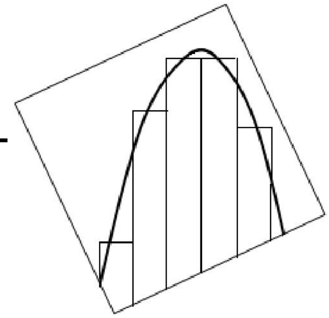
CHƯƠNG 3:

Biến Ngẫu Nhiên

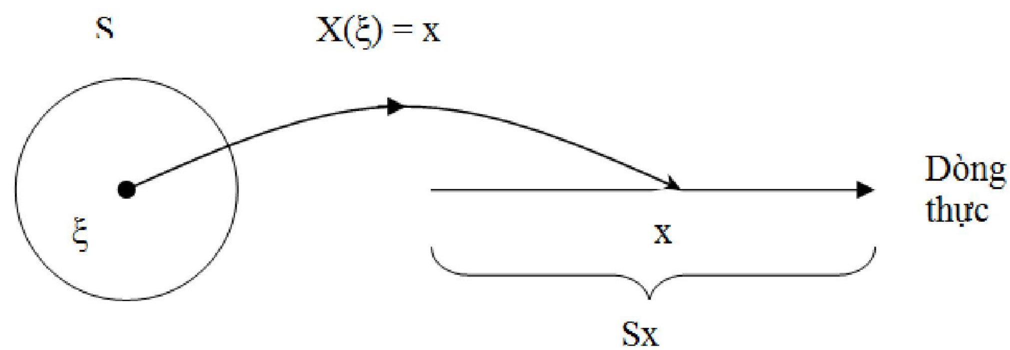


Chương này phát triển các phương pháp được dùng để tính xác suất của các biến cố kèm theo đặc trưng số của kết cục của một thí nghiệm ngẫu nhiên. Hàm phân phối sẽ được giới thiệu. Xác suất của các biến cố là các khoảng của đường thẳng thực hoặc hợp của các khoảng như vậy có thể được biểu diễn qua hàm phân phối. Hàm mật độ xác suất cũng sẽ được giới thiệu. Xác suất của biến cố có thể được biểu diễn như là hàm tích phân của hàm mật độ xác suất. Khái niệm giá trị kỳ vọng của biến ngẫu nhiên được chỉ ra phù hợp với khái niệm trung bình trực quan của chúng ta. Các khái niệm này cung cấp cho chúng ta công cụ để tính xác suất và trung bình trong các hệ thống có tính ngẫu nhiên.

3.1 KHÁI NIÊM BIẾN NGẪU NHIÊN

Kết cục của một thí nghiệm không nhất thiết là một số. Tuy thế, chúng ta thường không thể quan tâm đến kết cục tự đo hoặc đặc trưng số của kết cục. Ví dụ, tung n lần một đồng xu, chúng ta có thể chỉ quan tâm đến tổng số lần xuất hiện mặt sấp và không quan tâm đến thứ tự xuất hiện mặt sấp và mặt ngửa. Chọn một cách ngẫu nhiên công việc tính toán, chúng ta có thể chỉ quan tâm đến thời gian thực hiện công việc. Khi chọn tên sinh viên từ một hộp chúng ta có thể quan tâm chỉ cân nặng của sinh viên. Trong mỗi ví dụ này, phép đo đã gán giá trị số cho kết cục của thí nghiệm ngẫu nhiên. Do các kết cục là ngẫu nhiên nên kết quả của các phép đo cũng là ngẫu nhiên. Kể từ đây chúng ta có thể nói về xác suất của các giá trị số nhận được. Ý tưởng biến ngẫu nhiên tạo ra khái niệm này.

HÌNH 3.1
Biến ngẫu nhiên gán số X(ζ) cho mỗi kết cục ζ trong không gian mẫu S của thí nghiệm ngẫu nhiên .



Biến ngẫu nhiên X là một hàm mà nó gán một số thực, X(ζ). Cho mỗi kết cục ζ trong không gian mẫu của thí nghiệm ngẫu nhiên . Nhớ lại rằng, hàm là một quy tắc đơn giản để gán một giá trị số cho mỗi phần tử của một tập hợp, như được chỉ ra một cách hình ảnh trong Hình 3.1. Sự định rõ phép đo trên kết cục của thí nghiệm ngẫu nhiên xác định một hàm trên không gian mẫu, và do đó một biến ngẫu nhiên không gian mẫu S là miền xác định của biến ngẫu nhiên, và tập hợp S_X tất cả các giá trị có thể của X, là miền giá trị của biến ngẫu nhiên. Như vậy S_X là tập con của tập tất cả các số thực R.

VÍ DỤ 3.1 Giả sử rằng một đồng xu được tung 3 lần và dãy mặt sấp và mặt ngửa được ghi lại. Không gian mẫu của thí nghiệm này là S = {HHH, HHT, HTH, THH, TTH, THT, HTT, TTT}. Bây giờ giả sử X là số lần xuất hiện mặt sấp trong 3 lần tung. X gán mỗi kết cục ζ trong S một số từ tập hợp S_X = {0, 1, 2, 3}. Bảng liệt kê 8 kết cục của S và các giá trị tương ứng của X.

ζ :	HHH	HHT	HTH	THH	HTT	THT	TTH	TTT
X(ζ):	3	2	2	2	1	1	1	0

Khi đó X là biến ngẫu nhiên giá trị trong tập S_X = {0, 1, 2, 3}.

VÍ DỤ 3.2 Nếu kết cục của ζ thí nghiệm nào đó là giá trị số, chúng ta có thể ngay lập tức lặp lại sự giải thích kết cục như là một biến ngẫu nhiên được xác định bởi hàm đồng nhất, X(ζ) = ζ. Như vậy, nhiều kết cục được xét trong chương trước có thể được coi như là biến ngẫu nhiên.

Hàm hoặc quy tắc gán các giá trị cho mỗi kết cục được cố định và xác định, ví dụ như, quy tắc "Đếm số lần xuất hiện mặt sấp trong ba lần tung đồng xu". Tính ngẫu nhiên trong các giá trị được quan sát là do tính ngẫu nhiên của các biến số cơ sở của hàm X, được gọi là kết cục của thí nghiệm ζ. Nói cách khác, tính ngẫu nhiên trong các giá trị được quan sát của X được tạo ra bởi thí nghiệm ngẫu nhiên cơ sở, và do đó chúng ta có thể tính hàm xác suất của các giá trị được quan sát dựa trên xác suất của các kết cục cơ bản.

VÍ DỤ 3.3 Biến cố $\{X = k\}$ = {k lần xuất hiện mặt sấp trong 3 lần tung} xảy ra khi kết cục của thí nghiệm tung đồng xu chứa 3 lần xuất hiện mặt sấp. Xác suất của biến cố $\{X = k\}$ được cho bởi tổng các xác suất của các kết cục tương ứng hoặc các biến cố cơ bản. Trong Ví dụ 2.34, chúng ta tìm được xác suất của các biến cố cơ sở của thí nghiệm tung đồng xu. Như vậy chúng ta có:

$$p_0 = P[X = 0] = P[\{TTT\}] = (1 - p)^3,$$

$$p_1 = P[X = 1] = P[\{HTT\}] + P[\{THT\}] + P[\{TTH\}] = 3(1 - p)^2 p,$$

$$p_2 = P[X = 2] = P[\{HHT\}] + P[\{HTH\}] +P[\{THH\}] = 3(1 - p)^2 p,$$

và

$$p_3 = P[X = 3] = P[\{HHH\}] = p^3.$$

Xác suất p_k có thể được dùng để nhận được xác suất của tất cả các kết cục thuộc vào X. Miễn là chúng ta tập chung chỉ với các giá trị của X, và có thể bỏ qua thí nghiệm cơ sở với không gian mẫu S và tiếp tục như thể thí nghiệm có không gian mẫu S_X với các xác suất p_k.

Ví dụ 3.3 minh họa kỹ thuật chung sau đây để tìm các xác suất của các biến cố liên quan đến biến ngẫu nhiên X. Giả sử S_X là tập tất cả các giá trị có thể của X, và giả sử B là tập con nào đó của S_X. S_X có thể coi như không gian mẫu mới, và B như là một biến cố trong không gian mẫu này. Giả sử A là tập các kết cục ζ trong S sao cho giá trị $X(\zeta)$ thuộc vào B, như được chỉ ra trong Hình 3.2, nghĩa là:

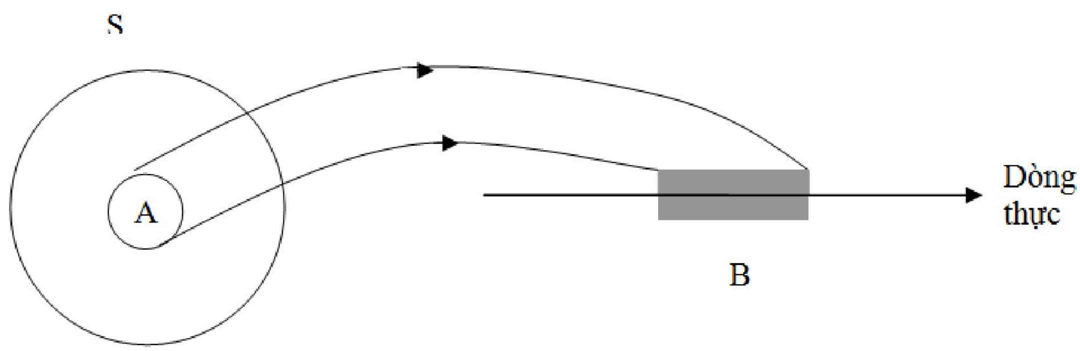
$$A = \{\zeta : X(\zeta) \in B\},$$

khi đó, biến cố B trong S_X xảy ra khi biến cố A trong S xảy ra. Như vậy xác suất của biến cố B được cho bởi $P[B] = P[A] = P[\{\zeta : X(\zeta) \in B\}]$.

Chúng ta coi các biến cố A và B như là các **biến cố tương đương**.

Tất cả các biến cố quan tâm trong thực tế liên quan đến các biến cố có dạng $\{X = x\}$, ở đây x là một số hoặc {X thuộc I}, ở đây I là một khoảng hoặc hợp của các khoảng nào đó. Trong phần sau chúng ta chỉ ra rằng các xác suất của tất cả các biến cố có thể biểu diễn qua các xác suất $P[\{X \le x\}]$, ở đây x là một số thực. Do vậy chúng ta có thể tính xác suất của các biến cố trong S_X nếu chúng ta biết xác suất của các biến cố cơ sở $\{\zeta : X(\zeta) \leq x\}$.

HÌNH 3.2
P[X trong B] = P[ζ trong A] do X trong B khi và chỉ khi
ζ trong A, khi đó A = $\{\zeta : X(\zeta)$ trong B$\}$.



3.2 HÀM PHÂN PHỐI

Hàm phân phối [**cumulative distribution function** (**cdf**)] của biến ngẫu nhiên X được định nghĩa như là xác suất của biến cố $\{X \leq x\}$:

$$F_X(x) = P[X \leq x] \quad \text{với} \quad -\infty < x < +\infty, \qquad (3.1)$$

nghĩa là, xác suất để biến ngẫu nhiên X lấy giá trị trong tập $(-\infty, x]$. Theo thuật ngữ của không gian cơ sở, hàm phân phối là xác suất của biến cố $\{\zeta : X(\zeta) \leq x\}$. Biến cố $\{X \leq x\}$ và xác suất của nó thay đổi theo x, nói cách khác, $F_X(x)$ là hàm của biến x.

Hàm phân phối là cách đơn giản để mô tả xác suất của tất cả các khoảng nửa vô hạn của đường thẳng thực dạng $(-\infty, x]$. Các biến cố mà ta quan tâm là cách khoảng của đường thẳng thực và phần bù, hợp và giao của chúng. Dưới đây chúng ta chứng tỏ rằng các xác suất của tất cả các biến cố này có thể được biểu diễn qua hàm phân phối.

Hàm phân phối có sự giải thích sau theo thuật ngữ của tần số tương đối. Giả sử rằng thí nghiệm mà ở đó xảy ra kết cục ζ, và do vậy $X(\zeta)$, được thực hiện một số lớn lần. $F_X(b)$, khi đó, là tỷ số giới hạn của số lần xảy ra $X(\zeta) \leq b$.

Các tiên đề xác suất và các hệ quả của nó suy ra rằng hàm phân phối có các tính chất sau:

i. $0 \le F_X(x) \le 1$.

ii. $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$.

iii. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$.

iv. $F_X(x)$ là hàm không giảm của x, nghĩa là, nếu $a < b$, khi đó $F_X(a) \le F_X(b)$.

v. $F_X(x)$ là hàm liên tục bên phải, nghĩa là, với $h > 0$,
$F_X(b) = \lim_{h \to 0} F_X(b+h) = F_X(b^+)$.

Tính chất thứ nhất suy ra từ định nghĩa của hàm phân phối, nó là một xác suất và do vậy nó phải thỏa mãn Tiên đề 1 và Hệ quả 2. Tính chất thứ hai suy ra từ thực tế là biến cố $\{X < \infty\}$ bao gồm tất cả các số thực và do vậy là toàn bộ không gian mẫu. Tính chất thức 3 là suy ra từ sự việc là tất cả các số thực đều lớn hơn $-\infty$, do vậy biến cố $\{X < -\infty\}$, là biến cố rỗng (Hệ quả 3). Để nhận được tính chất thứ 4, chú ý rằng biến cố $\{X \le a\}$ là tập con của biến cố $\{X \le b\}$, do vậy nó phải có xác suất nhỏ hơn hoặc bằng (Hệ quả 7). Chúng ta sẽ nhận thấy tính chất thứ 5 xảy ra như thế nào trong Ví dụ 3.4[(1)].

Xác suất của các biến cố tương ứng với các khoảng có dạng $\{a < X \le b\}$ có thể được biểu diễn qua hàm phân phối:

vi. $P[a < X \le b] = F_X(b) - F_X(a)$ (3.2)

(1) Sự chứng minh tính liên tục bên phải của hàm phân phối là vượt quá mức đã định ở đây. Chứng minh có thể tìm được trong Davenport (1970, 116–121).

Để chứng minh Hệ thức (3.2) chúng ta chú rằng:

$$\{X \le a\} \cup \{a < X \le b\} = \{X \le b\},$$

và do hai biến cố ở vế trái xung khắc, chúng ta nhận được kết quả sau từ Tiên đề III và Hệ thức (3.1)

$$F_X(a) + P[a \le b] = F_X(b).$$

Như vậy Hệ thức (3.2) được chứng minh.

Hệ thức (3.2) cho phép chúng ta tính xác suất của biến cố $\{x = b\}$. Đặt $a = b - \varepsilon$ trong Hệ thức (3.2), $\varepsilon > 0$, khi đó

$$P[b - \varepsilon < X \le b] = F_X(b - \varepsilon)$$

Khi $\varepsilon \to 0$, vế trái của hệ thức trên tiến đến $P[X = b]$, do vậy:

vii. $P[X \le b] = F_X(b) - F_X(b^-)$ (3.3)

Như vậy xác suất để biến ngẫu nhiên X tùy ý lấy giá trị tại một điểm, gọi là *b*, được cho bởi độ lớn của bước nhảy của hàm phân phối tại điểm b. Điều đó suy ra rằng, *nếu hàm phân phối liên tục tại điểm b, khi đó biến cố {X = b} có xác suất 0.*

Hệ thức (3.3) có thể được kết hợp với Hệ thức (3.2) để tính xác suất của các khoảng dạng khác. Ví dụ, từ:

$$\{a \le X \le b\} = \{X = a\} \cup \{a < X \le b\},$$

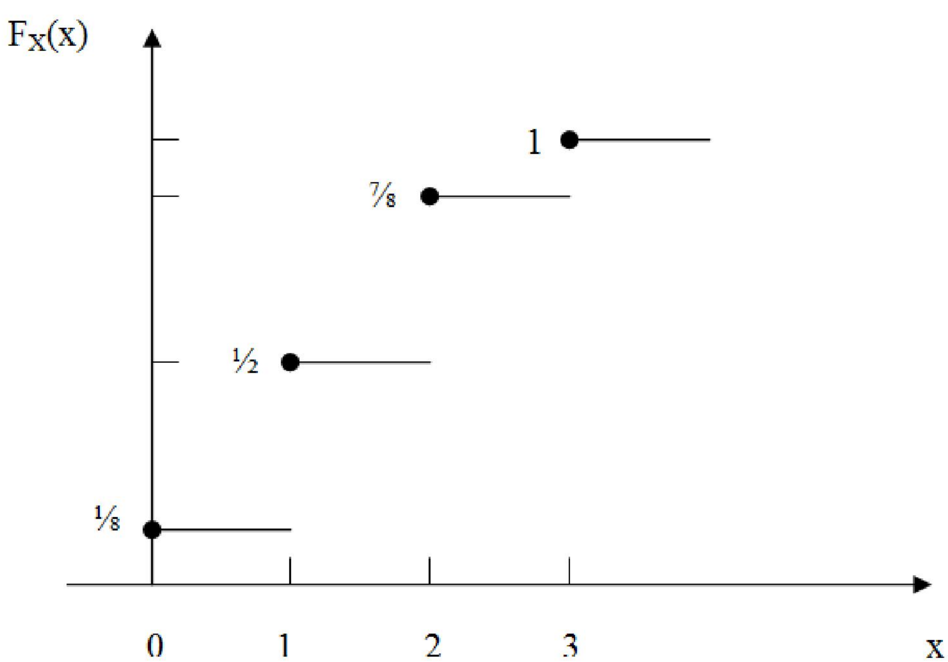
khi đó

$$\begin{aligned} P[a \le X \le b] &= P[X = a] + P[a < X \le b] \\ &= F_X(a) - F_X(a^-) + F_X(b) - F_X(a) \\ &= F_X(b) - F_X(a^-). \qquad (3.4) \end{aligned}$$

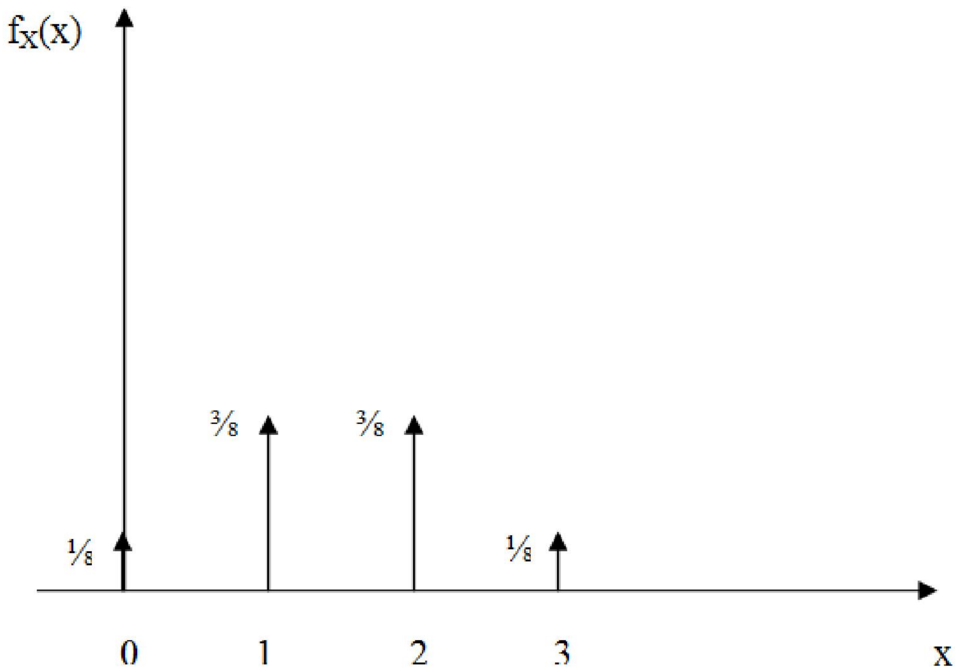
Chú ý rằng nếu hàm phân phối liên tục tại điểm mút của khoảng, khi đó các điểm mút có xác suất 0. Do vậy chúng có thể nằm trong hoặc ngoài các khoảng mà không ảnh hưởng đến xác suất. Nói cách khác, nếu hàm phân phối liên tục tại các điểm $x = a$ và $x = b$, khi đó các xác suất sau là bằng nhau:

$$P[a < X < b], \quad P[a \le X < b], \quad P[a < X \le b], \text{ và } P[a \le X \le b].$$

HÌNH 3.3
Một ví dụ của biến ngẫu nhiên rời rạc–Biến ngẫu nhiên nhị thức, n = 3, p = 1/2. Phần (a) là hàm phân phối, phần (b) là hàm mật độ xác suất.



(a)



(b)

Xác suất của biến cố {X > x} nhận được từ Hệ quả 1:

viii. $P[X > x] = 1 - F_X(x)$.

VÍ DỤ 3.4 Hình 3.3(a) chỉ ra hàm phân phối của biến ngẫu nhiên X, mà nó được xác định như là số lần xuất hiện mặt sấp trong 3 lần tung một đồng xu cân đối. Từ Ví dụ 3.1 chúng ta biết rằng X lấy chỉ các giá trị 0, 1, 2 và 3 với các xác suất 1/8, 3/8, 3/8, và 1/8 một cách tương ứng, bởi vậy $F_X(x)$ một cách đơn giản là tổng của các xác suất của các kết cục từ {0, 1, 2, 3} mà nhỏ hơn hoặc bằng x. Hàm phân phối nhận được là hàm gián đoạn tại các điểm 0, 1, 2, 3.

Chúng ta thực hiện một cái nhìn cận cảnh tại một điểm gián đoạn. Xét hàm phân phối tại lân cận của điểm $x = 1$. Cho δ là một số dương nhỏ, chúng ta có:

$$F_X(1-\delta) = P[X \le 1-\delta] = P[0 \text{ lần xuất hiện mặt sấp}] = \frac{1}{8},$$

bởi vậy, giới hạn của hàm phân phối khi x tiến tới 1 từ bên phải là 1/8. Hơn nữa,

$F_X(1) = P[X \le 1] = P[0$ hoặc 1 lần xuất hiện mặt sấp] =

$$= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2},$$

và hơn nữa

$$F_X(1 + \delta) = P[X \le 1 + \delta\,] = P[\text{ 0 hoặc 1 lần sấp}] = \frac{1}{2}.$$

Như vậy, hàm phân phối liên tục bên phải và bằng 1/2 tại điểm x = 1. Thực vậy, chúng ta lưu ý độ lớn của bước nhảy tại điểm x = 1 là bằng P[X = 1] = 1/2 – 1/8 = 3/8. Từ nay trở đi chúng ta sử dụng dấu chấm nhỏ trên đồ thị để chỉ giá trị của hàm phân phối tại các điểm gián đoạn.

Hàm phân phối hoàn toàn có thể được biểu diễn theo hàm bậc thang đơn vị:

$$u(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \ge 0 \end{cases},$$

khi đó

$$F_X(x) = \frac{1}{8}u(x) + \frac{3}{8}u(x-1) + \frac{3}{8}u(x-2) + \frac{1}{8}u(x-3).$$

VÍ DỤ 3.5
Biến Ngẫu nhiên Mũ

Thời gian truyền X của một tin nhắn trong một hệ truyền thông tuân theo luật phân phối mũ với tham số λ, nghĩa là,

$$P[X > x] = e^{-\lambda x} \qquad x > 0.$$

Hãy tìm hàm mật độ của X. Tìm $P[T < X \le 2T]$, ở đây $T = 1/\lambda$.

Hàm phân phối của X là $F_X(x) = P[X \le x] = 1 - P[X > x]$:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \ge 0. \end{cases}$$

Hàm phân phối này được chỉ ra ở Hình 3.4(a). Từ tính chất (vi) chúng ta có:

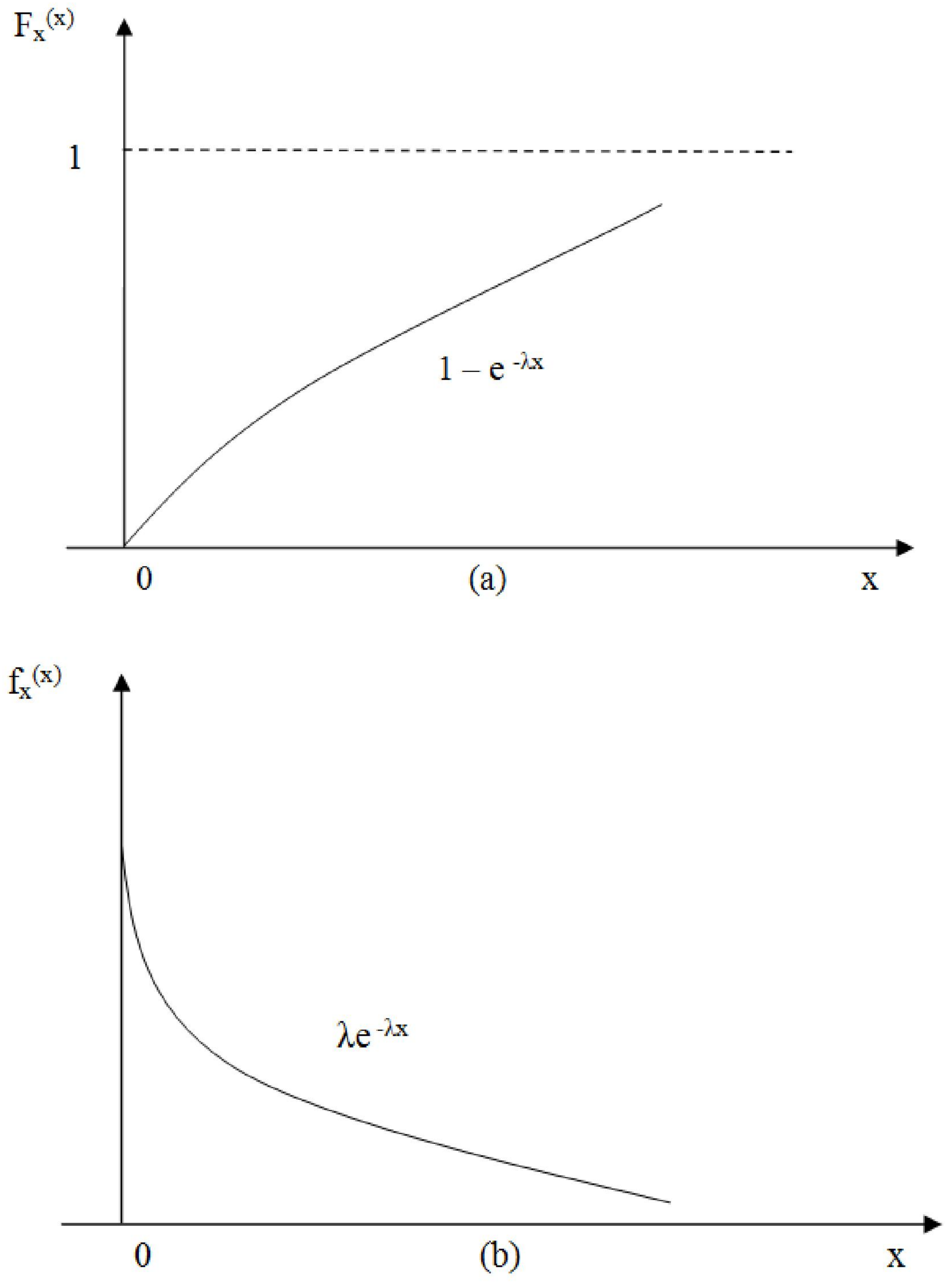
$$P[T < X \le 2T] = 1 - e^{-2} - (1 - e^{-1}) = e^{-1} - e^{-2} \approx .233.$$

Chú ý rằng $F_X(x)$ là hàm liên tục với mọi x. Chú ý rằng đạo hàm của nó tồn tại khắp nơi trừ điểm x = 0 :

$$F'_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x > 0. \end{cases}$$

F’(x) được chỉ ra trong Hình 3.4(b).

HÌNH 3.4
Một ví dụ của biến ngẫu nhiên liên tục–Biến ngẫu nhiên có phân phối mũ.
Phần (a) là hàm phân phối,
và Phần (b) là hàm mật độ xác suất



VÍ DỤ 3.6

Thời gian đợi X của một khách hàng trong hệ hàng đợi là 0 nếu hệ rỗi và là biến ngẫu nhiên có phân phối mũ nếu anh ta đến vào lúc hệ bận phục vụ. Xác suất để anh ta đến vào lúc hệ rỗi và bận là p và $1 - p$, một cách tương ứng. Hãy tìm phân phối của X.

Hàm phân phối của X được tìm như sau:

$$F_X(x) = P[X \le x]$$

$$= P[X \le x \mid \text{rỗi}]\, p + P[X \le x \mid \text{bận}]\,(1 - p),$$

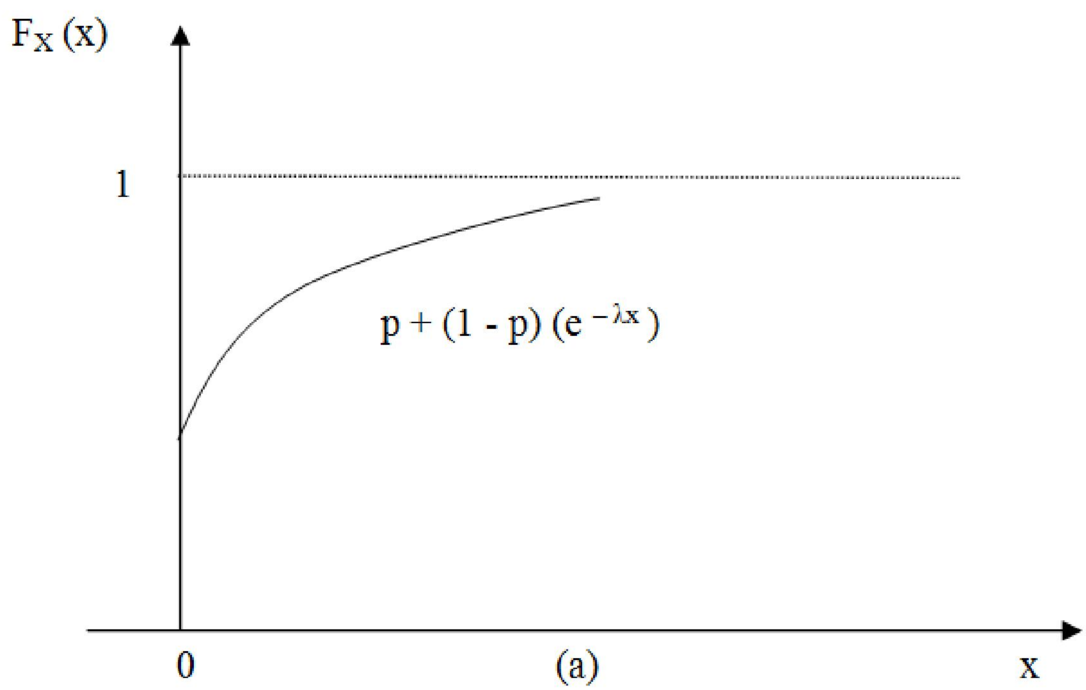
ở đây hệ thức cuối cùng sử dụng định lý xác suất toàn phần, hệ thức (2.26). Chú ý rằng, $P[X \le x \mid \text{rỗi}] = 1$ khi $x \ge 0$ và trong các trường hợp khác, chúng ta có:

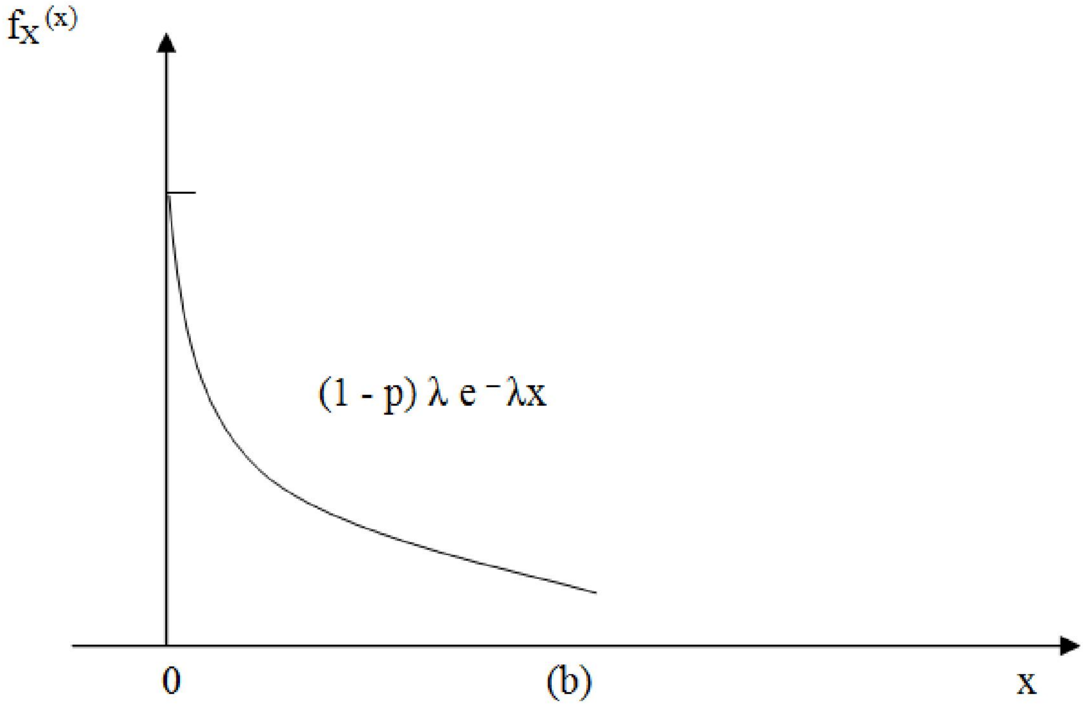
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ p + (1-p)(1-e^{-\lambda x}) & x \ge 0. \end{cases}$$

Hàm phân phối được chỉ ra trong Hình 3.5(a). Chú ý rằng, $F_X(x)$ có thể biểu diễn như là tổng của hàm bậc thang với biên độ p và một hàm liên tục của x.

HÌNH 3.5

Một ví dụ của biến ngẫu nhiên hỗn hợp.
Phần (a) là hàm phân phối,
Phần (b) là hàm mật độ xác suất.





Ba dạng thức của biến ngẫu nhiên

Các biến ngẫu nhiên trong các Ví dụ 3.4, 3.5, 3.6 là các biến ngẫu nhiên điển hình của 3 dạng thức cơ bản của biến ngẫu nhiên mà chúng ta quan tâm ở đây.

Biến ngẫu nhiên rời rạc [**discreet random variable**] được định nghĩa là một biến ngẫu nhiên mà hàm phân phối của nó là hàm bậc thang, liên tục bên phải theo x, với bước nhảy tại tập đếm được các điểm x_0, x_1, x_2, …. Biến ngẫu nhiên trong Ví dụ 3.4 là một ví dụ của biến ngẫu nhiên rời rạc. Biến ngẫu nhiên rời rạc lấy các giá trị từ tập hữu hạn hoặc cùng lắm là đếm được $S_X = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$. Tập xác suất xuất hiện hầu hết trong các ứng dụng mà cần phải tính toán, bởi vậy chúng ta thường sử dụng $S_X = \{0, 1, 2, \ldots\}$. **Hàm khối lượng xác suất** [**probability mass function** (**pmf**)] (hay đơn giản là **hàm xác suất**) **của X** là tập các xác suất $p_X(x_k) = P[X = x_k]$ của các giá trị trong xác suất.

Hàm phân phối của biến ngẫu nhiên rời rạc có thể được mô tả như là tổng theo trọng số của các hàm bậc thang đơn vị trong Ví dụ 3.4 :

$$F_X(x) = \sum_k p_X(x_k)\, u(x - x_k). \tag{3.5}$$

trong đó $p_X(x_k) = P[X = x_k]$ đưa đến độ lớn của bước nhảy trong hàm phân phối.

Biến ngẫu nhiên liên tục [**continuous random variable**] được định nghĩa là biến ngẫu nhiên mà hàm phân phối $F_X(x)$ của nó là hàm liên tục khắp nơi, hơn nữa, là hàm trơn hoàn toàn, nghĩa là nó có thể biểu diễn dưới dạng tích phân của một hàm không âm $f(x)$ nào đó :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dt. \qquad (3.6)$$

Với biến ngẫu nhiên liên tục, hàm phân phối liên tục khắp nơi, từ tính chất (vii) suy ra rằng P[X = x] = 0 với mọi x. Hàm phân phối của biến ngẫu nhiên được xét trong Ví dụ 3.5 là biến ngẫu nhiên liên tục do hàm phân phối của nó liên tục khắp nơi và từ Hệ thức (3.6) được thỏa mãn nếu chúng ta đặt f(x) = $F'_X(x)$ như được đưa ra trong ví dụ.

Biến ngẫu nhiên hỗn hợp [**random varible of mixed type**] là biến ngẫu nhiên mà hàm phân phối của nó có các bước nhảy trên tập đếm được các điểm x_0, x_1, x_2, … và tăng liên tục ít nhất trên một khoảng các giá trị của x. Hàm phân phối của các biến ngẫu nhiên dạng này có dạng:

$$F_X(x) = pF_1(x) + (1-p)F_2(x),$$

ở đây 0 < p < 1, và $F_1(x)$ là hàm phân phối của biến ngẫu nhiên rời rạc và $F_2(x)$ là hàm phân phối của biến ngẫu nhiên liên tục. Biến ngẫu nhiên trong Ví dụ 3.6 là biến ngẫu nhiên hỗn hợp.

Biến ngẫu nhiên hỗn hợp có thể được nhìn nhận như được tạo bởi quá trình hai bước: Một đồng xu được tung, nếu kết cục là mặt ngửa, biến ngẫu nhiên rời rạc được tạo ra theo hàm phân phối $F_1(x)$, nếu khác, biến ngẫu nhiên liên tục được tạo ra theo hàm phân phối $F_2(x)$.

3.3 HÀM MẬT ĐỘ XÁC SUẤT

Hàm mật độ xác suất của X [**probability density function** (**pdf**)], nếu nó tồn tại, được xác định như là đạo hàm của $F_X(x)$:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \qquad (3.7)$$

Trong phần này chúng ta chứng tỏ rằng hàm mật độ là một cách thay thế và hữu ích hơn để biểu diễn các thông tin chứa trong hàm phân phối.

Hàm mật độ xác suất thể hiện hàm “mật độ” xác suất tại điểm x theo nghĩa sau: Xác suất để X thuộc vào khoảng nhỏ trong lân cận của x – nghĩa là, {x < X ≤ x + h} – là:

$$P[x < X \le x + h] = F_X(x + h) - F_X(x)$$

$$= \frac{F_X(x+h) - F_X(x)}{h} h. \qquad (3.8)$$

Nếu hàm phân phối khả vi tại *x*, thì khi h tiến đến số rất nhỏ,

$$P[x < X \le x + h] \approx f_X(x)h. \qquad (3.9)$$

Như vậy $f_X(x)$ biểu diễn "mật độ" xác suất tại điểm *x* theo nghĩa là xác suất để X thuộc vào khoảng nhỏ trong lân cận của *x* xấp xỉ với $f_X(x)h$. Đạo hàm của hàm phân phối, khi nó tồn tại, nhận các giá trị dương do hàm phân phối là không giảm theo *x*, như vậy:

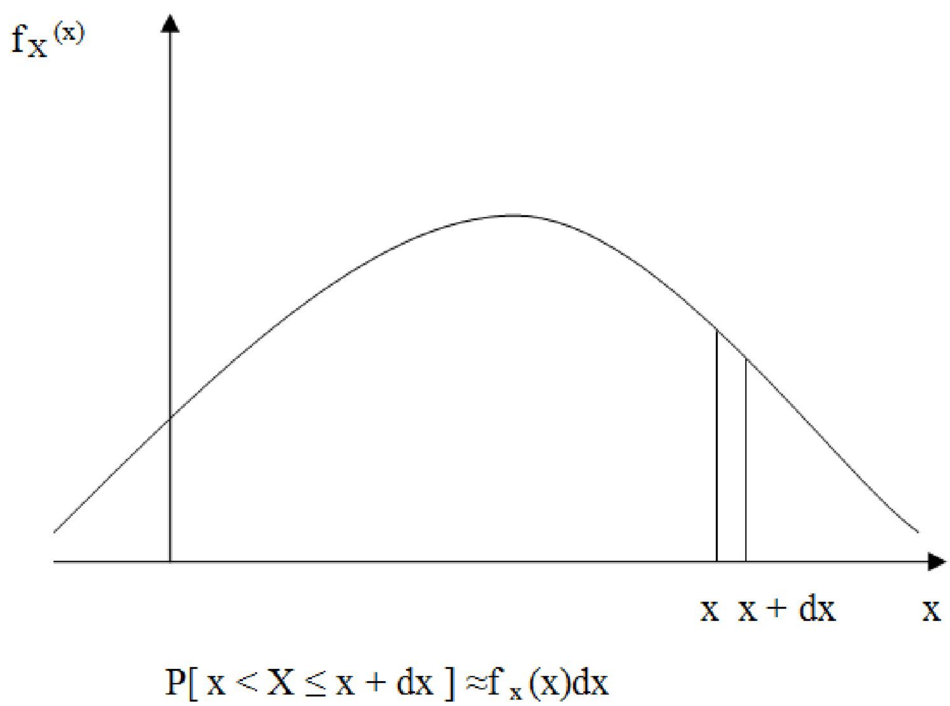
i. $\quad f_X(x) \ge 0. \qquad (3.10)$

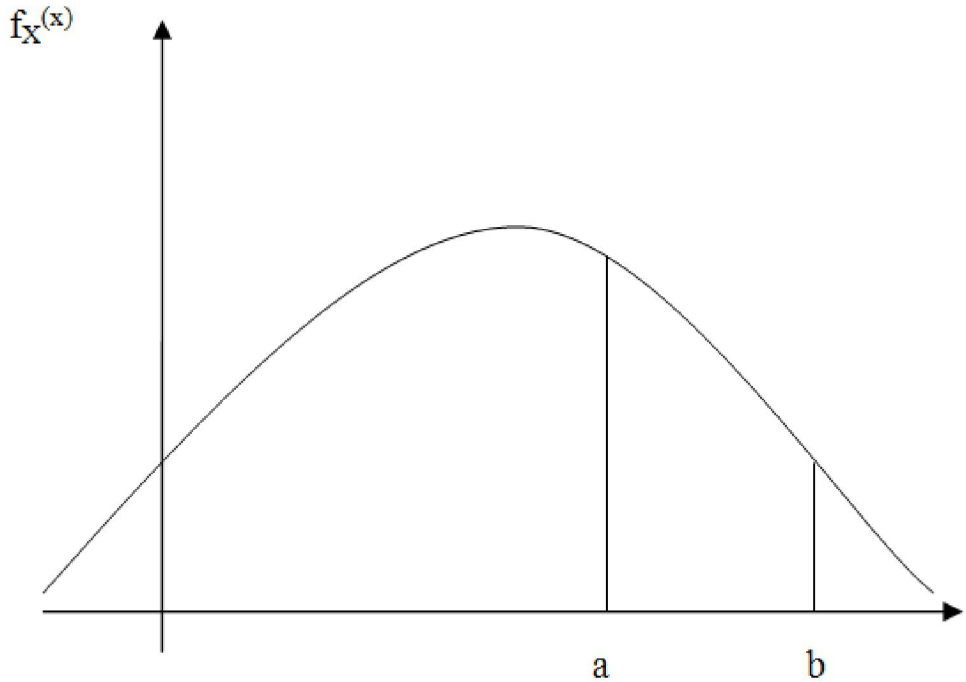
Các Hệ thức (3.9) và (3.10) đem đến cho chúng ta một cách biểu diễn các xác suất liên quan đến biến ngẫu nhiên X. Chúng ta bắt đầu bằng việc trình bày hàm không âm $f_X(x)$, được gọi là hàm mật độ xác suất, mà nó biểu diễn xác suất của các biến cố dạng "X rơi vào khoảng nhỏ có độ dài *dx* xung quanh *x*", như được chỉ ra trong Hình 3.6(a). Các xác suất của các biến cố liên quan đến X được biểu diễn qua hàm mật độ bởi việc cộng các xác suất của các khoảng có độ dài *dx*. Khi độ dài của khoảng tiến đến 0, chúng ta nhận được tính phân của hàm mật độ xác suất . Ví dụ, xác suất để X thuộc vào khoảng [*a*, *b*] là

ii. $\quad P[a \le X \le b] = \int_a^b f_X(x)dx. \qquad (3.11)$

HÌNH 3.6

(a)Hàm mật độ xác suất biểu diễn xác suất của khoảng có độ dài vô cùng nhỏ.(b) Xác suất của khoảng [a,b] là diện tích của miền nằm dưới hàm mật độ xác suất trong khoảng này.





