ĐẠO HÀM, VI PHÂN

1. Đạo hàm riêng
2. Đạo hàm của hàm hợp
3. Đạo hàm của hàm ẩn
4. Đạo hàm theo hướng

Tài liệu: Toán cao cấp tập 3 trang 10-24

Calculus – trang 878-921

1.1. Đạo hàm riêng cấp 1

- Cho hàm 2 biến $f(x,y)$. Giả sử rằng x biến đổi còn y cố định ($y = b, b = const$).
- Khi đó hàm $g(x) = f(x,b)$ – hàm 1 biến (biến x).
- Nếu tồn tại $g'(a)$ thì $g'(a)$ được gọi là đạo hàm riêng của hàm f theo biến x tại điểm (a,b).
- Kí hiệu: $f_x(a,b)$

$$f_x(a,b) = g'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

Tương tự:

$$f_y(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}$$

1.1. Đạo hàm riêng cấp 1

❖ ***Định nghĩa***

- Đạo hàm riêng của hàm *f(x,y)* theo biến *x* tại điểm *(x,y)*

$$f'_x(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

- Đạo hàm riêng của hàm *f(x,y)* theo biến *y* tại điểm *(x,y)*

$$f'_y(x,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

- Kí hiệu: $\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\ f'_x(x,y),\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y},\ f'_y(x,y)$

1.1. Đạo hàm riêng cấp 1

- ***Ví dụ 1.*** Cho $f(x,y) = x^2y + 2x + y^3$. Tính $f'_x(x,y)$?

Ta có:

$$f'_x(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 y + 2(x+h) + y^3 - (x^2y + 2x + y^3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2hxy + h^2y + 2h}{h} = \lim_{h\to 0}(2xy + 2 + hy)$$

Vậy: $f'_x(x,y) = 2xy + 2$.

1.1. Đạo hàm riêng cấp 1

❖ ***Sử dụng quy tắc:***

- Tính đạo hàm riêng của 1 hàm số theo biến số nào đó: *xem như hàm số chỉ phụ thuộc vào biến số ấy, các biến số còn lại coi như hằng số*.

❖ ***Ví dụ 2.*** Tính đạo hàm riêng của hàm số

$$z = ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

1.1. Đạo hàm riêng cấp 1

$$z = ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

Ta có:

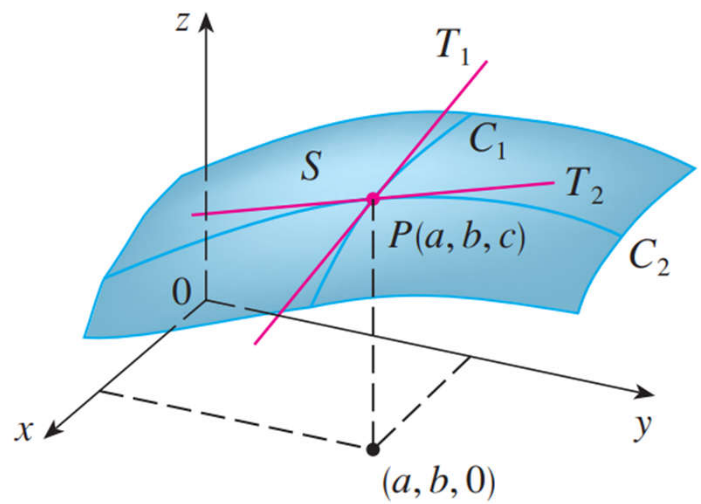
$$z'_x = \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)} = \frac{y}{x^2 + y^2 + x\sqrt{x^2 + y^2}}$$

1.1. Đạo hàm riêng cấp 1

❖ *Ý nghĩa hình học*

- Giả sử mặt S có phương trình $z = f(x, y), f(a, b) = c$.
- $P(a, b, c) \in S$
- Nếu $y = b$: $C_1 = S \cap (y = b)$
- Nếu $x = a$: $C_2 = S \cap (x = a)$
- Cả C_1, C_2 cùng đi qua P.
- z'_x: tốc độ biến thiên của z theo x khi y cố định
- z'_y: tốc độ biến thiên của z theo y khi x cố định



1.1. Đạo hàm riêng cấp 1

- ***Ví dụ:*** Cho $z = 4 - x^2 - 2y^2$. Tính $z_x(1,1), z_y(1,1)$ và giải thích độ dốc.
- ***Giải***

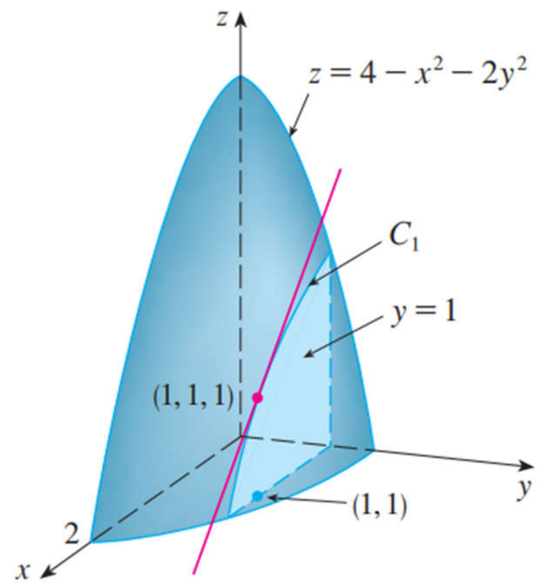
Ta có: $z'_x = -2x;\quad z'_y = -4y$

$$\Rightarrow z'_x(1,1) = -2; z'_y(1,1) = -4$$

Đồ thị của *z* là (P)

Mặt phẳng $y = 1$ ∩P: parabol $z = 2 - x^2$

Độ dốc của đường tiếp tuyến với parabol này tại (1,1,1) là -2.



