1 Các giới hạn thường gặp

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1.$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}.$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1.$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha.$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}=1.$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1.$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1.$
- $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e.$
- $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{1/x}=\dfrac{1}{e}.$
- $\lim\limits_{x\to +\infty}x^\alpha=+\infty,\alpha>0.$
- $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x)^\alpha=+\infty,\alpha>0.$
- $\lim\limits_{x\to +\infty}a^x=+\infty,a>1.$
- $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e.$
- $\lim\limits_{x\to +\infty}\sin x$ không tồn tại.

Chú ý. $\lim\limits_{x\to x_0}[u(x)]^{v(x)}\ (1^\infty)=e^{\lim\limits_{x\to x_0}[u(x)-1]v(x)}$

2 Bảng đạo hàm các hàm số thường gặp

- $C'=0$
- $(x^\alpha)'=\alpha.x^{\alpha-1};\ \left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2};\ (\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
- $(a^x)'=a^x\ln a,\ (0<a\neq 1);\ (e^x)'=e^x$
- $(\log_a x)'=\dfrac{\log_a e}{x}=\dfrac{1}{x\ln a},\ (0<a\neq 1);$
  $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$
- $(\sin x)'=\cos x$
- $(\cos x)'=-\sin x$
- $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$
- $(\cot x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}=-(1+\cot^2 x)$
- $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan x)'=\dfrac{1}{x^2+1}$
- $(\text{arccotx})'=-\dfrac{1}{x^2+1}$

3 Các khai triển Maclaurin thông dụng

1/ $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n).$

2/ $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n}).$

3/ $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1}).$

4/ $(1+x)^m=1+C_m^1x+C_m^2x^2+\ldots+C_m^nx^n+o(x^n),\quad C_m^k=\dfrac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!},\ (m\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{N}).$

HQ: $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-\ldots+(-1)^nx^n+o(x^n)$ và $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+o(x^n).$

5/ $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\ldots(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+o(x^n).$

6/ $\arctan x=x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}+o(x^{2n}).$

Chú ý. Các công thức trên vẫn còn đúng nếu thay x bởi $\alpha(x)\to 0$.

4 Bảng tích phân cơ bản

- $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1)$
- $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$
- $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, (a > 0, a \neq 1)$
- $\int e^{ax+b} dx = \dfrac{1}{a} e^{ax+b} + C$
- $\int \sin(ax+b)dx = -\dfrac{\cos(ax+b)}{a} + C, (a \neq 0)$
- $\int \cos(ax+b)dx = \dfrac{\sin(ax+b)}{a} + C, (a \neq 0)$
- $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$
- $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$
- $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a} \arctan \dfrac{x}{a} + C, (a \neq 0)$
- $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C, (a \neq 0)$
- $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C = -\arccos \dfrac{x}{a} + C$
- $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$
- $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \dfrac{a^2}{2} \arcsin \dfrac{x}{a} + C$
- $\int \sqrt{x^2 \pm a}dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a} \pm \dfrac{a}{2} \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C$
- $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan \dfrac{x}{2}\right| + C$
- $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|\tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C$
- $\int \dfrac{dx}{\sin^2(ax+b)} = -\dfrac{1}{a} \cot(ax+b) + C, (a \neq 0)$
- $\int \dfrac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \dfrac{1}{a} \tan(ax+b) + C, (a \neq 0)$

5 Tích phân suy rộng loại 1

Ghi chú. Ta có kết quả

$$\boxed{I = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}\,(a > 0) \begin{array}{l} \nearrow \text{hội tụ} \Leftrightarrow \alpha > 1,\ I = \dfrac{1}{\alpha - 1} a^{1-\alpha}. \\ \searrow \text{phân kỳ} \Leftrightarrow \alpha \leq 1. \end{array}}$$

Chú ý. Nếu $f(x), g(x) > 0$, $\forall x \geq a$ và $f(x) \sim g(x)$, khi $x \to +\infty$ thì hai tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

6 Chuỗi số và chuỗi lũy thừa

6.1 Các chuỗi số dương quan trọng

Chuỗi quan trọng: Chuỗi cấp nhân (CSN) $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$ $(a \neq 0)$ và Chuỗi điều hòa $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha - \text{chuỗi})$.

- Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$ hội tụ $\Leftrightarrow |q| < 1$, tổng $S = \sum_{n=1}^{\infty} aq^n = \dfrac{aq}{1-q}$.
- Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$ phân kỳ $\Leftrightarrow |q| \geq 1$.

- Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ hội tụ khi và chỉ khi $\alpha > 1$, phân kỳ khi và chỉ khi $\alpha \le 1$.

Chú ý. Nếu $u_n, v_n > 0$, $u_n \sim v_n$ khi $n \to \infty$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

6.2 Các tiêu chuẩn (TC) hội tụ

Chú ý: *Cho* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *là chuỗi số dương có giới hạn*

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \,(\text{d'Alembert}) \quad \text{hoặc} \quad \rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}\,(\text{Cauchy}) \,\left(\rho \in \overline{\mathbb{R}}\right).$$

Khi đó: Nếu $\rho < 1$ *thì chuỗi hội tụ,* $\rho > 1$ *thì chuỗi phân kỳ.*

Chú thích: Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ có dấu bất kỳ thì ta áp dụng TC *d'Alembert* hoặc *Cauchy* cho chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$:

i/ Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ cũng hội tụ (tuyệt đối).

ii/ Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ phân kỳ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ cũng phân kỳ.

6.3 Bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa

Định lý. Giả sử tồn tại giới hạn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho \;\text{ hoặc }\; \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho \;(0 \le \rho \le +\infty).$$

Khi đó, *bán kính hội tụ* (BKHT) của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ cho bởi công thức

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}, & \text{nếu } 0 < \rho < +\infty, \\ 0, & \text{nếu } \rho = +\infty, \\ +\infty, & \text{nếu } \rho = 0. \end{cases}$$

Chú thích. Nếu tồn tại giới hạn $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ thì giới hạn đó chính là BKHT của chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Chú ý: Miền hội tụ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ = Khoảng hội tụ $(-R, R) \cup \{B\}$, với $B \in \{\pm R\}$, R là BKHT của chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

7 Đạo hàm riêng và vi phân

Cho hàm số $z = f(x, y)$

- **Vi** phân cấp 1: $df = f'_x dx + f'_y dy$
- **Vi** phân cấp 2: $d^2 f = f''_{xx} dx^2 + 2 f''_{xy} dx dy + f''_{yy} dy^2$

- Vi phân cấp n : $d^n f = \left(\frac{\partial\cdot}{\partial x}dx + \frac{\partial\cdot}{\partial y}dy\right)^n f \equiv \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}}(dx)^k (dy)^{n-k}$

Tính gần đúng dùng vi phân: Nếu hàm f khả vi tại điểm (x_0, y_0), và $|\Delta x|$, $|\Delta y|$ khá bé, ta có

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \simeq f(x_0, y_0) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y}_{df(x_0, y_0)}.$$

8 Cực trị

Thuật toán: Tìm cực trị của hàm $z = f(x, y)$.

- B1: Giải hệ $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$ để tìm điểm dừng $M_0(x_0, y_0)$.
- B2: Tính z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy} và suy ra

$$A = z''_{xx}(x_0, y_0),\ B = z''_{xy}(x_0, y_0), C = z''_{yy}(x_0, y_0), \text{ và } \Delta = B^2 - AC.$$

- B3: Kết luận: *i) Nếu $\Delta = B^2 - AC < 0$ và $A > 0$ (hay $C > 0$) thì f đạt cực tiểu tại M_0,*
  ii) Nếu $\Delta = B^2 - AC < 0$ và $A < 0$ (hay $C < 0$) thì f đạt cực đại tại M_0,
  iii) Nếu $\Delta = B^2 - AC > 0$ thì f không đạt cực trị tại M_0,
  iv) Nếu $\Delta = B^2 - AC = 0$ ta chưa kết luận và cần phải xét cụ thể.

Thuật toán Tìm cực trị của hàm $z = f(x, y)$ với điều kiện $\varphi(x, y) = 0$.

