ĐẠO HÀM, VI PHÂN CẤP CAO, CỰC TRỊ

1) Đạo hàm, vi phân cấp cao của hàm số.
2) Cực trị không điều kiện hàm nhiều biến

Tài liệu: Toán cao cấp tập 3, trang 10 – 29.

Calculus, page 922 – 941.

1. Đạo hàm riêng cấp 2

- Các đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng cấp 1 của nó được gọi là đạo hàm riêng cấp hai của hàm *f(x,y)*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx}(x,y)$$

1. Đạo hàm riêng cấp 2

- ***Ví dụ***. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của hàm số:

$$z = x^2y^3 + x^4$$

$$z'_x = 2xy^3 + 4x^3$$

$$z'_y = 3x^2y^2$$

$$z''_{xx} = 2y^3 + 12x^2$$

$$z''_{yy} = 6x^2y$$

$$z''_{xy} = 6xy^2$$

$$z''_{yx} = 6xy^2$$

- *Nhận xét:* Trong ví dụ này, ta thấy $z''_{xy} = z''_{yx}$

1. Đạo hàm riêng cấp 2

- Nếu các đạo hàm riêng hỗn hợp $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

  tồn tại trong một lân cận nào đó và liên tục tại điểm *M(x,y)*

thì:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

(*kết quả đạo hàm không phụ thuộc vào thứ tự lấy đạo hàm*).

1. Đạo hàm riêng cấp 2

❖ *Chú ý.*

- Nếu $f(x,y)$ là hàm hợp của các hàm sơ cấp thì các đạo hàm riêng của chúng cũng là hợp của các hàm sơ cấp
- Đạo hàm riêng các cấp của các hàm sơ cấp $f(x,y)$ sẽ không phụ thuộc vào thứ tự lấy đạo hàm

2. Vi phân cấp 2

- Vi phân của vi phân toàn phần cấp 1 tại điểm *M(x,y)* được gọi là vi phân cấp 2 của hàm *f(x,y)* tại điểm *M(x,y)*.
- Kí hiệu: $d^2 f(x,y) = d\big(df(x,y)\big)$.
- Nếu hàm *f(x,y)* có các đạo hàm riêng liên tục cấp 2 và là biến độc lập thì

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f$$

2. Vi phân cấp 2

- ***Ví dụ.*** Xác định vi phân cấp 2 của hàm số:

$$f(x,y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$$

Theo bài cho ta có:

$$f'_x = 4x - y - 6;\quad f'_y = -x - 2y - 3$$

$$f''_{xx} = 4;\quad f''_{xy} = -1;\quad f''_{yy} = -2$$

$$\Rightarrow d^2 f(x,y) = 4dx^2 - 2dxdy - 2dy^2$$

3. Khai triển Taylor

❑ ***Công thức khai triển Taylor***:

$$f(M) = f(M_0) + df(M_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(M_0) + \ldots + \frac{1}{n!}d^n f(M_0) + R_n$$

Trong đó, R_n là phần dư.

Ví dụ. Khai triển hàm số sau theo công thức Taylor ở lân cận điểm $M_0(1,-2)$

$$f(x,y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$$

3. Khai triển Taylor

$$f(x,y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5; M_0(1,-2)$$

Ta có: $f(M_0) = 5$

$$f'_x = 4x - y - 6;\ \ f'_y = -x - 2y - 3$$

$$f''_{xx} = 4;\quad f''_{xy} = -1;\ \ f''_{yy} = -2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'_x(M_0) = 0;\ f'_y(M_0) = 0 \\ f''_{xx}(M_0) = 4;\ f''_{xy}(M_0) = -1;\ f''_{yy}(M_0) = -2 \end{cases}$$

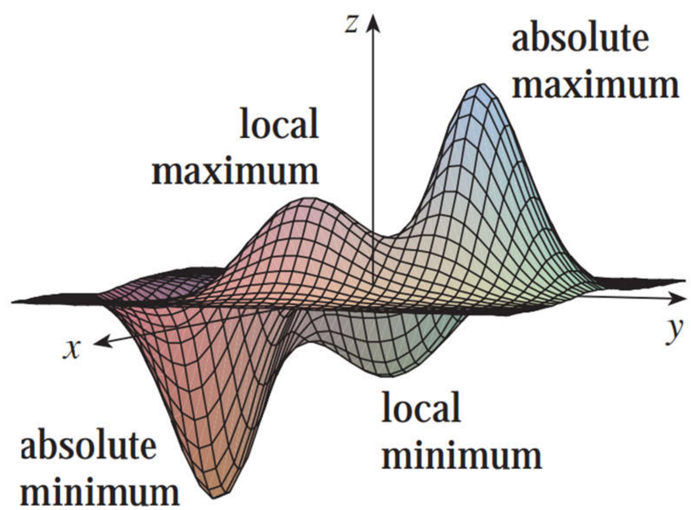
Thay vào công thức khai triển Taylor, suy ra:

