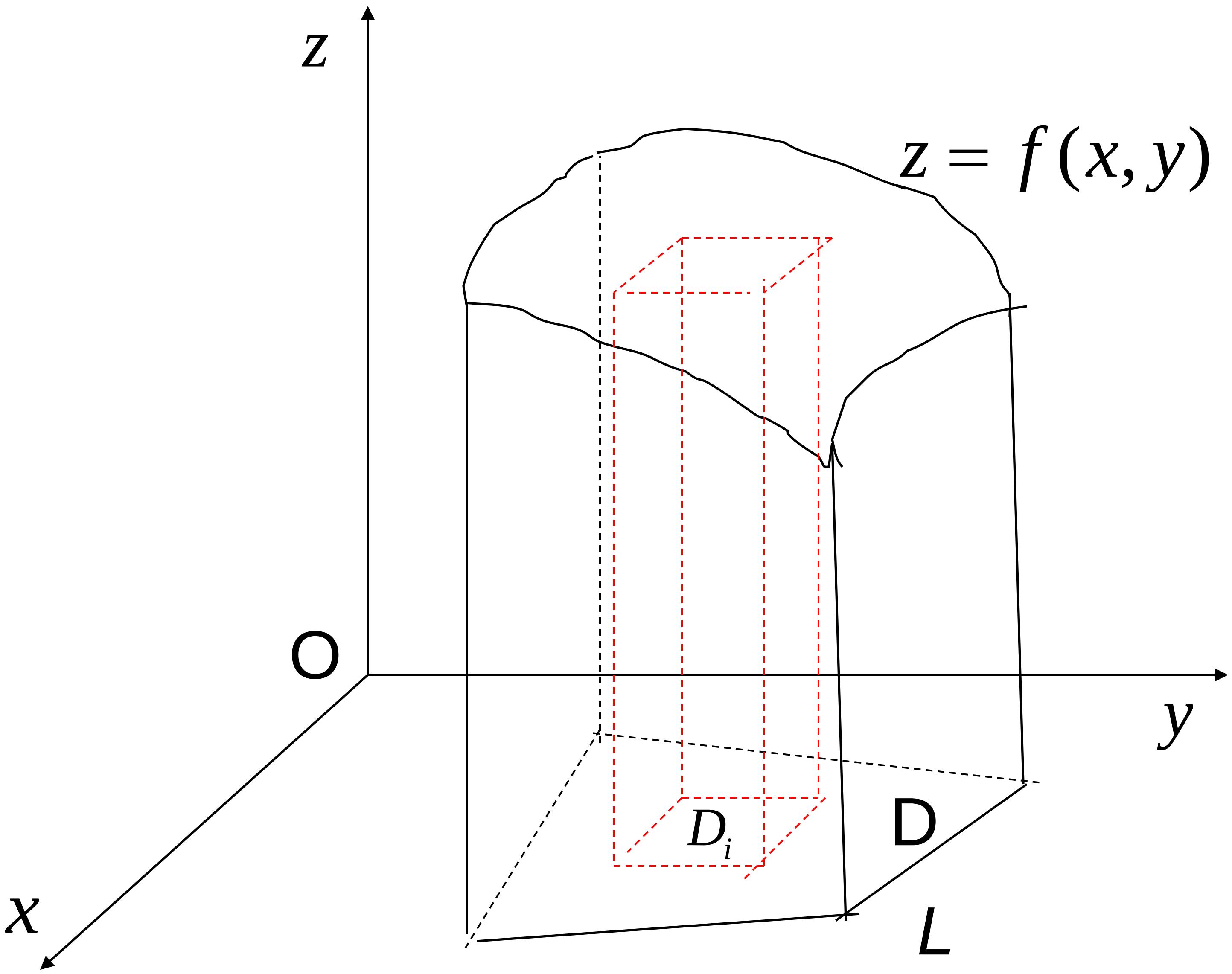
2.1.1 Định nghĩa tích phân kép (tích phân hai lớp). Điều kiện khả tích

a) Bài toán tính thể tích vật thể hình trụ

Cho $f(x, y)$ là hàm số liên tục, không âm, xác định trên miền D đóng, bị chặn, có biên là đường kín *L*.

Tính thể tích V của vật thể hình trụ E có đáy dưới là miền D, mặt trên có PT $z = f(x, y)$, các đường sinh tựa trên *L* và song song với 0z.


z
z = f (x, y)
O
y
D
D_i
x
L

Chia D thành n miền $D_1, D_2, ..., D_n$ tùy ý sao cho các D_i không giao nhau ngoại trừ biên của chúng. Gọi ΔS_i là diện tích miền D_i

V_i là vật thể hình trụ giới hạn bởi D_i và mặt $z = f(x, y)$

Đặt $d_i = \max\{d(M, N) / \ M, N \in D_i\}$

d_i được gọi là đường kính của miền D_i

Trên mỗi miền D_i chọn một điểm $M_i(x_i, y_i)$ tùy ý

Khi các miền D_i rất nhỏ, có thể coi mỗi hình trụ V_i có thể tích là:

$$f(x_i, y_i).\Delta S_i$$

Khi đó , thể tích vật thể cần tìm xấp xỉ $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i).\Delta S_i$

b) Định nghĩa tích phân hai lớp (tích phân kép)

Cho $f(x, y)$ là hàm số xác định trên miền đóng, bị chặn D.

Chia D thành n miền $D_1, D_2, \ldots, D_n$ tùy ý sao cho các D_i không giao nhau ngoại trừ biên của chúng. Gọi ΔS_i là diện tích miền D_i

Đặt $d_i = \max\left\{d(M, N) /\ M, N \in D_i\right\}$ Trên mỗi miền D_i chọn một điểm $M_i(x_i, y_i)$ tùy ý. Đặt $d = \max\limits_{1 \le k \le n} \{d_k\}$

Tổng tích phân của $f(x, y)$ trên D là $I_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i).\Delta S_i$

Nếu giới hạn $\lim_{d\to 0} I_n$ tồn tại hữu hạn, không phụ thuộc cách chia D, cách chọn các điểm $(x_i, y_i) \in D_i$ thì giới hạn này được gọi là tích phân hai lớp (tích phân kép) của hàm $f(x, y)$ trên miền D.

Kí hiệu: $\iint_D f(x, y)dS$ Khi đó ta nói $f(x, y)$ khả tích trên D.

Giả sử $f(x, y)$ khả tích trên D. Khi đó việc tính tích phân kép không phụ thuộc cách chia D. Do đó ta có thể chia miền D theo các đường đường song song với các trục tọa độ. Lúc đó $\Delta S_i = \Delta x.\Delta y$ và ta có thể viết lại như sau: $\iint_D f(x,y)dS = \iint_D f(x,y)dxdy$

Hệ quả: Nếu $f(x,y)$ là hàm số liên tục, không âm, xác định trên miền D thì thể tích V của vật thể hình trụ có đáy dưới là miền D mặt trên có PT $z = f(x,y),$ các đường sinh tựa trên *L* và song song với 0z được tính theo công thức $V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy.$

c) Điều kiện khả tích:

Nếu $f(x,y)$ liên tục trên miền đóng, bị chặn D thì f khả tích trên D.

2.1.2. Tính chất của tích phân hai lớp

Giả sử các tích phân sau tồn tại, ta có:

1) $\iint\limits_D dxdy = S(D)$ (Diện tích miền D)

- Tính chất tuyến tính

2) $\iint\limits_D [f(x,y) \pm g(x,y)]dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy \pm \iint\limits_D g(x,y)dxdy$

3) $\iint\limits_D \lambda f(x,y)dxdy = \lambda \iint\limits_D f(x,y)dxdy \, (\lambda \in \mathbb{R})$

- Tính chất cộng tính

4) Nếu D được chia thành 2 miền D_1, D_2 không giao nhau ngoại trừ biên thì $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$

- Tính bảo toàn thứ tự

5^0) Nếu $f(x,y) \le g(x,y)$ với $\forall (x,y) \in D$ thì

$$\iint_D f(x,y)dxdy \le \iint_D g(x,y)dxdy$$

Đặc biệt nếu $m \le f(x,y) \le M$ với $\forall (x,y) \in D$ thì

$$mS \le \iint_D f(x,y)dxdy \le MS$$

trong đó S là diện tích của miền

6^0) Định lý về giá trị trung bình: Nếu $f(x,y)$ liên tục trong miền đóng và bị chặn D thì trong D có ít nhất một điểm $(\bar{x},\bar{y})$ sao cho

$$\iint_D f(x,y)dxdy = f(\bar{x},\bar{y}).S$$

trong đó S là diện tích của miền

2.1.3. Cách tính tích phân hai lớp. Đổi thứ tự lấy TP

* Tính $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$

a) Nếu D là miền hình chữ nhật

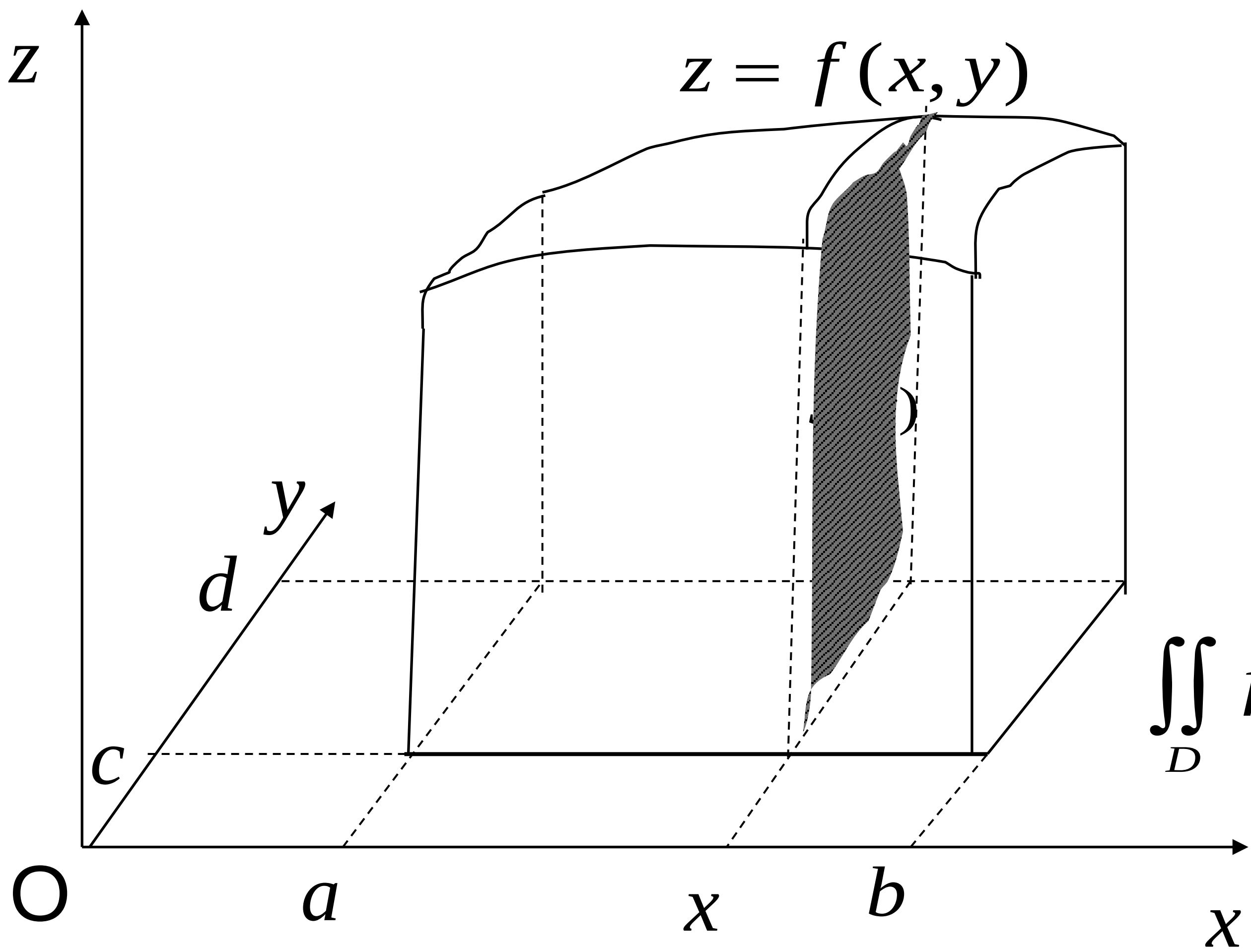
Định lý Fubini: Nếu f liên tục trên $D=[a,b]\times[c,d]$ thì

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$$

Ký hiệu: $\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy:=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx$

$$\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx:=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$$

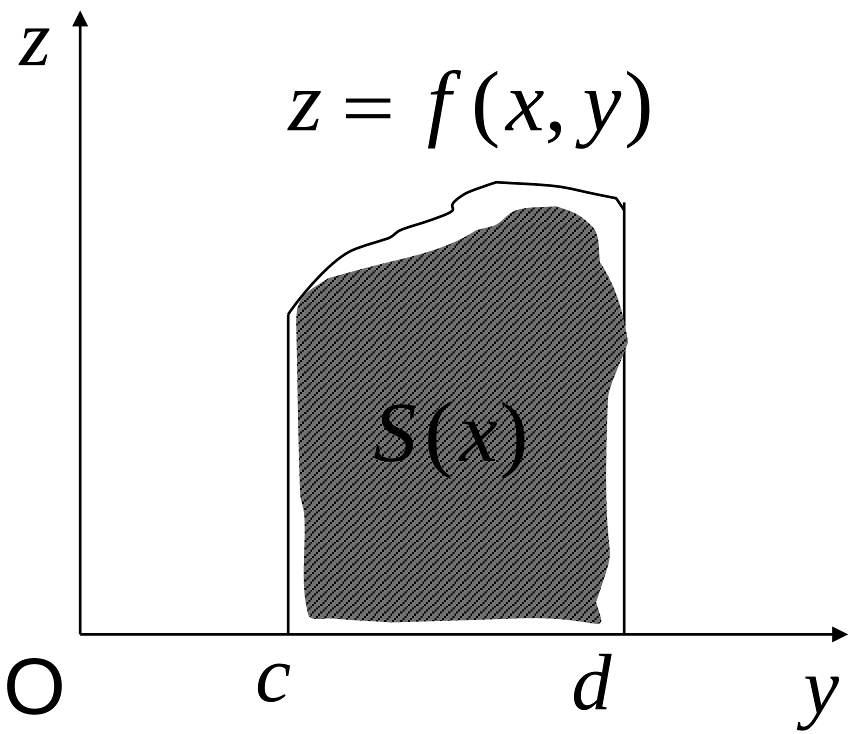
Chứng minh: Giả sử $f(x,y)$ không âm trên D. Khi đó $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = V$ trong đó V là thể tích hình trụ đứng có đáy là miền D, mặt trên có PT $z = f(x,y)$.



$$V = \int_a^b S(x)dx \Rightarrow$$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b S(x)dx$$

trong đó $S(x)$ là diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại x.



