

Nội dung Chương 6

1. Tích phân mặt loại 1

2. Tích phân mặt loại 2

1. Tích phân mặt loại 1

Định nghĩa

Cho hàm $f(x, y, z)$ xác định trên mặt cong S .

Chia S thành n mặt con: S_1, S_2, \dots, S_n rời nhau (không chồng lên nhau).

Diện tích tương ứng: $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$.

Trên mỗi mặt S_i lấy điểm $M_i(x_i, y_i, z_i)$ tùy ý.

Lập tổng Riemann:

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(M_i) \cdot \Delta S_i$$

$I = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n$, không phụ thuộc cách chia mặt cong S , và cách lấy điểm M_i .

$$I = \iint_S f(x, y, z) dS$$

được gọi là **tích phân mặt loại 1** của hàm $f(x, y, z)$ trên mặt S .

1. Tích phân mặt loại 1

Tính chất

1. $f(x, y, z)$ liên tục trên mặt cong trơn S thì khả tích trên S .

2. Diện tích của mặt S :

$$\iint_S dS.$$

$$3. \iint_S (kf + mg)dS = k \iint_S f dS + m \iint_S g dS$$

4. Nếu $S = S_1 \cup S_2$ thì:

$$\iint_S f dS = \iint_{S_1} f dS + \iint_{S_2} f dS.$$

1. Tích phân mặt loại 1

Cách tính

Cho hàm $f(x, y, z)$ xác định trên mặt cong $S: z = z(x, y)$.

Chia S thành n mặt con: S_1, S_2, \dots, S_n rời nhau (không chồng lên nhau).

Diện tích tương ứng: $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$.

Trên mỗi mặt S_i lấy điểm $M_i(x_i, y_i, z_i)$ tùy ý.

Lập tổng Riemann:

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(M_i) \cdot \Delta S_i$$

Trong phần ứng dụng tích phân kép (tính diện tích mặt cong), ta có:

$$\begin{aligned}\Delta S_i &\approx \sqrt{[z'_x(x_i, y_i)]^2 + [z'_y(x_i, y_i)]^2 + 1} \cdot S(D_i) \\ &= \sqrt{[z'_x(x_i, y_i)]^2 + [z'_y(x_i, y_i)]^2 + 1} \cdot \Delta x \Delta y\end{aligned}$$

1. Tích phân mặt loại 1

Cách tính

$$\begin{aligned}\text{Do đó: } I_n &= \sum_{i=1}^n f(M_i) \cdot \Delta S_i \\ &\approx \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \cdot \sqrt{[z'_x(x_i, y_i)]^2 + [z'_y(x_i, y_i)]^2 + 1} \cdot \Delta x \Delta y \\ &= \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i(x_i, y_i)) \cdot \sqrt{[z'_x(x_i, y_i)]^2 + [z'_y(x_i, y_i)]^2 + 1} \cdot \Delta x \Delta y \\ \Rightarrow I &= \lim_{n \rightarrow \infty} I_n \text{ hay } \iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z) \cdot \sqrt{[z'_x]^2 + [z'_y]^2 + 1} \cdot dxdy \\ &= \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{[z'_x]^2 + [z'_y]^2 + 1} \cdot dxdy\end{aligned}$$

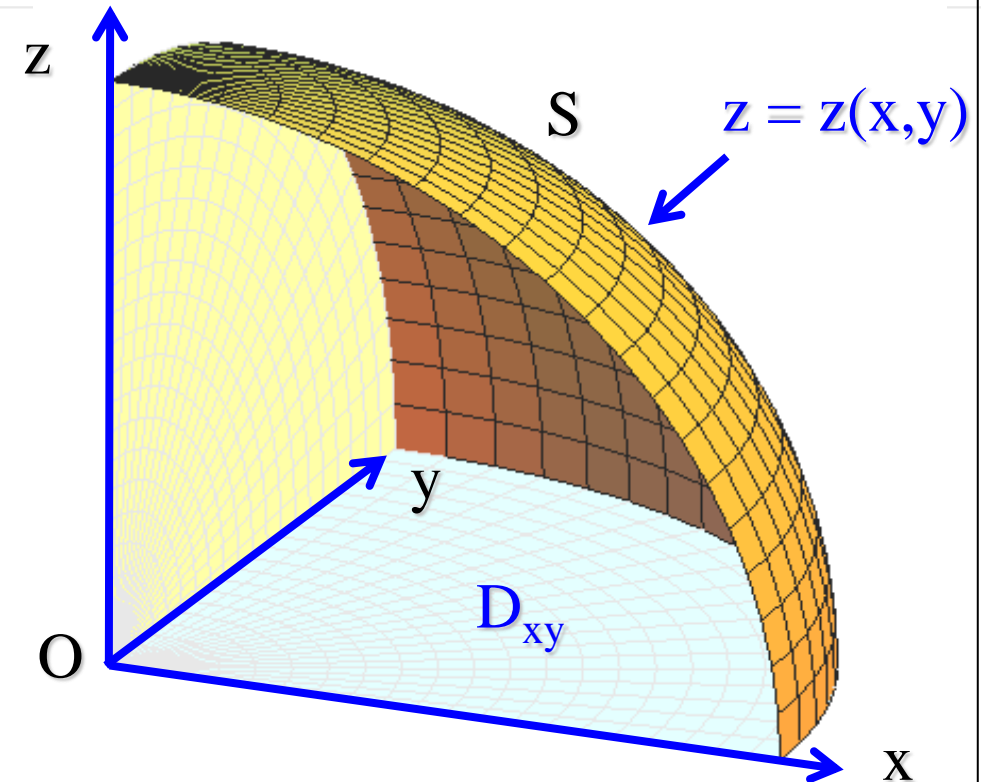
1. Tích phân mặt loại 1

Cách tính

1. Chiều mặt cong S lên mp Oxy

Nếu S có phương trình $z = z(x, y)$

và S có hình chiếu trên mp Oxy là D_{xy} :



$$\oint\limits_{\textcircled{S}} f(x, y, \textcolor{blue}{z}) \textcircled{dS} = \iint\limits_{\textcircled{D_{xy}}} f(x, y, \textcolor{blue}{z(x, y)}) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy$$

1. Tích phân mặt loại 1

Cách tính

2. Chiều mặt cong S lên mp Oxz

Nếu S có phương trình $y = y(x, z)$
và S có hình chiếu trên mp Oxz là D_{xz} :

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z) \sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2} dx dz$$

3. Chiều mặt cong S lên mp Oyz

Nếu S có phương trình $x = x(y, z)$
và S có hình chiếu trên mp Oyz là D_{yz} :

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2} dy dz$$

1. Tích phân mặt loại 1

Chú ý

Nếu hình chiếu của S xuống mặt phẳng Oxy chỉ là **một đường cong** (trường hợp này xảy ra khi S là một mặt trụ có đường sinh song song với trục Oz) thì **phải chiếu S xuống các mặt phẳng tọa độ khác, không được chiếu xuống mặt phẳng Oxy.**

1. Tích phân mặt loại 1

Ví dụ

Tính $I = \iint_S x^2 dS$, trong đó S là hình cầu đơn vị: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Do các hàm dưới dấu tích phân là hàm chẵn, và mặt cầu đối xứng qua các mặt phẳng tọa độ.

$$I = \iint_S x^2 dS = \iint_S y^2 dS = \iint_S z^2 dS$$

$$\text{Do đó: } I = \frac{1}{3} \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS = \frac{R^2}{3} \iint_S dS = \frac{4\pi R^4}{3}$$

1. Tích phân mặt loại 1

Ví dụ

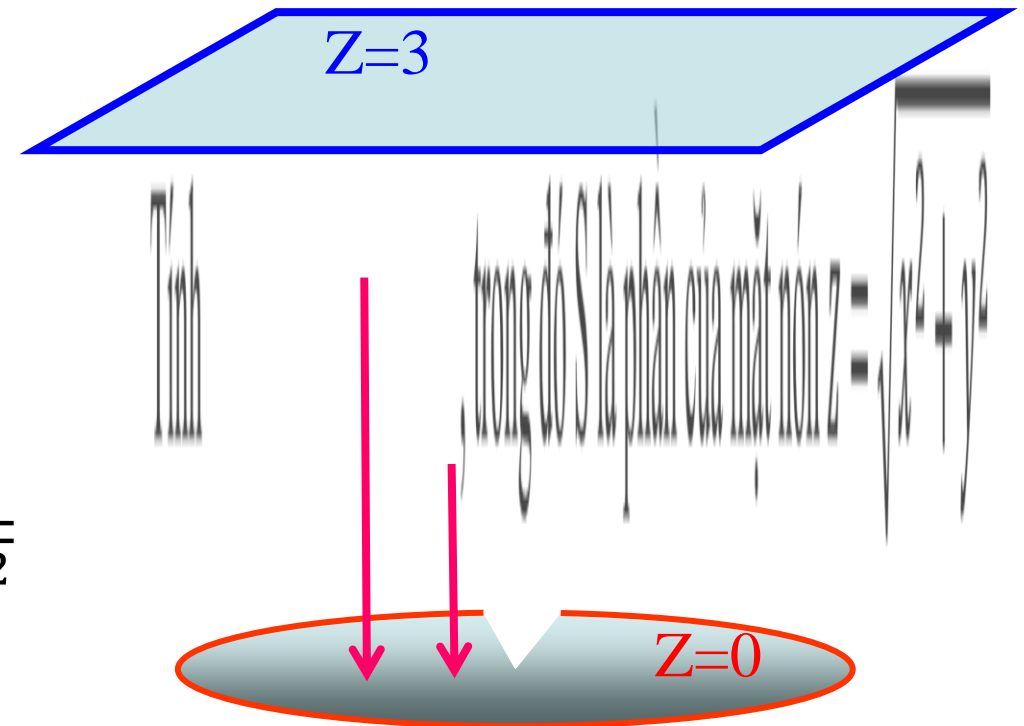
Tính $I = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS$, trong đó S là phần của mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ nằm giữa hai mặt phẳng $z = 0$ và $z = 3$.