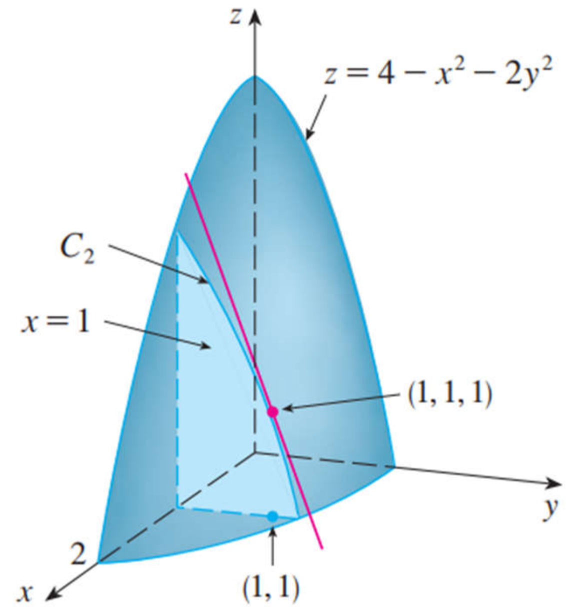
1.1. Đạo hàm riêng cấp 1

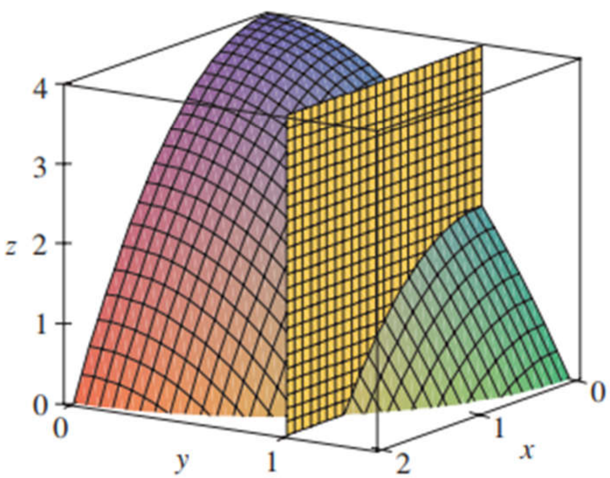
Mặt phẳng x=1 cắt P là:

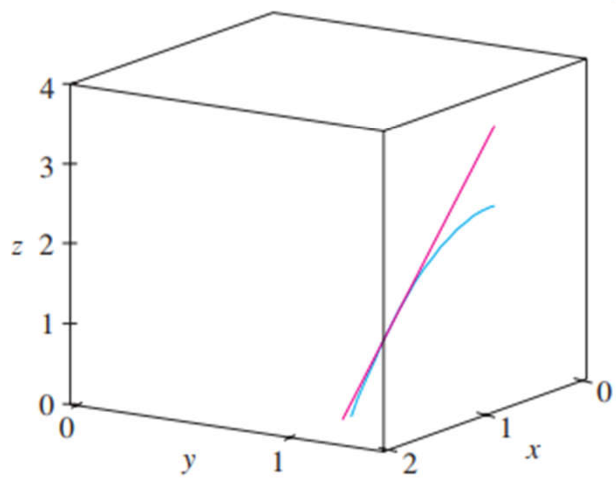
Parabol $z = 3 - 2y^2$

Độ dốc của đường tiếp tuyến

với parabol này tại P(1,1,1): -4







1.2. Đạo hàm riêng cấp 2

- Các đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng cấp 1 của nó được gọi là đạo hàm riêng cấp hai của hàm *f(x,y)*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f''_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f''_{yx}(x,y)$$

1.2. Đạo hàm riêng cấp 2

- ***Ví dụ***. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của hàm số:

$$z = x^2y^3 + x^4$$

$$z'_x = 2xy^3 + 4x^3$$

$$z'_y = 3x^2y^2$$

$$z''_{xx} = 2y^3 + 12x^2$$

$$z''_{yy} = 6x^2y$$

$$z''_{xy} = 6xy^2$$

$$z''_{yx} = 6xy^2$$

- *Nhận xét:* Trong ví dụ này, ta thấy $z''_{xy} = z''_{yx}$

1. Đạo hàm riêng cấp 2

❑ ***Định lý*** (Schwarz)

- Nếu các đạo hàm riêng hỗn hợp $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

  tồn tại trong một lân cận nào đó và liên tục tại điểm *M(x,y)*

thì:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

(*kết quả đạo hàm không phụ thuộc vào thứ tự lấy đạo hàm*).

1. Đạo hàm riêng cấp 2

- Nếu các đạo hàm riêng hỗn hợp $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

  tồn tại trong một lân cận nào đó và liên tục tại điểm *M(x,y)*

thì:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

(*kết quả đạo hàm không phụ thuộc vào thứ tự lấy đạo hàm*).

