = u'.r'_x = -\frac{1}{r^2}.\frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3}$$

$$u''_{x^2} = -\frac{1}{r^3} + 3x.\frac{1}{r^4}.\frac{x}{r} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}$$

$$\Delta u = u''_{x^2} + u''_{y^2} + u''_{z^2} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} = 0$$

Ví dụ: Cho $z = yf(x^2 - y^2)$ với f là hàm số có đạo hàm liên tục. Tính $A = \frac{1}{x} z'_x + \frac{1}{y} z'_y - \frac{1}{y^2} z.$

Giải:

Đặt $t = x^2 - y^2 \Rightarrow z = yf(t)$

$$z'_x = yf'(t).t'_x = yf'(t).2x$$

$$z'_y = f(t) + yf'(t).t'_y = f(t) - yf'(t).2y$$

Từ đó, $A = \frac{1}{x} z'_x + \frac{1}{y} z'_y - \frac{1}{y^2} z =$

$$2yf'(t) + \frac{1}{y} f(t) - 2yf'(t) - \frac{1}{y} f(t) = 0.$$

B. Vi phân của hàm số hợp

Cho $u = f(x,y)$ với $x = x(s,t)$; $y = y(s,t)$

Vi phân của hàm hợp $u = f(x(s,t), y(s,t))$ được tính theo công thức

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial s}\mathrm{d}s + \frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}t$$

Bây giờ ta biểu diễn du qua biến trung gian x, y và sử dụng công thức đạo hàm hàm hợp

$$\mathrm{d}u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right)\mathrm{d}s + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\mathrm{d}s + \frac{\partial x}{\partial t}\mathrm{d}t\right) + \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\mathrm{d}s + \frac{\partial y}{\partial t}\mathrm{d}t\right) = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y$$

Như vậy dạng của công thức vi phân cấp 1 không đổi dù x, y là các biến độc lập hay là hàm của các biến s, t

Người ta nói vi phân toàn phần cấp 1 có tính bất biến.

1.3.4. Đạo hàm của hàm số ẩn

A. Khái niệm hàm số ẩn

Xét hệ thức: $F(x,y)=0$ trong đó $F(x,y)$ là hàm số xác định trên $D\subset\mathbb{R}^2$.

Nếu có hàm số $y=y(x)$ xác định trên khoảng $X\subset\mathbb{R}$ sao cho $\big(x,y(x)\big)\in D$ và $F\big(x,y(x)\big)=0$ với mọi $x\in X$ thì hàm số $y=y(x)$ được gọi là một hàm số ẩn xác định từ hệ thức $F(x,y)=0$.

Ví dụ: Hệ thức $x^2+y^2-1=0$ xác định hai hàm số ẩn là $y=\sqrt{1-x^2}$ và $y=-\sqrt{1-x^2}$ trên khoảng $[-1,1]$.

Tương tự

- Hệ thức $F(x,y,z)=0$ có thể xác định một hay nhiều

hàm số ẩn $z=z(x,y)$.

- Hệ $\begin{cases} F(x,y,z,u,v)=0 \\ G(x,y,z,u,v)=0 \end{cases}$

có thể xác định một hay nhiều cặp hàm số ẩn u,v của ba biến x,y,z.

B. Điều kiện tồn tại hàm ẩn, đạo hàm của hàm ẩn

Định lý: Xét hệ thức $F(x,y)=0$

Giả sử $*F(x_0,y_0)=0,$

$*F'_x, F'_y$ liên tục trong lân cận của điểm $M_0(x_0,y_0)$

$*F'_y(M_0)\neq 0$

Khi đó hệ thức $F(x,y)=0$ xác định một hàm số ẩn $y=y(x)$

trong một lân cận nào đó của x_0 và ta có $y=y_0$ khi

$x=x_0,$ $\quad \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$ trong lân cận trên.

Định lý: Xét hệ thức $F(x,y,z)=0$

Giả sử $*F(x_0,y_0,z_0)=0,$

$*F'_x, F'_y, F'_z$ liên tục trong lân cận của điểm $M_0(x_0,y_0,z_0)$

$*F'_z(M_0)\neq 0$

Khi đó hệ thức $F(x,y,z)=0$ xác định một hàm số ẩn $z=z(x,y)$ trong một lân cận nào đó của $(x_0,y_0),$ hàm số đó có giá trị z_0 khi $x=x_0,$ $y=y_0,$ hàm số liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trong lân cận nói trên.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}.$$

Ví dụ: Tính y', y'' biết $x - y + \text{arctg}y = 0.$

Giải: * Tính y'

Cách 1: Coi $y = y(x),$ lấy đạo hàm hai vế theo $x,$

$$1 - y' + \frac{y'}{1+y^2} = 0 \Rightarrow y' = \frac{1+y^2}{y^2}$$

Cách 2: Đặt $F(x,y) = x - y + \text{arctg}y$

$$F'_x = 1,\ F'_y = -1 + \frac{1}{1+y^2} = \frac{-y^2}{1+y^2},\quad y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y} = \frac{1+y^2}{y^2}$$