$P[a \le X \le b] = \int_a^b f_X(x)\,dx$

Xác suất của một khoảng là diện tích của miền nằm dưới $f_X(x)$ trong khoảng này, như được chỉ ra bởi Hình 3.6(b). Xác suất của biến cố bất kỳ là hợp của các khoảng rời nhau có thể tìm được bằng cách cộng các tích phân của hàm mật độ trên mỗi khoảng.

Hàm phân phối của X có thể nhận được bằng cách tích phân hàm mật độ:

iii. $$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\, dt. \qquad (3.12)$$

Trong Phần 3.2, chúng ta đã định nghĩa *biến ngẫu nhiên liên tục* là biến ngẫu nhiên X mà hàm phân phối của nó được cho bởi (3.12). Do xác suất của các biến cố liên quan đến X có thể được mô tả theo hàm phân phối, khi đó nó kéo theo các xác suất này cũng có thể được mô tả qua hàm mật độ. Như vậy, *hàm mật độ xác định hoàn toàn dáng điệu của biến ngẫu nhiên liên tục*.

Bằng việc cho *x* tiến tới vô hạn trong Hệ thức (3.12), chúng ta nhận được điều kiện *định chuẩn* của hàm mật độ:

iv. $$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\, dt. \qquad (3.13)$$

Hàm mật độ xác suất củng cố thêm nhận xét trực quan về xác suất như là thuộc tính vốn có tương tự như “khối lượng vật lý”. Như vậy, Hệ thức (3.11) phát biểu rằng “khối lượng” xác suất trên một khoảng là tích phân của mật độ khối lượng xác suất trên khoảng đó. Hệ thức (3.13) phát biểu rằng tổng các khối lượng có thể bằng 1.

Hàm mật độ xác suất có thể được tạo từ hàm liên tục từng khúc, không âm bất kỳ g(x) mà nó có tích phân hữu hạn:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dx = c < \infty. \tag{3.14}$$

Bằng việc đặt $f_X(x) = g(x)/c$, chúng ta nhận được một hàm thỏa mãn điều kiện định chuẩn. Chú ý rằng hàm mật độ xác suất cần phải được xác định với mọi giá trị thực của x; nếu X không lấy giá trị trong miền nào đó của đường thẳng thực, một cách đơn giản chúng ta đặt $f_X(x) = 0$ trên miền này và được chỉ ra.

VÍ DỤ 3.7
Biến Ngẫu nhiên có Phân phối Đều

Hàm mật độ của biến ngẫu nhiên có phân phối đều được cho bởi:

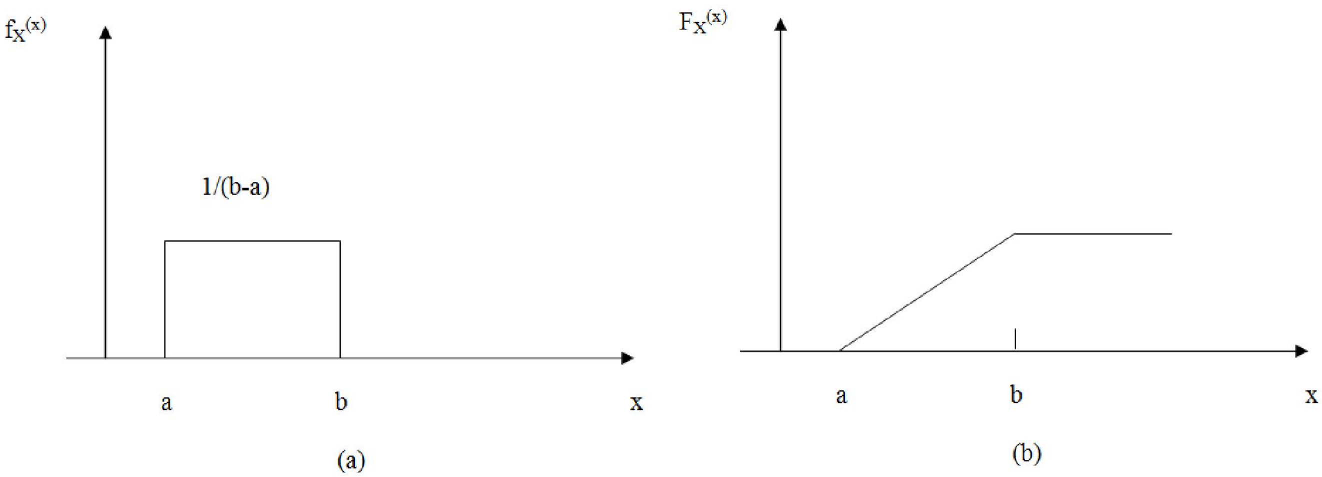
$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & x < a \text{ và } x > b \end{cases} \tag{3.15a}$$

và được cho trên Hình 3.7(a). Hàm phân phối được tìm từ hệ thức (3.12):

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & x > 0 \end{cases} \tag{3.15b}$$

Hàm phân phối được chỉ ra trong Hình 3.7(b).

HÌNH 3.7
Biến ngẫu nhiên có phân phối đều.
Phần (a) là hàm mật độ xác suất,
và Phần (b) là hàm phân phối.



VÍ DỤ 3.8
Biến Ngẫu nhiên Laplace

Hàm mật độ của các mẫu của cường độ âm thanh tìm được từ sự giảm âm theo hàm mũ với tốc độ α, có dạng sau đây:

$$F_X(x) = ce^{-\alpha|x|} \qquad -\infty < x < \infty. \qquad (3.16)$$

Bây giờ ta tìm hằng số c, và từ đó tìm xác suất $P[|X| < v]$.

Chúng ta sử dụng điều kiện định chuẩn trong (iv) để tìm c:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} ce^{-\alpha|x|}dx = 2\int_{0}^{\infty} ce^{-\alpha|x|}dx = \frac{2c}{\alpha}.$$

Do vậy $c = \alpha/2$. Xác suất $P[|X| < v]$ tìm được bằng việc lấy tích phân hàm mật độ:

$$P[|X| < v] = \frac{\alpha}{2}\int_{-v}^{v} ce^{-\alpha|x|}dx = 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\int_{0}^{v} ce^{-\alpha|x|}dx = 1 - e^{-\alpha v}.$$

Đạo hàm của hàm phân phối không tồn tại tại các điểm mà ở đó hàm phân phối không liên tục. Do đó khái niệm của hàm mật độ xác suất như được định nghĩa bởi hệ thức (3.7) không áp dụng được cho biến ngẫu nhiên rời rạc tại các điểm mà ở đó hàm phân phối gián đoạn. Chúng ta có thể tổng quát hóa định nghĩa hàm mật độ xác suất bằng việc đề cập đến sự liên hệ giữa hàm bậc thang đơn vị và hàm delta. **Hàm bậc thang đơn vị** [**unit step function**] được định nghĩa như sau:

$$u(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0. \end{cases} \qquad (3.17)$$

Hàm delta $\delta(t)$ được xác định theo hàm bậc thang đơn vị bởi hệ thức sau :

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(t)dt. \qquad (3.18)$$

Nhớ lại từ phần 3.2 rằng hàm mật độ phân phối của biến ngẫu nhiên rời rạc có thể được biểu diễn như là tổng theo trọng số của các hàm bậc thang đơn vị :

$$F_X(x) = \sum_k p_X(x_k)u(x - x_k), \qquad (3.19)$$

ở đây hàm khối lượng xác suất là $p_X(x_k) = P[X = x_k]$. Chúng ta đã thực hiện việc tổng quát hóa định nghĩa hàm mật độ xác suất để thức (3.12) đúng với biến ngẫu nhiên rời rạc :

$$\text{iii.} \qquad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt. \qquad (3.20)$$

Tích phân của hàm delta được đặt tại $x = b$, nghĩa là $\delta(x - b)$, sẽ nhận được hàm bậc thang mà nó bắt đầu tại $x = b$, nghĩa là $u(x - b)$. Điều này gợi ý để chúng ta định nghĩa **hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc** bằng công thức :

$$f_X(x) = \sum_k P_X(x_k)\delta(x - x_k). \qquad (3.21)$$

Sử dụng Hệ thức (3.21) vào Hệ thức (3.20) thì chúng ta nhận được Hệ thức (3.19) như là điều hiển nhiên.

Do đó định nghĩa đã được tổng quát hóa của hàm mật độ xác suất đặt hàm delta với trọng số P[X = x_k] tại các điểm x_k mà ở đó hàm phân phối không liên tục.

Hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc được xét trong Ví dụ 3.4 được chỉ ra trong Hình 3.3(b). Hàm mật độ của biến ngẫu nhiên hỗn hợp cũng sẽ gồm các hàm delta tại các hàm mà ở đó hàm phân phối không liên tục. Hàm mật độ của các biến ngẫu nhiên được xét trong Ví dụ 3.6 được chỉ ra trong Hình3.5(b).

VÍ DỤ 3.9

Giả sử X là số lần xuất hiện mặt sấp trong ba lần tung đồng xu như trong Ví dụ 3.4. Hãy tìm hàm mật độ xác suất của X. Hãy tính P[1 < X ≤ 2] và P[2 ≤ X < 3] bằng việc tích phân hàm mật độ xác suất.

Trong Ví dụ 3.4 chúng ta đã tìm được rằng hàm phân phối của X được cho bởi :

$$F_X(x) = \frac{1}{8}u(x) + \frac{3}{8}u(x-1) + \frac{3}{8}u(x-2) + \frac{1}{8}u(x-3).$$

Khi đó từ các Hệ thức (3.19) và (3.21) chúng ta nhận được :

$$f_X(x) = \frac{1}{8}\delta(x) + \frac{3}{8}\delta(x-1) + \frac{3}{8}\delta(x-2) + \frac{1}{8}\delta(x-3).$$

Khi hàm delta xuất hiện trong biểu thức tích phân. Do đó trong P[1 < X ≤ 2] = P[X trong (1, 2]], hàm delta đặt tại 1 bị đưa ra ngoài tích phân và hàm delta đặt tại 1 được tính trong tích phân :

$$P[1 < X \le 2] = \int_{1+}^{2+} f_X(x)dx = \frac{3}{8}.$$

Một cách tương tự chúng ta có :

$$\mathrm{P}[2 \le X < 3] = \int_{2-}^{3-} f_X(x)dx = \frac{3}{8}.$$

Hàm phân phối có điều kiện và hàm mật độ xác suất có điều kiện

Hàm phân phối có điều kiện có thể được định nghĩa một cách trực tiếp bằng cách thay xác suất trong hệ thức 3.1 bởi xác suất có điều kiện. Ví dụ, nếu biến cố A nào đó liên quan với X xảy ra, khi đó **hàm phân phối có điều kiện của X với điều kiện A** đã xảy ra được xác định như sau :

$$F_X(x \mid A) = \frac{P[\{X \le x\} \cap A]}{P[A]} \quad \text{nếu } P[A] > 0. \qquad (3.22)$$

Dễ dàng chứng tỏ rằng $F_X(x|\ A)$ thỏa mãn tất cả các tính chất của hàm phân phối (Xem bài tập 26.) Khi đó **hàm mật độ xác suất của X với điều kiện biến cố A** đã xảy ra được xác định bởi:

$$f_X(x \mid A) = \frac{d}{dx} F_X(x \mid A). \qquad (3.23)$$

VÍ DỤ 3.10

Thời gian sống của một cỗ máy có hàm phân phối liên tục $F_X(x)$. Hãy tìm hàm phân phối có điều kiện và hàm mật độ xác suất có điều kiện khi biến cố A đã xảy ra A = {X > t} (tức là, "máy vẫn làm việc đến thời điểm t").

Hàm phân phối có điều kiện là:

$$F_X(x \mid X > t) = P[X \le x \mid X > t]$$
$$= \frac{P[\{X \le x\} \cap \{X > t\}]}{P[X > t]}.$$

Giao của hai biến cố {X ≤ x} ∩ {X < t} là tập rỗng nếu $x < t$ và sẽ bằng {t < X ≤ x} khi $x \ge t$. Do vậy

$$F_X(x \mid X > t) = \begin{cases} 0 & x \le t \\ \dfrac{F_X(x) - F_X(t)}{1 - F_X(t)} & x > t. \end{cases}$$

Hàm mật độ xác suất có điều kiện tìm được bằng vi phân theo x:

$$f_X(x \mid X > t) = \frac{f_X(x)}{1 - F_X(t)} \qquad x \ge t.$$

3.4 MỘT SỐ BIẾN NGẪU NHIÊN QUAN TRỌNG

Có một số biến ngẫu nhiên xuất hiện trong nhiều ứng dụng riêng biệt, khác nhau. Tính phổ dụng của các biến ngẫu nhiên này là do chúng mô hình hóa những cơ chế cơ bản dựa trên tính ngẫu nhiên. Trong phần này chúng ta giới thiệu hàm phân phối và hàm mật độ xác suất của một số biến ngẫu nhiên này và xét chúng xuất hiện như thế nào và chúng liên quan đến nhau như thế nào. Các bảng 3.1 và 3.2 liệt kê những tính chất cơ bản của các biến ngẫu nhiên dạng này và dạng khác được suy ra như là hàm của các biến ngẫu nhiên được xét ở đây.

Các biến ngẫu nhiên rời rạc

Các biến ngẫu nhiên rời rạc xuất hiện hầu hết trong các ứng dụng mà ở đó việc đếm được đưa vào. Chúng ta bắt đầu với biến ngẫu nhiên Bernoulli như là mô hình cho phép tung đồng xu một lần. Bằng việc đếm phép tung đồng xu nhiều lần chúng ta nhận được các biến ngẫu nhiên nhị thức, hình học và Poisson.

BIẾN NGẪU NHIÊN BERNOULLI. Giả sử A là biến cố liên quan đến các kết cục của biến ngẫu nhiên nào đó. **Hàm chỉ số của A** [**indicator function for A**] được xác định bởi

$$I_A(\zeta) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \zeta \text{ không thuộc A} \\ 1 & \text{nếu } \zeta \text{ thuộc A} \end{cases} \qquad (3.24)$$

nghĩa là, $I_A(\zeta)$ bằng 1 nếu biến cố A xảy ra, và bằng 0 trong các trường hợp khác. I_A là một biến cố ngẫu nhiên do nó gán một số cho mỗi kết cục của S.Nó là một biến ngẫu nhiên rời rạc với tập biến thiên $S_X = \{0,1\}$ và hàm xác suất của nó là

$$p_I(0) = 1 - p \quad \text{và } p_I(1) = p, \qquad (3.25)$$

ở đây $P[A] = p$. I_A được gọi là **biến ngẫu nhiên Bernoulli** do nó miêu tả kết cục của phép thử Bernoulli nếu chúng ta đồng nhất $I_A = 1$ với sự "thành công".

Mọi phép thử Bernoulli, không kể tới việc xác định A, là tương đương với việc tung đồng xu có thể coi như là một đại diện của cơ chế tạo ra tính ngẫu nhiên và ngẫu nhiên Bernoulli là mô hình liên quan với nó.

BẢNG 3.1 CÁC BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC

BIẾN NGẪU NHIÊN BERNOULLI

$S_x = \{0, 1\}$

$p_0 = q = 1 - p \qquad p_1 = p \qquad 0 \le p \le 1$

$E[X] = p \qquad VAR[X] = p(1 - p)$

$G_X(z) = (q + pz)$

Chú ý: Biến ngẫu nhiên Bernoulli là giá trị của hàm chỉ số I_A của biến cố A nào đó, X = 1 nếu A xảy ra và X = 0 trong trường hợp ngược lại.

BIẾN NGẪU NHIÊN NHỊ THỨC

$S_X = \{0, 1, \ldots, n\}$

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

$E[X] = np \qquad VAR[A] = np(1 - p)$

$G_X(z) = (q + pz)^n$

Chú ý: X là số thành công trong n phép thử Bernoulli và là tổng của n biến ngẫu nhiên Bernoulli độc lập, cùng phân phối.

BIẾN NGẪU NHIÊN HÌNH HỌC

Dạng thứ nhất: $S_X = \{0, 1, 2, \ldots\}$

$P_k = p(1-p)^k$ k = 0, 1,…

$E[X] = \frac{1-p}{p}$ **VAR**$[X] = \frac{1-p}{p^2}$

$G_X(z) \frac{p}{1-qz}$

Chú ý: X số thất bại trước khi đạt được thành công đầu tiên trong dãy phép thử Bernoulli độc lập. Biến ngẫu nhiên hình học là biến ngẫu nhiên rời rạc không nhớ.

Dạng thứ hai: $S_{X'} = \{1, 2, \ldots\}$

$p_k = p(1-p)^{k-1}$ k = 1, 2, …

$E[X'] = \frac{1}{p}$ **VAR**$[X'] = \frac{1-p}{p^2}$

$G_{X'}(z) = (\frac{pz}{1-qz})'$

Chú ý: X' = X + 1 số các phép thử cho đến khi đạt được thành công đầu tiên trong dãy phép thử Bernoulli độc lập.

BIẾN NGẪU NHIÊN NHỊ THỨC ÂM

$S_X = \{r, r+1, \ldots\}$, ở đây r là số nguyên dương.

$p = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$ k = r, r + 1, …

$E[X] = \frac{r}{p}$ **VAR**$[X] = \frac{r(1-p)}{p^2}$

$G_X(z) = \left(\frac{pz}{1-qz}\right)^r$

Chú ý: X là số các phép thử cho đến khi đạt được r thành công của dãy các phép thử Bernoulli độc lập.

BIẾN NGẪU NHIÊN POISSON

$S_X = \{0, 1, 2, \ldots\}$

$p_k = \frac{\alpha k}{k!} e^{-\alpha}$ k = 0, 1,… và $\alpha > 0$

$E[X] = \alpha$ VAR$[X] = \alpha$

$G_X(z) = e^{\alpha(z-1)}$

Chú ý: X là số các biến cố xảy ra trong một đơn vị thời gian khi thời gian giữa các biến cố có phân phối mũ với trung bình $1/\alpha$.

BẢNG 3.2 CÁC BIẾN NGẪU NHIÊN LIÊN TỤC

BIẾN NGẪU NHIÊN CÓ PHÂN PHỐI ĐỀU

$S_X = [a, b]$

$f_X(x) = \frac{1}{b-a}$ $\quad a \le x \le b$

$E[X] = \frac{a+b}{2}$ $\quad$ $\mathbf{VAR}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$

$$\Phi_X(\omega) = \frac{e^{i\omega b} - e^{j\omega a}}{j\omega(b-a)}$$

BIẾN NGẪU NHIÊN CÓ PHÂN PHỐI MŨ

$S_X = [0, \infty)$

$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $\quad x \ge 0 \quad$ và $\lambda > 0$

$E[X] = \frac{1}{\lambda}$ $\quad$ $\mathbf{VAR}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$

$\Phi_X(x) = \frac{\lambda}{\lambda - j\omega}$

Chú ý : Biến ngẫu nhiên có phân phối mũ là biến ngẫu nhiên rời rạc không nhớ.

BIẾN NGẪU NHIÊN GAUSS (CHUẨN)

$S_X = (-\infty, +\infty)$

$f_X(x) = \frac{e^{-(x-m)^2/2\sigma 2}}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ $\quad -\infty < x < +\infty \quad$ và $\sigma > 0$

$E[X] = m$ $\quad$ $\mathbf{VAR}[X] = \sigma^2$

$\Phi_X(\omega) = e^{jm\omega - \sigma^2\omega^2/2}$

Chú ý: Với những điều kiện rộng rãi, X có thể được sử dụng để xấp xỉ tổng của số lớn các biến ngẫu nhiên độc lập.

CÁC BIẾN NGẪU NHIÊN GAMMA

$S_X = (0, +\infty)$

$f_X(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}$ $\quad x > 0 \quad$ và $\quad \alpha > 0, \lambda > 0$

ở đây $\Gamma(z)$ là hàm gamma (Hệ thức 3.46).

$E[X] = \alpha / \lambda$ $\quad$ $\mathrm{VAR}[X] = \alpha / \lambda^2$

$$\Phi_X(\omega) = \frac{1}{(1 - j\omega/\lambda)^{\alpha}}$$

Trường hợp riêng của biến ngẫu nhiên Gamma, Biến ngẫu nhiên *m* – Erlang : $\alpha = m$ nguyên dương

$$f_X(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{m-1}}{(m-1)!} \qquad x > 0$$

$$\Phi_X(\omega) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - j\omega}\right)^{m}$$

Chú ý: Một biến ngẫu nhiên *m-Erlang* nhận được bằng việc cộng *m* biến ngẫu nhiên có phân phối mx độc lập có tham số λ.

Biến ngẫu nhiên khi bình phương với k bậc tự do: α = k/2, k là số nguyên dương và $\lambda = \frac{1}{2}$

$$f_X(x) = \frac{x^{(k-2)/2}e^{-x/2}}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} \qquad x > 0$$

$$\Phi_X(\omega) = \left(\frac{1}{1 - j2\omega}\right)^{k/2}$$

Chú ý: Tổng của k biến ngẫu nhiên Gauss độc lập từng đôi, trung bình 0, phương sai đơn vị là biến ngẫu nhiên khi – bình phương với k bậc tự do.

BIÊN NGẪU NHIÊN RAYLEIGH

$S_x = [0, \infty)$

$$f_X(x) = \frac{x}{\alpha^2}e^{-x^2/2\alpha^2} \quad x \geq 0 \qquad \alpha > 0$$

$E[X] = \alpha\sqrt{\pi/2}$ VAR[X] = $(2 - \pi/2)\alpha^2$

BIẾN NGẪU NHIÊN CAUCHY

$S_X = (-\infty, +\infty)$

$$f_X(x) = \frac{\alpha/\pi}{x^2 + \alpha^2} \qquad -\infty < x < \infty \qquad \alpha > 0$$

Trung bình và phương sai không tồn tại

$$\Phi_X(\omega) = e^{-\alpha|\omega|}$$

BIẾN NGẪU NHIÊN LAPLACE

$S_X = (-\infty, \infty)$

$$f_X(x) = \frac{\alpha}{2}e^{-\alpha|x|} \qquad -\infty < x < \infty \qquad \alpha > 0$$

$E[X] = 0 \qquad \mathrm{VAR}[X] = 2/\alpha^2$

$$\Phi_X(\omega) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \alpha^2}$$

BIẾN NGẪU NHIÊN NHỊ THỨC. Giả sử rằng phép thử ngẫu nhiên được lặp lại *n* lần độc lập. Giả sử X là số lần xuất hiện biến cố A nào đó trong *n* phép thử này. Khi đó X là biến ngẫu nhiên với miền giá trị $S_X = \{0, 1, \ldots, n\}$. Ví dụ X là số lần xuất hiện mặt sấp trong *n* lần tung đồng xu. Nếu chúng ta đặt I_j là hàm chỉ số của biến cố A trong phép thử thứ *j*, khi đó:

$$X = I_1 + I_2 + \ldots + I_n,$$

nghĩa là, X là tổng của các biến ngẫu nhiên Bernoulli tương ứng với mỗi phép thử trong *n* phép thử độc lập.

Trong phần 2.6, chúng ta đã tìm được rằng X có hàm xác suất sau:

$$P[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad \text{với } k = 0, \ldots, n. \qquad (3.26)$$

X được gọi là **biến ngẫu nhiên nhị thức**. Hình 3.8 chỉ ra hàm mật độ xác suất của X với $n = 24$ và $p = .2$ và $p = .5$. Chú ý rằng $P[X = k]$ đạt maximum tại $k_{\max} =$ $= [(n + 1)p]$, ở đây $[x]$ ký hiệu số nguyên lớn nhất mà nó nhỏ hơn hoặc bằng x. Khi $(n + 1)p$ là nguyên thí giá trị maximum đạt được tại $k_{\max}$ và $k_{\max} - 1$.(Xem Bài tập 33).

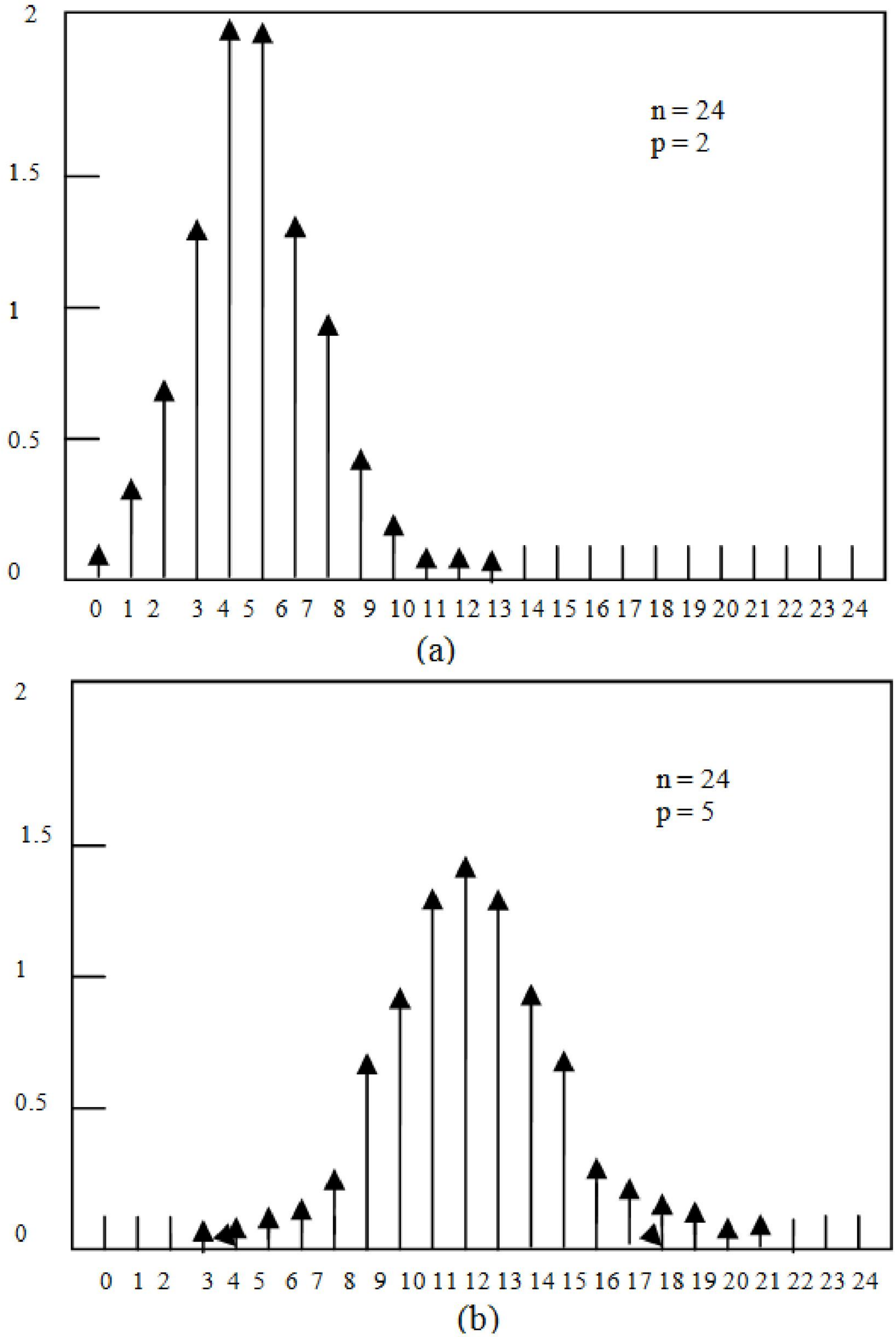
Phân phối nhị thức xuất hiện trong các ứng dụng mà ở đó có hai đối tượng (ví như ngửa/sấp, bit đúng/sai, sản phẩm tốt/phế phẩm, máy phát âm/yên lặng), và chúng ta quan tâm đến số lần xuất hiện của các đối tượng dạng thứ nhất trong nhóm gồm *n* đối tượng được tuyển một cách ngẫu nhiên, ở đây dạng mỗi đối tượng độc lập với dạng của các đối tượng khác trong nhóm. Các ví dụ liên quan đến biến ngẫu nhiên nhị thức chúng ta đã đưa ra trong phần 2.6

BIẾN NGẪU NHIÊN HÌNH HỌC. Biến ngẫu nhiên nhị thức nhận được bằng cách cố định số các phép thử Bernoulli và đếm số thành công. Giả sử rằng thay cho điều này chúng ta đếm số *M* các phép thử Bernoulli độc lập cho đế khi nhận được thành công đầu tiên. *M* được gọi là **biến ngẫu nhiên hình học** và nó lấy các giá trị từ tập {1, 2, …}. Trong Phần 2.6 chúng ta đã chỉ ra hàm xác suất của *M* được cho bởi:

$$P[M = k] = (1 - p)^{k-1} p \qquad k = 1, 2, \ldots, \qquad (3.27)$$

ở đây $p = P[A]$ là xác suất thành công trong mỗi phép thử Bernoulli. Hình (3.9) chỉ ra hàm xác suất của một vài giá trị *p*. Chú ý rằng $P[M = k]$ giảm theo cấp số nhân theo *k*.

HÌNH 3.8
Hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên nhị thức p = 0.2, (b) p = 0.5.

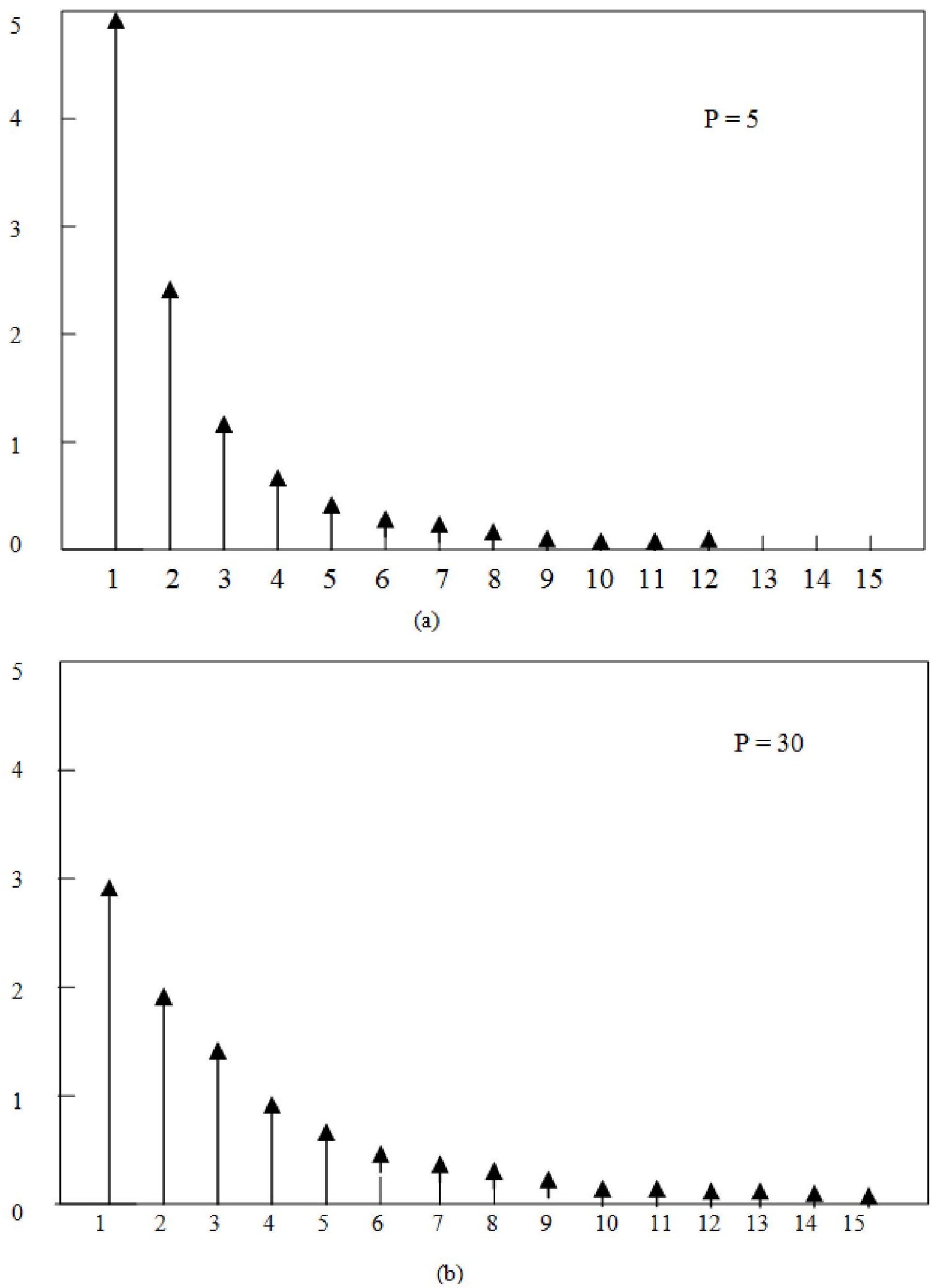


Hàm phân phối của *M* được tính tại các giá trị nguyên có thể được mô tả theo công thức sau:

$$P[M \le k] = \sum_{j=1}^{k} pq^{j-1} = p\sum_{j'=0}^{k-1} q^{j'} = p\frac{1-q^k}{1-q} = 1-q^k, \qquad (3.28)$$

ở đây $q = 1 - p$.

HÌNH 3.9
Hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên hình học
(a) p = .5, (b) p = 30.



Đôi khi chúng ta quan tâm đến $M' = M - 1$, số lần đạt được thất bại trước khi thành công:

$$P[M' = k] = P[M = k + 1] = (1 - p)^k p \quad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (3.29)$$

Chúng ta cũng gọi M' là biến ngẫu nhiên hình học.

Biến ngẫu nhiên hình học là biến ngẫu nhiên thỏa mãn tính chất không nhớ:

$$P[M \geq k + j \mid M > j] = P[M \geq k] \quad \forall j, k > 1.$$

(Xem Bài tập 35 và 36.) Biểu diễn trên phát biểu rằng, nếu thành công không xuất hiện trong j phép thử đầu, khi đó xác suất để thực hiện thêm ít nhất k phép thử nữa bằng với xác suất để thực hiện ít nhất k phép thử từ ban đầu. Do vậy, mỗi lần thất bại, hệ thống quên và bắt đầu lại, dường như nó tiến hành phép thử lần đầu tiên.

Biến ngẫu nhiên hình học xuất hiện trong các ứng dụng mà ở đó đối tượng quan tâm là thời gian (tức là số các phép thử) trôi qua giữa các lần xảy ra biến cố trong dãy thí nghiệm độc lập, như trong Ví dụ 2.8 và 2.40. Biến ngẫu nhiên hình học thay đổi chút ít M' nảy sinh ra như hàm xác suất của số khách hàng trong mô hình hệ nhiều hàng đợi.

BIẾN NGẪU NHIÊN POISSON. Trong nhiều ứng dụng, chúng ta quan tâm đến việc đếm số lần xảy ra của một biến cố trong một chu kỳ thời gian nào đó hoặc trong một miền nào đó trong không gian. Biến ngẫu nhiên Poisson xuất hiện trông điều kiện mà ở đó các biến cố xuất hiện "hoàn toàn ngẫu nhiên" theo thời gian hoặc không gian. Ví dụ biến ngẫu nhiên Poisson xuất hiện khi đếm sự phát xạ của chất phóng xạ, đếm số yêu cầu kết nối telephone, và đếm số khiếm khuyết trong một chíp bán dẫn.

Hàm xác suất của biến ngẫu nhiên Poisson được cho bởi:

$$P[N = k] = \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (3.30)$$

ở đây α là số trung bình các biến cố xảy ra trong một khoảng thời gian hoặc không gian đã chọn. Hình 3.10 chỉ ra hàm xác suất của phân phối Poisson với một vài giá trị α. Với $\alpha < 1$, $P[N = k]$ đạt maximum tại $k = 0$; với $\alpha > 1$, $P[N = k]$ đạt maximum tại $[\alpha]$; nếu α là số nguyên dương, $P[N = k]$ đạt maximum tại $k = \alpha$ và tại $k = \alpha - 1$.

Hàm xác suất của biến ngẫu nhiên Poisson có tổng bằng 1, do:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha} = e^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha} e^{\alpha} = 1,$$

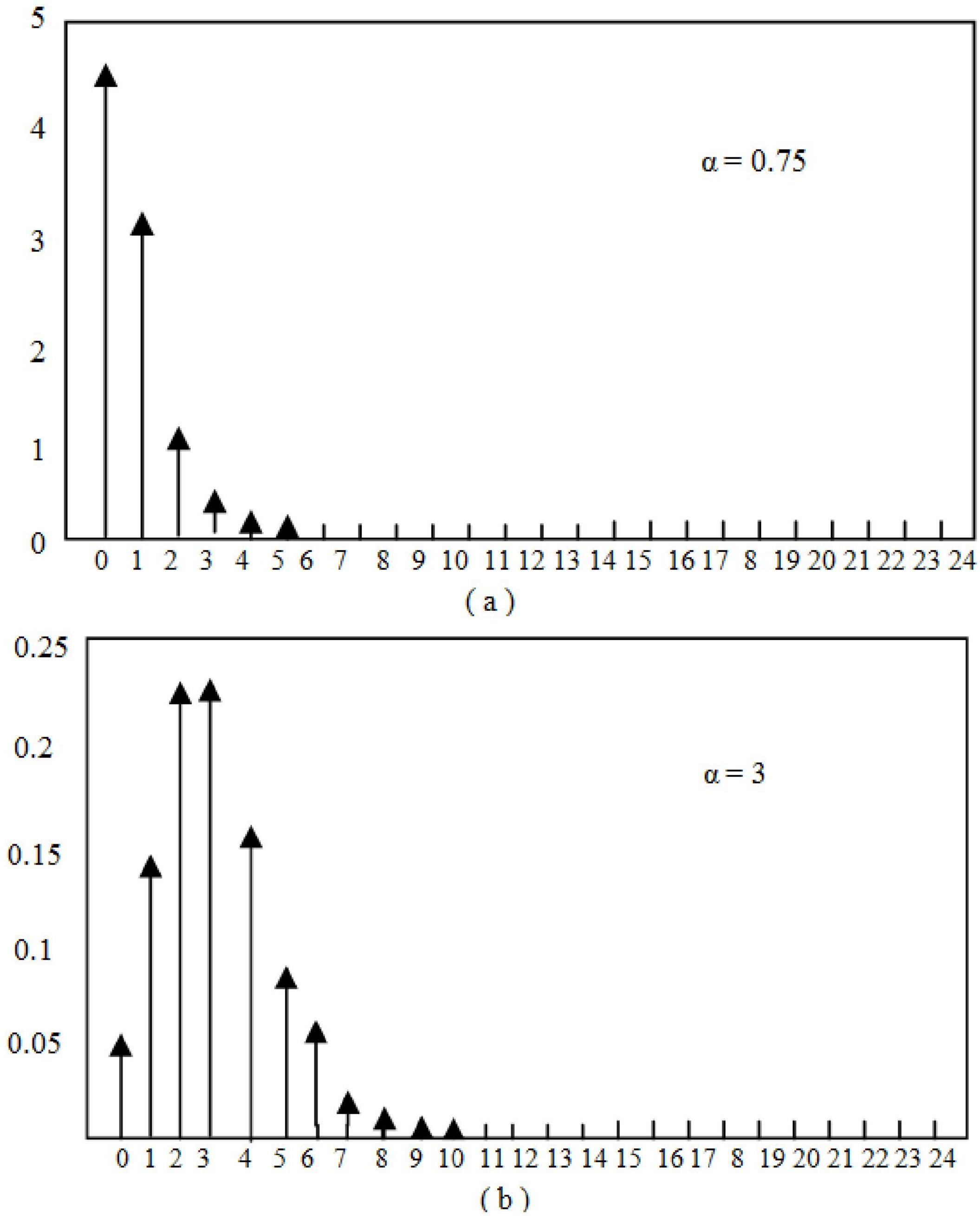
ở đây chúng ta sử dụng kết quả tổng thứ hai là khai triển chuỗi hữu hạn của e^{α}.

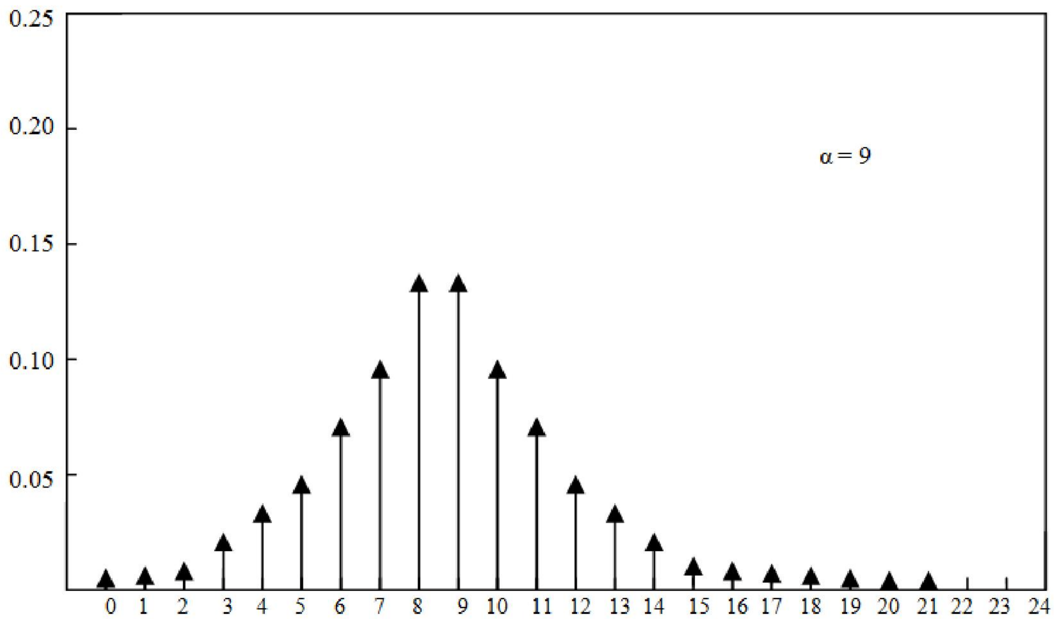
Một trong những ứng dụng của phân phối Poisson trong Hệ thức (3.30) là xấp xỉ phân phối nhị thức. chúng ta chứng tỏ rằng nếu n lớn và p nhỏ, khi đó với $\alpha = np$,

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha} \qquad k = 0, 1, \ldots. \tag{3.31}$$

Sự xấp xỉ trong Hệ thức (3.31) nhận được bởi việc lấy giới hạn $n \to \infty$ trong biểu thức của p_k, trong khi giữ cố định $\alpha = np$. Trước hết xét xác suất để không có biến cố nào xảy ra:

HÌNH 3.10
Các hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên Poisson
(a) $\alpha = 0.75$; (b) $\alpha = 3$; (c) $\alpha = 9$.





(c)

$$p_0 = (1-p)^n = \left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^n \to e^{-\alpha} \qquad \text{khi } n \to \infty, \qquad (3.32)$$

ở đây giới hạn trong biểu thức cuối cùng là kết quả biết rất rõ từ phép tính toán. Các xác suất còn lại tìm được bởi sự chú ý rằng :

$$\frac{p_{k+}}{p_k} = \frac{\binom{n}{k+1} p^{k+1} q^{n-k-1}}{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}} = \frac{k!(n-k)!\,p}{(k+1)!(n-k-1)!\,q}$$

$$= \frac{(n-k)\,p}{(k+1)q} = \frac{(1-k/n)\alpha}{(k+1)!(n-\alpha/n)}$$

$$\to \frac{\alpha}{k+1} \qquad \text{khi } n \to \infty.$$

Do vậy xác suất giới hạn thỏa mãn :

$$p_{k+1} = \frac{\alpha}{k+1} p_k \qquad \text{với } k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (3.33a)$$

và

$$p_0 = e^{-\alpha}. \qquad (3.33b)$$

Các phương trình (3.33a) và (3.33b) với k = 0 và 1 suy ra rằng:

$$p_1 = \frac{\alpha}{1} p_0 = \frac{\alpha}{1} e^{-\alpha}$$

$$p_2 = \frac{\alpha}{2} p_1 = \frac{\alpha^2}{2(1)} e^{-\alpha}.$$

Bằng phép quy nạp đơn giản chứng tỏ rằng:

$$p_k = \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha} \qquad \text{với } k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Như vậy hàm xác suất Poisson là dạng thức giới hạn của hàm nhị thức khi số phép thử Bernoulli *n* là rất lớn và xác suất thành công được giữ đủ nhỏ, sao cho $\alpha = np$.

VÍ DỤ 3.11 Xác suất để một bit bị sai trong một hệ truyền thông là 10^{-3} . Hãy tìm xác suất để một block gồm 1000 có lớn hơn hoặc bằng 5 bit sai.

