ĐẠO HÀM, VI PHÂN

1. Đạo hàm riêng
2. Đạo hàm theo hướng
3. Đạo hàm của hàm ẩn
4. Vi phân
5. Tính giá trị gần đúng của hàm số

Tài liệu: Toán cao cấp tập 3 trang 10-24

Calculus – trang 878-921

1. Đạo hàm riêng

- Cho hàm 2 biến $f(x, y)$. Giả sử rằng x biến đổi còn y cố định ($y = b, b = const$).
- Khi đó hàm $g(x) = f(x, b)$ – hàm 1 biến (biến x).
- Nếu tồn tại $g'(a)$ thì $g'(a)$ được gọi là đạo hàm riêng của hàm f theo biến x tại điểm (a,b).
- Kí hiệu: $f_x(a, b)$

$$f_x(a, b) = g'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

Tương tự:

$$f_y(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}$$

1. Đạo hàm riêng

❖ ***Định nghĩa***

- Đạo hàm riêng của hàm *f(x,y)* theo biến *x* tại điểm *(x,y)*

$$f'_x(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

- Đạo hàm riêng của hàm *f(x,y)* theo biến *y* tại điểm *(x,y)*

$$f'_y(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

- Kí hiệu: $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}, f'_x(x,y), \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}, f'_y(x,y)$

1. Đạo hàm riêng

- ***Ví dụ 1.*** Cho $f(x,y) = x^2y + 2x + y^3$. Tính $f'_x(x,y)$?

Ta có:

$$f'_x(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 y + 2(x+h) + y^3 - (x^2y + 2x + y^3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2hxy + h^2y + 2h}{h} = \lim_{h\to 0}(2xy + 2 + hy)$$

Vậy: $f'_x(x,y) = 2xy + 2$.

1. Đạo hàm riêng

❖ ***Sử dụng quy tắc:***

- Tính đạo hàm riêng của 1 hàm số theo biến số nào đó: *xem như hàm số chỉ phụ thuộc vào biến số ấy, các biến số còn lại coi như hằng số*.

❖ ***Ví dụ 2.*** Tính đạo hàm riêng của hàm số

$$z = ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

1. Đạo hàm riêng

$$z = ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

Ta có:

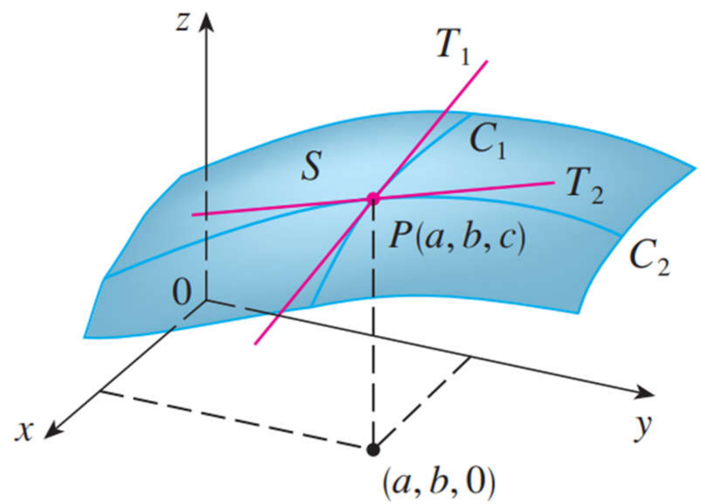
$$z'_x = \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)} = \frac{y}{x^2 + y^2 + x\sqrt{x^2 + y^2}}$$

1. Đạo hàm riêng

❖ ***Ý nghĩa hình học***

- Giả sử mặt S có phương trình $z = f(x, y), f(a, b) = c$.
- $P(a, b, c) \in S$
- Nếu $y = b$: $C_1 = \mathrm{S} \cap (y = b)$
- Nếu $x = \mathrm{a}$: $C_2 = \mathrm{S} \cap (x = a)$
- Cả C_1, C_2 cùng đi qua P.



