ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ

ĐỀ THI HỌC KỲ

GIẢI TÍCH II - NĂM HỌC 2018 - 2019

Đề 1

(Thời gian làm bài: 120 phút)

<u>Câu 1</u> (1.5đ). a) Xét tính liên tục của hàm số sau tại điểm M(0,0):

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4},(x,y)\neq(0,0)\\ 0, \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

b) Tính đạo hàm hàm số $z = \ln ln\sqrt{x^2 + y^2}$ tại điểm $M(1, 1)$ theo hướng đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.

c) Viết phương trình pháp tuyến và tiếp diện của mặt $z = 2x^2 + 4y^2$ tại $M(2, 1, 12)$.

<u>Câu 2</u> (1.0đ). Tìm cực trị hàm $f(x,y)=6-4x-3y$ với điều kiện *x, y* liên hệ bởi phương trình $x^2 + y^2 = 1$.

<u>Câu 3</u> (2.5đ).

a) Tính diện tích mặt trụ $x^2 = 2z$ bị cắt bởi các mặt phẳng: $x - 2y = 0,\ y = 2x,\ x = 2\sqrt{2}$.

b) Tính tích phân sau nếu D là miền giới hạn bởi các mặt phẳng $x + z = 3,\ y = 2,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$:

$$\iiint_D \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$$

c) Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt $y + z = 4,\ 2z = x^2 + y^2$.

<u>Câu 4</u> (2.5đ). Tính các tích phân sau:

a) Tính $\int_L y^2dx + x^2dy,$ L là nửa trên của elip $x = a\cos t, y = b\sin t$, và L có hướng là hướng cùng chiều kim đồng hồ.

b) $\iint_S \left(x^2 + y^2\right) dS,$ S là phần mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ nằm giữa các mặt phẳng $z = 0, z = 1.$

<u>Câu 5.</u> (2.5đ) Giải các phương trình vi phân sau:

a) $y' - \frac{2y}{x+1} = \left(x+1\right)^3$ với điều kiện ban đầu $y\left(0\right) = \frac{1}{2}$.

b) $y'' - 3y' + 2y = e^x + sin3x.$

(Thí sinh không sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.)

Đáp án

<u>Câu 1.</u>

a) Với $(x,y)=(0,0): f(x,y)=0$

Với $(x,y)\neq(0,0)$, nếu cho $(x,y)\to(0,0)$ theo đường cong $x=k.y^2$ ta có:

$f\left(ky^2,y\right)=\dfrac{ky^2.y^2}{k^2y^4+y^4}=\dfrac{k}{k^2+1}$ khi $y\neq 0$.

Do đó $\lim\limits_{y\to 0} f\left(ky^2,y\right)=\dfrac{k}{1+k^2}$

Vậy khi $(x,y)\to(0,0)$ theo các phương khác nhau, f(x,y) dần tới những giới hạn khác nhau. Do đó không tồn tại $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Vậy hàm đã cho không liên tục tại điểm M(0,0).

b) Tính đạo hàm hàm số $z = \ln ln\sqrt{x^2+y^2}$ tại điểm $M(1,1)$ theo hướng đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.

Ta có:

$$\begin{cases} z'_x=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{x}{x^2+y^2} \\ z'_y=\dfrac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{y}{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z'_x(M)=1/2 \\ z'_y(M)=1/2 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{grad}f(M)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Hướng của đường phân giác góc phần tư thứ nhất có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Vậy: $\dfrac{\partial f}{\partial u}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $$f(x,y,z)=2x^2+4y^2-z \Rightarrow \begin{cases} f'_x=4x \\ f'_y=8y \\ f'_z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_x(M)=8 \\ f'_y(M)=8 \\ f'_z(M)=-1 \end{cases}$$

Phương trình pháp tuyến của mặt tại điểm M:

$$\frac{x-2}{8}=\frac{y-1}{8}=\frac{z-12}{-1}$$

Phương trình tiếp diện của mặt tại điểm M:

$$8(x-2)+8(y-1)-(z-12)=0$$
$$\Leftrightarrow 8x+8y-z-12=0$$

<u>Câu 2</u>. Tìm cực trị hàm $f(x,y)=6-4x-3y$ với điều kiện *x, y* liên hệ bởi phương trình $x^2+y^2=1$.