1. Đạo hàm riêng cấp 2

- ***Ví dụ***: Tìm các đạo hàm riêng cấp 2 của hàm

$$f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$$

- ***Giải***:

Ta có: $f_x = 3x^2 + 2xy^3$; $\quad f_y = 3x^2y^2 - 4y$

Suy ra:

$$f_{xx} = 6x + 2y^3; \qquad f_{yy} = 6x^2y - 4$$

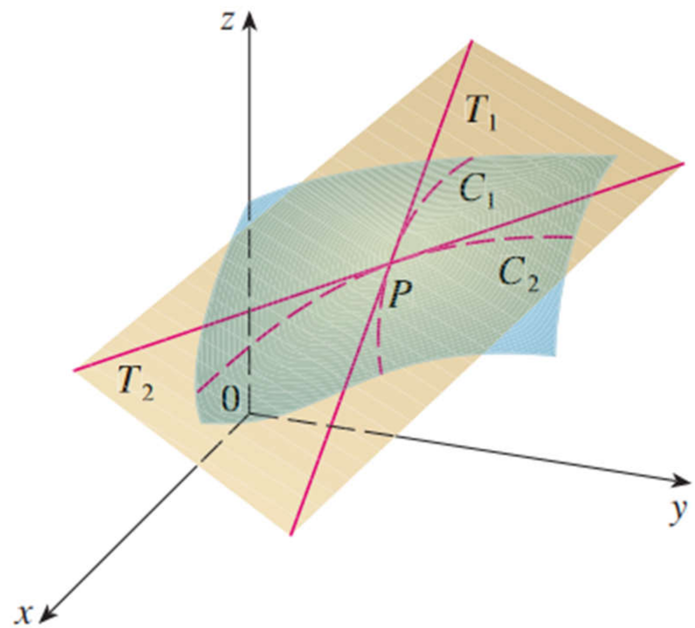
$$f_{xy} = f_{yx} = 6xy^2$$

1.3. Mặt phẳng tiếp diện

- Mặt cong S có phương trình $z = f(x, y)$ và f có các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục. Điểm $P(a, b, c) \in S$
- C_1, C_2: giao tuyến của S với các mặt phẳng $y =$ b và $x = a$.
- T_1, T_2: tiếp tuyến của C_1, C_2 tại P.
- Mặt phẳng tuyến tuyến với S tại P

  - là mặt phẳng đi qua T_1, T_2.

➢ Mọi tiếp tuyến tại P đối với 1 đường cong thuộc S đi qua P đều thuộc vào mặt phẳng tiếp tuyến này.



1.3. Mặt phẳng tiếp diện

- Phương trình mặt phẳng (Q) đi qua P:

$$A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)=0$$

$$z-c=k(x-a)+l(y-b), k=-\frac{A}{C}, l=-\frac{B}{C}$$

$$(Q)\cap(y=b)=T_1 \Rightarrow z-c=k(x-a) \Rightarrow k=\frac{z-c}{x-a}=f_x$$

$$(Q)\cap(x=a)=T_2 \Rightarrow z-c=l(y-b) \Rightarrow l=\frac{z-c}{y-b}=f_y$$

➢ Phương trình mặt phẳng tiếp diện tại $P(a,b,c)\in S$:

$$z-c=f_x(a,b).(x-a)+f_y(a,b).(y-b)$$

1.3. Mặt phẳng tiếp diện

- ***Ví dụ***: Tìm phương trình mặt tiếp diện của mặt elliptic parabolic có pt $z = 2x^2 + y^2$ tại điểm $P(1,1,3)$.
- ***Giải***:

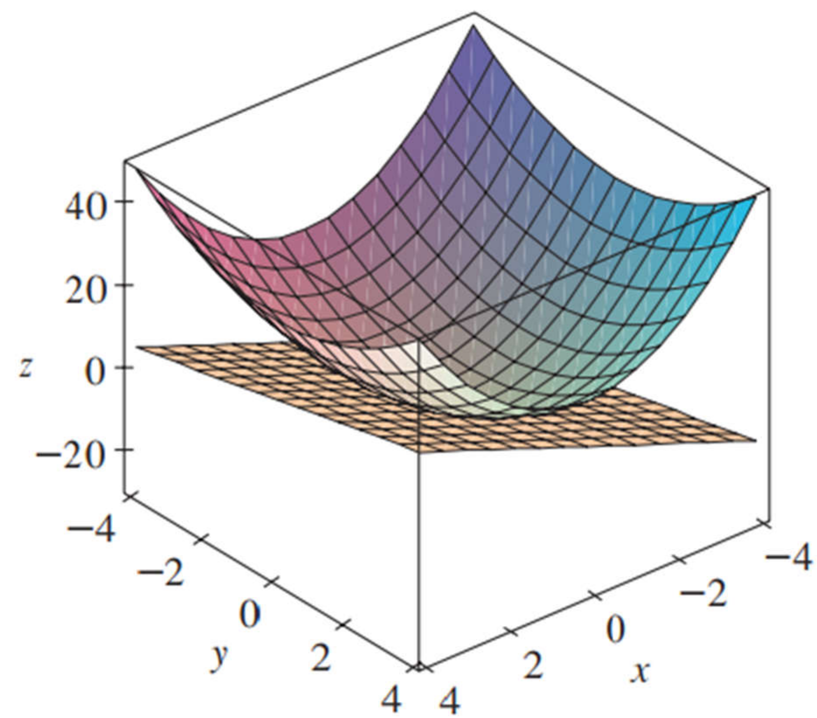
Ta có $z_x = 4x$; $z_y = 2y$

Suy ra: $z_x(1,1) = 4$; $z_y(1,1) = 2$;

PT mặt phẳng tiếp diện qua P:

$z - 3 = 4(x - 1) + 2(y - 1)$,

Hay: $z = 4x + 2y - 3$



1.3. Mặt phẳng tiếp diện

❖ Nếu mặt S cho bởi phương trình $f(x, y, z) = 0$, $\mathrm{P(a, b, c)} \in S$, phương trình mặt tiếp diện của S tại P là:

$$f_x(P).(x-a) + f_y(P).(y-b) + f_z(P).(z-c) = 0$$

- ***Ví dụ***: Viết phương trình tiếp diện của mặt

$x^2 + y^2 - z^2 = 0$, tại điểm $M(3,4,5)$.