$$f(x,y) = 5 + 2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2$$

4. Cực trị hàm 2 biến

- ***Định nghĩa***

Một hàm hai biến có cực đại tại (a,b) nếu $f(x,y) \leq f(a,b)$ khi (x,y) gần (a,b).



Giá trị $f(a,b)$: giá trị cực đại.

Cực tiểu:

Nếu $f(x,y) \geq f(a,b)$ khi (x,y) gần (a,b) thì $f(x,y)$ có cực tiểu tại (a,b). Giá trị $f(a,b)$ là giá trị cực tiểu.

➢ Điểm cực đại, cực tiểu: điểm cực trị

4. Cực trị hàm 2 biến

- ***Định lý:***

Nếu hàm f có cực đại hoặc cực tiểu tại (a, b) và các đạo hàm riêng cấp một của f tồn tại thì:

$$f_x(a, b) = 0 \ \text{và}\ f_y(a, b) = 0$$

- ***Điểm tới hạn:***

Điểm (a, b) được gọi là điểm tới hạn (hoặc điểm dừng) của f nếu $f_x(a, b) = 0$ và $f_y(a, b) = 0$, hoặc 1 trong các đạo hàm riêng đó không tồn tại.

Nếu (a, b) là điểm cực trị $\Rightarrow$ (a, b) là điểm tới hạn.

Nếu (a, b) là điểm tới hạn $\nRightarrow$ (a, b) là điểm cực trị.

4. Cực trị hàm 2 biến

- ***Ví dụ***. Xét hàm $f = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$.

Có: $f_x(x, y) = 2x - 2$; $\quad f_y(x, y) = 2y - 6$

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ 2y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy điểm dừng: $M(1,3)$.

Lại có: $f = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$

$$= (x-1)^2 + (y-3)^2 + 4 \geq 4.$$

Vậy $M(1,3)$: điểm cực tiểu của f,

$f(1,3) = 4$: giá trị cực tiểu của f.

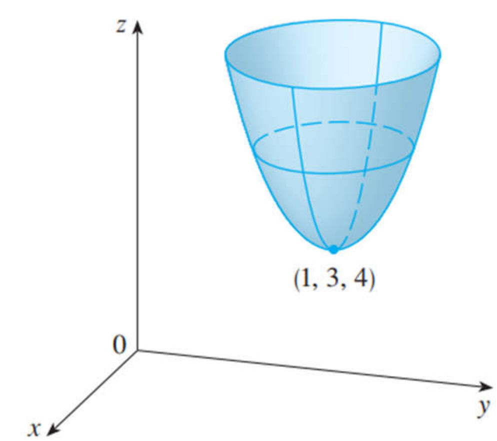


FIGURE 2
$z = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$

4. Cực trị hàm 2 biến

- ***Ví dụ***: Tìm giá trị cực trị của $f = y^2 - x^2$.

Ta có: $f_x(x,y) = -2x$; $\quad f_y(x,y) = 2y$;

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Điểm dừng: $M(0,0)$;

Các điểm trên Ox: $f = -x^2 < 0, x \neq 0$;

Các điểm trên Oy: $f = y^2 > 0, y \neq 0$;

Lân cận (0,0), *f* lấy giá trị dương và âm.

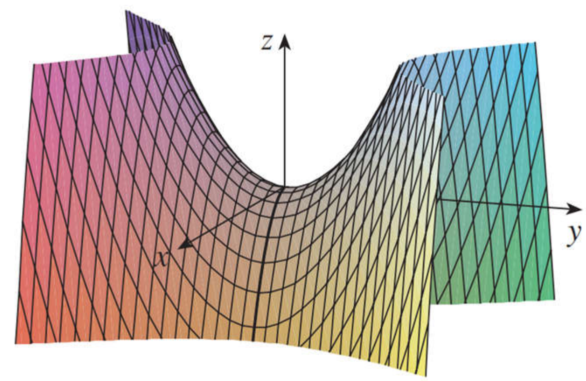


FIGURE 3
$z = y^2 - x^2$

➢ Hàm *f* không có cực trị tại (0,0). M(0,0): điểm yên ngựa.