* Tính y''

$$y'' = \frac{y^2.2yy' - (1+y^2)2yy'}{y^4} = -\frac{2y'}{y^3} = -\frac{2(1+y^2)}{y^5}.$$

Ví dụ: Cho $xyz = x + y + z.$ Coi z là hàm số ẩn, tính $z'_x,\ z'_y,\ dz.$

Giải:

Cách 1

Đặt $F(x, y, z) = xyz - x - y - z.$

Có $F'_x = yz - 1,$ $\quad F'_y = xz - 1,$ $\quad F'_z = xy - 1.$

$$\Rightarrow z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{1 - yz}{xy - 1}, \qquad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = \frac{1 - xz}{xy - 1},$$

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = \frac{1 - yz}{xy - 1} dx + \frac{1 - xz}{xy - 1} dy.$$

Cách 2:

Lấy vi phân toàn phần hai vế của PT hàm ẩn, ta có:

$$d(xyz) = d(x + y + z)$$

$$yzdx + xzdy + xydz = dx + dy + dz$$

$$(xy - 1)dz = (1 - yz)dx + (1 - xz)dy$$

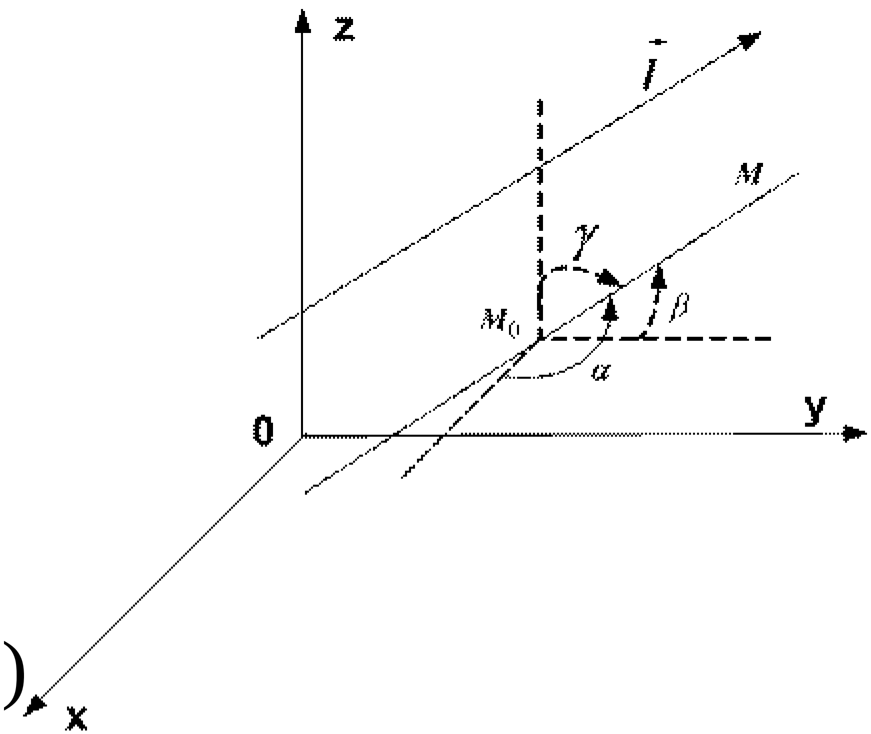
$$dz = \frac{1 - yz}{xy - 1}dx + \frac{1 - xz}{xy - 1}dy$$

$$\Rightarrow z'_x = \frac{1 - yz}{xy - 1}, \quad z'_y = \frac{1 - xz}{xy - 1}.$$

1.3.5. Đạo hàm theo hướng, Gradient

A. Đạo hàm theo hướng

a. Định nghĩa



Cho hàm số $u(x,y,z)$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^3$, $M_0(x_0,y_0,z_0) \in D$, một hướng được đặc trưng bởi véc tơ $\vec{\ell}$

có véc tơ đơn vị $\overrightarrow{\ell_0}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

Ở đây α, β, γ là góc tạo bởi giữa $\vec{l}$ và chiều dương của Ox, Oy, Oz

Lấy $M \in D$ sao cho $\overrightarrow{M_0M} = \rho\overrightarrow{\ell_0}$, đạo hàm của hàm $u(M)$ theo hướng $\vec{\ell}$ tại M_0 được định nghĩa và kí hiệu

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{\ell}}(M_0) = \lim_{\rho \to 0} \frac{u(M) - u(M_0)}{\rho}$$

Dùng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có mối liên hệ sau:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\rho}, \cos\beta = \frac{y}{\rho}, \cos\gamma = \frac{z}{\rho}$$

và $$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\rho^2} = 1$$

trong đó (x, y, z) là tọa độ của M

b) Nhận xét:

* Nếu $\vec{l} = \vec{i}$ $\left(\vec{i} = (1,0,0) \right.$ là véctơ đơn vị của trục $\left. \mathrm{Ox} \right)$

thì $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0) = u'_x(M_0).$

Thật vậy, $\overrightarrow{M_0M} = \rho\vec{l} = (\rho, 0, 0)$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0) = \lim_{\rho \to 0} \frac{\mathrm{u}(x_0 + \rho, y_0, z_0) - u(x_0, y_0, z_0)}{\rho} = u'_x(M_0)$$

Tương tự,

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{j}}\left(M_0\right) = u'_y(M_0),$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{k}}\left(M_0\right) = u'_z(M_0).$$

trong đó, $\vec{j}(0,1,0)$ là véctơ đơn vị của trục Oy.

