GIẢI TÍCH 1

Chương 5 Chuỗi số và chuỗi hàm

5.1 Chuỗi số

5.1.1 Các khái niệm cơ bản

Định nghĩa 5.1.1.1

Cho dãy số vô hạn $\{u_n\}, n \in \mathbb{N}^*$,

tổng vô hạn $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \ldots$ được gọi là chuỗi số

ký hiệu $$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

u_n gọi là số hạng thứ n hay số hạng tổng quát

Dãy tổng riêng

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

tổng riêng thứ n của chuỗi số. $\Rightarrow$ dãy các tổng riêng $\{S_n\}, n \in \mathbb{N}^*$.

Chuỗi số hội tụ, phân kỳ

Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

$\Rightarrow$ chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ và có tổng là S.

$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ hoặc không tồn tại $\Rightarrow$ chuỗi là phân kỳ.

sự hội tụ của chuỗi số được định nghĩa theo khái niệm ε

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists n_0 > 0 : n > n_0 \Rightarrow |S_n - S| < \varepsilon$$

Phần dư của chuỗi hội tụ

Khi chuỗi số hội tụ đến giá trị S :

$$R_n = S - S_n$$

phần dư thứ n của chuỗi số và $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$.

Ví dụ 5.1.1.1

Xét chuỗi lập bởi dãy cấp số nhân vô hạn $\{u_n\}, u_1 = a$ và công bội là q, còn được gọi là chuỗi hình học (geometric series):

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

Ta nhận thấy rằng:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} u_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \begin{cases} \dfrac{u_1}{1-q}, & |q| < 1 \\ \infty, & |q| \geq 1 \end{cases}$$

Vậy chuỗi hội tụ khi $|q| < 1$ và giới hạn của chuỗi là $S = \dfrac{u_1}{1-q}$.

Ví dụ 5.1.1.2

Xét chuỗi lập bởi dãy cấp số cộng vô hạn $\{u_n\}$ với $u_1 = a$ và công sai là d:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a + (n-1)d) \Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ ⇨ chuỗi phân kỳ.

Ví dụ 5.1.1.3 Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n!}$

$$u_n = \frac{2}{n!} \Rightarrow S_n = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2(e-1) \text{ (Khai triển Maclaurin của } e^x, x = 1)$$

Chuỗi hội tụ và có tổng là $S = 2(e-1)$.

Ví dụ 5.1.1.4 Chứng minh chuỗi sau hội tụ và tìm tổng của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Lập tổng riêng:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

Tiếp tục biến đổi:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} S_n = 1$$

5.1.2 Tiêu chuẩn hội tụ

Định lý 5.1.2.1 (Điều kiện cần)

Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ thì $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Thật vậy, ta có $u_n = S_n - S_{n-1}$

vì chuỗi hội tụ nên $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$ do đó $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Từ định lý này suy ra tiêu chuẩn để kiểm xem xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, đó là nếu $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ hoặc không tồn tại thì chuỗi phân kỳ.

Ví dụ 5.1.2.1 Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n}$

Vì $\lim_{n\to\infty} \cos \frac{1}{n} = 1 \neq 0$ nên chuỗi phân kỳ.

Ví dụ 5.1.2.2

Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{(n+1)(n+2)}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{(n+1)(n+2)} = 1$ $\Rightarrow$ chuỗi phân kỳ.

Ví dụ 5.1.2.3 Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{1+n}}$.

Vì $|u_n| = \frac{n}{\sqrt{1+n}} \to \infty$ khi $n \to \infty$, nghĩa là $u_n \nrightarrow 0$ nên chuỗi phân kỳ.

Định lý 5.1.2.2 (Tiêu chuẩn Cauchy)

Điều kiện cần và đủ để chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hôi tụ là:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 > 0 : p > q > n_0 \Rightarrow |S_p - S_q| < \varepsilon$$

Chứng minh

Theo định nghĩa,

sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ chính là sự hội tụ của dãy tổng riêng $\{S_n\}$.