4. Cực trị hàm 2 biến

- ***Dấu hiệu sử dụng đạo hàm riêng cấp 2***

Giả sử các đạo hàm riêng cấp 2 của *f* liên tục tại lân cận (a,b) và (a,b) là một điểm tới hạn của f.

$$\text{Xét } D = f_{xx}(a,b).f_{yy}(a,b) - \left[f_{xy}(a,b)\right]^2$$

- Nếu $D > 0$ và $f_{xx}(a,b) > 0$ thì (a,b): điểm cực tiểu;
- Nếu $D > 0$ và $f_{xx}(a,b) < 0$ thì (a,b): điểm cực đại;
- Nếu $D < 0$ thì (a,b): không là điểm cực trị.

4. Cực trị hàm 2 biến

- ***Ví dụ***. Tìm cực trị của hàm $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.
- ***Giải***: Ta có $f_x = 4x^3 - 4y$; $f_y = 4y^3 - 4x$

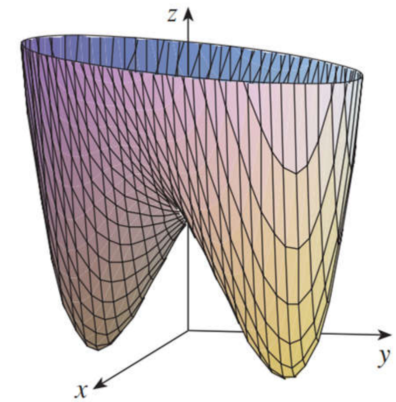


FIGURE 4
$z = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

Giải hệ: $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4y = 0 \\ 4y^3 - 4x = 0 \end{cases}$;

Các điểm tới hạn: $A(0,0)$; $B(1,1)$; $C(-1,-1)$;

Đạo hàm riêng cấp 2: $f_{xx} = 12x^2$; $f_{yy} = 12y^2$; $f_{xy} = -4$

$$D(x,y) = 144x^2x^2 - 16$$

$D(0,0) = -16 \Rightarrow A(0,0)$: không là cực trị;

$D(1,1) = 128$; $f_{xx} = 12 \Rightarrow B(1,1)$: điểm cực tiểu;

$D(-1,-1) = 128$; $f_{xx} = 12 \Rightarrow C(-1,-1)$: điểm cực tiểu.

4. Cực trị hàm 2 biến

- Tóm tắt: Các bước làm bài toán tìm cực trị không điều kiện

$f(x, y)$

Tính f_x, f_y, tìm điểm dừng

Tính f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}; Lập D

Kiểm tra D tại điểm dừng rồi KL

4. Cực trị hàm 2 biến

- ***Ví dụ***. Tìm các điểm cực trị của hàm số:

$$z = 8x^3 + 2xy - 3x^2 + y^2$$

$$z'_x = 24x^2 + 2y - 6x; \quad z'_y = 2x + 2y$$

$$z''_{xx} = 48x - 6; \quad z''_{xy} = z''_{yx} = 2; \quad z''_{yy} = 2$$

Điểm dừng hàm số được xác định từ hệ:

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x^2 + y - 3x = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ x = \dfrac{1}{3}, \ y = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$M_1(0,0); \ M_2\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

4. Cực trị hàm 2 biến

- Xét tại điểm M_1 ta có:

$$A(0,0) = -6; \quad B(0,0) = 2; \; C(0,0) = 2$$

$$\Rightarrow D = AC - B^2 = -12 - 4 = -16 < 0$$

Vậy M_1 không phải là điểm cực trị của hàm đã cho

- Xét tại điểm M_2 ta có:

$$A\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = 10; \quad B\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = 2; \; C\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = 2$$

$$\Rightarrow D = AC - B^2 = 20 - 4 = 16 > 0$$

Vậy M_2 là điểm cực tiểu của hàm đã cho.