$\vec{k}(0,0,1)$ là véctơ đơn vị của trục Oz.

c) Cách tính

Định lí: Nếu hàm số $\mathrm{u}(x, y, z)$ khả vi tại $M_0(x_0, y_0, z_0)$

thì u có đạo hàm theo mọi hướng $\vec{l}$ tại M_0 và

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0) = u'_x(M_0)\cos\alpha + u'_y(M_0)\cos\beta + u'_z(M_0)\cos\gamma$$

trong đó $\vec{l_0}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ là véc tơ đơn vị của $\vec{l}$.

d) Gradient

-Định nghĩa:

Giả sử $f(x, y, z)$ là hàm số có các đạo hàm riêng tại M_0.

Gradient của f tại M_0 là véctơ $\left(f'_x(M_0), f'_y(M_0), f'_z(M_0) \right)$

Kí hiệu là $\overrightarrow{grad}\ f(M_0)$.

Tính chất

$\overrightarrow{\text{grad}}(\lambda u) = \lambda \overrightarrow{\text{grad}} u$, λ là hằng số. $\overrightarrow{\text{grad}}(u+v) = \overrightarrow{\text{grad}} u + \overrightarrow{\text{grad}} v$

$\overrightarrow{\text{grad}}(u.v) = v\overrightarrow{\text{grad}} u + u\overrightarrow{\text{grad}} v$; $\overrightarrow{\text{grad}} \dfrac{u}{v} = \dfrac{v\overrightarrow{\text{grad}} u - u\overrightarrow{\text{grad}} v}{v^2}$, nếu $v \neq 0$

$\overrightarrow{\text{grad}}\ f(u) = f'(u)\overrightarrow{\text{grad}} u$

Nhận xét: *(Liên hệ giữa gradient và đạo hàm theo hướng)*

Nếu u khả vi tại M_0 và $\vec{l}$ là véc tơ đơn vị thì

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0) = \overrightarrow{grad}\,\mathrm{u}(M_0).\vec{l}$$

Đạo hàm theo hướng $\vec{l}$ tại điểm M_0 của trường vô hướng *u* thể hiện tốc độ biến thiên của trường vô hướng *u* tại M_0 theo hướng $\vec{l}$

Do

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0) = \overrightarrow{grad}\,\mathrm{u}(M_0).\vec{l} = \left|\overrightarrow{gradu(M_0)}\right|\cos(\overrightarrow{grad}\,\mathrm{u}(M_0), \vec{l}\,)$$

nên $\left|\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0)\right|$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\left|\overrightarrow{gradu(M_0)}\right|$ khi $\vec{l}$ có cùng phương với $\overrightarrow{grad}\,\mathrm{u}(M_0)$

Theo hướng $\vec{l}$, trường vô hướng *u* tăng nhanh nhất tại M_0 nếu $\vec{l}$ có cùng phương, cùng hướng với $\overrightarrow{grad}\,\mathrm{u}(M_0)$

Theo hướng $\vec{l}$, trường vô hướng *u* giảm nhanh nhất tại M_0 nếu $\vec{l}$ có cùng phương, ngược hướng với $\overrightarrow{grad}\,\mathrm{u}(M_0)$

Ví dụ: Cho $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz,$

$$M_0(1,2,-1),\ \vec{l}(1,-2,2).$$

Tính $\overrightarrow{\text{grad}} f(M_0)$ và $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0).$

Giải:

$$f'_x = 3x^2 + 3yz \Rightarrow f'_x(M_0) = 3 + 3.2.(-1) = -3.$$

$$f'_y = 3y^2 + 3xz \Rightarrow f'_y(M_0) = 3.4 + 3.1.(-1) = 9.$$

$$f'_z = 3z^2 + 3xy \Rightarrow f'_z(M_0) = 3.1 + 3.1.2 = 9.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}\, f(M_0) = (-3,9,9).$$

Véctơ đơn vị của véctơ $\vec{l}(1,-2,2)$ là: $\vec{l_0}\left(\frac{1}{3},\frac{-2}{3},\frac{2}{3}\right)$

$$\left(\vec{l_0} = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}, \qquad |\vec{l}| = \sqrt{1^2+(-2)^2+2^2} = 3 \right)$$

