TÍCH PHÂN KÉP

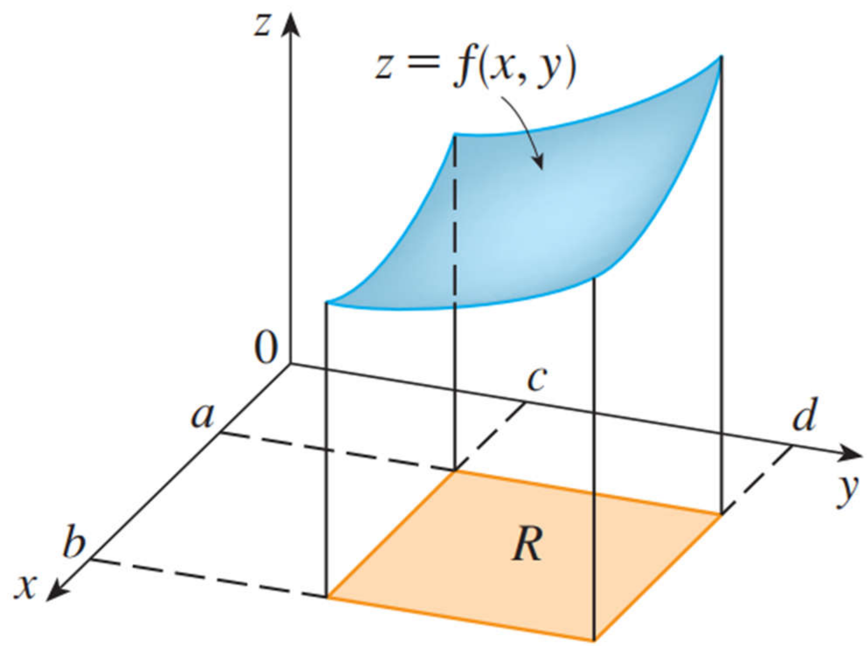
1) Khái niệm tích phân kép, tính chất
2) Cách tính
3) Ứng dụng

1. Tích phân kép

❖ Cho vật thể S xác định bởi:

$$S = \{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 | 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in R\}$$

Tính thể tích vật thể S?



1. Tích phân kép

- Chia miền R thành các hình chữ nhật con $R_{i,j}$:

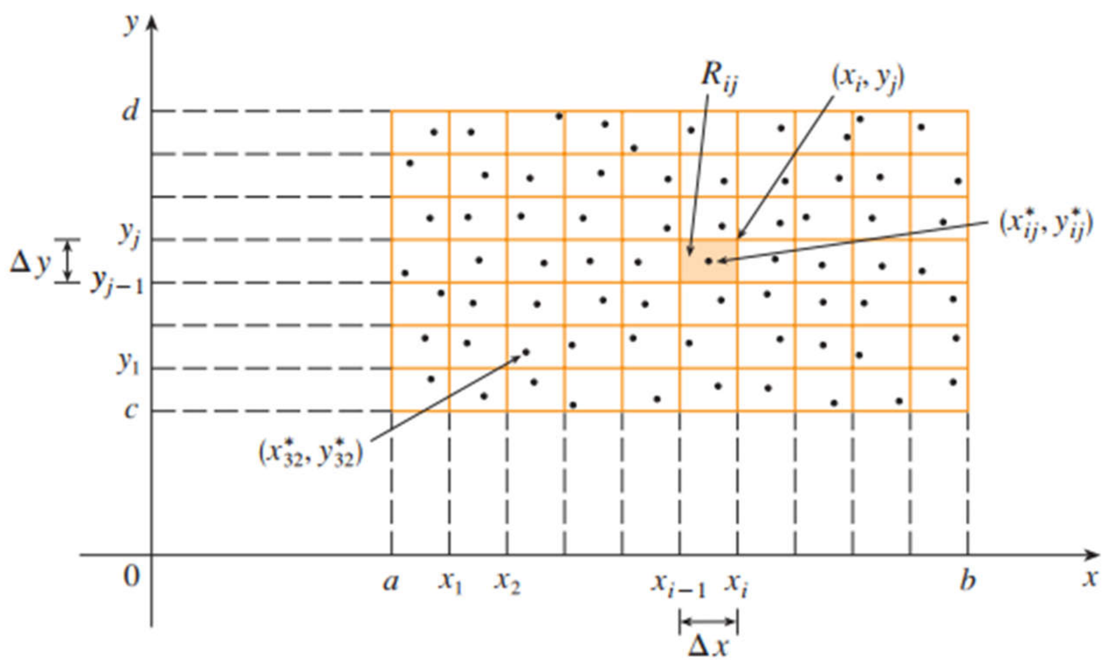
$$R_{ij} = \left[x_{i-1}, x_i\right] \times \left[y_{j-1}, y_j\right] = \left\{(x,y) \mid x_{i-1} \le x \le x_i, y_{j-1} \le y \le y_j\right\}$$

Diện tích của các hcn con:

$\Delta A = \Delta x \times \Delta y$,

Trong đó:

$\Delta x = \dfrac{b-a}{m}; \Delta y = \dfrac{d-c}{n}$.