- z'_x: tốc độ biến thiên của z theo x khi y cố định
- z'_y: tốc độ biến thiên của z theo y khi x cố định

1. Đạo hàm riêng

- ***Ví dụ:*** Cho $z = 4 - x^2 - 2y^2$. Tính $z_x(1,1), z_y(1,1)$ và giải thích độ dốc.
- ***Giải***

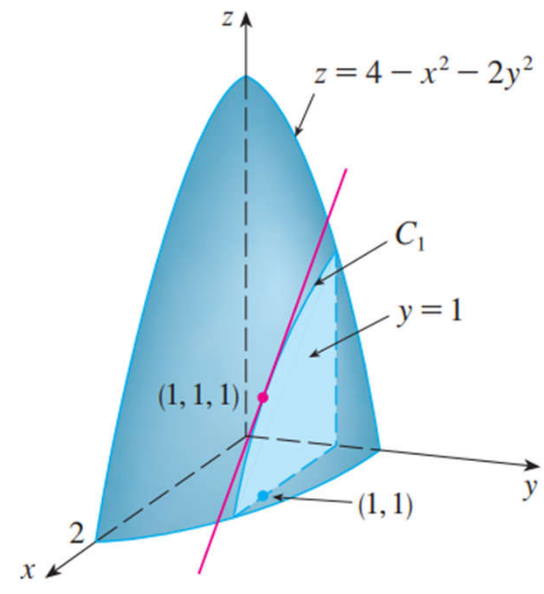
Ta có: $z'_x = -2x;\quad z'_y = -4y$

$$\Longrightarrow z'_x(1,1) = -2; z'_x(1,1) = -4$$

Đồ thị của z là (P)

Mặt phẳng $y = 1 \cap$P: parabol $z = 2 - x^2$

Độ dốc của đường tiếp tuyến với parabol này tại (1,1,1) là -2.



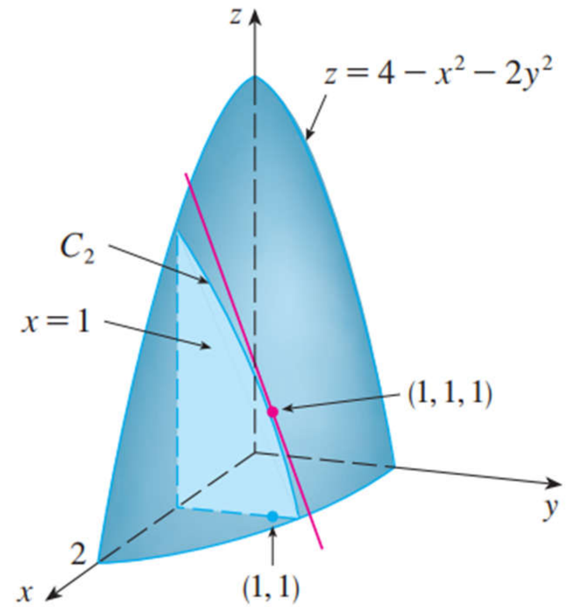
1. Đạo hàm riêng

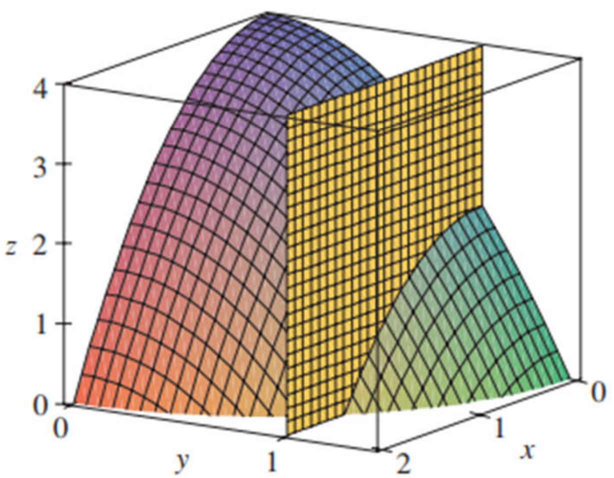
Mặt phẳng x=1 cắt P là:

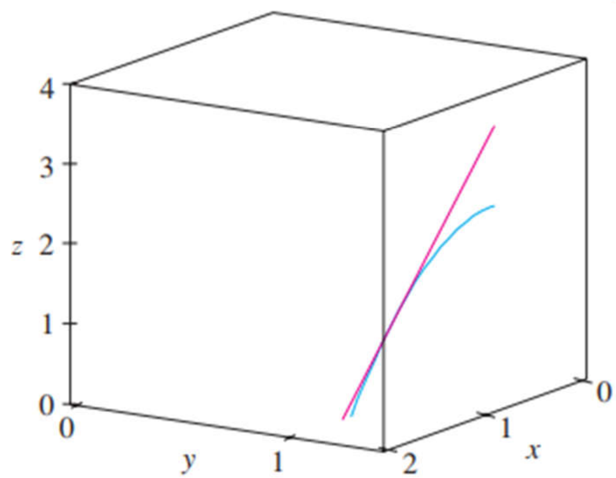
Parabol $z = 3 - 2y^2$

Độ dốc của đường tiếp tuyến

với parabol này tại P(1,1,1): -4







1. Đạo hàm riêng

❖ ***Đạo hàm riêng của hàm hợp***

Giả sử $u = f(x, y), x = x(t, s), y = y(t, s)$: thỏa mãn các điều kiện khả vi.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial t} & \frac{\partial f}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix}$$

1. Đạo hàm riêng

Trong đó:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix}$$: ma trận Jacobi của *x*, *y* đối với *t*, *s*.

Chú ý: Nếu $z = f(x, y), y = y(x)$ thì *z* là hàm số hợp của *x*.

$$z = f(x, y(x))$$

Khi đó:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} . y'(x)$$

1. Đạo hàm riêng

- ***Ví dụ.*** Tính đạo hàm của hàm số hợp:

$$z = \ln(u^2 + v^2), u = xy, v = \frac{x}{y}$$

Ta có:

$$\begin{bmatrix} z'_u & z'_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{2u}{u^2+v^2} & \dfrac{2v}{u^2+v^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{2y^3}{x\left(y^4+1\right)} & \dfrac{2y}{x\left(y^4+1\right)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & x \\ \dfrac{1}{y} & \dfrac{-x}{y^2} \end{bmatrix}$$

1. Đạo hàm riêng

Suy ra:

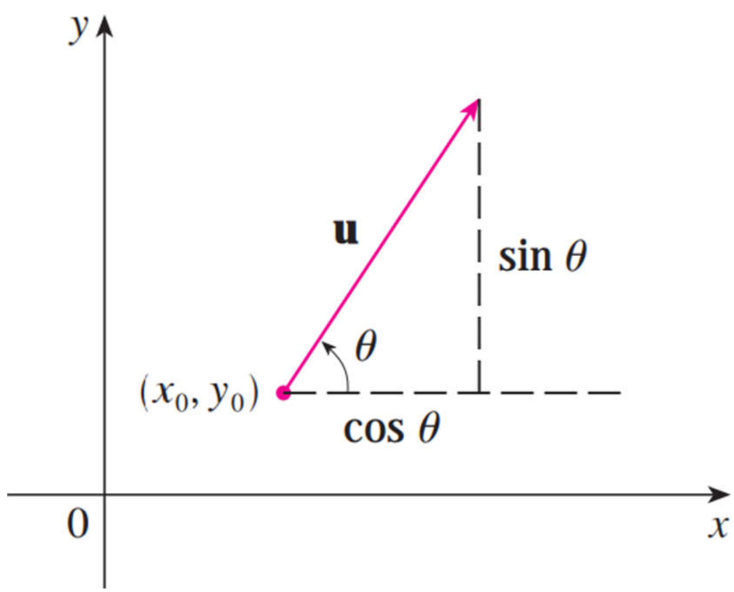
$$\begin{bmatrix} z'_x & z'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z'_u & z'_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2y^3}{x\left(y^4+1\right)}.y + \frac{2y}{x\left(y^4+1\right)}.\frac{1}{y} & \frac{2y^3}{x\left(y^4+1\right)}.x + \frac{2y}{x\left(y^4+1\right)}.\frac{-x}{y^2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{x} & \frac{2\left(y^4-1\right)}{y\left(y^4+1\right)} \end{bmatrix}$$

