1. Đạo hàm riêng, vi phân

Định nghĩa đạo hàm riêng theo biến x

Cho hàm hai biến $f = f(x,y)$ với điểm $M_0(x_0,y_0)$ cố định.

Xét hàm một biến $F(x) = f(x,y_0)$ theo biến x.

Đạo hàm của hàm một biến $F(x)$ tại x_0 được gọi là đạo hàm riêng theo biến x của hàm $f(x,y)$ tại $M_0(x_0,y_0)$, ký hiệu:

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = f'_x(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Định nghĩa đạo hàm riêng theo biến *y*

Cho hàm hai biến $f = f(x, y)$ với điểm $M_0(x_0, y_0)$ cố định.

Xét hàm một biến $F(y) = f(x_0, y)$ theo biến y.

Đạo hàm của hàm một biến $F(y)$ tại y_0 được gọi là đạo hàm riêng theo biến y của hàm $f(x, y)$ tại $M_0(x_0, y_0)$, ký hiệu:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F(y_0 + \Delta y) - F(y_0)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

1. Đạo hàm riêng, vi phân

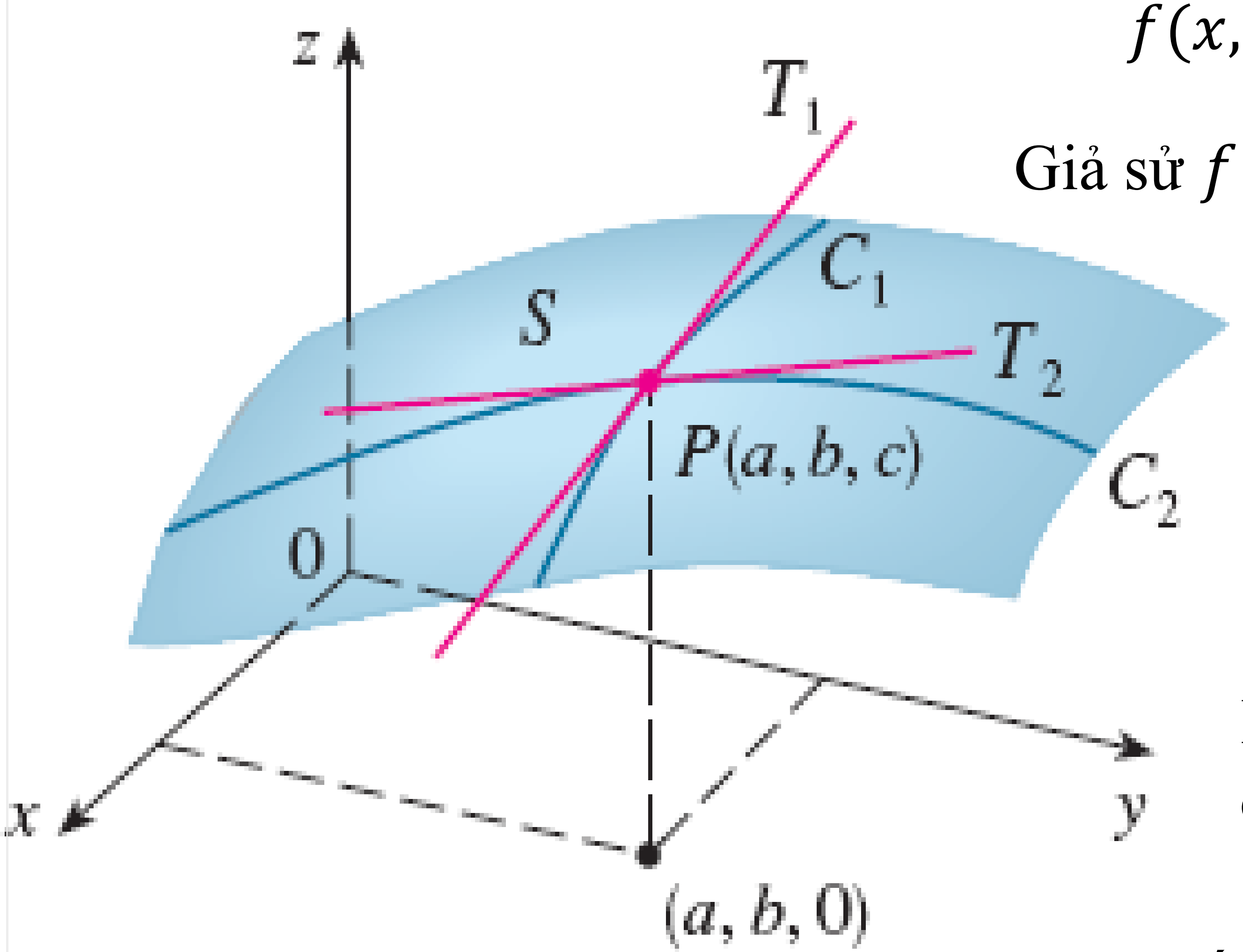
Ghi nhớ

Đạo hàm riêng của $f = f(x, y)$ tại $M_0(x_0, y_0)$ theo x là đạo hàm của hàm một biến $f = f(x, y_0)$.

Đạo hàm riêng của $f = f(x, y)$ tại $M_0(x_0, y_0)$ theo y là đạo hàm của hàm một biến $f = f(x_0, y)$.

Qui tắc tìm đạo hàm riêng

Để tìm đạo hàm riêng của f theo biến x, ta coi f là hàm một biến x, biến còn lại y là hằng số.



$f(x, y)$ biễu diễn bởi mặt S (màu xanh).

Giả sử $f(a, b) = c$, nên điểm $P(a, b, c) \in S$.

Cố định $y = b$. Đường cong C_1 là giao của S và mặt phẳng $y = b$.

Phương trình của đường cong C_1 là $g(x) = f(x, b)$.

Hệ số góc của tiếp tuyến T_1 với đường cong C_1 là:

$$g'(a) = f'_x(a, b)$$

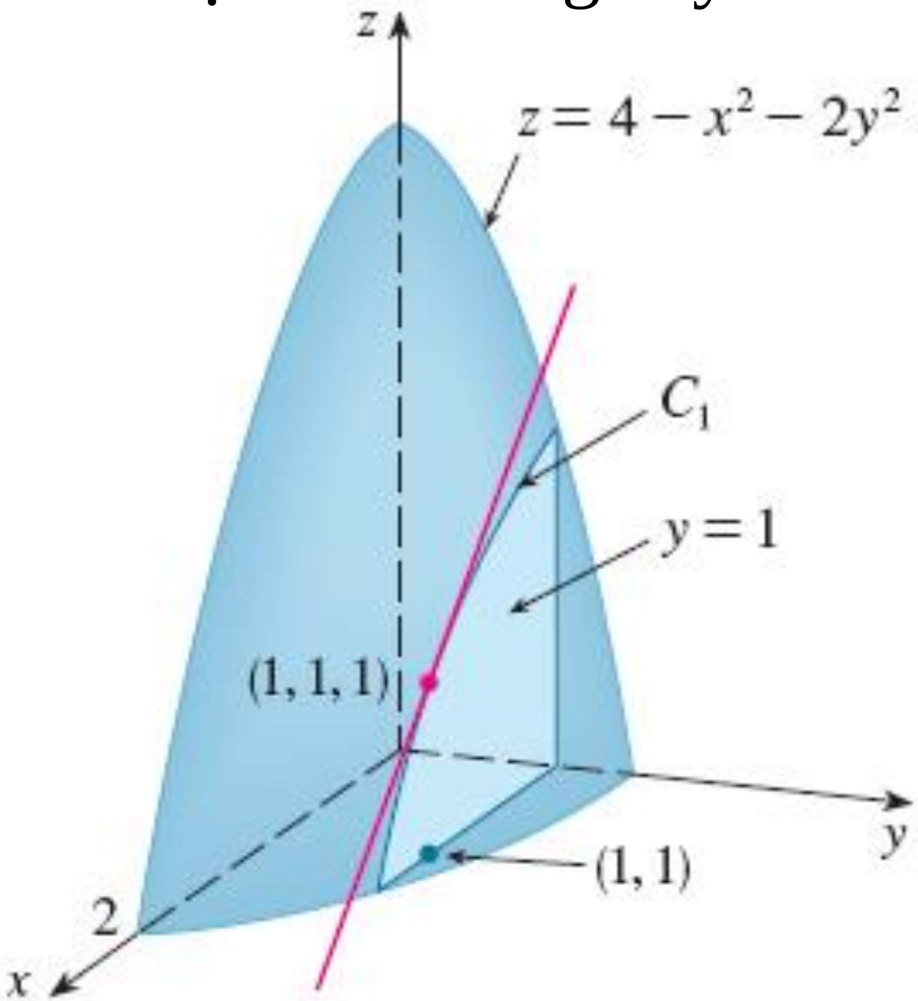
Đạo hàm riêng theo x của $f(x, y)$ là hệ số góc của tiếp tuyến T_1 với đường cong C_1 tại $P(a, b, c)$.

Tương tự, đạo hàm riêng theo y của $f(x, y)$ là hệ số góc của tiếp tuyến T_2 với đường cong C_2 tại $P(a, b, c)$.

