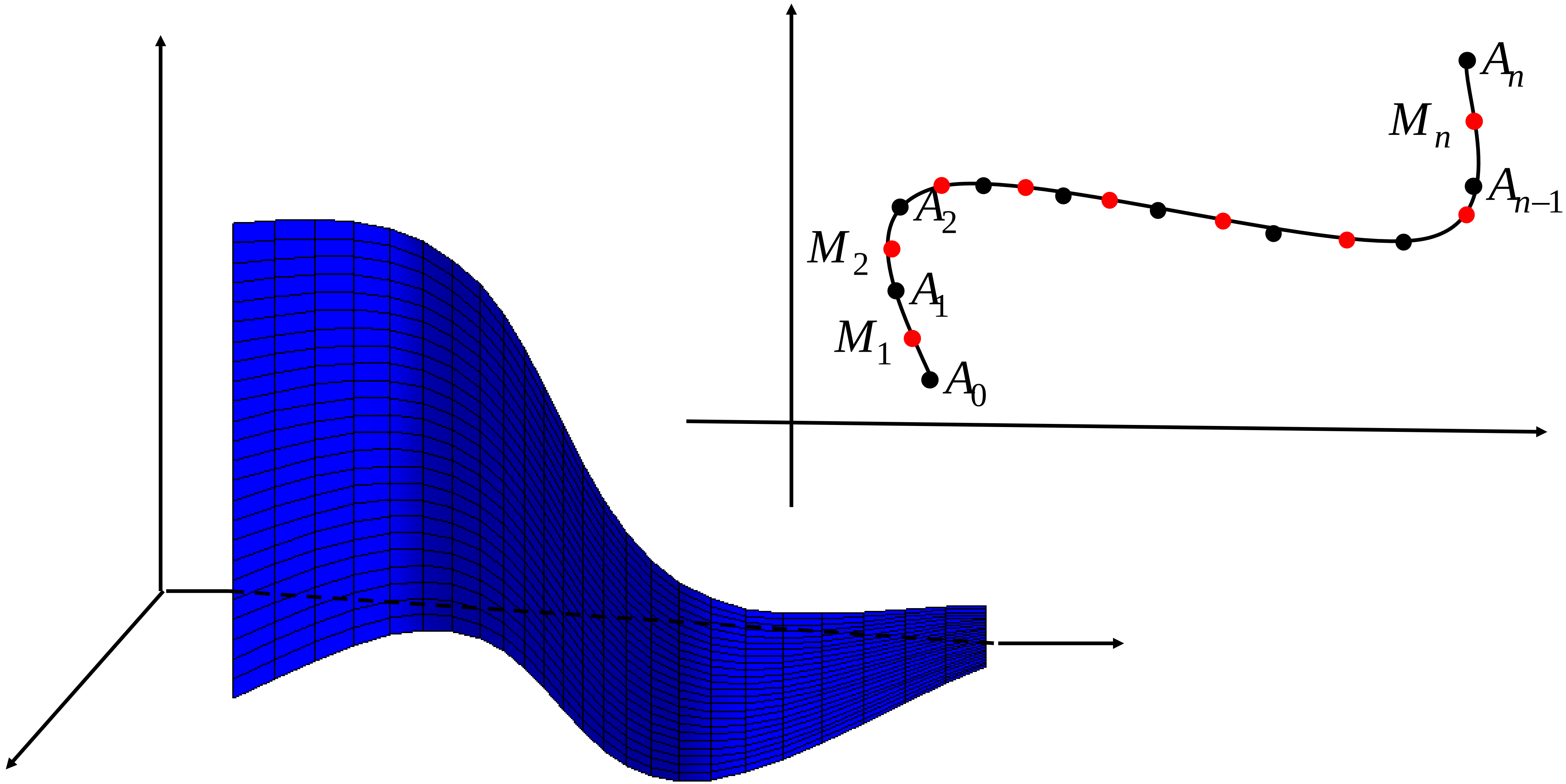
Nội dung Chương 5

1. Tích phân đường loại 1

2. Tích phân đường loại 2

1. Tích phân đường loại 1

Định nghĩa



1. Tích phân đường loại 1

Định nghĩa

Xét hàm $f = f(x, y)$ xác định trên đường cong C.

Chia C một cách tùy ý ra n đường cong nhỏ bởi các điểm $A_0, A_1, \ldots, A_n$.

Độ dài tương ứng $L_1, L_2, \ldots, L_n$.

Trên mỗi cung $A_{i-1}A_i$ lấy tuỳ ý một điểm $M_i(x_i, y_i)$.

Lập tổng Riemann: $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot L_i$

$I = \lim_{n \to +\infty} I_n$, không phụ thuộc cách chia C, và cách lấy điểm M_i

$$I = \int_C f(x, y)dl$$

được gọi là tích phân đường loại một của $f = f(x,y)$ trên cung C.

1. Tích phân đường loại 1

Tính chất

1) Hàm $f(x,y)$ liên tục trên cung C thì khả tích trên C.

2) $L(C) = \int_C dl$ 3) $\int_C \alpha \cdot f dl = \alpha \int_C f dl$ 4) $\int_C (f+g) dl = \int_C f dl + \int_C g dl$

5) Tích phân đường loại một không phụ thuộc chiều lấy tích phân trên C.

6) Nếu C được chia làm hai cung C_1 và C_2 rời nhau:

$$\int_C f dl = \int_{C_1} f dl + \int_{C_2} f dl$$

7) $\forall (x,y) \in C, f(x,y) \le g(x,y) \Rightarrow \int_C f dl \le \int_C g dl$

8) Định lý giá trị trung bình: Nếu $f(x,y)$ liên tục trên cung trơn C có độ dài L. Khi đó tồn tại điểm M_0 thuộc cung C, sao cho:

$$\int_C f dl = f(M_0) \cdot L$$

1. Tích phân đường loại 1

Cách tính

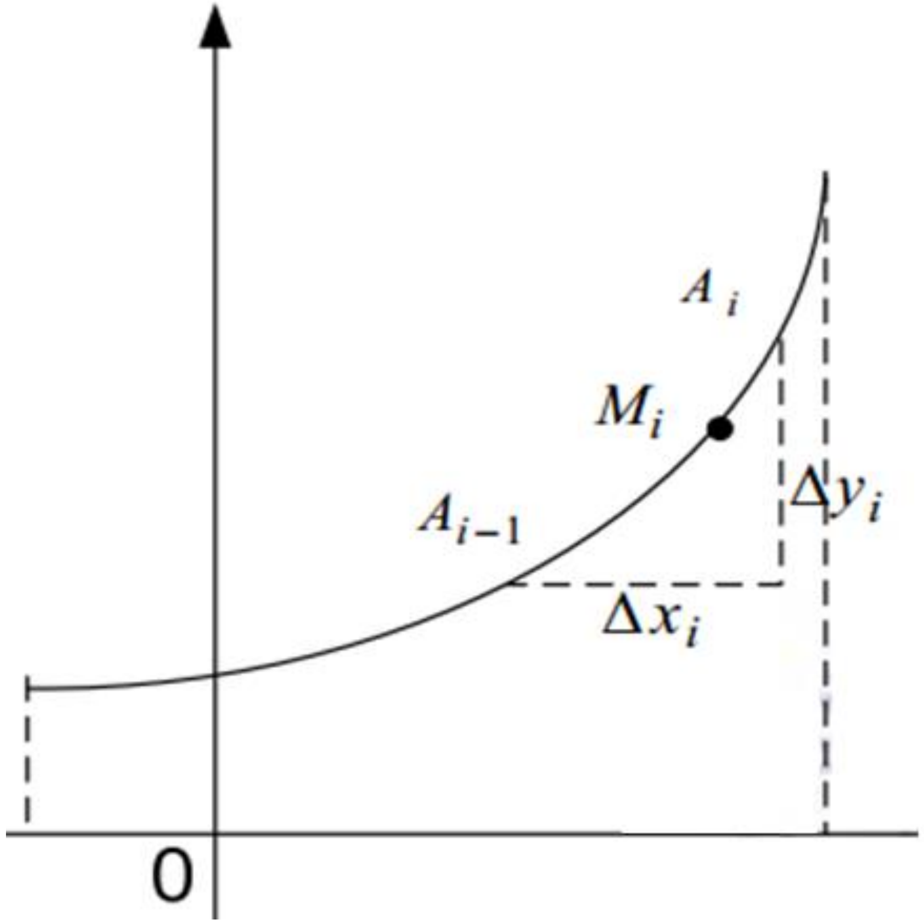
$f = f(x, y)$ xác định trên đường cong C có phương trình: $y = y(x), a \le x \le b.$

Chia C một cách tùy ý ra n đường cong nhỏ bởi các điểm $A_0, A_1, ..., A_n.$

Độ dài tương ứng $L_1, L_2, ..., L_n.$

$$L_i \approx |A_{i-1}A_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$$

$$= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$



1. Tích phân đường loại 1

Cách tính

Theo công thức Lagrange (Định lý giá trị trung bình) đối với $y(x)$ trong đoạn $[x_{i-1}, x_i]$, ta tìm được một giá trị $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ sao cho:

$$y(x_i) - y(x_{i-1}) = y'(x_i^*) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$$\Rightarrow \Delta y_i = y'(x_i^*) \cdot \Delta x_i$$

$$\Rightarrow L_i \approx \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

$$= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + \left[y'(x_i^*) \cdot \Delta x_i \right]^2}$$

$$= \sqrt{1 + \left[y'(x_i^*) \right]^2} \cdot \sqrt{(\Delta x_i)^2} = \sqrt{1 + \left[y'(x_i^*) \right]^2} \cdot \Delta x_i \qquad (\text{do } \Delta x_i > 0)$$

1. Tích phân đường loại 1

Cách tính

Sau khi thực hiện phép chia đường cong C, khi đó:

Trên mỗi cung $A_{i-1}A_i$ lấy một điểm $M_i(x_i^*, y(x_i^*))$.