Giải: Ta có: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$

$$\Rightarrow f_x = 2x;\ \ f_y = 2y;\ \ f_z = -2z$$

$$\Rightarrow f_x(M) = 6;\ \ f_y(M) = 8;\ \ f_z(M) = -10$$

PT tiếp diện: $6(x-3) + 8(y-4) - 10(z-5) = 0$

Hay: $3x + 4y - 5z = 0$.

2. Đạo hàm riêng của hàm hợp

- ***Nhắc lại***: đối với hàm 1 biến

Nếu $y = f(x)$ và $x = g(t)$, mà *f*, *g* là các hàm khả vi khi đó *y* là hàm khả vi gián tiếp theo biến *t* và:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

- Đối với hàm hai biến: Giả sử $z = f(x, y)$ là hàm khả vi theo *x*, y, trong đó $x = g(t), y = h(t)$ và cả hai hàm này đều khả vi tại *t*, khi đó *z* là 1 hàm khả vi theo *t* và:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

2. Đạo hàm riêng của hàm hợp

- ***Ví dụ***: Nếu $z = x^2y + 3xy^4$, trong đó $x = \sin 2t$, $y = \cos t$. Tìm dz/dt khi $t = 0$.

- Ta có:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = (2xy + 3y^4).(2\cos 2t) + (x^2 + 12xy^3).(-\sin t)$$

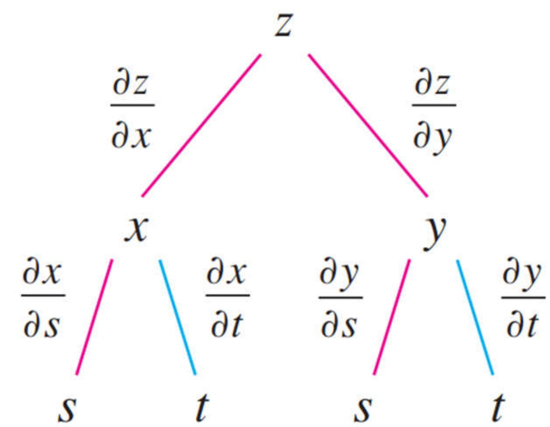
$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0} = (0 + 3)(2\cos 0) + (0 + 0)(-\sin 0) = 6$$

2. Đạo hàm riêng của hàm hợp

- Giả sử z $= f(x, y), x = x(t, s), y = y(t, s)$: thỏa mãn các điều kiện khả vi:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$



Hay:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial t} & \frac{\partial f}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix}$$

2. Đạo hàm riêng của hàm hợp

Trong đó:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix}$$: ma trận Jacobi của *x*, *y* đối với *t*, *s*.

Chú ý: Nếu $z = f(x, y), y = y(x)$ thì *z* là hàm số hợp của *x*.

$$z = f(x, y(x))$$

Khi đó:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} . y'(x)$$

2. Đạo hàm riêng của hàm hợp

- ***Ví dụ.*** Tính đạo hàm của hàm số hợp:

$$z = \ln(u^2 + v^2),\, u = xy, v = \frac{x}{y}$$

Ta có:

$$\begin{bmatrix} z'_u & z'_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{2u}{u^2+v^2} & \dfrac{2v}{u^2+v^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{2y^3}{x\left(y^4+1\right)} & \dfrac{2y}{x\left(y^4+1\right)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & x \\ \dfrac{1}{y} & \dfrac{-x}{y^2} \end{bmatrix}$$

2. Đạo hàm riêng của hàm hợp

Suy ra:

$$\begin{bmatrix} z'_x & z'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z'_u & z'_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{2y^3}{x\left(y^4+1\right)}.y + \dfrac{2y}{x\left(y^4+1\right)}.\dfrac{1}{y} & \dfrac{2y^3}{x\left(y^4+1\right)}.x + \dfrac{2y}{x\left(y^4+1\right)}.\dfrac{-x}{y^2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{2}{x} & \dfrac{2\left(y^4-1\right)}{y\left(y^4+1\right)} \end{bmatrix}$$

3. Đạo hàm của hàm ẩn

- Hàm ẩn 1 biến $F(x,y)=0, y=f(x)$ hay $F\big(x,f(x)\big)=0$

  Lấy đạo hàm 2 vế đối với *x*, ta được:

$$F_x^{'}(x,y)+F_y^{'}(x,y).y_x^{'}=0 \Leftrightarrow y_x^{'}=-\frac{F_x^{'}(x,y)}{F_y^{'}(x,y)}$$

3. Đạo hàm của hàm ẩn

- ***Ví dụ.*** Tính đạo hàm của hàm ẩn xác định bởi phương trình $x^3y - y^3x = 0.\ y' =?$

Coi *y* là hàm của biến độc lập *x*.

