Bài tập Ch5 Bài 1, 2, 3. Luật số lớn và Định lý giới hạn Trung tâm

Phần 5. 1 Tổng các biến ngẫu nhiên

1. Giả sử W = X + Y + Z, trong đó X, Y, Z là các biến ngẫu nhiên kỳ vọng 0 và phương sai 1 với COV (X, Y) = 1/4 và COV = (X, Z) = 0, COV = (Y, Z) = ½.

a. Tìm kỳ vọng và phương sai của W

b. Làm lại phần a, giả thiết X, Y, Z là các biến ngẫu nhiên không tương quan.

2. Giả sử $X_1, \ldots, X_n$ là các biến ngẫu nhiên có cùng kỳ vọng μ và với hàm hiệp phương sai :

$$COV(X_i, X_j) = \begin{cases} \sigma^2 & if i = j \\ \rho\sigma^2 & if\ |i-j| = 1, \\ 0 & otherwise, \end{cases}$$

trong đó |ρ| < 1. Tìm kỳ vọng và phương sai của $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

3. Giả sử $X_1, \ldots, X_n$ là các biến ngẫu nhiên cùng kỳ vọng μ và với hàm hiệp phương sai :

$COV(X_i, X_j) = \sigma^2\rho^{|i-j|}$,

trong đó |ρ| < 1. Tìm kỳ vọng và phương sai của $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

4. Giả sử X và Y là các biến ngẫu nhiên Cauchy với tham số α và β tương ứng. Giả sử Z = X + Y

a. Tìm hàm đặc trưng của Z.

b. Tìm hàm mật độ xác suất của Z từ hàm đặc trưng tìm thấy trong phần a.

5. Giả sử $S_k = X_1 + \ldots + X_k$ trong đó các X_i là các biến ngẫu nhiên độc lập, với X_i là biến ngẫu nhiên X^2 với n_i bậc tự do. Chứng minh rằng S_k là một biến ngẫu nhiên X^2 với $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ bậc tự do.

6. Giả sử $X_1^2 + \ldots + X_n^2$ trong đó các X_i là các biến ngẫu nhiên Gauss phương sai 1 kỳ vọng không độc lập cùng phân phối.

a. Chứng minh rằng S_n là một biến ngẫu nhiên X^2 với n bậc tự do. Gợi ý: Xem ví dụ 3.26.

b. Dùng các phương pháp của phần 3.5 tìm hàm mật độ xác suất của

$$T_n = \sqrt{X_1^2 + \ldots + X_n^2}.$$

c.Chứng tỏ rằng T_2 là biến ngẫu nhiên Rayleigh.

d.Tìm hàm mật độ xác suất cho T_3. Biến ngẫu nhiên T_3 được dùng để mô hình hoá tốc độ các phân tử trong chất khí. T_3 được nói là có phân phối Maxwell.

7. Giả sử X và Y là các biến ngẫu nhiên, phân phối mũ độc lập với các tham số α và β tương ứng. Giả sử Z = X + Y.

a. Tìm hàm đặc trưng của Z

b. Tìm hàm mật độ xác suất của Z từ hàm đặc trưng tìm thấy ở phần a.

8. Giả sử Z = aX = bY, trong đó X và Y là các biến ngẫu nhiên độc lập, a và b là các hằng tuỳ ý.

a. Tìm hàm đặc trưng của Z.

b. Tìm kỳ vọng phương sai của Z bằng cách lấy đạo hàm, hàm đặc trưng được tìm thấy ở trong phần a.

9. Giả sử M_n là trung bình mẫu của n biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối X_j. Tìm hàm đặc trưng của M_n theo hàm đặc trưng của các X_j.

10. Giả sử $S_k = X_1 + \ldots + X_k$, trong đó các X_i là những biến ngẫu nhiên độc lập, với X_i là biến ngẫu nhiên nhị thức với tham số n và p. Dùng hàm sinh xác suất chứng minh rằng S_n là biến ngẫu nhiên nhị thức. Với tham số $n = n_1 + \ldots + n_k$ và p. Giải thích tại sao kết quả này là hiển nhiên.

11. Giả sử $S_k + X_1 + \ldots + X_k$ trong đó các X_i là các biến ngẫu nhiên độc lập, với X_i là biến ngẫu nhiên Poisson với kỳ vọng α_i .Chứng minh rằng S_k là biến ngẫu nhiên Poisson với kỳ vọng $\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k$.

12. Giả sử $X_1, X_2, \ldots$ là các biến ngẫu nhiên giá trị nguyên, cho N là biến ngẫu nhiên giá trị nguyên độc lập với các X_j và cho

$$S = \sum_{k=1}^{N} X_k .$$

a. Tìm kỳ vọng của và phương sai của S.

b. Chứng minh rằng

$G_S(z) = E(z^S) = G_N(G_X(z))$,

trong đó $G_X(z)$ là hàm sinh của mỗi X_k.

13. Cho số công việc (job) đến tại một cửa hàng trong chu kỳ 1 giờ là một biến ngẫu nhiên Poisson với kỳ vọng L. Mỗi công việc đòi hỏi X_j là các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối bằng 3 phút hoặc 6 phút với xác suất bằng nhau.

a. Tìm kỳ vọng và phương sai của công việc toàn bộ W (được đo bằng phút) đến trong chu kỳ một giờ.

b. Tìm $G_w(z) = E(z^w)$.

