ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ

ĐỀ THI HẾT MÔN
HỌC KỲ II - NĂM HỌC 2016 - 2017

Đề thi số: 1

Bài thi môn: Giải Tích II. **Số tín chỉ:** 4.

Hệ đào tạo: Chính quy. **Thời gian làm bài:** 120 phút.

Lớp: MAT1042 – 11.

Câu 1 (1.5 đ). Tính gần đúng giá trị của biểu thức:

$$A = \ln\left(\sqrt[3]{1,03} - \sqrt[4]{0,96} + 1\right).$$

Câu 2 (1.5 đ). Tìm cực trị hàm số: $z = x^2 y(2x+3y-1)+1; \quad xy \neq 0$.

Câu 3 (2.0 đ). Tính thể tích vật thể E được giới hạn bởi các mặt sau:

$$z = 4 - x^2 - y^2,\ x^2 + y^2 = x,\ x^2 + y^2 = 2x,\ y = -\sqrt{3}x,\ y = 0,\ z \geq 0.$$

Câu 4 (1.5 đ). Tính tích phân: $I = \int_C (x+1)dx + \left(\sqrt[3]{2y^2 + y^5} + x\right)dy$,

với C là cung tròn: $x^2 + y^2 = 2x - 2y$; $y \geq -1$. Chiều C ngược chiều kim đồng hồ.

Câu 5 (1.5 đ). Tính tích phân: $I = \iint_S (z - 2xy)dxdy$, với S là phần của mặt:

$z = x^2 + y^2$ nằm trong hình trụ: $x^2 + y^2 = 1$; $x \geq 0, y \geq 0$. Phía dưới là phía dương nhìn từ hướng dương của trục Oz.

Câu 6 (2.0 đ). Giải phương trình vi phân: $y'' + y' - 2y = x^2 - 2x + 2 + 3e^{-2x}$.

--------- Hết ---------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:…….…………………….; Số báo danh:……………………

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ

ĐỀ THI HẾT MÔN
HỌC KỲ II - NĂM HỌC 2016 - 2017

Đề thi số: 2

Bài thi môn: Giải Tích II. **Số tín chỉ:** 4.

Hệ đào tạo: Chính quy. **Thời gian làm bài:** 120 phút.

Lớp: MAT1042 – 11.

Câu 1 (1.5 đ). Tính gần đúng giá trị của biểu thức:

$$A = \ln\left(\sqrt[3]{1,03} - \sqrt[4]{0,96} + 1\right).$$

Câu 2 (1.5 đ). Tìm cực trị hàm số: $z = x^2y^3(3x+2y+1)+1; \quad xy \neq 0$.

Câu 3 (2.0 đ). Tính thể tích vật thể E được giới hạn bởi các mặt sau:

$$z = 4 - x^2 - y^2,\ x^2 + y^2 = x,\ x^2 + y^2 = 2x,\ y = \sqrt{3}x,\ y = 0,\ z \geq 0.$$

Câu 4 (1.5 đ). Tính tích phân: $I = \int\limits_C (x-1)dx + \left(\sqrt[3]{2y^2 + y^5} - x\right)dy$,

với C là cung tròn: $x^2 + y^2 = 2x - 2y$; $y \leq -1$. Chiều C ngược chiều kim đồng hồ.

Câu 5 (1.5 đ). Tính tích phân: $I = \iint\limits_S (z + xy)dxdy$, với S là phần của mặt:

$z = x^2 + y^2$ nằm trong hình trụ: $x^2 + y^2 = 1$; $x \geq 0, y \leq 0$. Phía dưới là phía dương nhìn từ hướng dương của trục Oz.

Câu 6 (2.0 đ). Giải phương trình vi phân: $y'' + y' - 2y = x^2 - 2x - 1 + 4e^x$.