- Bước 1. Lập hàm Lagrange $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$.
- Bước 2. Giải hệ

$$\begin{cases} L'_x = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = 0 \\ L'_y = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = 0 \\ L'_\lambda = \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

  tìm điểm dừng $M_0(x_0, y_0)$ ứng với λ_0.

- Bước 3. Tính $\varphi_1 = \varphi'_x(M_0)$, $\varphi_2 = \varphi'_y(M_0)$, $L_{11} = L''_{xx}(M_0)$, $L_{12} = L_{21} = L''_{xy}(M_0)$, $L_{22} = L''_{yy}(M_0)$, và

$$\overline{D} = \overline{D}(x_0, y_0, \lambda_0) = \begin{vmatrix} 0 & \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1 & L_{11} & L_{12} \\ \varphi_2 & L_{21} & L_{22} \end{vmatrix}$$

- Bước 4. Kết luận:
  i/ $\overline{D} > 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực đại có điều kiện tại $M_0(x_0, y_0)$
  ii/ $\overline{D} < 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu có điều kiện tại $M_0(x_0, y_0)$.

9 Tích phân hàm nhiều biến

9.1 Cách tính tích phân hai lớp

1^0 *Xét trường hợp* $D = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) : a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ *là hình chữ nhật.*

i/ Nếu $f(x,y) = X(x)Y(y)$ thì

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \left(\int_a^b X(x)dx\right)\left(\int_c^d Y(y)dy\right).$$

ii/ Nếu $f(x,y)$ tùy ý thì

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$$

hay

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy.$$

2^0 *i/ Trường hợp* $D = \{(x,y) : a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$.

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\right)dx = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx.$$

ii/ Trường hợp $D = \{(x,y) : h_1(y) \le x \le h_2(y),\ c \le y \le d\}$.

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx\right)dy = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dxdy.$$

9.2 Cách tính tích phân đường loại 2

1/ $\overset{\frown}{AB} : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t),\ t := t_A = a \mapsto b = t_B. \end{cases}$ Ta có công thức:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \left[P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\right]dt.$$

2/ i/ $\overset{\frown}{AB} : y = y(x),\ x : x_A = a \mapsto b = x_B$. Ta có công thức

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \left[P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x)\right]dx.$$

ii/ $\overset{\frown}{AB} : x = x(y),\ y : y_A = c \mapsto d = y_B$. Ta có công thức

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_c^d \left[P(x(y),y)x'(y) + Q(x(y),y)\right]dy.$$

Công thức Green:

$$\boxed{\oint\limits_C Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.}$$

10 Phương trình vi phân

10.1 Phương trình vi phân cấp 1 thông dụng

10.1.3. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

• Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 có dạng

$$y' + p(x)y = q(x),\ a < x < b \tag{1}$$

• *Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange.* Tìm nghiệm tổng quát của (1) ở dạng

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}. \tag{2}$$

Thuật toán minh họa pp biến thiên hằng số Lagrange

- B1: Tính
$$A(x) = e^{-\int p(x)dx}.$$
- B2: Tính
$$B(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx = \int \frac{q(x)}{A(x)}dx.$$
- B3: Nghiệm tổng quát của (1) là
$$y = A(x)\left[B(x) + C\right],\ C \in \mathbb{R},$$
lưu ý các hằng số trong các tích phân ở B1 và B2 chọn bằng 0 (tức là ta chỉ lấy một nguyên hàm).

10.2 Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 có hệ số hằng

• Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 có hệ số hằng là phương trình có dạng

$$y'' + py' + qy = f(x),\ a < x < b, (p, q \in \mathbb{R}) \tag{3}$$

• Phương trình thuần nhất của phương trình (3) là

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{4}$$

• Phương trình đặc trưng của (4) là

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{5}$$

Ta có các trường hợp sau:

∘ i/ Phương trình (5) có hai nghiệm thực phân biệt k_1, k_2. Nghiệm tổng quát của phương trình (4) là

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

∘ ii/ Phương trình (5) có nghiệm kép k. Nghiệm tổng quát của phương trình (4) là

$$y = C_1e^{kx} + C_2xe^{kx} = e^{kx}\left(C_1 + C_2x\right),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

∘ iii/ Phương trình (5) có nghiệm phức $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. Nghiệm tổng quát của phương trình (4) là

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$