2. Đạo hàm theo hướng

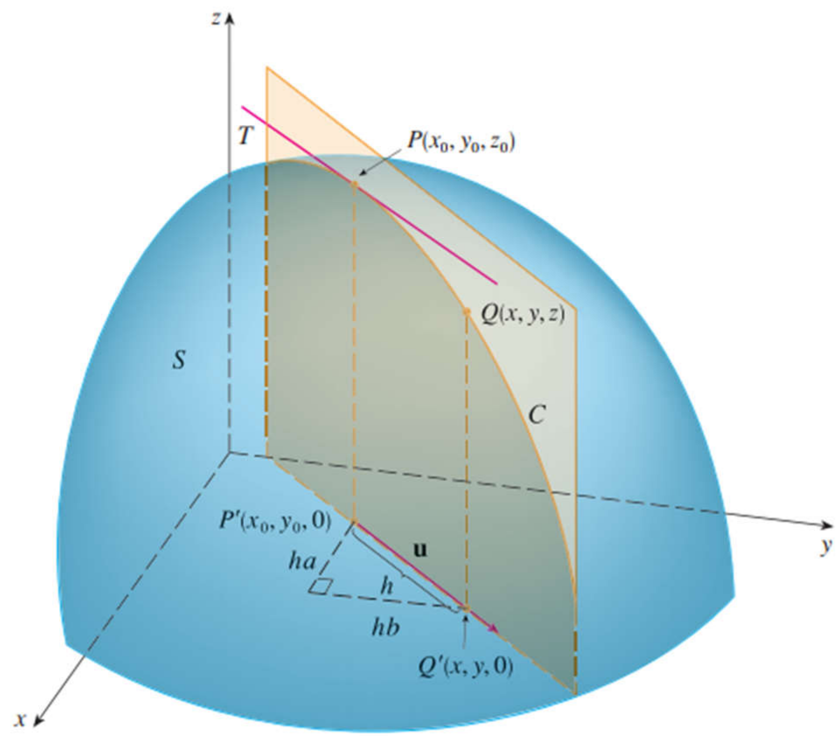
- Cho hàm $z = f(x, y)$.
- Khi đó f'_x , f'_y : tốc độ biến đổi của z theo phương x và y. Hay nói cách khác là theo hướng của véc-tơ đơn vị $\vec{i}, \vec{j}$.
- Giả sử cần tìm tốc độ biến đổi của z tại điểm (x_0, y_0) theo một phương tùy ý có véc-tơ đơn vị $\vec{u} = (a, b)$.



2. Đạo hàm theo hướng

- Xét mặt S có pt: $z = f(x, y) \Rightarrow z_0 = f(x_0, y_0)$
- Điểm $P(x_0, x_0, x_0) \in S$
- Mặt phẳng thẳng đứng (Q) đi qua P và $\vec{u}$ cắt S theo đường cong C.
- Độ dốc của đường tiếp tuyến

T đối với C tại P là tốc độ thay đổi của z theo hướng $\vec{u}$.



2. Đạo hàm theo hướng

- ***Định nghĩa***:

Đạo hàm của f tại (x_0, y_0) theo hướng của vecto đơn vị $\vec{u} = (a, b)$ là:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Nếu giới hạn trên tồn tại.

- ***Định lý***:

Nếu f là hàm khả vi theo x, y. Khi đó f có đạo hàm theo hướng của vecto đơn vị $\vec{u} = (a, b)$ tùy ý và:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x, y) = f'_x(x, y).a + f'_y(x, y).b$$

2. Đạo hàm theo hướng

- Nếu vecto đơn vị $\vec{u}$ tạo với trục Ox một góc θ thì: $\vec{u} = (cos\theta, sin\theta)$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u}(x,y) = f'_x(x,y).cos\theta + f'_y(x,y).sin\theta$$

- ***Ví dụ***. Cho hàm $f = x^3 - 3xy + 4y^2$. Tính $\frac{\partial f}{\partial u}(1,2)$ với $\vec{u}$ là véc-tơ đơn vị tạo với trục Ox một góc $\theta = \pi/6$.