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Ví dụ

Cho hàm $f(x,y) = 4 - x^2 - 2y^2$. Tìm $f'_x(1,1)$ và biểu diễn hình học của đạo hàm riêng này.



$f'_x(x,y) = -2x \to f'_x(1,1) = -2$

Mặt bậc hai $f(x,y)$.

Mặt phẳng $y = 1$ cắt ngang được đường cong C_1.

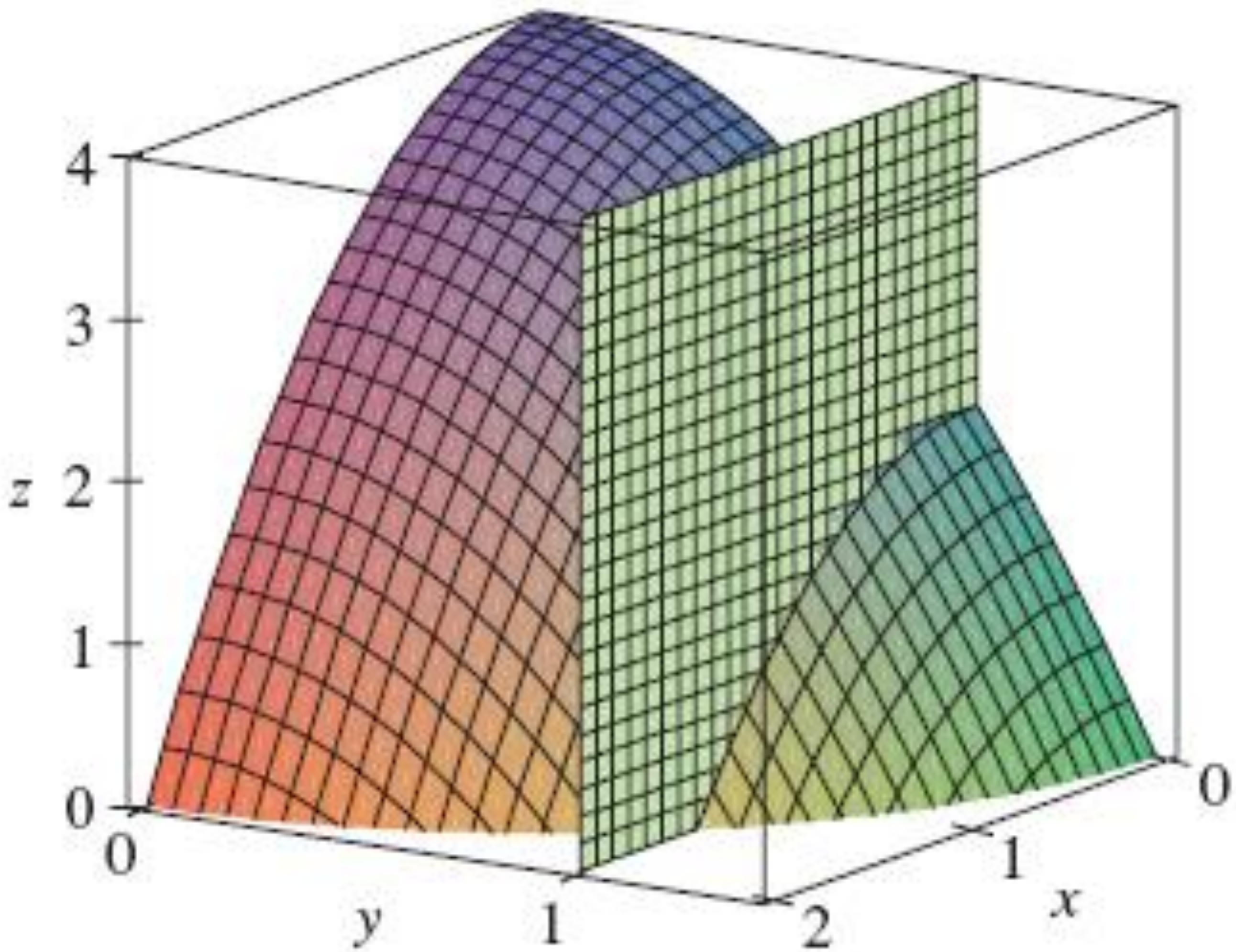
Tiếp tuyến với C_1 tại (1,1,1) là đường thẳng màu hồng.

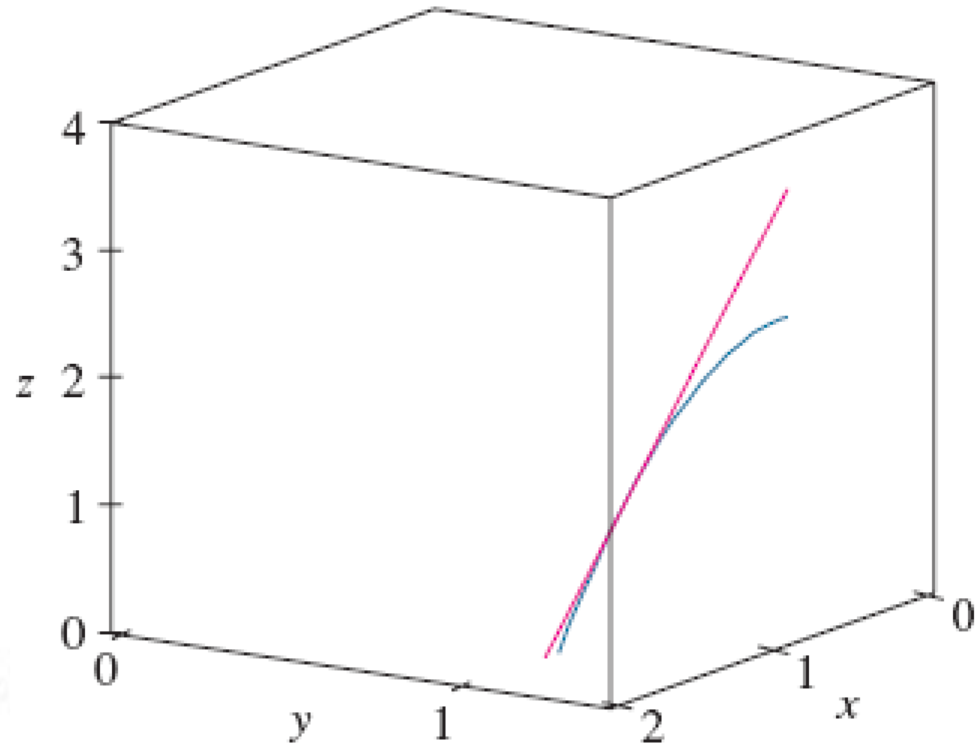
Hệ số góc của tiếp tuyến với C_1 tại (1,1,1) là đạo hàm riêng cần tìm.

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Ví dụ

Biễu diễn hình học của $f'_x(1,1)$:





1. Đạo hàm riêng, vi phân

Tính chất của đạo hàm riêng

Vì đạo hàm riêng là đạo hàm của hàm một biến nên tính chất của đạo hàm riêng cũng có tính chất của đạo hàm của hàm một biến.

1) $(\alpha f)'_x = \alpha f'_x$

2) $(f+g)'_x = f'_x + g'_x$

3) $(f \cdot g)'_x = f'_x \cdot g + f \cdot g'_x$

4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'_x = \dfrac{g f'_x - f g'_x}{g^2}$

Hàm một biến: hàm có đạo hàm cấp 1 tại x_0 thì hàm liên tục tại x_0.

Hàm nhiều biến: tồn tại hàm có các đạo hàm riêng cấp 1 tại (x_0,y_0) nhưng chưa chắc hàm đã liên tục tại điểm này.

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Ví dụ

Tìm đạo hàm riêng $f'_x(1,2)$, $f'_y(1,2)$, biết $f(x,y) = \ln(x^2 + 2y^2)$

$$f'_x(x,y) = \left(\ln(x^2 + 2y^2)\right)'_x$$

$$f'_x(x,y) = \frac{2x}{x^2 + 2y^2} \qquad \Rightarrow f'_x(1,2) = \frac{2}{9}$$

$$f'_y(x,y) = \left(\ln(x^2 + 2y^2)\right)'_y$$

$$f'_y(x,y) = \frac{4y}{x^2 + 2y^2} \qquad \Rightarrow f'_y(1,2) = \frac{8}{9}$$

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Ví dụ

Tìm đạo hàm riêng $f'_x(1,2), f'_y(1,2)$, biết $f(x,y) = (x+2y)^y$

$$f'_x(x,y) = \left((x+2y)^y\right)'_x$$

$$f'_x(x,y) = y(x+2y)^{y-1} \quad \Rightarrow f'_x(1,2) = 10$$

$$\ln f = y\ln(x+2y)$$

Đạo hàm riêng hai vế theo y, ta có: $\dfrac{f'_y}{f} = \ln(x+2y) + y\cdot\dfrac{2}{x+2y}$

$$\Rightarrow f'_y(x,y) = (x+2y)^y\left[\ln(x+2y) + y\cdot\frac{2}{x+2y}\right]$$

$$\Rightarrow f'_y(x,y) = 25(\ln 5 + \frac{4}{5})$$

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Ví dụ

Cho $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^3}$

1) Tìm $f'_x(1,1)$ 2) Tìm $f'_x(0,0)$ 3) Tìm $f'_y(0,0)$

1) $f'_x(x,y)=\left(\sqrt{x^2+y^3}\right)'_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^3}} \Rightarrow f'_x(1,1)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

2) Không thể thay (0,0) vào công thức để tìm $f'_x(0,0)$. Ta sử dụng định nghĩa:

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+0}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

Không tồn tại giới hạn này vì giới hạn trái và giới hạn phải không bằng nhau.