Với mỗi x cố định, ta có: $S(x) = \int_c^d f(x,y)dy$

Vậy $$\iint_D f(x,y)dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

Bằng cách lập luận tương tự, sử dụng thiết diện vuông góc với trục Oy ta được $\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx \right) dy$

Công thức vẫn đúng khi f âm trên *D.*

*** Nhận xét:** Khi $f(x,y) = f_1(x).f_2(y)$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b f_1(x)dx.\int\limits_c^d f_2(y)dy$$

Ví dụ: Tính $I = \iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y)^2}$ $D = \{(x,y)/1 \le x \le 2, 1 \le y \le 2\}$

Giải: $I = \int_1^2 dx \int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2} dy = \int_1^2 \left(\int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2} dy \right) dx =$

$$= \int_1^2 \left(-\frac{1}{x+y}\Big|_1^2 \right) dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \ln \frac{x+1}{x+2}\Big|_1^2 = \ln \frac{9}{8}.$$

Ví dụ: Tính $I = \iint\limits_D xy\, dxdy$

D xác định bởi: $1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1.$

Giải: $I = \left(\int_1^2 x\, dx \right) . \left(\int_0^1 y\, dy \right) = \left(\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 \right) . \left(\frac{y^2}{2}\Big|_0^1 \right) = \frac{3}{2} . \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$

b) Nếu miền D xác định bởi: $\begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{cases}$

trong đó $y_1(x),\ y_2(x)$ là các hàm số liên tục trên $[a,b]$

thì $$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

$$\overset{k/h}{=} \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

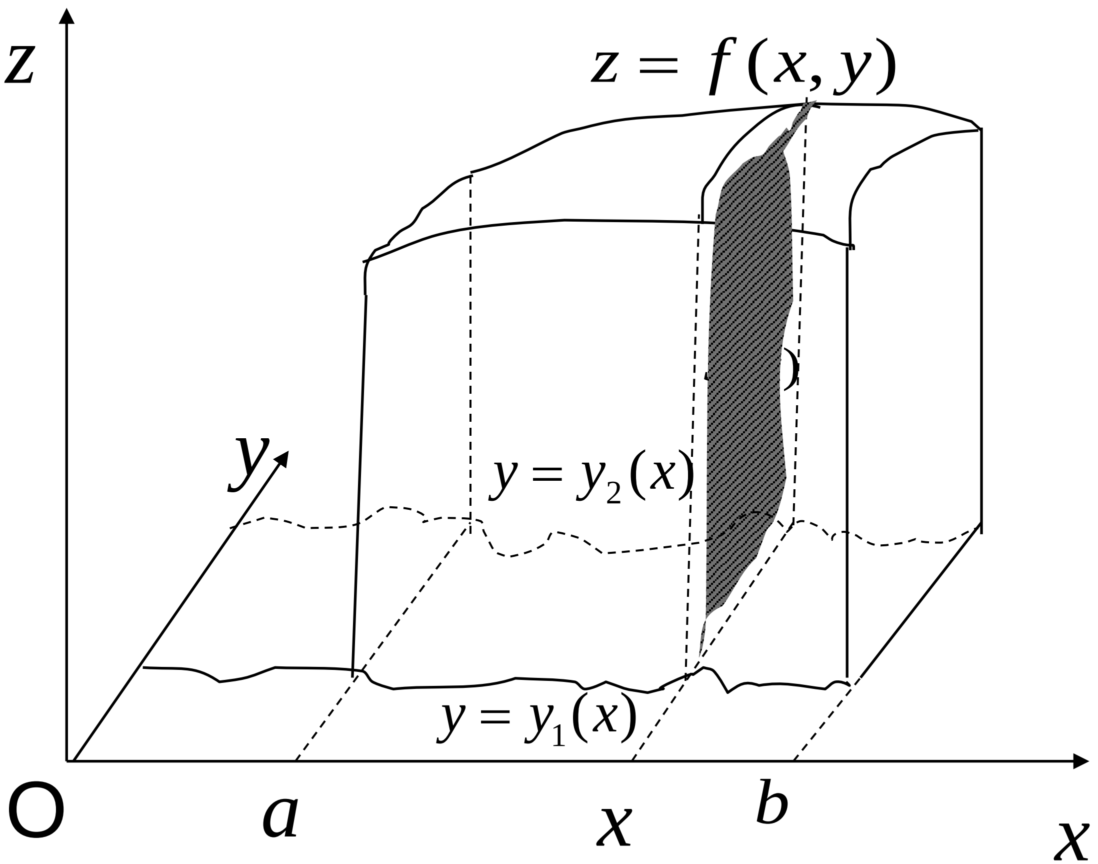
**** Tương tự, nếu miền D xác định bởi:*** $\begin{cases} c \le y \le d \\ x_1(y) \le x \le x_2(y) \end{cases}$

trong đó $x_1(y),\ x_2(y)$ là các hàm số liên tục trên $[c, d]$ thì

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \right) dy$$

$$\overset{k/h}{=} \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

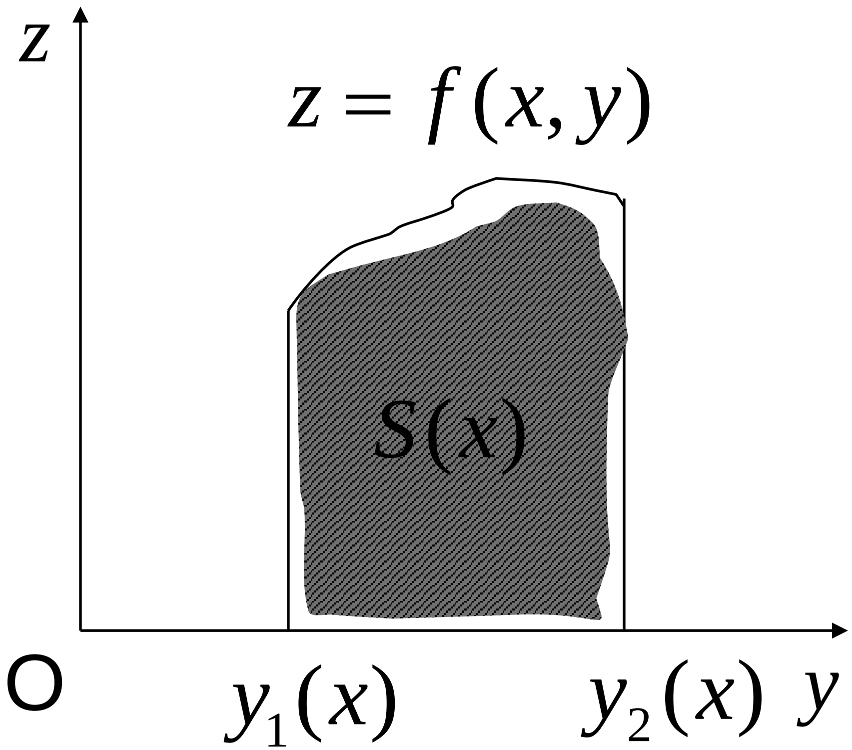
Chứng minh: Tương tự khi D là miền hình chữ nhật



$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b S(x)dx$$

$S(x)$ là diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox

tại x.



Với mỗi x cố định, ta có: $S(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$

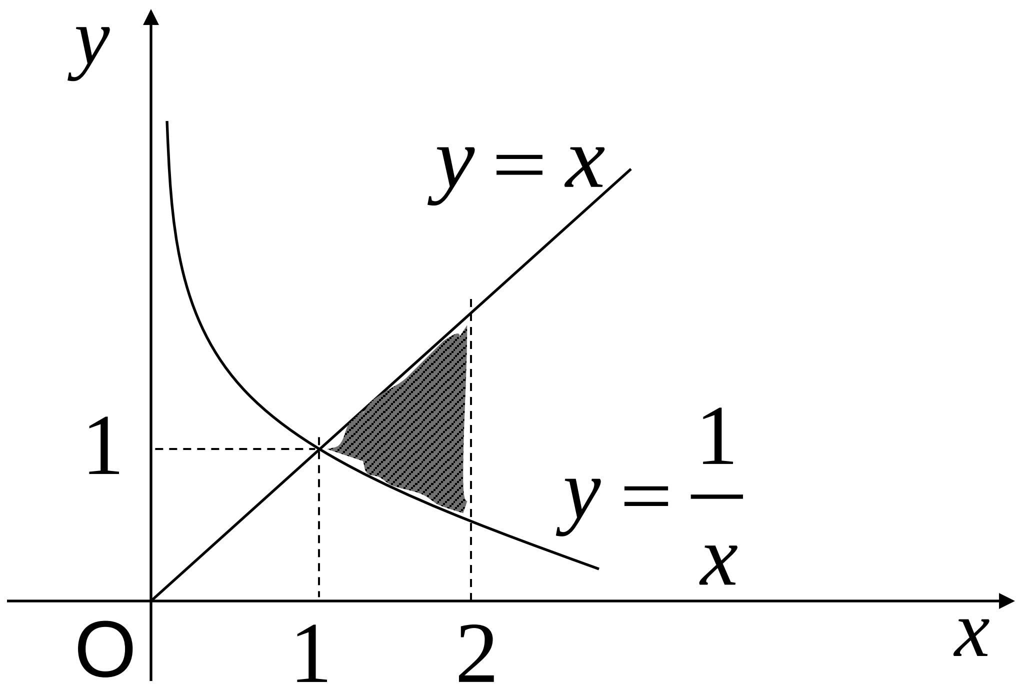
Vậy

$$\iint_D f(x,y)dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

Ví dụ: Tính tích phân sau: $I = \iint\limits_D \frac{x^2}{y^2} dxdy$

D giới hạn bởi các đường $y = x,\ y = \frac{1}{x},\ x = 2.$

Giải:



Miền D xác định bởi: $\begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ \dfrac{1}{x} \le y \le x \end{cases}$

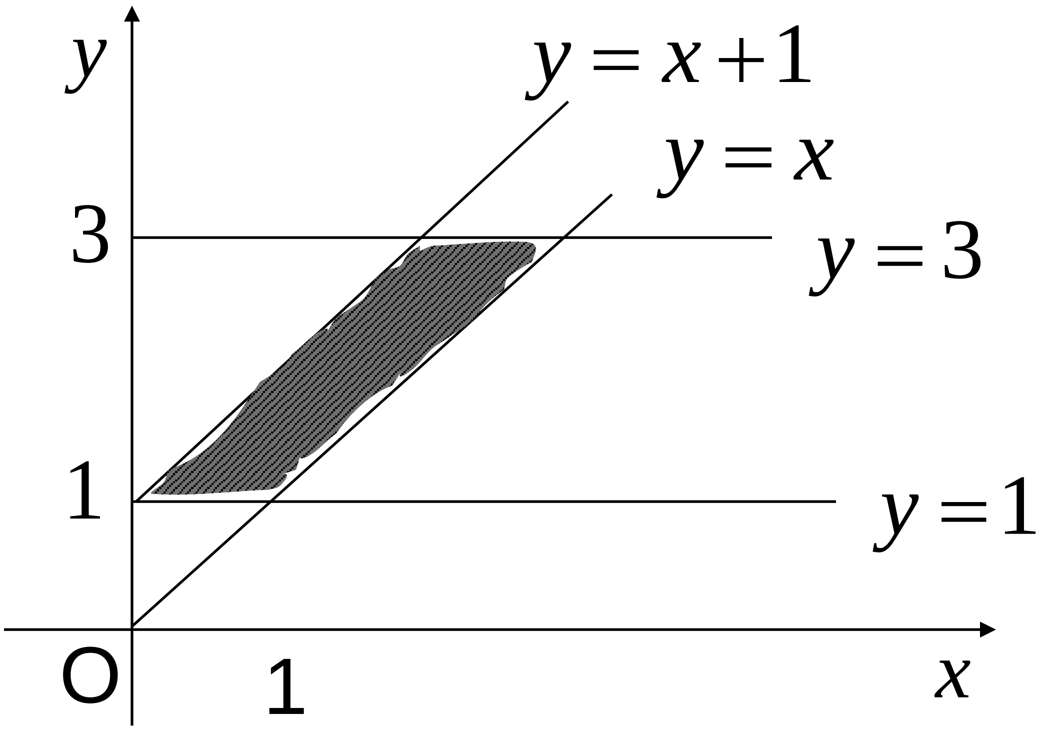
$$I = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2} dy = \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2} dy \right) dx = \int_1^2 \left(-\frac{x^2}{y} \Big|_{\frac{1}{x}}^{x} \right) dx =$$

$$= \int_1^2 \left(x^3 - x \right) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_1^2 = \frac{9}{4}.$$