Vậy $$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0) = \overrightarrow{\text{grad}}\, f(M_0).\vec{l_0} =$$

$$= -3.\frac{1}{3} + 9.\left(\frac{-2}{3}\right) + 9.\frac{2}{3} = -1.$$

1.4. CỰC TRỊ VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

Nhắc lại công thức Taylor của hàm một biến

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$
$$= \frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta\Delta x)}{(n+1)!}\Delta x^{n+1}$$

trong đó $0 < \theta < 1$

Khi $x_0 = 0$ ta có công thức MacLaurin

$$f(\Delta x) - f(0) = \frac{f'(0)}{1!}\Delta x + \frac{f''(0)}{2!}\Delta x^2 + \ldots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\Delta x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta\Delta x)}{(n+1)!}\Delta x^{n+1}$$

1.4.1. Công thức Taylor của hàm hai biến

Định lí: Giả sử hàm số $f(x,y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp $n+1$ liên tục trong một lân cận của điểm $M_0(x_0,y_0)$ và điểm $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ cũng thuộc lân cận đó. Khi đó:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = df(x_0,y_0) + \frac{d^2 f(x_0,y_0)}{2!} + \ldots$$

$$+\frac{d^n f(x_0,y_0)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)}{(n+1)!}$$

trong đó $0<\theta<1,\ \Delta x = dx, \Delta y = dy$

* *Khi* $(x_0,y_0)=(0,0)$ *ta có công thức Maclaurin*.

Hệ quả: Giả sử hàm số $f(x,y)$ có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trong một lân cận của điểm $M_0(x_0,y_0)$ và điểm $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ cũng thuộc lân cận đó. Khi đó:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = df(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0,y_0) + o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$$

1.4.2. Cực trị không có điều kiện ràng buộc

A. Định nghĩa

Điểm $M_0(x_0,y_0)$ được gọi là điểm cực đại địa phương (cực tiểu địa phương) của hàm $f(M)$ nếu có lân cận đủ bé của M_0 để trong lân cận đó (trừ M_0) xảy ra bất đẳng thức $f(M) < f(M_0)$ ($f(M) > f(M_0)$)

Điểm M_0 trong các trường hợp trên gọi chung là điểm cực trị.

B. Điều kiện cần

Nếu hàm số $f(x,y)$ đạt cực trị tại $M_0(x_0,y_0)$ và có các đạo hàm riêng f'_x, f'_y tại M_0 thì $f'_x(M_0)=0$ và $f'_y(M_0)=0.$

Định nghĩa:

* *Điểm mà tại đó các đạo hàm riêng của* f bằng 0 được gọi *là điểm dừng của hàm số* f.

* *Điểm dừng hoặc điểm mà tại đó các đạo hàm riêng của* f *không tồn tại được gọi là điểm tới hạn của* f.

Nhận xét:

Điểm cực trị địa phương của hàm số (nếu có) phải là điểm tới hạn.

C. Điều kiện đủ của cực trị địa phương

Giả sử hàm số $f(x,y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp 2 liên tục trong một lân cận của điểm $M_0(x_0,y_0)$ và $f'_x(M_0)=0,\ f'_y(M_0)=0$

Đặt $A=f''_{x^2}(x_0,y_0),\ B=f''_{xy}(x_0,y_0),\ C=f''_{y^2}(x_0,y_0),\ \Delta=B^2-AC$

Khi đó:

- Nếu $\Delta>0$ thì f không đạt cực trị địa phương tại (x_0,y_0)
- Nếu $\Delta=0$ thì chưa kết luận được gì về sự tồn tại cực trị địa phương của hàm f tại M_0.
- Nếu $\Delta<0$ thì f đạt cực trị tại (x_0,y_0)

  Đó là cực đại nếu $A<0$

  Đó là cực tiểu nếu $A>0.$

Ví dụ: Tìm cực trị địa phương của hàm số

$$f(x,y) = x^3 + 2y^3 - 3x - 6y$$

Giải:

Có $f'_x = 3x^2 - 3,\quad f'_y = 6y^2 - 6$

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

Hàm số có bốn điểm tới hạn là:

$$M_1(1,1),\ \ M_2(1,-1),\ \ M_3(-1,1),\ \ M_4(-1,-1)$$

Có $A = f''_{x^2} = 6x, \quad B = f''_{xy} = 0, \quad C = f''_{y^2} = 12y$

* Xét điểm $M_1(1,1), \quad A = 6, B = 0, C = 12$

$\Rightarrow B^2 - AC < 0$ và $A > 0$

$\Rightarrow$ f đạt cực tiểu địa phương tại $M_1, \; f(M_1) = -6.$

* Xét điểm $M_2(1,-1), \quad A = 6, B = 0, C = -12$

$\Rightarrow B^2 - AC > 0$

$\Rightarrow$ f không đạt cực trị tại M_2

* Xét điểm $M_3(-1,1)$,

$$A = -6, B = 0, C = 12 \Rightarrow B^2 - AC > 0$$

$\Rightarrow f$ không đạt cực trị tại M_3.

* Xét điểm $M_4(-1,-1)$,

$A = -6, B = 0, C = -12 \Rightarrow B^2 - AC < 0$ và $A > 0$

$\Rightarrow f$ đạt cực đại địa phương tại M_4, $f(M_4) = 6$.