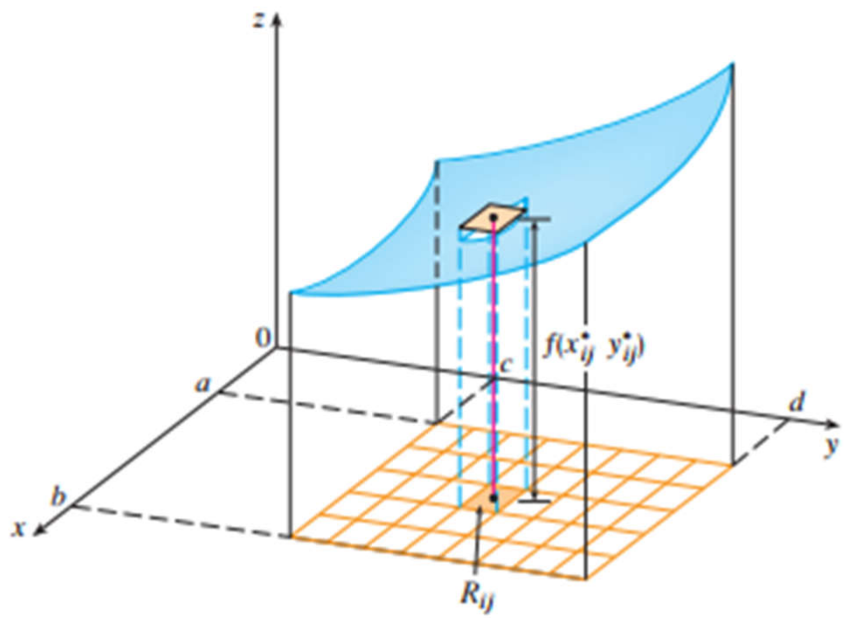


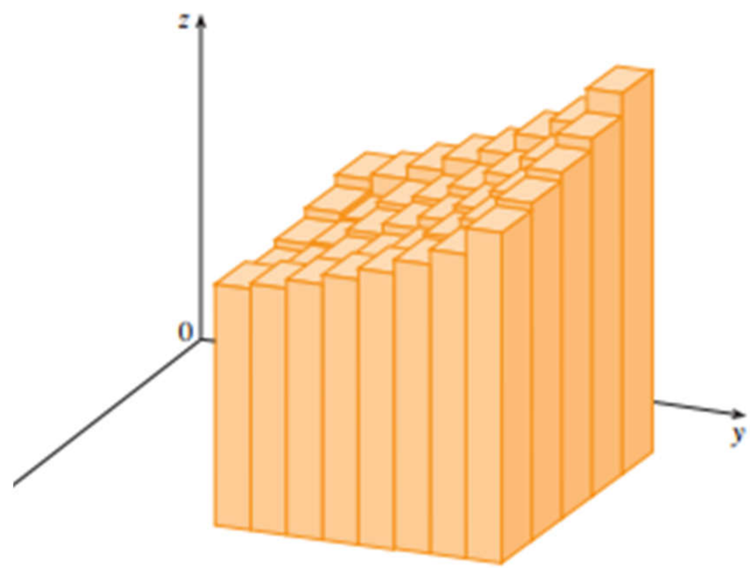
1. Tích phân kép

- Khi đó vật thể S ban đầu được chia thành mxn vật thể con S_{ij} hình trụ:

$$V_{S_{ij}} = f\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right).\Delta A$$

- Thể tích của S được xấp xỉ bằng: $V_S = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right).\Delta A$





1. Tích phân kép

Khi m, n càng lớn. Độ chính xác của V càng cao.

Do đó:

$$V = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f\left(x_{ij}^{*}, y_{ij}^{*}\right).\Delta A$$

❖ ***Định nghĩa***: Tích phân hai lớp của f trên một miền hình chữ nhật R là:

$$\boxed{\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f\left(x_{ij}^{*}, y_{ij}^{*}\right).\Delta A}$$

nếu giới hạn trên tồn tại.

1. Tích phân kép

- Hàm $f(x, y)$ xác định trong một miền đóng, bị chặn D.

  Tích phân kép của hàm $f(x, y)$ trong miền D:

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy$$

Miền lấy tích phân (D); Hàm dưới dấu tích phân ($f(x, y)$); Yếu tố diện tích ($dxdy$)

  Nếu tích phân trên tồn tại: $f(x, y)$ khả tích trong miền D

- *Nếu hs liên tục trong miền bị chặn, đóng D thì nó khả tích trong miền đấy.*

1. Tích phân kép

- Nếu $f(x,y)$ liên tục, không âm trên D, tích phân kép bằng thể tích vật thể hình trụ:

$$V = \iint_D f(x,y)\,dS = \iint_D f(x,y)\,dxdy$$

- Nếu $f(x,y) = 1, \forall (x,y) \in D$, tích phân kép bằng diện tích của miền D:

$$S = \iint_D dS = \iint_D dx\mathrm{d}y$$

1. Tích phân kép

1) $\iint\limits_D \left[f(x,y) + g(x,y) \right] dxdy = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_D g(x,y)\,dxdy$

2) $\iint\limits_D kf(x,y)\,dxdy = k\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \quad (k = const)$

3) $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy$

4) $f(x,y) \le g(x,y),\ \forall (x,y) \in D : \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \le \iint\limits_D g(x,y)\,dxdy$

5) $m \le f(x,y) \le M, \forall (x,y) \in D : mS \le \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \le MS$

6) $\exists \left(\overline{x}, \overline{y}\right) \in D : \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = f\left(\overline{x}, \overline{y}\right) S$

2. Cách tính

2.1. Trong hệ Đề các

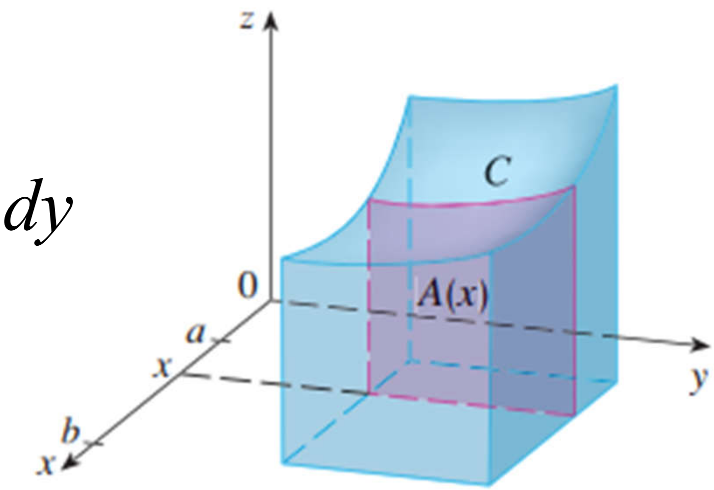
- $TH1.\ D = [a,b] \times [c,d]$

  Nếu $f(x,y)$ liên tục trên D thì:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

Nếu $f(x,y) = f_1(x).\, f_2(y)$:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b f_1(x)\,dx.\int_c^d f_2(y)\,dy$$



2. Cách tính

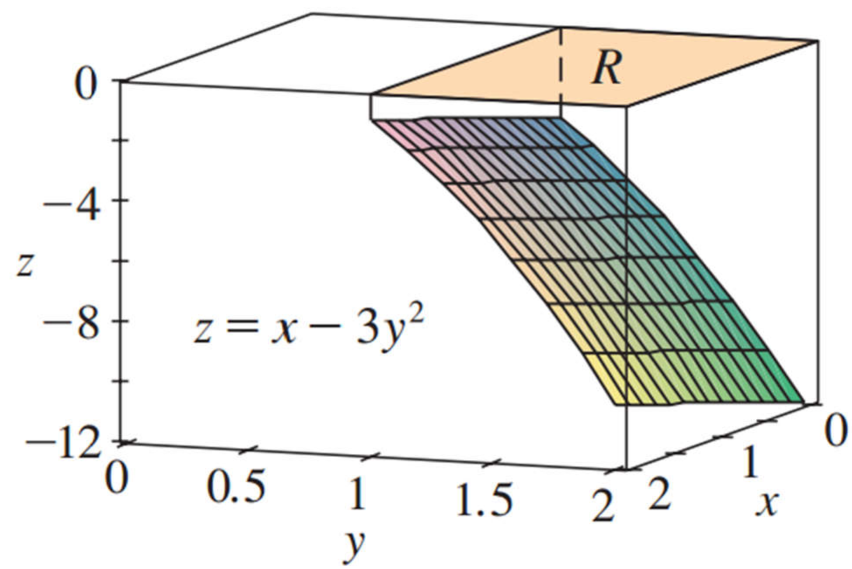
❖ ***Ví dụ***. Tính tích phân trong miền $D = \{(x, y) | 0 \le x \le 2, 1 \le y \le 2\}$:

$$\iint_D \left(x - 3y^2\right) dS$$

$$I = \iint_D \left(x - 3y^2\right) dS = \int_1^2 \int_0^2 \left(x - 3y^2\right) dxdy$$

$$I = \int_1^2 \left[\left(\frac{x^2}{2} - 3xy^2 \right) \Bigg|_{x=0}^{x=2} \right] dy$$

$$I = \int_1^2 \left(2 - 6y^2\right) dy = -12$$



2. Cách tính

❖ ***Ví dụ 1***. Tính

$$I = \iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^2},\ D = [1,2]^2$$

Vì $f(x,y)$ liên tục trên D nên:

$$I = \int_1^2 \left[\int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2} dy \right] dx = \int_1^2 \left[-\frac{1}{x+y} \Big|_1^2 \right] dx$$