$$D_{xy} = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 9\}$$

$$\text{Phương trình mặt nón: } z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$



1. Tích phân mặt loại 1

Ví dụ

$$I = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS = 2 \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) \sqrt{2} dx dy$$

Chuyển sang hệ tọa độ cực: $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$

$$D_{r\varphi} = \{(r, \varphi): 0 \leq r \leq 3, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

$$I = 2\sqrt{2} \iint_{D_{r\varphi}} r^2 \cdot \color{red}{r} \cdot dr d\varphi = 2\sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 r^3 dr = 81\sqrt{2}\pi$$

1. Tích phân mặt loại 1

Ví dụ

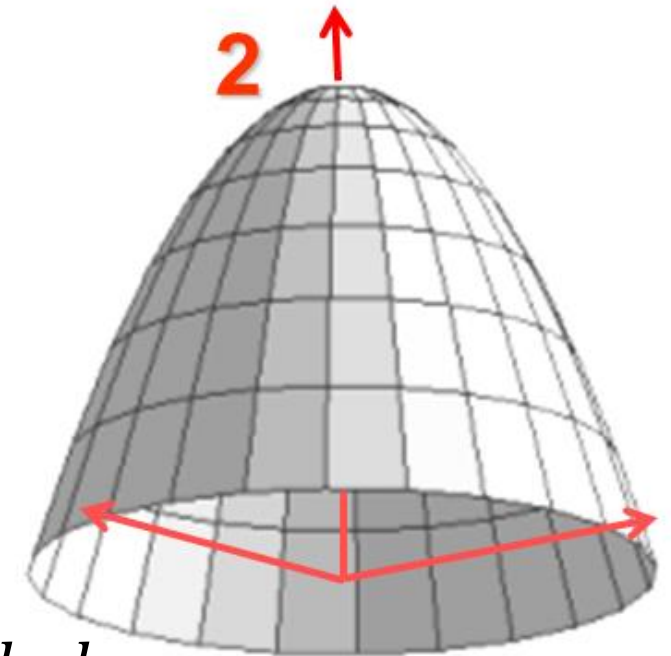
Tính $I = \iint_S z dS$, trong đó S là phần của mặt paraboloid $z = 2 - x^2 - y^2$ trong miền $z \geq 0$.

$$D_{xy} = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 2\}$$

$$\text{Phương trình mặt } S: z = 2 - x^2 - y^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y$$

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dxdy$$



1. Tích phân mặt loại 1

Ví dụ

$$I = \iint_S z dS = \iint_{D_{xy}} (2 - x^2 - y^2) \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dx dy$$

Chuyển sang hệ tọa độ cực: $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$

$$D_{r\varphi} = \{(r, \varphi): 0 \leq r \leq \sqrt{2}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_{r\varphi}} (2 - r^2) \sqrt{1 + 4r^2} \cdot \color{red}{r} \cdot dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} (2 - r^2) \sqrt{1 + 4r^2} \cdot r dr \\ &= \frac{37}{10} \pi \end{aligned}$$

1. Tích phân mặt loại 1

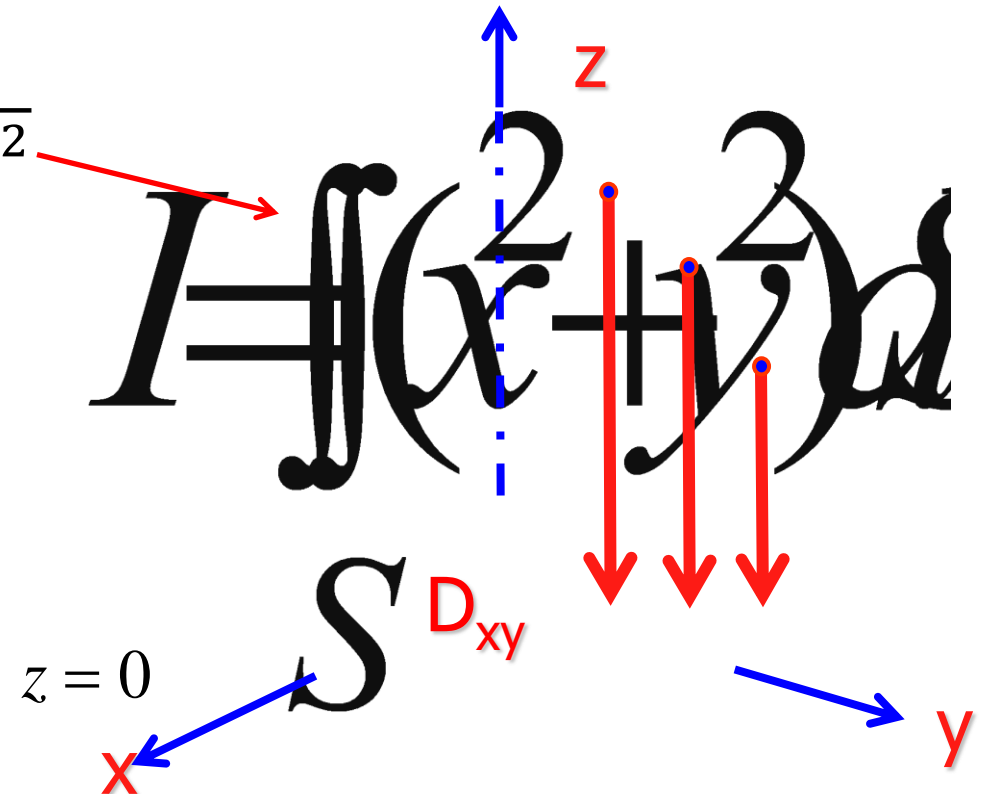
Ví dụ

Tính $I = \iint_S (x^2 + y^2) dS$, trong đó S là phần nửa trên của mặt cầu:
 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$.

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

$$D_{xy} = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

$$\text{Phương trình mặt } S: z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$



1. Tích phân mặt loại 1

Ví dụ

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} ; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \rightarrow dS = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy$$

Chuyển sang hệ tọa độ cực: $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$

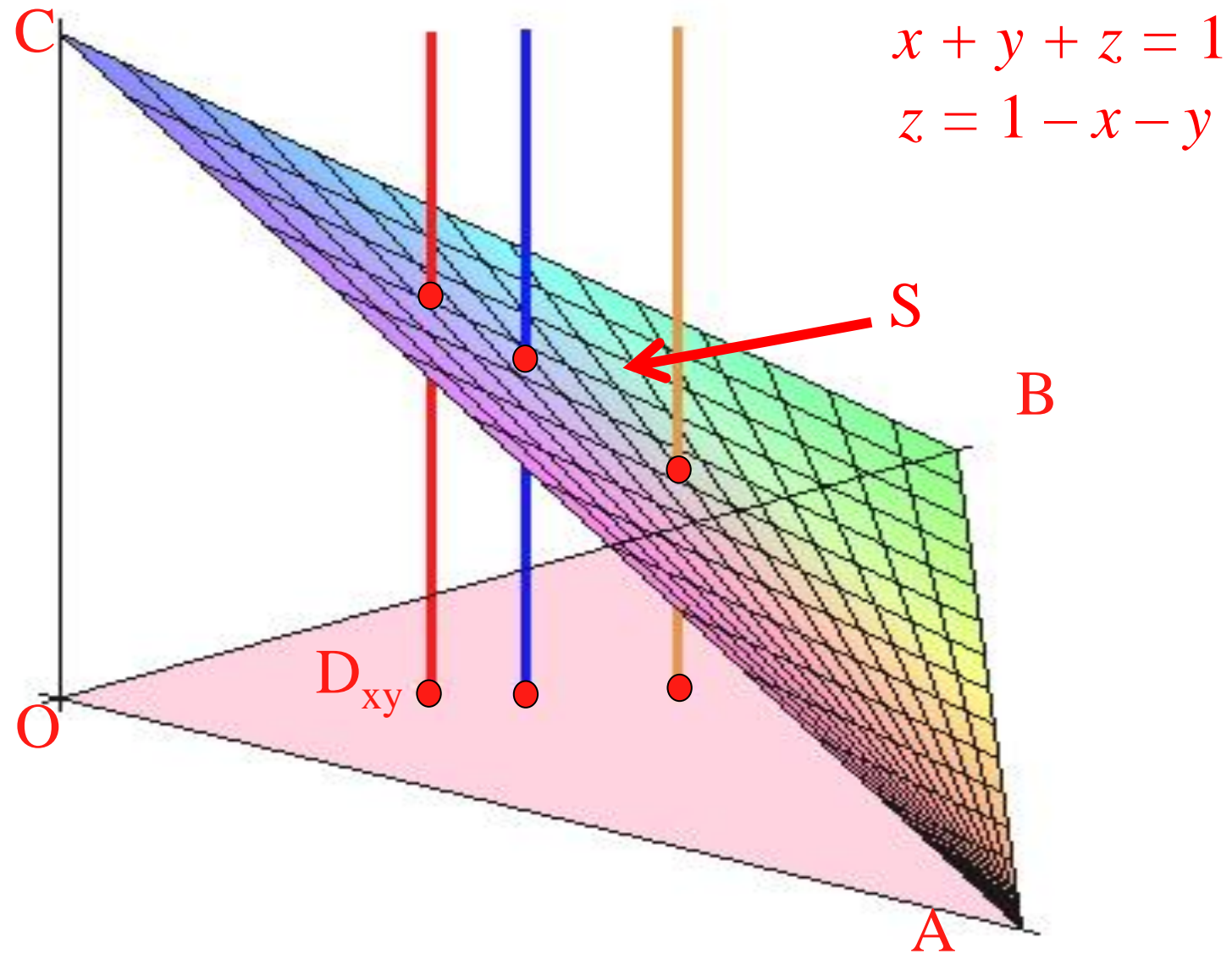
$$D_{r\varphi} = \{(r, \varphi): 0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_{r\varphi}} r^2 \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} \cdot r \cdot dr d\varphi = R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{r^3}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr \\ &= \frac{4\pi R^4}{3} \end{aligned}$$

1. Tích phân mặt loại 1

Ví dụ

Tính $I = \iint_S (x + y + z) dS$, trong đó S cho bởi: $x + y + z = 1$
và $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.