Lập tổng Riemann: $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot L_i$

$$\approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y(x_i^*)) \cdot \sqrt{1+\left[y'(x_i^*)\right]^2} \cdot \Delta x_i$$

Do đó:

$$I = \lim_{n\to+\infty} I_n \Rightarrow I = \int_C f(x,y)dl = \lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y(x_i^*)) \cdot \sqrt{1+\left[y'(x_i^*)\right]^2} \cdot \Delta x_i\right]$$

$$= \int_a^b f(x, y(x)) \cdot \sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2} \cdot dx$$

1. Tích phân đường loại 1

Cách tính

Cung C cho bởi phương trình: $y = y(x)\ ,\quad a \le x \le b$

$$\boxed{\int_C f(x,y)dl = \int_a^b f(x,y(x))\cdot\sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}\cdot dx}$$

Tương tự, cung C cho bởi phương trình: $x = x(y)\ ,\quad c \le y \le d$

$$\boxed{\int_C f(x,y)dl = \int_c^d f(x(y),y)\cdot\sqrt{1+\left[x'(y)\right]^2}\cdot dy}$$

1. Tích phân đường loại 1

Cách tính

Cung C cho bởi phương trình tham số: $x = x(t)\,,\ y = y(t)\,,\ t_1 \le t \le t_2$

Khi đó:

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}\,;\ dx = x'(t)dt\,;\ \sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2} = \frac{\sqrt{\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)\right]^2}}{x'(t)}$$

$$\boxed{\int_C f(x,y)dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t))\cdot\sqrt{\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)\right]^2}\cdot dt}$$

1. Tích phân đường loại 1

Ví dụ

Tính $I = \int_C x^3 dl$, trong đó C là cung parabol $y = \dfrac{x^2}{2},\ \ 0 \le x \le \sqrt{3}$

$$I = \int_a^b f(x, y(x)) \cdot \sqrt{1 + [y'(x)]^2} \cdot dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} x^3 \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} x^3 \sqrt{1 + x^2} dx \quad = \frac{58}{15}$$

1. Tích phân đường loại 1

Ví dụ

Tính $I = \int_C 2xdl$, trong đó C = C_1 U C_2 , với C_1: y = x^2, từ (0,0) đến (1,1) và C_2 là đường thẳng từ (1,1) đến (1,2).

$$I = \int_C 2xdl = \int_{C_1} 2xdl + \int_{C_2} 2xdl = \int_0^1 2x \cdot \sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2} \cdot dx +$$

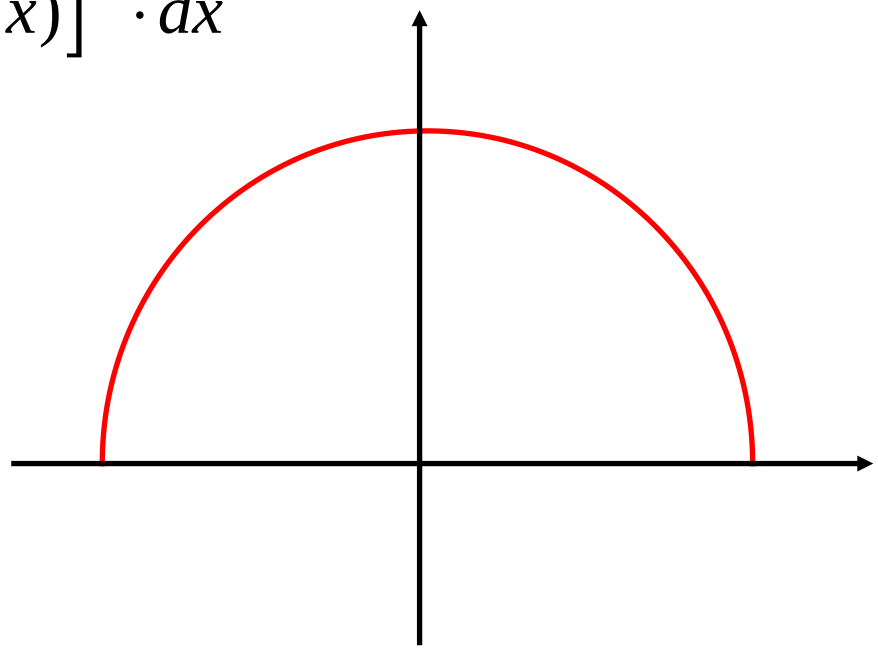
$$+\int_1^2 2.1.\sqrt{1+\left[x'(y)\right]^2} \cdot dy$$

$$= \int_0^1 2x \cdot \sqrt{1+4x^2} \cdot dx + \int_1^2 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{1+(0)^2} \cdot dy \quad = \frac{5\sqrt{5}-1}{6} + 2$$

Tính $I = \int\limits_C (2 + x^2 y)dl$, với C là nửa trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$

Có thể dùng công thức $I = \int\limits_a^b f(x, y(x)) \cdot \sqrt{1 + [y'(x)]^2} \cdot dx$

nhưng việc tính toán phức tạp.



Viết phương trình tham số cung C.

Đặt: $x = r\cos t;\ y = r\sin t$

Vì $x^2 + y^2 = 1$, nên $r = 1$.

Phương trình tham số của nửa trên cung tròn: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$; $0 \le t \le \pi$

$$I = \int\limits_0^\pi (2 + \cos^2 t \cdot \sin t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt = \int\limits_0^\pi (2 + \cos^2 t \cdot \sin t)dt = 2\pi + \frac{2}{3}$$

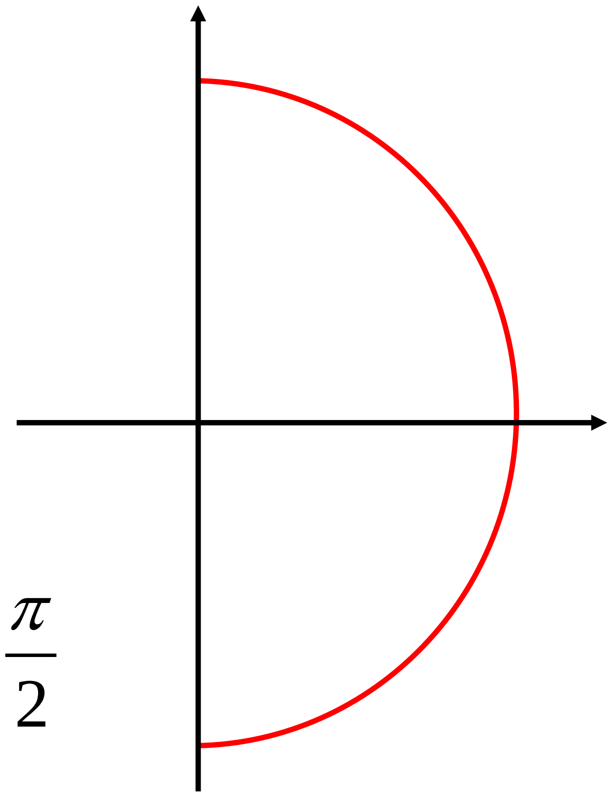
Tính $I = \int\limits_C xy^4 dl$, với C là nửa bên phải đường tròn $x^2 + y^2 = 16;\ x \geq 0.$

Viết phương trình tham số cung C.