Do đó, điều kiện trên chính là điều kiện để dãy $\{S_n\}$ là dãy Cauchy

và đã được chứng minh trong chương 2.

Ví dụ 5.1.2.4

Xét sự hội tụ của chuỗi điều hòa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \text{không thể kết luận chuỗi hội tụ.}$$

Ta sẽ chứng minh chuỗi phân kỳ bằng tiêu chuẩn Cauchy.

tồn tại ít nhất $\varepsilon = \frac{1}{2}$ và với $\forall n > 0, p = 2n \geq n, q = n$ ta luôn luôn có:

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} = \varepsilon$$

Vậy chuỗi là phân kỳ.

5.1.3 Các tính chất chuỗi hội tụ

- **Tính chất 1**

$$\left.\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u \\ \sum_{n=1}^{\infty} v_n = v\end{aligned}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = u \pm v$$

Thật vậy,

$$S_n^u = \sum_{k=1}^{n} u_k,\ S_n^v = \sum_{k=1}^{n} v_k$$

$$S_n^u \pm S_n^v = \sum_{k=1}^{n} (u_k \pm v_k) \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (S_n^u \pm S_n^v) = \lim_{n\to\infty} S_n^u \pm \lim_{n\to\infty} S_n^v = u \pm v$$

- **Tính chất 2**

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u \ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (ku_n) = ku,\ k = const$$

Chứng minh tương tự dựa vào tính chất của dãy hội tụ $\lim\limits_{n\to\infty} (kS_n) = k \lim\limits_{n\to\infty} (S_n)$.

- **Tính chất 3**

Tính hội tụ hay phân kỳ của một chuỗi vẫn không đổi nếu ta bỏ đi một số hữu hạn các số hạng đầu tiên của chuỗi.

Thật vậy, xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Ta có thể tách m (hữu hạn) số hạng đầu tiên của chuỗi như sau:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{m} u_n + \sum_{n=m+1}^{\infty} u_n \quad = a + \sum_{n=m+1}^{\infty} u_n,\ a \text{ giá trị hữu hạn}$$

a là số hữu hạn nên hai chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=m+1}^{\infty} u_n$ có cùng tính hội tụ hay phân kỳ.

Ví dụ 5.1.3.1 Xét tính hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{(n+10)!}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{(n+10)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n!} - \sum_{n=1}^{10} \frac{5}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n!} - a$$

Với a hữu hạn và chuỗi ở vế phải hội tụ nên chuỗi đang xét hội tụ và có tổng là $5(e-1)-a$.

Ví dụ 5.1.3.2

Chứng minh chuỗi phân kỳ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+100)}$$

Xét chuỗi điều hòa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n} + \sum_{n=101}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \quad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+100} = \infty$$

Ví dụ 5.1.3.3 Chứng minh chuỗi sau hội tụ và tìm tổng $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{12}{3n^2 - 27n + 60}$

$$\frac{12}{3n^2 - 27n + 60} = \frac{4}{(n-4)(n-5)} = \frac{4}{n-5} - \frac{4}{n-4}$$

$$S_n = 4\sum_{k=6}^{n} \Big(\frac{1}{k-4} - \frac{1}{k-5}\Big)$$

$$= 4\Big[(\frac{1}{1} - \frac{1}{-2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n-5} - \frac{1}{n-4})\Big] = 4(1 - \frac{1}{n-4})$$

Chuỗi hội tụ và có tổng là $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} 4(1 - \frac{1}{n-4}) = 4.$

5.1.4 Chuỗi số dương

5.1.4.1 Định nghĩa

Định nghĩa 5.1.4.1

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ được gọi là chuỗi dương nếu $u_n > 0, \forall n \geq 1$.