Lấy đạo hàm 2 vế phương trình trên theo biến *x* ta được:

$$3x^2y + x^3y' - y^3 - 3xy^2y' = 0$$

$$\Leftrightarrow y'\left(x^3 - 3xy^2\right) + 3x^2y - y^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{y^3 - 3x^2y}{x^3 - 3xy^2}$$

3. Đạo hàm của hàm ẩn

- ***Ví dụ***: Tìm y’ nếu $x^3 + y^3 = 6xy$.
- ***Giải***: Từ bài cho ta có:

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy$$

Suy ra: $F_x = 3x^2 - 6y$; $F_y = 3y^2 - 6x$

Vậy:

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = \frac{3x^2 - 6y}{6x - 3y^2} = \frac{x^2 - 2y}{2x - y^2}$$

3. Đạo hàm của hàm ẩn

- Hàm ẩn 2 biến $F(x, y, z) = 0, z = f(x, y)$ hay

$$F\big(x, y, f(x, y)\big) = 0$$

Lấy đạo hàm hai vế lần lượt đối với *x*, *y*

$$F'_x(x, y) + F'_z(x, y).z'_x = 0 \Leftrightarrow z'_x = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, F'_z(x, y, z) \neq 0$$

$$F'_y(x, y) + F'_z(x, y).z'_y = 0 \Leftrightarrow z'_y = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, F'_z(x, y, z) \neq 0$$

3. Đạo hàm của hàm ẩn

- ***Ví dụ.*** Tính đạo hàm của hàm ẩn xác định bởi phương trình
$$x + y + z = e^z. \quad z'_x, z'_y = ?$$

Lấy đạo hàm 2 vế phương trình đã cho theo biến *x*:

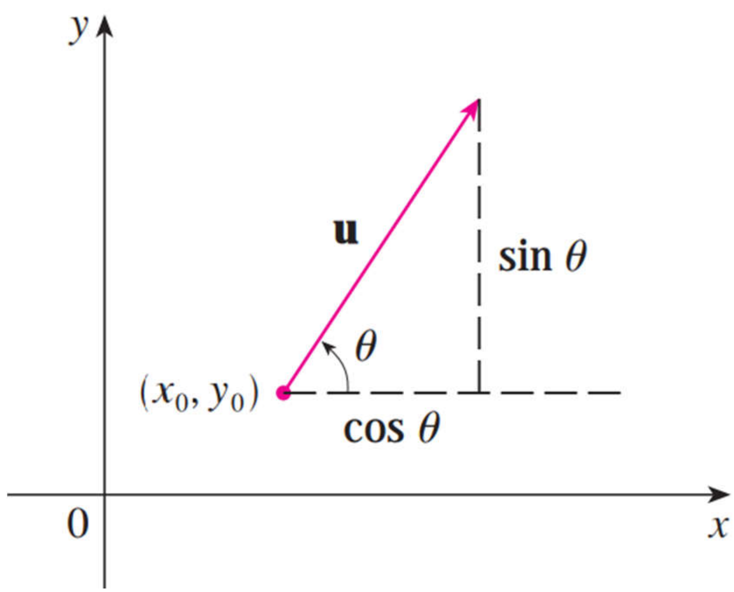
$$1 + z'_x = e^z.z'_x \Leftrightarrow z'_x = \frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{x + y + z - 1}$$

Lấy đạo hàm 2 vế phương trình đã cho theo biến *y*:

$$1 + z'_y = e^z.z'_y \Leftrightarrow z'_y = \frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{x + y + z - 1}$$

4. Đạo hàm theo hướng

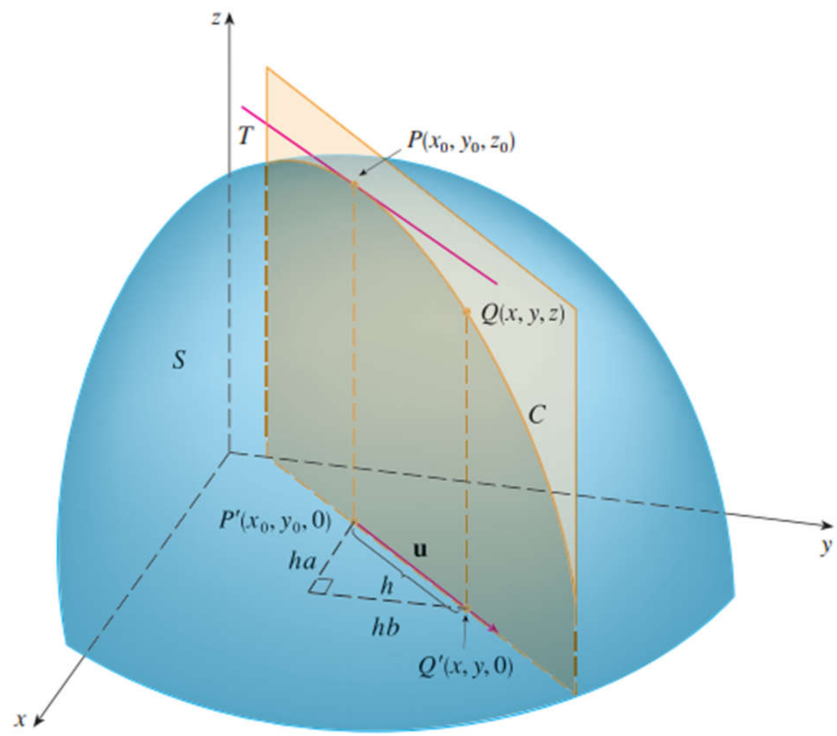
- Cho hàm $z = f(x, y)$.
- Khi đó f'_x , f'_y : tốc độ biến đổi của z theo phương x và y. Hay nói cách khác là theo hướng của véc-tơ đơn vị $\vec{i}, \vec{j}$.
- Giả sử cần tìm tốc độ biến đổi của z tại điểm (x_0, y_0) theo một phương tùy ý có véc-tơ đơn vị $\vec{u} = (a, b)$.