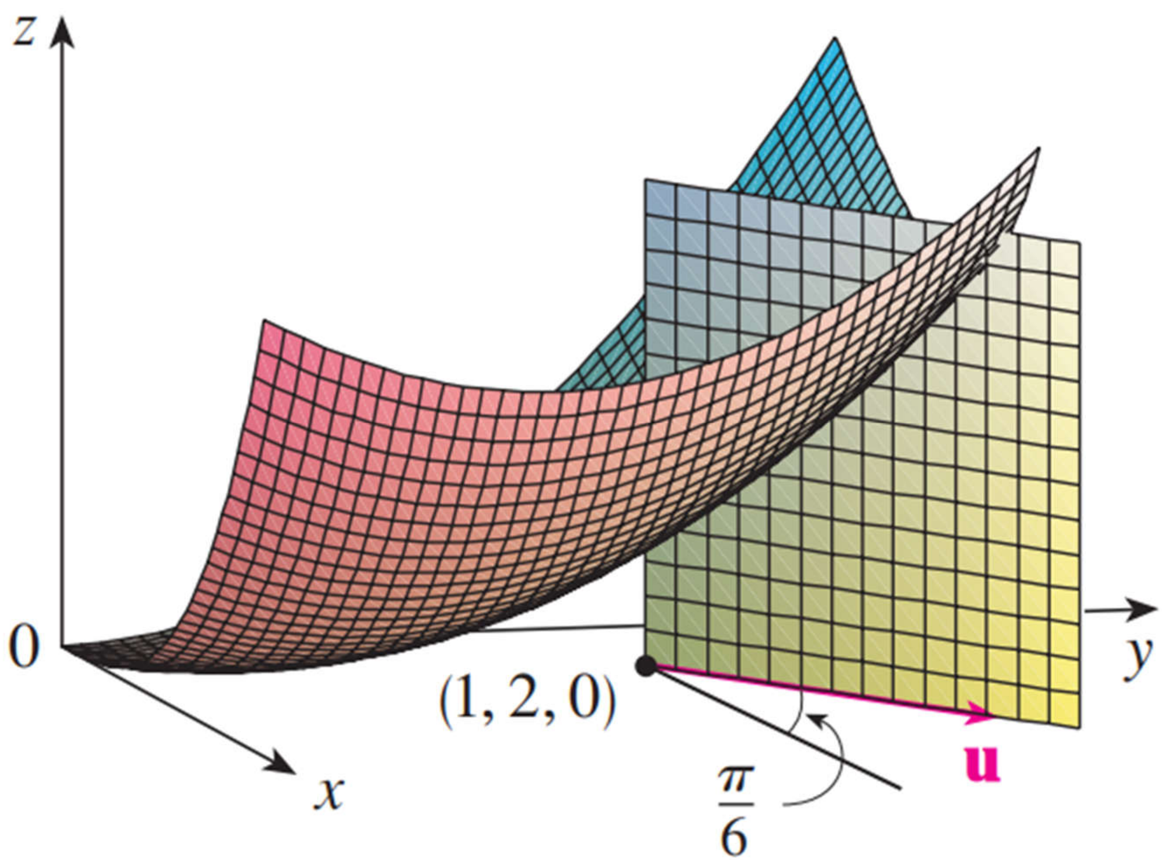
Ta có: $f'_x = 3x^2 - 3y \Rightarrow f'_x(1,2) = -3;$

$$f'_y = -3x + 8y \Rightarrow f'_x(1,2) = 13;$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u}(1,2) = -3.\cos\frac{\pi}{6} + 13\sin\frac{\pi}{6} = \frac{13 - 3\sqrt{3}}{2}.$$

2. Đạo hàm theo hướng

Hình minh họa



2. Đạo hàm theo hướng

❑ Vecto gradient

- ***Định nghĩa:*** Nếu *f* là hàm hai biến *x*,*y*, khi đó gradient của *f* là một hàm véc tơ, ký hiệu là ∇f được xác định bằng:

$$\nabla f(x,y) = \left\langle f'_x(x,y), f'_y(x,y). \right\rangle = \frac{\partial f}{\partial x}.\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}.\vec{j}$$

Suy ra:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x,y) = \nabla f(x,y).\vec{u}$$

2. Đạo hàm theo hướng

- ***Ví dụ***: Tìm đạo hàm theo hướng của hàm $f = x^2y^3 - 4y$ tại điểm $(2, -1)$ theo hướng của $\vec{v} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$.
- ***Giải***.