Việc truyền mỗi bit tương ứng với một phép thử Bernoulli với "thành công" tương ứng với bit sai trong khi truyền. Xác suất để xảy ra k bit sai trong 1000 lần truyền khi đó được cho bởi xác suất nhị thức với n = 1000 và p = 10^{-3}. Sự xấp xỉ Poisson cho phân phối nhị thức với tham số α = np = 1000(10^{-3}) = 1. Do vậy:

$$P[N \geq 5] = 1 - P[N < 5] = 1 - \sum_{k=0}^{4} \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}$$

$$= 1 - e^{-1}\left\{1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right\}$$

$$= .00366.$$

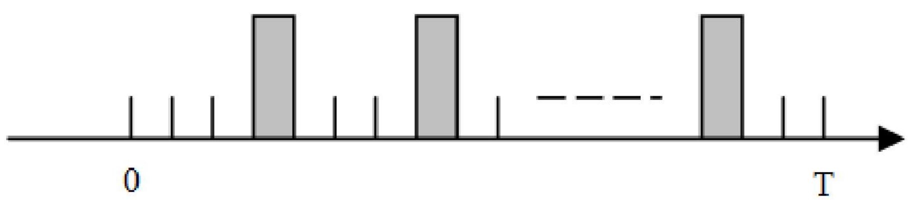
Biến ngẫu nhiên Poisson xuất hiện một cách tự nhiên trong nhiều bài toán vật lý.

Ví dụ, hàm xác suất Poisson cho một sự báo chính xác tần suất tương đối của những hạt được phát ra bởi chất phóng xạ trong một chu kỳ thời gian cố định. Sự tương ứng này có thể được biểu diễn như sau. Chất phóng xạ được hợp thành từ một số lớn các nguyên tử, gọi là n. Trong khoảng thời gian cố định mỗi nguyên tử phân hủy với xác suất p rất nhỏ và phát ra tia phóng xạ. Nếu các nguyên tử phân hủy độc lập với các nguyên tử khác, khi đó số các tia phóng xạ trong một khoảng thời gian có thể coi như số thành công trong n phép thử. Ví dụ, một microgram chất radium chứa khoảng n = 10^{16} nguyên tử, và xác suất để một nguyên tử riêng lẻ bị phân hủy trong suốt khoảng thời gian 1 mili giây là p = 10^{-15} (Rozanov 1969, 58).

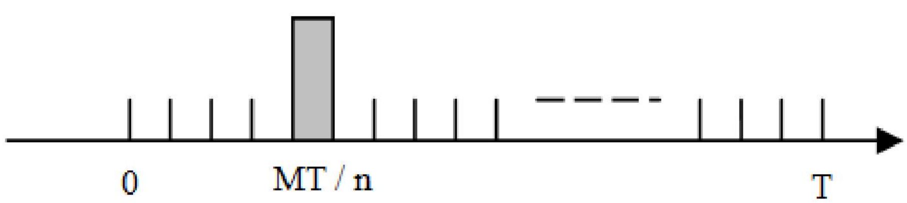
Do vậy có thể nói rằng các điều kiện cho sự xấp xỉ trong hệ thức (3.31) được đảm bảo: *n* là một số lớn đến nỗi mà ai đó có thể phản đối rằng giới hạn $n \to \infty$ đã xảy ra và rằng số các hạt phát ra là *i* biến ngẫu nhiên Poisson thực sự.

Biến ngẫu nhiên Poisson cũng có thể nhận được trong tình huống mà ở đó chúng ta có thể hình dung dãy phép thử Bernoulli xảy ra theo thời gian hoặc không gian *T* giây đã được tính. Chia khoảng thời gian thành n phần rất lớn nào đó, các khoảng con được ra trong hình 3. 11(a). Xung trong khoảng con chỉ sự xảy ra của một biến cố. Mỗi một khoảng con có thể coi như một phép thử Bernoulli nếu các điều kiện sau được thỏa mãn: Nhiều nhất một biến cố, có thể xảy ra trong một khoảng con, nghĩa là, xác suất xảy ra hơn một biến cố là có thể bỏ qua; (2) Các kết cục trong các khoảng con khác nhau là có thể bỏ qua. Và (3) Xác suất xảy ra một biến cố trong một khoảng con là $p = \alpha/n$, ở đây α là số trung bình của các biến cố quan sát được trong khoảng thời gian T – giây. Số N của các biến cố là một biến ngẫu nhiên nhị thức với các tham số n và $p = \alpha/n$. Nếu α hữu hạn, khi đó các điều kiện dẫn tới giới hạn trong trong hệ thức (3.31) sẽ được thỏa mãn khi $n \to \infty$. Khi đó $n \to \infty$, N tiến tới biến ngẫu nhiên có phân phối Poisson với tham số $\lambda = \alpha/T$. Trong Chương 6 chúng ta sẽ phát triển kết quả này khi thảo luận quá trình Poisson.

HÌNH 3.11(a)
Biến cố xảy ra trong n khoảng con của [0, T]



HÌNH 3.11(b)
Số các phép thử là M Cho đến khi xảy ra một biến cố là biến ngẫu nhiên hình học với tham số $p = \alpha / n$. Khi $n \to \infty$ thời gian cho đến khi xảy biến cố đầu tiên xấp



VÍ DỤ 3.12

Các yêu cầu kết nối điện thoại tới một trạm điện thoại với tốc độ λ cuộc gọi mỗi giây. Biết rằng số các yêu cầu kết nối trong một chu kỳ thời gian là một biến ngẫu nhiên Poisson. Tìm xác suất để không có cuộc gọi nào trong t giây. Hãy tìm xác suất để có lớn hơn hoặc bằng n cuộc.

Số trung bình của các cuộc gọi trong một chu kỳ t giây là $\alpha = \lambda t$. Bởi vậy $N(t)$, số các cuộc gọi trong t giây, là biến ngẫu nhiên Poisson với $\alpha = \lambda t$. Bởi vậy :

$$P[N(t) = 0] = \frac{(\lambda t)^0}{0!}e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}$$

Tương tự :

$$P[N(t) \ge n] = 1 - P[N(t) < n] = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}.$$

Các Biến Ngẫu nhiên Liên tục

Chúng ta luôn luôn giới hạn bởi phép đo có độ chính xác hữu hạn, bởi vậy, mọi biến ngẫu nhiên tìm được trong thực tế là biến ngẫu nhiên rời rạc. Tuy nhiên, có một vài nguyên nhân bắt buộc phải sử dụng biến ngẫu nhiên liên tục. Thứ nhất, các biến ngẫu nhiên liên tục dễ dàng hơn với việc sử dụng các công cụ giải tích. Thứ hai, dạng thức giới hạn của nhiều biến ngẫu nhiên rời rạc là các biến ngẫu nhiên liên tục. Cuối cùng có một số các họ các biến ngẫu nhiên liên tục có thể sử dụng để mô hình hóa một lớp rộng rãi các tình huống bởi việc dùng một vài tham số.

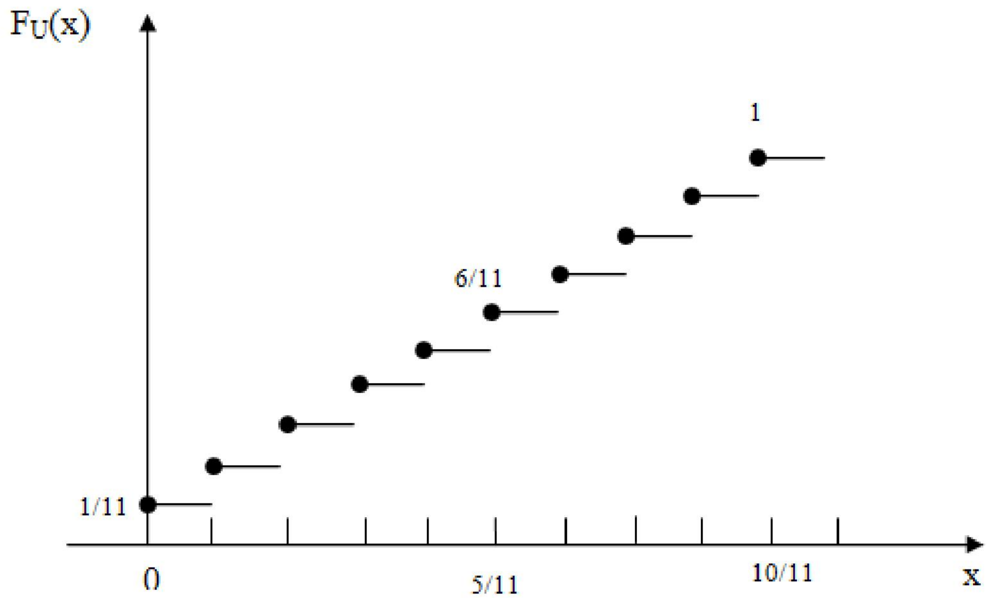
VÍ DỤ 3.13 Hàm sinh số ngẫu nhiên tạo ra biến ngẫu nhiên X và giả sử X nhận giá trị từ tập {0, 1,…, n – 1} với xác suất như nhau, 1/n. Đặt biến ngẫu nhiên U bằng U = X/n. U lấy giá trị từ tập S = {0, 1/n, …, 1 – 1/n}. Hàm phân phối là hàm bậc thang được chỉ ra ở trong hình 3.12. Xác suất để U rơi vào khoảng I nào đó là:

$$P[\text{U trong I}] = \frac{\text{số phần tử thuộc S rơi vào khoảng I}}{n}.$$

Ví dụ, nếu n = 11 khi đó P[0 ≤ U ≤ 0.5] = 6/11.

Trong thực tế, giá trị n sẽ rất lớn. Ví dụ, hàm sinh số ngẫu nhiên được xét trong phần 2.7 có n = 2,147,483,647 xét xem điều gì sẽ xảy ra khi n tăng: (1) tập các điểm của S trở nên trù mật trong khoảng đơn vị [0, 1]; và (2) hàm phân phối của X xấp xỉ hàm phân phối của biến ngẫu nhiên liên tục có phân phối đều trong khoảng [0, 1]. Như vậy với giá trị n rất lớn, hàm phân phối liên tục có thể sử dụng để nhận được xác suất của các khoảng mà U thuộc vào với độ chính xác cao và sự phức tạp nhỏ. Từ đó đi đến sự thuận tiện tuyệt vời để giả thiết rằng U là một biến ngẫu nhiên liên tục.

HÌNH 3.12
Hàm phân phối của biến ngẫu nhiên phân phối đều rời rạc



BIẾN NGẪU NHIÊN PHÂN PHỐI ĐỀU. Biến ngẫu nhiên phân phối đều xuất hiện trong tình huống mà ở đó tất cả các giá trị trong một khoảng của đường thẳng thực có xác suất xuất hiện bằng nhau. Biến ngẫu nhiên có phân phối đều đã được phát triển trong Phần 2.9 và hàm mật độ và hàm phân phối của nó đã được trình bày trong Ví dụ 3.7.

BIẾN NGẪU NHIÊN CÓ PHÂN PHỐI MŨ. Biến ngẫu nhiên có phân phối mũ xuất hiện khi mô hình hóa thời gian giữa các lần xuất hiện của các biến cố (ví dụ, thời gian giữa các lần khách hàng yêu cầu kết nối điện thoại), và khi mô hình hóa thời gian sống của các thiết bị và hệ thống. **Biến ngẫu nhiên có phân phối mũ** X với tham số λ có hàm mật độ:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \ge 0 \end{cases} \tag{3.34}$$

và hàm phân phối :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - \lambda e^{-\lambda x} & x \ge 0 \end{cases} \tag{3.35}$$

Hàm phân phối và hàm mật độ của X đều được thể hiện trên Hình 3.4.

Tham số λ là tốc độ xảy ra các biến cố, bởi vậy trong hệ thức (3.35) xác suất xảy ra biến cố trong khoảng thời gian x tăng khi λ tăng.

Biến ngẫu nhiên có phân phối mũ có thể nhận được như là dạng thức giới hạn của biến ngẫu nhiên hình học. Xét phương pháp lấy giới hạn mà đã được sử dụng để tìm ra biến ngẫu nhiên Poisson. Một khoảng có độ dài T được chia ra thành các khoảng con có độ dài T/n, như đã được chỉ ra trong Hình 3.11(b). Dãy các khoảng con tương ứng với các dãy phép thử Bernoulli độc lập với xác suất xuất hiện $p = \alpha/n$, ở đây α là số trung bình của biến cố trong mỗi T giây. Số các khoảng con cho đến khi xuất hiện một biến cố là một biến ngẫu nhiên hình học M. Bởi vậy thời gian cho đến khi xuất hiện biến cố đầu tiên là $X = M(T/n)$, và xác suất để thời gian này vượt quá t giây là:

$$
\begin{aligned}
P[X > t] &= P\left[M > n\frac{t}{T}\right] \\
&= (1-p)^{nt/T} \\
&= \left\{\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^n\right\}^{t/T} \\
&\to e^{-\alpha t/T} \qquad \text{khi } n \to \infty.
\end{aligned}
$$

Như vậy biến ngẫu nhiên có phân phối mũ nhận được như là dạng thức giới hạn của biến ngẫu nhiên hình học. Chú ý rằng, kết quả này suy ra với biến ngẫu nhiên Poisson, thời gian giữa các biến cố là biến ngẫu nhiên có phân phối mũ với tham số $\lambda = \alpha/T$ biến cố mỗi giây.

Biến ngẫu nhiên có **tính chất không nhớ**:

$$P[X > t + h \mid X > t] = P[X > h]. \qquad (3.36)$$

Biểu thức ở vế phải là xác suất có thời gian đợi ít nhất là h giây nữa khi đã đợi t giây. Biểu thức ở vế phải là xác suất để thời gian đợi ít nhất là h giây kể từ khi bắt đầu đợi. Như vậy xác suất để thời gian đợi ít nhất là h giây nữa không phụ thuộc vào thời gian đã đợi là bao lâu? Chúng ta sẽ nhận thấy trong Chương 8 và Chương 9 tính chất không nhớ của biên ngẫu nhiên mũ làm cho nó trở thành nền tảng của lý thuyết xích Markov, mà sẽ được sử dụng rộng rãi để tính toán hiệu suất của các mạng thông tin.

Bây giờ chúng ta chứng minh tính chất không nhớ:

$$
\begin{aligned}
P[X > t + h \mid X > t] &= \frac{P[\{X > t+h\} \cap \{X > t\}]}{P[X > t]} \qquad \text{với } h > 0 \\
&= \frac{P[X > t+h]}{P[X > t]} = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} \\
&= e^{-\lambda h} = P[X > h].
\end{aligned}
$$

Có thể chứng minh rằng biến ngẫu nhiên là biến ngẫu nhiên liên tục duy nhất thỏa mãn tính chất không nhớ.

Các Ví dụ 2.10, 2.15 và 2.27 nói về biến ngẫu nhiên mũ.

BIẾN NGẪU NHIÊN GAUSS (CHUẨN). Có nhiều tình huống nhân tạo và tự nhiên mà ở đó xuất hiện biến ngẫu nhiên X là tổng của một số các lớn các biến ngẫu nhiên nhỏ. Sự mô tả chính xác hàm mật độ của X qua các biến ngẫu nhiên thành phần có thể rất rắc rối và khó sử dụng. Hơn nữa người ta chứng minh được rằng trên những điều kiện rất rộng rãi, như là các biến ngẫu nhiên thành phần đủ lớn, hàm phân phối của X xấp xỉ hàm phân phối của **biến ngẫu nhiên Gauss (chuẩn)** [(2)]. Biến ngẫu nhiên này xuất hiện thường xuyên trong các bài toán có tính ngẫu nhiên, nó được biết như là biến ngẫu nhiên "chuẩn".

Hàm mật độ của biến ngẫu nhiên Gauss X được cho bởi:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} \qquad -\infty < x < \infty, \qquad (3.37)$$

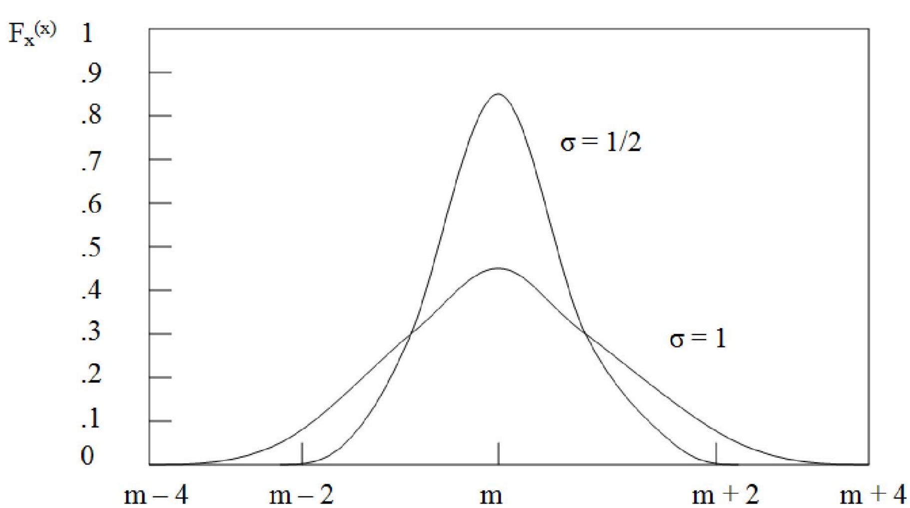
ở đây m và $\sigma > 0$ là các số thực, mà sau đây chúng ta chứng minh rằng chúng là giá trị trung bình và độ lệch chuẩn của X. Hình 3.13 chỉ ra rằng hàm mật độ của biến ngẫu nhiên Gauss là đường cong "hình chuông" tập trung và đối xứng quanh m và "chiều rộng" của nó tăng theo σ.

(2). Kết quả này, gọi là Định lý giới hạn trung tâm, sẽ được bàn luận ở Chương 5.

Hàm phân phối của biến ngẫu nhiên Gauss được cho bởi:

$$P[X \le x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} dx'. \qquad (3.38)$$

HÌNH 3.13
Hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên Gauss.



Đổi biến $t = (x' - m)/\sigma$ kết quả là :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(x-m)/\sigma} e^{-t^2/2} dt$$

$$= \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right). \tag{3.39}$$

ở đây $\Phi(x)$ là phân phối của biến ngẫu nhiên Gauss với $m = 0$ và $\sigma = 1$.

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt \,. \tag{3.40}$$

Như vậy xác suất bất kỳ suy ra từ biến ngẫu nhiên Gauss tùy ý có thể được biểu diễn qua $\Phi(x)$.

VÍ DỤ 3.14 Chứng minh rằng hàm mật độ của biến ngẫu nhiên Gauss có tích phân bằng 1. Xét bình phương của tích phân của hàm mật độ của biến ngẫu nhiên Gauss :

$$0\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx\right]^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2} dx\, dy \,.$$

Đặt $x = r \cos\theta$ và $y = r \sin\theta$ và còn lại là đổi từ hệ tọa độ Descartes sang hệ tọa độ cực, khi đó chúng ta nhận được:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{2\pi} e^{-r^2/2} r\, dr\, d\theta = \int_{0}^{\infty} r e^{-r^2/2} dr$$

$$= \left[e^{-r^2/2}\right]_0^{\infty}$$

$$= 1.$$

Trong kỹ thuật điện thường làm việc với Q-hàm, mà nó được xác định bởi :

$$Q(x) = 1 - \Phi(x) \tag{3.41}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x}^{\infty} e^{-t^2/2} dt \,. \tag{3.42}$$

Q(x) một cách đơn giản là xác suất của đuôi của hàm mật độ phân phối. Tính đối xứng của hàm mật độ suy ra rằng:

$$Q(0) = 1/2 \quad \text{và} \quad Q(-x) = 1 - Q(x). \tag{3.43}$$

Tích phân trong Hệ thức (3.40) không phải là dạng đóng. Theo truyền thống các tích phân được tính bởi việc tra bảng danh sách $Q(x)$ hoặc sử dụng xấp xỉ kết quả phép tính số [Tài liệu tham khảo 8]. Gần đây, biểu thức sau được tìm ra để đạt độ chính xác cao cho Q(x) trên khoảng $0 < x < \infty$:

$$Q(x) = \left[\frac{1}{(1-a)x + a\sqrt{x^2+b}}\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}, \tag{3.44}$$

ở đây $a = 1/\pi$ và $b = 2\pi$ [Tài liệu tham khảo 11]. Bảng 3.3 cho các giá trị Q(x) và các giá trị được cho bởi công thức xấp xỉ trên. Trong một số bài toán chúng ta quan tâm đến việc tìm giá trị của x để cho Q(x) = 10^{-k}. Bảng 3.4 cho các giá trị này với k = 1, …, 10.

Biến ngẫu nhiên Gauss đóng vai trò rất quan trọng trong các hệ truyền thông, ở đó việc truyền các tín hiệu làm sai lệch bởi nhiễu của điện áp sinh ra từ sự trao đổi nhiệt của các điện tử. Có thể chứng minh từ các nguyên lý vật lý rằng các điện áp có phân phối Gauss.

VÍ DỤ 3.15 Một hệ truyền thông nhận điện áp dương V như là tín hiệu vào và tín hiệu ra là điện áp $Y = \alpha V + N$, ở đây $\alpha = 10^{-2}$ và N là biến ngẫu nhiên Gauss với tham số $m = 0$ và $\sigma = 2$. Hãy tìm giá trị của V để cho $P[Y < 0] = 10^{-6}$.

Xác suất $P[Y < 0]$ được biểu diễn qua N như sau:

$$P[Y < 0] = P[\alpha V + N < 0]$$

$$= P[N < -\alpha V] = \Phi\left(\frac{-\alpha V}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{\alpha V}{\sigma}\right) = 10^{-6}.$$

Từ Bảng 3.4 chúng ta nhận thấy rằng đối số của hàm Q tìm được là $\alpha V/\sigma = 4.753$. Do vậy $V = (4.753)\sigma/\alpha = 950.6$.

Bảng 3.3
So sánh giá trị của Q(x)
Và giá trị xấp xỉ được
Cho bởi hệ thức (3.44)

X	**Q(*x*)**	**Xấp xỉ**	***X***	**Q(*x*)**	**Xấp xỉ**
0	5.00 E-01	5.00E –01	2.7	3.47E-03	3.4E –03
0.1	4.60 E –01	4.58E –01	2.8	2.56E –03	2.55E –03
0.2	4.21 E –01	4.17E –01	2.9	1.87E – 03	1.86E –03
0.3	3.82E –01	3.78E –01	3.0	1.35E –03	1.35E –03
0.4	3.45E –01	3.41E –01	3.1	9.68E –04	9.66E –04
0.5	3.09E –01	3.05E –01	3.2	6.87E –04	6.86E –04
0.6	2.74E –01	2.71E –01	3.3	4.83E –04	4.83E –04
0.7	2.42E –01	2.39E –01	3.4	3.37E –04	3.36E –04
0.8	2.12E –01	2.09E –01	3.5	2.33E –04	2.32E –04

0.9	1.84E –01	1.82E –01	3.6	1.59E –04	1.59E –04
1.0	1.59E –01	1.57E –01	3.7	1.08E –04	1.08E –04
1.1	1.36E –01	1.34E –01	3.8	7.24E –05	7.23E –05
1.2	1.15E –01	1.14E –01	3.9	4.81E –05	4.81E –05
1.3	9.68E –02	9.60E –02	4.0	3.17E –05	3.16E –05
1.4	8.08E –02	8.01E –02	4.5	3.40E –06	3.40E –06
1.5	6.68E –02	6.63E –02	5.0	2.87E –07	2.87E –07
1.6	5.48E –02	5.44E –02	5.5	1.90E –08	1.90E –08
1.7	4.46E –02	4.43E –02	6.0	9.87E –10	9.86E –10
1.8	3.59E –02	3.57E –02	6.5	4.02E –11	4.02E –11
1.9	2.87E –02	2.86E –02	7.0	1.28E –12	1.28E –12
2.0	2.28E –02	2.26E –02	7.5	3.19E –14	3.19E –14
2.1	1.79E –02	1.78E –02	8.0	6.22E –16	6.22E –16
2.2	1.39E –02	1.39E –02	8.5	9.48E –18	9.48E –18
2.3	1.07E –02	1.07E –02	9.0	1.05E –19	1.13E –19
2.4	8.20E –03	8.17E –03	9.5	1.05E –21	1.05E –21
2.5	6.21E –03	6.19E –03	10.0	7.62E –24	7.62E –24
2.6	4.66E –03	4.65E –03			

Bảng 3.4
$Q(x) = 10^{-k}$

K	**$x = Q^{-1}(10^{-k})$**
1	1.2815
2	2.3263
3	3.0902
4	3.7190
5	4.2649
6	4.7535
7	5.1993
8	5.6120
9	5.9987
10	6.3613

BIẾN NGẪU NHIÊN GAMMA. Biến ngẫu nhiên Gamma là biến ngẫu nhiên có nhiều ứng dụng vào các bài toán thực tiễn. Ví dụ, nó cần được dùng để mô hình hóa thời gian cần thiết phục vụ một khách hàng trong hệ hàng đợi, và khuyết tật trong các chíp VLSI [Tài liệu tham khảo 12].

Hàm mật độ của biến ngẫu nhiên Gamma có hai tham số, $\alpha > 0$ và $\lambda > 0$, và được cho bởi

$$f_X(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} \qquad 0 < x < \infty, \qquad (3.45)$$

ở đây $\Gamma(z)$ là hàm Gamma, được xác định bởi tích phân:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}dx \qquad z > 0. \tag{3.46}$$

Hàm Gamma có các tính chất sau :

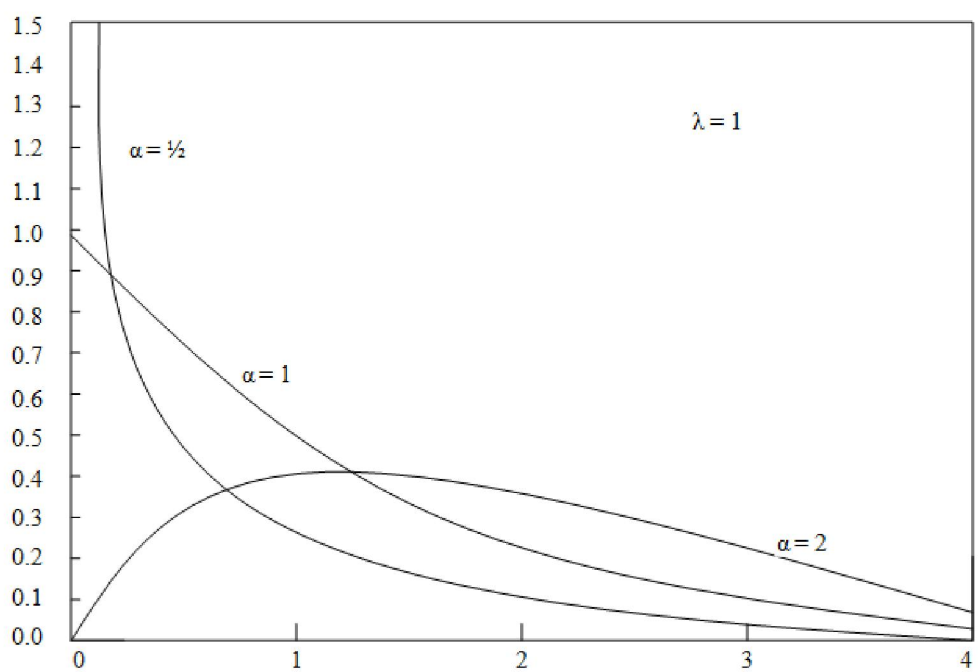
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

$\Gamma(z + 1) = z\,\Gamma(z)$ với $z > 0$, và

$\Gamma(m + 1) = m!$ với m là một số nguyên không âm.

Nhiều ứng dụng của biến ngẫu nhiên Gamma là do sự phong phú của hàm Gamma $\Gamma(z)$. Hàm mật độ của biến ngẫu nhiên Gamma có nhiều dáng điệu như được chỉ ra ở Hình 3.14. Bằng việc thay đổi các tham số α và λ, có thể chỉ ra các hàm mật độ xác suất Gamma phù hợp với nhiều dạng số liệu khác nhau. Hơn nữa nhiều biến ngẫu nhiên là các trường hợp riêng của biến ngẫu nhiên Gamma. Biến ngẫu nhiên mũ nhận được bởi việc lấy $\alpha = 1$. Bằng việc lấy $\lambda = 1/2$ và $\alpha = k/2$, với k là số nguyên dương, chúng ta nhận được **biến ngẫu nhiên khi-bình phương** là biến ngẫu nhiên xuất hiện trong nhiều bài toán thống kê. Biến ngẫu nhiên ***m*-Erlang** nhận được khi $\alpha = m$, là một số nguyên dương. Biến ngẫu nhiên *m*-Erlang được sử dụng trong các mô hình hệ hàng đợi. Cả hai biến ngẫu nhiên này được xét trong các ví dụ sau.

Hình 3.14
Hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên Gamma



VÍ DỤ 3.16 Chứng tỏ rằng tích phân của hàm mật độ của phân phối Gamma bằng 1.

Tích phân của hàm mật độ là :

$$\int_0^\infty f_X(x)dx = \int_0^\infty \frac{\lambda(\lambda x)^{\alpha-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}dx$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx .$$

Đặt $y = \lambda x$, khi đó $dx = dy/\lambda$ và tích phân trở thành:

$$\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)\lambda^\alpha}\int_0^\infty y^{\alpha-1}e^{-y}dy = 1$$

ở đây chúng ta sử dụng kết quả tích phân bằng $\Gamma(\alpha)$.

Nói chung, hàm phân phối của biến ngẫu nhiên Gamma không có biểu diễn dưới dạng hiện. Chúng ta sẽ chứng minh rằng trường hợp riêng của biến ngẫu nhiên *m*-Erlang có biểu diễn dưới dạng hiện của hàm phân phối bằng cách dùng sự liên hệ của nó với các biến ngẫu nhiên mũ và Poisson. Hàm phân phối cũng có thể nhận được bằng cách lấy tích phân hàm mật độ phân phối (xem Bài tập 50).

Một lần nữa xét hạng thức giới hạn được sử dụng để suy ra biến ngẫu nhiên Poisson. Giả sử rằng chúng ta quan sát thời gian S_m là thời gian trôi qua cho đến khi xuất hiện biến cố thứ *m*. Các thời gian $X_1, X_2,\ldots, X_m$ giữa các biến cố là các biến ngẫu nhiên có phân phối mũ, bởi vậy chúng ta có:

$$S_m = X_1 + X_2 + \ldots + X_m.$$

Chúng ta sẽ chứng minh rằng S_m là một biến ngẫu nhiên *m*-Erlang. Để tìm hàm phân phối của S_m, đặt $N(t)$ là biến ngẫu nhiên Poisson, và là số các biến cố xảy ra trong *t* giây. Chú rằng biến cố thứ *m* xảy ra trước thời điểm *t* – nghĩa là, $S_m \le t$ – nếu và chỉ nếu có *m* hoặc hơn *m* biến cố xảy ra trong khoảng thời gian *t* giây, tức là $N(t) \ge m$. Lý do là như sau, nếu biến cố thứ *m* xảy ra trước thời điểm *t*, thì nó dẫn đến là có *m* hoặc hơn *m* biến cố xảy ra trong khoảng thời gian *t*. Mặt khác, nếu có *m* hoặc hơn *m* biến cố xảy ra trong khoảng thời gian *t*, thì nghĩa là biến cố thứ *m* xảy ra gần thời điểm *t*. Do vậy:

$$F_{S_m}(t) = P[S_m \le t] = P[N(t) \ge m] \tag{3.47}$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}, \tag{3.48}$$

ở đây chúng ta sử dụng kết quả trong Ví dụ 3.12. Nếu chúng ta lấy đạo hàm của hàm phân phối trên, chúng ta sẽ nhận được hàm phân phối của biến ngẫu nhiên *m*-Erlang. Như vậy chúng ta đã chứng tỏ được rằng S_m là một biến ngẫu nhiên *m*-Erlang.

VÍ DỤ 3.17 Nhà máy có hai phần dự trữ, có tuổi thọ trung bình là $1/\lambda = 1$ tháng. Tìm xác suất để 3 thành phần (1 đang làm việc và 2 dự trữ) sẽ làm việc lâu hơn 6 tháng. Giả thiết là thời gian sống của các thành phần có phân phối mũ.

Tuổi thọ còn lại của chi tiết đang làm việc là biến ngẫu nhiên mũ với tốc độ λ do tính chất không nhớ. Do đó, tổng thời gian sống X của 3 chi tiết là tổng của 3 biến ngẫu nhiên mũ với $\lambda = 1$. Bởi vậy, X có phân phối 3-Erlang với $\lambda = 1$. Từ Hệ thức (3.48) xác suất để X lớn hơn 6 là:

$$P[X > 6] = 1 - P[X \le 6]$$

$$= \sum_{k=0}^{2} \frac{6^k}{k!} e^{-6} = .06197.$$

3.5 HÀM CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN

Giả sử X là một biến ngẫu nhiên và giả sử $g(x)$ là hàm thực được xác định trên đường thẳng thực. Định nghĩa $Y = g(X)$, nghĩa là, Y là biến ngẫu nhiên được xác định duy nhất như là hàm số $g(x)$ tại các giá trị có thể của biến ngẫu nhiên X. Khi đó Y cũng là biến ngẫu nhiên. Xác suất để Y lấy các giá trị khác nhau phụ thuộc vào hàm $g(x)$ cũng như hàm phân phối của X. Trong phần này chúng ta xét bài toán tìm hàm mật độ và hàm phân phối của Y.

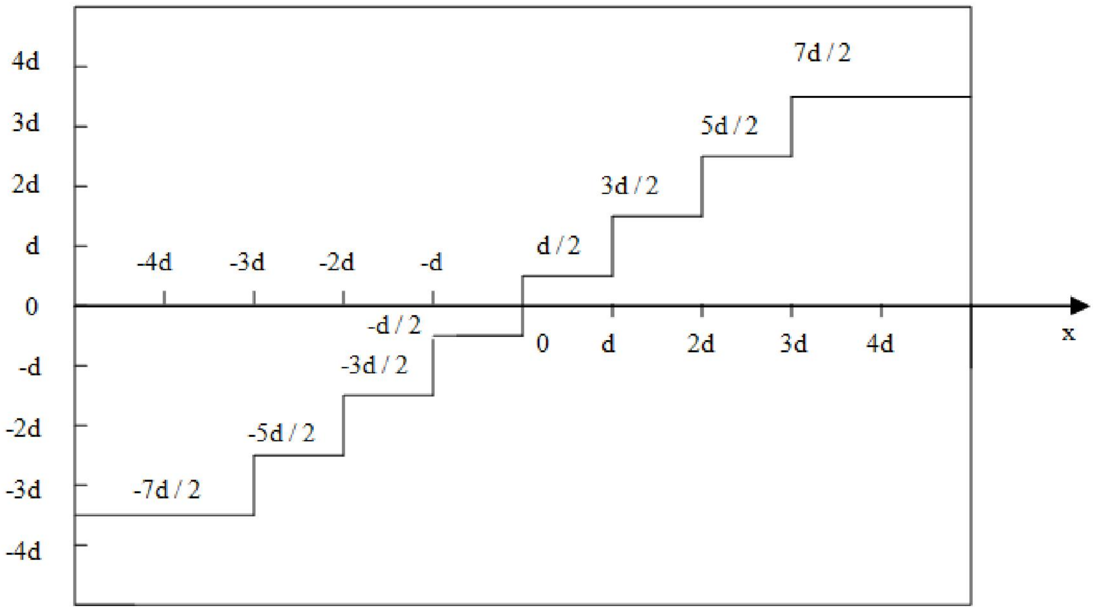
VÍ DỤ 3.18 Cho hàm $h(\mathrm{x}) = (x)^+$ được xác định như sau :

$$(x)^+ = f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x < 0 \\ x & \text{nếu } x \ge 0. \end{cases}$$

Ví dụ, giả sử X là số các loa hoạt động trong số *N* loa, và giả sử Y là số các loa hoạt động lớn hơn *M*, khi đó $Y = (X - M)^+$. Trong ví dụ khác, giả sử X là điện áp đầu vào của một máy nắn dòng một chiều, khi đó $Y = (X)^+$ là điện áp đầu ra.

VÍ DỤ 3.19 Cho hàm $q(x)$ được xác định như ở trong Hình 3.15, ở đây tập các điểm trên đường thẳng thực được ánh xạ vào điểm gần nhất từ tập $S_Y = \{-3.5d, -2.5d, -1.5d, -0.5d, 0.5d, 2.5d, 3.5d\}$. Như vậy, ví dụ, tất cả các điểm trong khoảng $(0, d)$ được ánh xạ vào điểm $d/2$. Hàm $q(x)$ biểu diễn hàm bậc thang 8 mức.

Hình 3.15
Các bậc thang biểu diễn đầu vào x thuộc một điểm từ tập
{± d/2, ± 3d/2, ± 5d/2, ± 7d/2}



VÍ DỤ 3.20 Xét hàm tuyến tính $c(x) = ax + b$, ở đây a và b là các hằng số. Hàm này xuất hiện trong nhiều trường hợp. Ví dụ, $c(x)$ là chi phí tương ứng với đại lượng x, với hằng số a là chi phí ứng với mỗi đơn vị x, và b là thành phần chi phí cố định. Trong bài toán xử lý tín hiệu, $c(x) = ax$ là dạng thức khuếch đại (nếu như $a > 1$), hoặc là dạng thức giảm nhẹ (nếu $a < 1$) của điện áp x.

Xác suất của biến cố để C chứa Y bằng xác suất của biến cố tương đương, tức X thuộc B sao cho g(X) thuộc vào C:

P[Y thuộc C] = P[$g(x)$ thuộc C] = P[X thuộc B].

Ba dạng của biến cố tương đương thường được dùng để xác định hàm phân phối và hàm mật độ của Y = g(X): (1) Biến cố $\{g(X) = y_k\}$ được dùng để xác định độ lớn của bước nhảy tại điểm y_k, ở đây hàm phân phối của Y đã biết là không liên tục; (2) Biến cố $\{g(X) \le y\}$ được dùng để xác định hàm phân phối của Y một cách trực tiếp; và (3) biến cố $\{y < g(X) \le y + h\}$ thường được dùng để xác định hàm mật độ của Y. Chúng ta sẽ sử dụng 3 phương pháp này trong chuỗi các ví dụ sau.

Hai ví dụ tiếp theo đây chỉ ra hàm xác suất được tính như thế nào trong trường hợp Y = g(X) là biến ngẫu nhiên rời rạc. Trong ví dụ thứ nhất, X là rời rạc. Trong ví dụ thứ hai, X là liên tục.

VÍ DỤ 3.21

Giả sử X là số loa hoạt động trong tập N loa độc lập. Giả sử p là xác suất để một loa hoạt động. Trong Ví dụ 2.36 đã chứng tỏ rằng X có phân phối nhị thức với các tham số N và p. Giả sử rằng hệ truyền âm thanh có thể truyền M tín hiệu âm thanh tại một thời điểm và khi X vượt quá M, X – M tín hiệu bị loại một cách ngẫu nhiên. Giả sử Y là số các tín hiệu bị loại , khi đó:

$$Y = (X - M)^+$$

Y lấy giá trị từ tập $S_Y = \{0, 1, \ldots, N - M\}$. Y sẽ bằng 0 bất cứ khi nào X nhỏ hơn hoặc bằng M, và Y sẽ bằng $k > 0$ khi X bằng $M + k$. Do đó:

$$P[Y = 0] = P[X \text{ thuộc } \{0, 1, \ldots, M\}] = \sum_{j=0}^{M} p_j$$

và

$$P[Y = k] = P[X = M + k] = p_{M+k} \qquad 0 < k \leq N - M,$$

ở đây p_j là hàm xác suất của X.

VÍ DỤ 3.22

Cho X là điện áp mẫu của bộ biến đổi giọng nói, và giả sử X có phân phối đều trên khoảng [–4d; 4d]. Giả sử Y = q(X), ở đây đặc trưng vào-ra được lượng tử hóa như được chỉ ra trong Hình 3.15. Hãy tìm hàm xác suất của Y.

Biến cố {Y = q} với q thuộc S_Y là tương đương với biến cố {X thuộc I_q}, ở đây I_q là khoảng các điểm ánh xạ vào điểm q. Do vậy, hàm xác suất của Y tìm được bởi việc tính:

$$P[Y = q] = \int_{I_q} f_X(x)dt.$$

Dễ dàng nhận thấy rằng, mỗi điểm biểu diễn một khoảng có độ dài d được ánh xạ vào nó. Bởi vậy 8 đầu ra có thể là đồng xác suất, nghĩa là, P[Y = q] = 1/8 với q thuộc S_y.

Trong ví dụ 3.22 mỗi khoảng q(X) bằng hằng số hàm mật xác suất của Y là một hàm delta. Nói chung nếu hàm g(X) là hằng số trong toàn khoảng nào đó, và hàm mật độ xác suất của X là khác 0 trong khoảng này, khi đó hàm mật độ xác suất của Y sẽ gồm các hàm delta. Khi đó Y sẽ là biến ngẫu nhiên rời rạc hoặc hằng số.

Hàm phân phối của X sẽ được xác định như là hàm xác suất của biến ngẫu nhiên {Y ≤ y}. Về mặt nguyên tắc, nó luôn có thể nhận được việc tìm xác suất của biến cố tương đương {g(X) ≤ y} như được chỉ ra trong các ví dụ sau đây.

VÍ DỤ 3.23
Hàm Tuyến tính

Cho biến ngẫu nhiên Y được xác định bởi:

$$Y = aX + b,$$

ở đây a là hằng số khác 0. Giả sử rằng X có hàm phân phối $F_X(x)$, khi đó hãy tìm $F_Y(y)$.

Biến cố $\{Y \le y\}$ xảy ra khi $A = \{aX + b \le y\}$ xảy ra. Nếu $a > 0$, khi đó $A = \{X \le (y - b)/a\}$ (xem Hình 3.16), và do đó:

$$F_Y(y) = P\left[X \le \frac{y-b}{a}\right] = F_Y\left(\frac{y-b}{a}\right) \qquad a > 0.$$

Mặt khác, nếu $a < 0$, khi đó $A = \{X \ge (y - b)/a\}$, và

$$F_Y(y) = P\left[X \ge \frac{y-b}{a}\right] = 1 - F_Y\left(\frac{y-b}{a}\right) \qquad a < 0.$$

Chúng ta có thể nhận được hàm mật độ của Y bằng cách lấy đạo hàm theo y. Để làm điều này, chúng ta cần phải sử dụng qui tắc lấy đạo hàm:

$$\frac{dF}{dy} = \frac{dF}{du}\frac{du}{dy},$$

ở đây u là biến của F. Trong trường hợp này, $u = (y - b)/a$, và khi đó chúng ta nhận được

$$f_Y(y) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \qquad a > 0$$

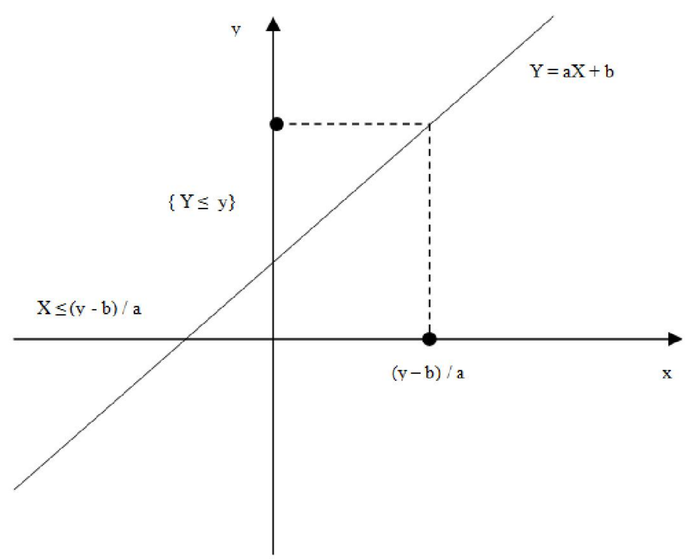
và

$$f_Y(y) = \frac{1}{-a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \qquad a < 0.$$

Cả hai kết quả trên có thể viết vắn tắt như sau:

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \tag{3.49}$$

HÌNH 3.16
Biến cố tương đương với $\{Y \le y\}$ là biến cố $\{X \le (Y - b)/a\}$, nếu $a > 0$.



VÍ DỤ 3.24
Hàm Tuyến tính của Biến Ngẫu nhiên Gauss

Cho X là biến ngẫu nhiên với hàm mật độ xác suất Gauss có trung bình (mean) *m* và độ lệch tiêu chuẩn σ:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} \qquad -\infty < x < \infty,$$

(3.50)

Giả sử Y = *a*X + *b*, hãy tìm hàm mật độ xác suất của Y.

Thế Hệ thức (3.50) vào Hệ thức (3.49) cho kết quả:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,|a\sigma|} e^{-(y-b-am)^2/2(a\sigma)^2}.$$

Chú ý rằng Y cũng có phân phối Gauss với kỳ vọng *b* + *am* và độ lệch chuẩn |a|σ. Do đó, *hàm tuyến tính của biến ngẫu nhiên Gauss cũng là biến ngẫu nhiên Gauss*.