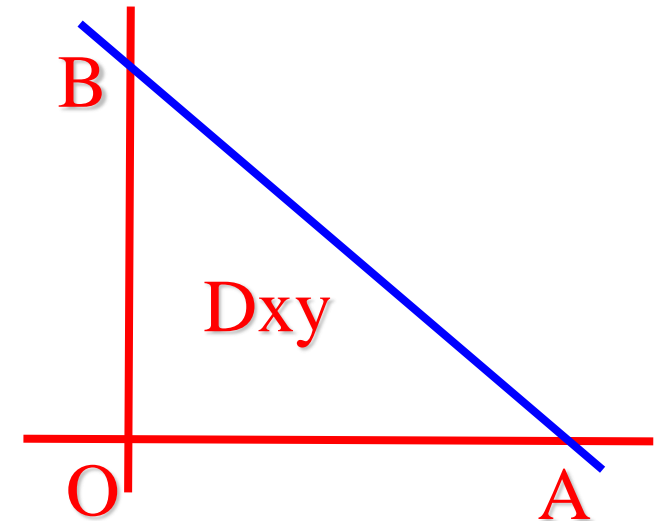
1. Tích phân mặt loại 1

Ví dụ

Tính $I = \iint_S (x + y + z) dS$, trong đó S cho bởi: $x + y + z = 1$
và $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

$$I = \iint_{D_{xy}} [x + y + (1 - x - y)] \sqrt{1 + 1 + 1} dx dy$$

$$= \sqrt{3} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



1. Tích phân mặt loại 1

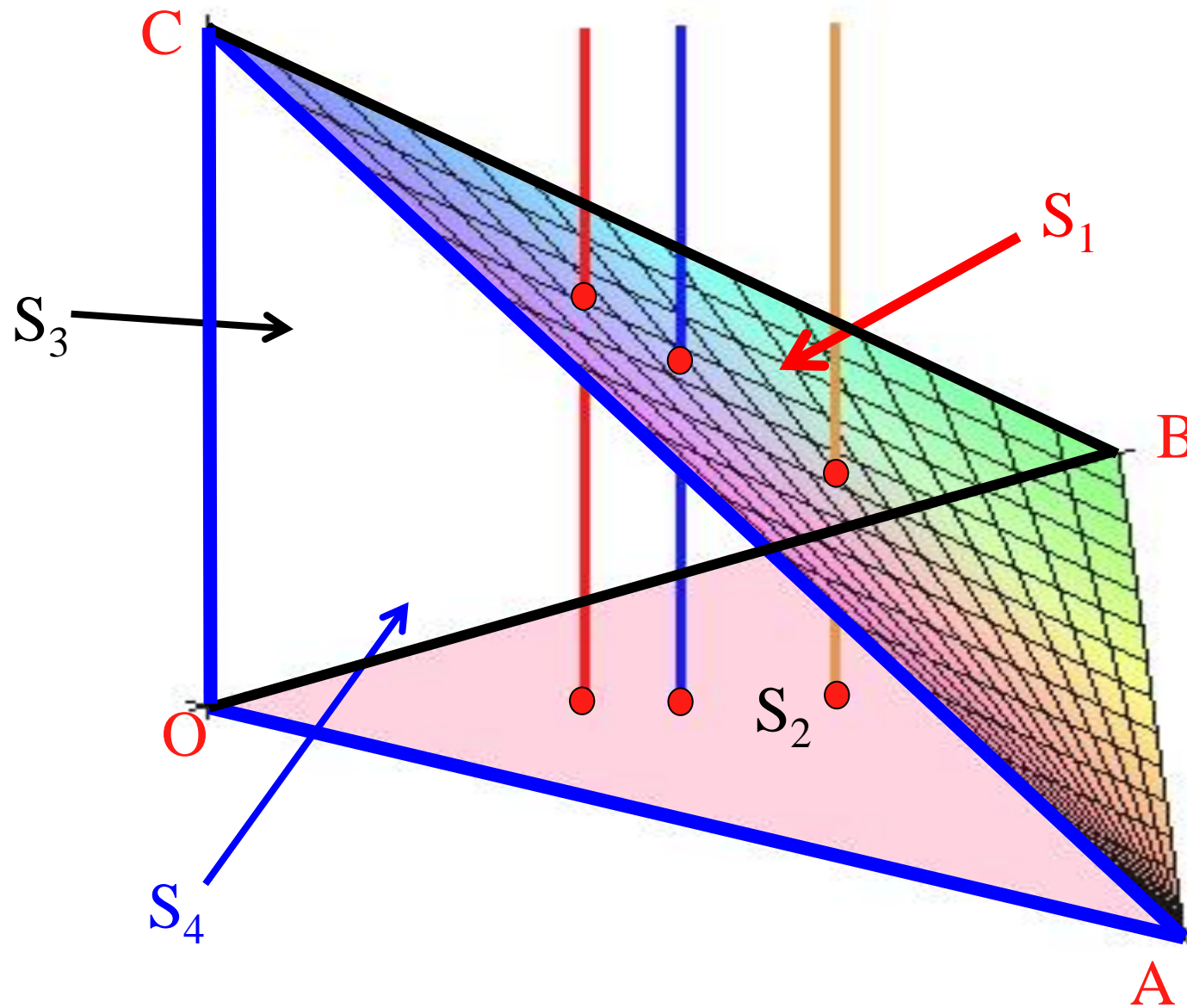
Ví dụ

Tính $I = \iint_S (x + y + z) dS$, trong đó S là mặt xung quanh hình chóp cho bởi:
 $x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

Mặt S gồm 4 mặt của tứ diện $OABC$.

Tích phân I_1 trên mặt ABC đã tính trong ví dụ trước.

Ta tính tích phân trên các mặt còn lại $\underbrace{OAB}_{I_2}, \underbrace{OBC}_{I_3}, \underbrace{OCA}_{I_4}$.



Trên mặt OAB, phương trình của mặt là: $z = 0$.

Hình chiếu của mặt xuống Oxy là tam giác OAB.

$$I_2 = \iint_{OAB} [x + y + 0] \sqrt{1 + 0 + 0} dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x + y) dy = \frac{1}{3}$$

Tích phân trên các mặt còn lại tính tương tự.

$$\rightarrow I = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

1. Tích phân mặt loại 1

Ví dụ

Tính diện tích nửa trên mặt cầu bán kính R và diện tích toàn bộ mặt cầu.

$$\begin{aligned} S &= \iint_S dS = \iint_{D_{xy}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr \\ &= 2\pi R^2 \end{aligned}$$