Đặt $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$

Vì $x^2 + y^2 = 16$, nên $r = 4$

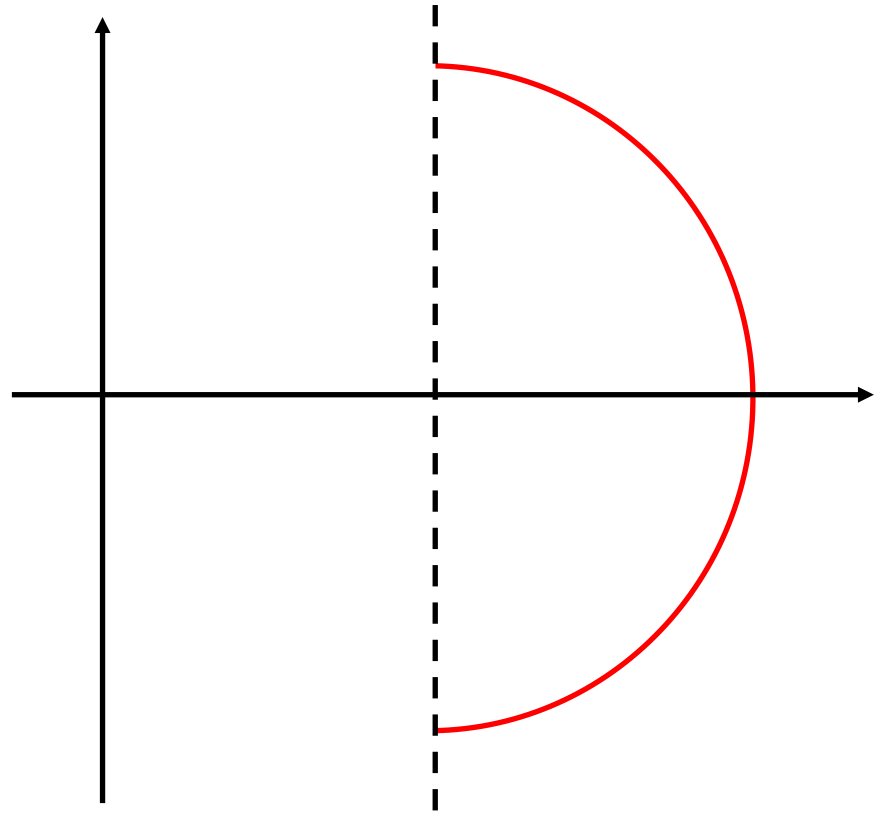
Phương trình tham số của C: $\begin{cases} x = 4\cdot\cos t \\ y = 4\cdot\sin t \end{cases}$; $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$



$$I = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\cos t \cdot 4^4 \sin^4 t\sqrt{(-4\sin t)^2 + (4\cos t)^2}\,dt = 4^6 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \cdot \sin^4 t\,dt = \frac{2}{5}\cdot 4^6$$

Tính $I = \int_C (x^2 + y^2)dl$, với C là nửa đường tròn $x^2 + y^2 = 2x;\ x \geq 1.$

Viết phương trình tham số cung C.



Đặt $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$

Vì $x^2 + y^2 = 2x$, nên $r = 2\cos t$

Phương trình tham số của C:

$$\begin{cases} x = 2\cos t \cdot \cos t = 1 + \cos 2t \\ y = 2\cos t \cdot \sin t = \sin 2t \end{cases} ;\ -\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{4}$$

$$I = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (2 + 2\cos 2t)\sqrt{(-2\sin 2t)^2 + (2\cos 2t)^2}\,dt = 4 + 2\pi$$

2. Tích phân đường loại 2

Bài toán

Tính công của lực biến đổi:

Cho một chất điểm M di chuyển dọc theo một cung phẳng $\widehat{AB}$ từ điểm A đến điểm B dưới tác dụng của lực:

$$\vec{F}(M) = P(M).\vec{i} + Q(M).\vec{j}\,, M \in \widehat{AB}.$$

Hãy tính công W của lực đó sinh ra.

2. Tích phân đường loại 2

Bài toán

Chia cung $\overset{\frown}{AB}$ một cách tùy ý ra n đường cung nhỏ bởi các điểm chia:

$$A_0(x_0, y_0), A_1(x_1, y_1), \dots, A_n(x_n, y_n).$$

Khi đó: $\overrightarrow{A_{i-1}A_i} = \Delta x_i \cdot \vec{i} + \Delta y_i \cdot \vec{j}$

Lấy $M_i(x_i, y_i) \in A_{i-1}A_i$.

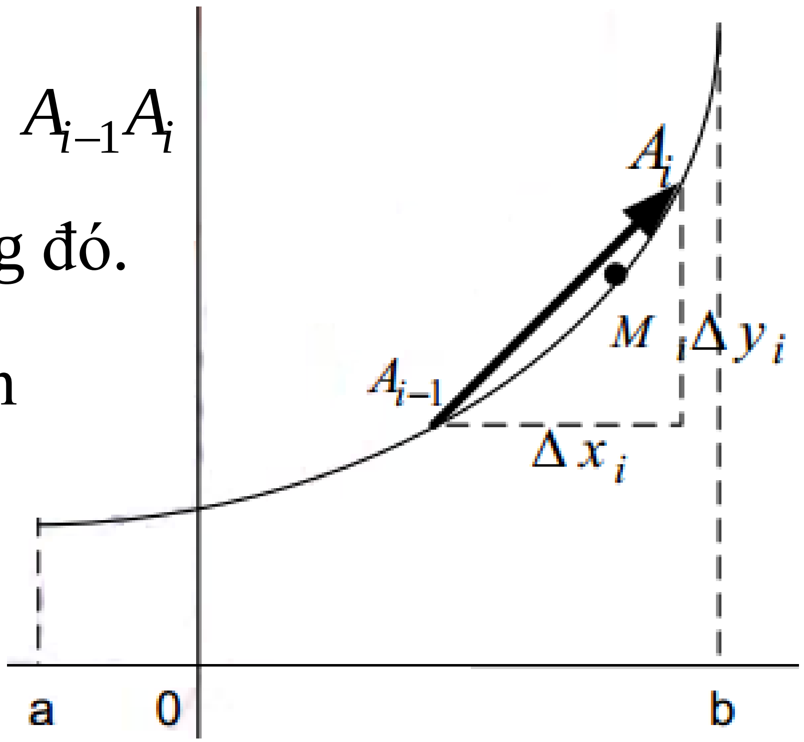
Cung $A_{i-1}A_i$ nhỏ, nên có thể coi nó xấp xỉ dây cung $A_{i-1}A_i$

và $\vec{F}(M_i)$ không đổi (về chiều và độ lớn) trên cung đó.

Do đó, công của lực sinh ra khi chất điểm di chuyển

từ A_{i-1} đến A_i theo cung $A_{i-1}A_i$ sẽ xấp xỉ là:

$$\vec{F}(M_i) \cdot \overrightarrow{A_{i-1}A_i} = P(M_i) \cdot \Delta x_i + Q(M_i) \cdot \Delta y_i$$



2. Tích phân đường loại 2

Bài toán

Vậy công W của lực sinh ra sẽ xấp xỉ với:

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} \left[P(x_i, y_i) \cdot \Delta x_i + Q(x_i, y_i) \cdot \Delta y_i \right]$$

Do đó, giới hạn của tổng trên khi $n \to \infty$ chính là công của lực:

$$W = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left[P(x_i, y_i) \cdot \Delta x_i + Q(x_i, y_i) \cdot \Delta y_i \right]$$

2. Tích phân đường loại 2

Định nghĩa

$P = P(x,y), Q = Q(x,y)$ xác định trên đường cong C có hướng.

Chia C một cách tùy ý ra n đường cong nhỏ bởi các điểm:

$$A_0(x_0,y_0), A_1(x_1,y_1), \ldots, A_n(x_n,y_n).$$

Trên mỗi cung $A_{i-1}A_i$ lấy tuỳ ý một điểm $M_i(x_i,y_i)$; $\overrightarrow{A_{i-1}A_i} = \Delta x_i \cdot \vec{i} + \Delta y_i \cdot \vec{j}$

Lập tổng Riemann: $I_n = \sum_{i=1}^{n} \left[P(M_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) + Q(M_i)\cdot(y_i - y_{i-1}) \right]$

$I = \lim_{n\to+\infty} I_n$, không phụ thuộc cách chia C, và cách lấy điểm M_i

$$I = \int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

được gọi là tích phân đường loại hai của $P(x,y)$ và $Q(x,y)$ trên cung C.

2. Tích phân đường loại 2

Tính chất

1) Tích phân đường loại hai phụ thuộc chiều lấy tích phân trên C:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = -\int_{BA} Pdx + Qdy$$

2) Nếu C được chia làm hai cung C_1 và C_2 rời nhau:

$$\int_{C} Pdx + Qdy = \int_{C_1} Pdx + Qdy + \int_{C_2} Pdx + Qdy$$

Cách tính tích phân đường loại hai:

1) C: x = x(t), y = y(t), $t = a$ ứng với điểm đầu, $t = b$: điểm cuối cung.