14. Cho số lần truyền thông điệp của một máy tính trong một giờ là một biến ngẫu nhiên nhị thức với các tham số n và p. Giả sử rằng xác suất của lỗi truyền trong thời gian 1 giờ.

a. Tìm kỳ vọng và phương sai của S.

b. Tìm $G_S(z) = E(z^S)$.

PHẦN 5.2 Trung bình mẫu và luật số lớn

15. Giả sử số hạt phát xạ của một lượng phóng xạ trong t giây là một biến ngẫu nhiên Poisson với phương sai λt. dùng bất đẳng thức Chebyshev để nhận được biên cho xác suất sao cho $|N(t)/t - \lambda|$ vượt quá ε.

16. Giả sử 10% số cử tri yêu thích một luật lệ nào đó. Một số lớn n cử tri được đi bầu và một ước lượng tần suất tương đối $f_A(n)$ cho tỷ lệ trên nhận được. Sử dụng phương trình (5.20) để xác định có bao nhiêu cử tri cần phải đi bầu nhằm để với xác suất ít nhất bằng 0.95, $f_A(n)$ khác với 0.10 bé hơn 0.2.

17. Một con xúc xắc được gieo 100 lần. Dùng phương trình (5.20) định giới hạn xác suất mà số tổng cộng các dấu chấm trên mặt xúc xắc là giữa 300 và 400.

18. Cho X_i là các biến ngẫu nhiên Gauss, phương sai 1, kỳ vọng 0. So sánh biên được cho bởi 5.20 với giá trị chính xác nhận được từ hàm Q cho n = 10 và n = 100.

19. Luật số lớn yếu đúng cho trung bình mẫu, nếu các X_j có các hàm hiệp phương sai được cho trong bài tập 2?

20. Luật số lớn yếu đúng cho trung bình mẫu nếu các X_j có các hàm hiệp phương sai được cho trong bài tập 3?

21. (**Phương sai mẫu**) Cho $X_1, \ldots X_n$ là dãy các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối mà kỳ vọng $EX = \mu$ và phương sai $VAR(X) = \sigma^2$. Phương sai mẫu được định nghĩa như sau:

$$V_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (X_j - M_n)^2,$$

trong đó $M_n = S_n/n$ là trung bình mẫu.

a. Chứng tỏ rằng

$$\sum_{j=1}^{n} (X_j - \mu)^2 = \sum_{j=1}^{n} (X_J - M_n)^2 + n(M_n - \mu)^2.$$

$VAR(X) = E((X - EX)^2)$

b. Dùng kết quả phần a chứng minh rằng

$$E\left[k \sum_{j=1}^{n} (X_j - M_n)^2\right] = k(n-1)\sigma^2.$$

c.Dùng phần b chứng minh rằng $E\left[V_n^2\right] = \sigma^2$ bởi vậy V_n^2 là ước lượng không chệch cho phương sai.

d. Tìm kỳ vọng của phương sai mẫu nếu như n – 1 được thay bằng n. Chú ý rằng đây là một ước lượng chệch cho phương sai.

PHẦN 5.3 Định lý giới hạn trung tâm

22. Một đồng tiền xu được gieo 1000 lần. Ước lượng xác suất sao cho số mặt ngửa xuất hiện giữa 400 và 600 lần. Ước lượng xác suất mà số mặt ngửa xuất hiện giữa 500 và 550 .

23. Làm lại bài tập 16 dùng định lý giới hạn trung tâm.

24. Một con xúc xắc được gieo 100 lần. Dùng định lý giới hạn trung tâm để ước lượng xác suất sao cho tổng các dấu chấm là giữa 300 và 400. So sánh kết quả với biên nhận được trong bài tập 17.

25. Tuổi thọ của một bóng đèn rẻ tiền là biến ngẫu nhiên phân phối mũ với kỳ vọng 36 giờ. Giả sử rằng có 16 bóng đèn được thử và tuổi thọ của chúng được đo và ghi lai. Dùng định lý giới hạn trung tâm để ước lượng xác suất mà tổng tuổi thọ bé hơn 600 giờ.

26. Một học sinh dùng các bút mực mà tuổi thọ của chúng là một biến ngẫu nhiên phân phối mũ với kỳ vọng bằng 1 tuần. Dùng định lý giới hạn trung tâm để xác định số ít nhất các bút mà học sinh cần phải mua tại đầu kỳ học 15 tuần sao cho với xác suất 0.99 anh ta không hết bút giữa kỳ học.

27. Giả sử S là tổng 100 biến ngẫu nhiên Poisson độc lập cùng phân phối với kỳ vọng 0.2. So sánh giá trị đúng p[S = k] với xấp xỉ được cho bởi định lý giới hạn trung tâm như trong (5.30).

28. Số thông điệp đều một bộ trộn là biến ngẫu nhiên Poisson với kỳ vọng 10 thông điệp trên một giây. Dùng định lý giới hạn trung tâm để ước lượng xác suất sao cho hơn 650 thông điệp đến trong một phút.

29. Một kênh truyền nhị phân phát lỗi một bít truyền với xác suất là 0.15. Ước lượng xác suất mà có 20 lỗi hoặc ít hơn trong 100 bít truyền.

30. Tổng một danh sách 100 số thực được tính. Giả sử rằng các số được làm tròn tới số nguyên gần nhất sao cho mỗi số có một sai số được phân phối đều trong khoảng (–0.5, 0.5). dùng định lý giới hạn trung tâm để ước lượng xác suất sao cho sai số tổng cộng trong tổng 100 số vượt quá 6.