Ví dụ: Tính $I = \iint_D xy\,dxdy$

D là miền giới hạn bởi các đường $y = x,\ \ y = x + 1,\ y = 1,\ y = 3.$

Giải:



Miền D xác định bởi: $\begin{cases} 1 \le y \le 3 \\ y - 1 \le x \le y \end{cases}$

$$I=\int_1^3 dy\int_{y-1}^{y} xy\,dx=\int_1^3\left(\int_{y-1}^{y} xydx\right)dy=\int_1^3\left(\frac{x^2}{2}y\Big|_{y-1}^{y}\right)dy=$$

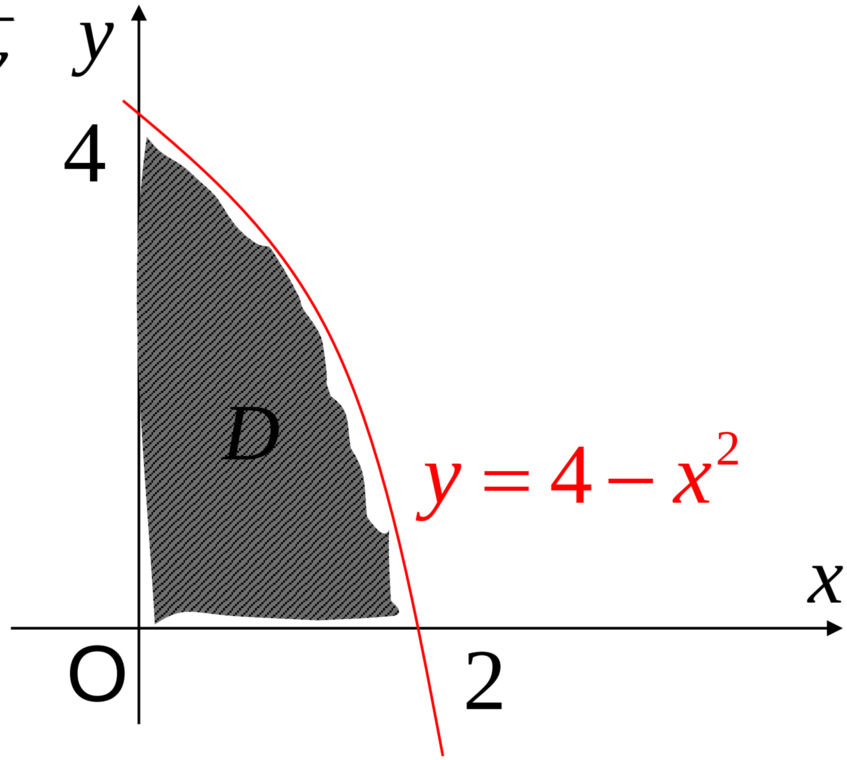
$$=\frac{1}{2}\int_1^3\left[y^3-y(y-1)^2\right]dy \quad =\frac{1}{2}\int_1^3\left[2y^2-y\right]dy$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}y^3-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_1^3=\frac{20}{3}.$$

Ví dụ: Tính tích phân sau: $I = \int_0^2 dx \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y} dy$

Giải: $I = \iint_D \frac{xe^{2y}}{4-y} dxdy$ D xác định bởi: $\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 4 - x^2 \end{cases}$

hay D xác định bởi: $\begin{cases} 0 \le y \le 4 \\ 0 \le x \le \sqrt{4-y} \end{cases}$



$$\Rightarrow I = \int_0^4 dy \int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{xe^{2y}}{4-y} dx$$

$$= \int_0^4 \left(\frac{x^2}{2} \frac{e^{2y}}{4-y} \Bigg|_0^{\sqrt{4-y}} \right) dy$$

$$= \int_0^4 \frac{4-y}{2} . \frac{e^{2y}}{4-y} dy = \frac{1}{4} e^{2y} \Big|_0^4$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^8 - 1\right).$$

Ví dụ: Đổi thứ tự lấy tích phân sau $\int_3^5 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)\,dy$

Giải: $D: \begin{cases} 3 \le x \le 5 \\ 0 \le y \le \sqrt{25-x^2} \end{cases}$ Viết lại

$$D: \begin{cases} 0 \le y \le 4 \\ 3 \le x \le \sqrt{25-y^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_3^5 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)\,dy = \int_0^4 dy \int_3^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y)\,dx$$

Ví dụ: Đổi thứ tự lấy tích phân sau $\int_{-1}^{2} dx \int_{-x}^{2-x^2} f(x,y)\,dy$

Giải: $D: \begin{cases} -1 \le x \le 2 \\ -x \le y \le 2 - x^2 \end{cases}$ $\quad D = D_1 \cup D_2$

$D_1: \begin{cases} -2 \le y \le 1 \\ -y \le x \le \sqrt{2-y} \end{cases}$ $\quad D_2: \begin{cases} 1 \le y \le 2 \\ -\sqrt{2-y} \le x \le \sqrt{2-y} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_{-2}^{1} dy \int_{-y}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\,dx + \int_{1}^{2} dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\,dx$$

Ví dụ: Đổi thứ tự lấy tích phân để tính

$$\int_0^1 \left(\int_1^{2-x} \cos\left(2y - \frac{y^2}{2}\right) dy \right) dx$$

Giải: $D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 1 \le y \le 2 - x \end{cases}$ Viết lại $D: \begin{cases} 1 \le y \le 2 \\ 0 \le x \le 2 - y \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_1^2 \left(\int_0^{2-y} \cos\left(2y - \frac{y^2}{2}\right) dx \right) dy$$

$$= \int_1^2 \cos\left(2y - \frac{y^2}{2}\right)(2-y)dy =$$

$$= \int_1^2 \cos\left(2y - \frac{y^2}{2}\right) d\left(2y - \frac{y^2}{2}\right) =$$

$$= \sin\left(2y - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 = \sin 2 - \sin\frac{3}{2}$$

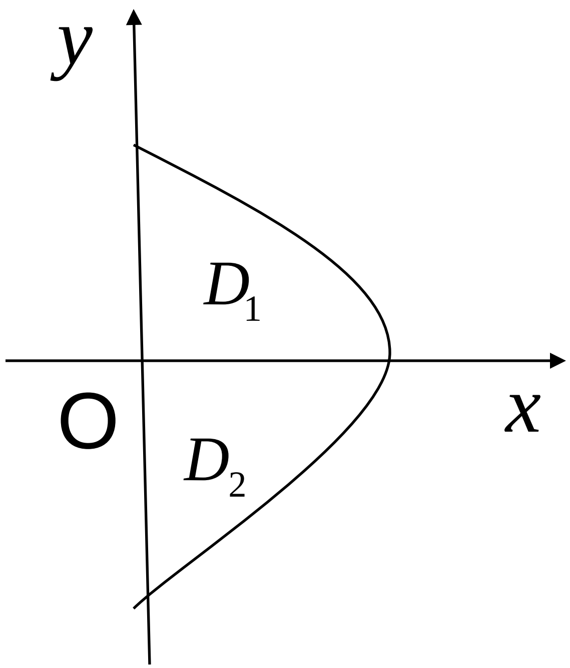
*** Nhận xét:** *Giả sử miền D có tính đối xứng qua trục Ox.*

+ Nếu biểu thức dưới dấu tích phân chẵn đối với y

(nghĩa là $f(x,y) = f(x,-y)$ với mọi $(x,y) \in D$)

thì $$\iint_D f(x,y)dxdy = 2\iint_{D_1} f(x,y)dxdy$$

$$= 2\iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$



(D_1, D_2 lần lượt là nửa trên, nửa dưới

của *D*)

+ Nếu biểu thức dưới dấu tích phân lẻ đối với y

(nghĩa là $f(x,y) = -f(x,-y)$ với mọi $(x,y) \in D$)

thì $$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = 0.$$

* Nhận xét trên được phát biểu tương tự trong trường hợp miền D

có tính đối xứng qua trục Oy.

* Nếu miền *D* là miền đối xứng qua trục gốc toạ độ *O* và hàm

$f(x, y)$ thoả mãn

$$f(-x,-y) = -f(x,y), \forall (x,y) \in D$$

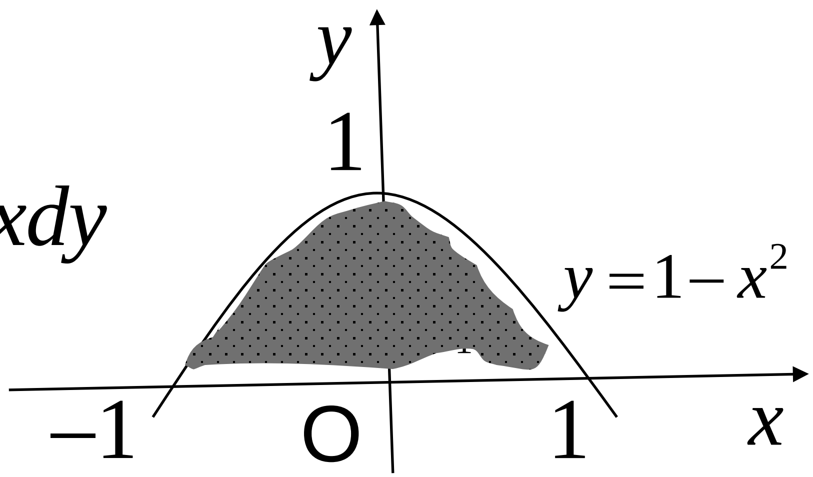
thì
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = 0$$

Ví dụ: Tính $I = \iint\limits_D \left(\dfrac{x}{\cos y + 2} - y \right) x^2 dxdy$

D là miền giới hạn bởi các đường: $y = 0,\ y = -x^2 + 1.$

Giải:

$$I = \iint\limits_D \frac{x^3}{\cos y + 2} dxdy - \iint\limits_D yx^2 dxdy$$



Do miền D có tính đối xứng qua trục Oy và biểu thức

$\dfrac{x^3}{\cos y + 2}$ lẻ đối với x nên $\iint\limits_D \dfrac{x^3}{\cos y + 2} dxdy = 0.$

Tương tự, biểu thức yx^2 chẵn đối với x nên

$$\iint\limits_D yx^2dxdy = 2\iint\limits_{D_1} yx^2dxdy.$$

D_1 xác định bởi: $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 - x^2 \end{cases}$

$$I = -2\int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} yx^2dy \quad = -2\int_0^1 \left(\left. \frac{x^2y^2}{2} \right|_0^{1-x^2} \right) dx$$

$$= -\int_0^1 x^2(1-x^2)^2dx \quad = -\int_0^1 \left(x^6 - 2x^4 + x^2 \right) dx$$

$$= -\left. \left(\frac{x^7}{7} - 2\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} \right) \right|_0^1 = -\frac{1}{7} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = -\frac{8}{105}.$$

Ví dụ: Tính $I = \iint\limits_D \left(2 - 6y^4x^3 + e^{x^2}\sin^3 y\right)dxdy$

trong đó $D: x^2 + y^2 \leq 4$

Giải:

$$I = \iint\limits_D 2\,dxdy - \iint\limits_D 6y^4x^3\,dxdy + \iint\limits_D e^{x^2}\sin^3 y\,dxdy = \iint\limits_D 2dxdy$$

(do D là miền đối xứng qua trục Ox, Oy và $6y^4x^3$ lẻ đối với x

$e^{x^2}\sin^3 y$ lẻ đối với y nên $\iint\limits_D 6y^4x^3\,dxdy = 0 = \iint\limits_D e^{x^2}\sin^3 y\,dxdy$

$$\Rightarrow I = 2.S_D = 2.\pi.2^2 = 8\pi.$$

Tính tích phân dạng $\iint\limits_D |f(x,y)|\,dxdy$

Phương pháp giải: Chia miền $D = D^+ \cup D^-$ trong đó

$$D^+ = D \cap \{(x,y): f(x,y) \geq 0\}$$
$$D^- = D \cap \{(x,y): f(x,y) \leq 0\}$$

Khi đó

$$\iint\limits_D |f(x,y)|\,dxdy = \iint\limits_{D^+} f(x,y)dxdy - \iint\limits_{D^-} f(x,y)dxdy$$

Ví dụ: Tính $\iint\limits_D \sqrt{|y-x^2|}\,dxdy, D = \{(x,y): |x| \le 1, 0 \le y \le 2\}.$