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_C P(x,y)dx + \int_C Q(x,y)dy$$

Chia $[a,b]$ thành n đoạn: $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = x(t_i) - x(t_{i-1}) \overset{\text{định lý Lagrange}}{=} x'(t_i^*) \cdot \Delta t_i$$

Chọn điểm trung gian $M_i\left(x(t_i^*), y(t_i^*)\right)$, khi đó:

$$\int_C P(x,y)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} P(x(t_i^*), y(t_i^*)) \cdot \Delta x_i$$

$$\int_C P(x,y)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P\left(x(t_i^*), y(t_i^*)\right) \cdot x'(t_i^*) \cdot \Delta t_i = \int_a^b P\left(x(t), y(t)\right) \cdot x'(t) \cdot dt$$

$$\boxed{\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \left[P\left(x(t), y(t)\right) \cdot x'(t) + Q\left(x(t), y(t)\right) \cdot y'(t) \right] dt}$$

2. Tích phân đường loại 2

Cách tính

Các hàm $P(x,y)$ và $Q(x,y)$ liên tục trên tập mở D chứa cung trơn C.

2) C: y = y(x), $x = x_1$ là hoành độ điểm đầu, $x = x_2$: điểm cuối cung.

$$\boxed{\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{x_1}^{x_2} \left[P(x,y(x)) + Q(x,y(x))\cdot y'(x)\right]dx}$$

3) C: x = x(y), $y = y_1$ là tung độ điểm đầu, $y = y_2$: điểm cuối cung.

$$\boxed{\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{y_1}^{y_2} \left[P(x(y),y)\cdot x'(y) + Q(x(y),y)\right]dy}$$

2. Tích phân đường loại 2

Tích phân đường loại 2 trong không gian

Giả sử: $\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$

là một trường vector xác định trên cung *AB*.

Nếu cung *AB* được cho bởi phương trình vector:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

Tích phân đường của **F** trên cung *AB* là (công của lực **F** sinh ra khi di chuyển một vật trên đường cong *AB*):

$$\int_{AB} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{AB} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}'(t)dt$$

2. Tích phân đường loại 2

Ví dụ

Tính $I = \int\limits_C (x^2 + 3y)dx + 2ydy$, trong đó C là biên tam giác OAB với O(0,0); A(1,1); B(0,2), ngược chiều kim đồng hồ.

$$I = \int\limits_C = \int\limits_{OA} + \int\limits_{AB} + \int\limits_{BO}$$

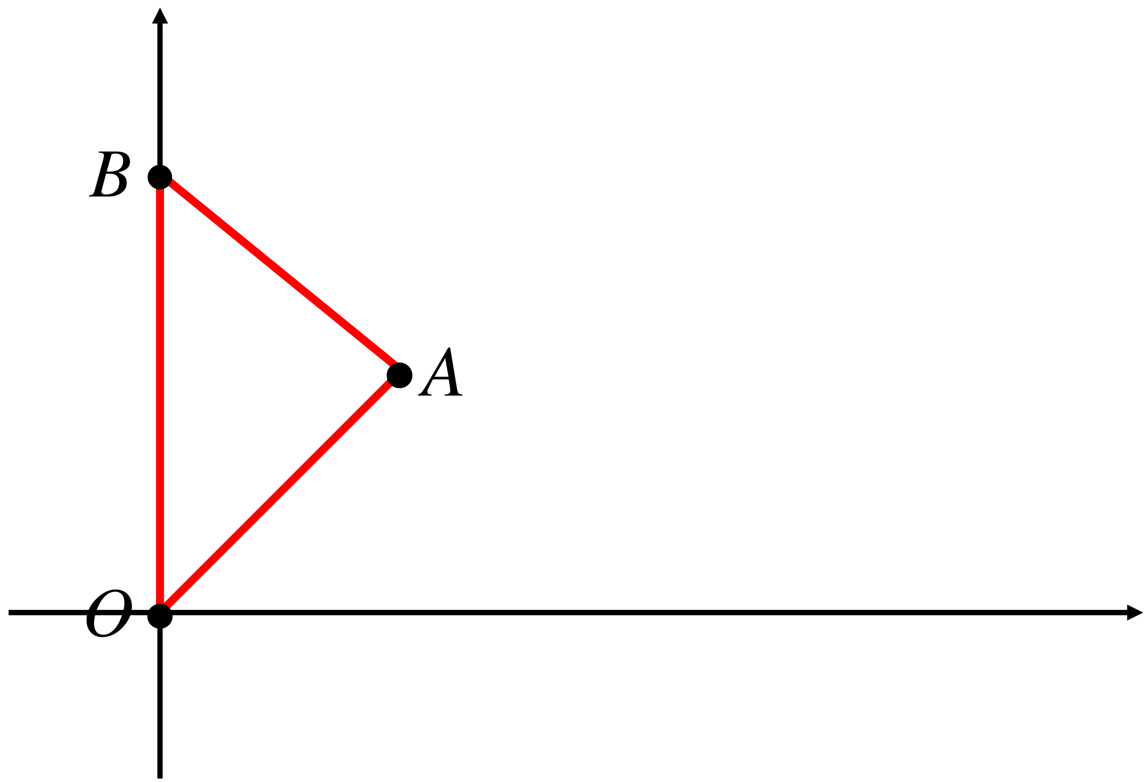
Phương trình OA: y = x

Hoành độ điểm đầu: x = 0

Hoành độ điểm cuối: x = 1

$$I_1 = \int\limits_{OA} = \int\limits_0^1 (x^2 + 3x)dx + 2xdx$$

$$I_1 = \int\limits_{OA} = \int\limits_0^1 (x^2 + 5x)dx = \frac{17}{6}$$

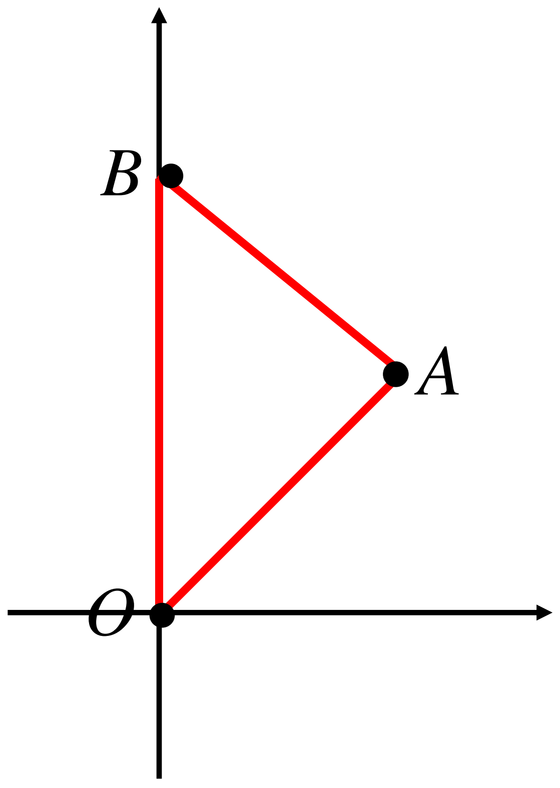


Phương trình AB: y = 2 – x

Hoành độ điểm đầu: x = 1

Hoành độ điểm cuối: x = 0

$$I_2 = \int_{AB} = \int_1^0 (x^2 + 3(2-x))dx + 2\cdot(2-x)\cdot(-1)dx = -\frac{11}{6}$$



Phương trình BO: x = 0   Tung độ điểm đầu: y = 2

Tung độ điểm cuối: y = 0 $I_3 = \int_{BO} = \int_2^0 (0^2 + 3y)\cdot 0\cdot dy + 2\cdot y\cdot dy = -4$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{17}{6} - \frac{11}{6} - 4 = -3$$