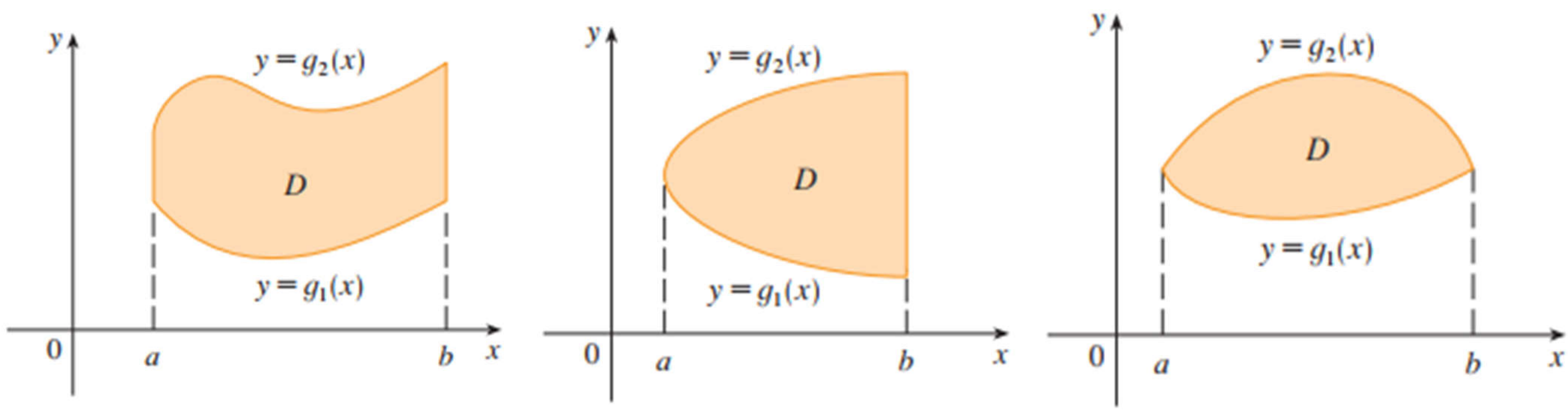
$$I = \int_1^2 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \ln \frac{x+1}{x+2} \Big|_1^2 = \ln \frac{9}{8}$$

2. Cách tính

- *TH2*. Miền lấy tích phân là miền bị chặn bất kỳ:

$$D = \{(x,y) : a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$$

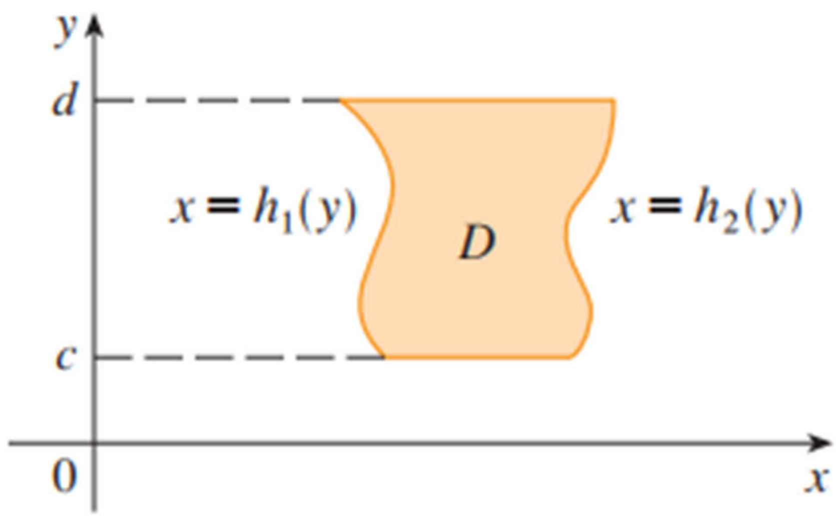
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

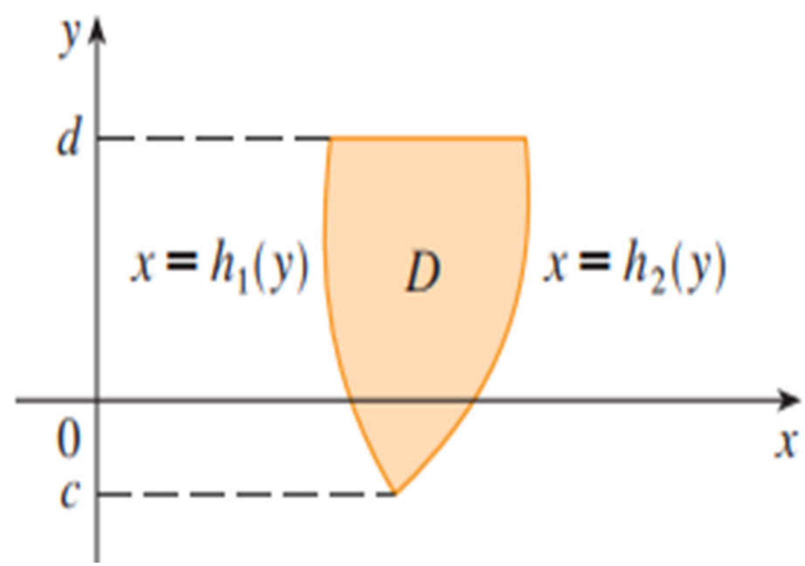


2. Cách tính

Nếu $D=\{(x,y): x_1(y)\le x\le x_2(y), c\le y\le d\}$

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_c^d\left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx\right)dy$$