Giải: $D = D_1 \cup D_2, D_1 = \{(x,y): |x| \le 1, x^2 \le y \le 2\},$

$$D_2 = \{(x,y): |x| \le 1, 0 \le y \le x^2\}$$

$$I = \iint\limits_D \sqrt{|y-x^2|}\,dxdy = \iint\limits_{D_1} \sqrt{|y-x^2|}\,dxdy + \iint\limits_{D_2} \sqrt{|y-x^2|}\,dxdy = I_1 + I_2,$$

$$I_1 = \iint\limits_{D_1} \sqrt{y-x^2}\,dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{2} \sqrt{y-x^2}\,dy = \int_{-1}^{1} \frac{2}{3}\left(y-x^2\right)^{\frac{3}{2}} \Bigg|_{y=x^2}^{y=2} dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_{-1}^{1} (2-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{4}{3}\int_{0}^{1} (2-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx$$

Đổi biến $x = \sqrt{2}\sin t \Rightarrow dx = \sqrt{2}\cos t\,dt, 2 - x^2 = 2\cos^2 t$

$$I_1 = \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 t\,dt = \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 dt =$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+2\cos 2t+\cos^2 2t\right)dt = \frac{4}{3}\left(\frac{\pi}{4}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\cos 2t dt+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 4t}{2}dt\right) =$$

$$= \frac{\pi}{3}+\frac{4}{3}\sin 2t\Bigg|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{4}}+\frac{2}{3}\left(t+\frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{3}+\frac{4}{3}+\frac{\pi}{6} = \frac{4}{3}+\frac{\pi}{2}$$

$$I_2 = \iint_{D_2}\sqrt{x^2-y}\,dxdy = \int_{-1}^{1}dx\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}\,dy = -\int_{-1}^{1}\frac{2}{3}\left(x^2-y\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{y=0}^{y=x^2}dx =$$

$$= \frac{2}{3}\int_{-1}^{1}|x|^3\,dx = \frac{4}{3}\int_0^1 x^3dx = \frac{4}{3}.\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

$$\Rightarrow I = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{2}+\frac{5}{3}.$$

2.1.4. Công thức đổi biến số trong tích phân hai lớp. Tính tích phân theo tọa độ cực

a) Công thức đổi biến số

Xét $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ (f liên tục trên D)

Thực hiện phép đổi biến $x = x(u,v),\ y = y(u,v)$ sao cho:

* $x(u,v),\ y(u,v)$ là các hàm số liên tục, có các đạo hàm riêng cấp một liên tục trên miền D'

* Tương ứng $(u,v) \mapsto (x(u,v),\ y(u,v))$ là một song ánh từ D' lên D.

* Định thức Jacobi

$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{tại} \quad \forall (u,v) \in D'$$

Khi đó: $$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\left|J\right|dudv$$

Chú ý: Công thức trên vẫn đúng khi $J = 0$ tại một số hữu hạn điểm $(u,v) \in D'$.

Ví dụ: Tính $I = \iint\limits_D xy\,dxdy$

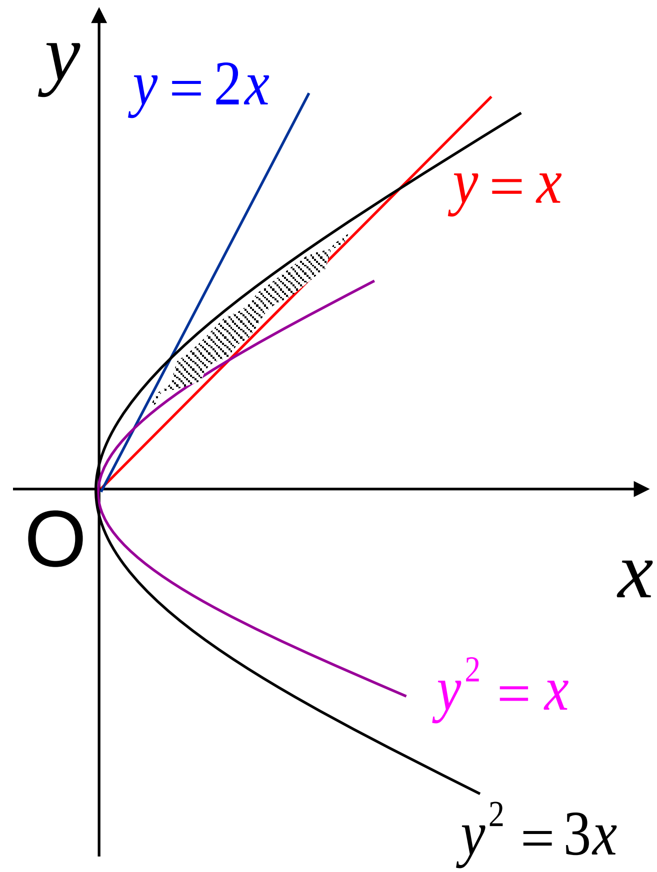
D giới hạn bởi các đường $y^2 = x,\ y^2 = 3x,\ y = x,\ y = 2x.$

Giải:

Đặt $\dfrac{y^2}{x} = u,\ \dfrac{y}{x} = v$

Miền $D':\begin{cases} 1 \le u \le 3 \\ 1 \le v \le 2 \end{cases}$

Có $x = \dfrac{u}{v^2},\ y = \dfrac{u}{v}$



$$J=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{v^2} & \dfrac{-2u}{v^3}\\ \dfrac{1}{v} & -\dfrac{u}{v^2}\end{vmatrix}=\frac{u}{v^4}\neq 0$$ tại $\forall(u,v)\in D'.$

$$I=\int_1^3 du\int_1^2 \frac{u}{v^2}.\frac{u}{v}.\frac{u}{v^4}dv=\left(\int_1^3 u^3du\right).\left(\int_1^2\frac{1}{v^7}dv\right)=$$

$$\left(\frac{u^4}{4}\bigg|_1^3\right).\left(\frac{-1}{6v^6}\bigg|_1^2\right)=\frac{105}{32}.$$

Ví dụ: Tính $I = \iint\limits_D x^3\,dxdy$ D là miền giới hạn bởi các đường:

$$y = \frac{1}{x},\ y = \frac{2}{x},\ y = x^2,\ y = \frac{x^2}{2}.$$

Giải: Đặt $u = xy,\ v = \dfrac{y}{x^2}$

Có $$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\dfrac{2y}{x^3} & \dfrac{1}{x^2} \end{vmatrix} = \frac{3y}{x^2} \Rightarrow \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{x^2}{3y} = \frac{1}{3v},$$

Có $x^3 = \dfrac{u}{v}$

Miền D tương ứng với: $\begin{cases} 1 \le u \le 2 \\ \dfrac{1}{2} \le v \le 1 \end{cases}$

$$I = \int_1^2 du \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{u}{v}.\frac{1}{3v}dv = \frac{1}{3}\left(\int_1^2 udu\right).\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{v^2}dv\right) = \frac{1}{3}.\frac{3}{2}.1 = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ: Tính $I = \iint\limits_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dxdy$ D là miền giới hạn bởi các đường

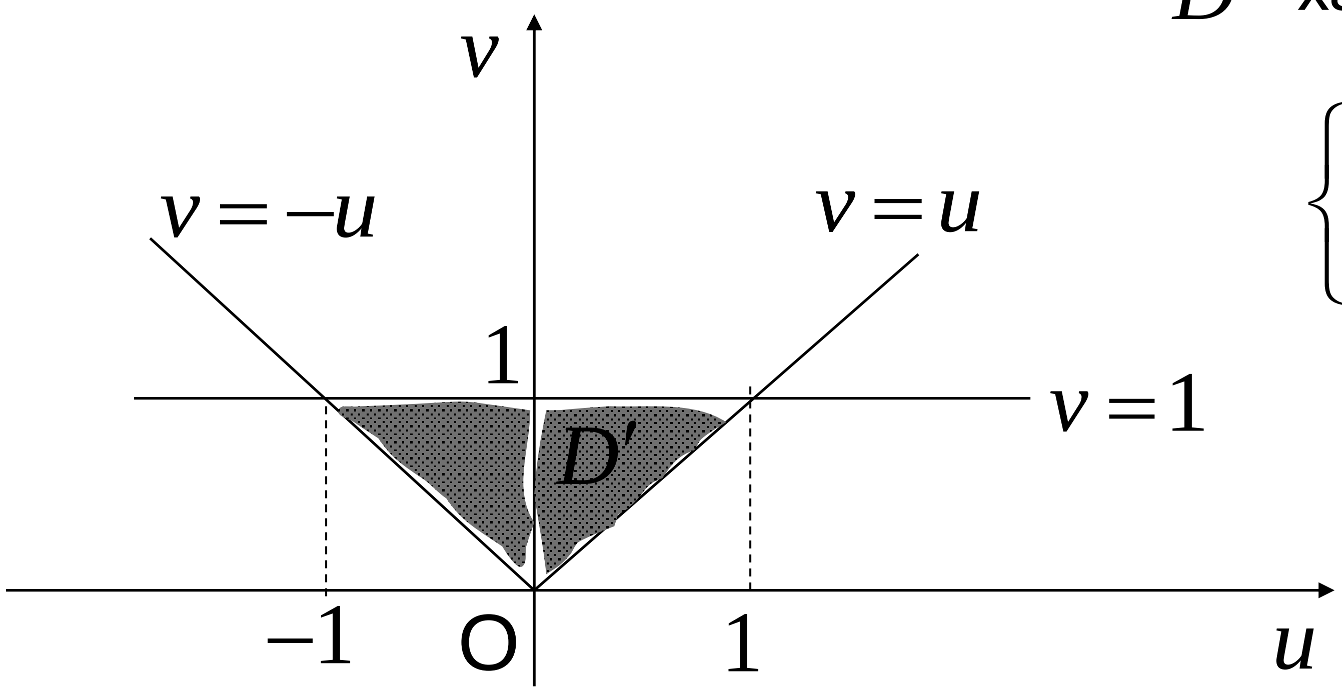
$$x = 0, y = 0, x + y = 1.$$

Giải: Đặt $x - y = u,\ x + y = v \Rightarrow x = \dfrac{u+v}{2},\ \ y = \dfrac{v-u}{2}$

Miền D' giới hạn bởi các đường $u + v = 0,\ v - u = 0,\ v = 1$

D' xác định bởi:

$$\begin{cases} 0 \le v \le 1 \\ -v \le u \le v \end{cases}$$

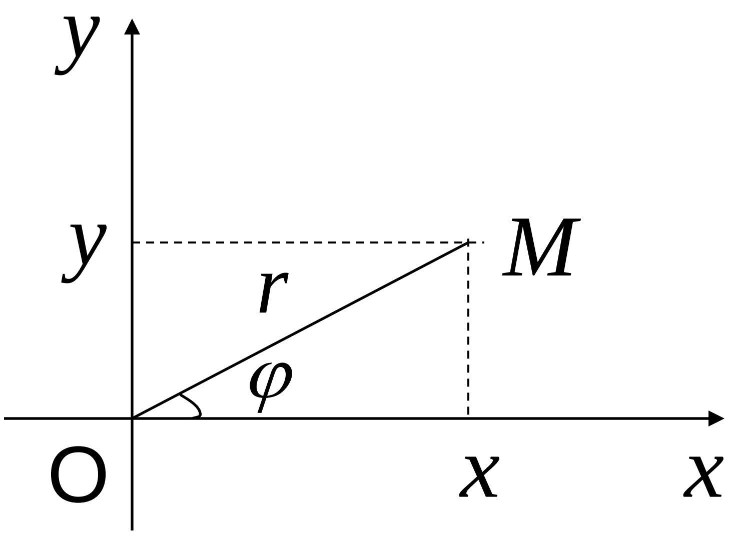


$$J=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}.$$

$$I=\iint\limits_{D'} e^{\frac{u}{v}}.\frac{1}{2}\,du\,dv=\frac{1}{2}\int_0^1 dv\int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}du=\frac{1}{2}\int_0^1\left(ve^{\frac{u}{v}}\Big|_{-v}^{v}\right)dv$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(ve-\frac{v}{e}\right)dv=\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)\frac{v^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{4}\left(e-\frac{1}{e}\right).$$

b) Tính tích phân hai lớp trong hệ tọa độ cực



* Tọa độ cực của điểm M

là (r,φ) *trong đó:*

$$\varphi = (\mathrm{O}x, \overrightarrow{OM}), \ \ r = \left|\overrightarrow{OM}\right|$$

Trong cả hệ tọa độ cực: $0 \le \varphi \le 2\pi, \ \ r \ge 0.$

* Giả sử M có tọa độ (x, y) trong hệ trục Oxy

Ta có: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad (r \geq 0,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$

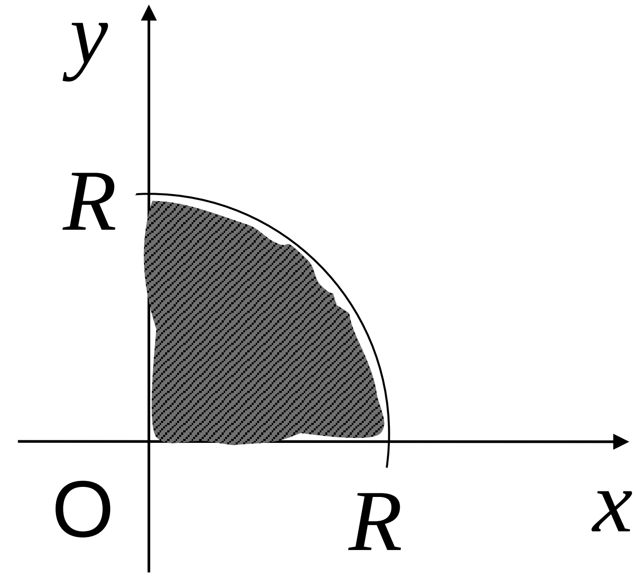
$$J = \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r \geq 0.$$

** Công thức tính tích phân trong tọa độ cực là:*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,drd\varphi.$$

Nhận xét: Thường đổi biến sang tọa độ cực khi miền lấy tích phân là hình tròn hoặc một phần hình tròn.