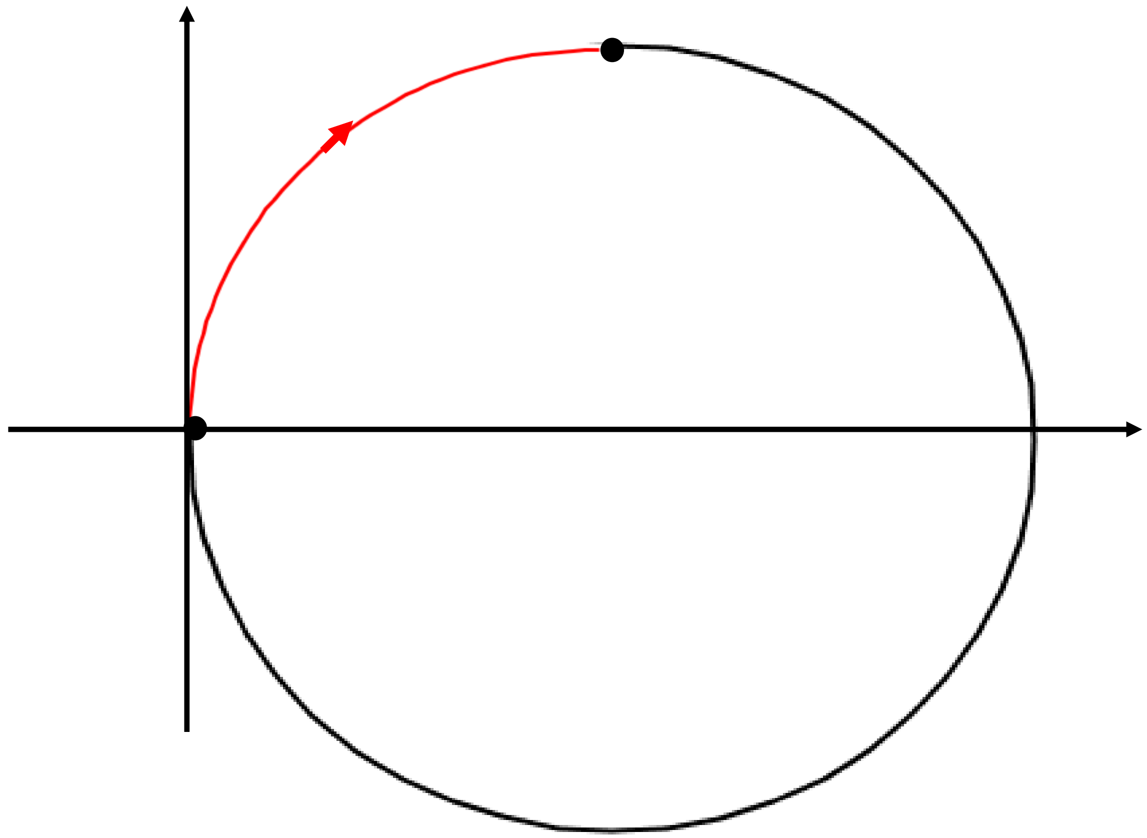
Tính $I = \int\limits_C y\,dx + x\,dy$, trong đó C là cung $x^2 + y^2 = 2x$, từ O(0,0) đến A(1,1), chiều kim đồng hồ.

Sử dụng tọa độ cực $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$

$$x^2 + y^2 = 2x \Rightarrow r = 2\cos t$$

Phương trình tham số cung C:

$$\begin{cases} x = 2\cos t \cdot \cos t = 1 + \cos 2t \\ y = 2\cos t \cdot \sin t = \sin 2t \\ t_1 = \dfrac{\pi}{2}; t_2 = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$



$$I = \int\limits_{\pi/2}^{\pi/4} \left[\sin 2t \cdot (-2\sin 2t) + (1 + \cos 2t) \cdot (2\cos 2t)\right] dt \quad = 1$$

2. Tích phân đường loại 2

Công thức Green

C là biên của miền D.

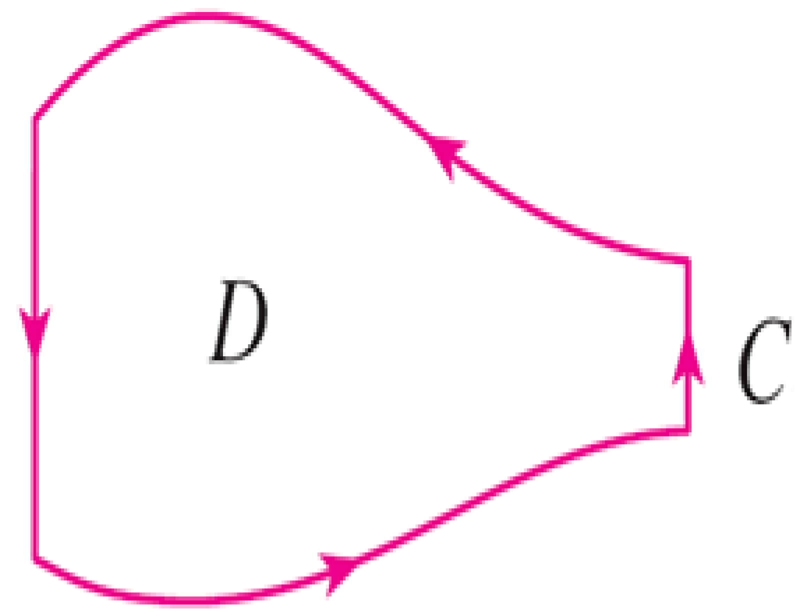
Chiều dương qui ước trên C là chiều mà đi theo chiều này ta thấy miền D ở phía bên tay trái.

Miền D được gọi là miền đơn liên nếu nó bị giới hạn bởi một đường cong kín. Ngược lại D được gọi là miền đa liên nếu nó bị giới hạn bởi nhiều đường cong kín.

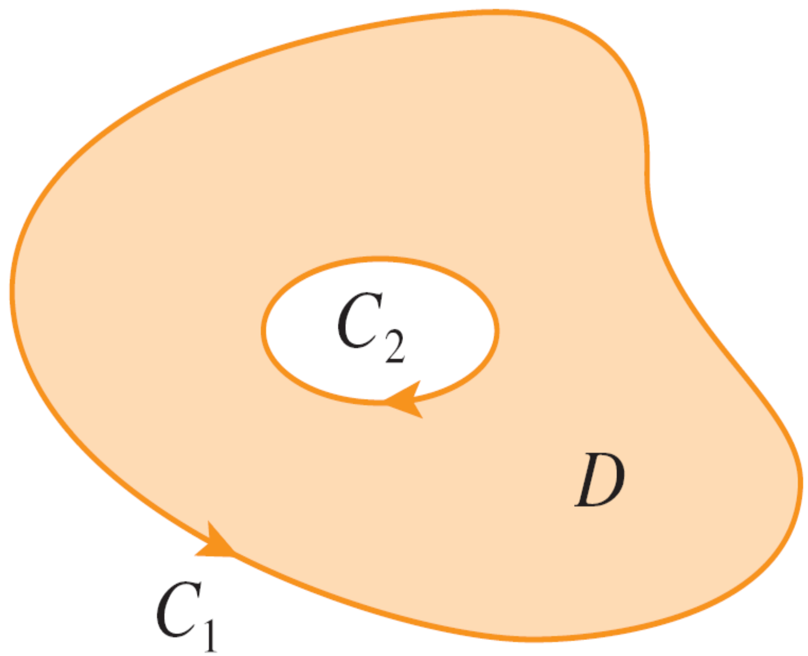
Trong đa số trường hợp, chiều dương qui ước là ngược chiều kim đồng hồ. Trong trường hợp tổng quát điều này không đúng.

2. Tích phân đường loại 2

Công thức Green



Miền đơn liên



Miền đa liên

2. Tích phân đường loại 2

Công thức Green

D là miền (đơn liên hoặc đa liên) đóng, giới nội trong mặt phẳng Oxy với biên C (kín) liên tục, trơn từng khúc.

$P(x,y), Q(x,y)$ và các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trên miền D.

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \pm \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Dấu + nếu chiều lấy tích phân trùng chiều dương qui ước

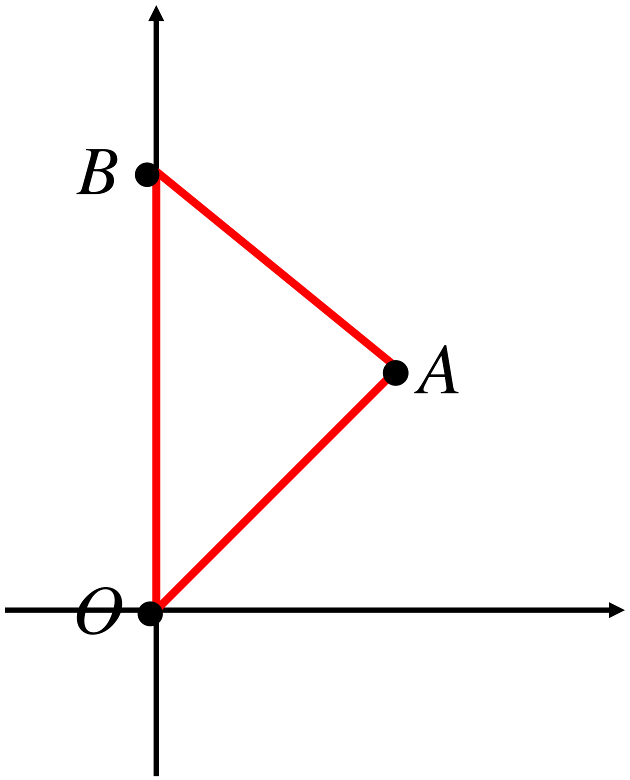
Điều kiện để sử dụng công thức Green:

1) C là cung kín.