Ta có $f_x = 2xy^3$; $f_y = 3x^2y^2 - 4 \Rightarrow \nabla f(2, -1) = -4\vec{i} + 8\vec{j}$

$$\vec{v} = 2\vec{i} + 5\vec{j} \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{29} \neq 1$$

$\Rightarrow \vec{v}$ không phải là vecto đơn vị. Vecto đơn vị theo hướng $\vec{v}$:

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{2}{\sqrt{29}}\vec{i} + \frac{5}{\sqrt{29}}\vec{j}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u}(2, -1) = -4.\frac{2}{\sqrt{29}} + 8.\frac{5}{\sqrt{29}} = \frac{32}{\sqrt{29}}$$

2. Đạo hàm theo hướng

❑ Trường hợp hàm 3 biến

Véc-tơ gradient của hàm $f(x, y, z)$ ký hiệu là ∇f hoặc $\overrightarrow{grad} f$

$$\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

Suy ra:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z).\vec{u}$$

Trong đó: $\vec{u}$ là véc-tơ đơn vị.

2. Đạo hàm theo hướng

- Nếu $\vec{u}$ không là véc-tơ đơn vị:

Hàm số *f(x,y,z)* khả vi tại M_0 thì:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = ch_{\vec{u}}.\overrightarrow{grad} f\left(M_0\right)$$

Hoặc:

$$\frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial \vec{u}} = \frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial z}\cos\gamma$$

với $\alpha = (\vec{i}, \vec{u}), \beta = (\vec{j}, \vec{u}), \gamma = \left(\vec{k}, \vec{u}\right)$

2. Đạo hàm theo hướng

❖ **Giá trị lớn nhất của đạo hàm theo hướng**:

- ***Định lý***: Giả sử *f* là hàm khả vi 2 hoặc 3 biến. Giá trị lớn nhất của đạo hàm theo hướng $\frac{\partial f}{\partial u}(x, y, z)$ bằng với độ dài của véc-tơ gradient của hàm *f*, và nó xuất hiện khi $\vec{u}$ cùng hướng với véc-tơ gradient của *f*.

$$\max\left|\frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial \vec{u}}\right| = \left|\overrightarrow{grad}\, f\left(M_0\right)\right|$$

2. Đạo hàm theo hướng

Ví dụ. Cho $f = x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz$.

Tính $\overrightarrow{grad} f$ và $\frac{\partial f}{\partial u}$ tại $M_0(1,2,-1)$ biết $\vec{u}$ là véc-tơ đơn vị của $\overrightarrow{M_0M_1}$ với $M_1(2,0,1)$.

2. Đạo hàm theo hướng

- Hướng dẫn:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3yz; \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + 3xz; \frac{\partial f}{\partial z} = 3z^2 + 3xy$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{grad} f\left(M_0\right) = \left(-3, 9, 9\right)$$

$$\overrightarrow{M_0 M_1} = \left(1, -2, 2\right) \Rightarrow \vec{l} = ch_{\overrightarrow{M_0 M_1}} = \left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\left(M_0\right) = \left(-3\right).\frac{1}{3} + 9.\left(\frac{-2}{3}\right) + 9.\frac{2}{3} = -1$$

3. Đạo hàm của hàm ẩn

- Hàm ẩn 1 biến $F(x, y) = 0, y = f(x)$ hay $F\big(x, f(x)\big) = 0$

  Lấy đạo hàm 2 vế đối với x, ta được:

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y).y'_x = 0 \Leftrightarrow y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$$

3. Đạo hàm của hàm ẩn

- ***Ví dụ.*** Tính đạo hàm của hàm ẩn xác định bởi phương trình $x^3y - y^3x = 0$. $y' = ?$

Coi *y* là hàm của biến độc lập *x*.