Ví dụ: Tính $I = \iint\limits_D y\,dx\,dy$ D là một phần tư hình tròn tâm O, bán kính R, nằm trong góc phần tư thứ nhất.



Giải: Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

Miền D tương ứng với: $\begin{cases} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le R \end{cases}$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R r\sin\varphi . r dr = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi \right) . \left(\int_0^R r^2 dr \right) =$$

$$= \left(\cos\varphi \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} \right) . \frac{R^3}{3} = \frac{R^3}{3}.$$

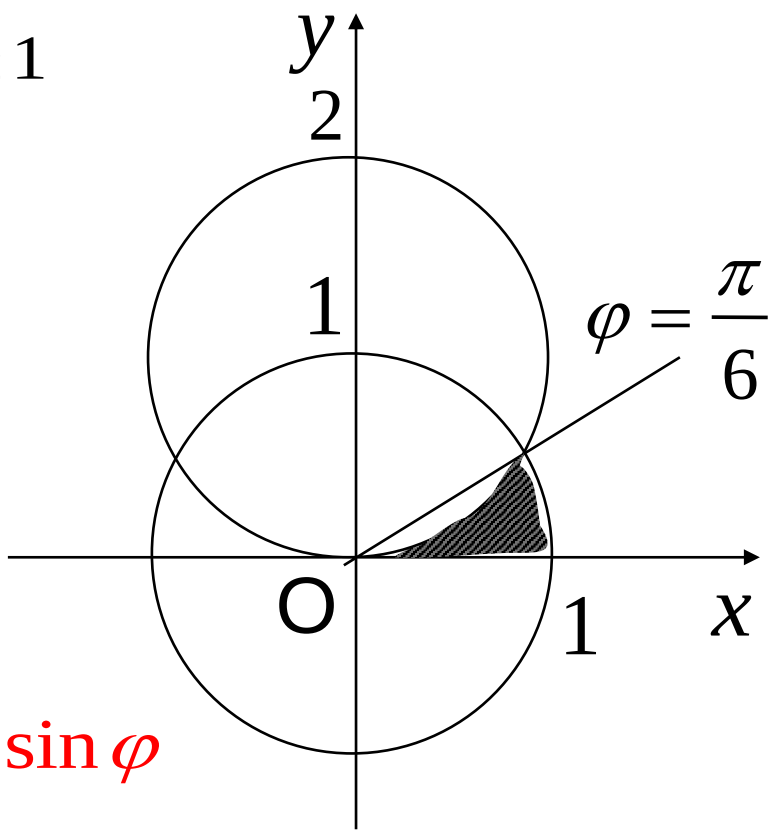
Ví dụ: Tính $I = \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ D là miền xác định bởi:

$$x^2+y^2-2y\ge 0,\ x^2+y^2-1\le 0,\ x\ge 0,\ y\ge 0.$$

Giải: $*\ x^2+y^2-2y\ge 0 \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2\ge 1$

$*x^2+y^2-2y = x^2+y^2-1$

$\Leftrightarrow y=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\varphi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}.$



Đổi biến sang tọa độ cực.

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

$*x^2+y^2-2y=0 \Leftrightarrow r^2 = 2r\sin\varphi \Leftrightarrow r = 2\sin\varphi$

$*x^2+y^2-1=0 \Leftrightarrow r^2=1 \Leftrightarrow r=1.$

Miền D tương ứng với: $\begin{cases} 0\le\varphi\le\frac{\pi}{6} \\ 2\sin\varphi\le r\le 1 \end{cases}$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\varphi\int_{2\sin\varphi}^{1}r^2dr=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\left.\frac{r^3}{3}\right|_{2\sin\varphi}^{1}\right)d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{3}-\frac{8}{3}\sin^3\varphi\right)d\varphi$$

$$=\frac{1}{3}\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}+\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(1-\cos^2\varphi\right)d(\cos\varphi)$$

$$=\frac{1}{3}.\frac{\pi}{6}+\frac{8}{3}\left(\cos\varphi-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=\frac{\pi}{18}+\frac{8}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{24}-1+\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{18}+\sqrt{3}-\frac{16}{9}.$$

Ví dụ: Tính $\iint\limits_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy, D: (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), x \geq 0$

Giải: Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \Leftrightarrow r^4 = a^2r^2\cos 2\varphi \Leftrightarrow r = a\sqrt{\cos 2\varphi}, -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \sqrt{a^2 - r^2}\,r dr = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\left(-\frac{1}{2}\right).\frac{2}{3}\left(a^2 - r^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{r=0}^{r = a\sqrt{\cos 2\varphi}}\right) d\varphi =$$

$$= -\frac{a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[(1 - \cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}} - 1\right] d\varphi = -\frac{2a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(2^{\frac{3}{2}}\sin^3\varphi - 1\right) d\varphi =$$

$$= -\frac{2a^3}{3}\left[-\frac{\pi}{4} - 2^{\frac{3}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3\varphi d\varphi\right] = -\frac{2a^3}{3}\left[-\frac{\pi}{4} + 2^{\frac{3}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos^2\varphi)d(\cos\varphi)\right] =$$

$$= -\frac{2a^3}{3}\left[-\frac{\pi}{4} + 2^{\frac{3}{2}}\left(\cos\varphi - \frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}\right] = -\frac{2a^3}{3}\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{5-2\sqrt{8}}{3}\right).$$

2.1.5. Ứng dụng của tích phân hai lớp

1^0) Tính thể tích vật thể hình trụ

Thể tích vật thể hình trụ có đáy là miền $D \subset mp(\mathrm{Oxy})$, mặt trên có phương trình $z = f(x, y)$ ($f(x, y) \geq 0$, liên tục trên D) là:

$$V = \iint_D f(x, y)dxdy.$$

2^0) Tính diện tích hình phẳng

Diện tích hình phẳng xác định trên miền D là: $S = \iint_D dx\,dy$

3^0) Tính diện tích mặt cong

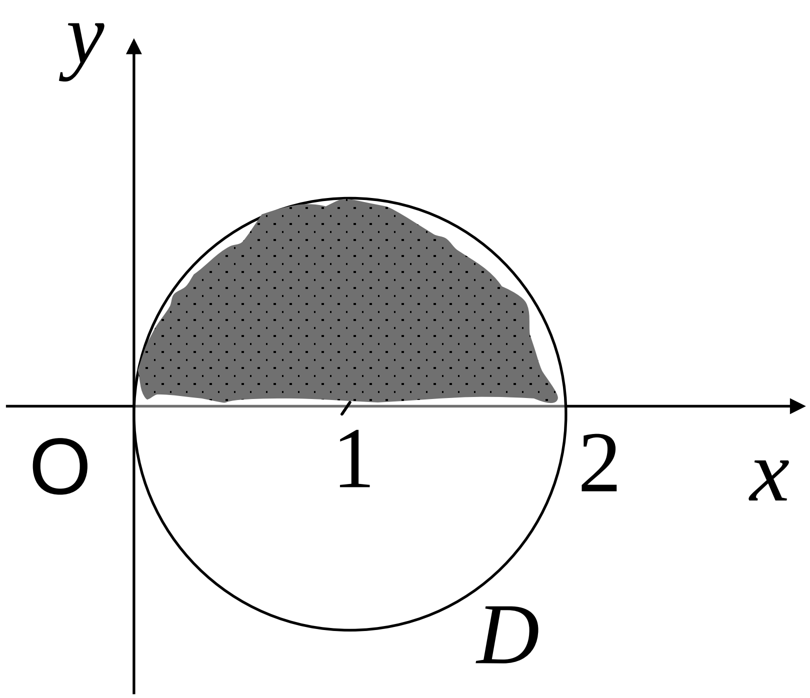
Cho mặt cong S có phương trình $z = f(x, y)$ trong đó $f(x, y)$ liên tục, có các đạo hàm riêng cấp một liên tục trên D. (D là hình chiếu của S lên mặt phẳng $x\mathrm{O}y$) Diện tích mặt S là: $\iint_D \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}\,dxdy$

Ví dụ: Tính thể tích của phần hình trụ $x^2 + y^2 = 2x$ nằm trong mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4.$

Giải: Phần hình trụ có tính đối xứng qua mặt phẳng $z = 0.$

Thể tích phần hình trụ là: $V = 2\iint\limits_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, dxdy$

D là hình tròn $x^2 + y^2 \leq 2x.$



Do miền D có tính đối xứng qua trục Ox và biểu thức dưới dấu tích phân chẵn đối với y nên

$$V = 4\iint\limits_{D_1} \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, dxdy$$

D_1 xác định bởi: $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2x \\ y \geq 0 \end{cases}$

Đổi biến sang tọa độ cực   Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le 2\cos\varphi \end{cases}$

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \sqrt{4-r^2}.r\,dr = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} (4-r^2)^{\frac{1}{2}}.\left(-\frac{1}{2}\right).d(4-r^2).$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.(4-r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{2\cos\varphi} \right) d\varphi = -\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(8\sin^3\varphi - 8\right) d\varphi$$

$$= \frac{32}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)$$

Ví dụ: Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt

$$z = xy, x^2 = y, x^2 = 2y, y^2 = x, y^2 = 2x, z = 0.$$

Giải: $V = \iint\limits_D xydxdy, D: x^2 = y, x^2 = 2y, y^2 = x, y^2 = 2x.$

Đổi biến $u = \frac{x^2}{y}, v = \frac{y^2}{x}, 1 \le u \le 2, 1 \le v \le 2.$

$$\frac{D(u,v)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2x}{y} & \frac{-x^2}{y^2} \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow J = \frac{1}{3}$$

Ta có $xy = uv$

$$V = \int_1^2 du \int_1^2 \frac{1}{3} uvdv = \frac{1}{3} \int_1^2 udu \int_1^2 vdv = \frac{3}{4} \text{(đvtt)}$$

Ví dụ: Tính $\iint_D dxdy$ trong đó D là miền xác định bởi

$$x^2 + y^2 \le 4, y \le x$$

Giải: $\iint_D dxdy$ là diện tích miền D và bằng 2π

Ví dụ: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

$$y = x, x = 2y, x + y = a, x + 3y = a, a > 0$$

Giải: Đổi biến $u = \dfrac{a-x}{y}, 1 \le u \le 3, v = \dfrac{x}{y}, 1 \le v \le 2.$

$$\Rightarrow x = \frac{av}{u+v}, y = \frac{a}{u+v},$$

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{av}{(u+v)^2} & \dfrac{au}{(u+v)^2} \\ -\dfrac{a}{(u+v)^2} & -\dfrac{a}{(u+v)^2} \end{vmatrix} = \frac{a^2}{(u+v)^3}$$

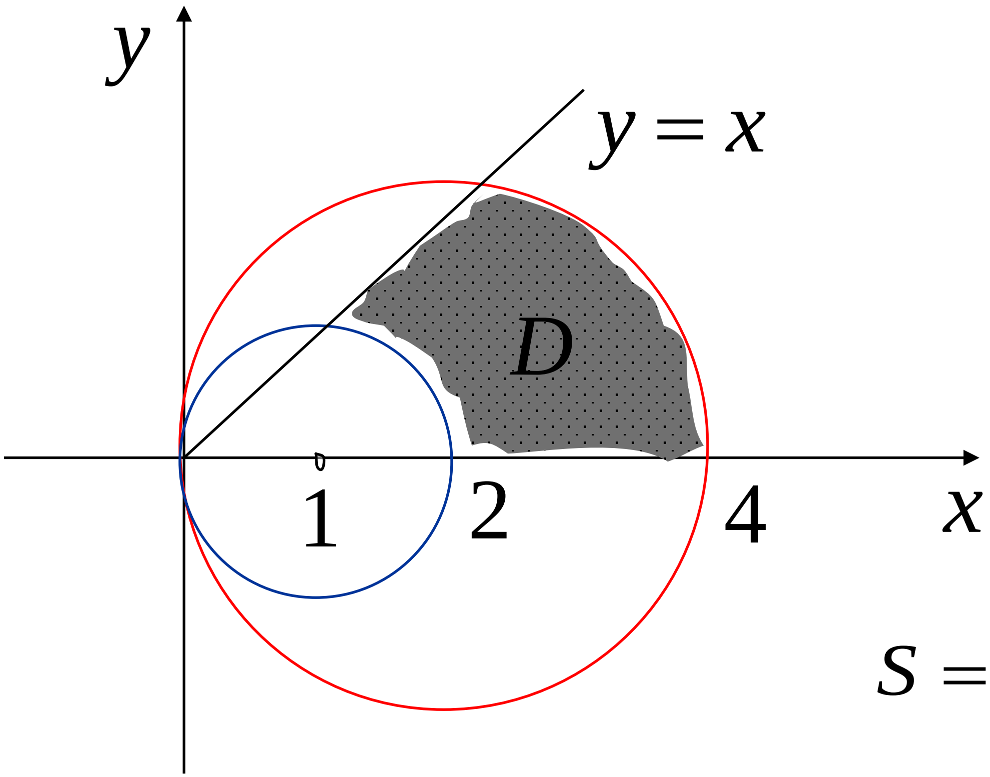
$$I=\iint_D dxdy=\int_1^3 du\int_1^2 \frac{a^2}{(u+v)^3}dv=a^2\int_1^3\left(-\frac{1}{2(u+v)^2}\Bigg|_{v=1}^{v=2}\right)du=$$

$$=a^2\int_1^3\left(\frac{1}{2(u+1)^2}-\frac{1}{2(u+2)^2}\right)du=\frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{u+2}-\frac{1}{u+1}\right)\Bigg|_1^3=\frac{7a^2}{120}dvdt$$