2. Cách tính

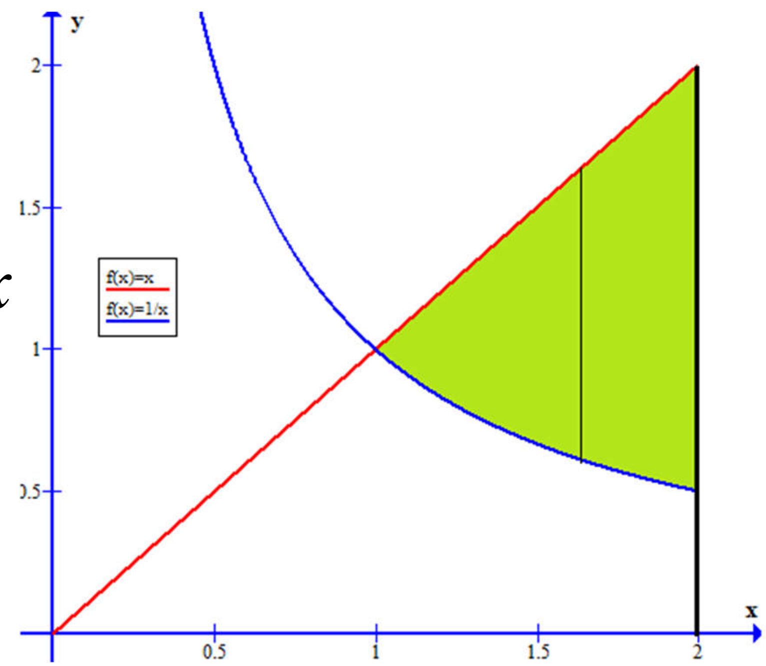
- ***Ví dụ 2***. Tính tích phân trong miền D giới hạn bởi các đường $x = 2, y = x, xy = 1$:

$$I_2 = \iint_D \frac{x^2}{y^2} dxdy$$

Cách 1. Coi $x \in [1,2], \frac{1}{x} \le y \le x$

$$I_2 = \int_1^2 \left[\int_{1/x}^{x} \frac{x^2}{y^2} dy \right] dx = \int_1^2 \left[\left. \frac{-x^2}{y} \right|_{1/x}^{x} \right] dx$$

$$I_2 = \frac{9}{4}$$

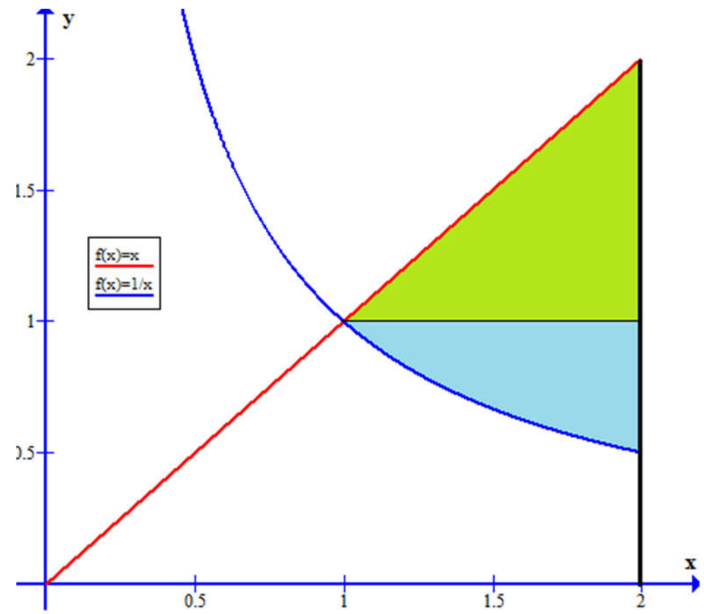


2. Cách tính

- *Cách 2*. Coi $y \in [\frac{1}{2}, 2]$

$$I_2 = \int_{1/2}^{1}\left[\int_{1/y}^{2} \frac{x^2}{y^2} dx\right] dy + \int_{1}^{2}\left[\int_{y}^{2} \frac{x^2}{y^2} d\mathrm{x}\right] dy$$

$$I_2 = \frac{9}{4}$$



2. Cách tính

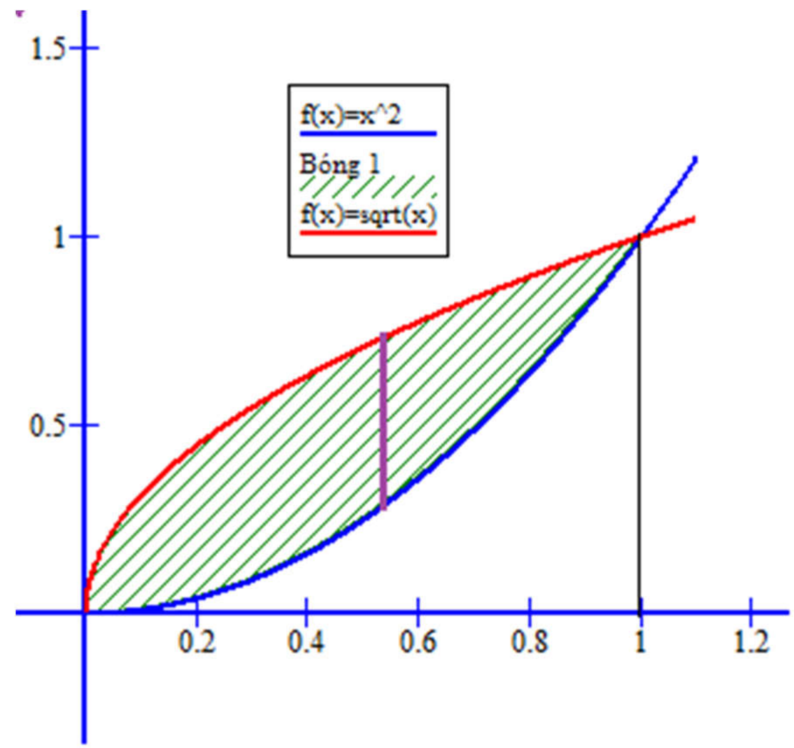
❖ *Ví dụ 3*. Tính tích phân trong miền D giới hạn bởi các parabol $y = x^2,\ x = y^2$:

$$I_3 = \iint\limits_D \frac{x}{y} dxdy$$

❖ ***Hướng dẫn***:

Khi $x \in [0,1]$ thì y thay đổi từ x^2 đến $\sqrt{x}$:

$$\iint\limits_D \frac{x}{y} dxdy = \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{x}{y} dy \right] dx$$



2. Cách tính

$$I_3 = \int_0^1 x \ln y \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = -\frac{3}{2}\int_0^1 x \ln x dx$$

TPSR loại II

$$I_3 = -\frac{3}{2}\lim_{a\to 0}\int_a^1 x\ln x dx = -\frac{3}{2}\lim_{a\to 0}\left[\left(\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2\right)\Big|_a^1\right]$$

$$I_3 = -\frac{3}{4}\lim_{a\to 0} a^2 \ln a + \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$$

Do: $\lim\limits_{a\to 0} a^2 \ln a \quad (0.\infty) = \lim\limits_{a\to 0}\dfrac{\ln a}{\dfrac{1}{a^2}} \overset{L}{=} \lim\limits_{a\to 0}\dfrac{1/\mathrm{a}}{-2/a^3} = \dfrac{-1}{2}\lim\limits_{a\to 0} a^2 = 0$

2. Cách tính

- ***2.2. Đổi biến số trong tích phân kép***

- Xét tích phân kép $\iint_D f(x,y)dxdy$, *f(x,y)* liên tục trên D. Thực hiện phép đổi biến số $x = x(u,v), y = y(u,v)$.