3) Tương tự: $f'_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\sqrt{(\Delta y)^3}-0}{\Delta y}=0$

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Ví dụ

Cho $f(x,y) = \int_1^{\sqrt{x^2+y^2}} e^{t^2}\, dt$

Tìm $f'_x(x,y),\ f'_y(x,y).$

$$f'_x(x,y) = \left(\int_1^{\sqrt{x^2+y^2}} e^{t^2}\, dt \right)'_x = e^{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} \cdot \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x = e^{x^2+y^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Vì biểu thức đối xứng đối với x và y nên, đổi chỗ x và y cho nhau ta được đạo hàm riêng theo y.

$$\Rightarrow f'_y(x,y) = e^{x^2+y^2} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Ví dụ

Cho $f(x,y) = \begin{cases} e^{-1/(x^2+y^2)}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$

Tìm $f'_x(0,0)$.

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{-1/(\Delta x)^2}}{\Delta x}$$

Đặt $t = \dfrac{1}{\Delta x}$, suy ra $t \to \infty$

$\Rightarrow f'_x(0,0) = \lim\limits_{t \to \infty} t e^{-t^2} = 0$ (sử dụng qui tắc Lopital)

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Đạo hàm riêng cấp cao

Cho hàm hai biến $f = f(x, y)$. Đạo hàm riêng theo x và theo y là những hàm hai biến x và y. Ta có thể lấy đạo hàm riêng của hàm $f_x'(x, y)$:

$$\left(f_x'(x,y)\right)'_x = f''_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \qquad \left(f_x'(x,y)\right)'_y = f''_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

Tương tự, có thể lấy đạo hàm riêng của hàm $f_y'(x, y)$:

$$\left(f_y'(x,y)\right)'_x = f''_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \qquad \left(f_y'(x,y)\right)'_y = f''_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

Tiếp tục quá trình, ta có khái niệm các đạo hàm cấp cao.

Vì đạo hàm riêng là đạo hàm của hàm một biến nên việc tính đạo hàm riêng cấp cao cũng tương tự tính đạo hàm cấp cao của hàm một biến: dùng công thức Leibnitz và các đạo hàm cấp cao thông dụng.

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Chú ý

Nói chung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

nên khi lấy đạo hàm riêng cấp cao ta phải chú ý đến thứ tự lấy đạo hàm.

Định lý

Cho hàm $f(x,y)$ và các đạo hàm riêng $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ xác định trong lân cận của (x_0, y_0) và liên tục tại điểm này. Khi đó:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

Ví dụ

Chứng tỏ rằng hàm $f(x,y) = e^x \sin y$ thỏa phương trình Laplace:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

$$f'_x(x,y) = e^x \sin y \qquad f''_{xx} = e^x \sin y$$

$$f'_y(x,y) = e^x \cos y \qquad f''_{yy} = -e^x \sin y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^x \sin y - e^x \sin y = 0.$$

Hàm $f = f(x,y)$ thỏa phương trình Laplace được gọi là hàm điều hòa.

Hàm điều hòa đóng vai trò quan trọng trong lý thuyết fluid flow, heat conduction, electric potential,….

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Ví dụ

Chứng tỏ rằng hàm $u(x, t) = \sin(x - at)$ thỏa phương trình sóng:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u'_t(x,t) = -a\cos(x - at) \qquad u''_{tt} = -a^2 \sin(x - at)$$

$$u'_x(x,t) = \cos(x - at) \qquad u''_{xx} = -\sin(x - at)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -a^2 \sin(x - at)$$

Phương trình sóng mô tả sự chuyển động của các loại sóng: sóng biển, sóng âm thanh hay sóng chuyển động dọc theo một sợi dây rung.

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Ví dụ

Chứng tỏ rằng $u(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right)$ thỏa phương trình truyền nhiệt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u'_x(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/(4a^2t)} \cdot \left(\frac{-2x}{4a^2t)}\right) \Rightarrow u''_{xx}(x,t) = \frac{x^2 - 2a^2t}{8a^5t^2\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/(4a^2t)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/(4a^2t)}\right)'_t = \frac{x^2 - 2a^2t}{8a^3t^2\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/(4a^2t)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Ví dụ

Cho $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

Tìm $f''_{xx}(0,0)$.

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0$$

$$\Rightarrow h(x,y)=f'_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3-yx^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Ví dụ

Tìm đạo hàm riêng cấp hai:

$$f''_{xx}(0,0) = h'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(0+\Delta x, 0) - h(0,0)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow f''_{xx}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0$$

Tương tự tìm được $f''_{yy}(0,0) = 0$ và $\nexists f''_{xy}(0,0);\ \nexists f''_{yx}(0,0)$

Chú ý: Để tìm đạo hàm riêng cấp hai tại (x_0, y_0) ta phải tìm đạo hàm riêng cấp một $f'_x(x, y)$ tại mọi điểm (tức là tìm hàm $f'_x(x, y)$).

Hàm này có các đạo hàm riêng cấp 1 tại (0,0) nhưng không liên tục tại đây.

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Ví dụ

Cho hàm $u(x,y) = (2x+3y)\ln(x+2y)$. Tìm $\dfrac{\partial^{100} f}{\partial x^{100}}(1,2).$

Sử dụng công thức Leibnitz, coi $f(x,y)$ là hàm một biến theo x.

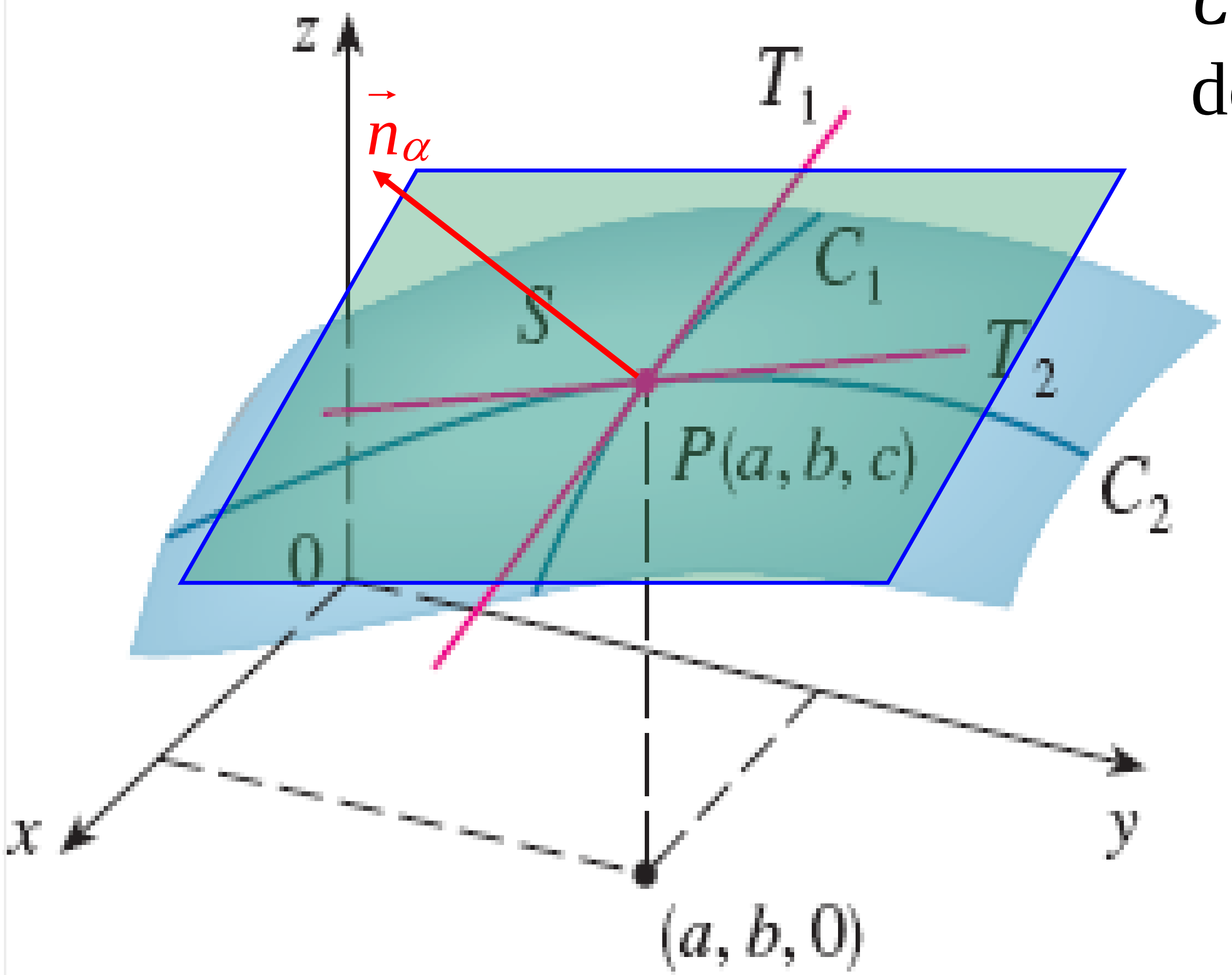
Đặt $u = f.g;\ f(x,y) = 2x+3y;\ g(x,y) = \ln(x+2y)$

$$\frac{\partial^{100} f}{\partial x^{100}}(x,y) = C_{100}^{0} f_x^{(0)} g_x^{(100)} + C_{100}^{1} f_x^{'} g_x^{(99)} + C_{100}^{2} f_x^{''} g_x^{(98)} + \dots$$

$$f_x^{'} = 2;\ f_{xx}^{''} = 0;\quad g_x^{(n)} = \left(\ln(x+2y)\right)_x^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(x+2y)^n}$$

$$\frac{\partial^{100} f}{\partial x^{100}}(x,y) = C_{100}^{0}(2x+3y)\cdot\frac{(-1)^{99}\cdot 99!}{(x+2y)^{100}} + C_{100}^{1}\, 2\cdot\frac{(-1)^{98}\cdot 98!}{(x+2y)^{99}} + 0$$

Cho f có các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục.