Ví dụ: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

$$(x-1)^2 + y^2 = 1,\ (x-2)^2 + y^2 = 4,\quad y = x,\quad y = 0.$$

Giải:



Diện tích $S = \iint\limits_D dxdy$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

$$\begin{cases} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4} \\ 2\cos\varphi \le r \le 4\cos\varphi \end{cases}$$

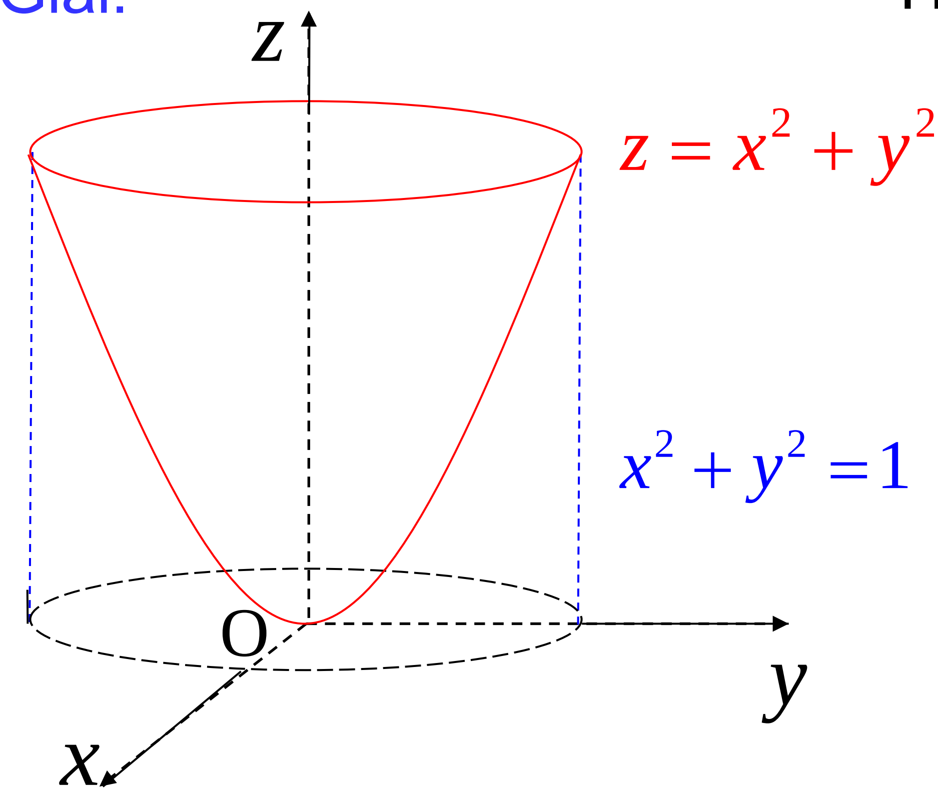
$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} rdr = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\left. \frac{r^2}{2} \right|_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \right) d\varphi$$

$$= 6\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\varphi d\varphi = 3\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2\varphi)d\varphi = 3\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = 3\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right)$$

Ví dụ: Tính diện tích phần mặt $z = x^2 + y^2$ nằm trong mặt trụ

$x^2 + y^2 = 1.$

Giải:



Hình chiếu của phần mặt $z = x^2 + y^2$ lên mặt phẳng xOy là miền

$$D : x^2 + y^2 \le 1.$$

Diện tích:

$$S = \iint_D \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\, dxdy =$$

$$\iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1+4r^2}.rdr = \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right).\left(\int_0^1 \sqrt{1+4r^2}\ rdr \right)$$

$$= 2\pi.\int_0^1 (1+4r^2)^{\frac{1}{2}}.\frac{1}{8}d(1+4r^2) = \frac{\pi}{4}.\frac{2}{3}.(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$$

Ví dụ: Tính diện tích phần mặt phẳng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ chắn giữa các mặt phẳng tọa độ.

Giải:

$$z=c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\Rightarrow\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}=\frac{1}{ab}\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+c^2b^2}$$

$$S=\iint\limits_D\frac{1}{ab}\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+c^2b^2}dxdy=\frac{1}{ab}\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+c^2b^2}.\frac{ab}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+c^2b^2}$$ đvdt

2.2. Tích phân bội ba (Tích phân ba lớp)

2.2.1. Định nghĩa tích phân ba lớp. Điều kiện khả tích

a) Định nghĩa: Cho hàm số $f(x,y,z)$ xác định trên miền đóng, bị chặn V. Chia V thành n miền nhỏ $V_1, V_2, \ldots, V_n$ tùy ý sao cho các V_i không giao nhau ngoại trừ biên

Gọi ΔV_i là thể tích miền V_i, d_i là đường kính miền V_i $(i = \overline{1,n})$

$d = \max\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$

Trên mỗi miền V_i chọn một điểm M_i tùy ý

Tổng tích phân của f trên miền V là $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i).\Delta V_i$

Nếu giới hạn $\lim_{d \to 0} I_n$ tồn tại hữu hạn, không phụ thuộc phép chia

V, phép chọn các điểm $M_i \in V_i$ thì giới hạn đó được gọi là tích phân ba lớp (hay tích phân bội 3) của hàm $f(x, y, z)$ trên miền V.

Kí hiệu: $\iiint\limits_V f(x,y,z)dV$ Khi đó ta nói f khả tích trên V.

Giả sử $f(x, y, z)$ khả tích trên V. Khi đó việc tính tích phân bội 3 không phụ thuộc phép chia miền V. Do đó ta có thể chia V theo họ các mặt phẳng song song với các mặt phẳng tọa độ. Khi đó

$\Delta V_i = \Delta x.\Delta y.\Delta z$ và $\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$

b) Điều kiện khả tích:

Nếu $f(x, y, z)$ liên tục trên miền đóng, bị chặn V thì f khả tích trên V.

2.2.2 Tính chất Tích phân ba lớp có các tính chất tương tự tích phân hai lớp.

1^0) $\iiint\limits_V dxdydz = v$ (v là thể tích miền V)

- Tính chất tuyến tính

$$2^0)\ \iiint\limits_V [\alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z)]dxdydz =$$

$$\alpha \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz + \beta \iiint\limits_V g(x,y,z)dxdydz$$

- Tính chất cộng tính: Nếu $V = V_1 \cup V_2$ trong đó V_1, V_2 không giao nhau ngoại trừ biên thì

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)dxdydz$$

- Tính bảo toàn thứ tự

Nếu $f(x,y,z) \le g(x,y,z)$ trên V thì

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz \le \iiint\limits_V g(x,y,z)dxdydz$$

Đặc biệt $|f|$ cũng khả tích và

$$\left|\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz\right| \le \iiint\limits_V |f(x,y,z)|\,dxdydz$$

Định lý Fubini: Giả sử f liên tục trên hình hộp

$B=[a,b]\times[c,d]\times[p,q]$ thì f khả tích trên B và

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)dxdydz = \int_p^q\left[\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y,z)dx\right)dy\right]dz =: \int_p^q dz\int_c^d dy\int_a^b f(x,y,z)dx$$

$$= \int_p^q\left[\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y,z)dy\right)dx\right]dz =: \int_p^q dz\int_a^b dx\int_a^b f(x,y,z)dy = \ldots$$

Chú ý: Tích phân bội 3 trên hình hộp có thể được tính theo sáu thứ tự khác nhau

Hệ quả: Nếu $f(x,y,z) = g(x)h(y)k(z)$ thì

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_B g(x)h(y)k(z)dxdydz =$$

$$= \left(\int_a^b g(x)dx\right).\left(\int_c^d h(y)dy\right).\left(\int_p^q k(z)dz\right)$$

Ví dụ : Tính $\iiint\limits_B xyz^2\,dxdydz, B = [0,1]\times[-1,2]\times[0,3].$

Giải: $$\iiint\limits_B xyz^2dxdydz = \int_0^1 xdx.\int_{-1}^2 ydy.\int_0^3 z^2dz = \frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{27}{3} = \frac{27}{4}$$

2.2.3. Cách tính tích phân ba lớp

a) Công thức Cho $f(x,y,z)$ là hàm số liên tục trên V.

- Giả sử miền V được giới hạn bởi các mặt $z = z_1(x,y),\ z = z_2(x,y)$ trong đó $z_1(x,y),\ z_2(x,y)$ là các hàm số liên tục trên miền D (D là hình chiếu của V lên mặt phẳng $\mathrm{O}xy$). Khi đó:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D \left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy$$

* Nếu miền D xác định bởi: $\begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{cases}$

trong đó $y_1(x),\ y_2(x)$ liên tục trên $[a,b]$

thì $$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy =$$

k/h
$$= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

- Giả sử miền V được giới hạn bởi các mặt $x = x_1(y,z), x = x_2(y,z),$ trong đó $x_1(y,z)$, $x_2(y,z)$ là các hàm số liên tục trên miền D (D là hình chiếu của V lên mặt Oyz). Khi đó:

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iint_D \left(\int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x,y,z)dy \right) dxdz$$

- Giả sử miền V được giới hạn bởi các mặt $y = y_1(x,z), y = y_2(x,z),$ trong đó $y_1(x,z)$, $y_2(x,z)$ là các hàm số liên tục trên miền D (D là hình chiếu của V lên mặt Oxz). Khi đó:

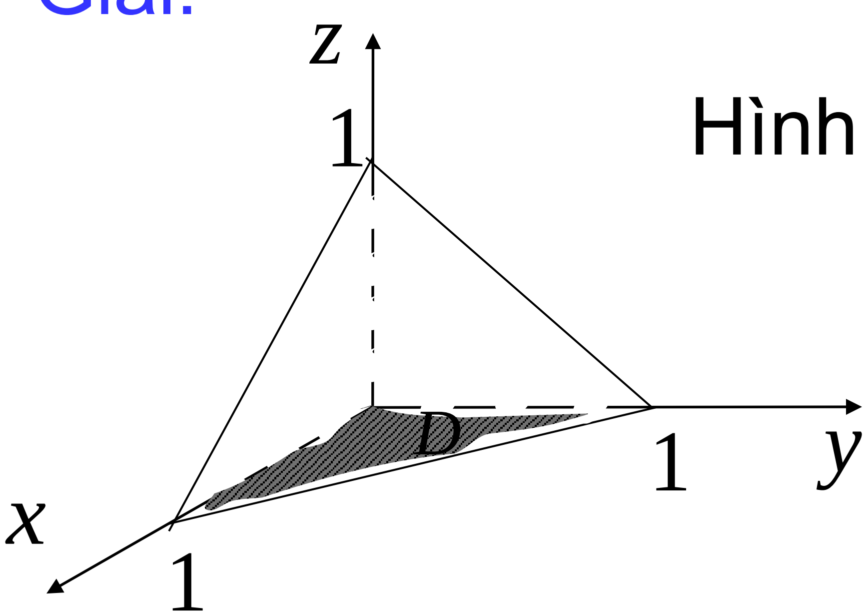
$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iint_D \left(\int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x,y,z)dy \right) dxdz$$

Ví dụ:

Tính $I = \iiint\limits_V (1 - x - y)dxdydz$

V giới hạn bởi các mặt phẳng tọa độ và mặt phẳng $x + y + z = 1.$

Giải:



Hình chiếu của V lên mặt phẳng Oxy

là miền *D.*

D xác định bởi: $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 - x \end{cases}$

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (1 - x - y)dz \; = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} (1 - x - y)dz \right) dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y)^2 \, dy \quad = \int_0^1 \left. \frac{(1 - x - y)^3}{3} \right|_{1-x}^{0} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{(1 - x)^3}{3} dx \; = \frac{1}{3} . \left. \frac{(1 - x)^4}{4} \right|_1^0 = \frac{1}{12}.$$

❖ Gọi S(x) là thiết diện của miền V bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại x. Khi đó

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \iint\limits_{S(x)} f(x,y,z)dydz$$

Ví dụ: Tính $\mathrm{I} = \iiint\limits_V x^2\,dxdydz$ V là miền giới hạn bởi mặt elipxoit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$I = \int_{-a}^{a} x^2 dx \iint\limits_{S(x)} dydz$$ S(x) là thiết diện của miền V bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại x.

$\iint\limits_{S(x)} dydz$ bằng diện tích của thiết diện S(x). Do S(x) là miền giới

giới hạn bởi đường elip $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$

hay $$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}})\right)^2}=1$$ nên diện tích

của S(x) bằng $\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$ Do đó

$$I=\pi bc\int_{-a}^{a}x^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=2\pi bc\int_{-a}^{a}\left(x^2-\frac{x^4}{a^2}\right)dx=\frac{4}{15}\pi a^3bc$$

Áp dụng CT đổi biến ta có thể chứng minh được

+) Nếu *V* là miền đối xứng qua mặt phẳng *z* = 0 và *f* (*x*, *y*, *z*) là hàm số lẻ đối với *z* thì

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = 0$$

+) Nếu *V* là miền đối xứng qua mặt phẳng *z* = 0 và *f* (*x*, *y*,*z*) là hàm số chẵn đối với *z* thì

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = 2\iiint\limits_{V^+} f(x,y,z)dxdydz$$

trong đó V^+ là phần phía trên mặt phẳng *z* = 0 của *V* hoặc phần phía dưới mặt phẳng *z* = 0 của *V*

Vai trò của *z* trong hai định lý trên có thể thay đổi bằng *x* hoặc *y*.