Vậy hàm số đạt giá trị cực tiểu là -6 tại điểm $M_1(1,1)$, đạt giá trị cực đại là 6 tại điểm $M_4(-1,-1)$.

Ví dụ: Tìm cực trị địa phương của hàm số $z = x^4 + y^4$

Giải:

Có $z'_x = 4x^3, \; z'_y = 4y^3$

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Hàm số có một điểm tới hạn là $M_0(0,0)$

$$A = z''_{x^2} = 12x^2, \quad B = z''_{xy} = 0, \quad C = z''_{y^2} = 12y^2$$

Tại M_0, $A = 0, \; B = 0, \; C = 0 \Rightarrow B^2 - AC = 0$

Có: $z(0,0) = 0, \; z(x,y) = x^4 + y^4 > 0, \; \forall (x,y) \neq (0,0)$

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $(0,0)$ và $z_{CT} = z(0,0) = 0.$

Ví dụ: Tìm cực trị địa phương của hàm số

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2.$$

Giải

* $f'_x = 4x^3 - 2x - 2y, \quad f'_y = 4y^3 - 2y - 2x.$

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = y^3 \\ 2x^3 - x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x\left(x^2 - 1\right) = 0 \end{cases}$$

Hàm số có ba điểm tới hạn là $M_1(0,0),\ M_2(1,1),\ M_3(-1,-1).$

* Có $A = f''_{x^2} = 12x^2 - 2,\ B = f''_{xy} = -2,\ C = f''_{y^2} = 12y^2 - 2$

* Tại $M_1(0,0),\ A = -2,\ B = -2,\ C = -2 \Rightarrow B^2 - AC = 0$

* Trong mọi lân cận cận của M_1 đều chứa các điểm $M(x,x)$ và $N(x,-x)$

$$f(M)-f(M_1)=2x^4-4x^2=2x^2(x^2-2)<0$$
$$khi\ -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}.$$

$$f(N)-f(M_1)=2x^4>0\ khi\ x\neq 0.$$

Vậy f không đạt cực trị tại điểm $M_1(0,0)$.

* Xét điểm $M_2(1,1)$,

$A=10,\ B=-2,\ C=10\ \Rightarrow B^2-AC<0$ và $A>0$

$\Rightarrow$ f đạt cực tiểu địa phương tại M_2.

Tương tự, f đạt cực tiểu địa phương tại M_3, $f(M_2) = f(M_3) = -2.$

Vậy hàm số đạt giá trị cực tiểu là -2 tại các điểm

$$M_2(1,1),\ M_3(-1,-1).$$

1.4.3. Cực trị có điều kiện ràng buộc

a) Định nghĩa:

Cực trị của hàm số $f(x,y)$ trong đó các biến x, y phải thỏa mãn điều kiện $g(x,y)=0$ được gọi là cực trị có điều kiện.

b) Định lí (Điều kiện cần)

Giả sử $M_0(x_0, y_0)$ là điểm cực trị có điều kiện của hàm số $f(x,y)$ với điều kiện $g(x,y)=0$ và

i) Các hàm số f, g có các đạo hàm riêng cấp một liên tục trong một lân cận của $M_0(x_0, y_0)$

ii) g'_x, g'_y không đồng thời bằng 0 tại $M_0(x_0, y_0)$

Khi đó, tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) + \lambda g'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) + \lambda g'_y(x_0, y_0) = 0 \\ g(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

Định nghĩa:

* Các điểm $M_0(x_0, y_0)$ thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) + \lambda g'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) + \lambda g'_y(x_0, y_0) = 0 \\ g(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

được gọi là các điểm dừng của hàm số f.

* Các điểm dừng hoặc các điểm không thỏa mãn các điều kiện *i*, *ii* của định lí trên được gọi là các điểm tới hạn của hàm số f.

Nhận xét:

Điểm cực trị có điều kiện của hàm số f (nếu có) phải là điểm tới hạn.

Ví dụ:

Tìm cực trị của hàm số $f(x,y) = x^2 + y^2$ với điều kiện $ax + by + c = 0 \quad (c \neq 0).$

Giải:

$$f'_x = 2x,\ \ f'_y = 2y,\ g'_x = a,\ g'_y = b$$

g'_x, g'_y không đồng thời bằng 0.

Giải hệ $\begin{cases} f'_x + \lambda g'_x = 0 \\ f'_y + \lambda g'_y = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \lambda a = 0 \\ 2y + \lambda b = 0 \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$

Hàm số có một điểm tới hạn là $M_0\left(\dfrac{-ac}{a^2+b^2},\dfrac{-bc}{a^2+b^2}\right)$.

Bài toán chính là tìm cực trị của bình phương khoảng cách từ điểm $O(0,0)$ đến các điểm $M(x,y)$ thuộc đường thẳng $ax+by+c=0$.

Ở đây chỉ có giá trị cực tiểu, không có giá trị cực đại.

Điểm cực trị phải là điểm tới hạn.