VÍ DỤ 3.25

Cho biến ngẫu nhiên Y được xác định bởi

$$Y = X^2,$$

ở đây X là một biến ngẫu nhiên liên tục. Hãy tìm hàm phân phối và hàm mật độ xác suất của Y.

Biến cố {Y ≤ *y*} xảy ra khi $\{X^2 \le y\}$ hoặc tương đương khi $\{-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}\}$ với *y* không âm; xem Hình 3.17. Biến cố là biến cố không khi *y* âm. Bởi vậy:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) & y > 0 \end{cases}$$

và lấy đạo hàm theo *y*,

$$f_Y(y) = \frac{f_X(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} - \frac{f_X(-\sqrt{y})}{-2\sqrt{y}} \qquad y > 0$$

$$= \frac{f_X(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} + \frac{f_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}. \qquad (3.51)$$

VÍ DỤ 3.26
Biến Ngẫu nhiên khi-bình phương

Giả sử X là một biến ngẫu nhiên Gauss với trung bình *m* = 0 và độ lệch chuẩn σ = 1. Khi đó X được gọi là biến ngẫu nhiên chuẩn tắc. Giả sử $Y = X^2$. Hãy tìm hàm mật độ xác suất của Y.

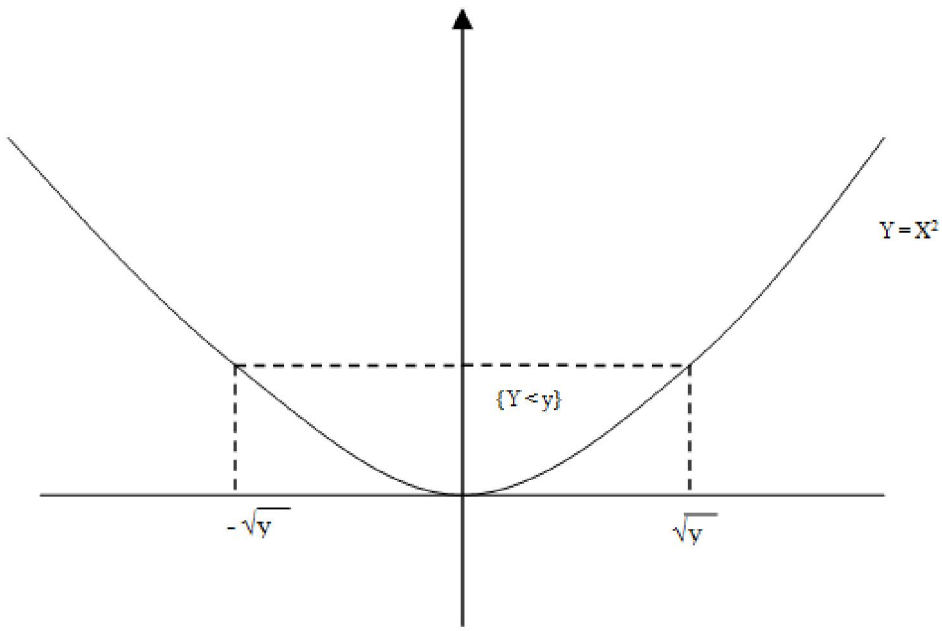
Thế hệ thức (3.50) vào (3.51) cho :

$$f_Y(y) = \frac{e^{-y/2}}{\sqrt{2y\pi}} \qquad y \geq 0. \qquad (3.52)$$

Từ Bảng (3.2) chúng ta nhận thấy rằng $f_Y(y)$ là hàm mật độ xác suất của *biến ngẫu nhiên khi-bình phương với một bậc tự do*.

HÌNH 3.17

Biến cố tương đương với {Y ≤ y} là biến cố {– √y ≤ X ≤ √y} nếu y ≥ 0



Kết quả trong Ví dụ 3.25 gợi ý rằng nếu phương trình $y_0 = g(x)$ có n nghiệm $x_0, x_1, \ldots, x_n$, khi đó $f_Y(y_0)$ sẽ bằng tổng của n số hạng ở vế phải của Hệ thức (3.51). Bây giờ chúng ta chứng minh điều này đúng trong trường hợp tổng quát với việc dùng phương pháp nhận được trực tiếp hàm mật độ của Y theo hàm mật độ của X.

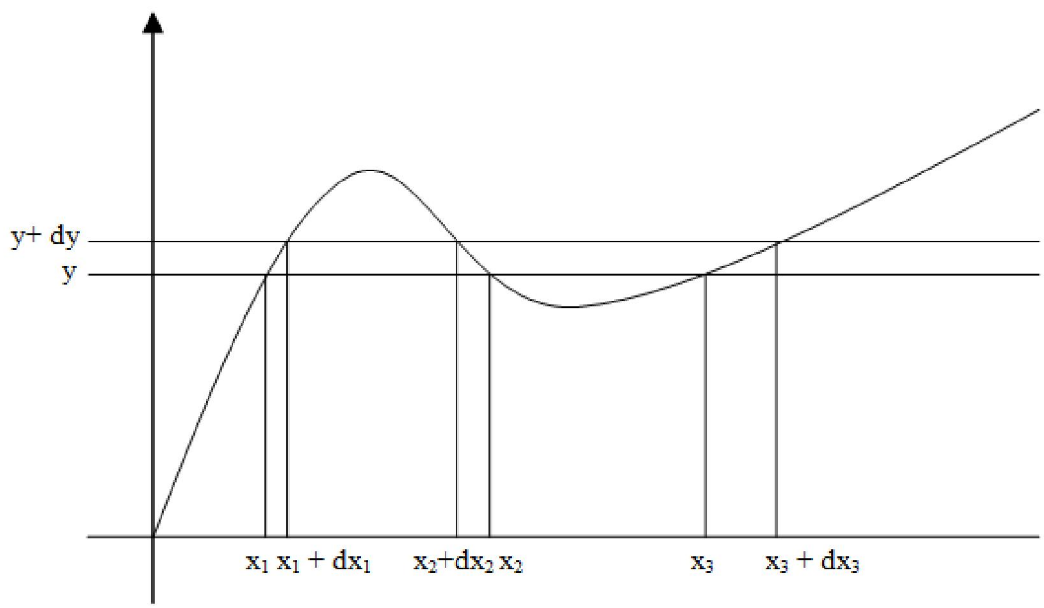
Xét hàm không tuyến tính Y = g(X) như được chỉ ra trong Hình (3.18). Xét biến cố $C_y = \{y < Y < y + dy\}$ và giả sử B_y là biến cố tương đương của nó. Với y được chỉ ra trong hình vẽ, phương trình $g(x) = y$ có nghiệm x_1, x_2, x_3 và biến cố tương đương B_y có khoảng tương ứng với mỗi nghiệm:

$$B_y = \{x_1 < X < x_1 + dx_1\} \cup \{x_2 + dx_2 < X < x_2\} \cup \{x_3 < X < x_3 + dx_3\}$$

Xác suất của biến cố C_y xấp xỉ

$$P[C_y] = f_Y(y)\,|dy|\,, \qquad (3.53)$$

HÌNH 3.18
Biến cố tương đương của $\{y < Y < y + dy\}$ là
$\{x_1 < X < x_1 + dx_1\} \cup U\{x_2 + dx_2 < X < x_2\} \cup U\{x_3 < X < x_3 + dx_3\}$



ở đây $|dy|$ là độ dài của khoảng $y < Y \le y + dy$. Tương tự, xác suất của biến cố B_y xấp xỉ

$$P[B_y] = f_X(x_1)\,|dx_1| + f_X(x_2)\,|dx_2| + f_X(x_3)\,|dx_3| \qquad (3.54)$$

Do C_y và B_y là các biến cố tương đương, nên xác suất của chúng cần phải bằng nhau. Bởi các Hệ thức (3.53) và (3.54) chúng ta nhận được:

$$f_Y(y) = \sum_k \left.\frac{f_X(x)}{|dy/dx|}\right|_{x=x_k} \qquad (3.55)$$

$$= \sum_k f_X(x) \left|\frac{dx}{dy}\right|_{x=x_k}. \qquad (3.56)$$

Rõ ràng rằng nếu phương trình $g(x) = y$ có n nghiệm, biểu thức của hàm mật độ của Y tại điểm này được cho bởi các Hệ thức (3.55) và (3.56) gồm n số hạng.

VÍ DỤ 3.27

Cho $Y = X^2$ như trong Ví dụ 3.26. Với $y \ge 0$, phương trình $y = x^2$ có hai nghiệm $x_0 = \sqrt{y}$ và $x_1 = -\sqrt{y}$, do vậy Hệ thức (3.55) có hai số hạng. Do $dy/dx = 2x$, Hệ thức (3.55) trở thành:

$$f_X(y) = \frac{f_X(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} + \frac{f_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}.$$

Kết quả này phù hợp với Hệ thức (3.51). Để ứng dụng Hệ thức (3.56), chúng ta chú ý rằng

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy} \pm \sqrt{y} = \pm \frac{1}{2\sqrt{y}},$$

Mà khi thế vào Hệ thức (3.56) một lần nữa lại cho Hệ thức (3.51).

VÍ DỤ 3.28
Các Mẫu Biên độ của Sóng hình Sin

Giả sử Y = cos(X), ở đây X có phân phối đều trong khoảng (0,2π]. Y có thể biểu hiện như là đường mẫu của sóng hình sin tại thời điểm ngẫu nhiên mà nó có phân phối đều trên một chu kỳ của đường hình sin. Hãy tìm hàm mật độ xác suất của Y.

Có thể nhìn thấy trong hình 3.19 rằng với $-1 < y < 1$ phương trình $y = \cos(x)$ có hai nghiệm trong khoảng mà ta quan tâm, $x_0 = \cos^{-1}(y)$ và $x_1 = 2\pi - x_0$. Do (xem phần mở đầu của sổ tay toán học)

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_k} = -\sin(x_0) = -\sin(\cos^{-1}(y)) = -\sqrt{1-y^2},$$

và do $f_X(x) = 1/2\pi$ trên khoảng mà ta quan tâm, Hệ thức (3.55) cho:

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{y}} + \frac{1}{2\pi\sqrt{y}}$$

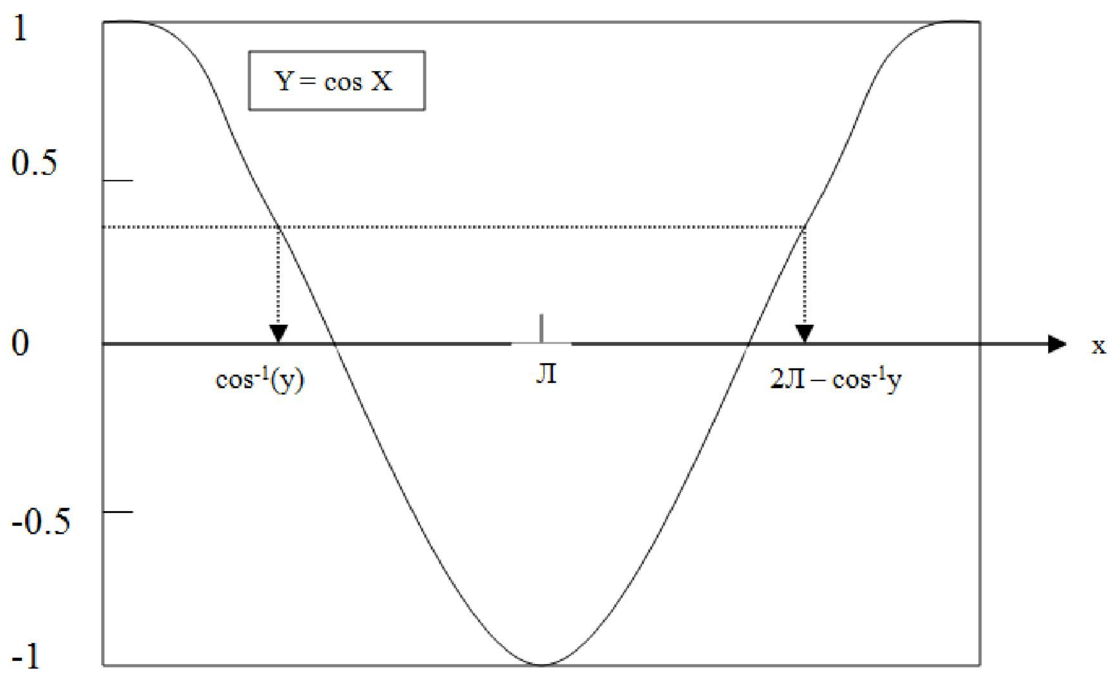
$$= \frac{1}{2\sqrt{y}} \qquad \text{với } -1 < y < 1.$$

Hàm phân phối của Y tìm được bằng cách lấy tích phân trên

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < -1 \\ \frac{1}{2} + \frac{\sin^{-1} y}{\pi} & -1 \le y \le 1 \\ 1 & y > 1. \end{cases}$$

Y được gọi là có **phân phối arcsine**.

HÌNH 3.19
Y = cosX có hai nghiệm trong khoảng (0,2π)



3.6 GIÁ TRỊ KỲ VỌNG CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN

Để mô tả đầy đủ dáng điệu của một biến ngẫu nhiên, cần phải cho toàn bộ hệ hàm phân phối hoặc hàm mật độ xác suất. Trong một số trường hợp, chúng ta quan tâm chỉ một vài tham số mà nó tóm lược thông tin được cho bởi các hàm này. Ví dụ, Hình (3.20) chỉ ra các kết quả của nhiều lần lặp lại một thí nghiệm mà nó tạo ra hai biến ngẫu nhiên. Biến ngẫu nhiên Y biến đổi xung quanh 0, ngược lại biến ngẫu nhiên X biến đổi xung quanh 5. Rõ ràng rằng X trải rộng hơn Y. Trong phần này chúng ta sẽ giới thiệu các tham số lượng hóa các tính chất này.

Giá trị kỳ vọng của X

Giá trị kỳ vọng hoặc **trung bình** của biến ngẫu nhiên X được xác định bởi:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t)\,dt \,. \qquad (3.57)$$

Nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc, thế Hệ thức (3.21) vào (3.57) cho:

$$E[X] = \sum_k x_k\, p_X(x_k) \,. \qquad (3.58)$$

Giá trị kỳ vọng E[X] được xác định nếu tích phân trên hoặc tổng hội tụ tuyệt đối, nghĩa là :

$$E[|X|] = \int_{-\infty}^{\infty} |t| \, f_X(t)dt < \infty$$

hoặc

$$E[|X|] = \sum_k |x_k| p_X(x_k) < \infty.$$

Có các biến ngẫu nhiên sao cho các biểu thức trên không hội tụ. Khi đó ta nói rằng giá trị kỳ vọng không tồn tại. Xem các Bài toán 71 và 72 như là các ví dụ về các biến ngẫu nhiên như vậy.

Nếu chúng ta coi $f_X(x)$ như là phân phối của khối lượng trên đường thẳng thực, khi đó E[X] biểu diễn trong tâm của phân phối này.

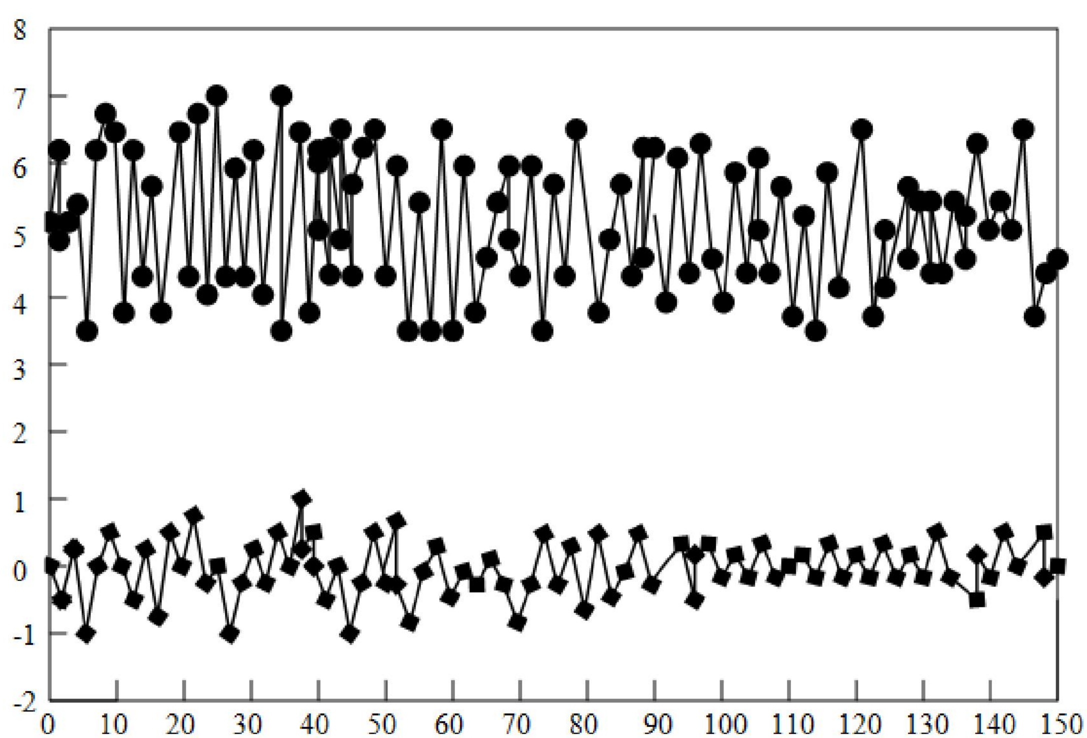
Hệ thức (3.58) xuất hiện ở Chương 1, Hệ thức (1.9), ở đó chúng ta đã chỉ ra rằng bài toán số học của một số lớn các quan sát độc lập của biến ngẫu nhiên X sẽ hội tụ tới E[X]. Trong trường hợp này, giá trị kỳ vọng của biến ngẫu nhiên tương ứng với khái niệm cảm tính của chúng ta về "giá trị trung bình của X".

HÌNH 3.20

Đồ thị chỉ ra 150 lần lặp lại một thí nghiệm cho biến ngẫu nhiên X và Y.

Rõ ràng rằng X lấy giá trị tập trung xung quanh 5 còn Y lấy giá trị tập trung xung quanh 0.

Cũng rõ ràng rằng X trải rộng hơn Y.



VÍ DỤ 3.29
Kỳ vọng của một Biến Ngẫu nhiên có Phân phối Đều

Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên có phân phối đều được cho bởi

$$E[X] = (b-a)^{-1}\int_a^b t\,dt = \frac{a+b}{2},$$

nó thực sự là trung điểm của khoảng [a, b]. Các kết quả được chỉ ra trong Hình (3.20) nhận được bằng cách lặp lại các thí nghiệm mà các kết cục là các biến ngẫu nhiên Y và X có phân phối đều trong các khoảng [–1, 1] và [3, 7], một cách tương ứng. Các giá trị kỳ vọng tương ứng với X và Y là 0 và 5.

Kết quả trong Ví dụ 3.29 có thể tìm được ngay lập tức với việc chú thích rằng E[X] = m khi hàm mật độ đối xứng xung quanh m. Nghĩa là, nếu

$$f_X(m-x) = f_X(m+x) \qquad \text{với } \forall\, x,$$

khi đó giả sử rằng giá trị trung bình tồn tại,

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty}(m-t)f_X(t)dt = m - \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t)dt\,.$$

Đẳng thức đầu tiên ở trên chỉ ra tính đối xứng của $f_X(t)$ xung quanh $t = m$ và tính đối xứng lẻ của $(m - t)$ xung quanh cùng điểm đó. Khi đó chúng ta có E[X] = m.

VÍ DỤ 3.30
Giá trị Trung bình của Biến Ngẫu nhiên Gauss

Hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên Gauss đối xứng xung quanh điểm $x = m$. Do đó E[X] = m.

Biểu thức sau được dùng khi X là biến ngẫu nhiên không âm :

$$E[X] = \int_0^{\infty}(1-F_X(t))dt \qquad \text{nếu X liên tục và không âm} \qquad (3.59)$$

và

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} P[X > k] \qquad \text{nếu X là không âm, nguyên.} \qquad (3.60)$$

Chứng minh của các công thức này được xét trong Bài tập 70.

VÍ DỤ 3.31
Giá trị Trung bình của Biến Ngẫu nhiên Mũ

Thời gian X giữa các lần đến của khách hàng tới một hệ phục vụ có hàm mật độ xác suất mũ với tham số λ. Hãy tìm giá trị trung bình của các khoảng thời gian đến.

Thế Hệ thức (3.34) vào Hệ thức (3.57) chúng ta nhận được:

$$E[X] = \int_0^{\infty} t\lambda e^{-\lambda t} dt .$$

Chúng ta tính tích phân bằng phương pháp tích phân từng phần ($\int udv = uv - \int vdu$), với $u = t$ và $dv = \lambda e^{-\lambda t} dt$:

$$E[X] = -te^{-\lambda t}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt$$

$$= \lim_{t\to\infty} te^{-\lambda t} - 0 + \left\{\frac{-e^{-\lambda t}}{\lambda}\right\}_0^{\infty}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{-e^{-\lambda t}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda},$$

ở đây chúng ta đã sử dụng kết quả là $e^{-\lambda t}$ và $te^{-\lambda t}$ tiến dần đến 0 khi t tiến tới vô cùng.

Ví dụ Hệ thức (3.59) dễ dàng tính được :

$$E[X] = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}.$$

Giá trị λ có nghĩa là có λ *khách hàng đến mỗi giây*. Khi đó kết quả là giá trị trung bình của các khoảng thời gian đến $E[X] = 1/\lambda$ *giây có một khách hàng* có ý nghĩa trực quan.

VÍ DỤ 3.32

Giá trị Trung bình của Biến Ngẫu nhiên Hình học

Giả sử N là số lần máy tính chọn một thiết bị đầu cuối cho đến khi thiết bị có một tin nhắn cần chuyển. Nếu giả sử rằng thiết bị tạo ra tin nhắn tuân theo dãy các phép thử Bernoulli độc lập, khi đó N có phân phối hình học. Hãy tìm giá trị trung bình của N.

Giá trị kỳ vọng của biến ngẫu nhiên hình học khi sử dụng Hệ thức (3.58) là:

$$E[N] = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} .$$

Biểu thức này được tính bởi việc lấy đạo hàm chuỗi

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

nhận được

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} .$$

Đặt $x = q$, chúng ta nhận được :

$$\text{E}[N] = \sum_{k=0}^{\infty} P[N > k] = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = p\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

Điều này có nghĩa là, ví dụ nếu xác suất thành công trong một lần thử là p = 1/10, khi đó chúng ta hy vọng rằng trung bình $1/p$ = 10 lần thử có một lần thành công.

Tính trực tiếp từ Hệ thức (3.60) dễ dàng nhận được

$$\text{E}[N] = \sum_{k=0}^{\infty} P[N > k] = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q},$$

ở đây chúng ta sử dụng kết quả $P[N > k] = q^k$, với k = 0, 1, 2, ….

Giả sử rằng q = 0.6 trong ví dụ trên. Khi đó E[N] = 2.5, không phải là giá trị nào của N cả. Do vậy khi kết luận rằng "trung bình N bằng 2.5" là không có nghĩa. (Điều này làm chúng ta nhớ lại khi đọc báo gặp câu "trung bình hệ gia đình có 3.5 người".) Điều này có nghĩa là trung bình số học của số lớn các lần lặp lại thí nghiệm bằng 2.5.

Các Bảng 3.1 và 3.2 liệt kê các giá trị kỳ vọng của các biến ngẫu nhiên quan trọng khác.

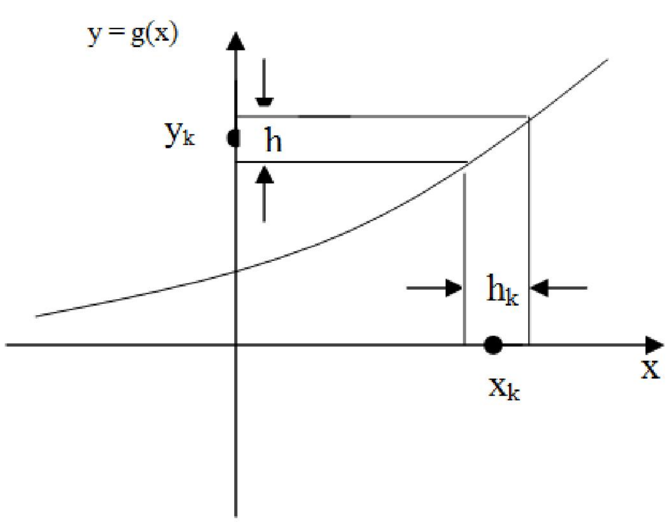
Giá trị kỳ vọng của Y = g(X)

Giả sử rằng chúng ta quan tâm đến giá trị kỳ vọng của Y = g(X). Sự tiếp cận trực tiếp suy ra trước tiên từ hàm mật độ xác suất của Y, và khi đó tính E[Y] bởi việc dùng Hệ thức (3.57). Bây giờ chúng ta chứng tỏ rằng E[Y] cũng có thể tìm được trực tiếp từ hàm mật độ xác suất của X :

$$\text{E[Y]} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)dx. \qquad (3.61)$$

Để nhận được Hệ thức (3.61), giả sử rằng chúng ta chia trục y thành các khoảng có độ dài h, chúng ta đánh số các khoảng bởi chỉ số k và chúng ta đặt y_k là giá trị trung điểm của khoảng k. Giá trị kỳ vọng của Y được xấp xỉ bởi công thức sau

$$\text{E[Y]} \approx \sum_k y_k f_Y(y_k)h.$$



HÌNH 3.21
Hai biến cố tương đương vô cùng bé

Giả sử rằng $g(x)$ là hàm giảm ngặt, khi đó khoảng thứ k trên trục y có biến cố tương đương tương ứng duy nhất có độ rộng h_k trên trục x như được chỉ ra trong Hình 3.21. Giả sử x_k là giá trị trên khoảng thứ k sao cho $g(x_k) = y_k$, khi đó do $f_Y(y_k)h = f_X(x_k)h_k$, nên

$$\text{E[Y]} \approx \sum_k g(x_k) f_X(x_k) h_k \text{ .}$$

Với việc lấy h tiến đến 0, chúng ta nhận được Hệ thức (3.61). Hệ thức này vẫn còn đúng khi $g(x)$ tăng không ngặt. Chứng minh cho trường hợp tổng quát suy ra từ tính chất là mỗi khoảng y có một khoảng tương ứng như trong Hình 3.18.

VÍ DỤ 3.33

Giá trị Kỳ vọng của Đường Sin với Pha Ngẫu nhiên

Giả sử Y = a cos(ωt + Θ), ở đây a, ω và t là các hằng số và Θ là biến ngẫu nhiên có phân phối đều trên khoảng (0, 2π). Biến ngẫu nhiên Y nhận được từ biên độ mẫu của đường hình sin với pha ngẫu nhiên Θ. Hãy tìm giá trị kỳ vọng của Y và giá trị kỳ vọng của công suất của Y, tức Y^2.

$$\begin{aligned}\text{E[Y]} &= \text{E}[a\cos(\omega t + \Theta)]\\ &= \int_0^{2\pi} a\cos(\omega t+\theta)\frac{d\theta}{2\pi} = -a\cos(\omega t+\theta)\Big|_0^{2\pi}\\ &= -a\sin(\omega t + 2\pi) + a\sin(\omega t) = 0\end{aligned}$$

Công suất trung bình là:

$$\begin{aligned}\text{E}[Y^2] &= \text{E}[a^2\cos^2(\omega t+\Theta)] = \text{E}\left[\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}\cos(2\omega t + 2\Theta)\right]\\ &= \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\cos(2\omega t+\theta)\frac{d\theta}{2\pi} = \frac{a^2}{2}.\end{aligned}$$

Chú ý rằng kết quả này phù hợp với thời gian trung bình của đường hình sin: thời gian trung bình (giá trị “dc”) của đường hình sin bằng 0; công suất trung bình là $a^2/2$.

VÍ DỤ 3.34

Giá trị Kỳ vọng của Hàm Chỉ số

Giả sử $g(X) = I_G(X)$ là hàm chỉ số của biến cố {X ∈ C}, ở đây C là một vài khoảng hoặc hợp của các khoảng trên đường thẳng thực:

$$g(\text{X}) = \begin{cases} 0 & \text{X không thuộc C} \\ 1 & \text{X thuộc C,} \end{cases}$$

khi đó

$$\text{E[Y]} = \int_{-\infty}^{\infty} g(X) f_X(x)dx = \int_C f_X(x)dx = \text{P[X thuộc C].}$$

Như vậy giá trị kỳ vọng của hàm chỉ số của một biến cố bằng xác suất của biến cố đó.

Sau đây là hai tính chất đơn giản, nhưng hữu ích, được suy ra trực tiếp từ Hệ thức (3.61). Với c là một hằng số nào đó:

$$\mathrm{E}[c] = \int_{-\infty}^{\infty} c f_X(x)dx = c\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = c \tag{3.62}$$

$$\mathrm{E}[c\mathrm{X}] = \int_{-\infty}^{\infty} cx f_X(x)dx = c\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = c\mathrm{E}[\mathrm{X}]. \tag{3.63}$$

Giá trị kỳ vọng của tổng các hàm của một biến ngẫu nhiên bằng tổng các giá trị kỳ vọng của các hàm thành phần :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\mathrm{Y}] &= \mathrm{E}\left[\sum_{k=1}^{n} g_k(X)\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} g_k(x) f_X(x)dx = \sum_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} g_k(x) f_X(x)dx \\ &= \sum_{k=1}^{n} E\left[g_k(X)\right].\end{aligned} \tag{3.64}$$

VÍ DỤ 3.35 Cho $\mathrm{Y} = g(\mathrm{X}) = a_0 + a_1\mathrm{X} + a_2\mathrm{X}^2 + \ldots + a_n\mathrm{X}^n$, ở đây a_k là các hằng số, khi đó:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\mathrm{Y}] &= \mathrm{E}[a_0] + \mathrm{E}[a_1\mathrm{X}] + \ldots + \mathrm{E}[a_n\mathrm{X}^n] \\ &= a_0 + a_1\mathrm{E}[\mathrm{X}] + \ldots + a_n\mathrm{E}[\mathrm{X}^n],\end{aligned}$$

ở đây chúng ta sử dụng Hệ thức (3.64), và các Hệ thức (3.62) và (3.63). Trường hợp riêng của kết quả này là: $\mathrm{E}[\mathrm{X} + c] = \mathrm{E}[\mathrm{X}] + c$, nghĩa là *chúng ta có thể tịnh tiến giá trị trung bình của một biến ngẫu nhiên bằng cách cộng một hằng số với nó*.

Phương sai của X

Giá trị kỳ vọng E[X] đem đến cho chúng ta những thông tin rất hạn chế về X. Ví dụ, nếu chúng ta biết rằng E[X] = 0, khi đó có thể X = 0 tại mọi thời điểm. Hơn nữa không cùng là giá trị của biến ngẫu nhiên lấy hai giá trị vô cùng lớn trái dấu đồng xác suất. Do vậy chúng ta quan tâm không chỉ đến giá trị trung bình của biến ngẫu nhiên, mà còn quan tâm đến độ lệch của biến ngẫu nhiên biến xung quanh giá trị trung bình. Giả sử độ lệch của X quanh giá trị trung bình là D = X – E[X], khi đó D có thể lấy giá trị âm hoặc dương. Do đó chúng ta chỉ quan tâm đến độ lớn của độ lệch, để thuận tiện chúng ta làm việc với D^2, là đại lượng luôn dương.

Phương sai (**variance**) **của biến ngẫu nhiên** X được xác định như là độ lệch bình phương trung bình $E[D^2]$:

$$VAR[X] = E[(X - E[X])^2] \tag{3.65}$$

Bằng việc lấy căn bậc hai phương sai chúng ta nhận được đại lượng có cùng đơn vị như X: **độ lệch tiêu chuẩn của biến ngẫu nhiên** (**standard deviation of the variable** [**STD**]) X được xác định bởi

$$STD[X] = (VAR[X])^{1/2}. \tag{3.66}$$

Độ lệch bình phương trung bình được dùng để đo "độ rộng" hoặc "độ phân tán" của phân phối.

Biểu thức trong Hệ thức (3.65) có thể được đơn giản đi như sau:

$$\begin{aligned} VAR[X] &= E[X^2 - 2E[X]X + E[X]^2] \\ &= E[X^2] - 2E[X]\,E[X] + E[X]^2 \\ &= E[X^2] - E[X]^2 \end{aligned} \tag{3.67}$$

do E[X] là hằng số và sử dụng các Hệ thức (3.62) và (3.63)

VÍ DỤ 3.36
Phương sai của Biến Ngẫu nhiên Phân phối Đều

Hãy tìm phương sai của biến ngẫu nhiên X có phân phối đều trên khoảng [a, b].

Do giá trị trung bình của X là $(a + b)/2$, nên

$$VAR[X] = \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx .$$

Đặt $y = (x - (a + b)/2)$,

$$VAR[X] = \frac{1}{b-a}\int_{-(b-a)/2}^{(b-a)/2} y^2 dy = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Các biến ngẫu nhiên trên Hình 3.20 có phân phối đều tương ứng trong các khoảng [–1, 1] và [3, 7]. Khi đó các phương sai là 1/3 và 4/3. Độ lệch chuẩn tương ứng là 0.577 và 1.155.

VÍ DỤ 3.37
Phương sai của Biến Ngẫu nhiên Hình học

Hãy tìm phương sai của biến ngẫu nhiên hình học.

Lấy đạo hàm $(1 - x)^{-2}$ trong Ví dụ 3.32 nhận được:

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} .$$

Đặt $x = q$ và nhân cả hai vế với pq, chúng ta nhận được:

$$\frac{2}{(1-x)^3} = E[N^2] - E[N].$$

Nhớ lại rằng E[N] = 1/p, chúng ta tìm được rằng E[N^2] = (1 + q)/p^2. Khi đó phương sai nhận được bởi việc dùng Hệ thức (3.67):

$$\text{VAR}[N] = \text{E}[N^2] - \text{E}[N]^2 = \frac{q}{p^2}.$$

VÍ DỤ 3.38
Phương sai của Biến Ngẫu nhiên Gauss

Hãy tìm phương sai của biến ngẫu nhiên Gauss.

Trước hết nhân tích phân của hàm mật độ của X với $\sqrt{2\pi}\sigma$ nhận được

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}\,dx = \sqrt{2\pi}\sigma.$$

Đạo hàm cả hai vế theo σ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{(x-m)^2}{\sigma^3}\right) e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}\,dx = \sqrt{2\pi}.$$

Bằng việc xắp xép lại đẳng thức trên, chúng ta nhận được.

$$\text{VAR}[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}\,dx = \sigma^2.$$

Kết quả này cũng có thể nhận được bằng phép lấy tích phân trực tiếp. (Xem Bài tập 69.) Hình 3.13 chỉ ra hàm mật độ Gauss của một vài giá trị σ; rõ ràng rằng "độ rộng" của hàm mật độ phân phối giảm theo σ.

Dễ dàng chứng minh các tính chất sau (xem Bài tập 73).

$$\text{VAR}[c] = 0 \tag{3.68}$$

$$\text{VAR}[X + c] = \text{VAR}[X] \tag{3.69}$$

$$\text{VAR}[cX] = c^2\text{VAR}[X] \tag{3.70}$$

ở đây c là hằng số.

Giá trị trung bình và phương sai là 2 tham số quan trọng nhất để tóm lược hàm mật độ xác suất của một biến ngẫu nhiên. Các tham số khác được dùng tùy dịp khác nhau. Ví dụ, độ bất đối xứng được xác định bởi E[(X – E[X])^3]/STD[X]^3 đo bậc bất đối xứng quanh giá trị trung bình. Dễ dàng chứng minh rằng nếu hàm mật độ bất đối xứng bằng 0. Mỗi một tham số này liên quan đến một lũy thừa bậc cao của X. Thực vậy chúng ta sẽ chứng minh trong phần sau rằng, với những điều kiện nào đó, hàm mật độ xác suất được hoàn toàn xác định nếu biết các giá trị kỳ vọng của tất cả các lũy thừa của X.

Mômen (**moment**) **cấp *n* của biến ngẫu nhiên** X được xác định bởi

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x)dx . \qquad (3.71)$$

Giá trị trung bình và phương sai được xác định hoàn toàn qua mômen cấp 1 và cấp 2, tức E[X] và E[X^2].

VÍ DỤ 3.39

Chuyển đổi từ Tương tự sang Kỹ thuật Số: Một Ví dụ Chi tiết

Ý nghĩa của phép lượng hóa là ánh xạ điện áp ngẫu nhiên X vào điểm gần nhất q(X) từ tập gồm 2^R giá trị. (Xem Ví dụ 3.19.) Khi đó giá trị X được xấp xỉ bởi q(X), mà nó được đồng nhất với một số nhị phân R bit. Bằng cách này một điện áp tương tự X mà có thể xem là có giá trị liên tục được biến đổi thành một số R bit.

Phép lượng tử hóa đưa đến một sai số Z = X – q(X) như được chỉ ra trong Hình 3.22. Chú ý rằng Z là một hàm của X và nó lấy giá trị giữa $-d/2$ và $d/2$, ở đây d là cỡ bước lượng hóa. Giả sử rằng X có phân phối đều trong khoảng $[-x_{max}, x_{max}]$, phép lượng tử hóa có 2^R mức và $2x_{max} = 2^R d$. Khi đó dễ dàng chứng minh rằng Z có phân phối đều trong khoảng $[-d/2, d/2]$ (xem Bài tập 61).

Do đó từ Ví dụ 3.29,

$$E[Z] = \frac{d/2 - d/2}{2} = 0.$$

Như thế, sai số Z có trung bình bằng 0.

Từ Ví dụ 3.36,

$$VAR[Z] = \frac{\left(d/2 - (d/2)\right)^2}{12} = \frac{d^2}{12}.$$

Kết quả này là sự hiệu chỉnh đúng cho hàm mật độ xác suất bất kỳ trải trên mỗi khoảng lượng hóa. Đó là khi 2^R đủ lớn.

Sự xấp xỉ $q(x)$ có thể được xem như là nhiễu của X do

Q(X) = X – Z,

ở đây Z là sai số lượng hóa. Độ đo sự phù hợp của phép lượng hóa được mô tả bởi tỉ số SNR, được định nghĩa là tỉ số của phương sai của "tín hiệu" X với phương sai của sự biến dạng hoặc "nhiễu" Z:

$$\text{SNR} = \frac{VAR[X]}{VAR[Z]} = \frac{VAR[X]}{d^2/12}$$
$$= \frac{VAR[X]}{x_{max}^2/3} 2^{2R},$$

ở đây chúng ta sử dụng yếu tố $d = 2x_{max}/2^R$. Khi X không phải là biến ngẫu nhiên đều, giá trị x_{max} được lấy sao cho P[|X| > x_{max}] là nhỏ phép chọn điển hình là x_{max} = 4STD[X]. Khi đó SNR là:

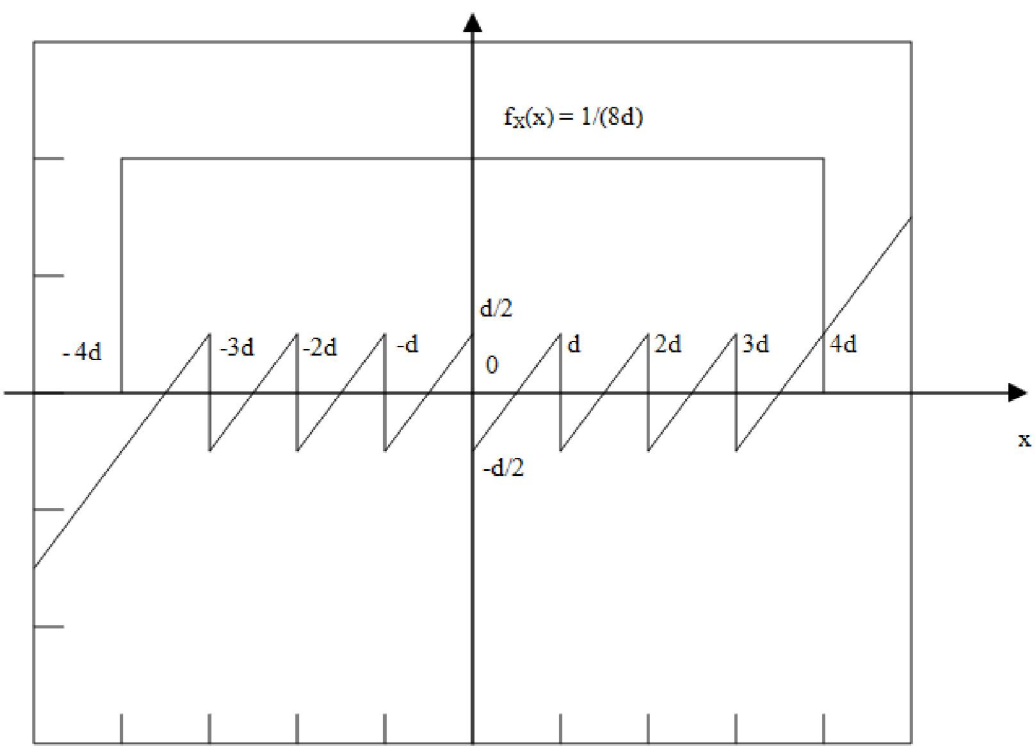
$$\text{SNR} = \frac{3}{16}2^{2R}.$$

Công thức quan trọng này thường được đo bởi decibel:

$$\text{SNR dB} = 10\log_{10}\text{SNR} = 6R - 7.3\text{dB}.$$

SNR giảm đi 4 lần (6dB) với mỗi bit them vào để biểu diễn X. Điều này xảy ra do mỗi bit thêm vào nhân đôi số mức lượng hóa, và rút cỡ bước lượng hóa đi 2. Phương sai của sai số được rút gọn bằng bình phương của phương sai của sai số trước đó, tức là $2^2 = 4$.

HÌNH 3.22
Sai số lượng hóa đều với đầu vào x là x – q(x)



3.7 CÁC BẤT ĐẲNG THỨC MARKOV VÀ CHEBYSHEV

Nói chung giá trị trung bình và phương sai của biến ngẫu nhiên không cho đầy đủ thông tin để xác định hàm phân phối và hàm mật độ xác suất. Tuy nhiên giá trị trung bình và phương sai của biến ngẫu nhiên X lại cho phép chúng ta nhận được giới hạn của biến cố P[|X| ≥ t]. Trước hết giả sử rằng X là biến ngẫu nhiên không âm với giá trị trung bình E[X]. Khi đó **bất đẳng thức Markov** (**Markov inequality**) phát biểu rằng :

$$P[X \geq a] \leq \frac{E[X]}{a} \quad \text{với X không âm.} \tag{3.72}$$

Chúng ta nhận được Hệ thức (3. 72) như sau:

$$E[X] = \int_0^a t f_X(t)dt + \int_a^{\infty} t f_X(t)dt \geq \int_a^{\infty} t f_X(t)dt$$

$$\geq \int_a^{\infty} a f_X(t)dt = aP[X \geq a].$$

Bất đẳng thức đầu tiên nhận được do ta bỏ đi tích phân từ 0 tới a; bất đẳng thức thứ hai nhận được do thay thế t bởi số nhỏ hơn là a.

VÍ DỤ 3.40 Chiều cao trung bình của trẻ em một lớp mẫu giáo là 3 feet 6 inch. Hãy tìm cận trên của xác suất để có đứa trẻ trong lớp cao hơn 9 feet. Bất đẳng thức Markov cho chúng ta P[H ≥ 9] ≤ 42/108 = .389.

Cận trong ví dụ trên có vẻ buồn cười. Tuy nhiên, cận trên đã xét là trường hợp xấu nhất. Dễ dàng xây dựng biến ngẫu nhiên mà với nó cận được cho bởi bất đẳng thức Markov là đúng. Nguyên do xảy ra cận trong ví dụ trên là khôi hài như vậy vì chúng ta đã biết độ sai khác chiều cao của trẻ xung quanh giá trị trung bình.

Bây giờ chúng ta giả sử rằng E[X] = m và phương sai VAR[X] = σ^2 đã biết, và chúng ta quan tâm đến cận của xác suất P[|X – m| ≥ a]. **Bất đẳng thức Chebyshev** (**Chebyshev inequality**) phát biểu rằng:

$$P[|X - m| \geq a] \leq \frac{\sigma^2}{a^2}. \tag{3.73}$$

Bất đẳng thức Chebyshev là hệ quả của bất đẳng thức Markov. Đặt $D^2 = (X - m)^2$ là bình phương độ lệch khỏi giá trị trung bình. Khi đó bất đẳng thức Markov được áp dụng với D^2 cho:

$$P[D^2 \geq a^2] \leq \frac{E\left[(X-m)^2\right]}{a^2} = \frac{\sigma^2}{a^2}.$$

Hệ thức (3.73) nhận được khi chú ý rằng $\{D^2 \geq a^2\}$ và $\{|X - m| \geq a\}$ là các biến cố tương đương.