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f\left(x(u,v),y(u,v)\right)|J|dudv$$

$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$$

2. Cách tính

- ***Ví dụ 4***. Tính tích phân trong miền D giới hạn bởi các đường $y = -x, y = -x + 3, y = 2x - 1, y = 2x + 1$:

$$I_4 = \iint_D (x+y)\,dxdy$$

- Đổi biến số:

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = -2x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u-v}{3} \\ y = \dfrac{2u+v}{3} \end{cases} \Rightarrow J = \begin{vmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \neq 0$$

$$I_4 = \frac{1}{3}\int_0^3 \int_{-1}^1 u\,du\,dv = 3$$

2.2. Đổi biến số trong tích phân kép

❑ Trong phép biến đổi từ tọa độ *x,y* sang tọa độ cực:

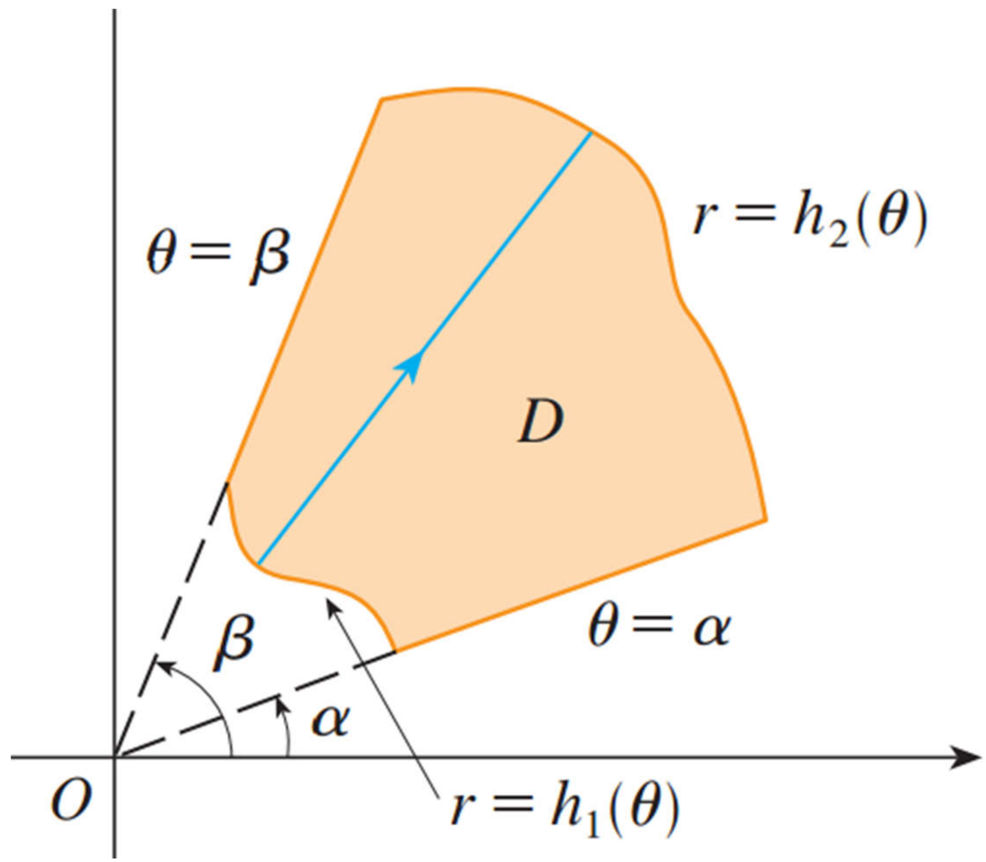
$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

- Khi đó:

$$= \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r \neq 0$$

(trừ điểm (0,0)).



2.2. Đổi biến số trong tích phân kép

$$\Rightarrow I = \iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D'} f(r,\varphi)\left|J\right|drd\varphi$$

Nếu:

$$D' = \left\{\alpha \le \varphi \le \beta, r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi)\right\}$$

$$\boxed{I = \int_{\alpha}^{\beta}\left[\int_{r_1}^{r_2} f(r,\varphi)\,rdr\right]d\varphi}$$

2. Cách tính

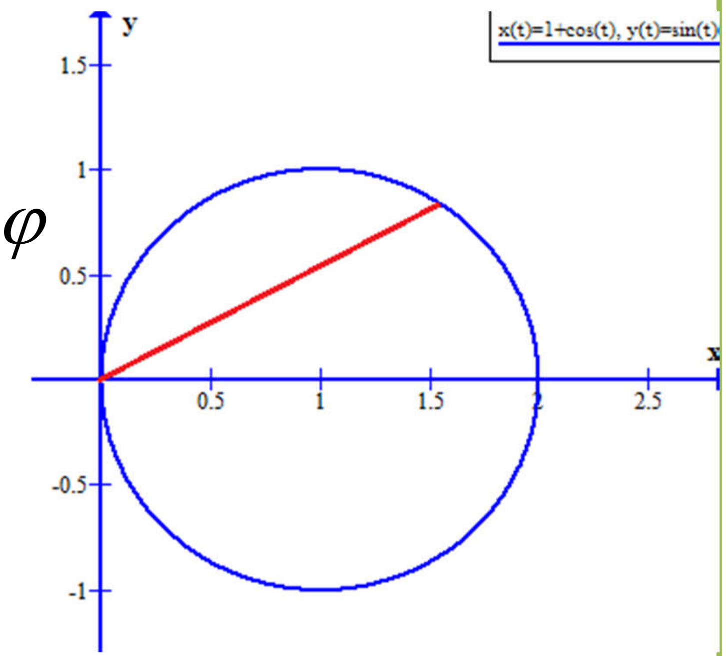
- ***Ví dụ 5***. Tính tích phân trong miền D giới hạn bởi đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$:

$$I_5 = \iint_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy$$

- Đổi sang tọa độ cực

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le 2\cos\varphi$$

$$I_5 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\varphi} r^2 r dr d\varphi = \frac{3\pi}{2}$$



3. Ứng dụng

- *3.1.* Tính diện tích của miền phẳng D trong Oxy

$$\boxed{S = \iint\limits_D dxdy}$$

- *3.2*. Tính thể tích của vật thể hình trụ:

  Phía trên: mặt $z = f(x, y)$,

  Phía dưới: miền D trong Oxy

$$\boxed{V = \iint\limits_D f(x, y)\, dxdy}$$

- *3.3.* Diện tích mặt S: $z = f(x, y)$ chiếu lên miền D của Oxy:

$$\boxed{S = \iint\limits_D \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\, dxdy}$$

3. Ứng dụng

❖ *Ví dụ 6.* Tính diện tích của miền phẳng D giới hạn bởi các đường thẳng $x = 1, y = 0$ và đường cong $y = x^3$.