2) $P(x,y)$, $Q(x,y)$ và các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trên miền D có biên C.

Tính $I = \int\limits_C (x^2 + 3y)dx + 2ydy$, trong đó C là biên tam giác OAB với O(0,0); A(1,1); B(0,2), ngược chiều kim đồng hồ.

Cung C kín.



$$P(x,y) = x^2 + 3y \,;\, Q(x,y) = 2y$$

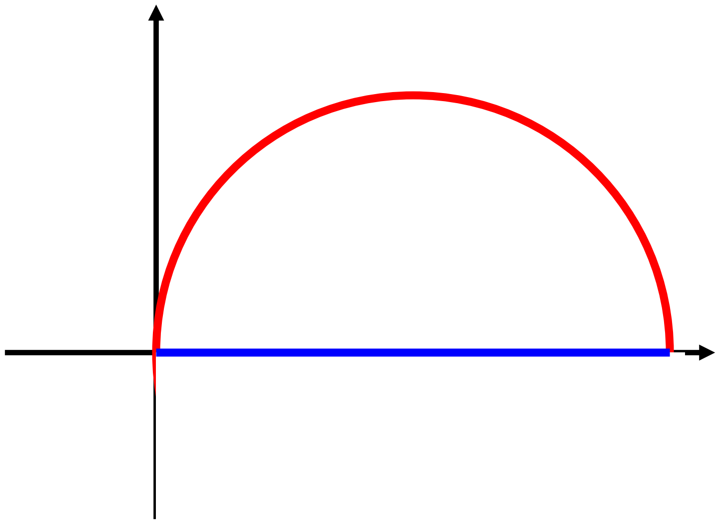
P(x,y), Q(x,y) và các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trên miền D có biên C.

$$I = \oint\limits_C (x^2 + 3y)dx + 2ydy = +\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

$$= \iint\limits_D (0 - 3)\,dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2-x} (-3)dy = -3$$

Tính $I = \int\limits_C (x-y)^2 dx + (x+y)^2 dy$, trong đó C nửa trên đường tròn: $x^2 + y^2 = 2x$ cùng chiều kim đồng hồ.

Cung C không kín.



$$I = \int\limits_C = \oint\limits_{C \cup \overline{AO}} - \int\limits_{\overline{AO}} = I_1 - I_2$$

$$I_1 = \oint\limits_{C \cup \overline{AO}} = -\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

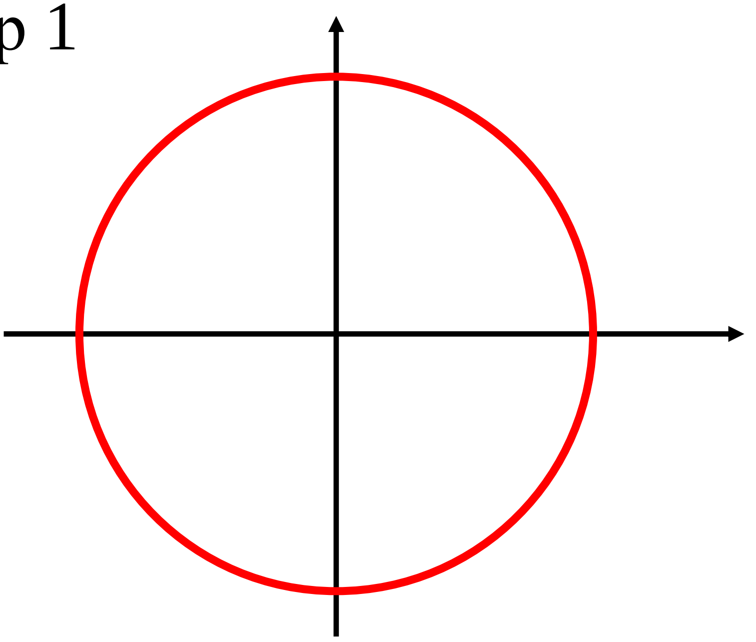
$$= -\iint\limits_D \big(2(x+y) + 2(x-y) \big) dxdy = -\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} 4r\cos\varphi \cdot r \cdot dr = -2\pi$$

$$I_2 = \int\limits_2^0 (x-0)^2 dx + (x+0)^2 0 dx = -\frac{8}{3} \qquad I = I_1 - I_2 = -2\pi + \frac{8}{3}$$

Có thể giải bằng cách viết phương trình tham số cung C.

Tính $I = \oint\limits_C \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$, trong đó C đường tròn: $x^2+y^2=4$ ngược chiều kim đồng hồ.

Cách 1: Cung C kín, nhưng P, Q và các ĐHR cấp 1 không liên tục trên D, không sử dụng công thức Green được !!!



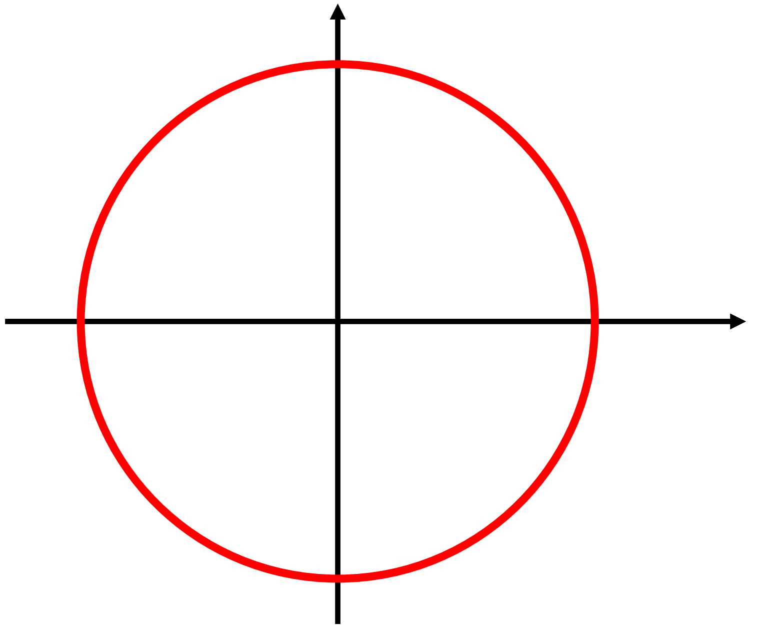
Viết phương trình tham số cung C:

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases} \qquad t_1 = 0; t_2 = 2\pi$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{(2\cos t + 2\sin t)\cdot(-2\sin t)dt - (2\cos t - 2\sin t)\cdot 2\cos t dt}{4} = -2\pi$$

Cách 2: Tích phân trên đường tròn: $x^2 + y^2 = 4$, nên thay vào mẫu số ta có:

$$I = \oint_C \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{4}$$



Có thể sử dụng công thức Green trong trường hợp này.

$$I = \frac{1}{4}\oint_C (x+y)dx - (x-y)dy$$

$$= \frac{1}{4}\iint_{x^2+y^2\le 4} (-1-1)dxdy = -\frac{2}{4}\cdot S_D = -2\pi$$

2. Tích phân đường loại 2

Ví dụ

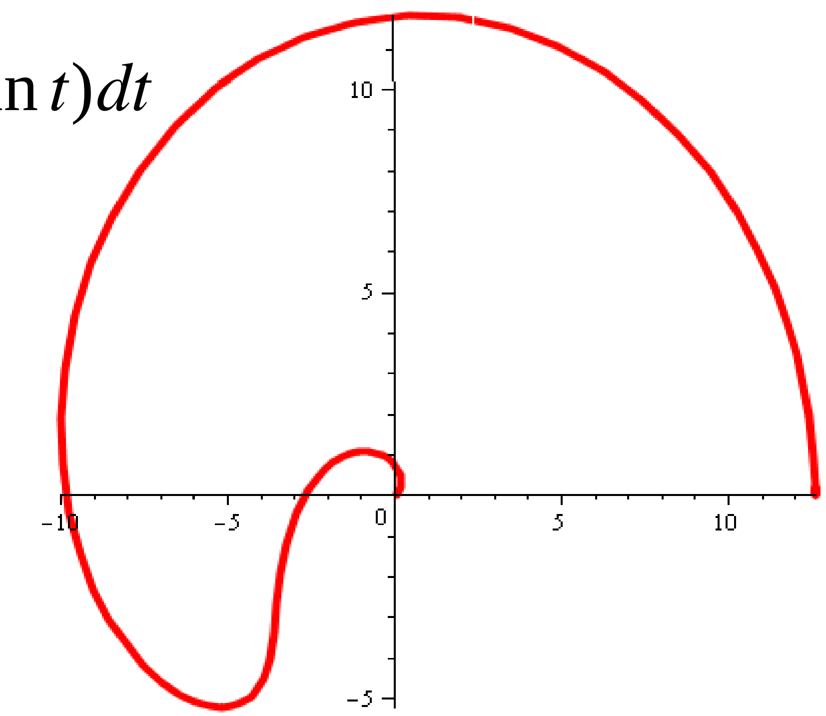
Tính $I = \int_C (4-y)dx + xdy$, trong đó C là cung Cicloid:

$x = 2(t-\sin t), y = 2(1-\cos t), 0 \le t \le 2\pi$ (cùng chiều kim đồng hồ).