Giả sử rằng biến cố ngẫu nhiên X có phương sai bằng 0; khi đó bất đẳng thức Chebyshev suy ra rằng:

$$P[X = m] = 1, \tag{3.74}$$

nghĩa là biến ngẫu nhiên bằng giá trị trung bình của nó với xác suất 1. Nói cách khác, X bằng hằng số trong hầu hết các thí nghiệm.

VÍ DỤ 3.41 Thời gian đáp ứng trung bình và độ lệch chuẩn trong một hệ máy tính nhiều người dùng (multi-user) đã được biết tương ứng là 15 s và 3 s. Hãy ước lượng xác suất để thời gian đáp ứng lệch khỏi giá trị trung bình quá 5 s. Bất đẳng thức Chebyshev với m = 15 s và σ = 3 s, a = 5 s là:

$$P[|X - 15| \geq 5] \leq \frac{9}{25} = .36.$$

VÍ DỤ 3.42 Nếu X có giá trị trung bình m và phương sai σ^2, khi đó bất đẳng thức Chebyshev với $a = k\sigma$ là:

$$P[|X - m| \geq k\sigma] \leq \frac{1}{k^2}.$$

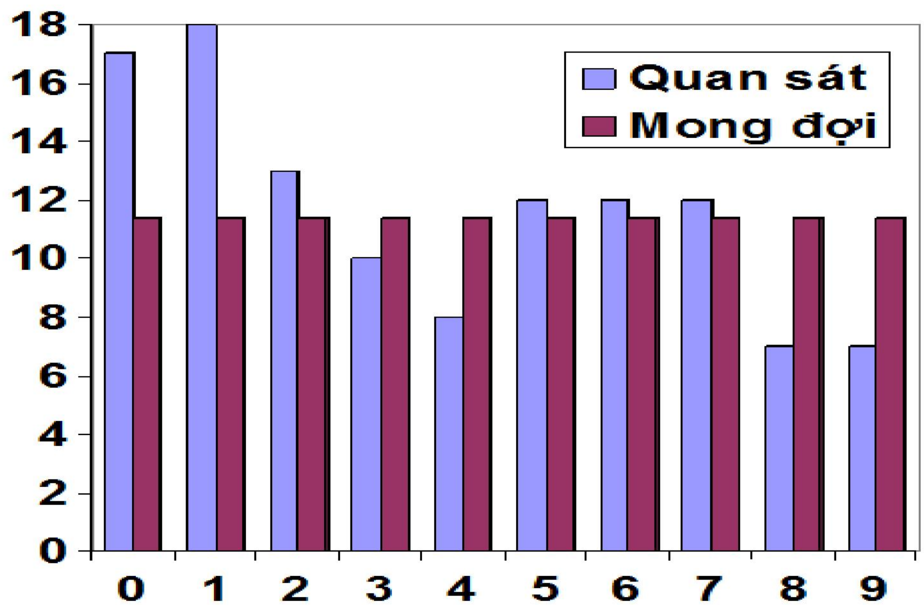
Bây giờ chúng ta giả sử rằng X là biến ngẫu nhiên Gauss, khi đó với k = 2, $P[|X - m| \geq 2\sigma] = .0456$, trong khi bất đẳng thức Chebyshev cho cận trên là .25.

Chúng ta nhận thấy từ Ví dụ 3.42 rằng với một số biến ngẫu nhiên nào đó, bất đẳng thức Chebyshev cho cận lỏng hơn. Mặc dù vậy, bất đẳng thức này là có ích khi chúng ta không biết gì hơn về phân phối ngoài giá trị trung bình và phương sai. Trong Phần 5.2 chúng ta sẽ sử dụng bất đẳng thức Chebyshev để chứng minh rằng trung bình số học của các phép đo độc lập của cùng biến ngẫu nhiên có sự phù hợp cao với giá trị kỳ vọng của biến ngẫu nhiên khi số các phép đo đủ lớn. Các Bài tập 82 và 83 cho ví dụ về các kết luận này.

3.8 KIỂM ĐỊNH SỰ PHÙ HỢP CỦA PHÂN PHỐI VỚI DỮ LIỆU

Mô hình phù hợp với dữ liệu như thế nào? Giả sử chúng ta có mô hình xác suất giả định cho một số thí nghiệm ngẫu nhiên nào đó và chúng ta quan tâm đến việc xác định mô hình nào phù hợp tốt nhất với các số liệu thí nghiệm của mình. Thế thì chúng ta phải làm thế nào? Trong phần này chúng ta trình bày phép kiểm nghiệm khi-bình phương, được ứng dụng rộng rãi để xác định sự phù hợp của một phân phối với tập số liệu thí nghiệm. (3)

HÌNH 3.23
Biểu đồ của số cuối trong các số điện thoại



(3) Một phép kiểm nghiệm khác về mức phù hợp tốt hữu ích là phép kiểm nghiệm Kolmogorov-Smirnov (Allen 1978, 311–317).

Phép kiểm nghiệm tự nhiên đầu tiên là phép so sánh bằng "mắt" hàm xác suất, hàm mật độ hay hàm phân phối giả định với số liệu tương ứng được tìm ra bằng thực nghiệm. Nếu kết cục của thí nghiệm X là rời rạc, chúng ta có thể so sánh tần suất tương đối của các kết cục với các xác suất được xác định bởi hàm xác suất, như được chỉ ra trong Hình 3.23. Nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục chúng ta có thể phân hoạch trục thực thành *k* khoảng không gian giao nhau và xác định tần suất tương đối của các kết cục rơi vào mỗi khoảng. Các số này có thể so sánh với xác suất X thuộc vào mỗi khoảng đó, như được chỉ ra trong Hình 3.24. Nếu các tần suất tương đối là các xác suất có sự phù hợp tốt, khi đó chúng ta nói rằng sự phù hợp tốt nhất đã xảy ra.

Phép kiểm nghiệm khi-bình phương là cách có phương pháp hơn sự so sánh ở trên. Trước khi xét trường hợp tổng quát, chúng trình bày những ý tưởng cơ bản của phương pháp áp dụng vào trường hợp đơn giản nhất: phép thử Bernoulli.

VÍ DỤ 3.43 Giả sử chúng ta tung đồng xu 100 lần và thấy xuất hiện mặt ngửa 64 lần. Có hợp lý hay không, khi giả thiết rằng đồng xu là cân đối (tức là, P[ngửa] = 1/2)?

Chúng ta lý luận như sau: Nếu giả thiết H_0 đúng – nghĩa là đồng xu cân đối, khi đó giá trị kỳ vọng của số lần xuất hiện mặt ngửa trong 100 lần tung là 50. Như vậy, chúng ta chấp nhận giả thuyết nếu $|N - 50|$ là nhỏ, và bác bỏ nó nếu $|N - 50|$ là "quá lớn", ở đây N là số lần xuất hiện mặt ngửa.Có một phương pháp chuẩn trong thống kê, để xác định thế nào là "quá lớn". Chúng ta tính xác suất nhận được kết quả như là cận của giá trị quan sát được với giả định là giả thuyết đúng. Ví dụ với điều kiện đã cho

$$P[|N - 50| \geq 14 \mid H_0] = 1 - \sum_{k=37}^{63} \binom{100}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{100} \approx .0093.$$

Do vậy có ít hơn 1% trường hợp nhận được kết quả có cận bằng 64, nếu chúng ta tiến hành tung đồng xu cân đối. Chúng ta có thể lấy điều này làm mức ý nghĩa để bác bỏ giả thuyết đồng xu cân đối. Xác suất trên gọi là "mức ý nghĩa quan trắc được" do nó là hàm của quan trắc.

Bài toán thường được đặt theo cách khác. Nhà nghiên cứu xác định xác suất, hoặc "mức ý nghĩa", α. Xác suất này xác định với ứng dụng đã cho, độ lệch như thế nào khỏi giá trị kỳ vọng thì bác bỏ giả thuyết khi đó tìm giá trị ngưỡng t_α sao cho:

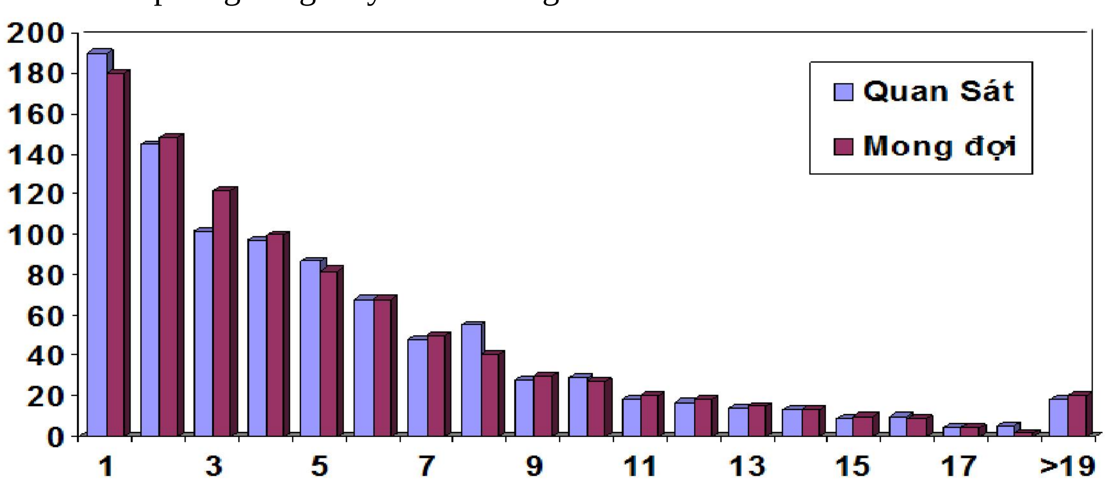
$$P[|N - 50| \geq t_\alpha \mid H_0] = \alpha.$$

Nếu sự khác nhau giữa quan trắc và 50 vượt quá ngưỡng, thì mức ý nghĩa được quan trắc nhỏ hơn α, và giả thuyết bị bác bỏ. Như vậy quyết định bác bỏ giả thuyết được đưa ra dựa trên sự so sánh $|N - 50|$ với ngưỡng.

Mức ý nghĩa thường được lấy là: 1% hoặc 5%.

HÌNH 3.24

Biểu đồ mô phỏng bằng máy tính biến ngẫu nhiên mũ



Có hai yếu tố cơ bản trong phương pháp sử dụng trong Ví dụ 3.43. Thứ nhất, độ đo xác định sự khác nhau giữa giá trị quan trắc được với giá trị kỳ vọng nếu hàm xác suất / hàm mật độ xác suất được giả định là đúng. Thứ hai, độ đo này được so sánh với ngưỡng để bác bỏ nếu sự khác biệt giữa kết quả quan trắc với kết quả kỳ vọng quá lớn, ngưỡng này được xác định bởi mức ý nghĩa của tính chất, được chọn bởi nhà nghiên cứu.

Phép kiểm nghiệm khi-bình phương bao gồm hai yếu tố trên và tiến hành như sau:

1. Phân hoạch không gian mẫu S_X thành K khoảng không giao nhau.
2. Tính xác suất b_k để kết cục rơi vào khoảng thứ k với giả thiết X có hàm phân phối giả định. Khi đó $m_k = nb_k$ là số kết cục kỳ vọng rơi vào khoảng thứ k trong n lần lặp lại thí nghiệm. (Để nhận thấy điều này chúng ta tưởng tượng thực hiện phép thử Bernoulli mà ở đó “sự thành công” tương ứng với kết cục thuộc vào khoảng thứ k).
3. Thống kê khi-bình phương được xác định theo trọng số sự khác biệt giữa số kết cục quan sát được, N_k, rơi vào khoảng thứ k và giá trị được kỳ vọng m_k:

$$D^2 = \sum_{k=0}^{K} \frac{(N_k - m_k)^2}{m_k}. \tag{3.75}$$

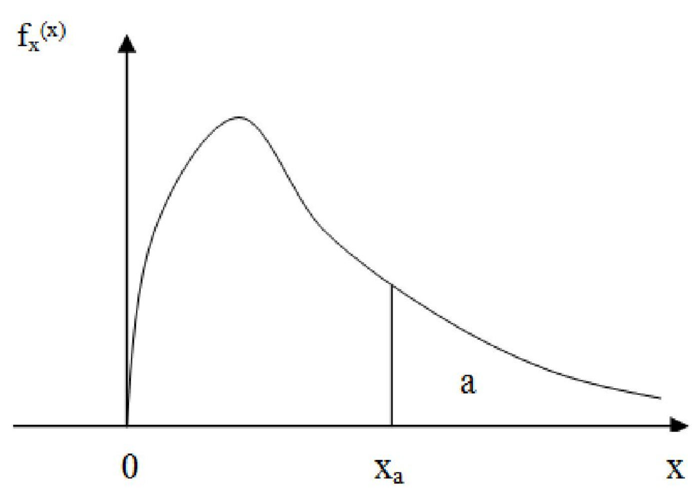
4. Nếu sự phù hợp là tốt khi đó D^2 sẽ nhỏ. Do vậy giả thuyết bị bác bỏ nếu D^2 đủ lớn; nghĩa là, nếu $D^2 \geq t_\alpha$, ở đây t_α là ngưỡng được xác định bởi mức ý nghĩa của tính chất.

Phép kiểm nghiệm khi-bình phương được đặt cơ sở trên thực tế là với n lớn, biến ngẫu nhiên D^2 có hàm mật độ xác suất xấp xỉ hàm mật độ khi-bình phương với $K - 1$ bậc tự do. Như vậy ngưỡng t_α có thể được tính bằng cách tìm điểm mà tại đó :

$$P[X \geq t_\alpha] = \alpha,$$

Ở đây X là biến ngẫu nhiên khi-bình phương với $K - 1$ bậc tự do (xem Hình 3.25). Các ngưỡng với mức ý nghĩa 1% và 5% và các bậc tự do khác nhau được cho trong Bảng 3.5.

HÌNH 3.25
Ngưỡng trong tiêu chuẩn khi – bình phương được lấy sao cho $P[D^2 > t_\alpha] = \alpha$



BẢNG 3.5
Các giá trị ngưỡng của
tiểu chuẩn khi – bình phương

K	**5%**	**1%**
1	3.84	6.63
2	5.99	9.21
3	7.81	11.35
4	9.49	13.28
5	11.07	15.09
6	12.59	16.81
7	14.07	18.48
8	15.51	20.09
9	16.92	21.67
10	18.31	23.21
11	19.68	24.76
12	21.03	26.22
13	22.36	27.69
14	23.69	29.14
15	25.00	30.58
16	26.30	32.00
17	27.59	33.51
18	28.87	34.81
19	30.14	36.19
20	31.41	37.57
25	37.65	44.31
30	43.77	50.89

VÍ DỤ 3.44 Biểu đồ trên tập {0, 1, 2, …, 9} trong Hình 3.23 nhận được bằng việc lấy số cuối cùng của 114 số điện thoại trong một cột trong danh bạ điện thoại. Số liệu quan trắc có phù hợp với giả thuyết chúng có hàm xác suất rời rạc đều hay không?

Nếu các biến cố có phân phối đều, khi đó mỗi số có xác suất bằng 1/10. Giá trị kỳ vọng của số lần xảy ra mỗi biến cố trong 114 phép thử là 114/10 = 11,4. Khi đó thống kê khi-bình phương là:

$$D^2 = \frac{(17-11.4)^2}{11.4} + \frac{(16-11.4)^2}{11.4} + \ldots + \frac{(7-11.4)^2}{11.4}$$

$$= 9.51.$$

Số bậc tự do là K – 1 = 10 – 1 = 9, bởi vậy từ Bảng 3.5 ngưỡng với mức ý nghĩa 1% là 27.1. D^2 không vượt quá ngưỡng, do vậy chúng ta kết luận rằng số liệu phù hợp với biến ngẫu nhiên phân phối đều.

VÍ DỤ 3.45 Biểu đồ trong Hình 3.24 nhận được bởi việc tạo ra 1000 mẫu từ một chương trình được thiết kế để tạo ra biến ngẫu nhiên có phân phối mũ với tham số 1. Biểu đồ nhận được bởi việc chia nửa dương của đường thẳng thực thành 20 khoảng có cùng độ dài 0.2. Giá trị đúng được cho bởi Bảng 3.6. Biểu đồ thứ hai cũng được xây dựng khi sử dụng 20 khoảng có xác suất bằng nhau. Các số của biểu đồ này được cho bởi Bảng 3.7.

Từ Bảng 3.5 chúng ta tìm được ngưỡng với mức ý nghĩa 5% là 30.1. Các giá trị khi-bình phương cho các biểu đồ tương ứng là 14.2 và 11.6 một cách. Cả hai biểu đồ chuyển tiêu chuẩn phù hợp tốt vào trường hợp này, nhưng có vẻ như phương pháp chọn các khoảng ảnh hưởng đến giá trị của độ đo khi-bình phương.

Ví dụ 3.45 chỉ ra rằng có nhiều cách chọn các khoảng để phân hoạch và điều này có thể dẫn tới những kết quả khác nhau. Những qui tắc quan trọng sau được đề nghị: Thứ nhất, độ rộng có thể của các khoảng nên chọn sao cho chúng đồng xác suất. Thứ hai, các khoảng nên được chọn sao cho giá trị kỳ vọng của các kết cục trong mỗi khoảng lớn hơn hoặc bằng 5. Điều này hiệu chỉnh sự chính xác của xấp xỉ hàm phân phối của D^2 bởi hàm phân phối khi-bình phương.

Chúng ta có được lý luận trên do đã giả thiết rằng phân phối giả định được xác định hoàn toàn. Trong trường hợp điển hình, một hoặc hai tham số của phân phối, nghĩa là giá trị trung bình và phương sai, được ước lượng từ dữ liệu. Thường là nếu có r tham số của hàm phân phối được ước lượng từ dữ liệu, thì D^2 được xấp xỉ tốt hơn bởi phân phối khi-bình phương với $K - r - 1$ bậc tự do. Như vậy, mỗi một tham số được ước lượng làm giảm 1 bậc tự do.

BẢNG 3.6

Phép kiểm nghiệm khi-bình phương cho biến ngẫu nhiên mũ, Các khoảng độ dài bằng nhau.

Khoảng	**Giá trị quan trắc O**	**Giá trị kỳ vọng E**	**$(O – E)^2$ / E**
0	190	181.3	0.417484
1	144	148.4	0.130458
2	102	121.5	3.129629
3	96	99.5	0.123115
4	86	81.44	0.255324

5	67	66.7	0.001349
6	59	54.6	0.354578
7	43	44.7	0.064653
8	51	36.6	5.665573
9	28	30	0.133333
10	28	24.5	0.5
11	19	20.1	0.060199
12	15	16.4	0.119512
13	12	13.5	0.166666
14	11	11	0
15	7	9	0.444444
16	9	7.4	0.345945
17	5	6	0.166666
18	8	5	1.8
>19	20	22.4	0.257142
		Giá trị khi-bình phương =	14.13607

BẢNG 3.7

Phép kiểm nghiệm khi-bình phương cho biến ngẫu nhiên mũ. Các khoảng đồng xác suất.

Khoảng	**Quan trắc O**	**Kỳ vọng E**	**$(O - E)^2 / E$**
0	49	50	0.02
1	61	50	2.42
2	50	50	0
3	50	50	0
4	40	50	2
5	52	50	0.08
6	48	50	0.08
7	40	50	2
8	45	50	0.5
9	46	50	0.32
10	50	50	0
11	51	50	0.02
12	55	50	0.5
13	49	50	0.02
14	54	50	0.32
15	52	50	0.08
16	62	50	2.88
17	46	50	0.32
18	49	50	0.02
19	51	50	0.02
		Giá trị khi-bình phương =	11.6

VÍ DỤ 3.46 Biểu đồ trong Bảng 3.8 được thông báo bởi Rutherford, Chadwick, và Ellis trong một bài báo nổi tiếng xuất bản năm 1920. Số các hạt được phát ra bởi một chất phóng xạ trong chu kỳ thời gian 7.5 giây đã được đếm. Tổng số có 2608 chu kỳ được quan trắc. Giả định rằng số các hạt phát ra trong một chu kỳ thời gian là một biến ngẫu nhiên với phân phối Poisson. Hãy thực hiện phép kiểm nghiệm phù hợp tốt khi-bình phương.

Trong trường hợp này giá trị trung bình của phân phối khi-bình phương chưa biết, mà được ước lượng từ dữ liệu bằng 3.870. D^2 với 12 – 1 –1 = 10 bậc tự do là 12.94. Ngưỡng của mức ý nghĩa 1% là 23.2. D^2 không vượt quá giá trị này, bởi vậy chúng ta có thể kết luận rằng dữ liệu phù hợp tốt với phân phối Poisson.

BẢNG 3.8
Phép kiểm nghiệm khi-bình phương cho biến ngẫu nhiên Poisson

Số	**Quan trắc O**	**Kỳ vọng E**	**$(O – E)^2$ /E**
0	57.00	54.40	0.12
1	203.00	210.50	0.27
2	383.00	407.40	1.46
3	525.00	525.00	.00
4	532.00	508.40	1.10
5	408.00	393.50	0.53
6	273.00	253.80	1.45
7	139.00	140.30	0.01
8	45.00	67.80	7.67
9	27.00	29.20	0.17
10	10.00	11.30	0.15
>11	6.00	5.80	0.01
			12.94

Dựa theo H. Cramer, *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton University, Princeton, N. J., 1946, p. 436.

3.9 CÁC PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI

Ngày xửa ngày xưa trước khi có máy tính khi thực hiện nhiều phép nhân rất thuận lợi nếu có bảng logarit nếu công việc của bạn dính dáng đến phép nhân số lớn. Nếu bạn muốn nhân các số *x* và *y*, bạn tra log(*x*) và log(*y*), *cộng* log(*x*) và log(*y*), và khi đó tra ngược logarit để tìm kết quả. Bạn có thể nhớ lại từ trường phổ thông rằng phép nhân bằng tay là luôn chán và gặp nhiều sai sót hơn phép cộng. Do vậy bảng logarit rất hữu dụng như người giúp việc tính toán.

Các phương pháp biến đổi là công cụ hữu ích khi giải các phương trình vi phân và tích phân của các hàm số. Trong nhiều bài toán dạng này nghiệm được cho bởi tích chập của hai hàm: $f_1(x) \times f_2(x)$. Chúng ta sẽ định nghĩa tích chập ở phần sau. Bây giờ chúng ta cần phải biết rằng việc tìm tích chập của hai hàm có thể buồn tẻ và hay gặp sai sót hơn phép nhân bằng tay! Trong phần này chúng ta chỉ ra tích chập cách xa hàm $f_k(x)$ vào hàm $F_k(\omega)$ khác; và thỏa mãn tích chất $F[f_1(x) \times f_2(x)] = F_1(\omega)F_2(\omega)$. Nói cách khác, công thức biến đổi tích chập thành tích của hai công thức biến đổi riêng lẻ. Do vậy các công thức biến đổi cho phép chúng ta thay phép toán tích chập bởi phép toán nhân đơn giản hơn nhiều. Bạn có thể nói rằng "Điều đó không quan trọng! Tôi chỉ cần có máy tính tính tích chập cho tôi". Tuy nhiên trong nhiều bài toán, việc tính tích chập bằng các phương pháp biến đổi hiệu quả hơn tính tích chập trực tiếp.

Các biểu thức biến đổi được giới thiệu trong phần này sẽ tỏ ra rất hữu dụng khi xét tổng của các biến ngẫu nhiên trong Chương 5.

Hàm đặc trưng

Hàm đặc trưng của biến ngẫu nhiên X được xác định bởi

$$\Phi_X(\omega) = E[e^{j\omega X}] \tag{3.76a}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) e^{j\omega X} dx \tag{3.76b}$$

Ở đây $j = \sqrt{-1}$ là số đơn vị ảo. Hai biểu diễn ở vế phải là hai biểu diễn của hàm đặc trưng. Trong biểu thức thứ nhất, $\Phi_X(\omega)$ có thể được coi như là giá trị kỳ vọng của hàm của X, trong đó tham số ω là tùy ý. Trong biểu thức thứ hai, $\Phi_X(\omega)$ đơn giản là công thức biến đổi Fourier của hàm mật độ xác suất $f_X(x)$ (với sự nghịch đảo trong dấu của lũy thừa). Cả hai biểu diễn này đều tỏ ra có ích trong nhiều trường hợp khác nhau.

Nếu chúng ta coi $\Phi_X(\omega)$ là phép biến đổi Fourier, khi đó chúng ta có công thức biến đổi ngược Fourier của hàm mật độ xác suất của X được cho bởi:

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_X(\omega) e^{j\omega x} d\omega. \tag{3.77}$$

Như vậy, mọi hàm mật độ xác suất và hàm đặc trưng của nó tạo nên cặp biến đổi Fourier duy nhất. Bảng 3.2 cho hàm đặc trưng của một vài biến ngẫu nhiên liên tục.

VÍ DỤ 3.47
Biến Ngẫu nhiên Mũ

Hàm đặc trưng của biến ngẫu nhiên phân phối mũ với tham số λ được cho bởi:

$$\Phi_X(\omega) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} e^{j\omega x} dx = \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda - j\omega)x} dx$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda - j\omega}.$$

Nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc, thế từ Hệ thức (3.21) vào công thức định nghĩa của $\Phi_X(\omega)$ được

$$\Phi_X(\omega) = \sum_k p_X(x_k) e^{j\omega x_k} \qquad \text{(biến ngẫu nhiên rời rạc).}$$

Hầu hết các trường hợp chúng ta xét biến ngẫu nhiên lấy giá trị nguyên. Khi đó hàm đặc trưng có dạng:

$$\Phi_X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_X(k) e^{j\omega k} \qquad \text{(biến ngẫu nhiên giá trị nguyên).} \quad (3.78)$$

Hệ thức (3.78) là công thức biến đổi Fourier của dãy $p_X(k)$. Chú ý rằng công thức biến đổi Fourier trong Hệ thức (3.78) là hàm tuần hoàn của ω với chu kỳ 2π, do $e^{j(\omega + 2\pi)k} = e^{j\omega k} e^{jk2\pi}$ và $e^{jk2\pi} = 1$. Bởi vậy, hàm đặc trưng của biến ngẫu nhiên giá trị nguyên là hàm tuần hoàn của ω. Công thức biến đổi ngược sau cho phép chúng ta khôi phục các xác suất $p_X(k)$ từ $\Phi_X(\omega)$:

$$p_X(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi_X(\omega) e^{j\omega k} d\omega \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \qquad (3.79)$$

Thực vậy, so sánh các Hệ thức (3.78) và (3.79) cho thấy rằng $p_X(k)$ đơn giản là hệ số của chuỗi Fourier của hàm tuần hoàn $\Phi_X(\omega)$.

VÍ DỤ 3.48
Biến Ngẫu nhiên Hình học

Hàm đặc trưng của biến ngẫu nhiên hình học được cho bởi công thức:

$$\Phi_X(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} pq^k e^{j\omega k} = p\sum_{k=0}^{\infty} \left(qe^{j\omega}\right)^k$$

$$= \frac{p}{1 - qe^{j\omega}}.$$

Do $f_X(x)$ và $\Phi_X(\omega)$ tạo nên một cặp biến đổi, chúng ta hy vọng nhận được các mômen của X từ $\Phi_X(\omega)$. **Định lý mômen** phát biểu rằng các mômen của X được cho bởi:

$$E[X^n] = \frac{1}{j^n}\frac{d^n}{d\omega^n}\Phi_X(\omega)\bigg|_{\omega=0}. \tag{3.80}$$

Để chứng minh điều này, trước hết khai triển $e^{j\omega x}$ ra chuỗi lũy thừa trong công thức định nghĩa của $\Phi_X(\omega)$:

$$\Phi_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\left\{1 + j\omega X + \frac{(j\omega X)^2}{2!} + \ldots\right\}dx.$$

Giả thiết rằng tất cả các mômen của X là hữu hạn và chuỗi có thể lấy tích phân từng từ, chúng ta nhận được:

$$\Phi_X(\omega) = 1 + j\omega E[X] + \frac{(j\omega)^2 E[X^2]}{2!} + \ldots + \frac{(j\omega)^n E[X^n]}{n!} + \ldots.$$

Nếu chúng ta đạo hàm biểu thức một lần trên và tính tại ω = 0, chúng ta nhận được

$$\frac{d}{d\omega}\Phi_X(\omega)\bigg|_{\omega=0} = jE[X].$$

Nếu chúng ta đạo hàm n lần và tính tại ω = 0, chúng ta nhận được

$$\frac{d^n}{d\omega^n}\Phi_X(\omega)\bigg|_{\omega=0} = j^n E[X],$$

và từ đó thu được Hệ thức (3.80).

Chú ý rằng khi chuỗi lũy thừa trên hội tụ, hàm đặc trưng và do đó hàm mật độ xác suất được xác định bởi các mômen của X qua Hệ thức (3.77).

VÍ DỤ 3.49 Để tìm giá trị trung bình của biến ngẫu nhiên phân phối mũ, chúng ta lấy đạo hàm $\Phi_X(\omega) = \lambda(\lambda - j\omega)^{-1}$ một lần, và nhận được:

$$\Phi'_X(\omega) = \frac{\lambda j}{(\lambda - j\omega)^2}$$

Khi đó định lý mômen suy ra rằng $E[X] = \Phi'_X(0)/j = 1/\lambda$.

Nếu chúng ta lấy đạo hàm hai lần, chúng ta nhận được

$$\Phi''_X(\omega) = \frac{-2\lambda}{(\lambda - j\omega)^3},$$

do đó mômen cấp hai bằng $E[X^2] = \Phi''_X(0)/j^2 = 2/\lambda^2$. Khi đó phương sai của X được cho bởi:

$$VAR[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Hàm sinh xác suất

Trong nhiều bài toán mà ở đó biến ngẫu nhiên không âm, để thuận tiện hơn ta sử dụng phép biến đổi z hoặc phép biến đổi Laplace. **Hàm sinh xác suất** $G_N(z)$ của biến ngẫu nhiên giá trị nguyên không âm N được xác định bởi

$$G_N(z) = E[z^N] \tag{3.81a}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} p_N(k) z^k . \tag{3.81b}$$

Biểu diễn thứ nhất là giá trị kỳ vọng của hàm của N, tức z^N. Biểu diễn thứ hai là phép biến đổi z của hàm xác suất (với sự đổi dấu trong lũy thừa). Bảng 3.1 chỉ ra hàm sinh xác suất của một vài biến ngẫu nhiên rời rạc. Chú ý rằng hàm đặc trưng của N được cho bởi $\Phi_N(\omega) = G_N(e^{j\omega})$. Sử dụng phép lấy đạo hàm tương tự như trong định lý mômen, dễ dàng chứng tỏ rằng hàm xác suất của N được cho bởi:

$$p_N(k) = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dz^k} G_N(z)\bigg|_{z=0} . \tag{3.82}$$

Điều này giải thích vì sao $G_N(z)$ được gọi là hàm sinh xác suất. Bằng việc lấy hai đạo hàm đầu tiên của $G_N(z)$ và lấy giá trị tại $z = 1$, có thể tìm được hai momen đầu tiên của X:

$$\frac{d}{dz} G_N(z)\bigg|_{z=1} = \sum_{k=0}^{\infty} p_N(k) k z^{k-1}\bigg|_{z=1} = \sum_{k=0}^{\infty} k p_N(k) = E[N]$$

và

$$\frac{d^2}{dz^2} G_N(z)\bigg|_{z=1} = \sum_{k=0}^{\infty} p_N(k) k(k-1) z^{k-2}\bigg|_{z=1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) p_N(k) = E[N(N-1)] = E[N^2] - E[N].$$

Do vậy giá trị trung bình và phương sai của X được cho bởi:

$$E[N] = G'_N(1) \tag{3.83}$$

và

$$\text{VAR}[N] = G_N''(1) + G_N'(1) - (G_N'(1))^2. \qquad (3.84)$$

VÍ DỤ 3.50
Biến Ngẫu nhiên Poisson

Hàm sinh xác suất của biến ngẫu nhiên Poisson với tham số α được cho bởi

$$G_N(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha} z^k = e^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha z)^k}{k!}$$
$$= e^{-\alpha} e^{\alpha z} = e^{\alpha(z-1)}.$$

Hai đạo hàm đầu tiên của $G_N(z)$ được cho bởi

$$G_N'(z) = \alpha e^{\alpha(z-1)}$$

và

$$G_N''(z) = \alpha^2 e^{\alpha(z-1)}.$$

Do vậy giá trị kỳ vọng và phương sai của biến ngẫu nhiên Poison là:

$$\text{E}[N] = \alpha$$
$$\text{VAR}[N] = \alpha^2 + \alpha - \alpha^2 = \alpha.$$

Phép Biến đổi Laplace của Hàm Mật độ Xác suất

Trong hệ hàng đợi một phân phối về thời gian phục vụ, thời gian chờ và thời gian rỗi. Tất cả các biến ngẫu nhiên này là các biến ngẫu nhiên liên tục không âm. Do vậy theo tập quán, chúng ta làm việc với **phép biến đổi Laplace** của hàm mật độ xác suất

$$\text{X}^*(s) = \int_0^{\infty} f_X(x) e^{-sx} dx = \text{E}[e^{-s\text{X}}]. \qquad (3.85)$$

Chú ý rằng $\text{X}^*(s)$ có thể được coi như là biến đổi Laplace của hàm mật độ xác suất hoặc như là giá trị kỳ vọng của hàm X là $e^{-s\text{X}}$.

Định lý momen cũng đúng với $\text{X}^*(s)$:

$$\text{E}[\text{X}^n] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} X^*(s) \Big|_{s=0}. \qquad (3.86)$$

VÍ DỤ 3.51
Biến Ngẫu nhiên Gamma

Phép biến đổi Lalace của hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên Gamma được cho bởi

$$\text{X}^*(s) = \int_0^{\infty} \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} e^{-sx}}{\Gamma(\alpha)} dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-(\lambda+s)x}\, dx$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(\lambda+s)^\alpha} \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y}\, dy = \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda+s)^\alpha},$$

ở đây chúng ta sử dụng phép đổi biến $y = (\lambda + s)x$. Khi đó chúng ta có thể nhận được hai momen đầu tiên của X như sau:

$$E[X] = -\frac{d}{ds} \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda+s)^\alpha}\bigg|_{s=0} = \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+s)^{\alpha+1}}\bigg|_{s=0} = \frac{\alpha}{\lambda}$$

và

$$E[X^2] = \frac{d^2}{ds^2} \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda+s)^\alpha}\bigg|_{s=0} = \frac{\alpha(\alpha+1)\lambda^\alpha}{(\lambda+s)^{\alpha+2}}\bigg|_{s=0} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}.$$

Do vậy phương sai của X là:

$$VAR[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

*3.10 CÁC PHÉP TÍNH ĐỘ TIN CẬY CƠ BẢN

Trong phần này chúng ta sử dụng những công cụ đã được phát triển cho đến nay để tính các độ đo mà ta quan tâm trong việc đánh giá độ tin cậy của các hệ thống. Chúng ta cũng chứng tỏ rằng độ tin cậy của hệ thống có thể được xác định qua độ tin cậy của các thành phần của nó.

Hàm tốc độ hỏng

Giả sử T là thời gian sống của một thành phần, một hệ thống bộ phận, hoặc một hệ thống. **Độ tin cậy** tại thời điểm t được định nghĩa là xác suất để một thành phần, hệ thống một bộ phận, hoặc một hệ thống vẫn làm việc đến thời điểm t:

$$R(t) = P[T > t] \quad . \tag{3.87}$$

Sự thể hiện tần suất tương đối suy ra rằng, trong số lớn các thành phần hỏng hệ thống $R(t)$ là xác suất hỏng sau thời gian t. Độ tin cậy có thể được biểu diễn qua hàm phân phối của T:

$$R(t) = 1 - P[T \le t] = 1 - F_T(t). \tag{3.88}$$

Chú ý rằng đạo hàm của $R(t)$ cho dấu âm của hàm mật độ của T:

$$R'(t) = -f_T(t). \tag{3.89}$$

Thời gian trung bình bị hỏng (**mean time to failune** [**MTTF**]) được cho bởi giá trị kỳ vọng của T:

$$\mathrm{E}[T] = \int_0^\infty f_T(t)dt = \int_0^\infty R(t)\,dt,$$

ở đây biểu diễn thứ hai nhận được bởi việc dùng các Hệ thức (3.59) và (3.88).

Giả sử rằng, ta đã biết hệ vẫn làm việc đến thời điểm t; khi đó dáng điệu tương lai của nó là như thế nào? Trong Ví dụ 3.9, chúng ta tìm được hàm phân phối có điều kiện của $T > t$ được cho bởi

$$\begin{aligned} \mathrm{F_T}(x \mid T > t) &= \mathrm{P}[T \le x \mid T > t] \\ &= \begin{cases} 0 & x < t \\ \dfrac{\mathrm{F_T}(x) - \mathrm{F_T}(t)}{1 - \mathrm{F_T}(t)} & x \ge t. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.90}$$

Hàm mật độ xác suất liên quan với $\mathrm{F_T}(x \mid T > t)$ là :

$$f_\mathrm{T}(x \mid T > t) = \frac{f_\mathrm{T}(x)}{1 - \mathrm{F_T}(t)} \qquad x \ge t. \tag{3.91}$$

Chú ý rằng mẫu số của Hệ thức (3.91) bằng $R(t)$.

Hàm tốc độ hỏng $r(t)$ được định nghĩa là hàm $f_\mathrm{T}(x \mid T > t)$ tính tại $x = t$:

$$\begin{aligned} r(t) &= f_\mathrm{T}(x \mid T > t) \\ &= \frac{-R'(t)}{R(t)}, \end{aligned} \tag{3.92}$$

do Hệ thức (3.89), $R'(t) = -f_\mathrm{T}(t)$. Hàm tốc độ hỏng có ý nghĩa như sau:

$$\mathrm{P}[t < T = t + dt \mid T > t] = f_\mathrm{T}(t \mid T > t)dt = r(t)dt. \tag{3.93}$$

Diễn tả bằng lời thì $r(t)dt$ là xác suất để thành phần làm việc cho đến thời điểm t sẽ bị hỏng ở thời điểm dt giây tiếp theo.

VÍ DỤ 3.52
Luật Hỏng theo Phân phối Mũ

Giả sử rằng thành phần có hàm tốc độ hỏng bằng hằng số gọi là $r(t) = \lambda$. Hãy tìm hàm mật độ phân phối và thời gian hỏng trung bình (MTTF) của thời gian sống T.

Hệ thức (3.92) suy ra rằng :

$$\frac{R'(t)}{R(t)} = -\lambda. \tag{3.94}$$

Hệ thức (3.94) là phương trình vi phân bậc nhất với điều kiện ban đầu $R(0) = 1$. Nếu lấy tích phân cả hai vế của Hệ thức (3.94) từ 0 tới t, chúng ta nhận được:

$$-\int_0^t \lambda dt' + k = \int_0^t \frac{R'(t')}{R(t')}dt' = \ln R(t),$$

mà từ đó suy ra rằng

$$R(t) = Ke^{-\lambda t}, \quad \text{ở đây } K = e^{k}.$$

Từ điều kiện ban đầu $R(0) = 1$ suy ra rằng $K = 1$. Do vậy

$$R(t) = e^{-\lambda t} \qquad t > 0 \tag{3.95}$$

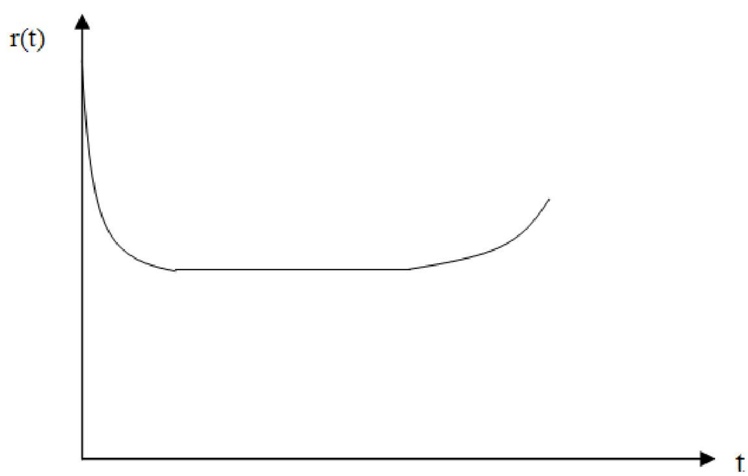
và

$$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t} \qquad t > 0.$$

Như vậy, nếu T có hàm tốc độ hỏng bằng hằng số, khi đó T là biến ngẫu nhiên mũ. Điều này không có gì bất ngờ, do biến ngẫu nhiên mũ thỏa mãn tính chất không nhớ. Vậy MTTF = E[T] = $1/\lambda$.

HÌNH 3.26

Hàm tốc độ hỏng cho hệ mẫu



Phép lấy đạo hàm đã được sử dụng trong Ví dụ 3.52 có thể dùng để chứng tỏ rằng, nói chung, hàm tốc độ hỏng và độ tin cậy liên hệ với nhau bởi

$$R(t) = \exp\left\{-\int_o^t r(t')dt'\right\} \tag{3.96}$$

Và từ Hệ thức (3.89)

$$f_T(t) = r(t)\exp\left\{-\int_o^t r(t')dt'\right\}. \tag{3.97}$$

Hình 3.26 chỉ ra hàm tốc độ hỏng của hệ mẫu điển hình. Ban đầu tốc độ hỏng cao bởi các phần bị khuyết tật hoặc sự lắp ráp. Sau khi “rệp” (lỗi) ngừng lại, hệ thống ổn định và có tốc độ hỏng thấp. Vào một thời điểm nào đó sau đó, do tuổi tác và hiệu quả hao mòn giảm dần, kết quả là tốc độ hỏng tăng lên. Các Hệ thức (3.96) và (3.97) cho phép chúng ta giả định các hàm độ tin cậy và hàm mật độ xác suất liên kết trong mối liên hệ với hàm tốc độ hỏng, như được chỉ ra trong ví dụ sau.

VÍ DỤ 3.53 Luật Hỏng Weibull

Luật hỏng Weibull có hàm tốc độ hỏng được cho bởi

$$r(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}, \qquad (3.98)$$

ở đây α và β là các hằng số dương. Hệ thức (3.96) suy ra rằng độ hội tụ được cho bởi

$$r(t) = e^{-\alpha t^{\beta}}.$$

Khi đó Hệ thức (3.97) suy ra hàm mật độ xác suất của T là:

$$f_T(t) = \alpha\beta t^{\beta-1} e^{-\alpha t^{\beta}} \qquad t > 0. \qquad (3.99)$$

Hình 3.27 biểu diễn hàm $f_T(t)$ với $\alpha = 1$ và một vài giá trị của β. Chú ý rằng $\beta = 1$ nhận được luật hỏng mũ, mà với nó có tốc độ hỏng hằng số. Với $\beta > 1$, Hệ thức (3.98) cho hàm tốc độ hỏng tăng theo thời gian. Với $\beta < 1$, Hệ thức (3.98) cho hàm tốc độ hỏng giảm theo thời gian. Sau đây các tính chất của Weibull được phát triển trong các bài tập.

Sự Liên hệ Tương quan của Hệ Thống

Giả sử rằng hệ thống bao gồm một vài thành phần hay hệ thống bộ phận. Bây giờ chúng ta chứng tỏ rằng độ tin cậy của hệ thống có thể được tính qua độ tin cậy của các hệ thống bộ phận, nếu giả định các thành phần bị hỏng một cách độc lập với nhau.

Trước hết chúng ta xét hệ thống bao gồm n thành phần như được chỉ ra trong Hình 3.28(a). Hệ thống này làm việc nếu và chỉ nếu tất cả các thành phần đều làm việc. Giả sử A_s là biến cố "hệ thống làm việc đến thời điểm t", và giả sử A_j là biến cố các "thành phần thứ j làm việc đến thời điểm t", khi đó xác suất để hệ làm việc đến thời điểm t là:

$$\begin{aligned} R(t) &= P[A_s] \\ &= P[A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n] = P[A_1]\, P[A_2] \ldots P[A_n] \\ &= R_1(t)\, R_2(t) \ldots R_n(t), \end{aligned} \qquad (3.100)$$

Do $P[A_j] = R_j(t)$, hàm độ tin cậy của thành phần thứ j. Do các xác suất là các số nhỏ hơn hoặc bằng 1, chúng ta nhận thấy rằng $R(t)$ không thể lớn hơn độ tin cậy của thành phần có sự ổn định nhỏ nhất, nghĩa là, $R(t) \le \min_j R_j(t)$.