4. Đạo hàm theo hướng

- Xét mặt S có pt: $z = f(x, y) \Rightarrow z_0 = f(x_0, y_0)$
- Điểm $P(x_0, x_0, x_0) \in S$
- Mặt phẳng thẳng đứng (Q) đi qua P và $\vec{u}$ cắt S theo đường cong C.
- Độ dốc của đường tiếp tuyến

T đối với C tại P là tốc độ thay đổi của z theo hướng $\vec{u}$.



4. Đạo hàm theo hướng

- ***Định nghĩa***:

  Đạo hàm của f tại (x_0, y_0) theo hướng của vecto đơn vị $\vec{u} = (a, b)$ là:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

  Nếu giới hạn trên tồn tại.

- ***Định lý***:

Nếu f là hàm khả vi theo x, y. Khi đó f có đạo hàm theo hướng của vecto đơn vị $\vec{u} = (a, b)$ tùy ý và:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x, y) = f'_x(x, y).a + f'_y(x, y).b$$

4. Đạo hàm theo hướng

- Nếu vecto đơn vị $\vec{u}$ tạo với trục Ox một góc θ thì: $\vec{u} = (cos\theta, sin\theta)$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u}(x,y) = f'_x(x,y).cos\theta + f'_y(x,y).sin\theta$$

- ***Ví dụ***. Cho hàm $f = x^3 - 3xy + 4y^2$. Tính $\frac{\partial f}{\partial u}(1,2)$ với $\vec{u}$ là véc-tơ đơn vị tạo với trục Ox một góc $\theta = \pi/6$.

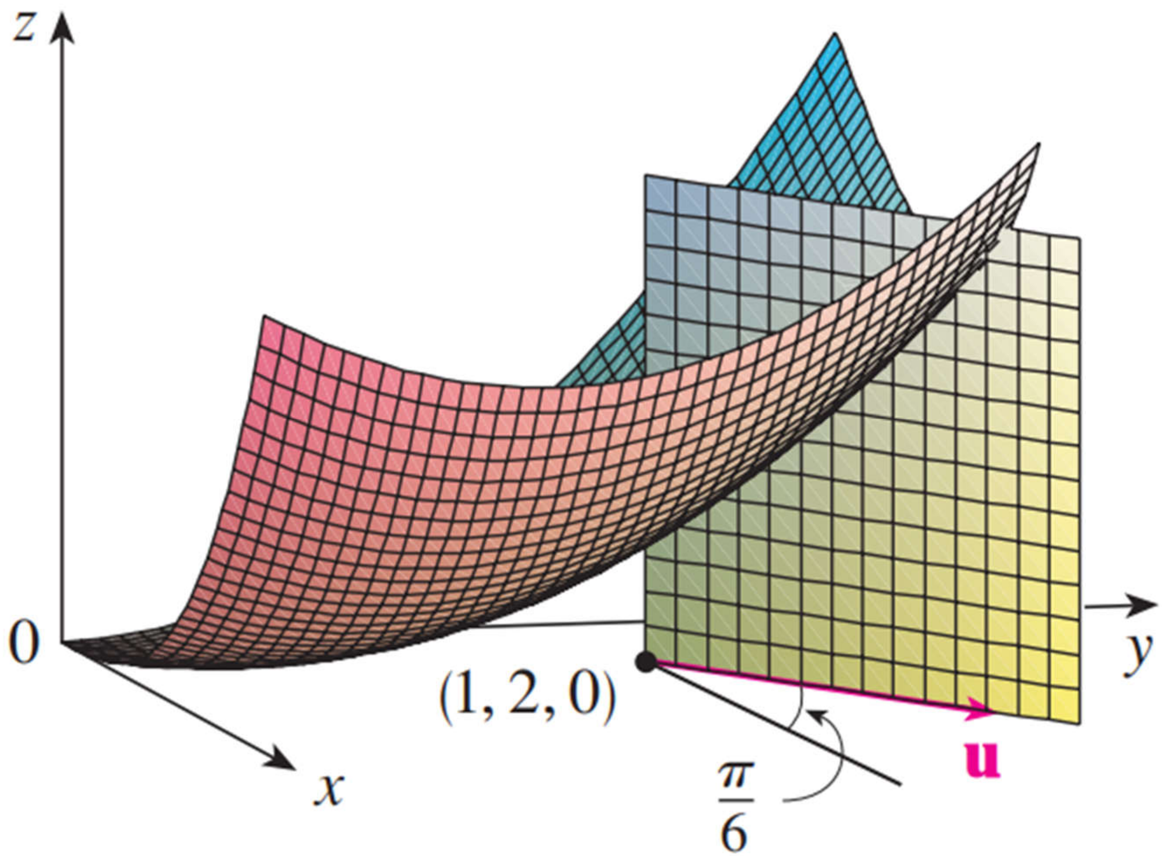
Ta có: $f'_x = 3x^2 - 3y \Rightarrow f'_x(1,2) = -3;$

$$f'_y = -3x + 8y \Rightarrow f'_x(1,2) = 13;$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u}(1,2) = -3.\cos\frac{\pi}{6} + 13\sin\frac{\pi}{6} = \frac{13 - 3\sqrt{3}}{2}.$$

4. Đạo hàm theo hướng

Hình minh họa



4. Đạo hàm theo hướng

❑ Vecto gradient

- ***Định nghĩa:*** Nếu *f* là hàm hai biến *x,y*, khi đó gradient của *f* là một hàm véc tơ, ký hiệu là ∇f được xác định bằng:

$$\nabla f(x,y) = \left\langle f'_x(x,y), f'_y(x,y). \right\rangle = \frac{\partial f}{\partial x}.\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}.\vec{j}$$

Suy ra:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x,y) = \nabla f(x,y).\vec{u}$$

4. Đạo hàm theo hướng

- ***Ví dụ***: Tìm đạo hàm theo hướng của hàm $f = x^2y^3 - 4y$ tại điểm $(2,-1)$ theo hướng của $\vec{v} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$.
- ***Giải***.