Cung C không kín.

$$I = \int_0^{2\pi} \left[4-2(1-\cos t)\right]\cdot 2(1-\cos t)dt + 2(t-\sin t)(2\sin t)dt$$

$$I = \int_0^{2\pi} 4t\sin t dt \quad = -8\pi$$



2. Tích phân đường loại 2

Ví dụ

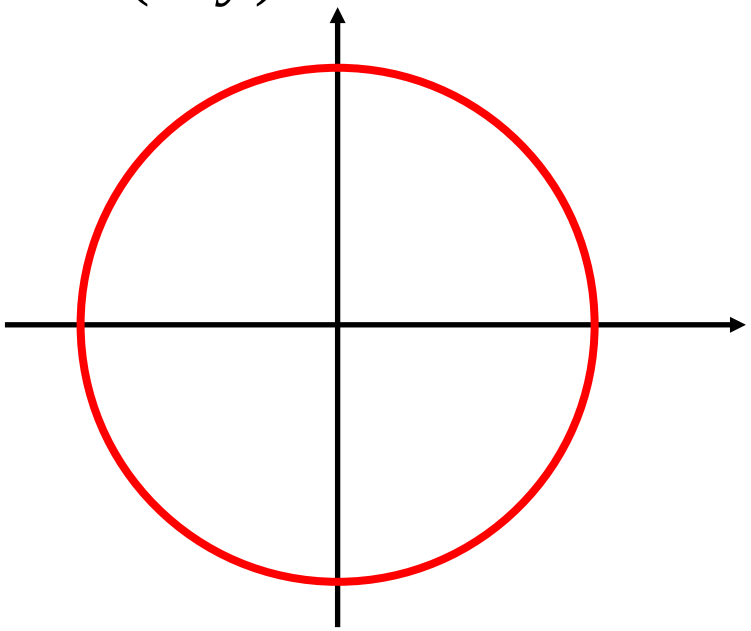
Tính $I = \oint_C e^{-x^2+y^2}\left(\cos 2xydx + \sin 2xydy\right)$, trong đó:
$x^2 + y^2 = 4$ ngược chiều kim đồng hồ.

$$P(x,y) = e^{-x^2+y^2}\cos(2xy) \;;\; Q(x,y) = e^{-x^2+y^2}\sin(2xy)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2e^{-x^2+y^2}\left[y\cos(2xy) - x\sin(2xy)\right]$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2e^{-x^2+y^2}\left[y\cos(2xy) - x\sin(2xy)\right]$$

$$I = \iint_{x^2+y^2\le 4}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = 0$$



Tính $I = \oint\limits_C \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$, trong đó C đường cong kín tùy ý, không qua gốc O, ngược chiều kim đồng hồ.

Trường hợp 1: C không bao quanh gốc O.

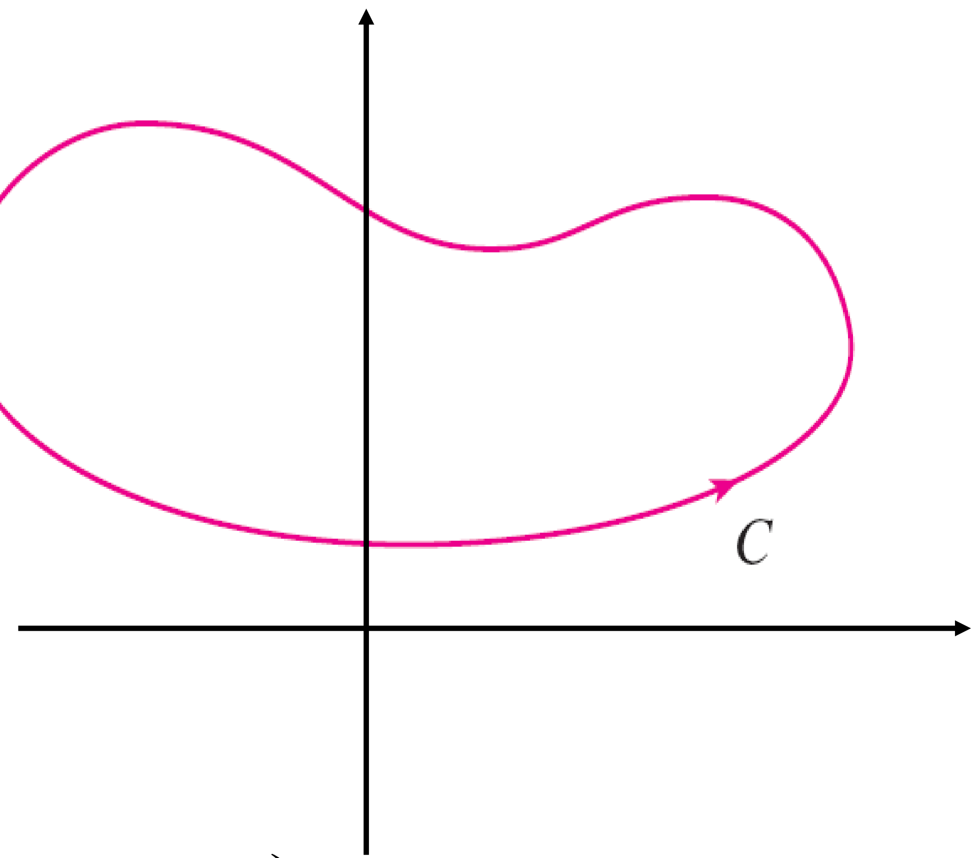
Sử dụng công thức Green.

$$P(x,y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-1}{x^2 + y^2} + \frac{2y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

$$Q(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

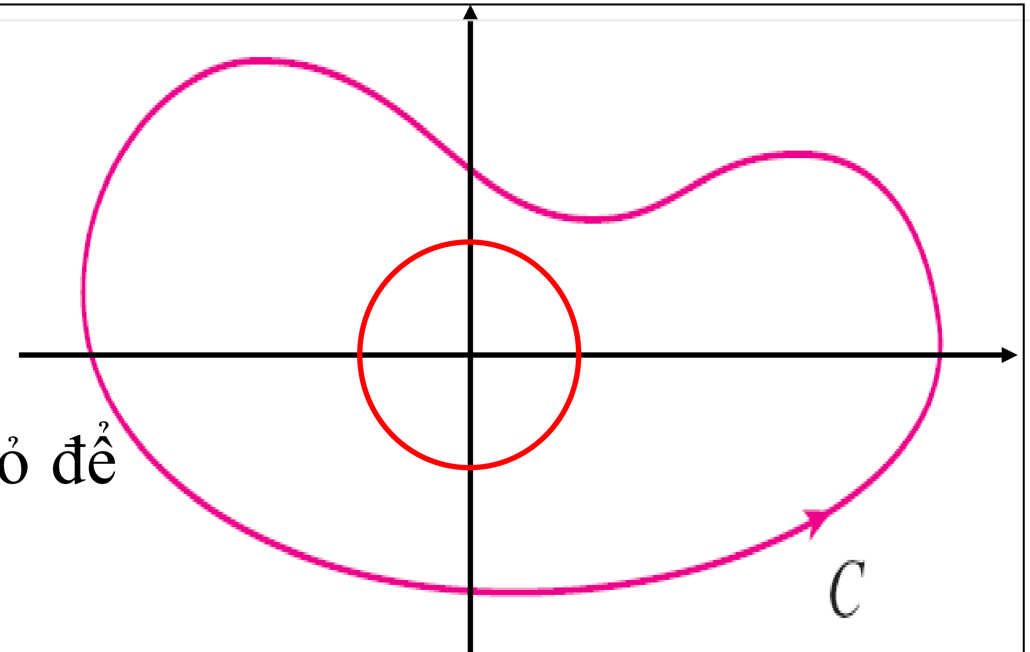


$$\Rightarrow I = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0$$

Trường hợp 2: C bao quanh gốc 0.

Không sử dụng công thức Green được vì P, Q và các ĐHR cấp 1 không liên tục trên miền D, có biên là C.