--------- Hết ---------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:……..……………………….; Số báo danh:……………………

Đáp án - Đề thi số 1

Câu 1 (1.5 đ):

(0.5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2x^2y^3}{x^2+y^2}\cdot\dfrac{\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)^2}{\sin^2\dfrac{x^2+y^2}{2}}=0.1=0=f(0,0)$

(0.5) Vì, theo nguyên lý kẹp ta có:

$$0\le\left|\frac{2x^2y^3}{x^2+y^2}\right|\le\left|\frac{2x^2y^3}{x^2}\right|=\left|2y^3\right|\to 0\,;(x,y)\to(0,0)\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^2y^3}{x^2+y^2}=0$$

(0.5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)^2}{\sin^2\dfrac{x^2+y^2}{2}}=1$. Vậy $f(x,y)$ liên tục tại $(0,0)$.

Câu 2 (1.5 đ):

(0.5) Tìm điểm dừng: $\begin{cases} z'_x=6x^2y+6xy^2-2xy=0\\ z'_y=2x^3+6x^2y-x^2=0\end{cases}\to P\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{12}\right)$

(0.5) $z''_{xx}=12xy+6y^2-2y\to z''_{xx}(P)=\dfrac{1}{8}$

$z''_{yy}=6x^2\to z''_{yy}(P)=\dfrac{3}{8}$

$z''_{xy}=6x^2+12xy-2x\to z''_{xy}(P)=\dfrac{1}{8}$

(0.5) $z''_{xx}(P)\cdot z''_{yy}(P)-\left[z''_{xy}(P)\right]^2=\dfrac{1}{32}>0$. Vậy P là điểm cực tiểu của hàm số.

Câu 3 (2.0 đ):

(0.5) Phân tích khối E:

Mặt trên: $z=4-x^2-y^2$.

Mặt dưới: $z=0$.

Hình chiếu của khối E xuống mặt phẳng Oxy là miền D, được giới hạn bởi các đường:

$x^2+y^2=x,\ x^2+y^2=2x,\ y=-\sqrt{3}x,\ y=0$.

(0.5) Do đó, thể tích của khối E: $V_E=\iint\limits_D\left(4-x^2-y^2\right)dxdy$

Vẽ hình và chuyển sang hệ tọa độ cực: $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi, |J|=r$.

Từ: $x^2+y^2=x\to r=\cos\varphi$

$x^2+y^2=2x\to r=2\cos\varphi$

$y=-\sqrt{3}x\to\varphi=-\dfrac{\pi}{3}$

$y=0 \rightarrow \varphi=0$

$D_{r\varphi}=\left\{(r,\varphi): \cos\varphi \le r \le 2\cos\varphi, -\frac{\pi}{3} \le \varphi \le 0\right\}$

$V_E=\iint_{D_{r\varphi}}\left(4-r^2\right)\cdot r\cdot drd\varphi=\int_{-\pi/3}^{0} d\varphi \int_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi}\left(4r-r^3\right)dr=$

(0.5) $=\int_{-\pi/3}^{0}\left(6\cos^2\varphi-\frac{15}{4}\cos^4\varphi\right)d\varphi=\int_{-\pi/3}^{0}\left(\frac{51}{32}+\frac{9}{8}\cos 2\varphi-\frac{15}{32}\cos 4\varphi\right)d\varphi$

(0.5) $=\left[\frac{51}{32}\varphi+\frac{9}{16}\sin 2\varphi-\frac{15}{128}\sin 4\varphi\right]_{-\pi/3}^{0}=\frac{17\pi}{32}+\frac{87\sqrt{3}}{256}$

Câu 4 (1.5 đ):

(0.5) Vẽ hình. Ta có: $P=x+1; Q=\sqrt[3]{2y^2+y^5}+x$.

(0.5) Gọi: $L=C\cup\overline{AB}$; $A(1-\sqrt{2},-1)$, $B(1+\sqrt{2},-1)$. Chiều L ngược chiều kim đồng hồ.

$$\rightarrow \oint_L = \int_C + \int_{\overline{AB}} \rightarrow I=\oint_L - \int_{\overline{AB}} = J-K$$

Dùng công thức Green đối với đường cong kín L:

$J=\iint_D\left(Q'_x-P'_y\right)dxdy=\iint_D dxdy=S_D=\frac{1}{2}\pi\left(\sqrt{2}\right)^2=\pi$

(0.5) Phương trình AB: $y=-1$; $x_A=1-\sqrt{2}$, $x_B=1+\sqrt{2}$

$K=\int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}(x+1)dx=\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$. Do đó: $I=J-K=\pi-4\sqrt{2}$

Câu 5 (1.5 đ):

(0.5) Phương trình mặt S: $z=x^2+y^2$. Vì phía dưới là phía dương, nên véc tơ pháp tuyến của mặt S: $\vec{l}=\left(z'_x,z'_y,-1\right)=\left(2x,2y,-1\right)$.