+) Nếu $V = \Omega \cup \Omega'$ trong đó Ω, Ω' là 2 miền đối xứng qua trục Ox thì

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \begin{cases} 2\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz & \text{nếu } f(x,-y,-z) = f(x,y,z), \forall (x,y,z) \in V \\ 0 \quad {}_{V^{+}} & \text{nếu } f(x,-y,-z) = -f(x,y,z), \forall (x,y,z) \in V \end{cases}$$

Vai trò của *x* có thể thay đổi bằng y hoặc *z*.

+) Nếu $V = \Omega \cup \Omega'$ trong đó Ω, Ω' là 2 miền đối xứng qua gốc tọa độ

thì

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \begin{cases} 2\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz & \text{nếu } f(-x,-y,-z) = f(x,y,z), \forall (x,y,z) \in V \\ 0 & \text{nếu } f(-x,-y,-z) = -f(x,y,z), \forall (x,y,z) \in V \end{cases}$$

Ví dụ: Tính $I = \iiint\limits_V (x - y^3 + z^5)\, dxdydz$ với

$$V: x^4 + y^4 + z^4 \leq 1$$

Giải:

$$I = \iiint\limits_V x\, dxdydz - \iiint\limits_V y^3\, dxdydz + \iiint\limits_V z^5\, dxdydz = I_1 - I_2 + I_3$$

Do hàm $f_1(x, y, z) = x$ lẻ theo biến x, miền V đối xứng qua mặt phẳng Oyz nên $I_1 = 0$

Do hàm $f_2(x, y, z) = y^3$ lẻ theo biến y, miền V đối xứng qua mặt phẳng Oxz nên $I_2 = 0$

Do hàm $f_3(x, y, z) = z^5$ lẻ theo biến z, miền V đối xứng qua mặt phẳng Oxy nên $I_3 = 0$ Do đó $I = 0$

Ví dụ: Tính $I = \iiint\limits_V \left(1 + \sin\left(x^2y^4z^3\right)\right)dxdydz$ với V là vật thể giới hạn bởi $z^2 = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 1$

Giải: Do hàm $\sin\left(x^2y^4z^3\right)$ lẻ theo biến z, miền V đối xứng qua mặt phẳng $z = 0$ nên

$$I = \iiint\limits_V dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int_{-\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{x^2+y^2}} dz = \iint\limits_D 2\sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy$$

trong đó $D: x^2 + y^2 \le 1$

Đổi biến sang tọa độ cực $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le 1$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 2r^2 dr = 2\pi.\frac{2}{3}r^3\Big|_0^1 = \frac{4\pi}{3}$$

2.2.4. Đổi biến trong tích phân ba lớp

a) Công thức đổi biến số

Xét $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ (f liên tục trên V)

Thực hiện phép đổi biến $x = x(u,v,w),\ y = y(u,v,w),\ z = z(u,v,w)$

sao cho

* $x(u,v,w),\ y(u,v,w),\ z(u,v,w)$ là các hàm số liên tục,

có các ĐHR cấp một liên tục trên miền V'

* Tương ứng $(u,v,w) \mapsto (x(u,v,w),\ y(u,v,w),\ z(u,v,w))$

là một song ánh từ V' lên V.

* Định thức Jacobi $J = \dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z_w \end{vmatrix} \neq 0$

tại $\forall (u,v,w) \in V'$ Khi đó:

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V'} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\left|J\right|dudvdw$$

Chú ý: Công thức trên vẫn đúng khi $J = 0$ tại một số hữu hạn điểm

$(u,v,w) \in V'$.

Nếu $J \neq 0$ thì $\dfrac{1}{J} = \dfrac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y & u'_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \\ w'_x & w'_y & w'_z \end{vmatrix}$

Ví dụ: Tính $\iiint\limits_V dxdydz$ trong đó V giới hạn bởi các mp sau

$$|x+y+z|=3, |x+2y-z|=1, |x+4y+z|=2$$

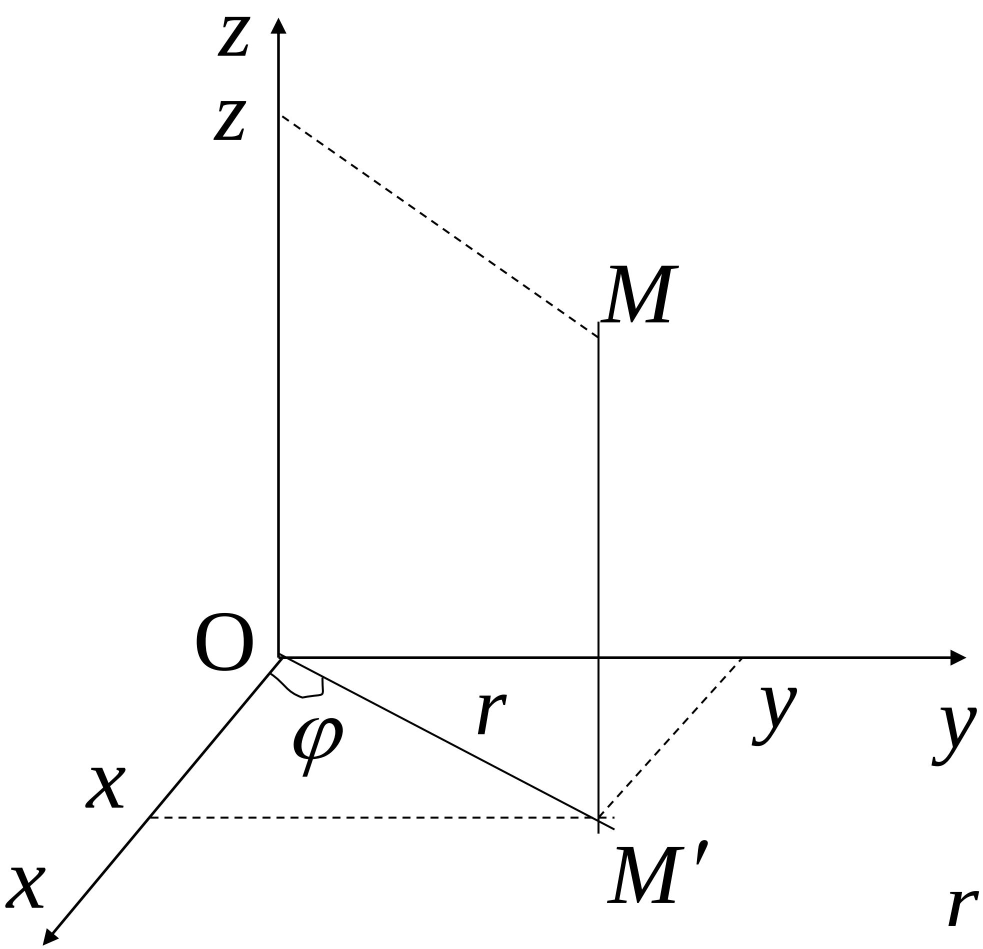
Giải: Đổi biến $u=x+y+z, v=x+2y-z, w=x+4y+z,$

$$V': -3\le u\le 3, -1\le v\le 1, -2\le w\le 2$$

$$\frac{1}{J}=\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=\begin{vmatrix} u'_x & u'_y & u'_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \\ w'_x & w'_y & w'_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}=6$$

Do đó $$\iiint\limits_V dxdydz=\iiint\limits_{V'}\frac{1}{6}dudvdw=\frac{1}{6}\int_{-3}^{3}du\int_{-1}^{1}dv\int_{-2}^{2}dw=\frac{1}{6}.6.2.4=8$$

b) Tính tích phân ba lớp trong hệ tọa độ trụ



* Tọa độ trụ của điểm M là bộ (r, φ, z) trong đó: (r, φ) *là tọa độ cực của* M' (M' là hình chiếu của M lên mặt phẳng Oxy)

z là cao độ của M

* Trong cả hệ tọa độ trụ:

$$r \geq 0, \;\; 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \;\; -\infty < z < +\infty$$

* Giả sử M có tọa độ (x, y, z) trong hệ trục $Oxyz$ Khi đó

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \geq 0.$$

* Công thức tính tích phân trong tọa độ trụ là:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\mathrm{r}\, drd\varphi dz$$

Nhận xét: Thường đổi biến sang tọa độ trụ khi V có hình chiếu lên mặt phẳng Oxy là hình tròn hoặc một phần hình tròn.

Nếu miền $V: \begin{cases} (x,y) \in D \\ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y) \end{cases}$ trong đó $D: \begin{cases} \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \\ r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi) \end{cases}$

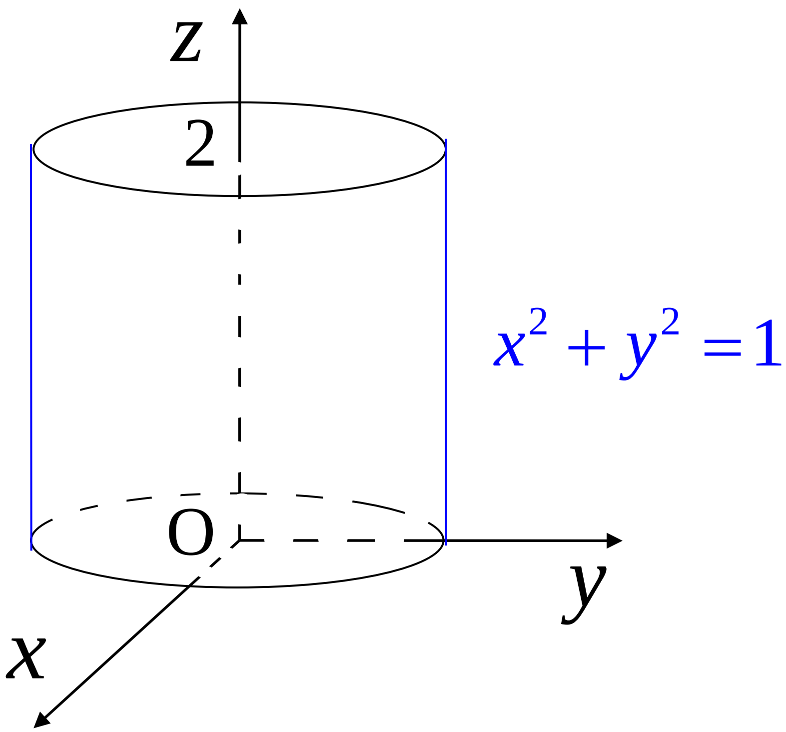
thì

$$I = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} rdr \int_{z_1(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}^{z_2(r\cos\varphi, r\sin\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,dz$$

Ví dụ: Tính $I = \iiint\limits_V (x^2 + y^2) z \, dxdydz$

V là miền giới hạn bởi các mặt: $x^2 + y^2 = 1, \; z = 0, \; z = 2.$

Giải:



* Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$

Miền V tương ứng với: $\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \\ 0 \le z \le 2 \end{cases}$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_0^2 r^2 z . r dz$$

$$= 2\pi . \left(\int_0^1 r^3 dr \right) . \left(\int_0^2 z dz \right)$$

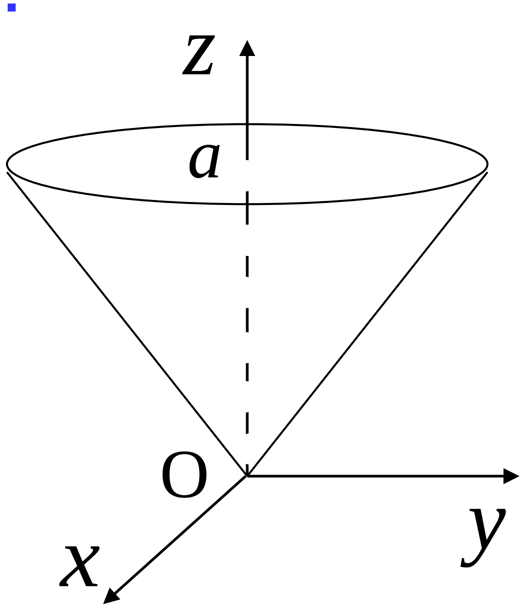
$$= 2\pi . \frac{1}{4} . \frac{z^2}{2} \Bigg|_0^2 = \pi.$$

Ví dụ: Tính $I = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dxdydz$

V là miền hình nón tròn xoay giới hạn bởi các mặt

$$z^2 = x^2 + y^2, \quad z = a \quad (a > 0)$$

Giải:



Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$

Miền V tương ứng với: $\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le a \\ r \le z \le a \end{cases}$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a dr \int_r^a \left(r^2 + z^2\right) r dz$$

$$= 2\pi \int_0^a \left[\left(r^3 z + r\frac{z^3}{3} \right)\Bigg|_r^a dr \right] = 2\pi \int_0^a \left(r^3 a + r\frac{a^3}{3} - \frac{4}{3} r^4 \right) dr =$$

$$= 2\pi \left(a\frac{r^4}{4} + \frac{a^3 r^2}{6} - \frac{4}{15} r^5 \right)\Bigg|_0^a = \frac{3\pi a^5}{10}.$$