Vậy f đạt giá trị cực tiểu tại M_0, $f(M_0)=\dfrac{c^2}{a^2+b^2}$.

c) Phương pháp nhân tử Lagrange

Xét hàm số $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$

(đượcgọi là hàm Lagrange)

Giải hệ

$$\begin{cases} f'_x + \lambda g'_x = 0 \\ f'_y + \lambda g'_y = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases}$$

tìm được $\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ \lambda = \lambda_0 \end{cases}$

Điểm $M_0(x_0, y_0)$ là điểm dừng của hàm số f.

Giả sử f, g có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trong lân cận của M_0 (g'_x, g'_y không đồng thời bằng 0 tại M_0)

Xét $$d^2L(x_0, y_0, \lambda_0) = L''_{x^2}(x_0, y_0, \lambda_0)dx^2 + 2L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0)dxdy + L''_{y^2}(x_0, y_0, \lambda_0)dy^2$$

trong đó $$\begin{cases} dx^2 + dy^2 \neq 0 \\ dg(x_0, y_0) = g'_x(x_0, y_0)dx + g'_y(x_0, y_0)dy = 0 \end{cases}$$

Khi đó:

* Nếu $d^2L(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$ thì $M_0(x_0, y_0)$ là điểm cực tiểu của hàm số f với điều kiện $g(x, y) = 0.$

* Nếu $d^2L(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$ thì $M_0(x_0, y_0)$ là điểm cực đại của hàm số f với điều kiện $g(x, y) = 0.$

* Nếu $d^2L(x_0, y_0, \lambda_0)$ đổi dấu thì $M_0(x_0, y_0)$ không là điểm cực trị của hàm số f với điều kiện $g(x, y) = 0.$

Ví dụ: Tìm cực trị của hàm số $f(x,y,z) = x + y + z$

với điều kiện $xyz = 1 \ (x > 0, y > 0, z > 0)$

Giải:

Xét hàm Lagrange

$$L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$$

Giải hệ $\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_z = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \lambda yz = 0 \\ 1 + \lambda xz = 0 \\ 1 + \lambda xy = 0 \\ xyz = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \\ \lambda = -1 \end{cases}$

Hàm số f có một điểm tới hạn là $M_0(1,1,1)$ ứng với $\lambda = -1.$

Có $L''_{y^2} = 0,\ L''_{x^2} = 0,\ L''_{z^2} = 0, L''_{xy} = \lambda z, L''_{xz} = \lambda y,\ L''_{yz} = \lambda x,$

$$d^2L(1,1,1,-1) = L''_{x^2}(1,1,1,-1)dx^2 + L''_{y^2}(1,1,1,-1)dy^2 +$$

$$+L''_{z^2}(1,1,1,-1)dz^2 + 2L''_{xy}(1,1,1,-1)dxdy +$$

$$+2L''_{xz}(1,1,1,-1)dxdz + 2L''_{yz}(1,1,1,-1)dydz$$

$$= -2(dxdy + dydz + dxdz)$$

Với điều kiện $\begin{cases} dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0 \\ dg(1,1,1) = 0 \end{cases}$

hay $\begin{cases} dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0 \\ dx + dy + dz = 0 \end{cases}$

Có $d^2L(1,1,1,-1) = -2\left[dxdy + (dx+dy)dz\right]$

$$= -2\left[dxdy - (dx+dy)^2\right] = 2(dx+dy)^2 - 2dxdy$$

$$= (dx+dy)^2 + dx^2 + dy^2 > 0$$

Vậy hàm số f đạt giá trị cực tiểu tại điểm $M_0(1,1,1)$

với $f(M_0) = 1 + 1 + 1 = 3.$

1.4.4. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên miền đóng, bị chặn

Giả sử hàm số $f(x,y)$ liên tục trên miền đóng, bị chặn *D*.

Để tìm GTLN, GTNN của f trên *D, ta*

**** Tìm giá trị của f tại các điểm tới hạn (trong D)***

(các điểm có các đạo hàm riêng đồng thời = 0

hoặc không xác định)

**** Tìm GTLN, GTNN của f trên biên của D***

**** So sánh các giá trị trên.***

Ví dụ: Tìm GTLN, GTNN của hàm số

$$f(x,y) = 8x^2 + 3y^2 + 1 - (2x^2 + y^2 + 1)^2$$

trên miền D xác định bởi $x^2 + y^2 \le 1.$

Giải:

* $f'_x = 16x - 2(2x^2 + y^2 + 1)\,4x = 8x(1 - 2x^2 - y^2)$

$f'_y = 6y - 2(2x^2 + y^2 + 1)\,2y = 2y(1 - 4x^2 - 2y^2)$

* Giải hệ $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$ ta tìm được 5 điểm tới hạn là:

$$M_1(0,0), M_2(0,\frac{1}{\sqrt{2}}), M_3(0,-\frac{1}{\sqrt{2}}), M_4(\frac{1}{\sqrt{2}},0), M_5(-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$$

Cả 5 điểm tới hạn trên đều là điểm trong của miền D.

$$f(M_1) = 0, \quad f(M_2) = f(M_3) = \frac{1}{4}, \quad f(M_4) = f(M_5) = 1$$

* Trên biên của D,

$$y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow f(x, y) = -x^4 + x^2 \qquad (-1 \le x \le 1)$$

Đặt $g(x) = -x^4 + x^2$

Có $g'(x) = 2x - 4x^3$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$g(0)=0,\quad g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{4},\ \ g(1)=g(-1)=0.$$

Trên biên , f đạt GTLN là $\frac{1}{4}$, GTNN là 0.