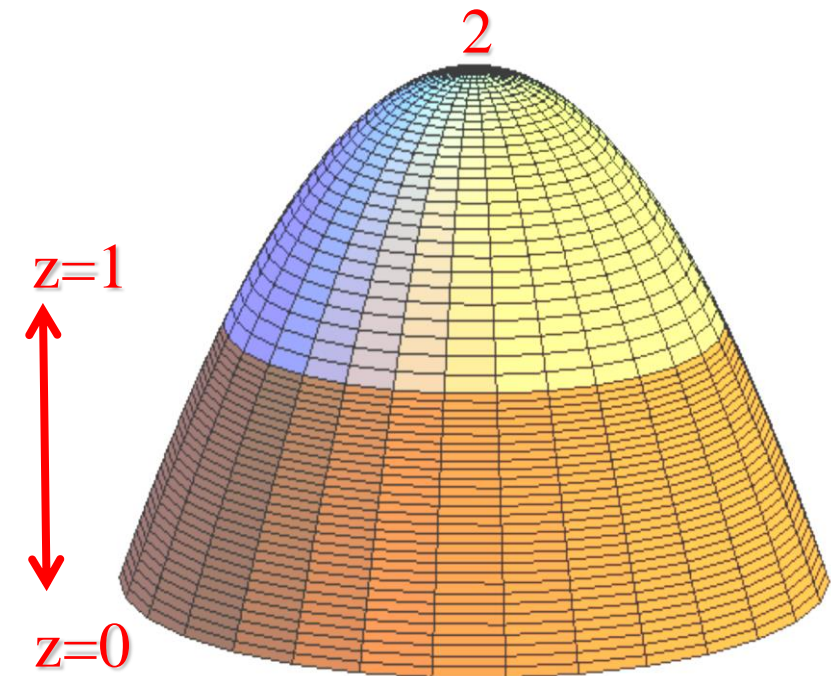
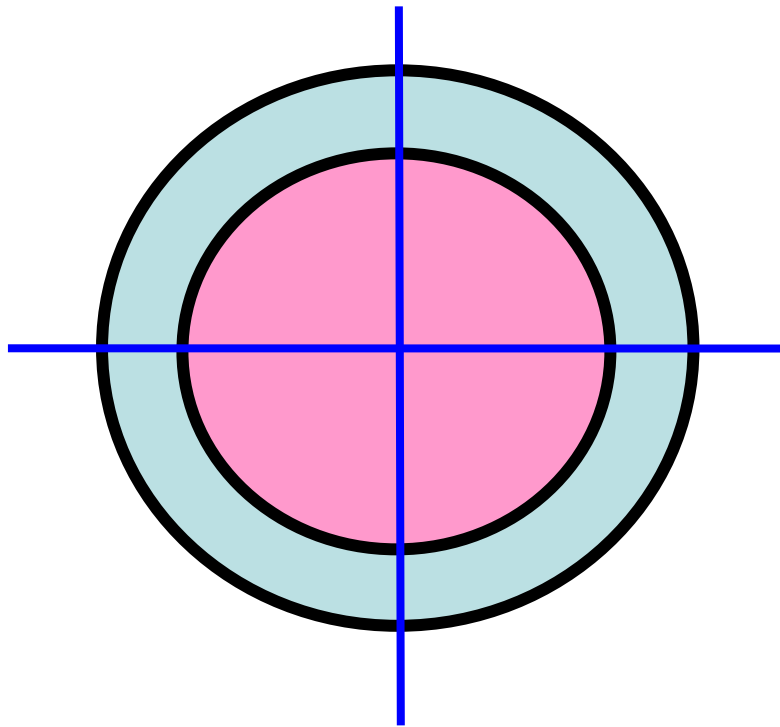
Diện tích toàn bộ mặt cầu bằng 2 lần diện tích nửa mặt cầu và bằng $4\pi R^2$.

1. Tích phân mặt loại 1

Ví dụ

Tính diện tích của mặt cong S , trong đó S là phần của mặt paraboloid

$$z = 2 - x^2 - y^2 \text{ lấy trong phần } 0 \leq z \leq 1.$$



1. Tích phân mặt loại 1

Ví dụ

Phương trình mặt S: $z = 2 - x^2 - y^2$

Do đó: $z'_x = -2x, z'_y = -2y$

$$D(x, y) = \{(x, y): 1 \leq x^2 + y^2 \leq \sqrt{2}\}$$

Diện tích mặt S: $I = \iint_S dS = \iint_{D(x,y)} \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dx dy$

Đổi biến qua hệ tọa độ cực: $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$

$$D(r, \varphi) = \{(r, \varphi): 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 1 \leq r \leq \sqrt{2}\}$$

1. Tích phân mặt loại 1

Ví dụ

Do đó, diện tích mặt S: $I = \iint_{D(r,\varphi)} \sqrt{1 + 4r^2} \cdot r \cdot dr d\varphi$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^{\sqrt{2}} r \sqrt{1 + 4r^2} dr$$

$$= \pi \left(\frac{9}{2} - \frac{5\sqrt{5}}{6} \right)$$

2. Tích phân mặt loại 2

Định nghĩa mặt 2 phía

Cho mặt cong S . Di chuyển vector pháp tuyến của S từ một điểm A nào đó theo một đường cong (kín) tùy ý.

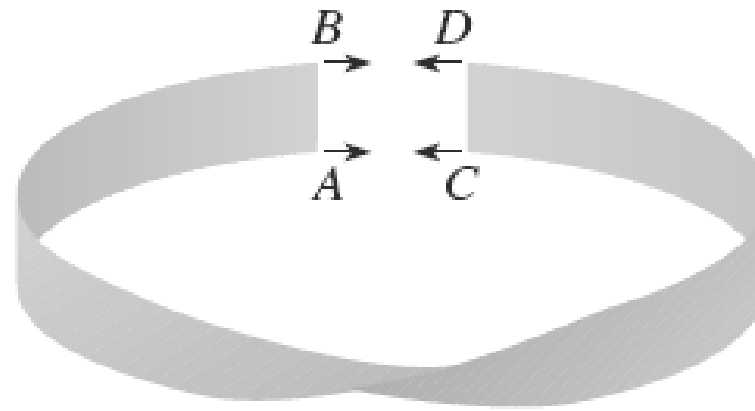
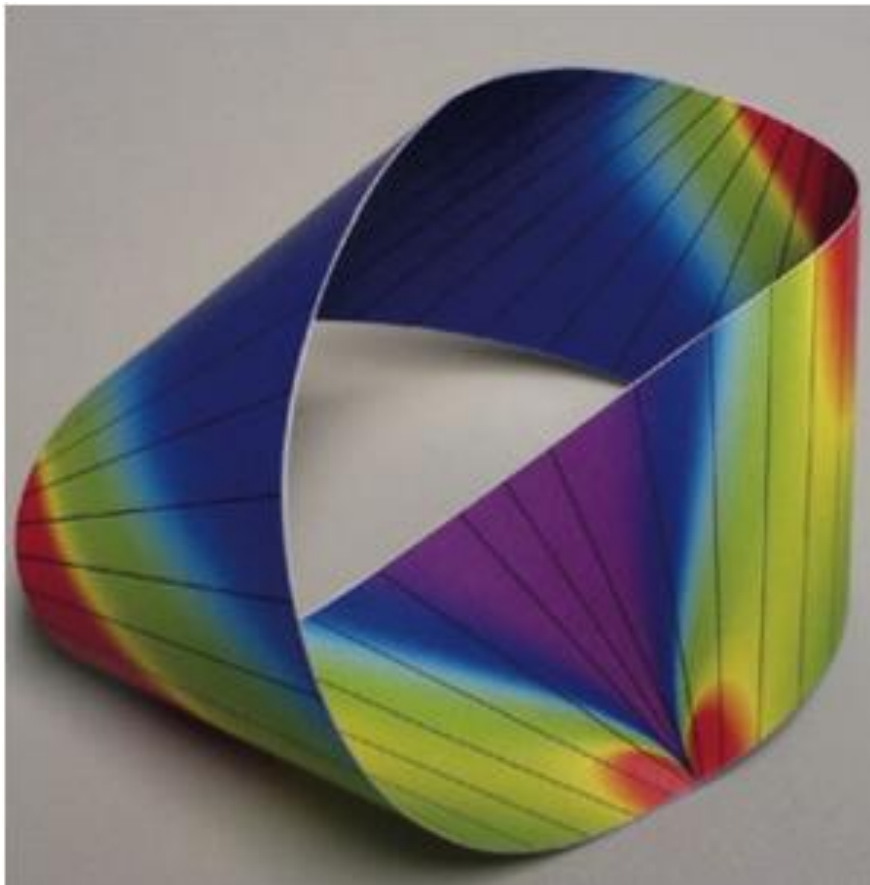
Nếu khi quay lại vị trí xuất phát, vector pháp tuyến không đổi chiều thì mặt cong S được gọi là **mặt hai phía**.

Trong trường hợp ngược lại, vector pháp tuyến đổi chiều thì mặt cong S được gọi là **mặt một phía**.

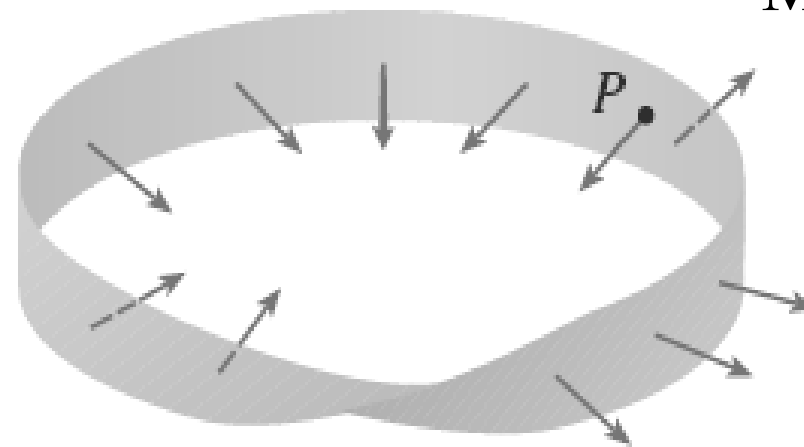
2. Tích phân mặt loại 2

Ví dụ

Mặt Mobius tạo bằng cách lấy 1 hình chữ nhật ABCD, sau đó vặn cong hình chữ nhật này để điểm A chạm vào điểm C, điểm D chạm vào điểm B. Khi đó mặt Mobius là mặt 1 phía.