Chẳng hạn các chuỗi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n!},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{(n+1)(n+2)}$$

5.1.4.2 Tiêu chuẩn hội tụ đối với chuỗi dương

Định lý 5.1.4.1 (Tiêu chuẩn so sánh)

Cho $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ là hai chuỗi dương

và thỏa mãn điều kiện $u_n \leq v_n, \forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}^*$. Khi đó:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ

2) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kỳ

Chứng minh

1) Gọi S_n^u và S_n^v là các tổng riêng của 2 chuỗi tương ứng.

Do bớt đi một số hữu hạn đầu tính hội tụ/phân kỳ vẫn không đổi nên có thể xem $n_0 = 1$.

Vì dãy $\{S_n^v\}$ hội tụ nên bị chặn bởi $M > 0$. Ta có:

$$u_n \leq v_n, \forall n \geq 1 \Rightarrow S_n^u = \sum_{k=1}^{n} u_k \leq S_n^v = \sum_{k=1}^{n} v_k \leq M$$

dãy $\{S_n^u\}$ tăng và bị chặn trên bởi M nên hội tụ vậy suy ra (*đpcm*).

2) Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ thì $\lim_{n\to\infty} S_n^v > \lim_{n\to\infty} S_n^u = +\infty$.

Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kỳ.

Ví dụ 5.1.4.1 Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{3^n+4}$.

Ta thấy rằng $u_n = \frac{7}{3^n+4} > 0,\ \forall n > 0$ nên chuỗi đang xét là chuỗi dương và:

$$\frac{7}{3^n+4} < \frac{7}{3^n} = 7\left(\frac{1}{3}\right)^n, \forall n > 0$$

Vì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ hội tụ (cấp số nhân vô hạn và $q = 1/3 < 1$),

do đó chuỗi đang xét hội tụ.

Ví dụ 5.1.4.2 Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{\sqrt{n}+3}$.

$$\frac{12}{\sqrt{n}+3} \geq \frac{12}{n+3},\ \forall n > 0$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{n+3}$ phân kỳ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{\sqrt{n}+3}$ phân kỳ.

Định lý 5.1.4.2 (So sánh giới hạn)

Cho $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ là hai chuỗi dương và thỏa mãn điều kiện

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = K, 0 < K < \infty.$$

Khi đó hai chuỗi cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Chứng minh

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = K \qquad \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists n_0 > 0 : \forall n > n_0 \Rightarrow K - \varepsilon \le \frac{u_n}{v_n} \le K + \varepsilon$$

$$\Rightarrow (K - \varepsilon)v_n \le u_n \le (K + \varepsilon)v_n$$

suy ra hai chuỗi cùng hội tụ /phân kỳ.

Ví dụ 5.1.4.3

Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{2}{\sqrt{n}})$.

Xử dụng định lý (5.1.4.2) và đưa vào chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$:

$$u_n = \ln(1+\frac{2}{\sqrt{n}}), v_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2/\sqrt{n}}{1/\sqrt{n}} = 2$$

Vì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ phân kỳ $\quad (\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}) \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{2}{\sqrt{n}})$ phân kỳ.

Hoặc chúng ta có thể sử dụng phương pháp xấp xỉ để tìm số hạng v_n:

$$\ln(1+\frac{2}{\sqrt{n}}) \approx \frac{2}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}, \quad \text{khi } n \to \infty$$

Từ đây suy ra chuỗi đang xét phân kỳ.

Ví dụ 5.1.4.4 Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n}$.

Cách 1:

$$u_n = \frac{1}{2^n - n} \text{ và xét } v_n = \frac{1}{2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - n/2^n} = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n} \text{ hội tụ vì } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \text{ hội tụ}$$

Cách 2:

$$u_n = \frac{1}{2^n - n} = \frac{1}{2^n(1 - n/2^n)} \approx \frac{1}{2^n} \text{ khi } n \to \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n} \text{ hội tụ}$$

Định lý 5.1.4.3 (Tiêu chuẩn D'Alambert)

Cho $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ là chuỗi dương và giả sử tồn tại

giới hạn (hữu hạn hay vô hạn) $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = D$. Khi đó:

1) Nếu $D < 1$ thì chuỗi hội tụ

2) Nếu $D > 1$ thì chuỗi phân kỳ

Chứng minh

1) Ta có:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = D \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 > 0 : n > n_0 \Rightarrow \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - D\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \le (D+\varepsilon)u_n \le (D+\varepsilon)^2 u_{n-1} \le \cdots \le (D+\varepsilon)^{n-n_0+1} u_{n_0}$$

Vì $\varepsilon > 0$ tùy ý nên ta có thể chọn sao cho $D + \varepsilon < 1$ (dãy số nhân công bội 0<q<1)

$\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} (D+\varepsilon)^{n-n_0+1} u_{n_0}$ hội tụ suy ra chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ

2) Nhờ có $u_{n+1} \geq (D-\varepsilon)^{n-n_0+1} u_{n_0}$. Chọn $\varepsilon > 0$ sao cho $D - \varepsilon > 1$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (D - \varepsilon)^{n-n_0+1} u_{n_0} \text{ phân kỳ suy ra } (\textit{đpcm}).$$

Ví dụ 5.1.4.5 Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} n^k \alpha^n, \alpha > 0.$

Áp dụng tiêu chuẩn D'Alembert

$$u_n = n^k \alpha^n, u_{n+1} = (n+1)^k \alpha^{n+1} \qquad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^k \alpha = \alpha$$

Do đó chuỗi hội tụ khi $\alpha < 1$ và phân kỳ khi $\alpha > 1$.

Khi $\alpha = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^k$ nên phân kỳ.

Định lý 5.1.4.4 (Tiêu chuẩn Cauchy)

Cho $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ là chuỗi dương và giả sử tồn tại

giới hạn (hữu hạn hay vô hạn) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = C$. Khi đó:

1) Nếu $C < 1$ thì chuỗi hội tụ

2) Nếu $C > 1$ thì chuỗi phân kỳ

Chứng minh

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = C \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists n_0 > 0 : n > n_0 \Rightarrow |\sqrt[n]{u_n} - C| < \varepsilon$

$\Rightarrow \sqrt[n]{u_n} \leq (C+\varepsilon) \Rightarrow u_n \leq (C+\varepsilon)^n,$ chọn $\varepsilon : C+\varepsilon < 1$

Do đó chuỗi hội tụ khi $C < 1$.

2) Chứng minh tương tự.

Ví dụ 5.1.4.6 Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4} \cos^{2n} \alpha, 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$.

Áp dụng tiêu chuẩn Cauchy:

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{2}{n^{4/n}} \cos^2 \alpha, \text{ đặt } y = n^{\frac{4}{n}} \Rightarrow \ln y = \frac{4}{n} \ln n$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln y = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} \ln n \overset{L}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y = \lim_{n\to\infty} n^{4/n} = 1$$

$$\Rightarrow C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 2\cos^2 \alpha$$

Do đó chuỗi hội tụ khi $C = 2\cos^2 \alpha < 1 \quad \Rightarrow \cos \alpha < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha < \frac{\pi}{4}$.

Chuỗi phân kỳ khi $2\cos^2 \alpha > 1 \Rightarrow \alpha > \frac{\pi}{4}$.

Khi $\alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2\cos^2 \alpha = 1$ chuỗi trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Đây là chuỗi hội tụ và có giới hạn là $S = \frac{\pi^4}{90}$ (Mathematics Handbook, [6]).

Định lý 5.1.4.5 (Tiêu chuẩn tích phân Maclaurin-Cauchy)

Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục, dương, giảm trên $[1,+\infty)$. Khi đó

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \text{ và chuỗi } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ với } f(n) = u_n$$

cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Chứng minh

Chia khoảng $[1,+\infty)$ thành các đoạn bởi các điểm chia $k \in \mathbb{N}^*$.