Ta có $f_x = 2xy^3$; $f_y = 3x^2y^2 - 4 \Rightarrow \nabla f(2,-1) = -4\vec{i} + 8\vec{j}$

$$\vec{v} = 2\vec{i} + 5\vec{j} \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{29} \neq 1$$

$\Rightarrow \vec{v}$ không phải là vecto đơn vị. Vecto đơn vị theo hướng $\vec{v}$:

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{2}{\sqrt{29}}\vec{i} + \frac{5}{\sqrt{29}}\vec{j}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u}(2,-1) = -4.\frac{2}{\sqrt{29}} + 8.\frac{5}{\sqrt{29}} = \frac{32}{\sqrt{29}}$$

4. Đạo hàm theo hướng

❑ Trường hợp hàm 3 biến

Véc-tơ gradient của hàm $f(x, y, z)$ ký hiệu là ∇f hoặc $\overrightarrow{grad} f$

$$\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

Suy ra:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z).\vec{u}$$

Trong đó: $\vec{u}$ là véc-tơ đơn vị.

4. Đạo hàm theo hướng

- Nếu $\vec{u}$ không là véc-tơ đơn vị:

Hàm số $f(x,y,z)$ khả vi tại M_0 thì:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = ch_{\vec{u}}.\overrightarrow{grad} f\left(M_0\right)$$

Hoặc:

$$\frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial \vec{u}} = \frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial z}\cos\gamma$$

với $\alpha = (\vec{i},\vec{u}), \beta = (\vec{j},\vec{u}), \gamma = \left(\vec{k},\vec{u}\right)$

4. Đạo hàm theo hướng

❖ **Giá trị lớn nhất của đạo hàm theo hướng**:

- ***Định lý***: Giả sử *f* là hàm khả vi 2 hoặc 3 biến. Giá trị lớn nhất của đạo hàm theo hướng $\frac{\partial f}{\partial u}(x, y, z)$ bằng với độ dài của véc-tơ gradient của hàm *f*, và nó xuất hiện khi $\vec{u}$ cùng hướng với véc-tơ gradient của *f*.

$$\max\left|\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{u}}\right| = \left|\overrightarrow{grad}\, f(M_0)\right|$$

4. Đạo hàm theo hướng

Ví dụ. Cho $f = x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz$.

Tính $\overrightarrow{grad} f$ và $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ tại $M_0(1,2,-1)$ biết $\vec{u}$ là véc-tơ đơn vị của $\overrightarrow{M_0M_1}$ với $M_1(2,0,1)$.

4. Đạo hàm theo hướng

- Hướng dẫn:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3yz; \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + 3xz; \frac{\partial f}{\partial z} = 3z^2 + 3xy$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{grad} f\left(M_0\right) = \left(-3,9,9\right)$$

$$\overrightarrow{M_0M_1} = \left(1,-2,2\right) \Rightarrow \vec{l} = ch_{\overrightarrow{M_0M_1}} = \left(\frac{1}{3},\frac{-2}{3},\frac{2}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\left(M_0\right) = \left(-3\right).\frac{1}{3} + 9.\left(\frac{-2}{3}\right) + 9.\frac{2}{3} = -1$$

4. Vi phân

❖ Vi phân toàn phần

Vi phân toàn phần của hàm *f(x,y)*:

$$df = f'_x dx + f'_y dy$$

❖ Áp dụng vi phân toàn phần để tính gần đúng:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f\left(x_0, y_0\right) + f'_x\left(x_0, y_0\right).\Delta x + f'_y\left(x_0, y_0\right).\Delta y$$

✓ Xác định hàm $f, \Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$

✓ Tính các đạo hàm riêng $f'_x, f'_y, f'_z, \ldots$

✓ Thay vào công thức

4. Vi phân

- ***Ví dụ.*** Tìm vi phân toàn phần của hàm số:

$$f(x, y) = \ln tan\frac{y}{x}$$

- ***Hướng dẫn***:

$$f_x' = \frac{-2y}{x^2 \sin\frac{2y}{x}}; \quad f_y' = \frac{2}{x \sin\frac{2y}{x}}$$

$$\Rightarrow df = f_x' dx + f_y' dy = \frac{-2y}{x^2 \sin\frac{2y}{x}} dx + \frac{2dy}{x \sin\frac{2y}{x}} = \frac{2(xdy - ydx)}{x^2 \sin\frac{2y}{x}}$$