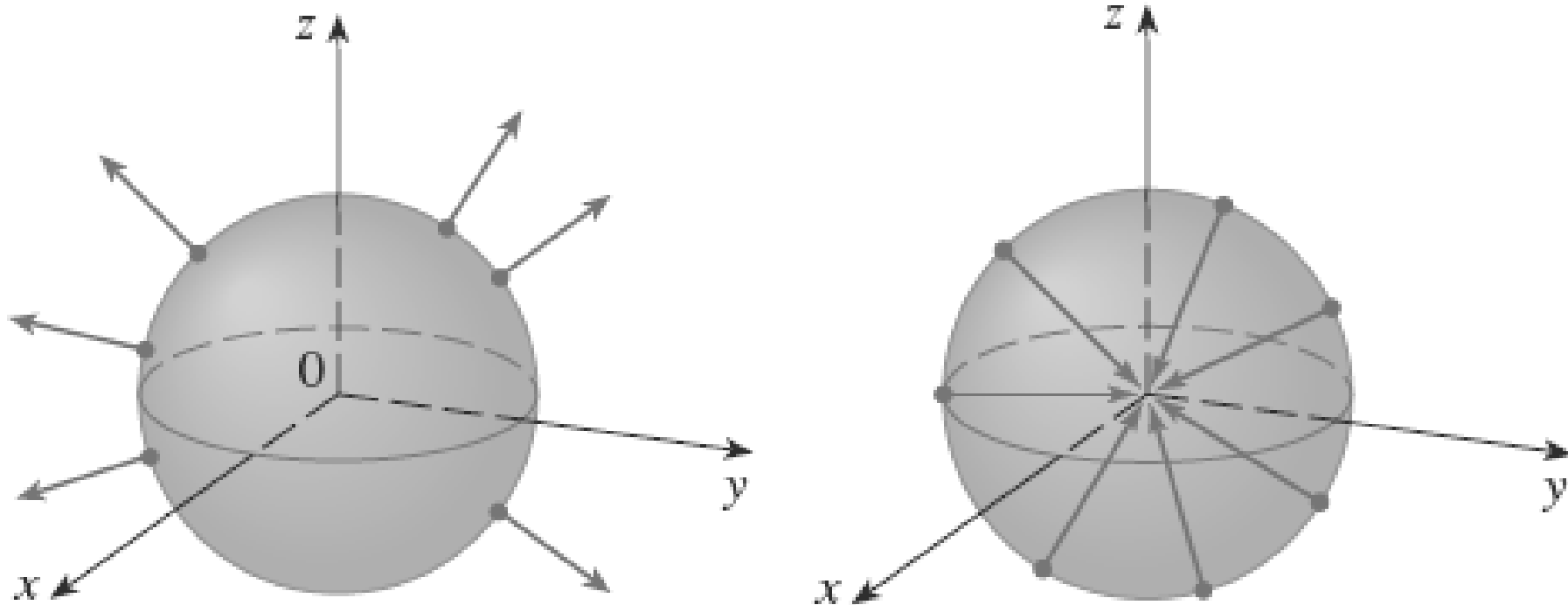
Mặt Mobius



2. Tích phân mặt loại 2

Ví dụ

Mặt cầu, mặt nón, mặt bàn... là mặt 2 phía.



Mặt cầu

2. Tích phân mặt loại 2

Định nghĩa mặt định hướng

S là mặt cong hai phía.

Nếu trên mặt S ta qui ước một phía là dương, phía còn lại là âm thì mặt S được gọi là **mặt định hướng**.

Vector pháp tuyến của mặt định hướng là vector pháp tuyến hướng về **phía dương** của mặt định hướng.

2. Tích phân mặt loại 2

Ví dụ

Tìm vector pháp tuyến của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ tại $A(1, 0, \sqrt{3})$ biết phía ngoài của mặt cầu là phía dương.

Phương trình nửa trên mặt cầu: $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

Vector pháp tuyến: $\mathbf{l} = (-z'_x, -z'_y, 1) = \left(\frac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, 1 \right)$

Vector pháp tuyến tại điểm A: $\mathbf{l} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 1 \right)$

2. Tích phân mặt loại 2

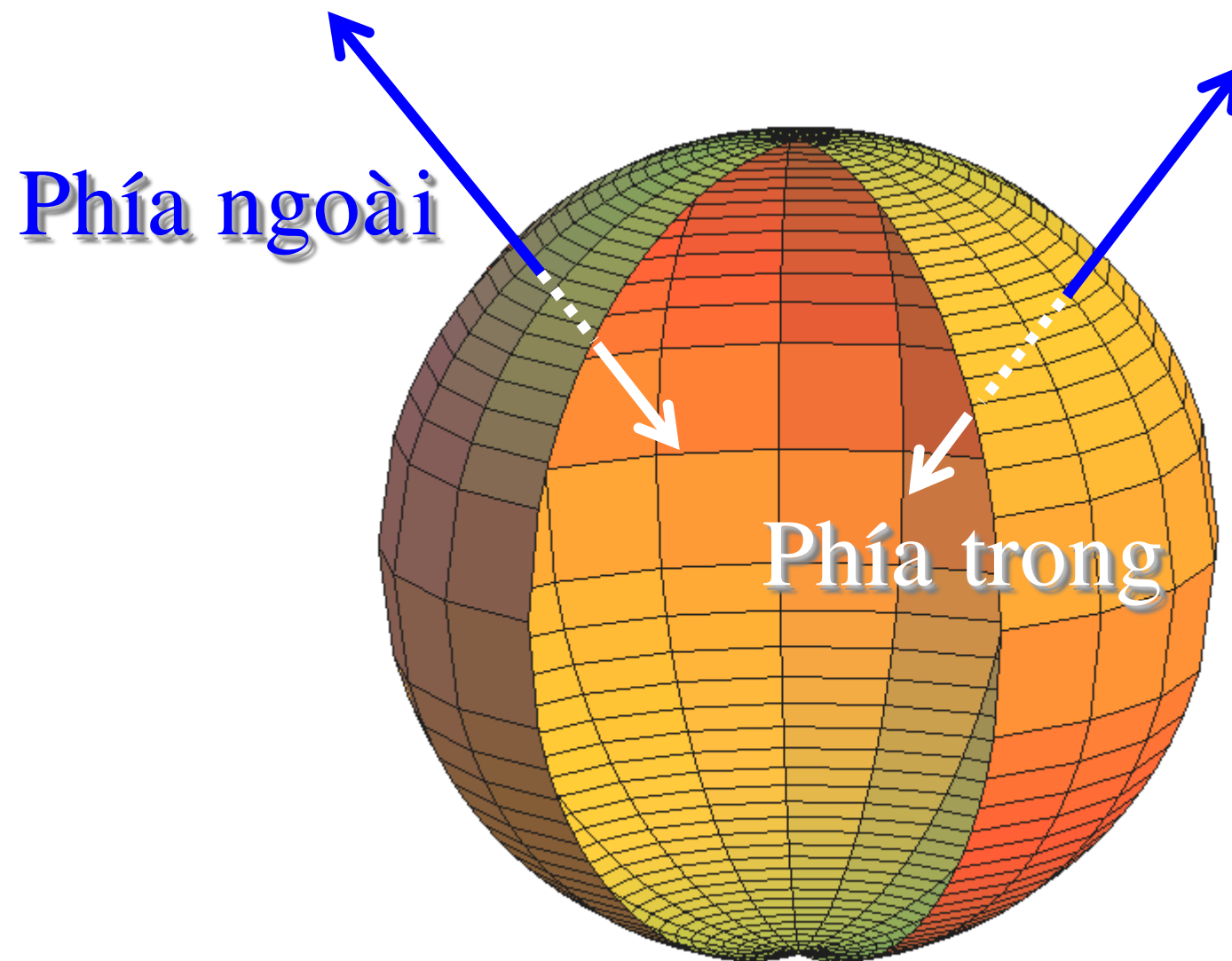
Ví dụ

Tìm vector pháp tuyến của mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ tại $A(1, 1, \sqrt{2})$
biết phía dương của mặt nón là phía dưới nhìn từ hướng của trục Oz.

Phương trình mặt nón: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

Vecto pháp tuyến: $\mathbf{l} = (z'_x, z'_y, -1) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -1 \right)$

Vecto pháp tuyến tại điểm A: $\mathbf{l} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -1 \right)$



2. Tích phân mặt loại 2

Định nghĩa

$P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ xác định trên mặt định hướng S .

Vector pháp tuyến đơn vị của mặt S là: $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$.

α, β, γ lần lượt là góc hợp bởi \mathbf{n} với các trục Ox, Oy, Oz .

Tích phân **mặt loại một** $I = \iint_S (P \cdot \cos \alpha + Q \cdot \cos \beta + R \cdot \cos \gamma) dS$

được gọi là tích phân **mặt loại hai** của P, Q, R trên mặt định hướng S lấy theo hướng dương của mặt S , khi đó:

$$I = \iint_{S^+} P dydz + Q dzdx + R dxdy$$

2. Tích phân mặt loại 2

Định nghĩa

Định lý

Cho S là mặt định hướng các hàm $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ liên tục trên mặt S . Khi đó tích phân mặt loại 2 luôn tồn tại.

Tính chất

- Tích phân mặt loại 2 có các tính chất tương tự như đối với tích phân đường loại 2.

$$\iint_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = - \iint_{S^-} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$$

2. Tích phân mặt loại 2

Cách tính

Nếu $\mathbf{F} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ là trường vector liên tục xác định trên mặt định hướng S , **hướng dương của S** trùng với vector pháp đơn vị \mathbf{n} , thì tích phân mặt của \mathbf{F} trên S là:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

Nếu S được cho bởi hàm vector $\mathbf{r}(u, v)$, thì:

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} dS &= \iint_{D(u,v)} \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} \right] \cdot |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv \\ &= \iint_{D(u,v)} \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) du dv \end{aligned}$$

2. Tích phân mặt loại 2

Cách tính

Các hàm $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ xác định trên mặt định hướng $S: z = z(x,y)$.