Với $\forall x \in [k-1,k]$ ta có:

$$f(k-1) \geq f(x) \geq f(k) \qquad \Leftrightarrow u_{k-1} \geq f(x) \geq u_k \ \Rightarrow u_{k-1} \geq \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \geq u_k$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} u_k \geq \int_1^n f(x)\,dx \geq \sum_{k=1}^{n} u_k - u_1$$

Đặt $I_n = \displaystyle\int_1^n f(x)\,dx$ và sử dụng định nghĩa tổng riêng $\Rightarrow$ $S_{n-1} \geq I_n \geq S_n - u_1$

+ Nếu tích phân suy rộng $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ hội tụ, nghĩa là dãy I_n hội tụ.

Mặt khác $S_n \leq I_n + u_1$

nên dãy tổng riêng S_n cũng hội tụ, nghĩa là chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

+ Nếu tích phân suy rộng phân kỳ, nghĩa là dãy I_n phân kỳ.

Do $S_{n-1} \geq I_n$

nên dãy S_n phân kỳ, nghĩa là chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.

Ví dụ 5.1.4.7 Xét sự hội tụ của chuỗi Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$.

Xét tích phân suy rộng $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$

$f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ thỏa mãn tính liên tục, dương và giảm trên $[1, +\infty)$.

tích phân này chỉ hội tụ khi $\alpha > 1$ và phân kỳ với $\alpha \leq 1$

$\Rightarrow$ chính là điều kiện hội tụ/phân kỳ của chuỗi đang xét.

Ví dụ 5.1.4.8 Xét sự hội tụ của chuỗi $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$.

Xét hàm $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ $\quad\Rightarrow f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2} = 0$ tại $x = e$.

Do đó hàm f(x) >0, liên tục và giảm trên $[3, +\infty)$,

thỏa mãn điều kiện của tiêu chuẩn tích phân Maclaurin-Cauchy.

$$\int_3^{\infty} \frac{\ln x}{x}\, dx = \frac{1}{2} \lim_{t\to+\infty} [(\ln t)^2 - (\ln 3)^2] = +\infty$$

Vậy chuỗi phân kỳ.

5.1.5 Chuỗi có số hạng bất kỳ

5.1.5.1 Hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ

Định nghĩa 5.1.5.1

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ với u_n có dấu bất kỳ được gọi là hội tụ tuyệt đối nếu

$$\text{chuỗi } \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ hội tụ.}$$

Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ phân kỳ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ được gọi là bán hội tụ hay hội tụ có điều kiện.

Các định lý (5.1.4.3: Tiêu chuẩn D'Alambert) và (5.1.4.4: Tiêu chuẩn Cauchy) có thể áp dụng cho chuỗi số bất kỳ và lúc đó:

$$D = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \begin{cases} < 1 & \text{Chuỗi hội tụ tuyệt đối} \\ > 1 & \text{Chuỗi phân kỳ} \\ = 1 & \text{Không có kết luận} \end{cases}$$

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} \begin{cases} < 1 & \text{Chuỗi hội tụ tuyệt đối} \\ > 1 & \text{Chuỗi phân kỳ} \\ = 1 & \text{Không có kết luận} \end{cases}$$

Định lý 5.1.5.1

Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ cũng hội tụ.

Chứng minh

Vì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ nên theo tiêu chuẩn Cauchy:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 > 0 : p > q > n_0 \Rightarrow |S_p - S_q| = \sum_{k=q}^{p} |u_k| < \varepsilon$$

Mặt khác $|\sum_{k=q}^{p} u_k| \leq \sum_{k=q}^{p} |u_k| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ cũng thỏa mãn tiêu chuẩn Cauchy nên hội tụ.

Ví dụ 5.1.5.1 Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n}$.

$$\left|\frac{(-1)^n}{n2^n}\right| < \frac{1}{2^n}$$

Vì $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ hội tụ nên $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n}$ hội tụ tuyệt đối.