Hàm Lagrange: $L=6-4x-3y+\lambda\left(x^2+y^2-1\right)$

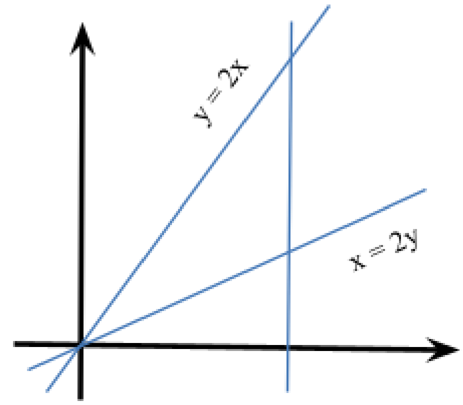
Điểm dừng là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} L'_x=0 \\ L'_y=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4+2\lambda x=0 \\ -3+2\lambda y=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2/\lambda \\ y=3/2\lambda \\ \dfrac{4}{\lambda^2}+\dfrac{9}{4\lambda^2}=1 \end{cases}$$

Trường hợp 1: $\lambda=\frac{5}{2}, \qquad x=\frac{4}{5}, y=\frac{3}{5}$

$$L''_{xx}=2\lambda=5;\ L''_{xy}=0; \qquad L''_{yy}=2\lambda=5$$
$$\Rightarrow d^2L=5dx^2+5dy^2=5\left(dx^2+dy^2\right)>0$$

$$\Rightarrow M_1\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$$ là điểm cực tiểu



Trường hợp 2: $\lambda = -\frac{5}{2}, \quad x = -\frac{4}{5}, \quad y = -\frac{3}{5}$

$$L''_{xx} = 2\lambda = -5; \qquad L''_{xy} = 0; \qquad L''_{yy} = 2\lambda = -5$$

$$\Rightarrow d^2L = -5dx^2 - 5dy^2 = -5\left(dx^2 + dy^2\right) < 0$$

$$\Rightarrow M_2\left(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$$ là điểm cực đại

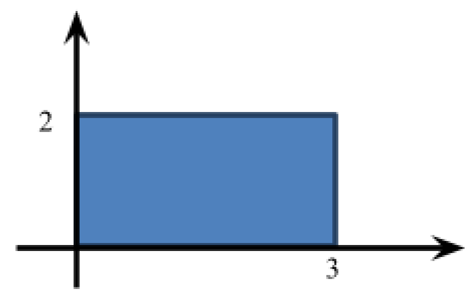
<u>Câu 3</u>. a) Theo bài cho ta có:

$$z = \frac{x^2}{2} \Rightarrow z'_x = x;\ z'_y = 0 \Rightarrow \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \sqrt{1 + x^2}$$

Áp dụng công thức tính diện tích mặt cong ta có:

$$S = \iint_{(S)} dS = \iint_D \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\,dxdy = \iint_D \sqrt{1 + x^2}\,dxdy$$

Trong đó D là miền tam giác, hình chiếu của phần mặt cong cần tính diện tích trên mặt phẳng Oxy như hình vẽ



Do đó:

$$S = \int_0^{2\sqrt{2}} \int_{x/2}^{2x} \sqrt{1 + x^2}\,dydx = \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{3}{2} x\sqrt{1 + x^2}\,dx$$

$$S = \frac{3}{4}\int_0^{2\sqrt{2}} \left(1 + x^2\right)^{1/2} d\left(1 + x^2\right) = \frac{3}{4}.\frac{2}{3}\left(1 + x^2\right)^{3/2}\Big|_0^{2\sqrt{2}} = 13$$

<u>b)</u> $$I_2 = \iiint_D \frac{dxdydz}{\left(x + y + z + 1\right)^3} = \iint_G \left[\int_0^{3-x} \frac{dz}{\left(x + y + z + 1\right)^3}\right] dxdy$$

Trong đó G là hình chiếu của D lên Oxy

$$I_2=-\frac{1}{2}\int_0^3\int_0^2\left[\frac{1}{(x+y+z+1)^2}\Bigg|_{z=0}^{z=3-x}\right]dydx=-\frac{1}{2}\int_0^3\int_0^2\left[\frac{1}{(4+y)^2}-\frac{1}{(x+y+1)^2}\right]dydx$$

$$I_2=-\frac{1}{2}\left[-3.\frac{1}{4+y}\Bigg|_{y=0}^{y=2}-\int_0^3\frac{-1}{x+y+1}\Bigg|_{y=0}^{y=2}dx\right]=\frac{-1}{2}\left[\frac{1}{4}+\int_0^3\left[\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+1}\right]dx\right]$$

$$I_2=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}+\ln\left|\frac{x+3}{x+1}\right|\Bigg|_0^3\right]=\frac{4\ln 2-1}{8}$$