Vector pháp tuyến đơn vị hướng về phía dương của mặt S : $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$.

$$\cos \alpha = \frac{\mp z'_x}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}}, \cos \beta = \frac{\mp z'_y}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}}, \cos \gamma = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}}$$

$$\text{Mặt khác: } dS = \frac{dxdy}{|\cos \gamma|} = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dxdy.$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó, } I &= \iint_S (P \cdot \cos \alpha + Q \cdot \cos \beta + R \cdot \cos \gamma) dS \\ &= \iint_{D_{xy}} \left[P \cdot (\mp z'_x) + Q \cdot (\mp z'_y) + R \cdot (\pm 1) \right] dxdy. \end{aligned}$$

2. Tích phân mặt loại 2

Cách tính

Cho S là mặt định hướng có phương trình: $z = z(x, y)$.

Hình chiếu của S trên mp Oxy là miền D_{xy} .

Vector pháp tuyến: $\mathbf{l} = (A, B, C) = \pm(-z'_x, -z'_y, 1)$.

Dấu $(+)$, $(-)$ được chọn sao cho \mathbf{l} hướng về phía dương của mặt S .

$$\iint_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = \iint_{D_{xy}} (PA + QB + RC) dx dy$$

2. Tích phân mặt loại 2

Cách tính

Cho S là mặt định hướng có phương trình: $x = x(y, z)$.

Hình chiếu của S trên mp Oyz là miền D_{yz} .

Vector pháp tuyến: $\mathbf{l} = (A, B, C) = \pm(1, -x'_y, -x'_z)$.

Dấu $(+)$, $(-)$ được chọn sao cho \mathbf{l} hướng về phía dương của mặt S .

$$\iint_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = \iint_{D_{yz}} (PA + QB + RC) dydz$$

2. Tích phân mặt loại 2

Cách tính

Cho S là mặt định hướng có phương trình: $y = y(x, z)$.

Hình chiếu của S trên mp Oxz là miền D_{xz} .

Vector pháp tuyến: $\mathbf{l} = (A, B, C) = \pm(-y'_x, 1, -y'_z)$.

Dấu $(+)$, $(-)$ được chọn sao cho \mathbf{l} hướng về phía dương của mặt S .

$$\iint_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = \iint_{D_{xz}} (PA + QB + RC) dx dz$$

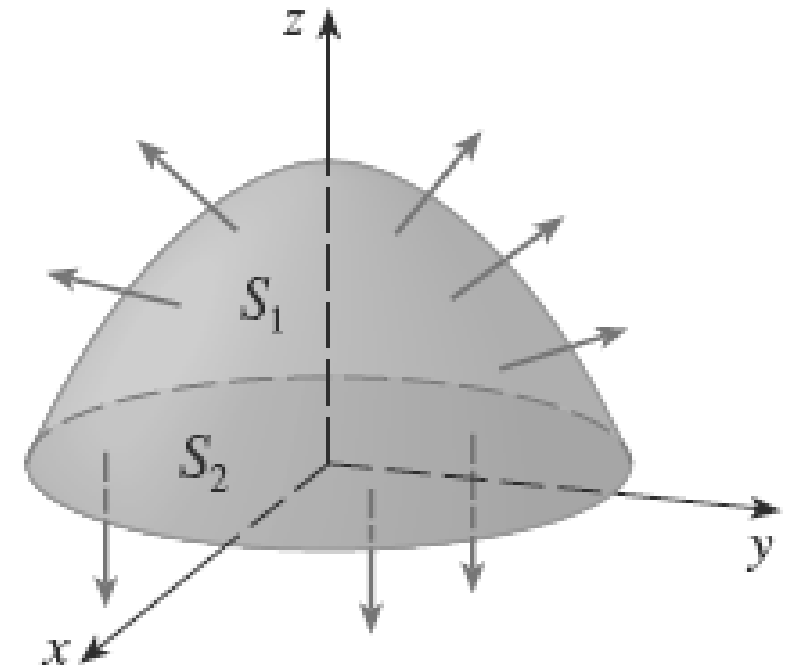
2. Tích phân mặt loại 2

Ví dụ

Tính $I = \iint_{S^+} ydydz + xdzdx + zdx dy$.

Trong đó S^+ là phía ngoài của vật thể được giới hạn bởi các mặt:
 $z = 1 - x^2 - y^2, z = 0$.

$$\begin{aligned} I &= \iint_{S^+} ydydz + xdzdx + zdx dy = \\ &= \iint_{S_1^+} ydydz + xdzdx + zdx dy + \\ &+ \iint_{S_2^+} ydydz + xdzdx + zdx dy \end{aligned}$$



$S_1: z = 1 - x^2 - y^2$. Do đó:

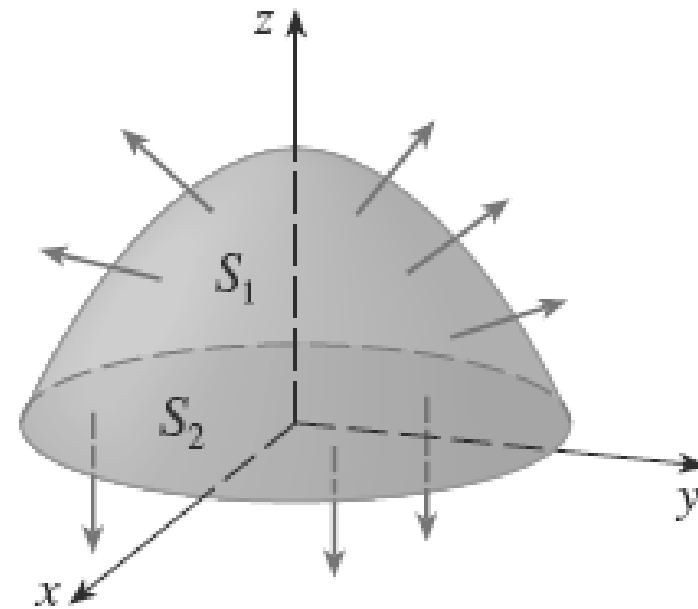
$$z'_x = -2x, z'_y = -2y$$

Hình chiếu của S_1 xuống mặt phẳng Oxy là miền:

$$D_{xy} = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$$

S_1^+ hướng ra ngoài nên vector pháp tuyến của mặt S_1^+ :

$$\mathbf{l} = (-z'_x, -z'_y, 1)$$



$$\begin{aligned} \iint_{S_1^+} ydydz + xdzdx + zdx dy &= \iint_{S_1^+} ydydz + xdzdx + (1 - x^2 - y^2)dx dy = \\ &= \iint_{D_{xy}} (-z'_x \cdot y - z'_y \cdot x + (1 - x^2 - y^2))dx dy = \iint_{D_{xy}} (1 + 4xy - x^2 - y^2)dx dy \end{aligned}$$

Chuyển sang hệ tọa độ cực: $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$.

$$D_{r\varphi} = \{(r, \varphi): 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

Do đó:

$$\iint_{D_{xy}} (1 + 4xy - x^2 - y^2) dx dy = \iint_{D_{r\varphi}} (1 + 4r^2 \cos\varphi \sin\varphi - r^2) \cdot r \cdot dr d\varphi =$$

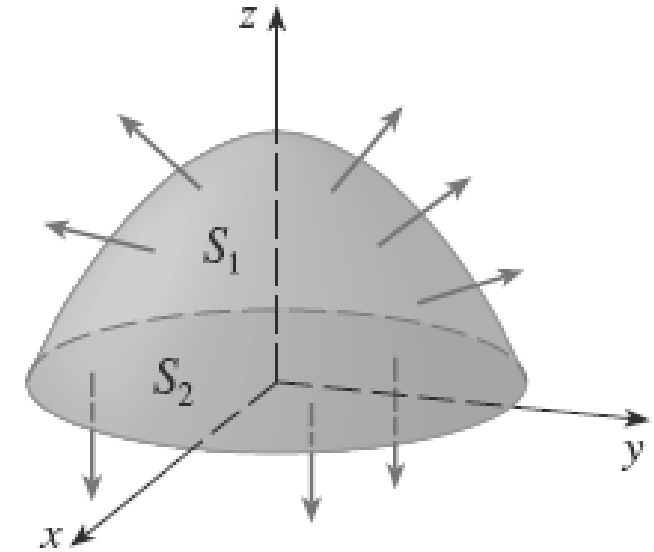
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r - r^3 + 4r^3 \cos\varphi \sin\varphi) dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \cos\varphi \sin\varphi \right) d\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$S_2: z = 0$. Do đó:

$$z'_x = z'_y = 0$$

Hình chiếu của S_2 xuống mặt phẳng Oxy là miền:

$$D_{xy} = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$$



$$\iint_{S_2^+} ydydz + xdzdx + zdx dy = \iint_{S_2^+} ydydz + xdzdx + 0 \cdot dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} (y \cdot 0 + x \cdot 0 + 0 \cdot -1) dxdy = \iint_{D_{xy}} 0 \cdot dxdy = 0$$

$$I = \iint_{S^+} ydydz + xdzdx + zdx dy = \frac{\pi}{2}$$

2. Tích phân mặt loại 2

Ví dụ

Tính $\iint_{S^+} (2x + y)dydz + (2y + z)dzdx + (2z + x)dxdy$.

Trong đó S^+ là phía phân của mặt phẳng $x + y + z = 3$ nằm trong hình trụ $x^2 + y^2 = 2x$, phía dương là phía dưới nhìn từ hướng dương của Oz.

$S: z = 3 - x - y$. Do đó:

$$z'_x = z'_y = -1.$$

S^+ là phía dưới nhìn từ hướng dương của trục Oz.