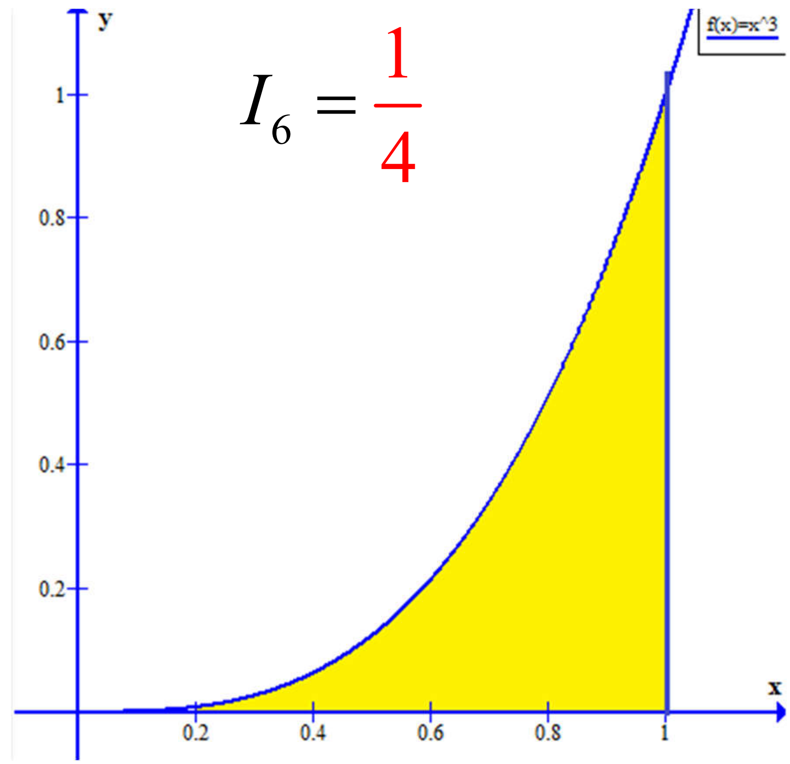
❖ *Hướng dẫn:*

Chiếu miền D lên trục Ox được đoạn [0,1]: biên dưới của D.

Khi $x \in [0,1]$, y biến thiên: $0 \to x^3$

$$I_6 = \int_0^1 \left[\int_0^{x^3} dy \right] dx = \int_0^1 \left(y \Big|_0^{x^3} \right) dx$$

$$I_6 = \frac{1}{4}$$



3. Ứng dụng

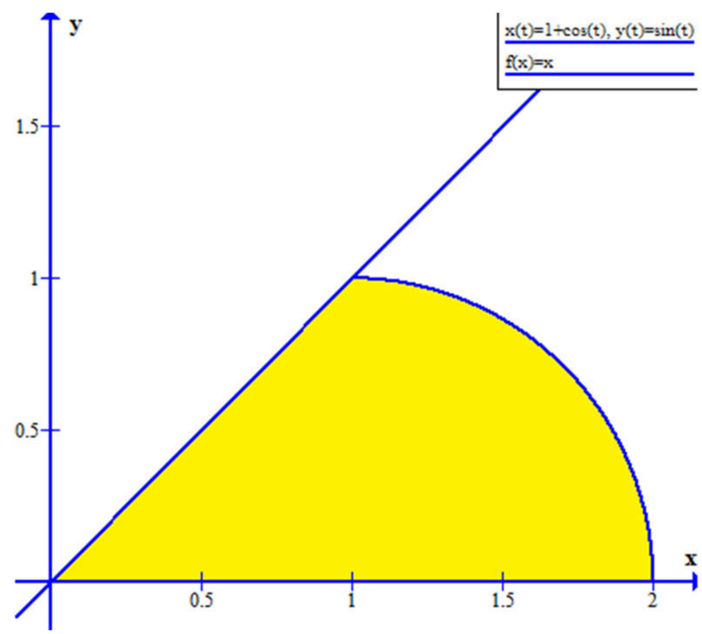
❖ ***Ví dụ 7.*** Tính diện tích của miền phẳng D giới hạn bởi các đường thẳng $y = 0, y = x$ và đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$

- Chuyển sang tọa độ cực

  Phương trình đường tròn: $r^2 = 2r\cos\varphi \Leftrightarrow r = 2\cos\varphi$

$$\left(0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}; \quad 0 \le r \le 2\cos\varphi\right)$$

$$S = \int_0^{\pi/4}\left[\int_0^{2\cos\varphi} r\,dr\right]d\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$



3. Ứng dụng

❖ ***Ví dụ 8.*** Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt $x = 0, y = 0, z = 0, x = 4, y = 4$ và mặt parabolid $z = x^2 + y^2 + 1$.

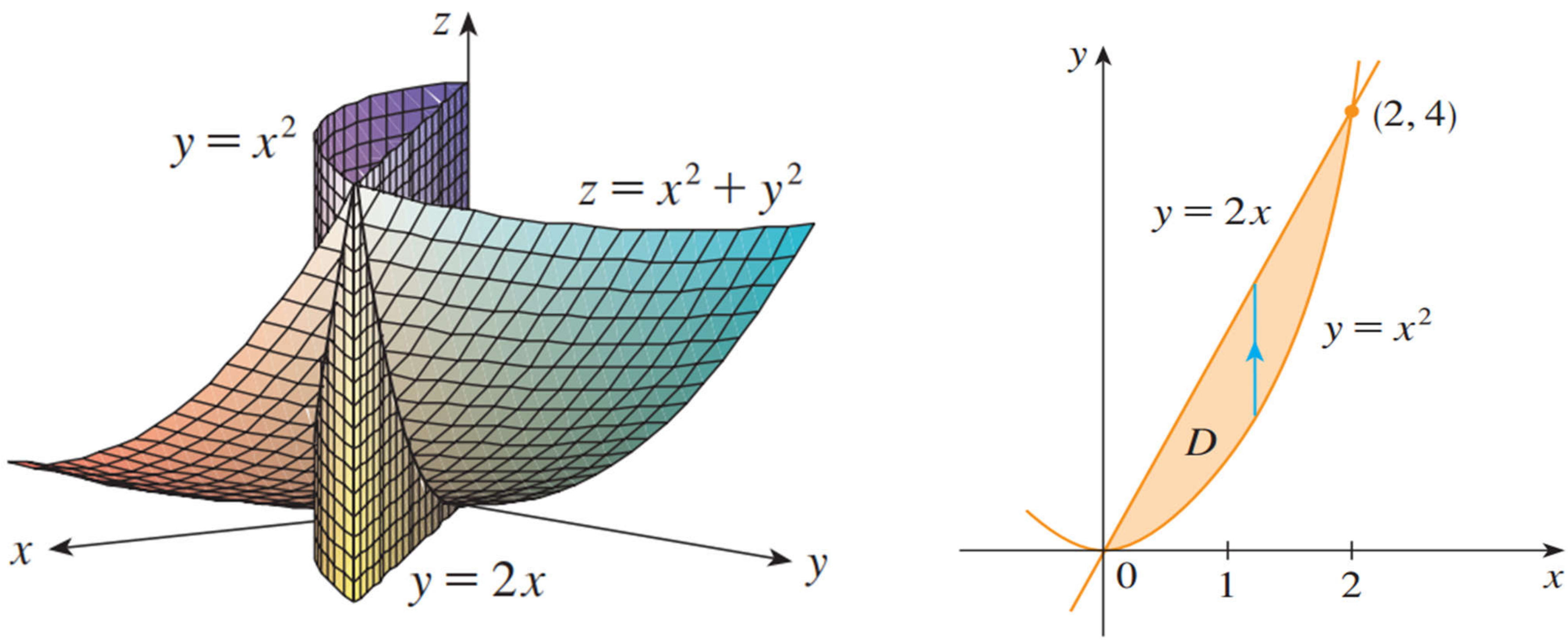
Miền D (hình chiếu của mặt Parabolid lên Oxy) là hình vuông giới hạn bởi các đường thẳng: $x = 0, y = 0, z = 0, x = 4, y = 4$.