<u>Câu 4</u> (2.5đ). Tính các tích phân sau:

a) Tính $\int_L y^2dx+x^2dy,$ L là nửa trên của elip $x=a\cos t, y=b\sin t$, và L có hướng là hướng cùng chiều kim đồng hồ.

$$\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}dx=-a\sin tdt\\ dy=b\cos tdt\end{cases}$$

$$\Rightarrow\int_L y^2dx+x^2dy=\int_\pi^0\left[b^2\sin^2 t.(-a\sin t)+a^2\cos t.b\cos t\right]dt$$

$$=ab\int_\pi^0\left(a\cos^3 t-b\sin^3 t\right)dt=a^2b\int_\pi^0\left(1-\sin^2 t\right)d(\sin t)+ab^2\int_\pi^0\left(1-\cos^2 t\right)d(\cos t)$$

$$=ab^2.\left[\left(\cos t-\frac{\cos^3 t}{3}\right)\Bigg|_\pi^0\right]=\frac{4ab^2}{3}$$

b) $\iint_S\left(x^2+y^2\right)dS,$ S là phần mặt nón $z=\sqrt{x^2+y^2}$ nằm giữa các mặt phẳng $z=0, z=1$.

$$z=\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow z_x'=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, z_y'=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=\sqrt{2}$$

Suy ra $\iint_S (x^2+y^2)dS = \sqrt{2}\iint_D (x^2+y^2)dxdy$, trong đó miền D là hình tròn trong mặt phẳng Oxy có phương trình $x^2+y^2 \le 1$.

Chuyển sang tọa độ cực:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le 1, |J| = r$$

$$\sqrt{2}\iint_D (x^2+y^2)dxdy = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2.rdrd\varphi = 2\sqrt{2}\pi.\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

<u>Câu 5.</u> (2.5đ)

a) Từ phương trình đã cho, suy ra

$$p = \frac{-2}{x+1} \Rightarrow \int p(x)dx = \int \frac{-2}{x+1}dx = -2\ln|x+1|;\ q(x) = (x+1)^3$$

Nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính cấp 1

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right] = e^{2\ln|x+1|}\left[C + \int (x+1)^3.e^{-2\ln|x+1|}dx\right]$$

$$y = (x+1)^2\left[C + \int (x+1)dx\right] = (x+1)^2\left(C + \frac{x^2}{2} + x\right)$$

Điều kiện ban đầu $y(0) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = C$

Vậy nghiệm cần tìm $y = (x+1)^2\left(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} + x\right) = \frac{1}{2}(x+1)^4$.

b) Phương trình đặc trưng: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$

Nghiệm tổng quát phương trình thuần nhất $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$

Vế phải $f(x) = e^x + \sin 3x = f_1(x) + f_2(x), f_1(x) = e^x,\ f_2(x) = \sin 3x$

$f_1(x) = e^x \Rightarrow \alpha = 1$ trùng với nghiệm đơn của phương trình đặc trưng, suy ra:

$y_{r1} = Axe^x \Rightarrow y_{r1}^{'} = Ae^x + Axe^x,\ y_{r1}^{''} = 2Ae^x + Axe^x$

Thay vào phương trình $y'' - 3y' + 2y = e^x$ ta được $A = -1 \Rightarrow y_{r1} = -xe^x$

$f_2(x) = \sin 3x \Rightarrow \beta = 3 \Rightarrow \pm i\beta = \pm 3i$ không trùng với nghiệm của phương trình thuần nhất, suy ra:

$y_{r2} = B\cos 3x + C\sin 3x$

$\Rightarrow y_{r2}^{'} = -3B\sin 3x + 3C\cos 3x;\quad y_{r2}^{''} = -9B\cos 3x - 9C\sin 3x$

Thay vào phương trình $y'' - 3y' + 2y = \sin 3x$ ta được $B = \dfrac{9}{130}, C = \dfrac{-7}{130}$

$\Rightarrow y_{r2} = \dfrac{9}{130}\cos 3x - \dfrac{7}{130}\sin 3x$

Vậy nghiệm của phương trình: $y = C_1e^x + C_2e^{2x} - xe^x + \dfrac{9}{130}\cos 3x - \dfrac{7}{130}\sin 3x$