Nếu chúng ta áp dụng Hệ thức (3.96) với mỗi $R_j(t)$ trong Hệ thức (3.100), khi đó chúng ta tìm được hàm tốc độ hỏng của hệ thống được cho bởi tổng của các hàm tốc độ hỏng thành phần:

$$R(t) = e^{-\int_0^t r_1(t')dt'} \; e^{-\int_0^t r_2(t')dt'} \ldots e^{-\int_0^t r_n(t')dt'}$$

$$= e^{-\int_0^t [r_1(t') + r_2(t') + K + r_n(t')]dt'}.$$

VÍ DỤ 3.54 Giả sử rằng hệ thống bao gồm *n* thành phần được mắc nối tiếp và thời gian sống của các thành phần là các biến cố mũ với tốc độ λ_1, λ_1, …, λ_n. Hãy tìm độ tin cậy (tức mức ổn định) của hệ thống.

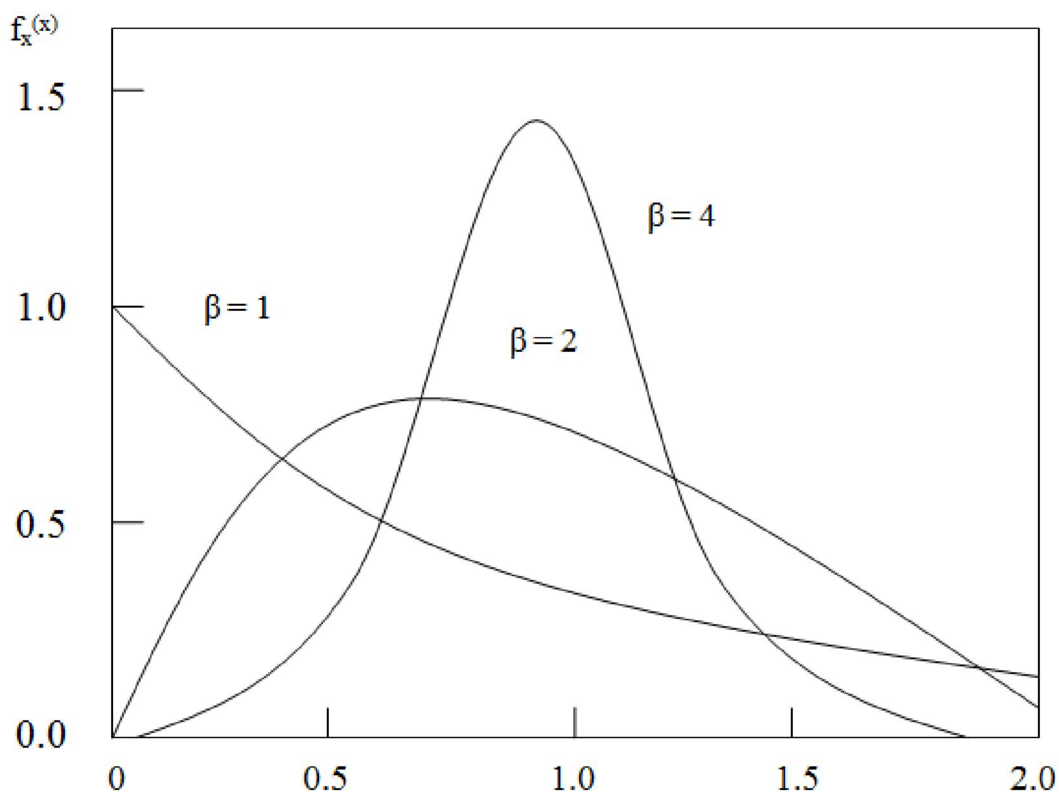
Từ các Hệ thức (3.95) và (3.100), chúng ta có :

$$R(t) = e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} \ldots e^{-\lambda_n t}$$

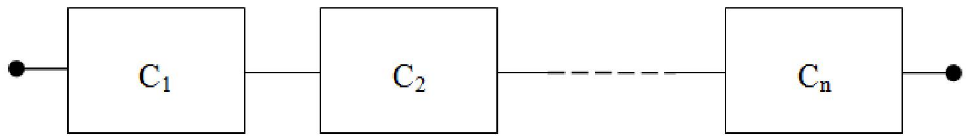
$$= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)t}.$$

Như vậy độ tin cậy của hệ thống là biến ngẫu nhiên có phân phối mũ với tốc độ $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

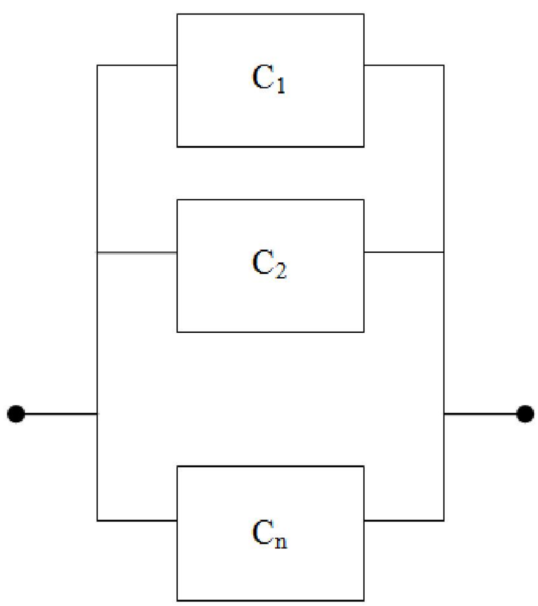
HÌNH 3.27
Hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên Weibull, $\alpha = 1$ và $\beta = 1, 2, 4$



HÌNH 3.28(a)
Hệ thống bao gồm n thành phần mắc nối tiếp



HÌNH 3.28(b)
Hệ thống bao gồm n thành phần mắc song song



Bây giờ chúng ta giả sử rằng hệ thống bao gồm *n* thành phần mắc song song, như được chỉ ra trong Hình 3.28(b). Hệ thống này làm việc cho đến khi có ít nhất một thành phần làm việc. Hệ thống không làm việc nếu và chỉ nếu tất cả các thành phần đều hỏng, nghĩa là

$$P[A_s^c] = P[A_1^c]\,P[A_2^c] \ldots P[A_n^c].$$

Như thế

$$1 - R(t) = (1 - R_1(t))(1 - R_2(t)) \ldots (1 - R_n(t))$$

và cuối cùng,

$$R(t) = 1 - (1 - R_1(t))\,(1 - R_2(t)) \ldots (1 - R_n(t)) \qquad (3.101)$$

VÍ DỤ 3.55 So sánh sự ổn định (độ tin cậy) của hệ thống một đơn vị mắc song song, giả sử tất cả các đơn vị của thời gian sống tuần hoàn theo luật mũ với tốc độ 1.

Sự ổn định của hệ một đơn vị là

$R_s(t) = e^{-t}$.

Sự ổn định của hệ hai đơn vị là

$$R_p(t) = 1 - (1 - e^{-t})(1 - e^{-t})$$
$$= e^{-t}(2 - e^{-t}).$$

Hệ thống mắc song song ổn định hơn, bởi vì

$(2 - e^{-t}) > 1$.

Những cấu trúc phức tạp hơn có thể nhận được bởi việc kết hợp các bộ phận chứa các thành phần mắc song song và mắc nối tiếp. Sự ổn định của các hệ thống như vậy có thể được tính qua sự ổn định của các bộ phận. Xem Ví dụ 3.32 như là một ví dụ về cách tính như vậy.

*3.11 CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH CÁC BIẾN GIẢ NGẪU NHIÊN

Sự mô phỏng tính toán của sự kiện ngẫu nhiên bất kỳ kéo theo sự sinh ra biến ngẫu nhiên với phân phối định trước. Ví dụ sự mô phỏng một hệ hàng đợi sinh ra biến ngẫu nhiên về thời gian giữa các lần đến của khách hàng cũng như thời gian phục vụ mỗi một khách hàng. Một khi hàm phân phối của dạng đại lượng ngẫu nhiên này được chọn, thì thuật toán tạo ra biến ngẫu nhiên có hàm phân phối đã cho cần phải được tìm ra. Trong phần này chúng tôi trình bày một số các phương pháp tạo ra biến ngẫu nhiên. Tất cả các phương pháp này được đặt trên phép điều trung các số ngẫu nhiên có phân phối đều giữa 0 và 1. Các phương pháp tạo ra các số này đã được xét trong Phần 2.7. Phụ lục C chứa chương trình thực hiện một số phương pháp được trình bày trong phần này.

Phương pháp biến đổi

Giả sử rằng U có phân phối đều trong khoảng [0, 1]. Giả sử $F_X(x)$ là hàm phân phối của biến ngẫu nhiên mà chúng ta muốn tạo ra. Hãy xác định biến ngẫu nhiên $Z = F_X^{-1}(U)$, nghĩa là trước tiên U được chọn và sau đó Z tìm được như đã chỉ ra trong Hình 3.29. Hàm phân phối của Z là:

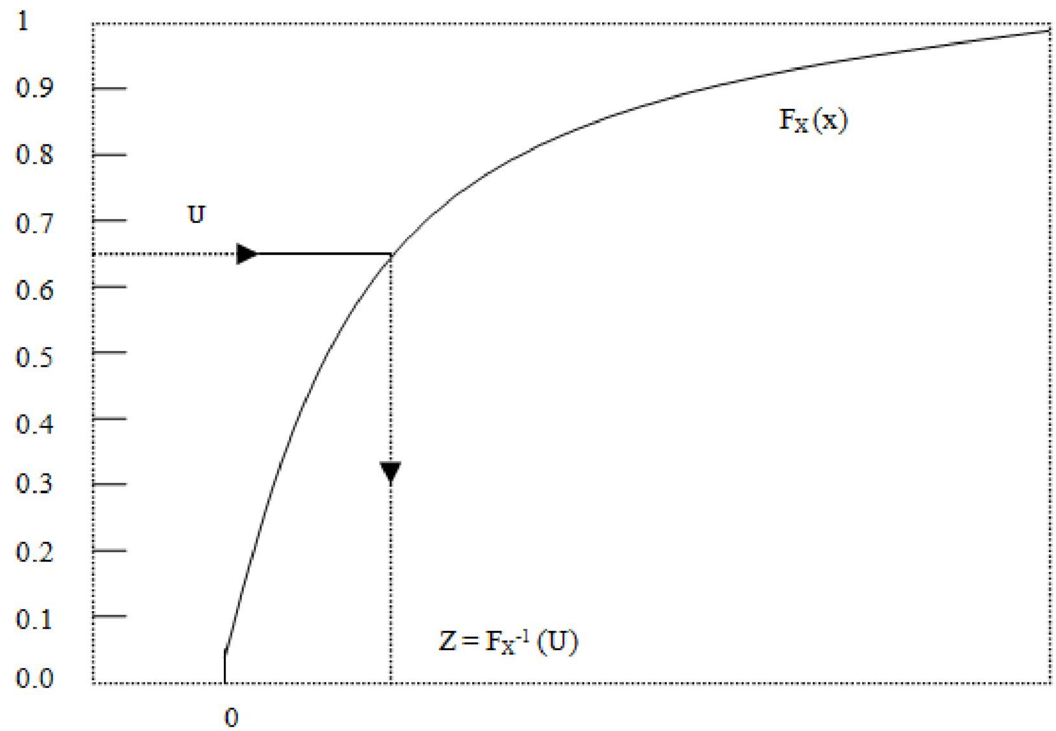
$$P[Z \le x] = P[F_X^{-1}(U) \le x] = P[U \le F_X(x)].$$

Nhưng nếu U có phân phối đều trên [0, 1] và $0 \le h \le 1$, khi đó $P[U \le h] = h$ (xem Ví dụ 3.7). Do đó

$$P[Z \le x] = F_X(x)$$

và $Z = F_X^{-1}(U)$ có hàm phân phối như mong muốn.

HÌNH 3.29
Phương pháp biến đổi tạo ra biến ngẫu nhiên với hàm phân phối $f_X(x)$



PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TẠO RA X:

1. Tạo ra U có phân phối đều trong khoảng [0, 1].
2. Đặt $Z = F_X^{-1}(U)$.

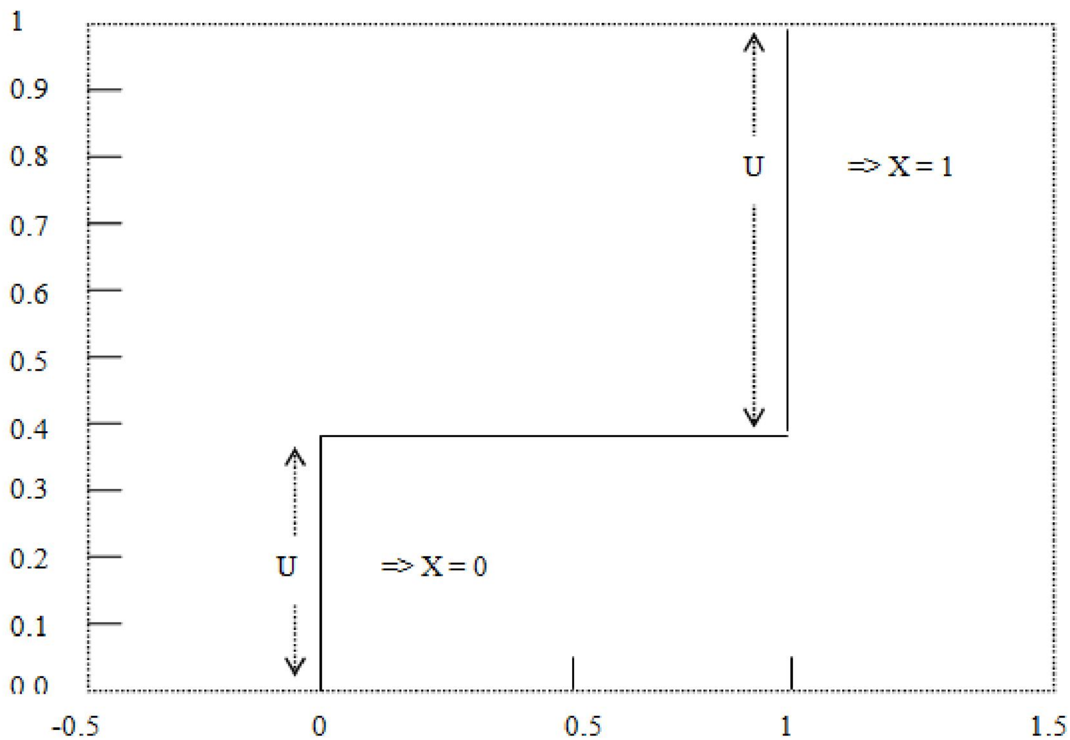
VÍ DỤ 3.56
Biến Ngẫu nhiên Mũ

Để tạo ra biến ngẫu nhiên có phân phối mũ X với tham số λ, chúng ta cần phải tìm nghịch đảo biểu thức $u = F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$. Chúng ta nhận được

$$X = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - U).$$

Chú ý rằng chúng ta có thể dùng biểu diễn đơn giản hơn X = – ln(U)/λ, do 1 – U cũng có phân phối đều trên [0, 1]. Các số ngẫu nhiên được kiểm tra trong Ví dụ 3.45 đã được tạo ra khi dùng phương pháp này.

HÌNH 3.30
Sự tạo ra biến ngẫu nhiên Bernoulli



VÍ DỤ 3.57
Biến Ngẫu nhiên Bernoulli

Để tạo ra biến ngẫu nhiên với xác suất thành công *p*, chúng ta chú ý từ Hình 3.30 rằng

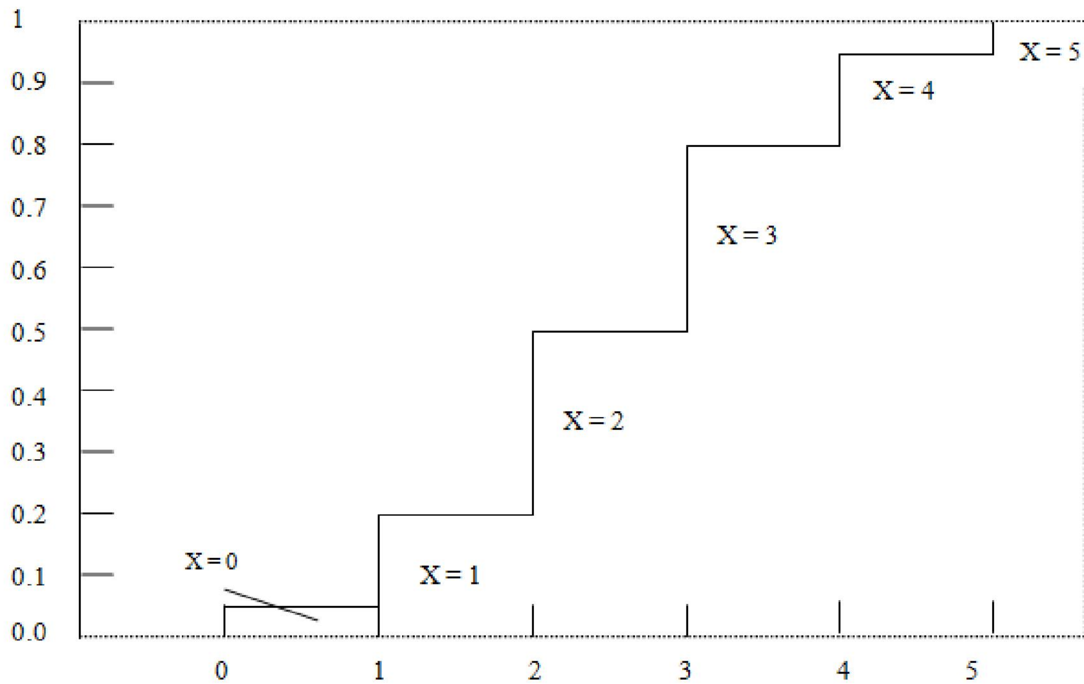
$$X = \begin{cases} 0 & \text{nếu } U \le p \\ 1 & \text{nếu } U > p. \end{cases}$$

Nói cách khác chúng ta phân hoạch đọan [0, 1] thành hai phân có độ dài p và $1 - p$ một cách tương ứng. Kết cục X được xác định bởi khoảng mà U rơi vào.

VÍ DỤ 3.58
Biến Ngẫu nhiên Nhị thức

Để tạo ra biến ngẫu nhiên nhị thức Y với tham số $n = 5$ và $p = 1/2$, chúng ta đơn giản có thể tạo ra 5 biến ngẫu nhiên Bernoulli và lấy Y là tổng số thành công. Chúng ta cũng có thể sử dụng phương pháp biến đổi một cách trực tiếp, như được chỉ ra trong Hình 3.31. Bây giờ khoảng đơn vị được phân thành 6 phần. Hiệu quả của thuật toán phụ thuộc vào việc chọn các khoảng để xác định U thuộc vào nó. Ví dụ, nếu chúng ta chọn các khoảng có thứ tự từ 0 đến 5, số trung bình của sự so sánh là 3.5. Nếu chúng ta chọn các khoảng theo thứ tự giảm của xác suất, số trung bình của sự so sánh giảm xuống còn 2.38 (Xem Bài tập 115)

HÌNH 3.31
Sự sinh ra biến ngẫu nhiên nhị thức với $n = 5$, $p = 1/2$



Rõ ràng rằng biến ngẫu nhiên rời rạc hữu hạn bất kỳ có thể được tạo ra bởi việc chia khoảng đơn vị thành các khoảng con có độ dài được xác định theo hàm xác suất.

Phương pháp tiếp theo dựa trên hàm mật độ hơn là hàm phân phối của *Z*.

Phương pháp loại trừ

Trước hết chúng ta xét trường hợp đơn giản của thuật toán này và giải thích nó hoạt động như thế nào; rồi chúng ta trình bày dưới dạng tổng quát. Giả sử chúng ta quan tâm đến việc tạo ra biến ngẫu nhiên *Z* với hàm mật độ $F_X(x)$ như được chỉ ra ở trong Hình 3.32. Trong thực tế chúng ta thấy rằng: (1) hàm mật độ xác suất khác 0 chỉ trong khoảng $[0, a]$, và (2) hàm mật độ xác suất lấy giá trị trong khoảng $[0, b]$. **Phương pháp loại trừ** trong trường hợp này làm việc như sau:

1. Tạo ra X_1 có phân phối đều trong khoảng $[0, a]$.
2. Tạo ra Y có phân phối đều trong khoảng $[0, b]$.
3. Nếu $Y \le f_X(X_1)$, khi đó đầu ra $Z = X_1$; nếu khác, loại X_1 và quay lại bước 1.

Chú ý rằng thuật toán này sẽ thực hiện một số ngẫu nhiên bước trước khi nó tạo ra biến ngẫu nhiên Z.

Bây giờ chúng ta chứng minh rằng biến ngẫu nhiên *Z* có hàm mật độ như mong muốn. Bước 1 và bước 2 chọn một điểm một cách ngẫu nhiên trong hình chữ nhật có chiều rộng là *a* và chiều cao là *b*. Xác suất để chọn một điểm trong miền bất kỳ bằng diện tích của miền đó chia cho tổng diện tích của hình chữ nhật, là *ab*. Như vậy xác suất chấp nhận X_1 bằng xác suất thuộc vào miền nằm dưới $f_X(x)$, bằng diện tích của miền nằm dưới $f_X(x)$ chia cho *ab*. Nhưng diện tích dưới hàm mật độ bất kỳ bằng 1, do vậy chúng ta kết luận rằng xác suất thành công (tức là, chấp nhận) bằng 1/*ab*. Bây giờ chúng ta xét xác suất sau:

$$P[x < X_1 < x + dx \mid X_1 \text{ được chấp nhận}]$$

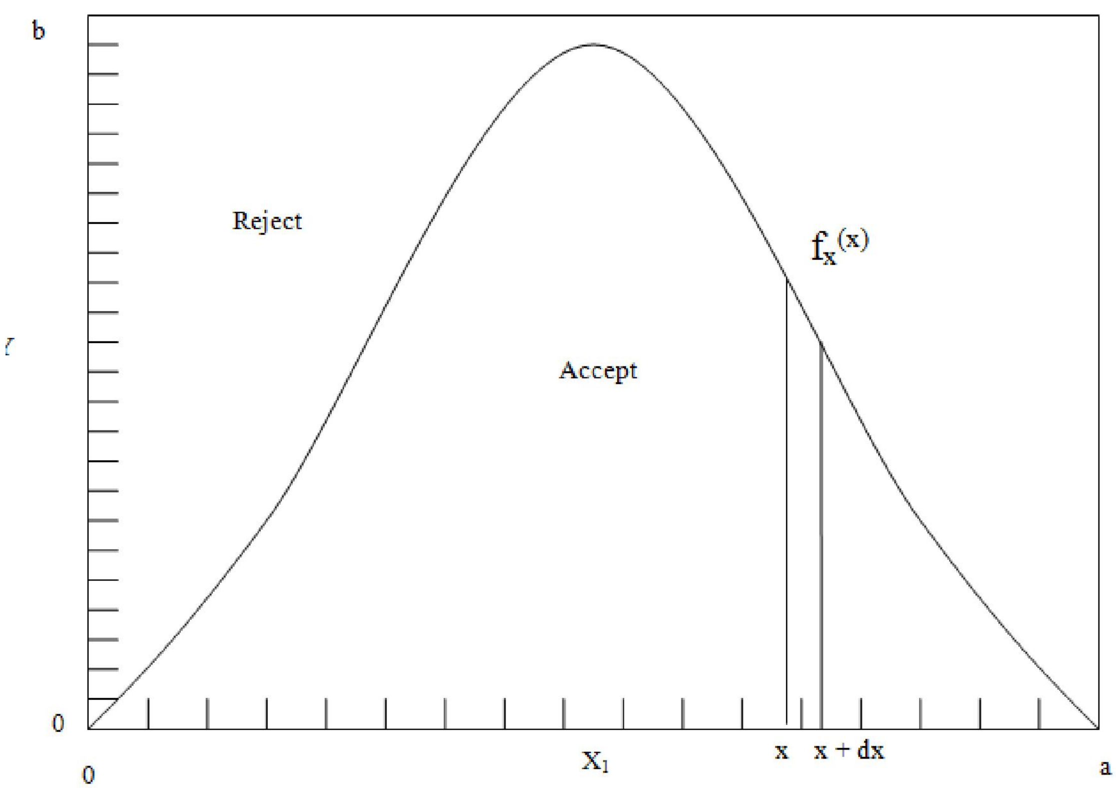
$$= \frac{P[\{x < X_1 < x + dx\} \cap \{X_1 \text{ được chấp nhận}\}]}{P[X_1 \text{ được chấp nhận}]}$$

$$= \frac{\text{diện tích miền được khoanh} / ab}{1/ab} = \frac{f_X(x)\, dx / ab}{1/ab}$$

$$= f_X(x).$$

HÌNH 3.32

Phương pháp loại trừ để sinh ra biến ngẫu nhiên với hàm mật độ $f_X(x)$



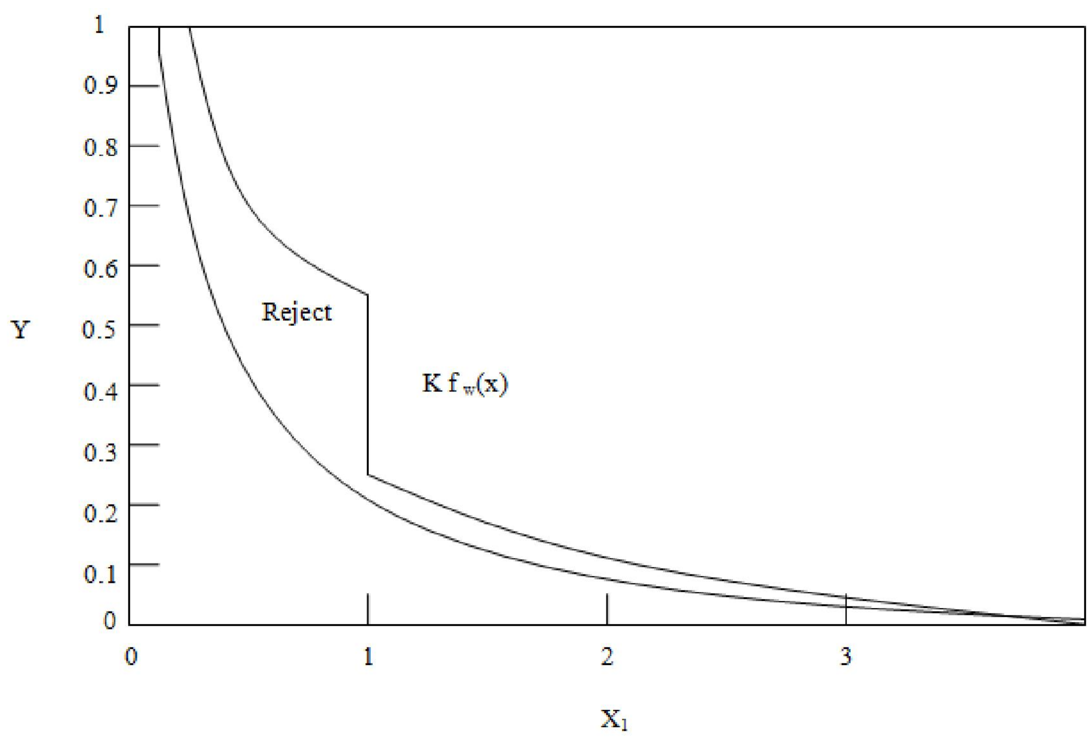
Khi đó X_1 được chấp nhận có hàm mật độ như mong muốn. Do vậy Z có hàm mật độ như mong muốn.

Thuật toán được phát biểu ở trên vấp phải hai vấn đề. Thứ nhất, nếu hình chữ nhật không phù hợp các khoảng riêng của $f_X(x)$, số các giá trị của X_1 cần phải được sinh ra trước khi sự chấp nhận vượt quá mức. Thứ hai, phương pháp trên không thể sử dụng được nếu $f_X(x)$ không bị chặn hoặc nếu miền biến thiên của nó là không hữu hạn. Dạng tổng quát của thuật toán này vượt qua cả hai vấn đề này. Giả sử chúng ta muốn sinh ra biến ngẫu nhiên Z với hàm mật độ phân phối $f_X(\mathrm{x})$. Gọi W là biến ngẫu nhiên với hàm mật độ xác suất $f_W(x)$ mà với nó dễ dàng tạo ra và tìm được hằng số $k > 1$ sao cho:

$$Kf_W(x) \geq f_X(x) \quad \text{với mọi } x,$$

nghĩa là miền dưới $Kf_W(x)$ chứa $f_X(x)$ như được chỉ ra trong Hình 3.33.

HÌNH 3.33
Phương pháp loại trừ khi sinh ra biến ngẫu nhiên với hàm mật độ gamma với $0 < \alpha < 1$.



PHƯƠNG PHÁP LOẠI TRỪ ĐỂ TẠO RA X:

1. Tạo ra X_1 với hàm mật độ xác suất $f_W(x)$. Định nghĩa $B(X_1) = Kf_W(x)$.
2. Tạo ra Y có phân phối đều trong $[0, B(X_1)]$.

3. Nếu $Y \le f_X(X_1)$ thì lấy $Z = X_1$; nếu không, loại X_1 và quay lại bước 1.

Xem bài tập 120 về phép chứng minh Z có hàm mật độ xác suất như mong muốn.

VÍ DỤ 3.59
Biến Ngẫu nhiên Gamma

Bây giờ chúng ta chỉ ra cách sử dụng phương pháp loại trừ để tạo ra X có hàm mật độ xác suất Gamma với tham số $0 < \alpha < 1$ và $\lambda = 1$. Hàm $Kf_W(x)$ "che phủ" $f_X(x)$ dễ dàng nhận được bằng cách sau (xem Hình 3.33):

$$f_X(x) = \frac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{\Gamma(\alpha)} \le Kf_W(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{e^{-x}}{\Gamma(\alpha)} & x > 1. \end{cases}$$

Hàm mật độ xác suất $f_W(x)$ tương ứng với hàm ở vế phải là:

$$f_W(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha e x^{\alpha-1}}{\alpha + e} & 0 \le x \le 1 \\ \alpha e \dfrac{e^{-x}}{\alpha + e} & x > 1. \end{cases}$$

Hàm phân phối của W là:

$$F_W(x) = \begin{cases} \dfrac{e x^{\alpha}}{\alpha + e} & 0 \le x \le 1 \\ 1 - \alpha e \dfrac{e^{-x}}{\alpha + e} & x > 1. \end{cases}$$

Khi đó dễ dàng sinh ra W bằng việc sử dụng phương pháp biến đổi, với:

$$F_W^{-1}(x) = \begin{cases} \left[\dfrac{(\alpha + e)u}{e}\right]^{1/\alpha} & u \le e/(\alpha + e) \\ -\ln\left[(\alpha + e)\dfrac{1-u}{\alpha e}\right] & u > e/(\alpha + e). \end{cases}$$

Do vậy chúng ta có thể dùng phương pháp biến đổi để tạo ra $f_W(x)$, và khi đó phương pháp loại trừ sinh ra biến ngẫu nhiên Gamma bất kỳ X với các tham số $0 < \alpha < 1$ và $\lambda = 1$. Cuối cùng chúng ta chú ý rằng, nếu đặt $W = \lambda X$, khi đó W sẽ là biến ngẫu nhiên Gamma với các tham số α và λ. Sự sinh ra các biến ngẫu nhiên Gamma với $\alpha > 1$ được xét trong Bài tập 119.

Phép Sinh ra các Hàm của Biến Ngẫu nhiên

Một khi chúng ta có phương pháp đơn giản để sinh ra biến ngẫu nhiên X, chúng ta có thể dễ dàng sinh ra biến ngẫu nhiên bất kỳ được xác định bởi $Y = g(X)$ hoặc thậm chí $Z = h(X_1, X_2, ..., X_n)$, ở đây $X_1, X_2, ... X_n$ là *n* đầu ra của phép sinh biến ngẫu nhiên .

VÍ DỤ 3.60
Biến Ngẫu nhiên Gauss

Trong Phần 4.9 chúng ta chứng tỏ rằng, nếu U_1 và U_2 là các biến ngẫu nhiên độc lập và phân phối đều trên khoảng đơn vị, khi đó

$$X = (-2\ln(U_1))^{1/2}\cos(2\pi U_2),$$

và

$$Y = (-2\ln(U_1))^{1/2}\sin(2\pi U_2)$$

là các biến ngẫu nhiên độc lập với trung bình 0 và phương sai 1. Do đó kết quả này có thể được dùng để tạo ra hai biến ngẫu nhiên Gauss từ hai biến ngẫu nhiên phân phối đều.

VÍ DỤ 3.61
Biến Ngẫu nhiên *m*-Erlang

Giả sử $X_1, X_2, \ldots$ là các biến ngẫu nhiên mũ độc lập với tham số λ. Trong Chương 5 chúng ta chứng minh rằng biến ngẫu nhiên

$$Y = X_1 + X_1 + \ldots + X_m$$

có hàm mật độ xác suất *m*-Erlang với tham số λ. Do vậy chúng ta có thể tạo ra biến ngẫu nhiên *m*-Erlang bằng việc trước hết tạo ra *m* biến ngẫu nhiên mũ khi sử dụng phương pháp biến đổi, và sau đó lấy tổng các biến ngẫu nhiên này. Do biến ngẫu nhiên *m*-Erlang là trường hợp riêng của biến ngẫu nhiên Gamma, với *m* lớn sử dụng phương pháp loại trừ phù hợp hơn, phương pháp được mô tả trong Bài tập 119.

Phép Sinh ra Biến Ngẫu nhiên Hỗn hợp

Chúng ta đã nhận thấy trong các phần trước rằng có một số biến ngẫu nhiên bao gồm hỗn hợp một vài biến ngẫu nhiên. Nói cách khác, phép sinh ra biến ngẫu nhiên có thể coi như việc trước tiên chọn dạng biến ngẫu nhiên từ một vài dạng hàm mật độ xác suất và sau đó tạo ra biến ngẫu nhiên từ dạng hàm mật độ xác suất được chọn. Cách làm này có thể được dễ dàng mô phỏng.

VÍ DỤ 3.62
Biến Ngẫu nhiên Siêu Mũ

Biến ngẫu nhiên siêu mũ 2 bậc có hàm mật độ xác suất

$$F_X(x) = pae^{-ax} + (1-p)be^{-bx}.$$

Dễ dàng thấy rằng biến ngẫu nhiên X ở trên gồm hỗn hợp hai biến ngẫu nhiên với các tham số tương ứng *a* và *b*. X có thể được tạo ra bởi việc thực hiện phép thử Bernoulli với xác suất thành công *p*. Nếu kết cục là thành công khi đó chúng ta sử dụng phương pháp biến đổi để sinh ra biến ngẫu nhiên mũ với tham số *a*. Nếu kết cục là không thành công, thay vào đó chúng ta tạo ra biến ngẫu nhiên mũ với tham số *b*.

Phụ lục C chứa chương trình sinh ra các biến ngẫu nhiên được xét trong phần này.

*3.12 ENTROPY

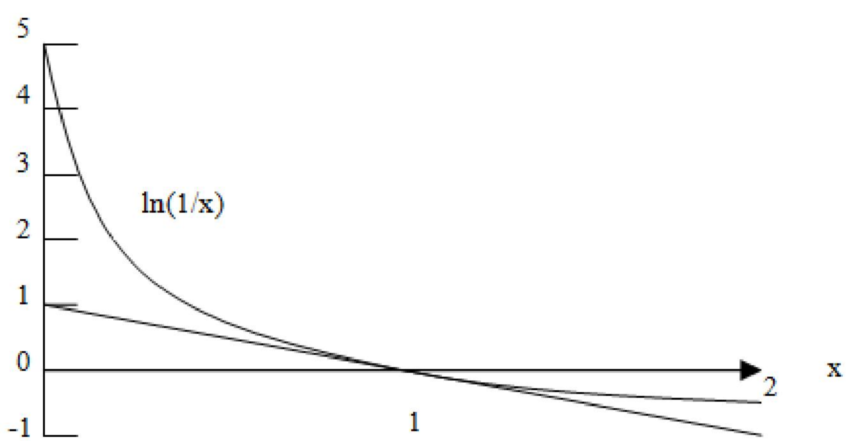
Entropy là độ đo sự bất định trong phép thử ngẫu nhiên. Trong phần này, trước tiên chúng ta giới thiệu khái niệm entropy của một biến ngẫu nhiên và phát triển một vài tính chất cơ bản của nó. Chúng ta sẽ chứng minh rằng entropy xác định độ bất định qua lượng thông tin cần thiết để mô tả kết cục của thí nghiệm ngẫu nhiên. Cuối cùng chúng ta sẽ thảo luận entropy cực đại, một phương pháp có ứng dụng rộng rãi trong việc mô tả các biến ngẫu nhiên, khi chỉ biết một vài tham số của nó như một giá trị trung bình và phương sai.

Entropy của biến ngẫu nhiên

Giả sử X là biến ngẫu nhiên rời rạc với $S_X = \{1, 2, \ldots, K\}$ và hàm xác suất $p_k = P[X = k]$. chúng ta quan tâm đến việc xác suất độ bất định của biến cố, $A_k = \{X = k\}$. Rõ ràng rằng độ bất định của A_k là thấp nếu xác suất của A_k gần bằng 1, và độ bất định là cao nếu xác suất của A_k là nhỏ. Độ đo sau của độ bất định thỏa mãn hai tính chất sau:

$$I(X = k) = \ln\frac{1}{P[X = k]} = -\ln P[X = k]. \qquad (3.102)$$

HÌNH 3.34
ln(1/x) ≥ 1 – x



Chú ý từ Hình 3.34 rằng $I(X = k) = 0$ nếu $P[X = k] = 1$ và $I(X = k)$ tăng khi $P[X = k]$ giảm. **Entropy của biến ngẫu nhiên X** được xác định như là giá trị kỳ vọng của độ bất định của các kết cục của nó:

$$H_X = E[I(X)] = \sum_{k=1}^{K} P[X = k]\ln\frac{1}{P[X = k]}$$

$$= -\sum_{k=1}^{K} P[X = k]\ln P[X = k]. \qquad (3.103)$$

Chú ý rằng trong định nghĩa trên chúng ta sử dụng $I(X)$ như là hàm của biến ngẫu nhiên. Chúng ta nói rằng entropy tính theo đơn vị "bit" khi logarit có cơ số 2. Trong biểu thức sau chúng ta dùng logarit tự nhiên, khi đó chúng ta nói rằng đơn vị là "nat". Đổi cơ số của entropy với một hằng số do $\ln(x) = \ln 2 \log_2 x$.

VÍ DỤ 3.63
Entropy của Biến Ngẫu nhiên Nhị phân

Giả sử rằng $S_X = \{0, 1\}$ và $p = P[X = 0] = 1 - P[X - 1]$. Hình 3.35 chỉ ra rằng $-p \ln(p) - (1 - p)\ln(1 - p)$, và entropy của biến ngẫu nhiên nhị phân $H_X = h(p) = -p \ln(p) - (1 - p)\ln(1 - p)$ như là hàm của p. Chú ý rằng $h(p)$ đối xứng qua $p = 1/2$ và nó đạt giá trị cực đại tại $p = 1/2$. Chúng ta cũng chú ý rằng độ bất định của các biến cố $\{X = 0\}$ và $\{X = 1\}$ biến đổi đồng thời trong các dạng bù: Khi $P[X = 0]$ là rất nhỏ (tức là độ bất định cao), thì $P[X = 1]$ gần bằng 1 (tức là độ chắc chắn cao), và ngược lại. Như vậy độ bất định trung bình lớn nhất xảy ra khi $P[X = 0] = P[X = 1] = 1/2$.

H_X có thể coi là độ bất định trung bình được quyết định bởi quan trắc X. Điều này gợi ý rằng nếu chúng ta thiết kế thí nghiệm nhị phân (Ví dụ, câu hỏi yes/no), khi đó độ bất định trung bình được quyết định sẽ đạt giá trị lớn nhất nếu các kết cục được thiết kế đồng xác suất.

VÍ DỤ 3.64
Độ Giảm Entropy qua Thông tin Riêng

Biểu diễn nhị phân của biến ngẫu nhiên X lấy giá trị từ tập {000, 001, ..., 111} với các xác suất bằng nhau. Hãy tìm độ giảm entropy của X khi đã biết biến cố A = {X bắt đầu bằng số 1} đã xảy ra.

Entropy của X là:

$$H_X = -\frac{1}{8}\log_2\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\log_2\frac{1}{8} - \ldots - \frac{1}{8}\log_2\frac{1}{8} = 3 \text{ bit}.$$

Từ việc biến cố A đã xảy ra suy ra rằng X nhân giá trị từ tập {100, 101, 110, 111}, khi đó entropy của X khi biết A xảy ra là:

$$H_{X|A} = -\frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4} \ldots - \frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4} = 2 \text{ bit}.$$

Như vậy độ giảm entropy là $H_X - H_{X/A} = 3 - 2 = 1$ bit.

Giả sử $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_k)$ và $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_k)$ là hai hàm xác suất. Entropy tương đối của $\boldsymbol{q}$ với $\boldsymbol{p}$ được xác định bởi:

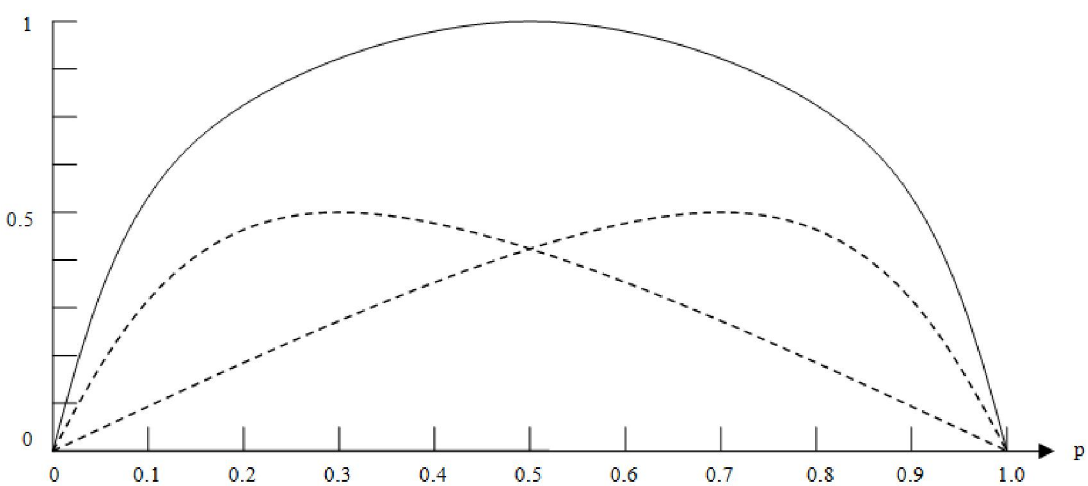
$$\mathrm{H}(p; q) = \sum_{k=1}^{K} p_k \ln\frac{1}{q_k} - H_X = \sum_{k=1}^{K} p_k \ln\frac{p_k}{q_k}. \tag{3.104}$$

Entropy tương đối là không âm, và bằng 0 nếu và chỉ nếu $p_k = q_k$ với mọi k:

$$H(p; q) \geq 0, \quad \text{có đẳng thức nếu và chỉ nếu} \quad p_k = q_k \text{ với mọi } k = 1, \ldots, K. \tag{3.105}$$

Chúng ta sẽ dùng kết quả này trong phần sau của mục này.

HÌNH 3.35
Entropy của biến ngẫu nhiên



Để chứng minh entropy tương đối không âm, chúng ta dùng bất đẳng thức $\ln(1/x) \geq 1 - x$, đạt đẳng thức nếu và chỉ nếu $x = 1$, như được chỉ ra trong Hình 3.34. Khi đó Hệ thức (3.34) trở thành:

$$\mathrm{H}(p; q) = \sum_{k=1}^{K} p_k \ln\frac{p_k}{q_k} \geq \sum_{k=1}^{K} p_k\left(1 - \frac{q_k}{p_k}\right) = \sum_{k=1}^{K} p_k - \sum_{k=1}^{K} q_k = 0. \tag{3.106}$$

Để xảy ra đẳng thức trong biểu thức trên cần phải có $p_k = q_k$ với mọi $k = 1, \ldots,$ K.

Giả sử X là biến ngẫu nhiên bất kỳ với $S_X = \{1, 2, \ldots, K\}$ và hàm xác suất $\boldsymbol{p}$. Nếu chúng ta đặt $p_k = 1/K$ trong Hệ thức (3.105), khi đó:

$$H(p; q) = \ln K - H_X = \sum_{k=1}^{K} p_k \ln\frac{p_k}{1/K} \geq 0.$$

mà từ đây suy ra rằng với biến ngẫu nhiên X bất kỳ với $S_X = \{1, 2, .., K\}$,

$$H_X \leq \ln K, \quad \text{có đẳng thức nếu và chỉ nếu } p_k = \frac{1}{K}, k = 1, \ldots, K. \quad (3.107)$$

Do vậy entropy lớn nhất có thể đạt được bởi biến ngẫu nhiên X là ln K, và giá trị lớn nhất này đạt được khi tất cả các kết cục là đồng xác suất .