Ví dụ: Tính $I = \iiint\limits_V |xyz|\,dxdydz$ V là miền xác định bởi

$$x^2 + y^2 \le 2z, 0 \le z \le a$$

Giải: Đổi sang tọa độ trụ $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$ $\begin{array}{l} -\pi \le \varphi \le \pi, \\ 0 \le r \le \sqrt{2a}, \\ \dfrac{r^2}{2} \le z \le a \end{array}$

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2a}} dr \int_{\frac{r^2}{2}}^{a} |r^2\cos\varphi\sin\varphi|\, zr dz =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} |\cos\varphi\sin\varphi|\,d\varphi \int_0^{\sqrt{2a}} r^3 dr \int_{\frac{r^2}{2}}^{a} zdz$$

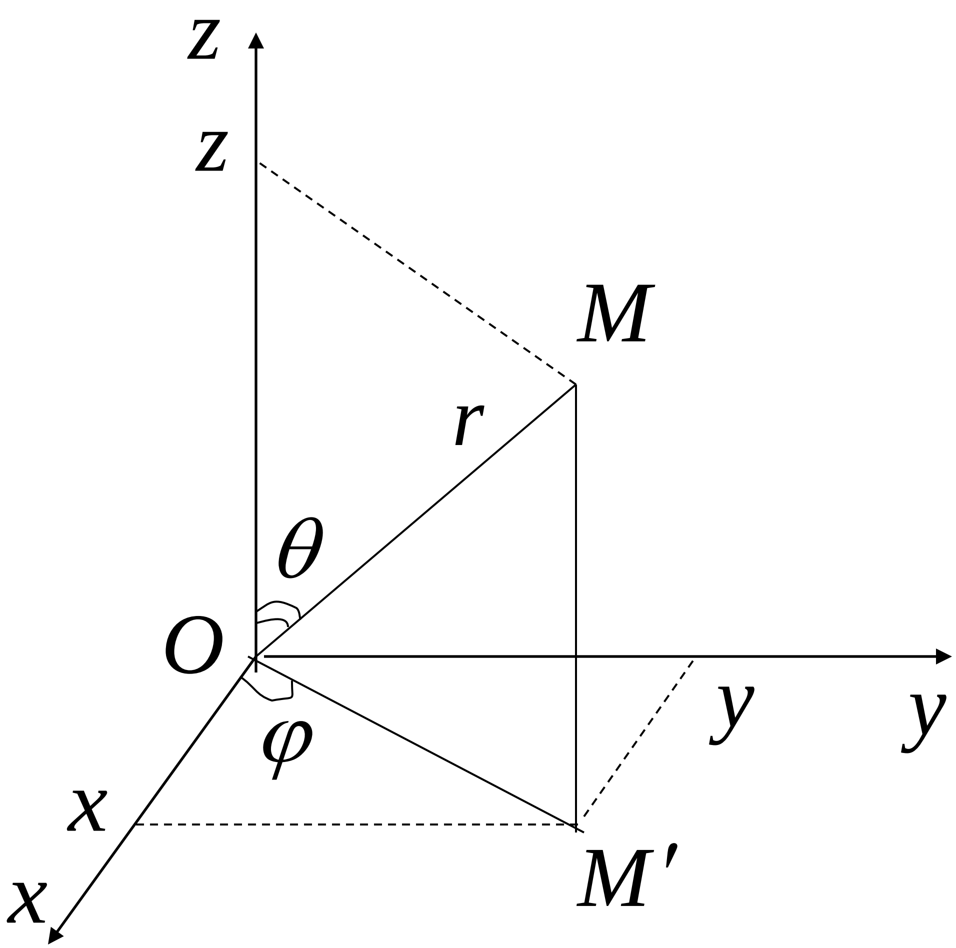
$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} |\cos\varphi \sin\varphi|\, d\varphi \int_{0}^{\sqrt{2a}} r^3\left(a^2 - \frac{r^4}{4}\right) dr$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} |\cos\varphi \sin\varphi|\, d\varphi \left(a^2\frac{r^4}{4} - \frac{r^8}{32}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=\sqrt{2a}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(a^4 - \frac{a^4}{2}\right).4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |\cos\varphi \sin\varphi|\, d\varphi$$

$$= \frac{a^4}{2}.\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\varphi \sin\varphi\, d\varphi = -\frac{a^4}{2}.\frac{\cos 2\varphi}{2}\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^4}{2}$$

c) Tính tích phân ba lớp trong hệ tọa độ cầu



* Tọa độ cầu của điểm M là bộ (r,θ,φ) trong đó: $r = \left|\overrightarrow{OM}\right|$

$$\theta = \left(\overrightarrow{OM}, Oz\right) \quad \varphi = \left(\overrightarrow{OM'}, Ox\right)$$

(M' là hình chiếu của M lên mặt phẳng Oxy)

* Trong cả hệ tọa độ cầu:

$$0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi,\ r \ge 0$$

* Giả sử M có tọa độ (x, y, z) trong hệ trục $Oxyz$

Khi đó $\begin{cases} x = r\sin\theta.\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi.\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta.\cos\varphi & r\cos\theta.\cos\varphi & -r\sin\theta.\sin\varphi \\ \sin\theta.\sin\varphi & r\cos\theta.\sin\varphi & r\sin\theta.\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= r^2\sin\theta \geq 0.$$

Công thức tính tích phân trong tọa độ cầu là:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz =$$

$$\iiint\limits_{V'} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$$

Nhận xét: Thường đổi biến sang tọa độ cầu khi V là hình cầu hoặc một phần hình cầu.

Ví dụ: Tính $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$ với V là miền xác định bởi $x^2+y^2+z^2 \le 4, z \ge 0$

Giải: Dùng phép đổi biến tọa độ cầu

$$x = r\cos\varphi\sin\theta, y = r\sin\varphi\sin\theta, z = r\cos\theta$$

$$0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le 2, |J| = r^2\sin\theta$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 r^3\sin\theta\,dr = 2\pi \int_0^2 r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta = 8\pi$$

Ví dụ: Tính $I = \iiint\limits_V \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dxdydz.$

V là miền giới hạn bởi hai mặt cầu:

$$x^2+y^2+z^2=1,\quad x^2+y^2+z^2=4.$$

Giải:
$$\begin{cases} x = r\sin\theta.\cos\varphi & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ y = r\sin\theta.\sin\varphi & 0 \le \theta \le \pi \\ z = r\cos\theta & 1 \le r \le 2 \end{cases}$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_1^2 \frac{1}{r}.r^2\sin\theta\, dr = 2\pi.\left(\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\right).\left(\int_1^2 rdr\right)$$

$$= 2\pi.\left(\cos\theta\Big|_{\pi}^{0}\right).\left(\frac{r^2}{2}\Bigg|_1^2\right) = 6\pi.$$

Ví dụ: Tính $\iiint\limits_V (x^2 + y^2 + 2xyz^3)\, dxdydz$ với

$$V: 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4, x^2 + y^2 \ge z^2$$

Giải: Do hàm $x^2 + y^2$ chẵn theo z, hàm $2xyz^3$ lẻ theo z và

V đối xứng qua mặt phẳng z=0 nên

$$I = 2\iiint\limits_{V'} (x^2 + y^2)\, dxdydz$$

với $V' = \{(x, y, z) \in V : z \ge 0\}$

Sử dụng phép đổi biến tọa độ cầu

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\theta, |J| = r^2\sin\theta$$

với $0 \le \varphi \le 2\pi, \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}, 1 \le r \le 2$

$$I = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 r^2 \sin\theta\, r^2 \sin^2\theta\, dr = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 r^4 \sin^3\theta\, dr$$

$$= 4\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta d\theta \int_1^2 r^4 dr = 4\pi \left(\frac{r^5}{5}\right)\Bigg|_{r=1}^{r=2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta d\theta$$

$$= -\frac{4\pi.31}{5}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\theta) d(\cos\theta) = -\frac{4\pi.31}{5}\left(\cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{62\pi}{3\sqrt{2}}$$

Ví dụ: Tính $I = \iiint\limits_V \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9}}\,dxdydz$ với

$$V: \frac{x^2+y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \le 1$$

Giải: Đổi biến

$$x = 2r\sin\theta\cos\varphi, y = 2r\sin\theta\sin\varphi, z = 3r\cos\theta, |J| = 12r^2\sin\theta.$$

$$V' = \{0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le \pi\}$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 12r^3\sin\theta dr = 24\pi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^1 r^3 dr = 12\pi$$

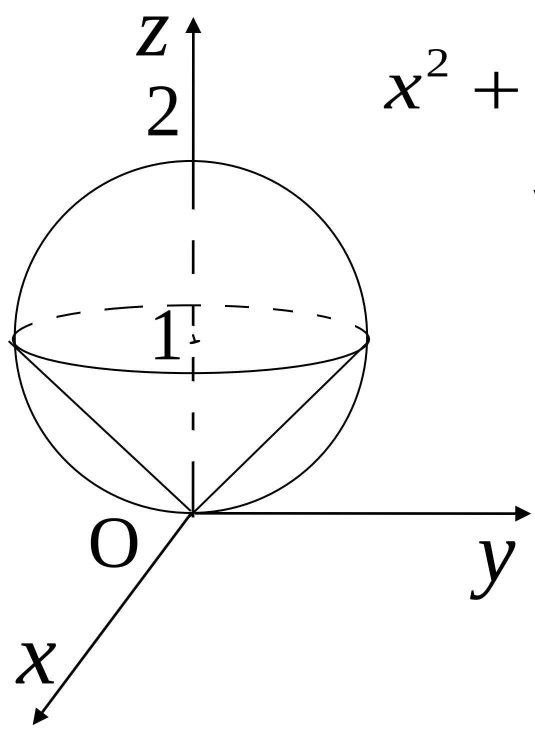
2.2.5. Ứng dụng của tích phân ba lớp

Tính thể tích vật thể

Thể tích vật thể xác định trên miền V là: $\iiint\limits_V dxdydz.$

Ví dụ: Tính thể tích vật thể chứa điểm $(0,0,2)$ và giới hạn bởi các mặt $x^2+y^2+z^2=2z,\quad x^2+y^2=z^2.$

Giải:



$$x^2+y^2+z^2=2z \Leftrightarrow x^2+y^2+(z-1)^2=1.$$

Vật thể giới hạn bởi hai mặt:

$$z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=1+\sqrt{1-x^2-y^2}$$

Hình chiếu của vật thể lên mặt phẳng Oxy là miền $D: x^2+y^2\le 1.$

Thể tích vật thể là: $V = \iiint\limits_V dxdydz = \iint\limits_D \left(\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} dz \right) dxdy$

$$= \iint\limits_D \left(1 + \sqrt{1-x^2-y^2} - \sqrt{x^2+y^2}\right) dxdy$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ y = r\sin\varphi & 0 \le r \le 1 \end{cases}$

$$V = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left(1 + \sqrt{1-r^2} - r\right) rdr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{1}{3}\left(1-r^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{r^3}{3} \right]\Bigg|_0^1$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = \pi.$$

Ví dụ: Tính thể tích của miền xác định bởi

$$1 \le x + y \le 2; -1 \le 2x - y + 3z \le 1; 2 \le z \le 3$$

Giải: Đổi biến

$$u = x + y, v = 2x - y + 3z, w = z, J = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Thể tích} = \iiint_V dxdyd = \int_1^2 du \int_{-1}^{1} dv \int_2^3 \frac{1}{3} dw = \frac{2}{3}$$

Ví dụ: Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi các mặt

$$z = -\sqrt{x^2 + y^2}, z = x^2 + y^2 - 2$$

Giải: Tìm giao điểm của 2 mặt

$$z = x^2 + y^2 - 2 = z^2 - 2 \Rightarrow z = -1, z = 2$$ (loại do z<0)

$$z = -1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

Đổi sang tọa độ trụ $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = z, J = r,$

$$0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le 1, r^2 - 2 \le z \le -r$$

Thể tích= $\displaystyle\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_{r^2-2}^{-r} r\,dz = 2\pi \int_0^1 r(-r - r^2 + 2)\,dr$

$$= 2\pi \int_0^1 (-r^2 - r^3 + 2r)\,dr = 2\pi \left(-\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4} + r^2 \right)\Bigg|_0^1 = \frac{5\pi}{6}$$

Ví dụ: Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 \le 2, z \ge \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}}.$$

Giải: Tìm giao điểm của 2 mặt

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 = 2, z = \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}}$$ là $z = 1, x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

Từ đó hình chiếu của vật thể xuống mp Oxy là $D: x^2 + \frac{y^2}{4} \le 1$

Dùng phép đổi biến sang tọa độ trụ

$$x = r\cos\varphi, y = 2r\sin\varphi, z = z, |J| = 2r$$

$$0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le 1, r \le z \le \sqrt{2 - r^2}.$$

Thể tích = $\iiint\limits_V dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 2rdr \int\limits_r^{\sqrt{2-r^2}} dz$

$$= 2\pi \int\limits_0^1 2r\left(\sqrt{2-r^2} - r\right) dr = 2\pi\left(\int\limits_0^1 2r\sqrt{2-r^2}dr - \int\limits_9^1 2r^2dr\right)$$

$$= 2\pi\left(-\int\limits_0^1 \sqrt{2-r^2}d\left(2-r^2\right) - \frac{2r^3}{3}\Bigg|_0^1\right)$$

$$= 2\pi\left[-\frac{2}{3}\left(2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 - \frac{2}{3}\right] = \frac{8\pi\left(\sqrt{2}-1\right)}{3}.$$