Lấy đạo hàm 2 vế phương trình trên theo biến *x* ta được:

$$3x^2y + x^3y' - y^3 - 3xy^2y' = 0$$

$$\Leftrightarrow y'\left(x^3 - 3xy^2\right) + 3x^2y - y^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{y^3 - 3x^2y}{x^3 - 3xy^2}$$

3. Đạo hàm của hàm ẩn

- Hàm ẩn 2 biến $F(x, y, z) = 0, z = f(x, y)$ hay

$$F\big(x, y, f(x, y)\big) = 0$$

Lấy đạo hàm hai vế lần lượt đối với *x*, *y*

$$F'_x(x,y) + F'_z(x,y).z'_x = 0 \Leftrightarrow z'_x = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},\ F'_z(x,y,z) \neq 0$$

$$F'_y(x,y) + F'_z(x,y).z'_y = 0 \Leftrightarrow z'_y = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},\ F'_z(x,y,z) \neq 0$$

3. Đạo hàm của hàm ẩn

- ***Ví dụ.*** Tính đạo hàm của hàm ẩn xác định bởi phương trình

$$\mathrm{x} + \mathrm{y} + \mathrm{z} = \mathrm{e}^{\mathrm{z}}.\ \ z'_x, z'_y = ?$$

Lấy đạo hàm 2 vế phương trình đã cho theo biến *x*:

$$1 + z_x^{'} = e^z.z_x^{'} \Leftrightarrow z_x^{'} = \frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{x + y + z - 1}$$

Lấy đạo hàm 2 vế phương trình đã cho theo biến *y*:

$$1 + z_y^{'} = e^z.z_y^{'} \Leftrightarrow z_y^{'} = \frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{x + y + z - 1}$$

4. Vi phân

❖ Vi phân toàn phần

Vi phân toàn phần của hàm *f(x,y)*:

$$df = f'_x dx + f'_y dy$$

❖ Áp dụng vi phân toàn phần để tính gần đúng:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f\left(x_0, y_0\right) + f'_x\left(x_0, y_0\right).\Delta x + f'_y\left(x_0, y_0\right).\Delta y$$

✓ Xác định hàm $f, \Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$

✓ Tính các đạo hàm riêng $f'_x, f'_y, f'_z, \ldots$

✓ Thay vào công thức

4. Vi phân

- ***Ví dụ.*** Tìm vi phân toàn phần của hàm số:

$$f(x,y) = \ln tan\frac{y}{x}$$

- ***Hướng dẫn***:

$$f_x' = \frac{-2y}{x^2 \sin\frac{2y}{x}};\quad f_y' = \frac{2}{x\sin\frac{2y}{x}}$$

$$\Rightarrow df = f_x' dx + f_y' dy = \frac{-2y}{x^2 \sin\frac{2y}{x}}dx + \frac{2dy}{x\sin\frac{2y}{x}} = \frac{2\left(xdy - ydx\right)}{x^2 \sin\frac{2y}{x}}$$

4. Vi phân

- ***Ví dụ***. Tính gần đúng $\sqrt[3]{(1,01)^2+(0,05)^2}$

$f(x,y)=\sqrt[3]{x^2+y^2}=(x^2+y^2)^{1/3}$,

$M_0(1,0), \Delta x=0,01, \Delta y=0,05$

$$f'_x=\frac{2}{3}\frac{x}{\sqrt[3]{\left(x^2+y^2\right)^2}} \Rightarrow f'_x(M_0)=\frac{2}{3}$$

$$f'_y=\frac{2}{3}\frac{y}{\sqrt[3]{\left(x^2+y^2\right)^2}} \Rightarrow f'_y(M_0)=0$$

$f(1,0)=1$

$$\sqrt[3]{(1,01)^2+(0,05)^2}$$

$$\approx 1+\frac{2}{3}.0,01=1,0067$$

Bài tập

- ***Bài 1.*** Tính các đạo hàm riêng cấp 1 của các hàm số sau:

1) $f(x,y) = \ln\sin\dfrac{x+a}{\sqrt{y}}$

2) $f(x,y) = \ln\tan\dfrac{x}{y}$

3) $f(x,y) = \arctan\dfrac{y}{xz}$

4) $f(x,y) = \dfrac{x}{y} - e^{x}\arctan y$

5) $f(x,y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$

6) $f(x,y) = xyz + \dfrac{x}{yz}$

7) $f(x,y) = \sin(xy + yz)$

8) $f(x,y) = \tan(x+y)e^{x/y}$

9) $f(x,y) = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Bài tập

- ***Bài 2***. Tính các đạo hàm riêng của các hàm số hợp sau

1) $f(x,y)=f\left(x+y,x^2+y^2\right)$

2) $f(x,y)=f\left(\dfrac{x}{y},\dfrac{y}{x}\right)$

3) $f(x,y)=f\left(x-y,xy\right)$

4) $f(x,y)=f\left(x-y^2,y-x^2,xy\right)$

5) $f(x,y,z)=f\left(\sqrt{x^2+y^2},\sqrt{y^2+z^2},\sqrt{x^2+z^2}\right)$

Bài tập

6) $z = e^{u^2 - 2v^2}, u = \cos x, v = \sqrt{x^2 + y^2};$

7) $z = x^2 \ln y, x = \dfrac{u}{v}, y = 3u - 2v$

8) $z = ue^{v} + ve^{-u}, u = e^{x}, v = x^2 y$

9) $z = xe^{\frac{x}{y}}, x = \cos t, \; y = e^{2t}$

10) $z = x\sqrt{1 + y^2}, x = te^{2t}, \; y = e^{-t}$

Bài tập

Bài 3. Tìm hàm số $z = f(x,y)$ thỏa mãn phương trình:

a) $2z'_x - z'_y = 0$ bằng phép đổi biến số $u = x + y, v = x + 2y$.

b) $xz'_x - yz'_y = x^2 - y^2$ bằng phép đổi biến số $u = x + y, v = xy$.

Bài 4. Dùng vi phân, tính gần đúng các hàm số sau:

1) $\sqrt[3]{(1,02)^2 + (0,05)^2}$

2) $\ln\left(\sqrt[3]{1,03}\right) + \sqrt[4]{0,98} - 1$

3) $\sqrt{9.(1,95)^2 + (8,1)^2}$

4) $\sqrt{\sin^2 1,55 + 8.e^{0,015}}$

Bài tập

Bài 5. Tính đạo hàm của các hàm số ẩn xác định bởi các phương trình sau:

1) $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0;\ y' = ?$

2) $\arctan\dfrac{x+y}{a} = \dfrac{y}{a};\ y' = ?$

3) $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \arctan\dfrac{y}{x};\ y' = ?$

4) $\mathrm{y}^5 + 3x^2y^2 + 5x^4 = 12;\ y' = ?$

5) $xyz = \cos\left(x + y + z\right);\ z_x^{'}, z_y^{'} = ?$

6) $xy^2z^3 + x^3y^2z = x + y + z;\ z_x^{'},\ z_y^{'} = ?$

Bài tập

Bài 6.

a) $z = f(x, y)$ là hàm ẩn xác định bởi hệ thức

$$z - xe^{\frac{z}{y}} = 0$$

Tính gần đúng $f(0{,}02; 0{,}99)$.

b) Cho hàm số $u = \frac{x+z}{y+z}$, trong đó z là hàm số ẩn xác định bởi hệ thức:

$$ze^{z} = xe^{x} + ye^{y}$$

Tính u'_x, u'_y?

Bài tập

Bài 7. Đạo hàm theo hướng

- $f(x, y) = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ tại điểm *M(3,1)* theo hướng từ điểm này đến điểm *(6,5)*.
- $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ tại điểm *M(1,1)* theo hướng véc tơ $\vec{v} = 6\vec{\imath} + 8\vec{\jmath}$
- $f(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ tại điểm *M(1,1)* theo hướng phân giác của góc phần tư thứ nhất.
- $f(x, y, z) = \ln(e^x + e^y + e^z)$ tại gốc tọa độ và hướng lập với các trục tọa độ *x,y,z* các góc tương ứng α, β, γ.

Bài tập

Bài 8.

a) Chứng minh rằng hàm số $z = y\ln(x^2 + y^2)$ thỏa mãn phương trình

$$\frac{1}{x}z'_x + \frac{1}{y}z'_y = \frac{z}{y^2}$$

b) Hàm $z = z(x, y)$ là hàm ẩn xác định bởi hệ thức:

$$z^2 + \frac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}$$

Chứng minh rằng:

$$x^2 z'_x + \frac{1}{y} z'_y = \frac{1}{z}$$