C_1 và C_2 là hai đường cong tạo nên do hai mặt $y = b$ và $x = a$ cắt S.

Điểm P nằm trên cả hai đường này. Giả sử T_1 và T_2 là hai tiếp tuyến với hai đường cong C_1 và C_2 tại P.

Mặt phẳng (α) chứa T_1 và T_2 gọi là mặt phẳng tiếp diện với mặt S tại P. Tiếp tuyến với mọi đường cong nằm trong S, qua P đều nằm trong (α).

$$\vec{u}_{T_1} = \left(1, 0, f'_x(a,b)\right), \vec{u}_{T_2} = \left(0, 1, f'_y(a,b)\right)$$

Phương trình mặt phẳng tiếp diện với mặt S tại $P(a,b,c)$:

$$z - c = f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)$$

Ví dụ

Tìm phương trình mặt phẳng tiếp diện với paraboloid elliptic: $z = 2x^2 + y^2$ tại điểm (1,1,3).

$$f'_x = 4x \Rightarrow f'_x(1,1) = 4.$$

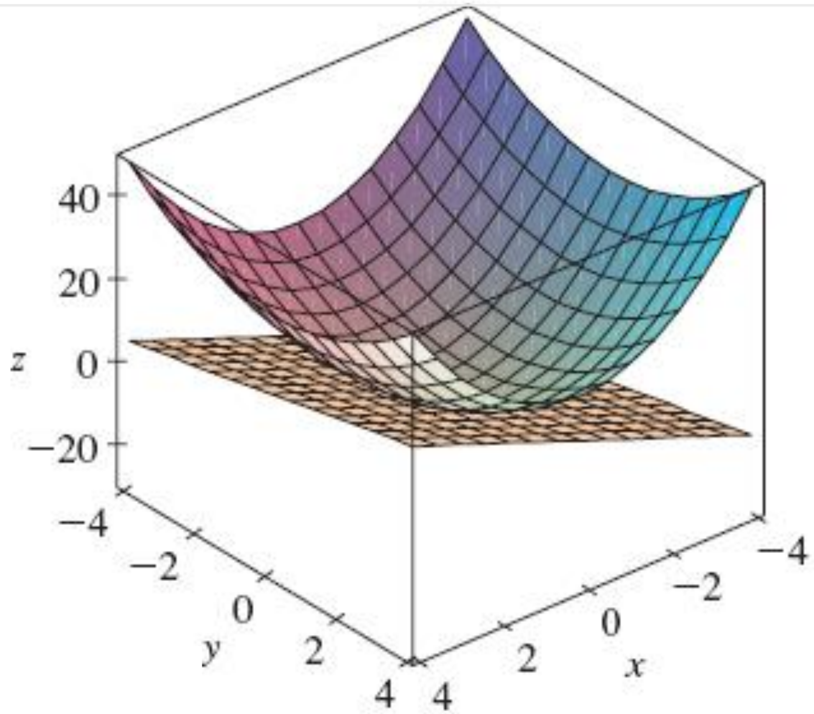
$$f'_y = 2y \Rightarrow f'_y(1,1) = 2.$$

Phương trình mặt phẳng tiếp diện:

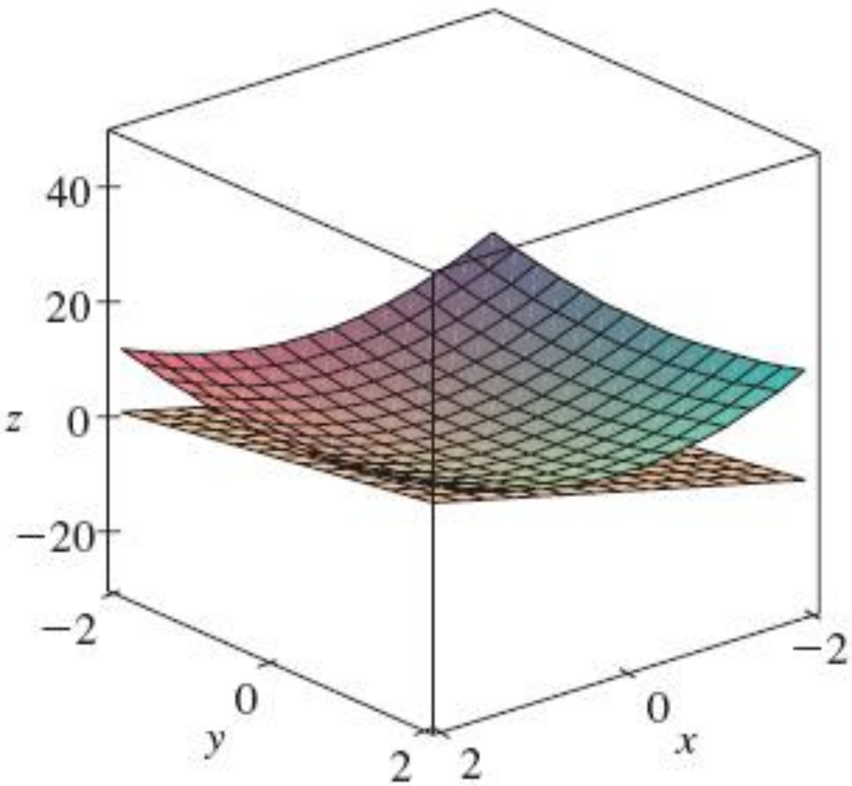
$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

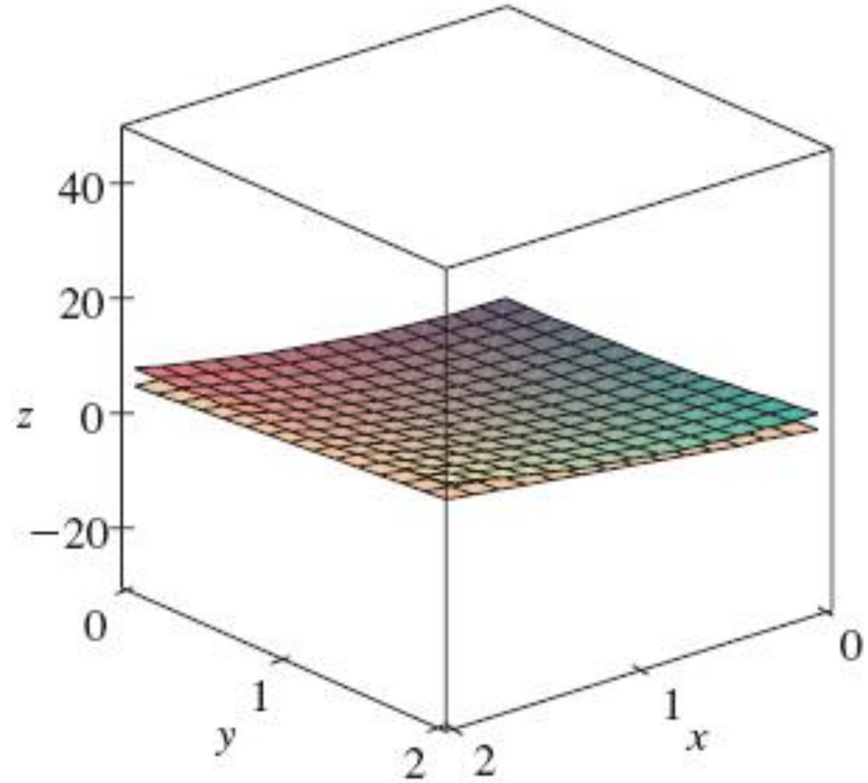
$$z - 3 = 4(x - 1) + 2(y - 1)$$

$$z = 4x + 2y - 3 = L(x, y)$$



Nếu tại điểm tiếp xúc ta phóng to lên thì mặt paraboloid gần trùng với mặt phẳng tiếp diện.