Hệ thức (3.107) chứng tỏ rằng entropy của biến ngẫu nhiên với S_X hữu hạn luôn luôn hữu hạn. Mặt khác, nó cũng chứng tỏ rằng khi cỡ của S_X tăng thì entropy cũng có thể tăng vượt qua giới hạn. Ví dụ sau chứng tỏ rằng có một số biến ngẫu nhiên vô hạn đếm được có entropy hữu hạn.

VÍ DỤ 3.65
Entropy của Biến Ngẫu nhiên Hình học

Entropy của biến ngẫu nhiên hình học với $S_X = \{0, 1, 2, \ldots\}$ là:

$$\begin{aligned} H_X &= -\sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^k \ln\left(p(1-p)^k\right) \\ &= -\ln p - \ln(1-p) \sum_{k=0}^{\infty} kp(1-p)^k \\ &= -\ln p - \frac{(1-p)\ln(1-p)}{p} \\ &= \frac{-p\ln p - (1-p)\ln(1-p)}{p} = \frac{h(p)}{p}, \end{aligned} \qquad (3.108)$$

ở đây $h(p)$ là entropy của biến ngẫu nhiên nhị phân. Chú ý rằng $H_X = 2$ bit khi $p = 1/2$.

Với các biến ngẫu nhiên liên tục chúng ta có P[X = x] = 0 với mọi x. Do đó theo Hệ thức (3.102) độ bất định của biến cố {X = x} bất kỳ là vô hạn, và từ Hệ thức (3.103) suy ra rằng entropy của biến ngẫu nhiên liên tục là vô hạn. Ví dụ sau cho ta thấy một cái nhìn về cách ứng dụng khái niệm entropy vào biến ngẫu nhiên liên tục.

VÍ DỤ 3.66
Entropy của Biến Ngẫu nhiên Liên tục được Số hóa

Cho X là biến ngẫu nhiên liên tục lấy giá trị trên khoảng [a, b]. Giả sử rằng khoảng [a, b] được chia thành một khoảng lớn K, các khoảng con có độ dài Δ. Giả sử Q(X) là trung điểm của khoảng con chứa X. Hãy tìm entropy của Q.

Đặt x_k là trung điểm của khoảng con thứ k, khi đó P[$Q = x_k$] = P[X thuộc vào khoảng con thứ k] = P[$x_k - \Delta/2 < X < x_k + \Delta/2$] $\approx f_X(x_k)\,\Delta$, và do đó

$$H_Q = \sum_{k=1}^{K} P[Q = x_k]\ln P[Q = x_k].$$

$$= -\sum_{k=1}^{K} f_X(x_k)\Delta \ln(f_X(x_k)\Delta)$$

$$= -\ln(\Delta) - \sum_{k=1}^{K} f_X(x_k)\ln(f_X(x_k))\Delta. \quad (3.109)$$

Hệ thức trên chứng tỏ rằng có sự thỏa hiệp giữa entropy của Q và sai số lượng hóa X – Q(X). Khi Δ giảm thì sai số cũng giảm, nhưng entropy lại tăng vượt qua cận, một lần nữa chứng tỏ rằng entropy của biến ngẫu nhiên liên tục là vô hạn.

Trong biểu diễn cuối cùng của H_X ở Hệ thức (3.109), khi Δ tiên dần đến 0, biểu thức thứ nhất tiến đến vô cùng, còn biểu thức thứ hai tiến tới tích phân hữu hạn trong một số trường hợp. Entropy được xác định bởi tích phân:

$$H_X = -\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\ln f_X(x)dx = E[\ln f_X(X)]. \quad (3.110)$$

Trong biểu thức trên, chúng ta dừng lại thuật ngữ H_X, với quy ước rằng chúng ta nói về entropy vi phân của biến ngẫu nhiên liên tục.

VÍ DỤ 3.67
Entropy Vi phân của Biến Ngẫu nhiên Đều

Entropy vi phân của biến ngẫu nhiên X có phân phối đều trên [a, b] là

$$H_X = \xi\left[\ln\left(\frac{1}{b-a}\right)\right] = \ln(b - a). \quad (3.111)$$

VÍ DỤ 3.68
Entropy Vi phân của Biến Ngẫu nhiên Gauss

Entropy vi phân của biến ngẫu nhiên X có phân phối Gauss (xem Hệ thức (3.37)) là

$$H_X = -E[\ln f_X(X)]$$

$$= -E\left[\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} - \frac{(X-m)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\ln(2\pi\sigma^2) + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(2\pi e\sigma^2). \quad (3.112)$$

Hàm entropy và hàm entropy vi phân khác nhau ở một vài điểm cơ bản. Trong phần tiếp theo chúng ta sẽ nhận thấy rằng entropy của biến ngẫu nhiên có một sự giải thích rất tốt là số bit thông tin trung bình cần thiết để mô tả giá trị của biến ngẫu nhiên. Entropy vi phân không có được sự giải thích này. Thêm vào đó, hàm entropy không thay đổi khi biến ngẫu nhiên X được ánh xạ vào Y bởi phép biến đổi khả nghịch. Lại một lần nữa, entropy vi phân không có tính chất này. (xem Bài tập 132 và 139). Tuy vậy, entropy vi phân có một số tính chất hữu dụng. Entropy vi phân xuất hiện một cách tự nhiên trong các bài toán cần đến việc rút gọn entropy, như được phát biểu trong Bài tập 138. Bên cạnh đó, entropy tương đối của biến ngẫu nhiên liên tục được xác định bởi:

$$H(f_X; f_Y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \ln \frac{f_X(x)}{f_Y(x)} dx ,$$

không thay đổi qua các phép biến đổi khả nghịch.

Entropy như là Độ Đo Thông tin

Giả sử X là biến ngẫu nhiên rời rạc với $S_X = \{1, 2, \ldots, K\}$ và hàm xác suất $p_k = P[X = k]$. Giả sử rằng thí nghiệm tạo ra X được thực hiện bởi John, và anh ta cố gắng thông báo kết cục cho Mary bằng việc trả lời một loạt câu hỏi có / không (yes/no question). Chúng ta quan tâm đến việc xác định số bài toán nhỏ nhất của các câu hỏi cần thiết để xác định X.

VÍ DỤ 3.69

Một hộp chứa 16 viên bi: 4 bi được dán số “1”, 4 bi được dán số “2”, 2 bi được dán số “3”, 2 bi được dán số “4” và số bi còn lại được dán các số “5”, “6”, “7” và “8”. John lấy một viên bi một cách ngẫu nhiên từ hộp, và ghi lại số trên viên bi, xét chiến lược mà Mary có thể tìm ra số của viên bi qua một lọat các câu hỏi có /không. So sánh số trung bình của các câu hỏi được đưa ra với entropy của X.

Nếu chúng ta lấy X là biến ngẫu nhiên chỉ số của viên bi, khi đó $S_X = \{1, 2, ..., 8\}$ và hàm xác suất là $\boldsymbol{p}$ = (1/4, 1/4, 1/8, 1/8, 1/16, 1/16, 1/16/ 1/16). Chúng ta sẽ so sánh hai chiến lược được chỉ ra trong Hình 3.36(a) và (b).

Chuỗi câu hỏi trong Hình 3.36(a) sử dụng thực tế là xác suất của biến cố $\{X = k\}$ giảm theo k. Đó là nguyên do đưa ra câu hỏi {“X có bằng 1 hay không?}, {“X có bằng 2 hay không?”}, và tiếp tục như vậy cho đến khi nhận được câu trả lời là “có”. Đặt L là số các câu hỏi được đưa ra cho đến khi nhận được câu trả lời là “có”, khi đó số câu hỏi trung bình được đưa ra là:

$$E[L] = 1(\tfrac{1}{4}) + 2(\tfrac{1}{4}) + 3(\tfrac{1}{8}) + 4(\tfrac{1}{8}) + 5(\tfrac{1}{16}) + 6(\tfrac{1}{16}) + 7(\tfrac{1}{16}) + 7(\tfrac{1}{16})$$

$= 51/16.$

Chuỗi câu hỏi trong Hình 3.36(b) sử dụng quan trắc từ Ví dụ 3.61 rằng câu hỏi có/không nên thiết kế sao cho hai câu trả lời là đồng xác suất. Các câu hỏi trong Hình 3.36(b) phù hợp với yêu cầu này. Số câu hỏi trung bình được đưa ra là:

$$E[L] = 2(\tfrac{1}{4}) + 2(\tfrac{1}{4}) + 3(\tfrac{1}{8}) + 3(\tfrac{1}{8}) + 4(\tfrac{1}{16}) + 4(\tfrac{1}{16}) + 4(\tfrac{1}{16}) + 4(\tfrac{1}{16})$$

$$= 44/16.$$

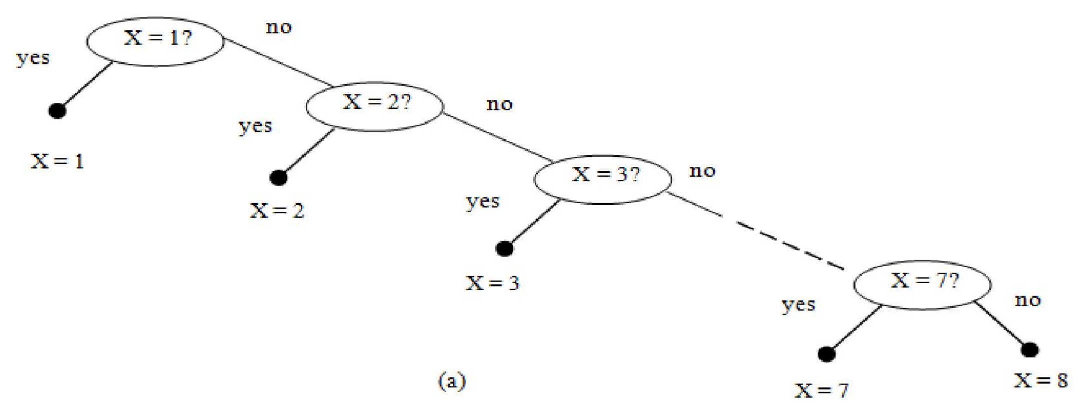
Như vậy chuỗi câu hỏi thứ 2 có hiệu suất tốt hơn.

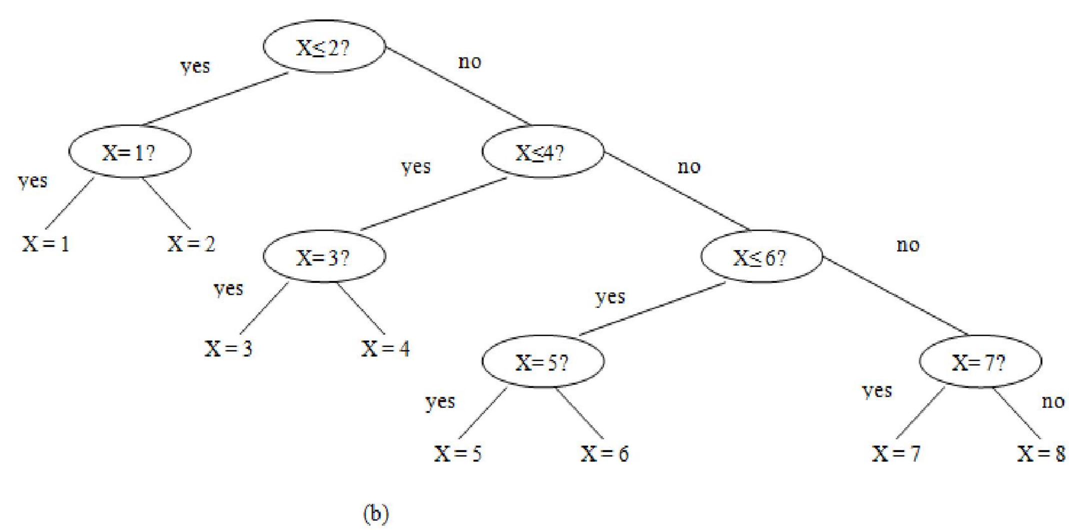
Cuối cùng, chúng ta tìm được entropy của X là:

$$H_X = -\frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\log_2\frac{1}{8} \ldots - \frac{1}{16}\log_2\frac{1}{16} = 44/16,$$

đúng bằng hiệu suất của chuỗi câu hỏi thứ 2.

HÌNH 3.36
Hai chiến lược để xác định giá trị của X thông qua một loạt câu hỏi yes/no





1/2, khi đó có mã hình cây đạt được entropy. Và cuối cùng, bằng việc mã hóa nhóm các kết cục của X chúng có thể đạt được độ dài trung bình của từ mã tiến tới entropy. Như vậy *entropy của X có thể hiện số trung bình nhỏ nhất các bit thông tin cần thiết để biểu diễn kết cục của X*.

Trước hết chúng ta chứng tỏ rằng độ dài trung bình của từ mã của mã hình cây *bất kỳ* không thể nhỏ hơn entropy. Chú ý từ Hình 3.36 rằng tập các độ dài $\{l_k\}$ của các từ mã của mọi cây nhị phân đầy đủ phải thỏa mãn

$$\sum_{k=1}^{K} 2^{-l_k} = 1. \qquad (3.113)$$

Để nhận thấy điều này, chúng ta đưa ra cây có độ cao bằng độ dài của từ mã dài nhất, như được chỉ ra trong Hình 3.37. Khi đó, nếu chúng ta "tỉa" cây tại nút có độ sâu l_k, chúng ta sẽ chuyển phân số 2^{-l_k} của nút này vào nút thấp nhất của cây. Chú ý rằng kết quả ngược lại cũng đúng: Nếu tập các độ dài từ mã thỏa mãn Hệ thức (3.113), khi đó chúng ta có thể xây dựng mã cây với độ dài đã cho.

Tiếp theo chúng ta xét sự khác nhau giữa entropy và E[L] với mã cây nhị phân bất kỳ:

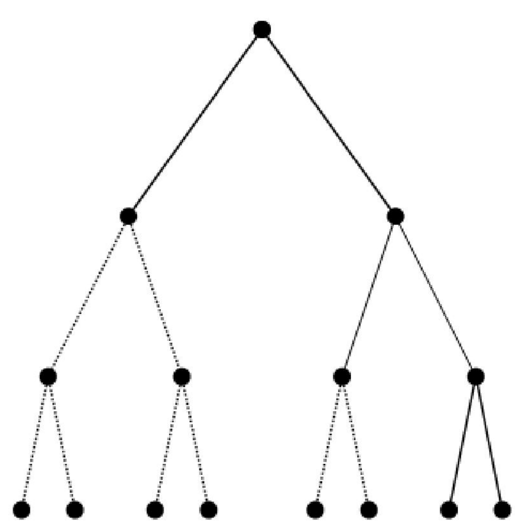
$$E[L] - H_X = \sum_{k=1}^{K} l_k P[X = k] + \sum_{k=1}^{K} P[X = k]\log_2 P[X = k]$$

$$= \sum_{k=1}^{K} P[X = k]\log_2\frac{P[X = k]}{2^{-l_k}}, \qquad (3.114)$$

ở đây chúng ta biểu diễn entropy theo bit. Hệ thức (3.114) là entropy tương đối của Hệ thức (3.104) với $q_k = 2^{-l_k}$. Như vậy do Hệ thức (3.105):

$$E[L] \geq H_X \quad \text{với đẳng thức khi và chỉ khi} \quad P[X = k] = 2^{-l_k}. \qquad (3.115)$$

HÌNH 3.37
Sự mở rộng một mã cây nhị phân thành một cây đầy đủ



Như thế số trung bình của các câu hỏi của mã cây nhị phân *bất kỳ* (và trong trường hợp cụ thể là mã cây *tốt nhất*) không thể nhỏ hơn entropy của X. Do vậy chúng ta có thể dùng entropy H_X làm đường cơ bản để kiểm tra mẫu bất kỳ.

Hệ thức (3.115) cũng suy ra rằng nếu các kết cục của X đều có xác suất là lũy thừa nguyên của 1/2 (như trong Ví dụ 6.67), khi đó chúng ta có thể tìm được mã hình cây như là ví dụ đạt được entropy. Nếu $P[X = k] = 2^{-l_k}$, khi đó chúng ta có thể gán cho kết cục thứ k một từ mã nhị phân có độ dài l_k. Chúng ta có thể chứng tỏ rằng luôn luôn có thể tìm được một mã cây có độ dài như trên bằng cách sử dụng tính chất là tổng các xác suất bằng 1, và do độ dài từ mã thỏa mãn Hệ thức (3.113). Khi đó từ Hệ thức (3.115) suy ra rằng $E[L] = H$.

Rõ ràng rằng Hệ thức (3.114) sẽ khác 0 nếu các p_k không phải là lũy thừa nguyên của 1/2. Như vậy mã hình cây tốt nhất không phải luôn luôn có $E[L] = H_X$. Tuy nhiên có thể chứng tỏ rằng bằng cách nhóm các kết cục thành tập các nhóm xấp xỉ đồng xác suất dẫn đến mã hình cây có độ dài gần bằng entropy. Hơn nữa bằng cách mã hóa các vectơ kết cục của X, có thể nhận được độ dài mã trung bình gần tùy ý tới entropy. Bài toán 144 thảo luận cách để đạt được điều này.

Bây giờ chúng ta nghiên cứu đối tượng của mình bằng cách chỉ ra rằng entropy của biến ngẫu nhiên X thể hiện số bit cần thiết trung bình nhỏ nhất để xác định giá trị của nó. Trước khi tiến hành, hãy xét lại biến ngẫu nhiên liên tục. Biến ngẫu nhiên có thể nhận được giá trị từ tập vô hạn không đếm được, khi đó nói chung cần một số bit vô hạn để mô tả các giá trị của nó. Như thế, từ sự giải thích entropy là số bit trung bình cần thiết để mô tả một biến ngẫu nhiên suy ra ngay lập tức rằng biến ngẫu nhiên liên tục có entropy vô hạn. Điều này suy ra rằng bất kỳ một sự biểu diễn liên tục mà chỉ sử dụng một số hữu hạn bit sẽ chấp nhận một sai số xấp xỉ nào đó.

Phương pháp Entropy Cực Đại

Giả sử X là biến ngẫu nhiên với $S_X = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ và hàm xác suất $p_k = P[X = x_k]$ chưa biết. Giả sử rằng chúng ta cần phải ước lượng hàm xác suất của X khi đã biết giá trị kỳ vọng của hàm $g(X)$ nào đó của X:

$$\sum_{k=1}^{K} g(x_k)P[X = x_k] = c. \qquad (3.116)$$

Ví dụ, nếu $g(X) = X$ thì $c = E[g(X)] = E[X]$, và nếu $g(X) = (X - E[X])^2$ thì $c = VAR[X]$. Rõ ràng bài toán này là bất định do việc biết các tham số này không đủ để xác định hàm xác suất một cách duy nhất. **Phương pháp entropy cực đại** tiếp cận bài toán này bằng cách tìm hàm xác suất làm cực đại entropy trong số các hàm xác suất thỏa mãn Hệ thức (3.116).

Giả sử chúng ta thiết lập bài toán cực đại bằng cách dùng nhân tử Lagrange:

$$H_X + \lambda\left(\sum_{k=1}^{K} \mathrm{P}[X = x_k]\mathrm{g}(x_k) - c\right) = -\sum_{k=1}^{K} \mathrm{P}[X = x_k]\ln\frac{\mathrm{P}[X = x_k]}{Ce^{-\lambda g(x_k)}}, \tag{3.117}$$

ở đây $C = e^{c}$. Chú ý rằng nếu $\{Ce^{-\lambda g(x_k)}\}$ lập thành hàm xác suất, khi đó biểu thức trên là giá trị không âm của entropy tương đối của hàm xác suất này đối với ***p***. Khi đó Hệ thức (3.105) suy ra rằng biểu thức trong Hệ thức (3.117) luôn luôn nhỏ hơn hoặc bằng 0. Dấu bằng chỉ xảy ra nếu $\mathrm{P}[X = x_k] = Ce^{-\lambda g(x_k)}$. bây giờ chúng ta chứng tỏ rằng điều này thực sự dẫn tới phép giải entropy cực đại.

Giả sử rằng biến ngẫu nhiên X có hàm xác suất $p_k = Ce^{-\lambda g(x_k)}$, ở đây C và λ đã được chọn sao cho Hệ thức (3.116) được thỏa mãn và sao cho $\{p_k\}$ là một hàm xác suất. Khi đó X có entropy

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_X &= \mathrm{E}[-\ln\mathrm{P}[X]] = [-\ln Ce^{-\lambda g(x_k)}] = -\ln C + \lambda\mathrm{E}[g(X)] \\ &= -\ln C + \lambda c. \end{aligned} \tag{3.118}$$

Bây giờ chúng ta tiến hành so sánh entropy trong Hệ thức (3.118) và hàm xác suất q_k khác mà nó cũng thỏa mãn ràng buộc trong Hệ thức (3.116). Xét entropy tương đối của ***p*** đối với ***q***:

$$\begin{aligned} 0 \le H(\boldsymbol{q}; \boldsymbol{p}) &= \sum_{k=1}^{K} q_k\ln\frac{q_k}{p_k} = \sum_{k=1}^{K} q_k\ln q_k + \sum_{k=1}^{K} q_k(-\ln C + \lambda g(x_k)) \\ &= -\ln C + \lambda c - H(q) = H_X - H(q). \end{aligned} \tag{3.119}$$

Như vậy $H_X \ge H(\boldsymbol{q})$, và ***p*** đạt được entropy lớn nhất.

VÍ DỤ 3.70

Cho X là biến ngẫu nhiên với $S_X = \{0, 1, \ldots\}$ và giá trị kỳ vọng $\mathrm{E}[X] = m$. Hãy tìm hàm xác suất của X làm cực đại entropy.

Trong ví dụ này $g(X) = X$, bởi vậy:

$p_k = Ce^{-\lambda k} = C\alpha^{k}$,

ở đây $\alpha = e^{-\lambda}$. Rõ ràng X là biến ngẫu nhiên hình học với giá trị trung bình $m = \alpha/(1 - \alpha)$ và do vậy $\alpha = m/(m + 1)$. Khi đó suy ra rằng $C = 1 - \alpha = 1/(m + 1)$.

Khi nói về biến ngẫu nhiên liên tục, phương pháp entropy cực đại đã làm cực đại entropy vi phân:

$$-\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \ln f_X(x) dx . \qquad (3.120)$$

Thông tin tham số được cho dưới dạng :

$$c = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx . \qquad (3.121)$$

Biểu thức entropy tương đối trong Hệ thức (3.112) và cách tiếp cận được sử dụng cho biến ngẫu nhiên rời rạc có thể được dùng để chứng tỏ rằng hàm mật độ xác suất $f_X(x)$ mà làm cực đại entropy vi phân sẽ phải có dạng

$$f_X(x) = Ce^{-\lambda g(x)}, \qquad (3.122)$$

ở đây C và λ cần phải được chọn sao cho Hệ thức (3.122) có tích phân bằng 1 và sao cho (3.121) được thỏa mãn.

VÍ DỤ 3.71

Cho X là biến ngẫu nhiên với $S_X = \{0, 1, \ldots\}$ và giá trị kỳ vọng E[X] = m. Hãy tìm hàm xác suất của X làm cực đại entropy.

Trong ví dụ này $g(X) = X$, bởi vậy:

$$p_k = Ce^{-\lambda k} = C\alpha^k,$$

ở đây $\alpha = e^{-\lambda}$. Rõ ràng X là biến ngẫu nhiên hình học với giá trị trung bình $m = \alpha/(1 - \alpha)$ và do vậy $\alpha = m/(m + 1)$. Khi đó suy ra rằng $C = 1 - \alpha = 1/(m + 1)$.

Giả sử rằng biến ngẫu nhiên X có phương sai đã biết $\sigma^2 = E[(X - m)^2]$ ở đây giá trị trung bình m là chưa biết. Hãy tìm hàm mật độ xác suất làm cực đại entropy của X.

Hệ thức (3.122) suy ra rằng hàm mật độ có dạng

$$f_X(x) = Ce^{-\lambda(x-m)^2}.$$

Chúng ta có thể đạt được sự thỏa mãn ràng buộc trong Hệ thức (3.121) bằng cách lấy:

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2} \qquad C = \frac{1}{\sqrt{\pi 2\sigma^2}}.$$

Như vậy chúng ta nhận được hàm mật độ xác suất Gauss với phương sai σ^2. Chú ý rằng giá trị m là tùy ý, nghĩa là với m được chọn bất kỳ luôn có hàm mật độ xác suất làm cực đại entropy vi phân.

Phương pháp entropy cực đại có thể được mở rộng tới trường hợp mà ở đó có một vài tham số của biến ngẫu nhiên X chưa biết. Phương pháp này có thể mở rộng đến trường hợp vectơ ngẫu nhiên và dãy các biến ngẫu nhiên .

TÓM TẮT

- Biến ngẫu nhiên là một hàm số thực hiện việc gán một số thực, cho mỗi biến cố của một thí nghiệm. Một biến ngẫu nhiên được xác định nếu kết cục của thí nghiệm ngẫu nhiên là một số, hoặc nếu sự số hóa của kết cục được quan tâm.
- Khái niệm biến cố tương đương cho phép chúng ta suy ra xác suất của các biến cố thuộc vào một biến ngẫu nhiên qua xác suất của các biến ngẫu nhiên cơ bản.
- Hàm xác suất $F_X(x)$ là xác suất để X rơi vào khoảng $(-\infty, x]$. Xác suất số của biến cố bất kỳ là hợp của khoảng có thể được biểu diễn qua hàm xác suất của nó.
- Một biến ngẫu nhiên được gọi là rời rạc nếu các giá trị có thể của nó thuộc tập đếm được nào đó. Một biến ngẫu nhiên được gọi là liên tục nếu hàm phân phối của nó có thể được viết dưới dạng tích phân của một hàm không âm. Một biến ngẫu nhiên được gọi là hỗn hợp nếu nó là hỗn hợp của biến ngẫu nhiên rời rạc và biến ngẫu nhiên liên tục.
- Xác suất của các biến cố thuộc vào biến ngẫu nhiên liên tục X có thể được biểu diễn như là tích phân của hàm mật độ xác suất $f_X(x)$.
- Nếu X là biến ngẫu nhiên, khi đó $Y = g(X)$ cũng là một biến ngẫu nhiên. Khái niệm biến cố tương đương cho phép chúng ta suy ra biểu thức của hàm phân phối và hàm mật độ xác suất của Y qua hàm phân phối và hàm mật độ xác suất của X.
- Dùng hàm phân phối và hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên là đủ để tính tất cả các xác suất chỉ liên quan đến biến ngẫu nhiên X. Giá trị trung bình, phương sai và các mô men của một biến ngẫu nhiên tóm lược một số thông tin về biến ngẫu nhiên X. Các tham số này là hữu ích trong thực tiễn, chúng dễ dàng đo và ước lượng hơn hàm phân phối và hàm mật độ xác suất.
- Các bất đẳng thức Markov và Chebyshev cho phép chúng ta tìm được cận của các xác suất liên quan đến X chỉ qua hai momen của nó.
- Phép kiểm nghiệm khi-bình phương đo sự phù hợp của tập các số liệu với hàm xác suất hay hàm mật độ xác suất giả thiết. Nó cũng được sử dụng để chứng tỏ sự phù hợp của các mô hình xác suất với số liệu thực nghiệm.
- Các phương pháp biến đổi cung cấp cho chúng ta một cách biểu diễn thay thế và tương đương với hàm xác suất và hàm mật độ xác suất. Trong một số dạng bài toán, làm việc với phương pháp biến đổi phù hợp hơn làm việc với hàm xác suất hoặc hàm mật độ xác suất. Các momen của biến ngẫu nhiên có thể nhận được từ phép biến đổi tương ứng.
- Độ tin cậy (độ ổn định) của hệ thống là xác suất để hệ vẫn hoạt động sau *t* giờ làm việc. Độ ổn định của hệ thống có thể được xác định qua độ ổn định của các bộ phận.
- Có một số phương pháp tạo ra các biến ngẫu nhiên có hàm xác suất hoặc hàm mật độ xác suất được chọn trước qua biến ngẫu nhiên có phân phối đều trên khoảng đơn vị. Các phương pháp này gồm các phương pháp biến đổi và các phương pháp loại trừ cũng như các phương pháp mô phỏng các thí nghiệm ngẫu nhiên (ví dụ các hàm của các biến

ngẫu nhiên) và sự trộn lẫn các biến ngẫu nhiên

- Entropy của biến ngẫu nhiên X là độ đo độ bất định của X qua lượng thông tin trung bình cần thiết để xác định giá trị của nó.
- Phương pháp entropy cực đại là một phương pháp ước lượng hàm xác suất hoặc hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên khi chỉ biết một phần thông tin của X, dưới dạng kỳ vọng của hàm của X.

DANH SÁCH CÁC THUẬT NGỮ QUAN TRONG

Hàm đặc trưng
Bất đẳng thức Chebyshev
Biến ngẫu nhiên liên tục
Hàm phân phối
Biến ngẫu nhiên rời rạc
Entropy
Biến cố tương đương
Giá trị kỳ vọng của X
Hàm tốc độ hỏng
Hàm của biến ngẫu nhiên
Phép biến đổi Laplace của hàm mật độ xác suất
Bất đẳng thức Markov
Phương pháp Entropy cực đại
Thời gian hỏng trung bình
Định lý mômen
Mômen cấp *n* của X
Hàm mật độ xác suất
Hàm sinh xác suất
Hàm khối lượng xác suất
Biến ngẫu nhiên
Biến ngẫu nhiên dạng hỗn hợp
Phương pháp loại trừ
Độ ổn định
Mức ý nghĩa
Độ lệch chuẩn của X
Phương pháp biến đổi
Phương sai của X.

CHÚ GIẢI TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tài liệu [1] là tài liệu tham khảo chuẩn bị cho kỹ sư điện làm việc với biến ngẫu nhiên. Các tài liệu [2] và [3] thảo luận một số điểm tốt hơn về khái niệm biến ngẫu nhiên ở mức phù hợp với sinh viên của giáo trình này. Tài liệu [4] cho sự giới thiệu đầy đủ hơn của phương pháp thống kê được đưa ra trong cuốn sách này. Tài liệu [5] trình bày chi tiết các thảo luận về các phương pháp khác nhau để sinh ra các số ngẫu nhiên với phân phối được xác định trước. Tài liệu [6] cũng thảo luận về việc tạo ra các biến ngẫu nhiên. Tài liệu [13] thảo luận Entropy trong văn cảnh lý thuyết thông tin.

1. A. Papolius, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes,* McGraw-Hill, New York, 1965.
2. K. L. Chung, *Elementary Probability Theory*, Springer–Verlag, New York, 1974.
3. W. B. Davenport, *Probability and Random Processes: An Introduction for Applied Scientists and Engineers*, McGraw-Hill, New York, 1970.
4. A. O. Allen, *Probability, Statistics, and Queueing Theory,* Academic Press, New York, 1978.
5. A. M. Law and W. D. Kelton, *Simulation Modeling and Analysis,* McGraw-Hill, New York, 1982.

6. S. M. Ross, *Introduction to Probability Models*, Academic Press, New York, 1985.
7. H. Cramer, *Mathematical Methods of Statistics*, Princenton University Press, Princenton, N.J., 1946.
8. M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions, National Bureau of Standards*, Washington, D.C., 1964.
9. R. C. Cheng, "The Generation of Gamma Variables with Nonintergal Shape Parameter", *Appl. Statist.*, 26: 71–75, 1977.
10. Y. A. Rozanov, *Probability Theory: A Concise Course*, Dover Publications, New York, 1969.
11. P. O. Börjesson and C. E. W. Sundberg, "Simple Approximations of Error Function *Q(x)* for Communications Applications", *IEEE Trans. on Communications*, March 1979, 639–643.
12. C. H. Stapper, F. M. Armstrong, and K. Saji, "Intergrated Circuit Yield Statistics", *Proc. IEEE*, April 1983, 453–470.
13. R. G. Gallager, *Information Theory and Reliable Communication*, Wiley, New York, 1968.

BÀI TẬP

PHẦN 3.1

Mô tả các Thí nghiệm Ngẫu nhiên

1. Một chiếc bình chứa 90 hóa đơn $1, 9 hóa đơn $5, và 1 hóa đơn $50. Đặt biến ngẫu nhiên X là
   a. Không gian mẫu là gì?
   b. Tập hợp A tương ứng với biến cố "số các chấm của mặt trên là số chẵn" là gì ?
   c. Hãy tìm tập hợp Ac và mô tả biến cố tương ứng bằng lời.
2. Một nguồn thông tin sản sinh ngẫu nhiên ra các ký tự từ tập hợp gồm năm chữ cái S = {a, b, c, d, e}. Xác suất của các ký tự là

   $p(a)=\frac{1}{2},\ p(b)=\frac{1}{4}, p(c)=\frac{1}{8}, p(d)=p(e)=\frac{1}{16},$ Hệ thống nén số liệu mã hóa các chữ cái thành các dãy nhị phân như sau:

   a 1

   b 01

   c 001

   d 0001

   e 0000

   Đặt biến ngẫu nhiên Y bằng độ dài dãy nhị phân ở đầu ra của hệ thống. Xác định không gian mẫu S_Y của Y và các xác suất của các giá trị của nó.
3. Đồng xu được gieo *n* lần. Gọi biến ngẫu nhiên Y là độ sai khác giữa số lần xuất hiện mặt ngửa và số lần xuất hiện mặt sấp.
   a. Mô tả không gian mẫu S_Y của Y.

b. Tìm biến cố tương đương với biến cố {Y = 0}.

c. Tìm biến cố tương đương với biến cố {Y ≤ *k*}, *k* nguyên dương.

4. Giả sử một điểm được chọn ngẫu nhiên từ miền trong của đường tròn đơn vị. Đặt Y là khoảng cách từ điểm đó tới gốc tọa độ.

   a. Tìm không gian mẫu S_Y của Y.

   b. Tìm biến cố trong S tương đương với biến cố {Y ≤ *y*}.

   c. Tìm P[Y ≤ *y*].

5. Một phi tiêu được ném lên một hình vuông cạnh *b* đơn vị. Giả thiết là khả năng phi tiêu rơi vào các vị trí trên hình vuông là như nhau. Biến ngẫu nhiên *Z* được cho bởi tổng của hai tọa độ thành phần của điểm mà phi tiêu cắm vào.

   a. Mô tả không gian mẫu S_Z của Z.

   b. Tìm miền trên hình vuông tương ứng với biến cố {*Z* ≤ *z*} với $-\infty < z < +\infty$.

   c. Tìm P[*Z* ≤ *z*].

PHẦN 3.2

Hàm Phân phối

6. Phác họa hàm phân phối của biến ngẫu nhiên X trong Ví dụ 1. Chỉ rõ dạng của X.

7. Phác họa hàm phân phối của biến ngẫu nhiên Y trong Ví dụ 2. Chỉ rõ dạng của Y.

8. Phác họa hàm phân phối của biến ngẫu nhiên Y trong Ví dụ 3 với *n* = 4 và *n* = 5, giả thiết đồng xu được gieo là cân đối.

9. Phác họa hàm phân phối của bán kính Y trong Ví dụ 4. Chỉ rõ dạng của Y.

10. Phác họa hàm phân phối của biến ngẫu nhiên Z trong Ví dụ 5. Chỉ rõ dạng của Z.

11. Tìm hàm xác suất và phác họa hàm phân phối của biến ngẫu nhiên nhị thức với *n* = 8 và *p* = 1/10, *p* = 1/2, và *p* = 9/10.

12. Cho *U* là biến ngẫu nhiên phân phối đều trên khoảng [–1, 1]. Tìm các xác suất sau:

    P[*U* > 0]   P[|*U*| < 1/3]   P[|*U*| ≥ 3/4]

    P[*U* < 5]   P[1/3 < *U* < 1/2]

13. Hàm phân phối của biến ngẫu nhiên X được cho bởi

$$F_X(x) = \begin{cases} 1/3 + (2/3)(x+1)^2 & -1 \le x \le 0 \\ 0 & x < -1. \end{cases}$$

    Hãy tìm xác suất của các biến cố A = {X > 1/3}, B = {|X| ≥ 1}, C = {|X – 1/3| < 1}, D = {X < 0}.

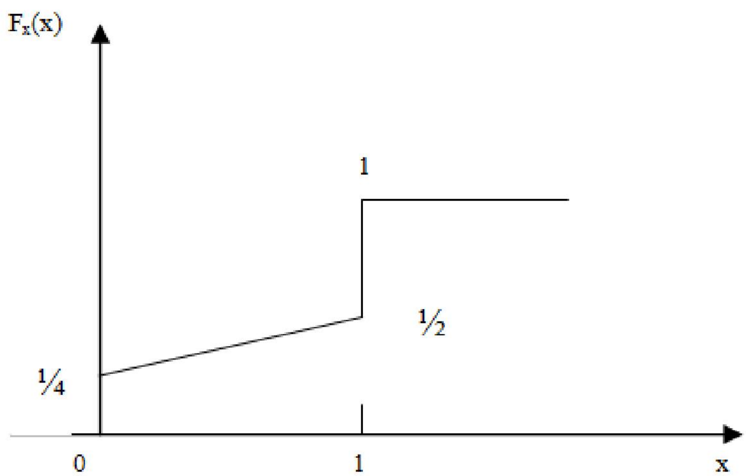
14. Hàm phân phối của biến ngẫu nhiên X được cho trên Hình P3.1.

    a. Dạng của biến ngẫu nhiên X là gì?

    b. Hãy tìm các xác suất sau theo hàm phân phối của X.

$P[X < -1/2]$	$P[X < 1/3]$	$P[X \le 0]$
$P[1/4 \le X < 1]$	$P[1/4 \le X \le 1]$	$P[X > 1/2]$
$P[X \ge 5]$	$P[X < 5]$	

HÌNH P3.1



15. Hàm phân phối của biến ngẫu nhiên X được cho bởi

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 1 \\ 1 - y^{-n} & y \ge 1. \end{cases}$$

với n là số nguyên dương.

    a. Phác họa hàm phân phối của Y.

    b. Tìm xác suất $P[k < Y \le k + 1]$ với k nguyên dương.

16. Biến ngẫu nhiên X liên tục có hàm phân phối

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \le -\pi/2 \\ c(1 + \sin(x)) & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 1 & \pi/2 \le x \end{cases}$$

    a. Tìm c.

    b. Phác họa $F_X(x)$.

17. Biến ngẫu nhiên Rayleigh có hàm phân phối

$$F_R(r) = \begin{cases} 0 & r < 0 \\ 1 - e^{-r^2/2\sigma^2} & r \ge 0 \end{cases}$$

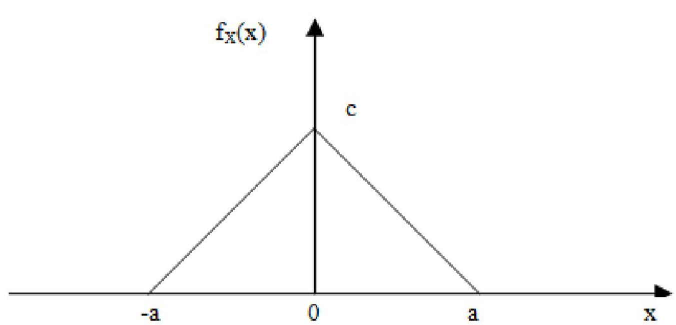
Tìm $P[\sigma \le R \le 2\sigma]$ và $P[R > 3\sigma]$.

18. Cho X là biến ngẫu nhiên mũ với tham số λ.
   a. Với $d > 0$ và k nguyên dương, hãy tìm các xác suất sau:
      $P[X \le d]$, $P[kd \le X \le (k+1)d]$, và $P[X > kd]$.
   b. Hãy chia phần dương của đường thẳng thực thành năm khoảng không có điểm chung đồng xác suất.

PHẦN 3.3
Hàm Mật độ Xác suất

19. Biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất cho bởi
$$f_X(x) = \begin{cases} cx(1-x) & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{nếu khác.} \end{cases}$$
   a. Tìm c.
   b. Tìm $P[1/2 < X \le 3/4]$.
   c. Tìm $F_X(x)$.
20. Biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất cho bởi
$$f_X(x) = \begin{cases} cx(1-x^4) & -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{nếu khác.} \end{cases}$$
   a. Tìm c.
   b. Tìm hàm phân phối của X.
   c. Tìm $P[|X| < 1/2]$.
21. Biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất cho trên Hình P3.2.
   a. Tìm $f_X(x)$.
   b. Tìm hàm phân phối của X.
   c. Tìm b sao cho $P[|X| < b] = 1/2$.

HÌNH P3.2:



22. Tìm hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên Z ở Bài toán 5. Tìm $P[Z \ge 1.5b]$ bằng cách tích phân hàm mật độ xác suất.
23. Tìm hàm phân phối của biến ngẫu nhiên Cauchy có hàm mật độ xác suất như sau

$$f_X(x) = \frac{\alpha/\pi}{x^2+\alpha^2}$$

24. Hãy tìm hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên định nghĩa ở Bài toán 14. Tính các xác suất trong phần b Bài toán 14 bằng cách tích phân hàm mật độ xác suất.
25. Hãy tìm hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên nhị thức được đề cập đến trong Bài toán 11.
26. Chứng minh rằng $F_X(x \mid A)$ thỏa mãn tám tính chất của một hàm phân phối.
27. Cho X là biến ngẫu nhiên mũ trong Bảng 3.2.
    a. Hãy tìm và phác họa $F_X(x \mid X > t)$. $F_X(x \mid X > t)$ khác $F_X(x)$ như thế nào?
    b. Tìm và phác họa $f_X(x \mid X > t)$.
    c. Chứng minh rằng $P[X > t + x \mid X > t] = P[X > x]$. Hãy lý giải vì sao điều này được gọi là *tính chất không nhớ*.
28. a. Tìm và phác họa $F_X(x \mid a \le X \le b)$. So sánh $F_X(x \mid a \le X \le b)$ với $F_X(x)$.
    b. Tìm và phác họa $f_X(x \mid a \le X \le b)$.
29. Đặt $A = \{X > 4\}$ cho biến ngẫu nhiên trong Bài toán 11.
    a. Tìm và phác họa $F_X(x \mid A)$ và $f_X(x \mid A)$.
    b. Giả sử hàm xác suất có điều kiện của X được cho bởi $P[X = x \mid A]$. Hãy tìm hàm xác suất có điều kiện. Các kết quả có nhất quán với các kết quả ở phần a hay không?
30. Cho X là biến ngẫu nhiên hình học. Tìm và phác họa $F_X(x \mid A)$ nếu: $A = \{X > k\}$ với k nguyên dương; $A = \{X < k\}$; và {X là số chẵn}.

PHẦN 3.4
Một số Biến Ngẫu nhiên Quan trọng

31. Hãy chỉ ra các giá trị của hàm chỉ số của biến cố A, là $I_A(\zeta)$, với từng ζ thuộc không gian mẫu S
    a. nếu $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và $A = \{\zeta' \ge 3\}$.
    b. nếu $S = [0, 1]$ và $A = \{\zeta' \ge 3/4\}$.
    c. nếu $S = \{\zeta = (x, y): 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ và
       $A = \{\zeta = (x, y): .5 < x + y < 1\}$.
32. Cho X là biến ngẫu nhiên nhị thức lấy kết quả từ dãy n phép thử Bernoulli với xác suất thành công p.
    a. Giả sử X = 1. Tìm xác suất để biến cố đơn xảy ra trong phép thử Bernoulli lần thứ k.
    b. Giả sử X = 2. Tìm xác suất để hai biến cố xảy ra trong các lần thử

Bernoulli thứ j và thứ k, với $j < k$.

c. Theo như các đáp án của bạn cho các phần a và b, thì những lần thành công phân phối "hoàn toàn ngẫu nhiên" trong n phép thử Bernoulli có nghĩa là gì?

33. Cho X là biến ngẫu nhiên nhị thức

a. Chứng minh rằng

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{(n-k+1)p}{kq} = 1 + \frac{(n+1)p}{kq}.$$

b. Chứng minh rằng phần a kéo theo: (1) P[X = k] đạt cực đại tại k_{max} = $[(n+1)p]$, ở đây $[x]$ ký hiệu số nguyên lớn nhất không vượt quá x; và (2) khi $(n+1)p$ nguyên, thì cực đại đạt tại k_{max} và $k_{max} - 1$.

34. Cho N là biến ngẫu nhiên hình học với $S_N = \{0, 1, \ldots\}$.

a. Tìm $P[N > k]$.

b. Tìm hàm phân phối của N.

c. Tìm P[N là số chẵn].

d. Tìm $P[N = k \mid N \le m]$.

35. Chứng minh tính chất không nhớ của biến ngẫu nhiên hình học:

$P[M \ge k + j \mid M > j] = P[M \ge k]$ với mọi j, $k > 0$.

M không nhớ theo nghĩa nào?

36. Giả sử X là biến ngẫu nhiên rời rạc thỏa mãn tính chất không nhớ. Chứng minh điều này dẫn tới X là biến ngẫu nhiên hình học.