Vector pháp tuyến của mặt S có dạng: $\mathbf{l} = (z'_x, z'_y, -1)$.

$$D_{xy} = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 2x\}$$

$$\begin{aligned}
& \iint_{S^+} (2x + y)dydz + (2y + z)dzdx + (2z + x)dxdy = \\
& = \iint_{S^+} (2x + y)dydz + (2y + 3 - x - y)dzdx + (6 - 2x - 2y + x)dxdy \\
& = \iint_{D_{xy}} [(2x + y)z'_x + (y - x + 3)z'_y - 1 \cdot (6 - x - 2y)]dxdy \\
& = -9 \iint_{D_{xy}} dxdy \\
& = -9 \cdot S_{D_{xy}} = -9\pi
\end{aligned}$$

2. Tích phân mặt loại 2

Ví dụ

$$\text{Tính } I = \iint_{S^+} (x + z) dx dy$$

Trong đó S^+ là phần của mặt phẳng $z = 2 - x$ giới hạn bởi mặt $z = x^2 + y^2$, phía dương là phía dưới nhìn từ hướng dương của trục Oz.

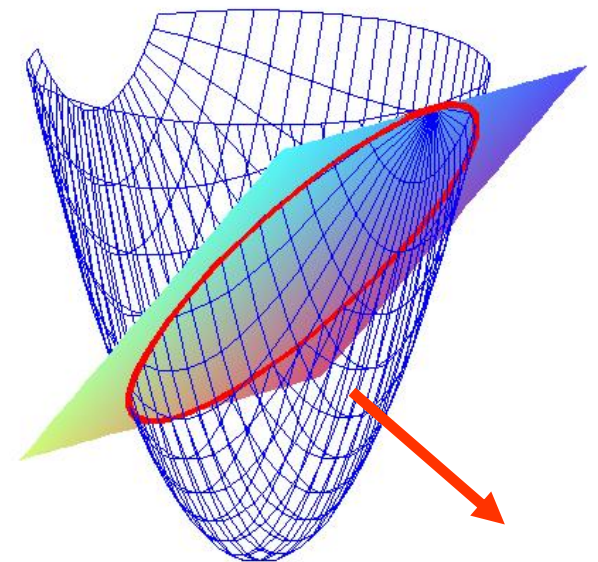
$S: z = 2 - x$. Do đó:

$$z'_x = -1, z'_y = 0.$$

S^+ là phía dưới nhìn từ hướng dương của trục Oz.

Vector pháp tuyến của mặt S có dạng: $\mathbf{l} = (z'_x, z'_y, -1)$.

$$D_{xy} = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 2 - x\} = \{(x, y): (x + \frac{1}{2})^2 + y^2 \leq \frac{9}{4}\}$$



$$I = \iint_{S^+} (x + z) dx dy = \iint_{S^+} (x + (2 - x)) dx dy = \iint_{S^+} 2 dx dy =$$

$$= \iint_{D_{xy}} 2 \cdot (-1) dx dy = -2 \cdot S_{D_{xy}} = -2\pi \left(\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{9\pi}{2}$$

2. Tích phân mặt loại 2

Ví dụ

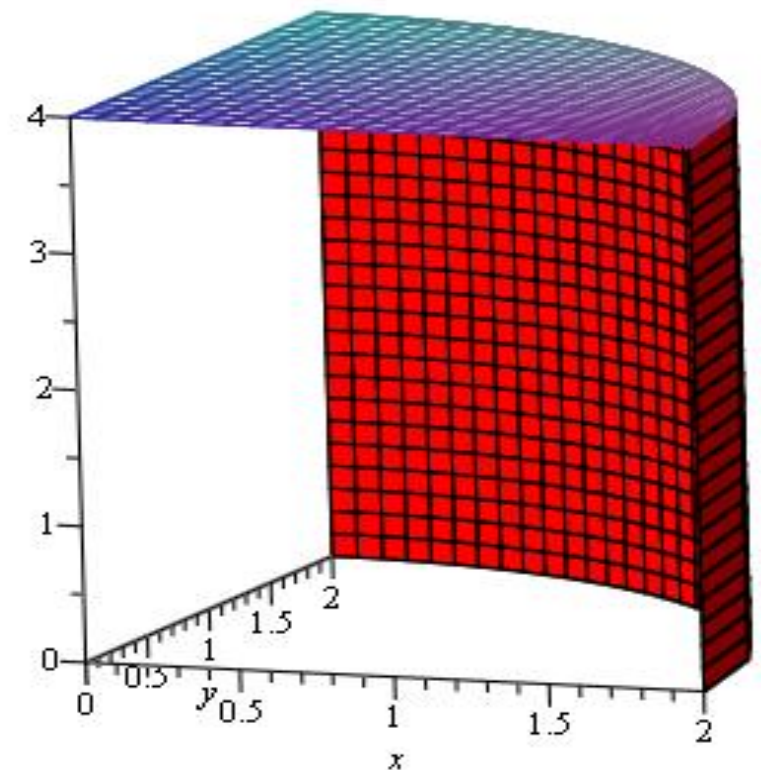
Tính $I = \iint_{S^+} yz dx dy$, trong đó S^+ là phía ngoài của vật thể:

$$\Omega: x^2 + y^2 \leq R^2; x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq h$$

Mặt S được chia thành 5 mặt gồm:

- Hai mặt đáy S_1, S_2 .
- Hai mặt bên S_3, S_4 nằm trong mp: $y = 0, x = 0$.
- Mặt trụ cong S_5 .

$$\begin{aligned} I = \iint_{S^+} yz dx dy &= \iint_{S_1^+} yz dx dy + \\ &+ \iint_{S_2^+} yz dx dy + \iint_{S_3^+} yz dx dy + \\ &+ \iint_{S_4^+} yz dx dy + \iint_{S_5^+} yz dx dy. \end{aligned}$$



$$S_3: y = 0 \text{ nên } \iint_{S_3^+} yz dx dy = \iint_{D_{xz}} (0.0 + 0. -1 + yz. 0) dx dz = 0.$$

$$S_4: x = 0 \text{ nên } \iint_{S_4^+} yz dx dy = \iint_{D_{yz}} (0. -1 + 0.0 + yz. 0) dy dz = 0.$$

$$S_5: x = \sqrt{R^2 - y^2} \text{ nên } \iint_{S_5^+} yz dx dy = \iint_{D_{yz}} (0.1 + 0. -x'_y + yz. 0) dy dz = 0.$$

$$S_1: z = 0 \text{ nên } \iint_{S_1^+} yz dx dy = \iint_{D_{xy}} (0.0 + 0.0 + y. 0. -1) dx dy = 0.$$

$$S_2: z = h \rightarrow z'_x = z'_y = 0. \text{ Vector pháp tuyến của mặt } S_2: \mathbf{l} = (0, 0, 1)$$

$$D = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$I = \iint_{S_2^+} yz dx dy = h \iint_{D_{xy}} y dx dy$$

Chuyển sang hệ tọa độ cực: $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$.

$$D_{r\varphi} = \{(r, \varphi): 0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq \pi/2\}$$

$$I = \iint_{S_2^+} yz dx dy = h \iint_{D_{r\varphi}} r \sin\varphi \cdot \color{red}{r} \cdot dr d\varphi =$$

$$= h \int_0^{\pi/2} \sin\varphi d\varphi \int_0^R r^2 dr =$$

$$= h \frac{R^3}{3}$$

2. Tích phân mặt loại 2

Công thức Gauss

Giả sử V là khối đóng, giới nội trong R^3 có biên là mặt trơn S . Nếu các hàm số P, Q, R và các đạo hàm riêng cấp 1 của chúng liên tục trên khối V thì:

$$\iint_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz$$

trong đó S là mặt định hướng, **phía dương là phía ngoài của khối V .**

2. Tích phân mặt loại 2

Công thức Gauss

Dạng vector: Cho trường vector $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ xác định trên mặt định hướng S . Ký hiệu:

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Khi đó:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{F} dx dy dz$$

2. Tích phân mặt loại 2

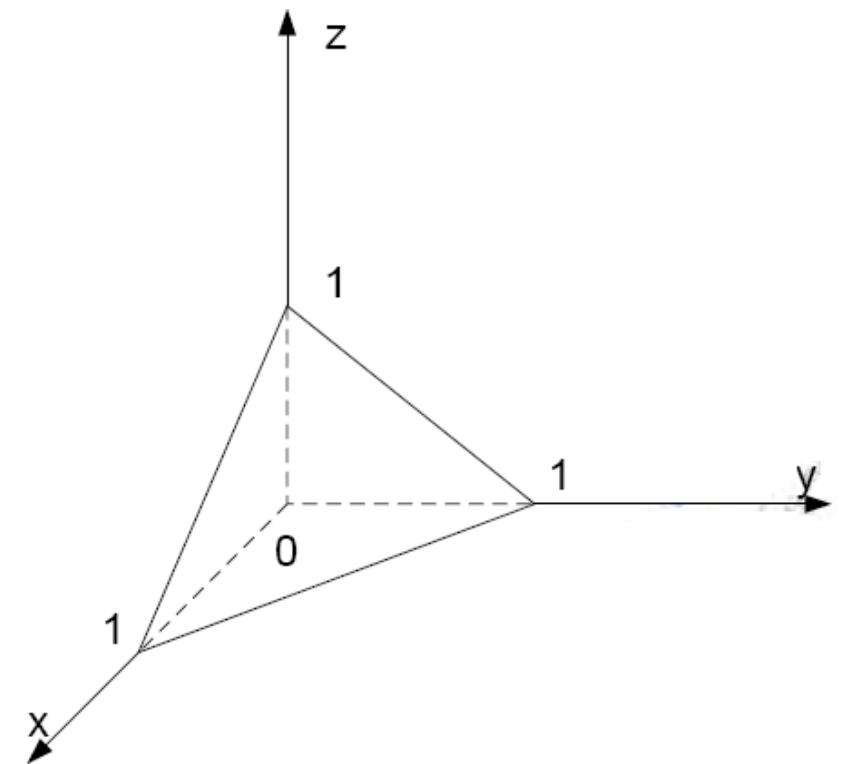
Ví dụ

Tính $I = \iint_{S^+} xzdydz + yxdzdx + zydx dy$, trong đó S^+ là phía ngoài của các mặt: $x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$.