Hàm tuyến tính L(x,y) = 4x +2y – 3 là hàm xấp xỉ tốt cho $f = 2x^2 + y^2$ khi mà (x,y) gần với điểm (1,1).

$$f(x,y) \approx 4x + 2y - 3$$

$$(1.1, 0.95) \quad \Rightarrow f(1.1, 0.95) \approx 4(1.1) + 2(0.95) - 3 = 3.3$$

Gần bằng với giá trị thực: $f(1.1, 0.5) = 2(1.1)^2 + (0.95)^2 = 3.3225$

Nếu ta chọn điểm xa điểm (1,1) thì kết quả không còn đúng nữa.

$$(2,3) \qquad \Rightarrow f(2,3) \approx 4(2) + 2(3) - 3 = 11$$

Khác xa với giá trị thực: $f(2,3) = 2(2)^2 + (3)^2 = 17$

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Định nghĩa

Cho hàm $f = f(x, y)$ và (x_0, y_0) là điểm trong của miền xác định.
Hàm f được gọi là khả vi tại (x_0, y_0) nếu số gia toàn phần:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

có thể biểu diễn được ở dạng: $\Delta f(x_0, y_0) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y)$

trong đó A, B là các hằng số;

$$\varepsilon(\Delta x, \Delta y) = o(\rho), \rho \to 0 \;;\; \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Đại lượng $df(x_0, y_0) = A.\Delta x + B.\Delta y$ gọi là vi phân của hàm $f = f(x, y)$ tại (x_0, y_0).

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Định lý

Định lý (điều kiện cần khả vi)

Nếu hàm $f = f(x,y)$ khả vi tại (x_0, y_0), thì:

1. f liên tục tại (x_0, y_0)
2. f có các đạo hàm riêng cấp một tại (x_0, y_0) và

$$A = f'_x(x_0, y_0), B = f'_y(x_0, y_0)$$

Định lý (điều kiện đủ)

Nếu hàm $f(x,y)$ xác định trong một lân cận của (x_0,y_0) và có các đạo hàm riêng f'_x, f'_y liên tục tại (x_0,y_0), thì hàm $f(x,y)$ khả vi tại (x_0, y_0).

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Định lý

Định lý (điều kiện cần và đủ)

Hàm $f(x,y)$ khả vi tại (x_0,y_0) khi và chỉ khi $\Delta f(x_0,y_0)$ biểu diễn được dưới dạng:

$$\Delta f(x_0,y_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) =$$

$$= f_x'(x_0,y_0)\cdot\Delta x + f_y'(x_0,y_0)\cdot\Delta y + \varepsilon(\Delta x,\Delta y)$$

$$\varepsilon(\Delta x,\Delta y) = o(\rho), \rho\to 0\,;\ \rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Ghi nhớ

Vi phân cấp 1 của $f(x,y)$ tại (x_0,y_0):

$$df(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)dx + f'_y(x_0,y_0)dy$$

Tính chất của vi phân

Cho $f(x,y)$ và $g(x,y)$ khả vi tại (x_0,y_0). Khi đó:

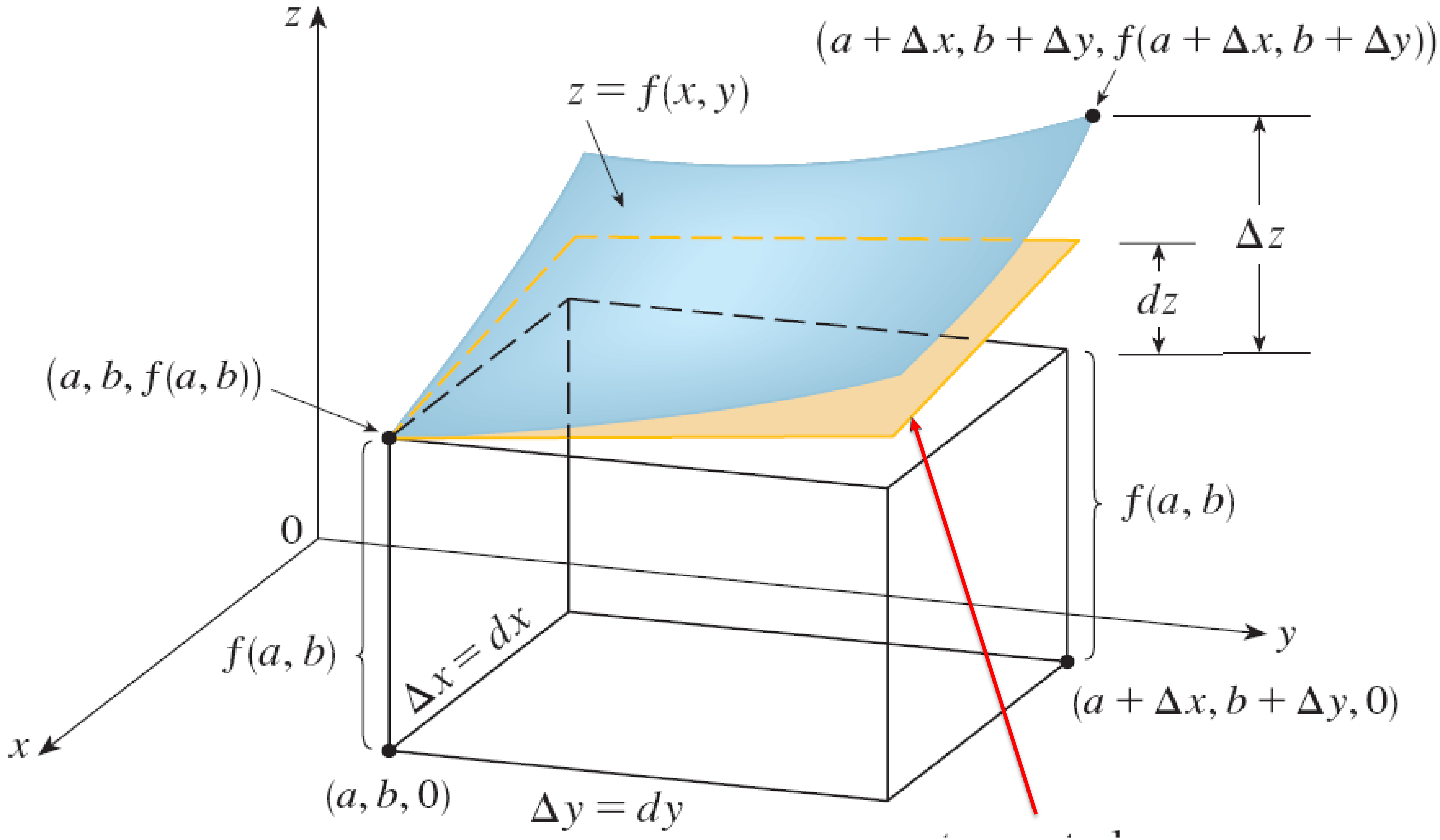
1) $d(\alpha f) = \alpha df$

2) $d(f+g) = df + dg$

3) $d(fg) = gdf + fdg$

4) $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}$

Department of Mathematics
HaNoi National University



$$z - f(a,b) = f'_x(x-a) + f'_y(y-b)$$

Mặt tiếp diện

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Ghi nhớ

Dùng vi phân cấp 1 để tính gần đúng

Cho hàm $f(x,y)$ khả vi tại (x_0, y_0). Khi đó ta có:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + \alpha.\Delta x + \beta.\Delta y$$

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + \alpha.\Delta x + \beta.\Delta y$$

$$\boxed{f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y \quad (1)}$$

Công thức (1) dùng để tính gần đúng giá trị của f tại (x,y).

Công thức (1) có thể viết lại: $f(x,y) - f(x_0,y_0) \approx f'_x(x_0,y_0)dx + f'_y(x_0,y_0)dy$

hay ta có: $\Delta f \approx df$.

Ghi nhớ

Qui tắc dùng vi phân cấp 1 để tính gần đúng

Để tính gần đúng giá trị của hàm f tại điểm cho trước (x, y). Ta thực hiện:

1. Xác định hàm f, chọn một điểm (x_0, y_0) gần với điểm (x,y) sao cho $\Delta x, \Delta y$ nhỏ.
2. Tính giá trị: $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0, f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$.
3. Sử dụng công thức:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y \quad (1)$$

Chú ý: Nếu điểm (x_0, y_0) xa với điểm (x, y) thì giá trị tính được không phù hợp.

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Ví dụ

Chứng tỏ $f = xe^{xy}$ khả vi tại (1,0). Sử dụng kết quả này để tính gần đúng giá trị $f(1.1, -0.1)$

$$f'_x(x,y) = e^{xy} + xye^{xy};\ f'_y(x,y) = x^2 e^{xy}$$

Các đạo hàm riêng cấp một liên tục trên R^2, nên liên tục trong lân cận của (1,0). Theo định lý (đk đủ khả vi): $f = xe^{xy}$ khả vi tại (1,0).