* So sánh các giá trị $0,\frac{1}{4},1,$ ta thấy:

f đạt GTLN là 1 tại các điểm $M_4\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right), M_5\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$

f đạt GTNN là 0 tại các điểm $(0,0),(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)$

1.5 TRƯỜNG VÔ HƯỚNG, TRƯỜNG VÉC TƠ, RÔTA, DIVE

1.5.1. Trường vô hướng

Cho miền $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ hoặc $\mathbb{R}^2$ Một hàm số $u : \Omega \to \mathbb{R}$ đưa

$(x, y, z) \mapsto u(x, y, z) \in \mathbb{R}$ được gọi là một trường vô hướng

xác định trên Ω

Chẳng hạn trường nhiệt độ là một trường vô hướng

$\mathbb{R}^2$

Mặt mức của trường vô hướng

Tập các điểm $M(x,y,z)\in\Omega$ thỏa mãn phương trình:

$$u(x,y,z) = C,\ C \text{ là hằng số}$$

được gọi là mặt mức của trường vô hướng ứng với giá trị C

Rõ ràng các mặt mức khác nhau (các giá trị C khác nhau) không giao nhau và miền Ω bị phủ kín các mặt mức

Nếu $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ thì ta có đường mức (đường đẳng trị) xác định bởi phương trình

$$u(x,y) = C,\ C \text{ là hằng số}$$

1.5.2. Trường véc tơ

Một trường véctơ $\vec{F}(x, y, z)$ xác định trong miền $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ nếu tại mọi điểm $M(x,y,z) \in \Omega$ đều xác định đại lượng véc tơ

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z).\vec{i} + Q(x, y, z).\vec{j} + R(x, y, z).\vec{k} = (P, Q, R)$$

Chẳng hạn từ trường, điện trường, trường vận tốc … là các trường véc tơ

Một trường véctơ xác định khi biết ba thành phần của véctơ đặc trưng cho trường đó, tức là biết ba trường vô hướng:

$$P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$$

Divergence (độ phân kỳ)

Ta gọi độ phân kỳ hay gọi tắt là dive của trường véctơ $\overrightarrow{F}(x, y, z)$ tại điểm $M(x,y,z)$ là đại lượng vô hướng, ký hiệu $\mathrm{div}\overrightarrow{F}(x, y, z)$, được xác định theo công thức

$$\mathrm{div}\overrightarrow{F}(x, y, z) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Vậy dive của một trường véctơ là một trường vô hướng

Rôta (Rotation, Véc tơ xoáy)

Cho trường véctơ $\overrightarrow{F}(x,y,z)=(P,Q,R)$, véctơ xoáy của trường, ký hiệu là $\operatorname{rot}\overrightarrow{F}$, được xác định theo công thức

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{F}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

Vậy rôta của một trường véctơ là một trường véc tơ

1.6 Ứng dụng của phép tính vi phân

1.6.1 Ứng dụng của phép tính vi phân trong hình học phẳng

1) Cho đường cong phẳng (*L*) xác định bởi phương trình *f* (*x*, *y*) = 0, trong đó f là hàm khả vi. Điểm $M(x_0, y_0)$ được gọi là điểm chính quy của đường cong (*L*) nếu tồn tại các đạo hàm riêng $f_x'(M), f_y'(M)$ không đồng thời bằng 0. Giả sử $f_y'(M) \neq 0$ Khi đó tồn tại một hàm ẩn

$y = y(x)$ và $y'(x) = -\dfrac{f_x'}{f_y'}$ Phương trình tiếp tuyến tại *M* là

$$y - y_0 = -\frac{f_x'(M)}{f_y'(M)}(x - x_0) \quad \text{hay} \quad f_x'(M)(x - x_0) + f_y'(M)(y - y_0) = 0$$

Phương trình pháp tuyến tại *M* là

$$y - y_0 = \frac{f_y'(M)}{f_x'(M)}(x - x_0) \quad \text{hay} \quad \frac{(x - x_0)}{f_x'(M)} = \frac{(y - y_0)}{f_y'(M)}$$

Nói cách khác, véc tơ pháp tuyến của đường cong *(L)* tại điểm

$M(x(t_0), y(t_0))$ là $\vec{n} = (\mathrm{f}_x'(\mathrm{M}), \mathrm{f}_y'(\mathrm{M}))$