Áp dụng công thức Gauss ta có:

$$\begin{aligned} I &= \iint_{S^+} xzdydz + yxdzdx + zydx dy \\ &= \iiint_V (x + y + z) dx dy dz \end{aligned}$$

Trong đó khối V có các mặt là S .



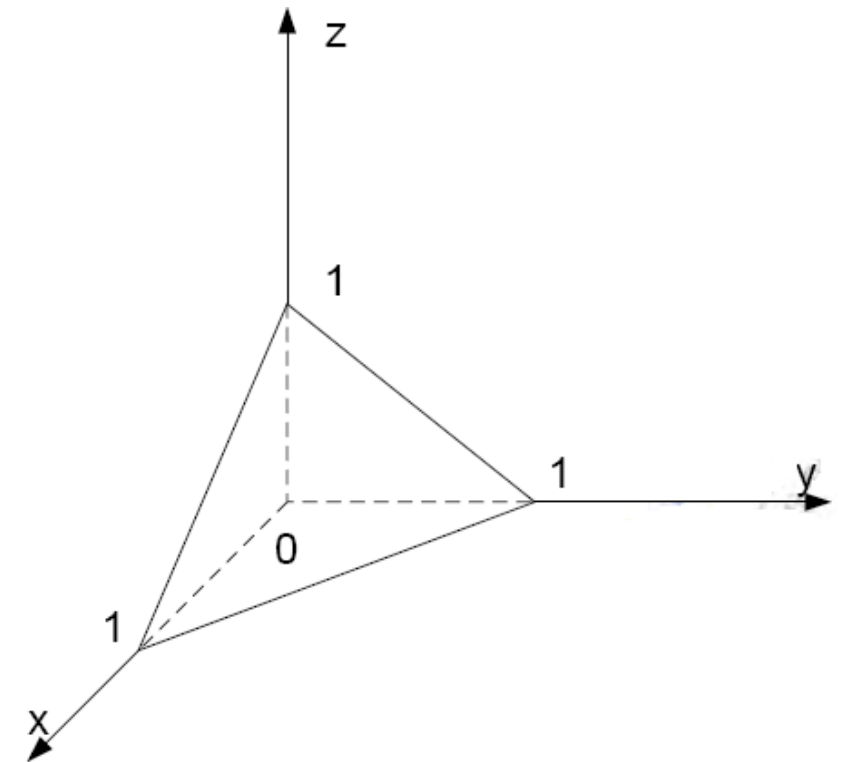
2. Tích phân mặt loại 2

Ví dụ

$$I = \iiint_V (x + y + z) dx dy dz$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (x + y + z) dz$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{1}{2} [1 - (x + y)^2] dy = \frac{1}{8}$$



2. Tích phân mặt loại 2

Ví dụ

Tính $I = \iint_{S^+} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$, trong đó S^+ là phía ngoài của mặt cầu: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Theo công thức Gauss:

$$\begin{aligned} I &= 3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz = 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^R \rho^2 \rho^2 \sin\theta d\rho \\ &= \frac{12\pi R^5}{5} \end{aligned}$$

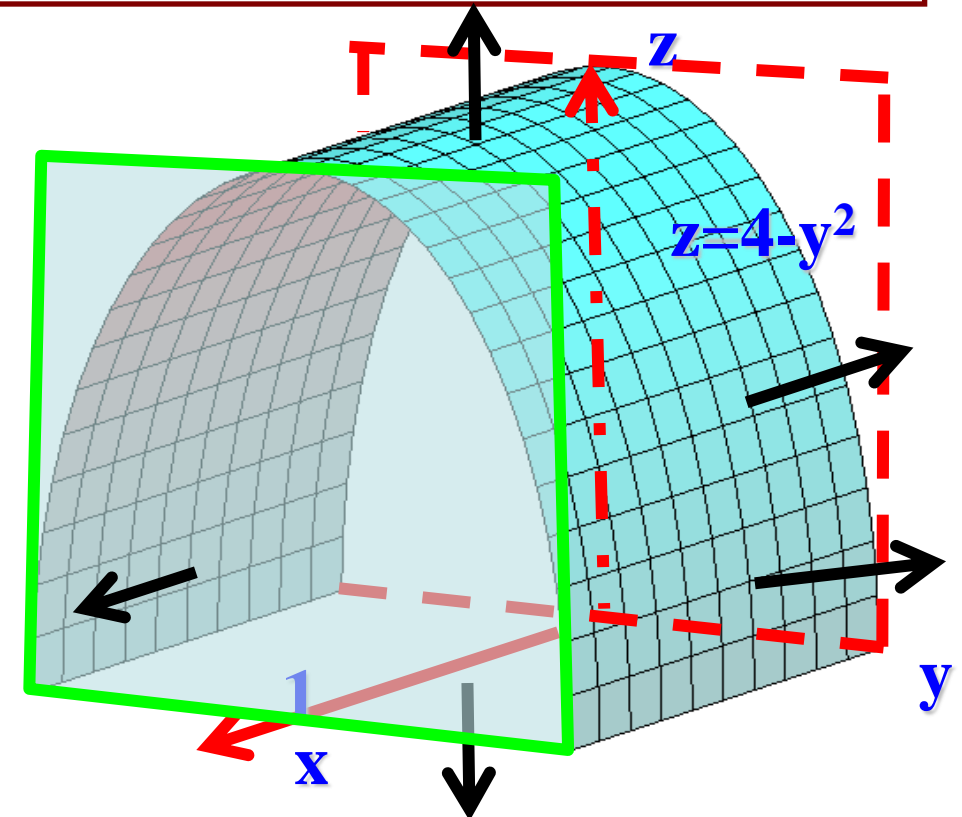
2. Tích phân mặt loại 2

Ví dụ

Tính $I = \iint_{S^+} z^2 dydz + xdzdx - zdx dy$, trong đó S^+ là mặt xung quanh, phía dương là phía ngoài của vật thể được giới hạn bởi các mặt: $z = 4 - y^2, z = 0, x = 1, x = 0$.

Theo công thức Gauss:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V (0 + 0 - 1) dx dy dz \\ &= - \iiint_V dx dy dz = - \int_0^1 dx \int_{-2}^2 dy \int_0^{4-y^2} dz \\ &= -32/3 \end{aligned}$$



2. Tích phân mặt loại 2

Ví dụ

Tính $I = \iint_{S^+} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, trong đó S^+ là phía dưới của mặt: $z = \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq z \leq 1$ (nhìn từ phía dương trục Oz).

S chưa phải là mặt kín, nên ta bổ sung thêm mặt D . Biên của khối V là $\delta V = S \cup D$. Trong đó D là miền hình tròn:

$$z = 1, x^2 + y^2 \leq 1$$

δV^+ là phía ngoài của khối V . Theo công thức Gauss ta có:

$$\iint_{\delta V^+} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy = 2 \iiint_V (x + y + z) dxdydz$$

2. Tích phân mặt loại 2

Ví dụ

Chuyển sang hệ tọa độ trụ: $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = z$

$$V(r, \varphi, z) = \{(r, \varphi, z): 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1, r \leq z \leq 1\}$$

$$2 \iiint_V (x + y + z) dx dy dz$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_r^1 r(r\cos\varphi + r\sin\varphi + z) dz = \frac{\pi}{2}$$

2. Tích phân mặt loại 2

Ví dụ

Do đó:

$$\iint_{\delta V^+} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy = \frac{\pi}{2} =$$

$$= \iint_{S^+} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy +$$

$$+ \iint_{D^+} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$$

$$\text{Suy ra: } I = \iint_{S^+} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \iint_{D^+} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy.$$

2. Tích phân mặt loại 2

Ví dụ

Pt mặt định hướng $D: z = 1$. Phía dương của mặt D là phía trên, do đó vector pháp tuyến của mặt $D: \mathbf{l} = (0,0,1)$. Vậy:

$$I = \frac{\pi}{2} - \iint_D 1^2 \cdot 1 dx dy = \frac{\pi}{2} - \iint_D dx dy = \frac{\pi}{2} - S_D = -\frac{\pi}{2}.$$

Do D là đường tròn có $R = 1$, nên $S_D = \pi$.

2. Tích phân mặt loại 2

Ví dụ

Tính $I = \iint_{S^+} (y + z)dydz + (x - z)dzdx + (z + 1)dx dy$, trong đó S^+ là phía trên của nửa trên mặt cầu: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (nhìn từ phía dương trục Oz).

Gọi S_1 là mặt: $z = 0, x^2 + y^2 \leq R^2$, phía dương của S_1 là phía dưới (nhìn từ phía dương của trục Oz). Theo công thức Gauss:

$$\iint_S + \iint_{S_1} = \iiint_V 1 \cdot dx dy dz ; \text{ khối } V \text{ có biên là các mặt } S \text{ và } S_1.$$

$$\begin{aligned} \rightarrow I &= \frac{2\pi R^3}{3} - \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} -1 \cdot (0 + 1) dx dy = \frac{2\pi R^3}{3} + \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} dx dy \\ &= \frac{2\pi R^3}{3} + \pi R^2 \end{aligned}$$