5.1.5.2 Chuỗi đan dấu

Định nghĩa 5.1.5.2 Chuỗi đan dấu là một chuỗi có dạng

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n \text{ hay } \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n$$

Trong đó tất cả các số hạng $a_n > 0$ và chuỗi đan dấu bắt đầu với dấu "+" hay "-". Chẳng hạn:

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$$

$$-1+\frac{4}{3}-\frac{6}{4}+\frac{8}{5}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2n}{n+1}$$

Chuỗi thứ nhất có $a_n = \dfrac{1}{2n-1} > 0$ và chuỗi thứ hai có $a_n = \dfrac{2n}{n+1} > 0$.

Định lý 5.1.5.4 (Tiêu chuẩn Leibniz)

Giả sử chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ với các số hạng a_n lập nên dãy giảm và $a_n \to 0$ khi $n \to \infty$. Thế thì:

1) Chuỗi đan dấu hội tụ và có tổng $S < a_1$.

2) Phần dư $|R_n| = |S - S_n| < a_{n+1}$

Chứng minh

1) + Nếu $n = 2m$:

$$\left.\begin{array}{l} S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2m-1} - a_{2m}) \\ S_{2m+2} = S_{2m} + (a_{2m+1} - a_{2m+2}) \end{array}\right\} \Rightarrow \{S_{2m}\} \text{ tăng}$$

Mặt khác:

$$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m} < a_1, \forall m \in \mathbb{N}^*$$

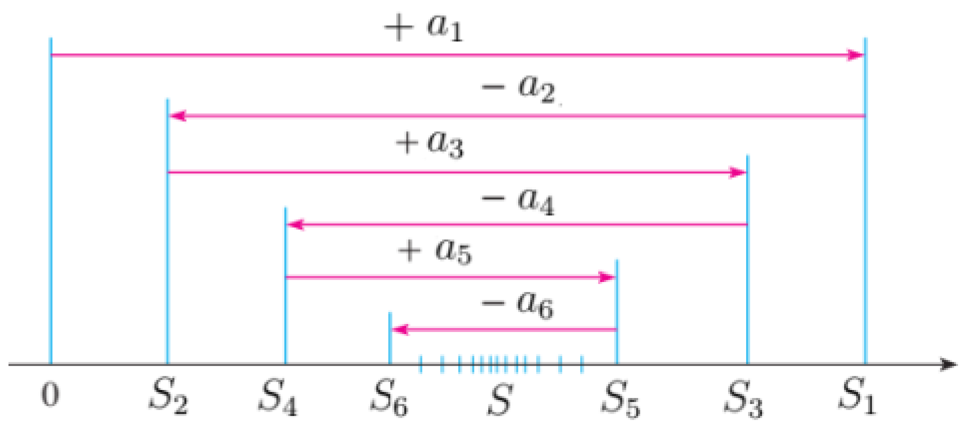
Suy ra dãy $\{S_{2m}\}$ hội tụ và $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S < a_1$.

+ Nếu $n = 2m + 1$:

$$S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1} \Rightarrow \lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty}(S_{2m} + a_{2m+1}) = S$$

Tổng hợp cả hai trường hợp ta có được *đpcm*.

2) Ta sẽ chứng bằng sơ đồ các tổng riêng của chuỗi đan dấu.



Hình 5.1: Sơ đồ các tổng riêng của chuỗi đan dấu

Từ Hình (5.1) ta dễ dàng nhận thấy rằng $S_n < S < S_{n+1}$ hoặc $S_{n+1} < S < S_n$.

Do đó:

$$|R_n| = |S - S_n| \leq |S_{n+1} - S_n| = a_{n+1}$$

Ví dụ 5.1.5.3 Xét tính hôi tụ của chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}$.

Chuỗi thỏa mãn điều kiện của định lý Leibniz nên chuỗi hội tụ và có tổng $S < 1/5$.

Tuy nhiên, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n}$ phân kỳ.

Do đó chuỗi đang xét bán hội tụ.