$$V = \iint_D \left(x^2 + y^2 + 1\right) dxdy = \int_0^4 \left[\int_0^4 \left(x^2 + y^2 + 1\right) dx \right] dy$$

$$V = 186\frac{2}{3}$$

3. Ứng dụng

❖ ***Ví dụ 9***. Tìm thể tích vật thể T ở bên dưới mặt $z = x^2 + y^2$ và bên trên miền D trong mặt phẳng *xy* giới hạn bởi các đường $y = 2x, y = x^2$



3. Ứng dụng

Hình chiếu của vật thể T lên mặt phẳng Oxy là miền D:

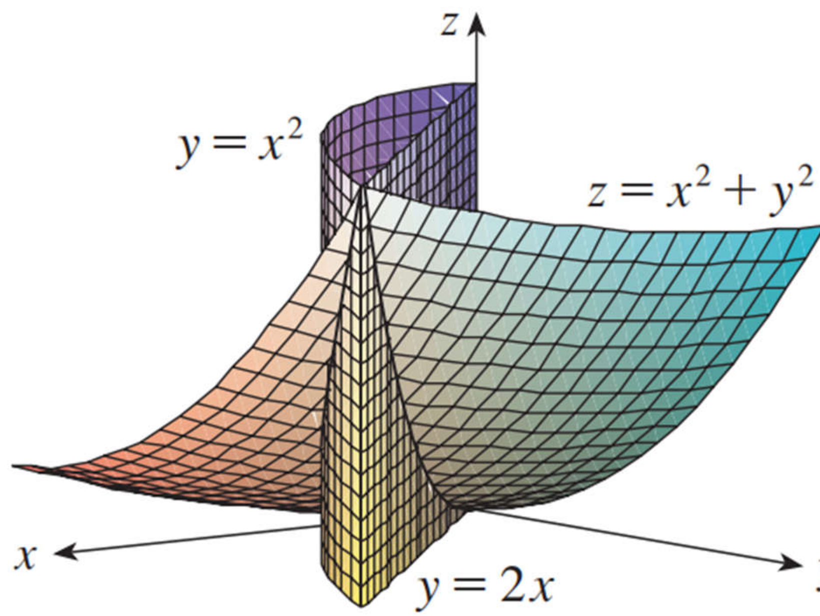
$$D = \{(x, y) | 0 \le x \le 2, x^2 \le y \le 2x\}$$

Thể tích vật thể T bằng:

$$V = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} \left(x^2 + y^2\right) dydx$$

$$V = \int_0^2 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_{x^2}^{2x} dx$$

$$V = \frac{216}{35}$$



3. Ứng dụng

❖ ***Ví dụ 10***. Tính diện tích mặt Paraboloid $z = x^2 + y^2$ nằm bên dưới mặt $z = 9$?

- Giao của mặt paraboid với mặt $z = 9$ là đường tròn:

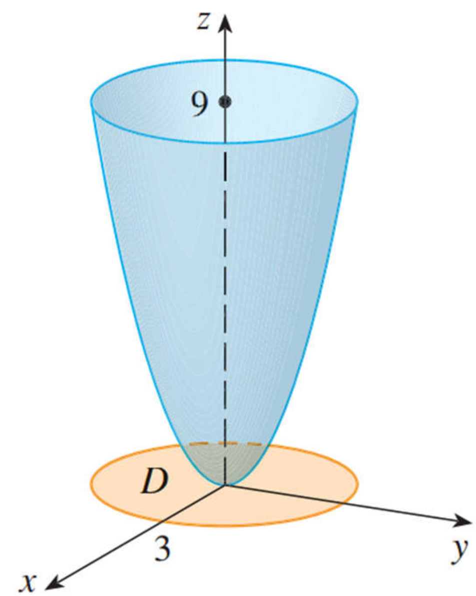
$$x^2 + y^2 = 9$$

Hình chiếu của paraboid cần tính lên Oxy

là D: hình tròn $x^2 + y^2 \leq 9$

$$S = \iint_D \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dxdy$$

$$S = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,dxdy$$



3. Ứng dụng

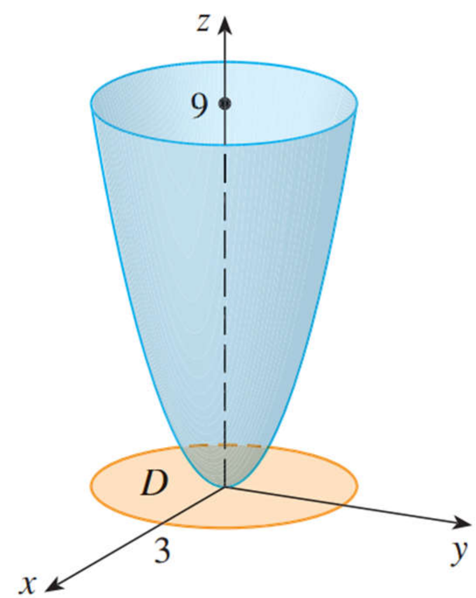
- Chuyển sang tọa độ cực:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le 3, J = r$$

$$S = \int_0^{2\pi}\int_0^3 \sqrt{1+4r^2}\, r\,dr\,d\varphi$$

$$= 2\pi.\frac{1}{8}\int_0^3 \left(1+4r^2\right)^{1/2} d\left(1+4r^2\right)$$

$$= 2\pi.\frac{1}{8}.\frac{2}{3}.\left(1+4r^2\right)^{3/2}\Big|_0^3 = \frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37}-1\right)$$



Bài tập

- Đổi thứ tự lấy tích phân trong các tích phân sau

1) $\int_{-2}^{2} dx \int_{x^2}^{4} f(x,y)\,dy$

2) $\int_{0}^{3} dy \int_{0}^{2y} f(x,y)\,dx$

3) $\int_{1}^{e} dx \int_{0}^{\ln x} f(x,y)\,dy$

4) $\int_{0}^{1} dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$

5) $\int_{-1}^{2} dx \int_{x^2}^{x+2} f(x,y)\,dy$

6) $\int_{0}^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\,dy$

Bài tập

- Tính các tích phân sau:

1) $\int_1^3 \int_0^1 (1+4xy)\,dxdy$ 10

2) $\int_0^1 \int_1^2 \left(4x^3 - 9x^2y^2\right)dydx$ -6

3) $\int_0^2 \int_0^{\pi/2} x\sin y\,dydx$

4) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_{-1}^5 \cos y\,dxdy$

5) $\int_0^2 \int_0^1 (2x+y)^8\,dxdy$

6) $\iint_D \left(6x^2y^3 - 5y^4\right)dS, \quad D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 1\}$

7) $\iint_D \cos(x+2y)\,dS, \quad D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi/2\}$