4. Vi phân

- ***Ví dụ***. Tính gần đúng $\sqrt[3]{(1,01)^2+(0,05)^2}$

$f(x,y)=\sqrt[3]{x^2+y^2}=(x^2+y^2)^{1/3}$,

$M_0(1,0), \Delta x=0{,}01, \Delta y=0{,}05$

$$f'_x=\frac{2}{3}\frac{x}{\sqrt[3]{\left(x^2+y^2\right)^2}} \Rightarrow f'_x\left(M_0\right)=\frac{2}{3}$$

$$f'_y=\frac{2}{3}\frac{y}{\sqrt[3]{\left(x^2+y^2\right)^2}} \Rightarrow f'_y\left(M_0\right)=0$$

$$f\left(1,0\right)=1$$

$$\sqrt[3]{(1,01)^2+(0,05)^2}$$

$$\approx 1+\frac{2}{3}.0,01=1,0067$$

Bài tập

- ***Bài 1.*** Tính các đạo hàm riêng cấp 1 của các hàm số sau:

1) $f(x,y) = \ln\sin\dfrac{x+a}{\sqrt{y}}$

2) $f(x,y) = \ln\tan\dfrac{x}{y}$

3) $f(x,y) = \arctan\dfrac{y}{xz}$

4) $f(x,y) = \dfrac{x}{y} - e^{x}\arctan y$

5) $f(x,y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$

6) $f(x,y) = xyz + \dfrac{x}{yz}$

7) $f(x,y) = \sin(xy + yz)$

8) $f(x,y) = \tan(x+y)e^{x/y}$

9) $f(x,y) = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Bài tập

- ***Bài 2***. Tính các đạo hàm riêng của các hàm số hợp sau

1) $f(x,y)=f\left(x+y,x^2+y^2\right)$

2) $f(x,y)=f\left(\dfrac{x}{y},\dfrac{y}{x}\right)$

3) $f(x,y)=f\left(x-y,xy\right)$

4) $f(x,y)=f\left(x-y^2,y-x^2,xy\right)$

5) $f(x,y,z)=f\left(\sqrt{x^2+y^2},\sqrt{y^2+z^2},\sqrt{x^2+z^2}\right)$

Bài tập

6) $z = e^{u^2 - 2v^2},\ u = \cos x,\ v = \sqrt{x^2 + y^2};$

7) $z = x^2 \ln y, x = \dfrac{u}{v}, y = 3u - 2v$

8) $z = ue^{v} + ve^{-u},\ u = e^{x},\ v = x^2 y$

9) $z = xe^{\frac{x}{y}}, x = \cos t,\ y = e^{2t}$

10) $z = x\sqrt{1 + y^2},\ x = te^{2t},\ y = e^{-t}$

Bài tập

- **<u>Bài 3.</u>** Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của các hàm

1) $f(x,y) = \left(x^2 + y^2\right)^2$

2) $f(x,y) = \ln\left(x^2 + y^2\right)$

3) $f(x,y) = x^y$

4) $f(x,y) = e^{x-y^2} + \cos x$

5) $f(x,y) = \arctan\dfrac{x}{y}$

Bài 4

a) Chứng minh rằng hàm số:

$$u = \ln\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Thỏa mãn phương trình: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

b) Chứng minh rằng hàm số: $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ thỏa mãn:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Bài tập

Bài 5. Tìm hàm số $z = f(x, y)$ thỏa mãn phương trình:

a) $2z'_x - z'_y = 0$ bằng phép đổi biến số $u = x + y, v = x + 2y$.

b) $xz'_x - yz'_y = x^2 - y^2$ bằng phép đổi biến số $u = x + y, v = xy$.

Bài tập

Bài 6. Tính đạo hàm của các hàm số ẩn xác định bởi các phương trình sau:

1) $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0;\ y' = ?$

2) $\arctan\dfrac{x+y}{a} = \dfrac{y}{a};\ y' = ?$

3) $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \arctan\dfrac{y}{x};\ y' = ?$

4) $\mathrm{y}^5 + 3x^2y^2 + 5x^4 = 12;\ y' = ?$

5) $xyz = \cos(x + y + z);\ z'_x, z'_y = ?$

6) $xy^2z^3 + x^3y^2z = x + y + z;\ z'_x,\ z'_y = ?$

Bài tập

Bài 7.

a) $z = f(x, y)$ là hàm ẩn xác định bởi hệ thức

$$z - xe^{\frac{z}{y}} = 0$$

Tính gần đúng $f(0{,}02; 0{,}99)$.

b) Cho hàm số $u = \frac{x+z}{y+z}$, trong đó z là hàm số ẩn xác định bởi hệ thức:

$$ze^{z} = xe^{x} + ye^{y}$$

Tính u'_x, u'_y?

Bài tập

<u>Bài 8.</u> Đạo hàm theo hướng

- $f(x,y) = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ tại điểm *M(3,1)* theo hướng từ điểm này đến điểm *(6,5)*.
- $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ tại điểm *M(1,1)* theo hướng véc tơ $\vec{v} = 6\vec{\imath} + 8\vec{\jmath}$
- $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ tại điểm *M(1,1)* theo hướng phân giác của góc phần tư thứ nhất.
- $f(x,y,z) = \ln(e^x + e^y + e^z)$ tại gốc tọa độ và hướng lập với các trục tọa độ *x,y,z* các góc tương ứng α, β, γ.

Bài tập

Bài 9.

a) Chứng minh rằng hàm số $z = y\ln(x^2 + y^2)$ thỏa mãn phương trình

$$\frac{1}{x}z'_x + \frac{1}{y}z'_y = \frac{z}{y^2}$$

b) Hàm $z = z(x, y)$ là hàm ẩn xác định bởi hệ thức:

$$z^2 + \frac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}$$

Chứng minh rằng:

$$x^2 z'_x + \frac{1}{y} z'_y = \frac{1}{z}$$