Sai số $|R_5| \leq a_6 = \frac{1}{15}$.

Ví dụ 5.1.5.4 Xét tính hôi tụ của chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^2}{n^3+1}$.

Rõ ràng $a_n = \frac{n^2}{n^3+1} > 0, a_n \to 0$ khi $n \to \infty$ và ta cần chứng minh a_n giảm.

Đặt $f(x) = \frac{x^2}{x^3+1}, x > 0$ ta có:

$$f'(x) = \frac{x(2-x^3)}{(x^3+1)^2} < 0 \Leftrightarrow 2 - x^3 < 0 \Leftrightarrow x > \sqrt[3]{2} \Leftrightarrow x > 1$$

Suy ra a_n giảm khi $n \geq 2$.

Do đó chuỗi thỏa mãn điều kiện của định lý Leibniz nên hội tụ

và có tổng $S < 1/2$.

Exercises

11.7 Strategy for Testing Series

1–38 Test the series for convergence or divergence.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{n^3 + 1}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - 1}{n^3 + 1}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 - 1}{n^3 + 1}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(1 + n)^{3n}}$

7. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^4}{4^n}$

9. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n)!}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^3} + \frac{1}{3^n} \right)$

12. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k^2 + 1}}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^2}{n!}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n}{1 + 2^n}$

15. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1} 3^{k+1}}{k^k}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^4 + 1}}{n^3 + n}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n - 1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cdots \cdot (3n - 1)}$

18. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n} - 1}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

20. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{k} - 1}{k(\sqrt{k} + 1)}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos(1/n^2)$

22. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2 + \sin k}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \tan(1/n)$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin(1/n)$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^{n^2}}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{5^n}$

27. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \ln k}{(k + 1)^3}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\cosh n}$

30. $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{\sqrt{j}}{j + 5}$

31. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{3^k + 4^k}$

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{4n}}$

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n + 1}\right)^{n^2}$

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + n\cos^2 n}$

35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$

36. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

Bài tập

For problems 10 – 12 show that the series is divergent.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9-2n^2}{1+4n+n^2}$

11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n+1}{3^n}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n)$

Special Series

For each of the following series determine if the series converges or diverges. If the series converges give its value.

1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{-2}{n^2+n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} 5^{n+3}\, 4^{n}$

4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{4^{n+1}\, 5^{1-n}}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{14n}$

6. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7}{n^2+5n+6}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} 4^{1+2n}\, 3^{2-3n}$

8. $\sum_{n=4}^{\infty} 4^{1+2n}\, 3^{2-3n}$

9. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{5}{n^2-1}$

10. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2-4n+3}$

11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^{3+n}}{2^{2+3n}}$

Integral Test

For each of the following series determine if the series converges or diverges

1. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4}{\left(\sqrt{n}\right)^{3}}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[7]{n^{2}}\ \sqrt[6]{n}}$

3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$

4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{8}{\left(n+10\right)^{2}}$

5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^{2}+1}$

6. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln\left(n\right)}{n}$

7. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^{3}}{n^{4}+1}$

8. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^{3}}{\left(n^{4}+1\right)^{2}}$

9. $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty}\frac{4}{n^{2}-n-6}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{n^{2}+5n+4}$

11. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}n\,\mathbf{e}^{-n}$

Comparison Test/Limit Comparison Test

For each of the following series determine if the series converges or diverges.

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+n}{2^{n+1}}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-3}{2n^5}$

3. $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(n-3)}$

4. $\displaystyle\sum_{n=8}^{\infty}\frac{\ln\left(n^2\right)}{n}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{(n+1)^3}$

6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n-4}{\left(n^2+1\right)\mathbf{e}^n}$

7. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{2+\cos^2(5n)}}{\sqrt{n^2-n-1}}$

8. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n-1}{\sqrt{n^3+n+3}}$

9. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3n^2+7n-1}{n^4-n+3}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\sin(n))(1+\sin(n))}{n^2+8n+1}$

Alternating Series Test

For each of the following series determine if the series converges or diverges.