Chọn $x_0 = 1; y_0 = 0 \Rightarrow \Delta x = x - x_0 = 1.1 - 1.0 = 0.1$

$$\Delta y = y - y_0 = -0.1 - 0 = -0.1$$

$$f(1.1,-0.1) \approx f(1,0) + f'_x(1,0)\Delta x + f'_y(1,0)\Delta y = 1 + 1(0.1) + 1(-0.1) = 1$$

So sánh với giá trị thực: $f(1.1,-0.1) = (1.1)e^{-0.11} \approx 0.98542$

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Ví dụ

Cho $f(x,y) = x^2 + 3xy - y^2$

1) Tìm $df(x,y)$

2) Khi x thay đổi từ 2 đến 2.05, y thay đổi từ 3 đến 2.96, so sánh df và Δf.

1) $df(x,y) = f'_x dx + f'_y dy \Leftrightarrow df(x,y) = (2x+3y)dx + (3x-2y)dy$

2) Cho $x_0 = 2$, $y_0 = 3$ $\Rightarrow \Delta x = 0.05, \Delta y = -0.04, x = 2.05, y = 2.96.$

$$df(2,3) = (2.2+3.3)0.05 + (3.2-2.3)(-0.04) = 0.65$$

$$\Delta f(2,3) = f(2.05, 2.96) - f(2,3)$$

$$\Delta f(2,3) = \left[2.05)^2 + 3\cdot(2.5)\cdot(2.96) - (2.96)^2\right] - \left[2^2 + 3\cdot 2\cdot 3 - 3^2\right] = 0.6449$$

Ta thấy hai giá trị gần giống nhau nhưng df tính dễ hơn.

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Định nghĩa

Vi phân cấp cao

Cho hàm $f = f(x,y)$ khi đó $df(x,y)$ cũng là một hàm hai biến x,y.
Vi phân (nếu có) của vi phân cấp 1 được gọi là vi phân cấp 2.

$$d^2 f(x,y) = d(df(x,y)) = d(f'_x dx + f'_y dy) = d(f'_x dx) + d(f'_y dy)$$

$$= dx d(f'_x) + dy d(f'_y) = dx\left[(f'_x)'_x dx + (f'_x)'_y dy\right] + dy\left[(f'_y)'_x dx + (f'_y)'_y dy\right]$$

$$= f''_{xx} dx dx + f''_{xy} dx dy + f''_{yx} dx dy + f''_{yy} dy dy$$

$$\Leftrightarrow d^2 f(x,y) = f''_{xx} dx^2 + 2 f''_{xy} dx dy + f''_{yy} dy^2$$

Một cách hình thức, có công thức tính vi phân cấp n. Sử dụng nhị thức Newton:

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n f$$

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Ví dụ

Công thức vi phân cấp 3 của hàm $f = f(x,y)$:

$$d^3 f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 f$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^3 f + 3\left(\frac{\partial}{\partial x}dx\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial y}dy\right) f + 3\left(\frac{\partial}{\partial x}dx\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f + \left(\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 f$$

$$d^3 f = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3$$

Công thức vi phân cấp 4: $d^4 f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^4 f$

$$= C_4^0\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}dx^4 + C_4^1\frac{\partial^4 f}{\partial x^3\partial y}dx^3dy + C_4^2\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}dx^2dy^2 + C_4^3\frac{\partial^4 f}{\partial x\partial y^3}dxdy^3 + C_4^4\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}dy^4$$

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Ví dụ

Tìm vi phân cấp hai $d^2 f(1,1)$, biết $f(x,y) = e^{xy}$

$$f'_x = ye^{xy} \Rightarrow f''_{xx} = y^2 e^{xy},\ f''_{xy} = e^{xy}(1+xy)$$

$$f'_y = xe^{xy} \Rightarrow f''_{yy} = x^2 e^{xy}.$$

Vi phân cấp hai:

$$d^2 f = f''_{xx} dx^2 + 2 f''_{xy} dxdy + f''_{yy} dy^2$$

$$d^2 f(x,y) = e^{xy}\left(y^2 dx^2 + 2(1+xy)dxdy + x^2 dy^2\right)$$

$$d^2 f(1,1) = e\left(dx^2 + 4dxdy + dy^2\right)$$

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Ví dụ

Tìm vi phân cấp hai $d^2 f(1,1)$, biết $f(x,y) = {}^{y}/_{x}$

$$f'_x = \frac{-y}{x^2} \Rightarrow f''_{xx} = \frac{2y}{x^3},\ f''_{xy} = \frac{-1}{x^2}$$

$$f'_y = \frac{1}{x} \Rightarrow f''_{yy} = 0.$$

Vi phân cấp hai:

$$d^2 f = f''_{xx}dx^2 + 2 f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2$$

$$d^2 f(x,y) = \frac{2y}{x^3}dx^2 - \frac{2}{x^2}dxdy + 0dy^2$$

$$d^2 f(1,1) = 2dx^2 - 2dxdy$$

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Ví dụ

Dùng vi phân cấp 1, tính gần đúng:

$$A = \sqrt{(1.03)^2 + (1.98)^3}$$

Chọn hàm $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^3}$.

Chọn: $x_0 = 1, y_0 = 2$.

$\Rightarrow \Delta x = x - x_0 = 1.03 - 1 = 0.03$; $f'_x(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^3}}$; $f'_y(x, y) = \dfrac{3y^2}{2\sqrt{x^2 + y^3}}$

$\Delta y = y - y_0 = 1.98 - 2 = -0.02$

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$$

$$f(1.03, 1.98) \approx f(1,2) + f'_x(1,2).(0.03) + f'_y(1,2)(-0.02)$$

$$A = \sqrt{(1.03)^2 + (1.98)^3} = f(1.03, 1.98) \approx 3 + \frac{1}{3}(0.03) + \frac{3.4}{2.3}(-0.02) = 2.97$$

2. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm hợp

Cách tính

Hàm một biến

$$\begin{cases} f = f(u) \\ u = u(x) \end{cases} \Rightarrow f'(x) = f'(u)\cdot u'(x)$$

Hàm hai biến: Trường hợp 1

$$\begin{cases} f = f(u) \\ u = u(x,y) \end{cases} \Rightarrow f'_x = f'(u)\cdot u'_x\ ;\ f'_y = f'(u)\cdot u'_y$$

Trường hợp 2

$$\begin{cases} f = f(u,v) \\ u = u(x) \\ v = v(x) \end{cases} \Rightarrow f'(x) = f'_u\cdot u'(x) + f'_v\cdot v'(x)$$

2. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm hợp

Ví dụ

Tìm các đạo hàm riêng của hàm hợp $f = f(u) = e^{u^2}, u = \sin(xy)$

$$f = f(x,y) = e^{\sin^2(xy)}$$

$$f'_x = f'(u)\cdot u'_x = 2ue^{u^2}.y\cos(xy) = 2\sin(xy)e^{\sin^2(xy)}.y\cos(xy)$$

$$f'_y = f'(u)\cdot u'_y = 2ue^{u^2}.x\cos(xy) = 2\sin(xy)e^{\sin^2(xy)}.x\cos(xy)$$

Tìm f'_x , biết $f = f(u,v) = u^3v + \ln(uv), u = e^x, v = \sin^2 x$

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = f'_u\cdot u'(x) + f'_v\cdot v'(x) = \left(3u^2v + \frac{1}{u}\right)e^x + \left(u^3 + \frac{1}{v}\right)\sin(2x)$$

Cách tính

Trường hợp 3 (Quy tắc dây chuyền)

$$\begin{cases} f = f(u,v) \\ u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} f'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x \\ f'_y = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y \end{array}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & & f = f(u,v) \arrow[dll] \arrow[drr] & & & \\
 & u = u(x,y) \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & v = v(x,y) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
x & & y & & x & & y
\end{tikzcd}$$

f'_x

f'_y

2. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm hợp

Ví dụ

Tìm f'_x, f'_y của hàm hợp $f = f(u,v) = e^{uv}, u(x,y) = x^2 + y^2, v(x,y) = xy$

$$f = f(x,y) = e^{(x^2+y^2)xy}$$

$$f'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x = ve^{uv}.2x + ue^{uv}.y$$

$$f'_x = xye^{(x^2+y^2)xy}.2x + (x^2+y^2)e^{(x^2+y^2)xy}.y$$

$$f'_y = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y = ve^{uv}.2y + ue^{uv}.x$$

$$f'_y = xye^{(x^2+y^2)xy}.2y + (x^2+y^2)e^{(x^2+y^2)xy}.x$$

2. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm hợp

Cách tính

Trường hợp 4

$$\begin{cases} f = f(x,y) \\ y = y(x) \end{cases}$$

$f = f(x,y)$ là một hàm hai biến theo x và y. Khi đó ta có khái niệm đạo hàm riêng theo x:

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}$$

Thay $y = y(x)$ vào ta được hàm một biến theo x:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$$

Trong trường hợp này vừa tồn tại đạo hàm df/dx của f theo x như là đạo hàm của hàm một biến x, vừa tồn tại đạo hàm riêng $\partial f/\partial x$ của f theo x.

2. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm hợp

Ví dụ

Tìm $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{df}{dx}$ của hàm $f = f(x,y) = e^{xy} + x^2 y,\ y = y(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(e^{xy} + x^2 y\right)'_x = ye^{xy} + 2xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(e^{xy} + x^2 y\right)'_y = xe^{xy} + x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = \left(\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = ye^{xy} + 2xy + (xe^{xy} + x^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Đạo hàm cấp hai của hàm hợp

$$\begin{cases} f = f(u,v) \\ u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases} \qquad f'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x \qquad f''_{xx} = \left(f'_x\right)'_x = \left(f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x\right)'_x$$

f'_u là hàm hợp hai biến u, v

$$= \left(f'_u \cdot u'_x\right)'_x + \left(f'_v \cdot v'_x\right)'_x = \left(f'_u\right)'_x \cdot u'_x + f'_u \left(u'_x\right)'_x + \left(f'_v\right)'_x \cdot v'_x + f'_v \left(v'_x\right)'_x$$

$$= \left[\left(f'_u\right)'_u \cdot u'_x + \left(f'_u\right)'_v \cdot v'_x\right] \cdot u'_x + f'_u \cdot u''_{xx} + \left[\left(f'_v\right)'_u \cdot u'_x + \left(f'_v\right)'_v \cdot v'_x\right] \cdot v'_x + f'_v \cdot v''_{xx}$$

$$= f''_{uu} \cdot (u'_x)^2 + f''_{uv} \cdot v'_x \cdot u'_x + f'_u \cdot u''_{xx} + f''_{vu} \cdot v'_x \cdot u'_x + f''_{vv} \cdot (v'_x)^2 + f'_v \cdot v''_{xx}$$

2. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm hợp

Ví dụ

Tìm f''_{xy} của hàm hợp $f = f(u,v) = u^2 + 2v, u(x,y) = xy^2, v(x,y) = x + 3y$

$$f'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x = 2u.y^2 + 2.1 \Rightarrow f''_{xy} = \left(f'_x\right)'_y = \left(2u.y^2 + 2\right)'_y$$

$$f''_{xy} = \left(2u.y^2\right)'_y = 2u'_y.y^2 + 2u.2y$$

Tìm f''_{xy} của hàm hợp $f = f(u,v) = e^{uv}, u(x,y) = xy + y^2, v(x,y) = 2x + y$

$$f'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x = ve^{uv}.y + ue^{uv}.2 \Rightarrow f''_{xy} = \left(ve^{uv}.y + ue^{uv}.2\right)'_y$$

$$= e^{uv}.y + v\left(e^{uv}\right)'_y.y + ve^{uv} + 2(x+2y)e^{uv} + 2u\left(e^{uv}\right)'_y$$

$$\left(e^{uv}\right)'_y = \left(e^{uv}\right)'_u.u'_y + \left(e^{uv}\right)'_v.v'_y = ve^{uv}.(x+2y) + ue^{uv}.1$$

2. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm hợp

Đạo hàm cấp hai của hàm hợp

$$\begin{cases} f = f(u) \\ u = u(x,y) \end{cases} \qquad f'_x = f'(u)\cdot u'_x$$

$f'(u)$ là hàm hợp một biến u.

$$f''_{xx} = (f'_x)'_x = (f'(u)\cdot u'_x)'_x = (f'(u))'_x \cdot u'_x + f'(u)\cdot (u'_x)'_x$$

$$= \left[(f'(u))'(u)\cdot u'_x \right]\cdot u'_x + f'(u)\cdot u''_{xx} = f''(u)\cdot (u'_x)^2 + f'(u)\cdot u''_{xx}$$

$$f''_{xy} = (f'_x)'_y = (f'(u)\cdot u'_x)'_y = (f'(u))'_y \cdot u'_x + f'(u)\cdot (u'_x)'_y$$

$$= \left[(f'(u))'(u)\cdot u'_y \right]\cdot u'_x + f'(u)\cdot u''_{xy} = f''(u)\cdot u'_x \cdot u'_y + f'(u)\cdot u''_{xy}$$

2. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm hợp

Ví dụ

Tìm f''_{xy} của hàm hợp $f = f(u) = \ln u;\ u(x,y) = xy^2 + e^y$

$$f'_x = f'(u)\cdot u'_x = \frac{1}{u}.y^2 \Rightarrow f''_{xy} = \left(f'_x\right)'_y = \left(\frac{1}{u}.y^2\right)'_y$$

$$f''_{xy} = \left(\frac{1}{u}\right)'_y.y^2 + \frac{1}{u}.2y = -\frac{1}{u^2}(2xy + e^y).y^2 + \frac{1}{u}.2y$$

Tìm f''_{xy} của hàm hợp $f = f(x^2 + e^y)$

Đặt $u(x,y) = x^2 + e^y \Rightarrow f'_x = f'(u)\cdot u'_x = f'(u).2x$

$$f''_{xy} = \left(f'(u).2x\right)'_y = 2x.f''(u).e^y$$

2. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm hợp

Vi phân cấp một của hàm hợp

$$\begin{cases} f = f(u,v) \\ u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$$

u, v là hai biến hàm, x và y là hai biến độc lập.

Khi thay $u(x,y), v(x,y)$ vào ta được hàm f theo hai biến x, y độc lập.

$$df = f'_x dx + f'_y \cdot dy = \left(f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x \right) dx + \left(f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y \right) dy$$

$$= f'_u \left(u'_x dx + u'_y dy \right) + f'_v \left(v'_x dx + v'_y dy \right) = f'_u du + f'_v dv$$

$$df = f'_u du + f'_v dv \quad (1)$$

$$df = f'_x dx + f'_y dy \quad (2)$$

Tùy theo bài toán mà ta dùng công thức (1) hoặc (2). Thường dùng công thức số (1)

Hai công thức giống nhau. Trong (1) là biến hàm, trong (2) là biến độc lập. Nên ta nói: vi phân cấp một có tính bất biến.

2. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm hợp

Ví dụ

Tìm df của hàm hợp $f = f(u,v) = e^{uv}, u(x,y) = xy^2; v(x,y) = 2x + 3y$

$$df = f'_u du + f'_v dv \qquad du = y^2 dx + 2xydy \qquad dv = 2dx + 3dy$$

$$df = ve^{uv}(y^2 dx + 2xydy) + ue^{uv}(2dx + 3dy) = e^{uv}(vy^2 + 2u)dx + e^{uv}(2vxy + 3u)dy$$

Tìm df của hàm hợp $f = f(u) = \frac{1}{u}, u(x,y) = \ln(x + 2y)$

$$df = f'(u)du = -\frac{1}{u^2}\left(u'_x dx + u'_y dy\right) = -\frac{1}{u^2}\left(\frac{1}{x+2y}dx + \frac{2}{x+2y}dy\right)$$

Chú ý: Trong hai ví dụ này ta đều có thể dùng $df = f'_x dx + f'_y dy$

nhưng việc tính toán phức tạp hơn.

2. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm hợp

Ví dụ

Tìm df của hàm hợp $f = f(x^2+2y, e^{xy})$

Đặt $u = x^2+2y; v = e^{xy}$

Ta có $f = f(u,v)$; $u(x,y) = x^2+2y, v(x,y) = e^{xy}$

$du = 2xdx + 2dy \qquad dv = ye^{xy}dx + xe^{xy}dy$

$$df = f'_u du + f'_v dv$$

$$df = f'_u(2xdx+2dy) + f'_v(ye^{xy}dx + xe^{xy}dy)$$

Chú ý: Có thể dùng $df = f'_x dx + f'_y dy$

2. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm hợp

Vi phân cấp hai của hàm hợp

$$\begin{cases} f = f(u,v) \\ u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases} \qquad d^2 f = d(df) = d(f'_u du + f'_v dv)$$

$$= d\left(f'_u\, du \right) + d\left(f'_v\, dv \right)$$

Chú ý ở đây u, v là biến hàm nên *du*, *dv* không là hằng số.

$$d^2 f = d\left(f'_u \right) \cdot du + f'_u \cdot d(du) + d\left(f'_v \right) \cdot dv + f'_v \cdot d(dv)$$

f'_u, f'_v là những hàm hợp hai biến

$$d\left(f'_u \right) = \left(f'_u \right)'_u du + \left(f'_u \right)'_v dv \qquad d\left(f'_v \right) = \left(f'_v \right)'_u du + \left(f'_v \right)'_v dv$$

$$d\left(du\right) = d^2u, d\left(dv\right) = d^2v$$

Vi phân cấp hai không còn tính bất biến.

2. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm hợp

Vi phân cấp hai của hàm hợp

$$\begin{cases} f = f(u) \\ u = u(x,y) \end{cases} \qquad d^2 f = d(df) = d(f'(u)du)$$

$$= d\left(f'(u)\right) \cdot du + f'(u) \cdot d\left(du\right)$$

$$d^2 f = \left(f'(u)\right)'(u) \cdot du \cdot du + f'(u) d^2 u = f''(u) \cdot du^2 + f'(u) d^2 u$$

Tóm lại:

Để tìm đạo hàm riêng (vi phân) cấp hai của hàm hợp ta lấy đạo hàm (vi phân) của đạo hàm (vi phân) cấp một và phải biết phân biệt là hàm hợp mấy biến.

2. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm hợp

Ví dụ

Tìm $d^2 f$ của hàm hợp:

$$f = f(u,v) = 2u + v^2; u(x,y) = xy + 2x; v(x,y) = x^2 + y^2$$

$$df = f'_u du + f'_v dv = 2[(y+2)dx + xdy] + 2v[2xdx + 2ydy]$$

$$d^2 f = d(df) = d[2[(y+2)dx + xdy] + 2v[2xdx + 2ydy]]$$

$$d^2 f = d[2((y+2)dx + xdy)] + d[2v(2xdx + 2ydy)]$$

$$d^2 f = 2d((y+2)dx) + 2d(xdy) + 2(2xdx + 2ydy)dv + 2vd(2xdx + 2ydy)$$

$\bullet d((y+2)dx) = dxd(y+2) = dxdy$ $\bullet d(xdy) = dxdy$

$\bullet d(2xdx + 2ydy) = d(2xdx) + d(2ydy) = 2dx^2 + 2dy^2$

Ví dụ

Tìm $d^2 f$ của hàm hợp $f = f(x^2 + 3y)$

Đặt $u = x^2 + 3y$

Ta có $f = f(u)$; $u(x, y) = x^2 + 3y$

$$df = f'(u)du = f'(u)(2xdx + 3dy)$$

$$d^2 f = d(df) = d(f'(u)(2xdx + 3dy))$$

$$d^2 f = (2xdx + 3dy) \cdot d(f'(u)) + f'(u) \cdot d(2xdx + 3dy)$$

•$d(f'(u)) = f''(u)du = f''(u) \cdot (2xdx + 3dy)$

•$d(2xdx + 3dy) = d(2xdx) + d(3dy) = 2dxdx + 0 = 2dx^2$

3. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm ẩn

Định nghĩa

Giả sử phương trình $F(x,y)=0$ xác định một hàm ẩn $y=y(x)$

sao cho $F(x,y(x))=0$ với mọi x thuộc miền xác định.

Sử dụng công thức tính đạo hàm của hàm hợp:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0 \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}=-\frac{F'_x}{F'_y}}$$

Ví dụ

Tìm $y'(x)$ biết $y = y(x)$ là hàm ẩn xác định từ phương trình:

$$xy + x^2 + y^2 = e^{xy}$$

Cách 1. Đạo hàm hai vế phương trình, chú ý *y* là hàm theo *x*.

$$y + x \cdot y' + 2x + 2y \cdot y' = e^{xy}(y + x \cdot y') \Rightarrow y'(x) = \frac{ye^{xy} - 2x - y}{x + 2y - xe^{xy}}$$

Cách 2. Sử dụng công thức. Chú ý ở đây sử dụng đạo hàm riêng!

$$F(x,y) = xy + x^2 + y^2 - e^{xy} \equiv 0$$

$$F'_x = y + 2x - ye^{xy}; F'_y = x + 2y - xe^{xy}$$

$$\Rightarrow y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{y + 2x - ye^{xy}}{x + 2y - xe^{xy}}$$

Chú ý: Cần phân biệt đạo hàm theo x ở hai cách. Cách 1, đạo hàm hai vế coi y là hàm theo x. Cách 2, đạo hàm riêng của F theo x, coi y là hằng.

3. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm ẩn

Định nghĩa

Giả sử phương trình $F(x,y,z)=0$ xác định một hàm ẩn $z=z(x,y)$

sao cho $F(x,y,z(x,y))=0$ với mọi (x,y) thuộc miền xác định của z.

Sử dụng công thức tính đạo hàm của hàm hợp, chú ý x, y là hai biến độc lập, z là hàm theo x, y.

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0 \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}=-\frac{F'_x}{F'_z}}$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}=-\frac{F'_y}{F'_z}}$$

3. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm ẩn

Ví dụ

Tìm z'_x, biết $z = z(x, y)$ là hàm ẩn xác định từ phương trình:

$$x + y - z = e^{z-x-y}$$

Cách 1. Đạo hàm hai vế phương trình theo x, chú ý y là hằng, z là hàm theo *x*.

$$1 - z'_x = e^{z-x-y}(z'_x - 1) \Rightarrow z'_x = \frac{1+e^{z-x-y}}{1+e^{z-x-y}} = 1.$$

Cách 2. Sử dụng công thức. Chú ý ở đây x là biến, y và z là hằng!

$$F(x,y,z) = x + y - z - e^{z-x-y} \equiv 0$$

$$F'_x = 1 + e^{z-x-y};\ F'_z = -1 - e^{z-x-y}$$

$$\Rightarrow z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{1+e^{z-x-y}}{-1-e^{z-x-y}} = 1.$$

Tương tự tìm đạo hàm riêng của z theo y.

3. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm ẩn

Định lý (về hàm ẩn)

Cho hàm $F(x,y)$ thỏa các điều kiện sau:

1) Xác định, liên tục trong hình tròn mở $B(M_0,r)$ tâm $M_0(x_0,y_0)$ bán kính r

2) $F((x_0,y_0))=0$ 3) $\dfrac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}\neq 0$

4) Tồn tại trong $B(M_0,r)$ các đạo hàm riêng liên tục $\dfrac{\partial F}{\partial x},\dfrac{\partial F}{\partial y}$

Khi đó $F(x,y)=0$ xác định trong lân cận U của x_0 một hàm $y=y(x)$ thỏa mãn:

$y_0=y(x_0)$ và $F(x,y(x))=0$ trong U. Ngoài ra $y=y(x)$ khả vi, liên tục trong U

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}=-\frac{F'_x}{F'_y}$$

3. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm ẩn

Chú ý

Đạo hàm riêng cấp hai của hàm ẩn: $z = z(x,y)$

1) Tìm đạo hàm riêng cấp 1 (bằng 1 trong hai cách)

2) $z''_{xy} = (z'_x)'_y = \left(-\dfrac{F'_x}{F'_z}\right)'_y$. Chú ý: x là hằng, y là biến, z là hàm theo y.

Vi phân cấp 1 của hàm ẩn $z = z(x,y)$: $dz = z'_x dx + z'_y dy$

Vi phân cấp 2 của hàm ẩn $z = z(x,y)$

$$d^2 z = z''_{xx} dx^2 + 2z''_{xy} dxdy + z''_{yy} dy^2$$

Chú ý. Vì $z = z(x,y)$ là hàm hai biến độc lập x và y. Nên vi phân cấp một, cấp hai hoặc cấp cao của hàm ẩn cũng giống như vi phân cấp 1 và cấp hai của hàm $f = f(x,y)$ trong phần 1.

3. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm ẩn

Ví dụ

Tìm $dz(1,1)$, biết $z = z(x,y)$ là hàm ẩn xác định từ phương trình:

$$x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz + 2y - 3 = 0, \quad z(1,1) = -2.$$

$$F(x,y,z) = x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz + 2y - 3 \equiv 0$$

$$F'_x = 3x^2 - 3yz \qquad F'_y = 6y^2 - 3xz + 2 \qquad F'_z = 3z^2 - 3xy$$

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{3x^2 - 3yz}{3z^2 - 3xy} = \frac{yz - x^2}{z^2 - xy} \quad \Rightarrow z'_x(1,1) = \frac{1.(-2) - 1.1}{4 - 1} = -1$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{6y^2 - 3xz + 2}{3z^2 - 3xy} \quad \Rightarrow z'_y(1,1) = -\frac{14}{9}$$

Vi phân cấp 1: $dz = z'_x dx + z'_y dy = -dx - \frac{14}{9} dy$

3. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm ẩn

Ví dụ

Tìm z''_{xy} , biết $z = z(x, y)$ là hàm ẩn xác định từ phương trình:

$$x^2 + y^2 + z^2 = e^{x+y+z}$$

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - e^{x+y+z} \equiv 0$$

$$F'_x = 2x - e^{x+y+z} = 2x - x^2 - y^2 - z^2; \quad F'_z = 2z - e^{x+y+z} = 2z - x^2 - y^2 - z^2.$$

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{2x - x^2 - y^2 - z^2}{x^2 + y^2 + z^2 - 2z}$$

Đạo hàm theo y, coi x là hằng, y là biến, z là hàm theo y!

$$z''_{xy} = \left(\frac{2x - x^2 - y^2 - z^2}{x^2 + y^2 + z^2 - 2z}\right)'_y$$

$$= \frac{(-2y - 2z \cdot z'_y) \cdot \mathrm{M} - \mathrm{T} \cdot (2y + 2z \cdot z'_y - 2 \cdot z'_y)}{\left(x^2 + y^2 + z^2 - 2z\right)^2}$$

3. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm ẩn

Ví dụ

Tìm $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, biết $z = z(x,y)$ là hàm ẩn xác định từ phương trình:

$$xyz + x^2 + y^2 = 2z - 3$$

$$F(x,y,z) = xyz + x^2 + y^2 - 2z + 3 \equiv 0$$

$$F'_x = yz + 2x \qquad F'_y = xz + 2y \qquad F'_z = xy - 2$$

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{yz+2x}{xy-2} = \frac{yz+2x}{2-xy}$$

Coi x là hằng, y là biến, z là hàm theo y

$$z''_{xy} = \left(-\frac{F'_x}{F'_z}\right)'_y = \left(\frac{yz+2x}{2-xy}\right)'_y$$

$$= \frac{(z + yz'_y)\cdot(2-xy) - (yz+2x)\cdot(-x)}{(2-xy)^2}$$