2) Nếu đường cong (*L*) cho bởi phương trình tham số $x = x(t), y = y(t)$

thì điểm $M(x(t_0), y(t_0))$ được gọi là điểm chính quy của đường cong (L) nếu tồn tại các đạo hàm $x'(t_0), y'(t_0)$ không đồng thời bằng 0. Khi đó $y'(x) = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt} = \dfrac{y'_t}{x'_t}$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(x(t_0), y(t_0))$ chính quy

$$y - y(t_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}(x - x(t_0))$$ hay $$\frac{(x - x(t_0))}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)}$$

Nói cách khác, véc tơ tiếp tuyến của đường cong *(L)* tại điểm

$M(x(t_0), y(t_0))$ là . $\vec{n} = (x'(t_0), y'(t_0))$

Phương trình pháp tuyến tại *M*

$$x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) = 0$$

1.6.2 Ứng dụng của phép tính vi phân trong hình học không gian

1) Hàm véctơ: Giả sử *I* là một khoảng trong $\mathbb{R}$.

Ánh xạ $I \to \mathbb{R}^n, t \mapsto \overrightarrow{r(t)} \in \mathbb{R}^n$

được gọi là hàm véctơ của biến số *t* xác định trên $\mathbb{R}$

Nếu $n=3$ ta viết $r(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

2) Giới hạn: Người ta nói hàm véctơ có giới hạn là $\vec{a}$ khi $t \to t_0$

nếu $\lim\limits_{t\to t_0}\left|\overrightarrow{r(t)} - \vec{a}\right| = \vec{0}$, ký hiệu $\lim\limits_{t\to t_0}\overrightarrow{r(t)} = \vec{a}$

3) Liên tục: Hàm véctơ $\overrightarrow{r(t)}$ xác định trên *I* được gọi là liên tục tại

$t_0 \in I$ nếu $\lim\limits_{t \to t_0} \overrightarrow{r(t)} = \overrightarrow{r(t_0)}$

t

4) Đạo hàm: Giới hạn, nếu có, của tỉ số $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\overrightarrow{r(t_0+h)} - \overrightarrow{r(t_0)}}{h}$

được gọi là đạo hàm của hàm véctơ $\overrightarrow{r(t)}$ tại t_0 kí hiệu $\overrightarrow{r'(t_0)}$

khi đó ta nói hàm véctơ $\overrightarrow{r(t)}$ khả vi tại t_0

Nhận xét: nếu $x(t), y(t), z(t)$ khả vi tại t_0 thì $\overrightarrow{r(t)}$ cũng

khả vi tại t_0 và $\overrightarrow{r'(t_0)} = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j} + z'(t_0)\vec{k}$

5) Đường cong trong không gian $\mathbb{R}^3$

Tương tự như cách chúng ta biểu diễn đường cong trong không gian $\mathbb{R}^2$ bởi phương trình tham số, mỗi đường cong trong không gian $\mathbb{R}^3$ được định nghĩa, một cách đơn giản, là một hàm véc tơ

$$\lambda:[a,b]\to\mathbb{R}^3, \lambda(\mathrm{t})=\mathrm{x}(\mathrm{t})\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$$

Véc tơ tiếp tuyến của đường cong $\lambda(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ là

$$\lambda'(t)=x'(t)\vec{i}+y'(t)\vec{j}+z'(t)\vec{k}$$

Phương trình tiếp tuyến của λ tại điểm $M(x_0, y_0, z_0)$ chính quy:

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}$$

Phương trình pháp diện tại *M*:

$$x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) + z'(t_0)(z - z(t_0)) = 0$$

6) Mặt cong trong không gian $\mathbb{R}^3$

Cho mặt S có phương trình $f(x,y,z)=0$. Điểm $M_0 \in S$ được gọi là điểm chính quy nếu tại đó các đạo hàm riêng $f'_x(M_0), f'_y(M_0), f'_z(M_0))$ đều tồn tại và không đồng thời triệt tiêu. Đường thẳng M_0T được gọi là tiếp tuyến của S tại M_0 nếu nó là tiếp tuyến tại M_0 của một đường nào đó trên mặt S đi qua M_0 Mặt phẳng chứa mọi tiếp tuyến của S tại M_0 được gọi là tiếp diện (mặt phẳng tiếp xúc) của S tại M_0

Véctơ pháp tuyếncủa mặt S tại M_0 là $\vec{n} = (f'_x(M_0), f'_y(M_0), f'_z(M_0))$

Từ đó phương trình tiếp diện của mặt cong S tại điểm chính quy M_0

là $f'_x(M_0)(x - x_0) + f'_y(M_0)(y - y_0) + f'_z(M_0)(z - z_0) = 0$

Phương trình pháp tuyến của mặt cong S tại điểm chính quy M_0

là $$\frac{x - x_0}{f'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{f'_z(M_0)}$$

Nếu mặt được cho bởi phương trình $z = F(x, y)$ thì đặt

$f(x, y, z) = -F(x, y) + z,$ ta có véctơ pháp tuyến của mặt tại M_0

là $\vec{n} = (-f'_x(M_0), -f'_y(M_0), 1)$