37. Các tin nhắn đến một máy tính với tốc độ trung bình 15 tin nhắn/giây. Số tin nhắn đến trong 1 giây được biết là biến ngẫu nhiên Poisson.

a. Tìm xác suất để không có tin nhắn nào đến trong 1 giây.

b. Tìm xác suất để nhiều hơn 10 tin nhắn đến trong chu kỳ 1 giây.

Gợi ý: Dùng Hệ thức (3.33a), $p_{k+1} = (\lambda/(k+1))p_k$, để tính các xác suất.

38. So sánh xấp xỉ Poisson với xác suất nhị thức với k = 0, 1, 2, 3 và

$n = 10$ và $p = .1$, $n = 20$ và $p = .05$,

$n = 100$ và $p = .01$.

39. Một phần mười trong 1% của một dạng nào đó của chip RAM là phế phẩm. Một sinh viên cần 50 chip cho một bảng mạch nào đó. Hỏi cô ấy phải mua bao nhiêu để có không dưới 99% cơ hội có ít nhất 50 chip làm việc?

40. Số lệnh chờ được thực thi được cho bởi biến ngẫu nhiên Poisson với tham số $\alpha = \lambda/n\mu$, với λ là số lệnh trung bình đến trong một ngày, μ là số lệnh cần được thực thi bởi một nhân viên trong một ngày, và n là số nhân viên. Cho $\lambda = 3$ và $\mu = 1$. Tìm số nhân viên cần thiết để xác suất cho có hơn 4

lệnh chờ là nhỏ hơn 90%. Xác suất để không có lệnh chờ là bao nhiêu?

41. Đối với biến ngẫu nhiên Poisson, hãy chứng tỏ rằng với $\alpha < 1$, $P[N = k]$ đạt cực đại tại $k = 0$; với $\alpha > 1$, $P[N = k]$ đạt cực đại tại $[\alpha]$; và nếu α là số nguyên dương, thì $P[N = k]$ sẽ đạt cực đại tại $k = \alpha$ và tại $k = \alpha - 1$. *Hướng dẫn*: dùng phương pháp của Bài tập 33.

42. Phân vị thứ r, $\pi(r)$, của biến ngẫu nhiên X được định nghĩa là $P[X \le \pi(r)] = r/100$.

    a. Tìm phân vị 90%, 95%, và 99% của biến ngẫu nhiên mũ với tham số λ.

    b. Lặp lại câu a với biến ngẫu nhiên Gauss với tham số m=0 và σ.

43. Chứng minh rằng hàm Q của biến ngẫu nhiên Gauss thỏa mãn

    $Q(-x) = 1 - Q(x)$.

44. Cho X là biến ngẫu nhiên Gauss với giá trị trung bình m và phương sai σ^2. Tìm các xác suất sau:

    $P[X < m]$ và $P[|X - m| > k\sigma]$ với $k = 1, 2, 3, 4, 5$, và

    $P[X > m + k\sigma]$ với $k = 1.28, 3.09, 4.26, 5.20$.

45. Một kênh truyền thông chấp nhận một điện áp vào ngẫu nhiên v, và cho ra một điện áp $Y = v + N$, với N là một biến ngẫu nhiên Gauss với giá trị trung bình 0 và phương sai $\sigma^2 = 1$. Giả sử kênh được dung để truyền thông tin nhị phân như sau:

    để truyền 0 nhập –1.

    để truyền 1 nhập +1.

    Nơi nhận (máy bắt tín hiệu) sẽ quyết định là 0 đã được gửi nếu điện áp là âm và là 1 trong trường hợp còn lại. Hãy tìm xác suất để nơi nhận mắc lỗi nếu 0 đã được gửi đi; nếu 1 đã được gửi đi.

46. Hai chip đang được xem xét sử dụng cho một hệ thống. Thời gian sống của chip 1 được định dạng bởi một biến ngẫu nhiên Gauss với kỳ vọng 20,000 giờ và độ lệch chuẩn 4000 giờ. (Xác suất của thời gian sống âm là không đáng quan tâm.) Thời gian sống của chip 2 cũng là một biến ngẫu nhiên Gauss nhưng với kỳ vọng 22,000 giờ và độ lệch chuẩn 1000 giờ. Chip nào thích hợp hơn nếu thời gian sống mong muốn của hệ thống là 20,000 giờ? 24,000 giờ?

47. Các tin nhắn đến một trung tâm với tốc độ một tin nhắn/giây. Gọi X là thời gian đến của năm tin nhắn. Tìm xác suất để $X < 6$; để $X > 8$. giả định thời gian giữa các lần đến của tin nhắn là biến ngẫu nhiên mũ.

48. Phác họa hàm mật độ xác suất m-Erlang với $m = 1, 2, 3$ và $\lambda = 1$.

49. Phác họa hàm mật độ xác suất khi-bình phương với $k = 1, 2, 3$.

50. a. Tìm hàm phân phối của biến ngẫu nhiên m-Erlang bằng cách tích

phân hàm mật độ xác suất. *Gợi ý*: tích phân từng phần.

b. Chứng minh đạo hàm của hàm phân phối được xét trong Hệ thức (3.48) cho hàm mật độ xác suất biến ngẫu nhiên *m*-Erlang.

PHẦN 3.5

Các Hàm của Biến Ngẫu nhiên

51. Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất Laplace

$$f_X(x) = \frac{\alpha e^{-\alpha|x|}}{2} \quad \text{ở đây } \alpha > 0, -\infty < x < \infty.$$

Giả sử X được nhập vào một hàm bậc thang tám mức trong Ví dụ 3.19. Tìm hàm khối lượng xác suất của các cấp đầu ra của hàm bậc thang. Tìm xác suất để X nhập vào vượt quá khoảng $\pm 4d$ của hàm bậc thang.

52. Cho X là số các khách hàng đợi xe bus. Giả thiết X là biến ngẫu nhiên hình học với tham số *p*. Giả sử xe bus có thể chở *M* khách. Tìm hàm khối lượng xác suất của $Y = (X - M)^+$, số các khách hàng phải chờ sau.

53. Các cấp thi tổ chức cho một lớp có hàm mật độ xác suất Gauss với kỳ vọng *m* và độ lệch chuẩn σ. Tìm các hằng số *a* và *b* để biến ngẫu nhiên Y = *a*X + *b* có hàm mật độ xác suất Gauss với kỳ vọng *m*’ và độ lệch chuẩn σ’.

54. Cho Y = |X| là đầu ra của một mạch điện dao động với điện áp vào là X.

a. Tìm hàm phân phối của Y bằng cách tìm biến cố tương đương của $\{Y \le y\}$. Tìm hàm mật độ xác suất của Y bằng cách đạo hàm hàm phân phối.

b. Tìm hàm mật độ xác suất của Y bằng cách tìm biến cố tương đương của $\{y < Y \le y + dy\}$. Kết quả có giống với câu a không?

55. Trong Ví dụ 3.26, tìm hàm phân phối của Y bằng cách tìm xác suất của biến cố $\{X^2 \le y\}$.

56. Giả sử điện áp X là một biến ngẫu nhiên Gauss với kỳ vọng 0. Tìm hàm mật độ xác suất của công suất bị tiêu hao bởi một điện trở RΩ $P = X^2/R$.

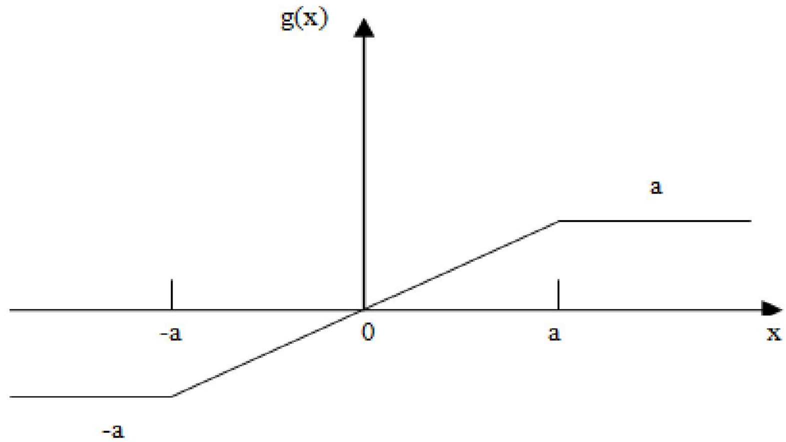
57. *Một giới hạn tử* Y = *g*(X) được cho trên Hình P3.3.

a. Tìm hàm phân phối và hàm mật độ xác suất của Y theo hàm phân phối và hàm mật độ xác suất của X.

b. Tìm hàm phân phối và hàm mật độ xác suất của Y nếu X có hàm mật độ xác suất Laplace.

c. Tìm hàm phân phối và hàm mật độ xác suất của Y nếu X là biến ngẫu nhiên Gauss với kỳ vọng *m* và độ lệch σ.

HÌNH P3.3:



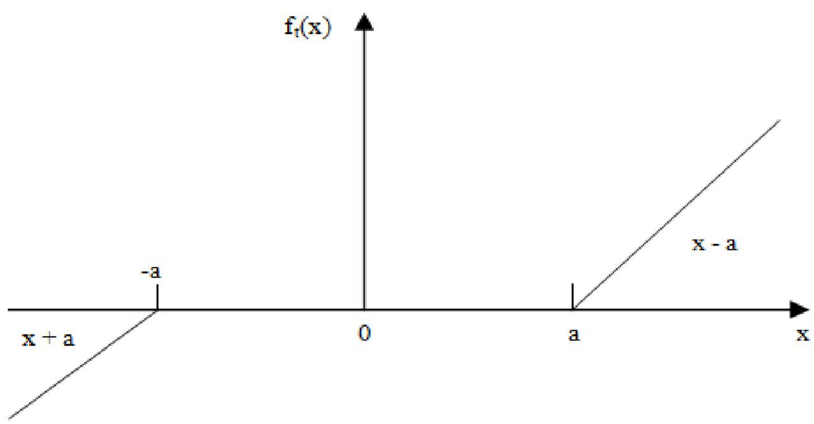
d. Tìm hàm phân phối và hàm mật độ xác suất của Y nếu đầu vào là X = $b\sin U$, với U có phân phối đều trên khoảng $[0, 2\pi]$.

58. *Hàm trống giữa* Y = h(X) được cho trên Hình P3.4.

a. Tìm hàm phân phối và hàm mật độ xác suất của Y theo hàm phân phối và hàm mật độ xác suất của X.

b. Tìm hàm phân phối và hàm mật độ xác suất của Y nếu X có hàm mật độ xác suất Laplace.

HÌNH P3.4:



59. Cho Y = e^X.

a. Tìm hàm phân phối và hàm mật độ xác suất của Y theo hàm phân phối và hàm mật độ xác suất của X.

b. Tìm hàm mật độ xác suất của Y nếu X là biến ngẫu nhiên Gauss. Trong trường hợp này Y được gọi là có *hàm mật độ xác suất logarit chuẩn*.

60. Cho bán kính X có hàm mật độ xác suất được cho trong Bài tập 19.

    a. Tìm hàm mật độ xác suất của miền được che phủ bởi một chiếc đĩa bán kính X.

    b. Tìm hàm mật độ xác suất của thể tích của hình cầu bán kính X.

    c. Tìm hàm mật độ xác suất của $Y = X^n$.

61. Trong Ví dụ 3.19, cho đầu vào có phân phối đều trên $[-4d, 4d]$. Chứng minh $Z = X - q(X)$ có phân phối đều trên $[-d/2, d/2]$.

62. Cho $Y = a\tan X$, với X có phân phối đều trên khoảng $(-\pi, \pi)$. Chứng minh rằng Y là một biến ngẫu nhiên Cauchy.

PHẦN 3.6

Giá trị Kỳ vọng của Biến Ngẫu nhiên

63. Tìm kỳ vọng *m* của biến ngẫu nhiên được định nghĩa ở Bài tập 1. Giá trị trung bình của giá bán không lãi không lỗ của một chiếc vé cho quyền rút tờ hóa đơn từ chiếc bình mang ý nghĩa gì?

64. Tìm kỳ vọng của biến ngẫu nhiên được định nghĩa trong Bài tập 2. Giá trị của *m* có thể được biểu diễn như thế nào nếu một dãy đầu ra rất dài từ nguồn thông tin được mã hóa?

65. Tìm kỳ vọng và phương sai của biến ngẫu nhiên rời rạc đều lấy giá trị từ tập $\{1, 2, \ldots, n\}$ với xác suất như nhau. Bạn sẽ cần dùng đến các công thức sau:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{và} \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

66. a. Tìm kỳ vọng và phương sai của biến ngẫu nhiên nhị thức..

    b. Nếu X biểu diễn số lần xuất hiện mặt ngửa trong *n* lần tung xu, hãy giải thích vì sao kết quả của E[X] mang ý nghĩa trực quan.

67. a. Tìm kỳ vọng và phương sai của biến ngẫu nhiên Poisson.

    b. Cho $\alpha = \lambda t$. Hãy giải thích tại sao kết quả của E[X] lại mang ý nghĩa trực quan.

68. a. Tìm kỳ vọng và phương sai của biến ngẫu nhiên Gamma.

    b. Với trường hợp đặc biệt của biến ngẫu nhiên *m*-Erlang, hãy giải thích tại sao kết quả của E[X] lại có nghĩa.

69. Tìm kỳ vọng và phương sai của biến ngẫu nhiên Gauss bằng cách tích phân trực tiếp các Hệ thức (3.57) và (3.65).

70. Chứng minh các Hệ thức (3.59) và (3.60).

71. Chứng minh E[X] của biến ngẫu nhiên với hàm phân phối $F_X(x) = 1 - 1/x$, với $x > 1$, không tồn tại.

72. Chứng minh E[X] của *biến ngẫu nhiên Cauchy* X với hàm mật độ xác suất $f_X(x) = (\pi(1 + x^2))^{-1}$ không tồn tại.

73. Chứng minh các Hệ thức (3.68), (3.69) và (3.70).

74. Cho Y = $A\cos(\omega t) + c$, ở đây A có kỳ vọng m và phương sai σ^2, và ω và c là các hằng số. Tìm kỳ vọng và phương sai của Y. So sánh kết quả với những gì thu được ở Ví dụ 3.33.

75. a. Giả sử đồng xu được tung lên *n* lần. Mỗi lần tung xu tốn *d* đôla và chi phí cho việc thu được X lần ngửa là $aX^2 + bX$. Tìm kỳ vọng cho tổng chi phí.

    b. Giả sử chi phí cho việc nhận được X lần ngửa là a^X, với $a > 0$. Tìm giá trị kỳ vọng của chi phí.

76. Cho $g(X) = baX$, với *a* và *b* là các hằng số dương và X là biến ngẫu nhiên Poisson. Tìm $E[g(X)]$

77. Tìm kỳ vọng và phương sai của giới hạn tử được xét ở Bài tập 57.

78. Tìm kỳ vọng và phương sai của hàm trống giữa được xét ở Bài 58.

79. Cho X là biến ngẫu nhiên rời rạc phân phối đều trong tập S = = {1, 2, …, *n*}. Lấy Y = $K + LX$, ở đây *K* và *L* là các số nguyên. Tìm kỳ vọng và phương sai của Y.

80. Tìm momen cấp *n* của X nếu X có phân phối đều trên khoảng [0, 1]. Lặp lại với khoảng bất kỳ [*a*, *b*].

PHẦN 3.7
Các Bất Đẳng thức Markov và Chebyshev

81. So sánh cận Chebyshev và xác suất chính xác của biến cố $\{|X - m| \geq c\}$ như là hàm của *c* với

    a. X là biến ngẫu nhiên đều trên khoảng $[-b, b]$.

    b. X là biến ngẫu nhiên Laplace với tham số *a*.

    b. X là biến ngẫu nhiên Gauss với kỳ vọng 0.

82. Cho X là số lần thành công trong *n* phép thử Bernoulli với xác suất thành công *p*. Lấy Y = X/*n* là số thành công trung bình trên một phép thử. Hãy áp dụng Bất đẳng thức Chebyshev cho biến cố $\{|Y - p| > a\}$. Điều gì sẽ xảy ra khi $n \to \infty$?

83. Giả sử các bóng đèn có thời gian sống theo phân phối mũ với kỳ vọng E[X] chưa biết. Giả sử chúng ta đo thời gian sống của *n* bóng đèn, và chúng ta ước lượng kỳ vọng E[X] bằng trung bình số học Y của các phép đo. Hãy áp dụng bất đẳng thức Chebyshev cho biến cố $\{|Y - E[X]| > a\}$. Điều gì xảy ra khi $n \to \infty$? *Hướng dẫn*: Dùng biến ngẫu nhiên *m*-Erlang.

PHẦN 3.8
Kiểm định Sự Phù hợp của Phân phối với Dữ liệu

84. Bảng phân phối sau nhận được bởi việc đếm sự xuất hiện các chữ số đầu tiên của các số điện thoại trong một cột danh bạ điện thoại:

chữ số	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
quan trắc được	0	0	24	2	25	3	32	15	2	2

Hãy kiểm tra mức phù hợp tốt của các số liệu này với biến ngẫu nhiên có phân phối đều trong tập {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} tới mức có nghĩa là

1%. Lặp lại với tập {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

85. Hãy kiểm tra mức phù hợp tốt của số liệu giữa các lần đến được giới thiệu ở Bài tập 11 của Chương 1 với biến ngẫu nhiên mũ tới mức có nghĩa là 5%.

86. Một con xúc xắc được tung 96 lần và số lần mỗi mặt ngửa lên là:

k	1	2	3	4	5	6
N_k	25	6	19	16	10	20.

Hãy kiểm tra độ phù hợp tốt của số liệu với hàm khối lượng xác suất của con lắc đối xứng tới mức có nghĩa là 5%.

87. Một chương trình mô phỏng trên máy tính cho cặp số (X, Y) được giả định là có phân phối đều trong hình vuông đơn vị. Bạn sẽ sử dụng khi-bình phương như thế nào để kiểm tra độ phù hợp tốt của đầu ra của máy tính?

PHẦN 3.9

Các Phương pháp Biến đổi

88. Hãy tìm hàm đặc trưng của biến ngẫu nhiên đều trên khoảng [a, b]. Áp dụng định lý momen, hãy tìm kỳ vọng và phương sai của X.

89. Hãy tìm hàm đặc trưng của biến ngẫu nhiên Laplace. Tìm kỳ vọng và phương sai của X bằng cách áp dụng định lý momen.

90. Tìm kỳ vọng và phương sai của biến ngẫu nhiên Gauss với việc dùng định lý momen cho hàm đặc trưng cho trong Bảng 3.2.

91. Chứng minh rằng hàm đặc trưng của biến ngẫu nhiên Cauchy được giới thiệu trong Bài 72 là $e^{-|\omega|}$.

92. Tìm kỳ vọng và phương sai của biến ngẫu nhiên hình học từ hàm sinh xác suất của nó.

93. Tìm hàm sinh xác suất của biến ngẫu nhiên nhị thức. Tìm kỳ vọng và phương sai từ hàm sinh xác suất.

94. Tìm hàm sinh xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc đều.

95. Tìm P[X = r] cho biến ngẫu nhiên nhị thức âm X từ hàm sinh xác suất được cho trong Bảng 3.1. Tìm kỳ vọng của X.

96. Hãy đạo hàm Hệ thức (3.86).

97. Hãy thiết lập momen cấp n của biến ngẫu nhiên Gamma từ phép biến đổi Laplace của hàm mật độ xác suất của nó.

98. Cho X là hỗn hợp của hai biến ngẫu nhiên mũ (xem Ví dụ 3.62). Tìm phép biến đổi Laplace của hàm mật độ xác suất của X.

99. Phép biến đổi Laplace của hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên X được cho bởi

$$X^*(s) = \left(\frac{a}{s+a}\right)\left(\frac{b}{s+b}\right).$$

Tìm hàm mật độ xác suất của X. *Gợi ý*: dùng khai triển cho từng phần của X*(*s*).

100. Cho Y = *a*X + *b*, với *a* và *b* là các hằng số.

a. Tìm hàm đặc trưng của Y theo hàm đặc trưng của X.

b. Tìm hàm đặc trưng của Y nếu X là đều trên khoảng [0, 1].

c. Tìm hàm đặc trưng của Y nếu X là biến ngẫu nhiên Gauss có kỳ vọng bằng 0 và phương sai bằng 1.

PHẦN *3.10

Các Phép tính Độ Tin cậy Cơ bản

101. Thời gian sống T của một thiết bị có hàm mật độ xác suất

$$f_T(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(t-T_0)} & t \geq T_0 \\ 0 & t < T_0 \end{cases}$$

a. Tìm độ tin cậy và thời gian trung bình bị hỏng của thiết bị.

b. Tìm hàm tốc độ hỏng.

c. Bao nhiêu giờ làm việc có thể xem là đạt 99% độ tin cậy?

102. Thời gian sống T của một thiết bị có hàm mật độ xác suất

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{T_0} & a < t < a + T_0 \\ 0 & t \quad kha'c \end{cases}$$

a. Tìm độ tin cậy và thời gian trung bình bị hỏng của thiết bị.

b. Tìm hàm tốc độ hỏng.

c. Bao nhiêu giờ làm việc có thể xem là đạt 99% độ tin cậy?

103. Thời gian sống T của một thiết bị là biến ngẫu nhiên Rayleigh.

a. Tìm độ tin cậy của thiết bị.

b. Tìm hàm tốc độ hỏng.

104. Thời gian sống T của một thiết bị là biến ngẫu nhiên *m*-Erlang.

a. Tìm độ tin cậy của thiết bị.

b. Tìm hàm tốc độ hỏng.

105. Tìm hàm tốc độ hỏng của các chip nhớ được đề cập đến trong Ví dụ 2.25. Phác họa ln($r(t)$) đối nghịch với αt.

106. Một thiết bị có hàm tốc độ hỏng

$$r(t) = \begin{cases} 1 + 9(1 - t) & 0 \leq t < 1 \\ 1 & 1 \leq t < 10 \\ 1 + 10(t - 10) & t \geq 10. \end{cases}$$

Tìm hàm độ tin cậy và hàm mật độ xác suất của thiết bị..

107. Chứng minh kỳ vọng và phương sai của biến ngẫu nhiên Weibull là

$$E(T) = \alpha^{-1/\beta}\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

$$V(T) = \alpha^{-2/\beta}\left\{\Gamma(1+\frac{2}{\beta}) - \left[\Gamma(1+\frac{1}{\beta})\right]^2\right\}$$

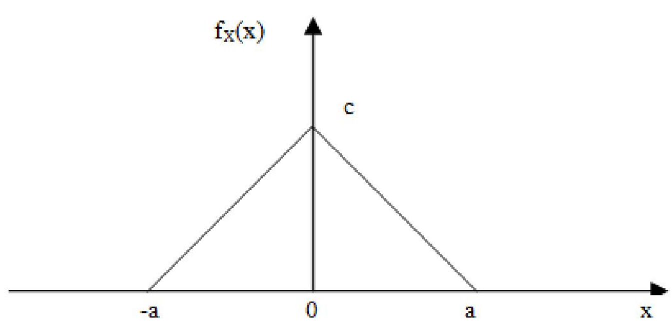
108. Một hệ thống có ba thành phần xác định và hệ thống hoạt động nếu ít nhất hai thành phần đang hoạt động.
    a. Tìm độ tin cậy và thời gian trung bình bị hỏng của hệ thống nếu thời gian sống của các thành phần là các biến ngẫu nhiên mũ với kỳ vọng 1.
    b. Tìm độ tin cậy của hệ thống và thời gian trung bình bị hỏng nếu một trong các thành phần có kỳ vọng bằng 2.
109. Giải lại Bài toán 108 nếu thời gian sống của các thành phần có phân phối Rayleigh.
110. Một hệ thống gồm hai bộ xử lý và ba đơn vị ngoại vi. Hệ thống còn làm việc chừng nào một bộ xử lý và hai đơn vị ngoại vi còn làm việc.
    a. Tìm độ tin cậy của hệ thống và thời gian trung bình bị hỏng nếu thời gian sống của bộ xử lý là biến ngẫu nhiên mũ với kỳ vọng 5 và thời gian sống của thiết bị ngoại vi là biến ngẫu nhiên mũ với kỳ vọng 10.
    b. Tìm độ tin cậy của hệ thống và thời gian trung bình bị hỏng nếu thời gian sống của bộ xử lý là biến ngẫu nhiên mũ với kỳ vọng 10 và thời gian sống của thiết bị ngoại vi là biến ngẫu nhiên mũ với kỳ vọng 5.
111. Một công việc được thực hiện bởi một hệ con gồm ba đơn vị làm việc trong một hình thức chuỗi. Các đơn vị có thời gian sống theo phân phối mũ với kỳ vọng 1. Cần bao nhiêu hệ con làm việc song song để đạt độ tin cậy 99% trong *T* giờ làm việc?

PHẦN *3.11

Tạo ra Biến Ngẫu nhiên

112. Biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất hình tam giác như trong Hình P3.5. Tìm phép biến đổi cần thiết để tạo ra X.

HÌNH P3.5:



113. Tìm phép biển đổi cần thiết để tạo ra biến ngẫu nhiên X Laplace.

114. Biến ngẫu nhiên Y dạng hỗn hợp có hàm mật độ xác suất

$$f_Y(x) = p\delta(x) + (1 - p)f_X(x),$$

với X là số biến ngẫu nhiên Laplace và p là một số nằm giữa 0 và 1. Tìm phép biến đổi cần thiết để tạo ra Y.

115. Tính số lượng trung bình các phép so sánh cần thiết trong các phép tìm kiếm được mô tả trong Ví dụ 3.58.

116. Hãy chỉ rõ phương pháp biến đổi cần thiết để tạo ra biến ngẫu nhiên hình học với tham số $p = 1/2$. Tìm số lượng trung bình các phép so sánh cần thiết cho phép tìm kiếm.

117. Hãy chỉ rõ phương pháp biến đổi cần thiết để tạo ra biến ngẫu nhiên Poisson với tham số bé α. Tính số lượng trung bình các phép so sánh cần thiết cho phép tìm kiếm.

118. Phương pháp loại trừ sau có thể được dung để sinh biến ngẫu nhiên Gauss:

   1. Tạo ra U_1, một biến ngẫu nhiên đều trong khoảng đơn vị.
   2. Lấy $X = -\ln(U_1)$.
   3. Tạo ra U_2, một biến ngẫu nhiên đều trong khoảng đơn vị. Nếu $U_2 \le \exp\{-(X_1 - 1)^2/2\}$, chấp nhận X_1. Nếu khác, loại X_1 và quay lại bước 1.
   4. Tạo ra dấu ngẫu nhiên (+ hoặc –) đồng xác suất. Cho ra X bằng X_1 với dấu được chọn.

      a. Chứng minh rằng nếu X_1 được chấp nhận, thì hàm mật độ xác suất tương ứng với hàm mật độ xác suất của giá trị tuyệt đối của biến ngẫu nhiên Gauss với kỳ vọng 0 và phương sai 1.

      b. Chứng minh X là biến ngẫu nhiên Gauss với kỳ vọng 0 và phương sai 1.

119. Cheng (1977) đã chứng minh rằng hàm $Kf_Z(x)$ chặn hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên Gamma với $\alpha > 1$, trong đó

$$f_Z(x) = \frac{\lambda\alpha^{\lambda}x^{\lambda-1}}{(\alpha^{\lambda} + x^{\lambda})^2}$$

và

$$K = (2\alpha - 1)^{1/2}.$$

Tìm hàm phân phối của $f_Z(x)$ và phép biến đổi tương ứng cần thiết để tạo ra Z.

120. a. Chứng minh rằng trong phương pháp loại trừ sửa đổi, xác suất chấp nhận X_1 là $1/K$. *Gợi ý*: Dùng xác suất có điều kiện.

b. Chứng minh Z có hàm mật độ xác suất như mong muốn.

121. Hãy dùng chương trình máy tính trên Appendix C để sinh ra biến ngẫu nhiên mũ. Sản sinh ra 500 mẫu biến ngẫu nhiên và thực hiện phép kiểm tra khi-bình phương về mức phù hợp tốt. Sắp xếp các mẫu theo chiều tăng giá trị và tìm phân phối thực nghiệm được định nghĩa ở Bài tập 10 của Chương 1.

122. Hãy dùng chương trình máy tính trên Appendix C để sinh ra biến ngẫu nhiên Gauss. Sản sinh ra 500 mẫu biến ngẫu nhiên và thực hiện phép kiểm tra khi-bình phương về mức phù hợp tốt. Sắp xếp các mẫu theo chiều tăng giá trị và tìm phân phối thực nghiệm được định nghĩa ở Bài tập 10 của Chương 1.

123. Hai phương pháp sản xuất biến ngẫu nhiên nhị thức đã được giới thiệu ở Ví dụ 3.58. So sánh các phương pháp dưới các điều kiện sau:

a. $p = 1/2$, $n = 5, 25, 50$;

b. $p = 0.1$, $n = 5, 25, 50$.

c. Hãy viết các chương trình máy tính thực hiện hai phương pháp đó và kiểm nghiệm các tốc độ tương quan giữa chúng bằng việc sản xuất 1000 mẫu có phân phối nhị thức.

124. Biến ngẫu nhiên Poisson là một số sự xuất hiện các biến cố trong một khoảng thời gian. Trong Phần 3.4, ta đã tìm ra được rằng thời điểm giữa các biến cố của biến ngẫu nhiên Poisson là biến ngẫu nhiên phân phối mũ. Phương pháp này so với phương pháp được giới thiệu ở Bài tập 117? Hãy viết các chương trình máy tính thực hiện hai phương pháp trên và so sánh các tốc độ tương quan giữa chúng khi $\alpha = 3$, $\alpha = 25$, và $\alpha = 100$.

125. Hãy viết chương trình máy tính sinh ra hàm phân phối Gamma với $\alpha > 1$, dùng phương pháp loại trừ được bàn luận đến trong Bài 119. Sử dụng phương pháp này để sản xuất các biến ngẫu nhiên m-Erlang với $m = 2, 10$ và $\lambda = 1$ và so sánh phương pháp này với cách sản xuất trực tiếp m biến ngẫu nhiên mũ như đã được đề cập đến trong Ví dụ 3.61.

PHẦN *3.12
Entropy

126. Cho X là kết cục của việc tung một con xúc xắc cân đối.

a. Tìm entropy của X.

b. Giả sử bạn được bảo X là chẵn. Hỏi độ giảm entropy?

127. Một đồng xu không cân đối được tung ba lần.

a. Tìm entropy của kết cục nếu dãy các lần xuất hiện mặt ngửa và sấp được ghi lại.

b. Tìm entropy của kết cục nếu số các lần xuất hiện mặt ngửa được ghi lại.

c. Hãy lý giải sự khác biệt giữa các entropy tính được ở câu a và câu b.

128. Cho X là số lần xuất hiện mặt sấp cho tới khi mặt ngửa lần đầu tiên xuất hiện trong dãy thí nghiệm tung một đồng xu không cân đối.

a. Tìm entropy của X với X ≥ k.

b. Tìm entropy của X với X ≤ k.

129. Một trong hai đồng xu được chọn một cách ngẫu nhiên: Xu A có P[ngửa] = 1/10 và xu B có P[ngửa] = 9/10.

a. Giả sử đồng xu được tung một lần. Tìm entropy của kết cục.

b. Giả sử đồng xu được tung hai lần và dãy xuất hiện mặt ngửa và sấp được quan trắc. Tìm entropy của kết cục.

130. Giả sử đồng xu được chọn ngẫu nhiên trong Bài 129 được tung cho đến khi mặt ngửa lần đầu tiên xuất hiện. Giả sử mặt ngửa xuất hiện trong lần tung thứ k. Tìm entropy có tính đến đặc thù của đồng xu.

131. Một kênh truyền thông nhận đầu vào I từ tập {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}. Kênh cho ra X = I + N mod 7, ở đây N có thể là +1 hoặc –1 với xác suất như nhau.

a. Tìm entropy của I nếu tất cả các đầu vào là đồng khả năng.

b. Tìm entropy của I cho X = 4.

132. Cho X là biến ngẫu nhiên rời rạc với entropy H_X.

a. Tìm entropy của Y = 2X.

b. Tìm entropy của phép biến đổi khả nghịch bất kỳ của X.

133. Cho (X, Y) là cặp kết cục từ hai lần tung độc lập một con xúc xắc.

a. Tìm entropy của X.

b. Tìm entropy của cặp (X, Y).

c. Tìm entropy trong n lần tung độc lập một con xúc xắc. Giải thích tại sao entropy trong trường hợp này lại cộng được.

134. Cho X là kết cục của việc tung một con xúc xắc, và lấy Y là số nguyên nhỏ hơn hoặc bằng X được chọn ngẫu nhiên.

a. Tìm entropy của Y.

b. Tìm entropy của cặp (X, Y) và ký hiệu nó bằng H(X, Y).

c. Tìm entropy của Y khi đã biết X = k và ký hiệu nó bằng $g(k) = H(Y \mid X = k)$. Tìm $E[g(X)] = E[H(Y \mid X)]$.

d. Chứng minh rằng $H(X, Y) = H_X + E[H(Y \mid X)]$. Giải thích ý nghĩa của đẳng thức này.

135. Cho X lấy giá trị từ {1, 2, …, K}. Giả sử P[X = K] = p, và lấy H_Y là entropy của X khi đã biết X không bằng K. Chứng minh $H_X = -p\ln p - (1 - p)\ln(1 - p) + (1 - p)H_Y$.

136. Cho X là biến ngẫu nhiên đều trong Ví dụ 3.66. Tìm và phác họa entropy của Q như là hàm của phương sai của sai số X – Q(X). *Gợi ý*: Biểu diễn phương sai của sai số theo d và thay vào biểu diễn cho entropy của Q.

137. Một kênh truyền tin nhận đầu vào cả 000 lẫn 111. Kênh truyền đi mỗi đầu vào nhị phân đúng với xác suất $1 - p$ và có lỗi với xác suất p. Tìm entropy của đầu vào khi đã biết đầu ra là 000; khi biết đầu ra là 010.

138. Cho X là biến ngẫu nhiên đều trên $[-a, a]$. Giả sử chúng ta được cho biết X là dương. Sử dụng cách tiếp cận ở Ví dụ 3.66 để tìm độ giảm entropy. Chứng minh nó bằng với độ sai khác giữa entropy vi phân của X và entropy vi phân của X mà {X > 0}.

139. Cho X là đều trên $[a, b]$, và lấy Y = 2X. So sánh các entropy vi phân của X và Y. Kết quả này khác với kết quả trong Bài toán 132 như thế nào?

140. Tìm hàm khối lượng xác suất của biến ngẫu nhiên X để cho dãy các câu hỏi trong Hình 3.36(a) là tiện lợi nhất.

141. Cho biến ngẫu nhiên X có SX = {1, 2, 3, 4, 5, 6} và hàm khối lượng xác suất (3/8, 3/8, 1/8, 1/16, 1/32, 1/32). Tìm entropy của X. Code (mã) nào là tốt nhất mà bạn có thể tìm được cho X?

142. Bảy quân bài được rút ra từ một bộ gồm 52 quân bài khác nhau. Cần bao nhiêu bit để thể hiện tất cả tất cả các kết cục có thể?

143. Tìm phép mã hóa tiện lợi nhất cho biến ngẫu nhiên hình học với $p = 1/2$.

144. Một thí nghiệm hộp có 10 kết cục xung khắc đồng xác suất. Tìm biểu diễn của mã hình cây tốt nhất cho phép mã hóa (a) một kết cục đơn của thí nghiệm; (b) của dãy n kết cục thí nghiệm.

145. Một nguồn thông tin nhị phân sản xuất n đầu ra. Giả sử chúng ta được cho biết là có k chữ số 1 trong các đầu ra.
    a. Mã tốt nhất để trỏ tới vạch của k chữ số 1 và $n - k$ chữ số 0?
    b. Cần bao nhiêu bit để xác định giá trị của k dùng mã với số bit không đổi?

146. Biến ngẫu nhiên X lấy giá trị từ tập {1, 2, 3, 4}. Tìm hàm khối lượng xác suất entropy cực đại của X biết trước E[X] = 2.

147. Biến ngẫu nhiên X không âm. Tìm hàm mật độ xác suất entropy cực đại của X khi biết trước E[X] = 10.

148. Tìm hàm mật độ xác suất entropy cực đại của X khi biết trước $E[X^2] = c$.

149. Giả sử chúng ta được cho hai tham số của biến ngẫu nhiên X, $E[g_1(X)] = c_1$ và $E[g_2(X)] = c_2$.

a. Chứng minh rằng hàm mật độ xác suất entropy cực đại của X có dạng

$$f_X(x) = Ce^{-\lambda_1 g_1(x) - \lambda_2 g_2(x)}.$$

b. Tìm entropy của X.

150. Tìm hàm mật độ xác suất entropy cực đại của X khi biết trước E[X] = m và VAR[X] = σ^2.

CÁC BÀI TOÁN CẦN VẬN DỤNG KIẾN THỨC TỔNG HỢP

151. Có ba dạng khách hàng đến một cơ sở dịch vụ. Các khoảng thời gian yêu cầu phục vụ bởi khách hàng dạng 1 và 2 là biến ngẫu nhiên mũ với kỳ vọng lần lượt là 1 và 10 giây. Khách hàng dạng 3 yêu cầu thời gian phục vụ cố định là 2 giây. Giả sử tỷ lệ của khách hàng các dạng 1, 2, và 3 tương ứng là 1/2, 1/8, và 3/8. Tìm xác suất để một khách hàng ngẫu nhiên yêu cầu nhiều hơn 15 giây cho thời gian phục vụ. So sánh xác suất trên với cận tìm được bởi bất đẳng thức Markov.

152. Thời gian sống X của một bóng đèn là một biến ngẫu nhiên với

$$P[X > t] = 1/(1 + t) \qquad t \geq 0.$$

Giả sử có các bóng đèn mới được lắp đặt tại thời điểm $t = 0$. Tại thời điểm $t = 1$ tất cả ba bóng đèn còn làm việc. Tìm xác suất để ít nhất một bóng đèn còn làm việc tại thời điểm $t = 9$.

153. Phần các phế phẩm trên toàn bộ sản phẩm là p. Mỗi sản phẩm được kiểm tra và các phế phẩm được nhận ra với xác suất α.

a. Giả thiết các chính phẩm luôn qua được cuộc kiểm tra. Xác suất để k sản phẩm được kiểm tra cho đến khi phế phẩm được nhận ra?

b. Giả sử các phế phẩm bị nhận dạng đều được loại riêng ra. Hỏi tỷ lệ phế phẩm có trong các sản phẩm còn lại?

c. Bây giờ giả sử các chính phẩm được nhận dạng với xác suất b. Hãy lặp lại câu b (thay đổi vai trò chính phẩm và phế phẩm).

154. Biến ngẫu nhiên X phân phối đều trên khoảng [0, a]. Giả sử a là chưa biết, nên chúng ta ước lượng a bởi giá trị cực đại trong n lần thực hiện thí nghiệm một cách độc lập; nghĩa là, chúng ta ước lượng a bởi Y = max{$X_1, X_2, \ldots, X_n$}.

a. Tìm P[Y ≤ y].

b. Tìm kỳ vọng và phương sai của Y, và giải thích tại sao Y là một ước lượng tốt cho a khi N lớn.

155. Một hệ thống truyền dữ liệu sử dụng các tin nhắn trong T giây. Sau khi truyền mỗi tin nhắn, nơi phát tin tạm ngừng và chờ phản hồi từ nơi nhận T giây. Nơi nhận (máy bắt tín hiệu) lập tức phản hồi bằng một tin nhắn xác nhận tin nhắn nhận được chính xác. Nơi phát tin hoạt động để gửi tin nhắn mới nếu nó nhận được phản hồi trong vòng T giây; trái lại, thì

nó sẽ gửi lại tin nhắn vừa gửi. Giả sử các tin nhắn hoàn toàn có thể bị đổi khác trong khi truyền, và điều đó xảy ra với xác suất *p*. Tìm tỷ lệ lớn nhất có thể mà các tin nhắn có thể được truyền đi từ nơi phát đến nơi nhận.

156. Một thanh tra chọn tất cả các sản phẩm thứ bội của *n* trong dây chuyền sản xuất cho quá trình kiểm định chi tiết. Giả sử thời gian giữa các lần sản phẩm ra dây chuyền là một biến ngẫu nhiên mũ với kỳ vọng 1 phút, và giả sử phải mất 2 phút để kiểm tra một sản phẩm. Tìm giá trị *n* nhỏ nhất sao cho với xác suất 90% hoặc hơn, cuộc kiểm định được hoàn thành trước khi dây chuyền cho ra sản phẩm tiếp theo cần kiểm tra.

157. Mẫu X của một tín hiệu giọng nói là biến ngẫu nhiên Laplace với tham số $\alpha = 1$. Giả sử X được lượng hóa bởi một hàm bậc thang không đều gồm ba khoảng: $(-\infty, -a]$, $(-a, 0]$, $(0, a]$, và (a, ∞)

    a. Tìm giá trị của *a* sao cho khả năng X rơi vào mỗi khoảng trong bốn khoảng trên là như nhau.

    b. Tìm điểm đại diện $x_1 = q(X)$ cho X trong $(0, a]$ mà làm cực tiểu sai số trung bình bình phương, tức sao cho

    $$\int_0^a (x - x_1)^2 f_X(x)\,dx \qquad \text{là cực tiểu}$$

    Gợi ý: Đạo hàm biểu thức trên theo x_1. Tìm các điểm đại diện cho các khoảng khác.

    c. Tính giá trị sai số trung bình bình phương của hàm bậc thang: $E[(X - q(X))^2]$.

158. Số X các electron đếm được bởi máy bắt tín hiệu trong một hệ thống truyền hình là biến ngẫu nhiên Poisson với bước sóng λ_1 khi tín hiệu hiện hữu và với bước sóng $\lambda_0 < \lambda_1$ thì tín hiệu tắt. Giả sử tín hiệu hiện hữu với xác suất *p*.

    a. Tìm P[có tín hiệu | X = *k*] và P[không tín hiệu | X = *k*].

    b. Máy bắt tín hiệu sử dụng quy tắc quyết định sau:

    Nếu P[có tín hiệu | X = *k*] > P[không tín hiệu | X = *k*], quyết định là có tín hiệu; trái lại, nghĩa là không tín hiệu.

    Chứng minh quy tắc trên dẫn đến quy tắc ngưỡng sau:

    Nếu X > *T*, quyết định là có tín hiệu; trái lại, quyết định là không có tín hiệu.

    c. Xác suất của lỗi trong quy tắc trên là bao nhiêu?

159. Đầu ra Y của một hệ thông tin nhị phân là biến ngẫu nhiên Gauss phương sai 1 và kỳ vọng là 0 nếu đầu vào là 0 và kỳ vọng 1 nếu đầu vào là 1. Giả thiết đầu vào là 1 có xác suất *p*.

a. Tìm P[đầu vào là 1 | $y < Y < y + h$] và

P[đầu vào là 0 | $y < Y < y + h$].

b. Máy bắt tín hiệu sử dụng quy tắc quyết định sau:

Nếu P[đầu vào là 1 | $y < Y < y + h$] > P[đầu vào là 0 | $y < Y < y + h$], quyết định đầu vào là 1; trái lại, nghĩa là 0.

Chứng minh quy tắc trên dẫn đến quy tắc ngưỡng sau:

Nếu $Y > T$, quyết định đầu là 1; trái lại, quyết định đầu vào là 0.

c. Xác suất của lỗi trong quy tắc trên là bao nhiêu?

160. Một nguồn thông tin nhị phân (một máy fax, chẳng hạn) tạo ra chuỗi rất dài các chữ số 0 theo sau các chữ số 1 xuất hiện "năm thì là họa". Giả sử các ký hiệu là độc lập và p = P[ký hiệu = 0] là rất gần với 1. Xét giản đồ mã hóa các chu kỳ của X với các chữ số 0 nằm giữa các chữ số 1:

1. Giả sử một chu kỳ gồm n chữ số 0 theo sau bởi 1 chữ số 1, nghĩa là $X = n$; diễn đạt n như bội của một số nguyên $M = 2^m$ với số dư r, nghĩa là, tìm k và r sao cho $n = kM + r$, ở đây $0 \leq r < M - 1$;

2. Từ mã nhị phân cho n khi đó gồm tiền tố gồm k chữ số 0 kết thúc bởi một chữ số 1, và hậu tố gồm biểu diễn m bit của số dư r. Bộ phận mã hóa có thể quyết định giá trị của n từ dãy nhị phân này.

   a. Tìm xác suất để tiền tố có k chữ số 0, giả thiết $p^M = 1/2$.

   b. Tìm độ dài từ mã trung bình khi $p^M = 1/2$.

   c. Tìm tỷ số độ giảm kích cỡ, được định nghĩa là tỷ số của độ dài trung bình của chu kỳ với độ dài trung bình của từ mã khi $p^M = 1/2$.