4. Cực trị hàm 2 biến

- ***Ví dụ:*** Tìm các điểm cực trị của hàm số:

$$z = x + 2e.y - e^x - e^{2y}$$

$$\begin{cases} z'_x = 1 - e^x \\ z'_y = 2e - 2e^{2y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - e^x = 0 \\ 2e - 2e^{2y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M_0\left(0, \frac{1}{2}\right)$$

$$z''_{xx} = -e^x \Rightarrow z''_{xx}(M_0) = -1$$

$$z''_{yy} = -4e^{2y} \Rightarrow z''_{yy}(M_0) = -4e \quad \Rightarrow D = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4e \end{vmatrix} = 4e > 0$$

$$z''_{xy} = 0 \Rightarrow z''_{xy}(M_0) = 0$$

4. Cực trị không có điều kiện

- ***<u>Ví dụ:</u>*** Tìm các điểm cực trị của hàm số:

$$z = x + 2e.y - e^{x} - e^{2y}$$

<u>Đáp án:</u>

$M\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$: Là điểm cực đại

5. Cực trị hàm nhiều biến

❖ ***Cực trị của hàm nhiều biến số.***

- Xét hàm n biến (n > 2): $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ có tập xác định A trong R^n.
- Điểm dừng của hàm f thỏa mãn hệ: $\begin{cases} f'_{x_1} = 0 \\ f'_{x_2} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f'_{x_n} = 0 \end{cases}$
- Gọi $M(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ là một điểm dừng của hàm f.
- Xét: $d^2 f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} dx_i dx_j; \qquad a_{ij} = \dfrac{\partial^2 f(M)}{\partial x_i \partial x_j}$

5. Cực trị hàm nhiều biến

- Lập ma trận H = $(a_{ij})_{n.n}$ (Hess)
- Kí hiệu H_k: định thức con chính cấp k (tạo từ k hàng đầu và k cột đầu của H).

Khi đó:

- Nếu $H_k > 0$ với mọi k = 1, 2,.., n thì M là điểm cực tiểu;
- Nếu $(-1)^k H_k > 0$ với mọi k thì M là điểm cực đại.
-

5. Cực trị hàm nhiều biến

- ***Ví dụ:*** Tìm cực trị hàm:

$$f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z},\ (x,y,z>0)$$

- ***Hướng dẫn:***

  Xác định điểm dừng:

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \\ f'_z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \dfrac{y^2}{4x^2} = 0 \\ \dfrac{y}{2x} - \dfrac{z^2}{y^2} = 0 \\ \dfrac{2z}{y} - \dfrac{2}{z^2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{1}{2},1,1\right)$$

5. Cực trị hàm nhiều biến

- Lập ma trận Hess:

$$a_{11} = f''_{xx}(M) = 4;\ a_{22} = f''_{yy}(M) = 3;\ a_{33} = f''_{zz}(M) = 6$$

$$a_{12} = a_{21} = f''_{xy}(M) = -2;\ a_{13} = a_{31} = f''_{xz}(M) = 0$$

$$a_{23} = a_{32} = f''_{yz}(M) = -2$$

$$H = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} H_1 = 4 > 0 \\ H_2 = 8 > 0 \\ H_3 = 32 > 0 \end{cases}$$

- Vậy M (1/2, 1, 1) là điểm cực tiểu.

Bài tập

- **<u>Bài 1.</u>** Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của các hàm

1) $f(x,y) = (x^2 + y^2)^2$

2) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$

3) $f(x,y) = x^y$

4) $f(x,y) = e^{x-y^2} + \cos x$

5) $f(x,y) = \arctan\dfrac{x}{y}$

Bài tập

- ***Bài 2***. Tìm d^2u nếu:

1) $u = e^{xy}$
2) $u = xyz$
3) $u = \varphi(t),\ t = x^2 + y^2$
4) $u = f(v, \mathrm{w}),\ v = ax,\ w = by$
5) $u = v^w,\ v = \dfrac{x}{y},\ w = xy$
6) $u = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y;\ d^2u(1,2) = ?$

Bài tập

a) Chứng minh rằng hàm số:

$$u = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Thỏa mãn phương trình: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

b) Chứng minh rằng hàm số: $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ thỏa mãn:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Bài tập

- ***Bài 4.*** Tìm cực trị các hàm số

1) $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$
2) $f(x,y)=x^3+3xy^2-15x-12y$
3) $f(x,y)=x+y-xe^y$
4) $f(x,y)=xy\ln\left(x^2+y^2\right)$
5) $f(x,y)=x^2(x+1)+y^3$
6) $f(x,y)=2x^4+y^4-x^2-2y^2$
7) $f(x,y)=1+6x-x^2-xy-y^2$

Bài tập

8) $f(x,y)=(x-1)^2+2y^2$

9) $f(x,y)=x^2+xy+y^2-2x-y$

10) $f(x,y)=x^3y^2(6-x-y)\;(x>0, y>0)$