8) $\iint_D \frac{xy^2}{x^2+1}\,dS, \quad D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, -3 \le y \le 3\}$

Bai tập

- Tính các tích phân sau:

1) $\int_{y=0}^{3}\int_{x=1}^{\sqrt{4-y}}(x+y)\,dxdy$

2) $\iint\limits_D(\cos^2 x+\sin^2 y)\,dxdy,\ D: 0\le x\le \frac{\pi}{4},\ 0\le y\le \frac{\pi}{4}$

3) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y)^3},\ D: x\ge 1, y\ge 1, x+y\le 3$

4) $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,\ D: x^2+y^2\le a^2$

5) $\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy,\ D: x^2+y^2\le a^2.$

Bài tập

6) $\iint\limits_D (x-y)\,dxdy,\ D: \Delta ABC \mid A(1,1),\ B(4,1),\ C(4,4)$

7) $\iint\limits_D x\,dxdy,\ D: y=3x^2,\ y=6-3x$

8) $\iint\limits_D x^2y^{-2}\,dxdy,\ D: x=2, y=x, y=\dfrac{1}{x}$

9) $\iint\limits_D e^x\,dxdy,\ D: x=0, y=1, y=2, x=\ln y$

10) $\iint\limits_D x\,dxdy,\ D: x^2+y^2=4x-2y+4.$

.

Bài tập

- Tính thể tích các vật thể giới hạn bởi các mặt:

1) $3x+2y+z=12, x=0, x=1, y=-2, y=3$ $95/2$

2) $z=4+x^2-y^2, \mathrm{z}=0, x=-1, x=1, y=0, y=2$ 12

3) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+z=1, \mathrm{z}=0, \mathrm{x}=-1, \mathrm{x}=1, \mathrm{y}=-2, \mathrm{y}=2$ $\dfrac{166}{27}$

4) $z=x^2+y^2,\ \ D=\left\{(x,y)\,|\,0\le y\le 4, \frac{1}{2}y\le x\le\sqrt{y}\right\}$ $\dfrac{216}{35}$

5) $z=xy, \quad \forall(x,y)\in D$ gh:$y=x-1, y^2=2x+6;$ 36

6) $z=1-x^2-y^2, y=x, y=\sqrt{3}x, z=0, \mathrm{x}\ge 0, \mathrm{y}\ge 0, \mathrm{z}\ge 0$ $\left(\dfrac{\pi}{48}\right)$

Bài tập

- Tính diện tích của các miền giới hạn bởi các đường sau:

1) $x = 0;\ y = 0;\ \mathrm{x} = 2;\ \mathrm{y} = \mathrm{e}^{x}$

2) $y = -1;\quad y = -x;\quad x^2 + y^2 = -2y$

3) $x = 2;\ y^2 = x + 2$

4) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2.a^2\left(x^2 - y^2\right)$

5) $\left(x^2 + y^2\right)^3 = x^4 + y^4$

6) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2y^3$

Bài tập

- Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt sau:

1) $y = x^2; \quad y = 1; \; x + y + z = 4; \quad z = 4 \;\; 4/5$

2) $z = y^2 - x^2; \;\; z = 0; \;\; y = \pm 2$

3) $x + 2y + z = 2, x = 2y, x = 0, z = 0; \quad 1/3$

4) $z = x^2 + 3y^2, \quad x = 0, y = 1, y = x, z = 0 \;\; 5/6$

5) $z = 4 - x^2 - y^2; \;\; 2z = 2 + x^2 + y^2 \quad 3\pi$

6) $y = x^2; \quad z = 0; \;\; y + z = 2; \quad 32\sqrt{5}/15$

7) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2; \;\; x^2 + y^2 = Rx; \quad R^3(3\pi - 4)/18$

8) $2z = x^2 + y^2; x^2 + y^2 = 1; \quad 2\pi\left(2\sqrt{2} - 1\right)/3$

Bài tập

- Tính diện tích của các phần mặt cong sau:

1. Tính diện tích của phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ nằm trong hình trụ $x^2 + y^2 = Ry$. $4R^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$
2. Tính diện tích của phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ nằm trong hình trụ $z^2 + y^2 = Ry + Rz$
3. Tính diện tích phần mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ nằm bên trong hình trụ $x^2 + y^2 = 2x$. $\pi\sqrt{2}$
4. Tính diện tích mặt trụ $x^2 = 2z$ bị cắt bởi các mặt phẳng $x - 2y = 0, y = 2x, x = 2\sqrt{2}$. 13

Bài tập

7–18 Evaluate the double integral.

7. $\displaystyle\iint_D y^2\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid -1 \leqslant y \leqslant 1,\ -y - 2 \leqslant x \leqslant y\}$

8. $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x^5 + 1}\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant x^2\}$

9. $\displaystyle\iint_D x\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant \sin x\}$

10. $\displaystyle\iint_D x^3\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid 1 \leqslant x \leqslant e,\ 0 \leqslant y \leqslant \ln x\}$

11. $\displaystyle\iint_D y^2 e^{xy}\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 4,\ 0 \leqslant x \leqslant y\}$

Bài tập

12. $\displaystyle\iint_D x\sqrt{y^2 - x^2}\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant x \leqslant y\}$

13. $\displaystyle\iint_D x\cos y\, dA,$ D is bounded by $y = 0,\ y = x^2,\ x = 1$

14. $\displaystyle\iint_D (x + y)\, dA,$ D is bounded by $y = \sqrt{x}$ and $y = x^2$

15. $\displaystyle\iint_D y^3\, dA,$

D is the triangular region with vertices $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(3, 2)$

16. $\displaystyle\iint_D xy^2\, dA,$ D is enclosed by $x = 0$ and $x = \sqrt{1 - y^2}$

Bài tập

19–28 Find the volume of the given solid.

19. Under the plane $x + 2y - z = 0$ and above the region bounded by $y = x$ and $y = x^4$

20. Under the surface $z = 2x + y^2$ and above the region bounded by $x = y^2$ and $x = y^3$

$\boxed{\textbf{21.}}$ Under the surface $z = xy$ and above the triangle with vertices $(1, 1)$, $(4, 1)$, and $(1, 2)$

22. Enclosed by the paraboloid $z = x^2 + 3y^2$ and the planes $x = 0$, $y = 1$, $y = x$, $z = 0$

23. Bounded by the coordinate planes and the plane $3x + 2y + z = 6$

24. Bounded by the planes $z = x$, $y = x$, $x + y = 2$, and $z = 0$

Bài tập

25. Enclosed by the cylinders $z = x^2$, $y = x^2$ and the planes $z = 0$, $y = 4$

26. Bounded by the cylinder $y^2 + z^2 = 4$ and the planes $x = 2y$, $x = 0$, $z = 0$ in the first octant

27. Bounded by the cylinder $x^2 + y^2 = 1$ and the planes $y = z$, $x = 0$, $z = 0$ in the first octant

28. Bounded by the cylinders $x^2 + y^2 = r^2$ and $y^2 + z^2 = r^2$

In the first octant: góc phần tám thứ nhất.