Kẻ thêm đường tròn C_1 có bán kính a đủ nhỏ để C_1 nằm lọt trong C, chọn chiều kim đồng hồ.



$$I = \oint_C = \oint_{C \cup C_1} - \oint_{C_1} = I_1 - I_2$$

$$I_1 = \oint_{C \cup C_1} \overset{Green}{=} + \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0$$

Tính tích phân I_2 trên cung tròn: $x^2 + y^2 = a^2$

Phương trình tham số của cung C_1: $x = a\cos t, y = a\sin t, t_1 = 2\pi, t_2 = 0$

$$I_2 = \int_{2\pi}^{0} \frac{a\cos t \cdot a\cos t \cdot dt + a\sin t \cdot a\sin t \cdot dt}{a^2} = -2\pi \quad \Rightarrow I = I_1 - I_2 = 2\pi$$

2. Tích phân đường loại 2

Tích phân không phụ thuộc đường lấy tích phân

Định lý: (không phát biểu cho miền đa liên)

Giả sử tồn tại miền mở đơn liên D chứa cung AB, sao cho $P(x,y)$, $Q(x,y)$ và các ĐHR cấp 1 của chúng liên tục trong D. Các mệnh đề sau tương đương:

1. $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y} \quad , \quad \forall (x,y) \in D$

2. Tích phân $I = \int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ không phụ thuộc đường cong (trơn từng khúc) nối điểm A, B nằm trong D.

3. Tồn tại hàm $U(x,y)$ trên D là vi phân toàn phần của $Pdx + Qdy$, tức là:

$$dU(x,y) = Pdx + Qdy$$

4. Tích phân trên mọi đường cong kín C, trơn từng khúc trong D bằng 0:

$$I = \oint\limits_{C} Pdx + Qdy = 0$$

2. Tích phân đường loại 2

Tích phân không phụ thuộc đường lấy tích phân

Tích phân không phụ thuộc đường đi $\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)$

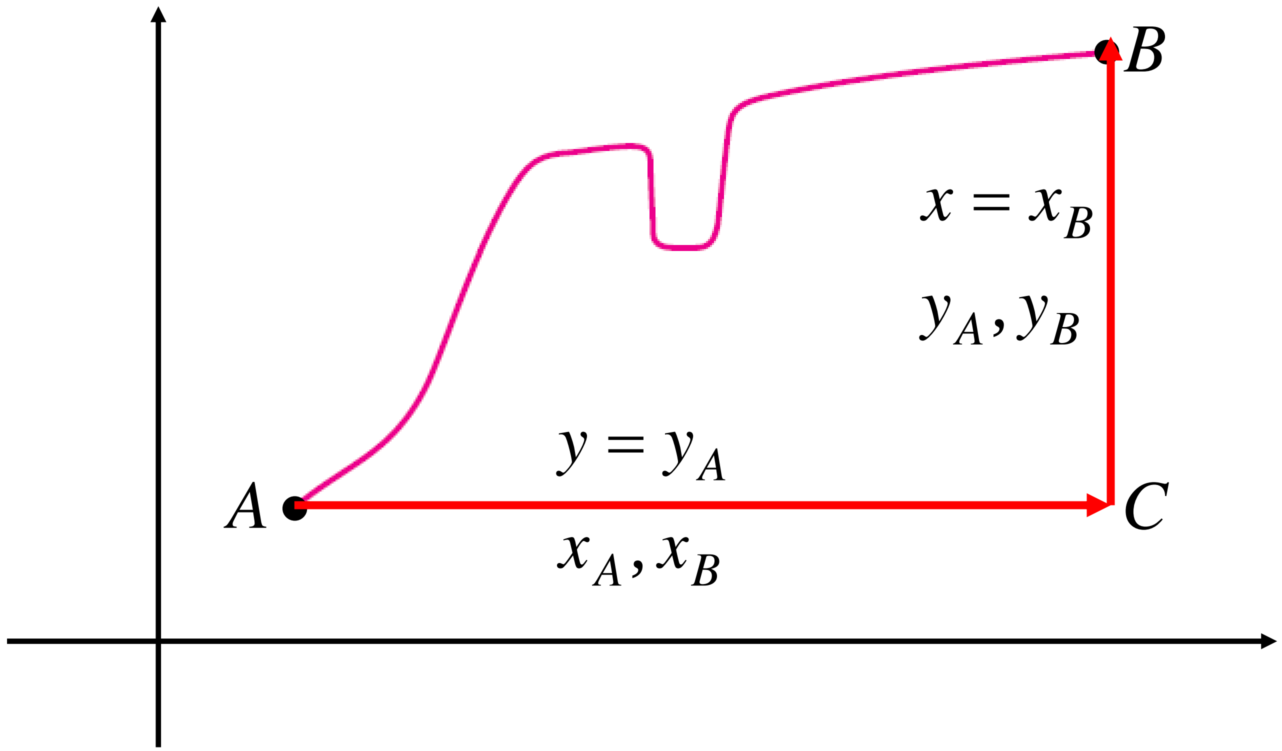
$$I = \int_{AB} = \int_{AC} + \int_{CB} = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \int_{AC} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$$= \int_{x_A}^{x_B} P(x,y_A)dx + Q(x,y_A)\cdot 0dx$$

$$I_2 = \int_{CB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

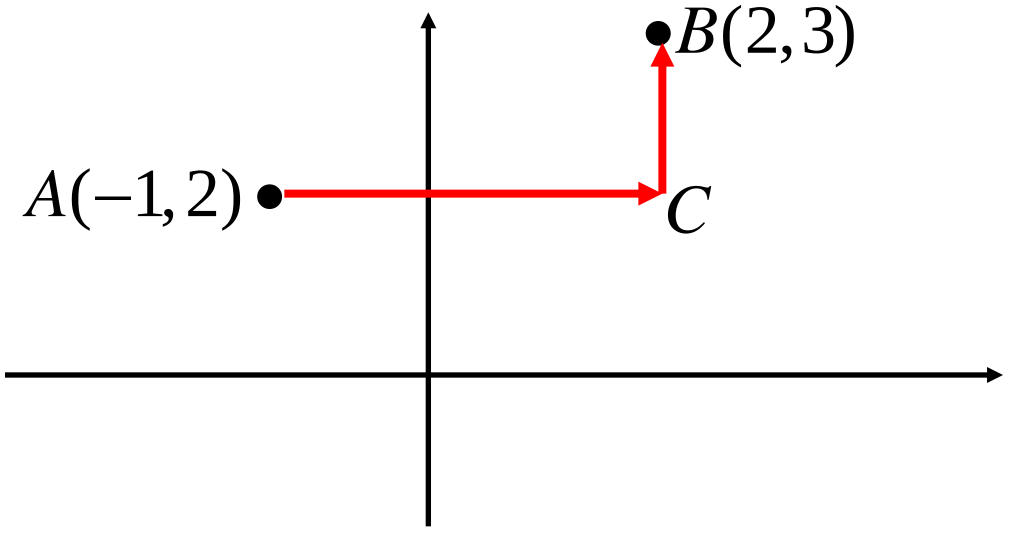
$$= \int_{y_A}^{y_B} P(x_A,y)\cdot 0dy + Q(x_B,y)dy$$



$$\Rightarrow I = \int_{x_A}^{x_B} P(x,y_A)dx + \int_{y_A}^{y_B} Q(x_B,y)dy$$

Tính $I = \int_{(-1,2)}^{(2,3)} ydx + xdy$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$ suy ra, tích phân không phụ thuộc đường đi.



Cách 1:

$$I = \int_{AC} + \int_{CB} = \int_{-1}^{2} 2dx + \int_{2}^{3} 2dy = 8$$

Cách 2: Tồn tại hàm U(x,y) là vi phân toàn phần của Pdx + Qdy

$$\begin{cases} U'_x = P(x,y) \\ U'_y = Q(x,y) \end{cases}$$ tìm được hàm $U(x,y) = xy + C$

$$I = \int_{(-1,2)}^{(2,3)} ydx + xdy = U(x,y)\Big|_{(-1,2)}^{(2,3)} = U(2,3) - U(-1,2) = 8$$

Tính $I = \int\limits_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, với đường cong không bao quanh gốc tọa độ.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$ suy ra, tích phân không phụ thuộc đường đi.

Tồn tại hàm U(x,y) là vi phân toàn phần của Pdx + Qdy

$$\begin{cases} U'_x = P(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (1) \\ U'_y = Q(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow U(x,y) = \int P(x,y)dx + g(y)$$

$$U(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} + g(y)$$

$$(2) \Rightarrow g'(y) = 0 \quad \Rightarrow g(y) = C$$

$$\rightarrow U(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} + C$$

$$I = U(x,y)\Big|_{(1,0)}^{(6,8)} = U(6,8) - U(1,0) = 9$$