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+7}}{n^2+3}$

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-2}}{3^n+3n}$

3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3+4n^2+8}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-2)^n(6n+1)}$

5. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{4n\cos(n\pi)}{2n^2+1}$

6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-10}\,n^2}{n^3+n^2+4}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+5}(2n+1)}{n^2+8}$

Absolute Convergence

For each of the following series determine if they are absolutely convergent or conditionally convergent.

1. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-2}}{\sqrt[3]{n-1}}$

2. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{n^4}$

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-3}n}{4n^2+3}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+6}(1+n^2)}{n^4}$

5. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos^3(n)}{n^3-n}$

Ratio Test

For each of the following series determine if the series converges or diverges.

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+n^2}{(n+1)!}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{5^{1-n}(n+1)}$

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{(3n)!}$

4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^{4+n}}{3n^2+1}$

5. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4^{1+\frac{1}{2}n}n^2}{3^{2+n}(n+3)}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(-1)^{n+2}(n^2+n+1)}$

7. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{6^{-2n}(n-4)}{4^{3-2n}(2-n^2)}$

8. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{n^2+1}$

Root Test

For each of the following series determine if the series converges or diverges.

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{1-3n}}{(-3)^{1-2n}}$

2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{5n^2-2n+1}{3n^2+n-3}\right)^{-n}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^{3+5n}}{n^{1+n^2}}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6-9n}{2+4n}\right)^{\frac{1}{2}n}$

Bài tập

I. Khảo sát sự hội tụ và tính tổng (nếu có):

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-9}$

4. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2(n-1)^2}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}+7^n}{12^n}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2-3n+2}$

II. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{3^n}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4^n+3}}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sin\frac{\pi}{n}}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \tan\frac{\pi}{n}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n^2+1)5^n}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{7n+4}{7n}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+2}\right)^{n^2}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln\frac{2n+1}{n}\right)^{n}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{4^n+1}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2 2^n}$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+1)\arctan n}$

III. Chứng tỏ các chuỗi sau bán hội tụ

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n^2+n+1}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2n+1}{n^2+1}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2n^2+1}{n^3+3}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt{2n-1}}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{n^2+1}$

For each of the following series determine if the series converges or diverges. If the series converges give its value.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{2+n}\, 2^{1-3n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{6n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-6)^{3-n}}{8^{2-n}}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2+7n+12}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{7^{n-2}}$

6. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{7^{n-2}}$

7. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{10}{n^2-4n+3}$

Show that the series in Exercises 1–8 converge, using the comparison test for series with positive terms.

1. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{8}{3^i + 2}$

2. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{9}{4^i + 6}$

3. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i - 1}$

4. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{4^i - 3}$

5. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{3^i + 2}$

6. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{4^i + 1}$

7. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin i}{2^i - 1}$

8. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi i)}{3^i - 1}$

Show that the series in Exercises 9–12 diverge, by using the comparison test.

9. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{3}{2+i}$

10. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{8}{5+7i}$

11. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{8}{6i-1}$

12. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{3}{2i-1}$

Test the series in Exercises 13–34 for convergence.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^n+2}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-4}{2^n+3}\right)^n$

15. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i+3^i}$

16. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(1/2)^i}{i+6}$

17. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3i+1/i}$

18. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{2i+1}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n+5^n}{2^n 3^n}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3+n}}{4^n}$

21. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^i}{8i+2^{i+1}}$

22. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-2)^i}{3^i+1}$

23. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i+2}}$

24. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i}+1}$

25. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{3i}{2^i}$

26. $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^j}{j}$

27. $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{i}+\frac{2}{i^2}+\frac{3}{i^3}\right)$

28. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{3}{1+3^i}$

29. $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sin j}{2^j}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n}$

31. $\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{\ln i}$

32. $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{i}{i+2}\right)^i$