Hình chiếu của phần mặt S xuống mp Oxy:

$$D_{xy}=\left\{(x,y): x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\right\}$$

(0.5) $\rightarrow I=\iint_{D_{xy}}\left(x^2+y^2-2xy\right)\cdot(-1)\cdot dxdy$

Vẽ hình và chuyển sang hệ tọa độ cực: $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi, |J|=r$.

$$D_{r\varphi}=\left\{(r,\varphi): 0\le r\le 1, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right\}$$

(0.5) $I=-\iint_{D_{r\varphi}}\left(r^2-2r^2\sin\varphi\cos\varphi\right)\cdot r\cdot drd\varphi$

$=-\int_0^{\pi/2}(1-\sin 2\varphi)d\varphi\cdot\int_0^1 r^3dr=-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}-\frac{\pi}{8}$

<u>Câu 6 (2.0 đ):</u>

(0.5) Pt không thuần nhất: $y'' + y' - 2y = x^2 - 2x + 2 + 3e^{-2x}$

Pt thuần nhất: $y'' + y' - 2y = 0$

Pt đặc trưng: $k^2 + k - 2 = 0 \to k = 1, k = -2$

(0.5) Nghiệm tổng quát của pt thuần nhất: $y^*(x) = C_1e^x + C_2e^{-2x}$

Nghiệm riêng của pt không thuần nhất tìm dưới dạng:

$$\bar{y}(x) = Ax^2 + Bx + C + D \cdot x \cdot e^{-2x}$$

(1.0) Dùng phương pháp đồng nhất thức: $A = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}, C = -\frac{5}{4}, D = -1$

Nghiệm tổng quát của pt không thuần nhất:

$$y(x) = y^*(x) + \bar{y}(x) = C_1e^x + C_2e^{-2x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{4} - xe^{-2x}$$

Đáp án - Đề thi số 2:

Câu 1 (1.5 đ):

(0.5) Xét dãy điểm $M\left(\frac{1}{n},0\right) \to O(0,0), n \to \infty$, khi đó:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{n\to\infty} f(M) = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{(1/n)^2} = 0$$

(0.5) Xét dãy điểm $N\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) \to (0,0), n \to \infty$, khi đó:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{n\to\infty} f(N) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(1/n)}{(1/n)} = \frac{1}{2}$$

(0.5) Do đó, không tồn tại $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Vậy, hàm số không liên tục tại (0,0).

Câu 2 (1.5 đ):

(0.5) Tìm điểm dừng: $\begin{cases} z'_x = 9x^2y^3 + 4xy^4 + 2xy^3 = 0 \\ z'_y = 9x^3y^2 + 8x^2y^3 + 3x^2y^2 = 0 \end{cases} \to P\left(-\frac{1}{9},-\frac{1}{4}\right)$

(0.5) $z''_{xx} = 18xy^3 + 4y^4 + 2y^3 \to z''_{xx}(P) = \dfrac{1}{64}$

$z''_{yy} = 18x^3y + 24x^2y^2 + 6x^2y \to z''_{yy}(P) = \dfrac{1}{162}$

$z''_{xy} = 27x^2y^2 + 16xy^3 + 6xy^2 \to z''_{xy}(P) = \dfrac{1}{144}$

(0.5) $z''_{xx}(P) = \dfrac{1}{64} > 0$; $z''_{xx}(P) \cdot z''_{yy}(P) - \left[z''_{xy}(P)\right]^2 = \dfrac{1}{20736} > 0$

Vậy P là điểm cực tiểu, $z_{ct} = z(P) = 31103/31104$

Câu 3 (2.0 đ):

(0.5) Phân tích khối E:

Mặt trên: $z = 4 - x^2 - y^2$.

Mặt dưới: $z = 0$.

Hình chiếu của khối E xuống mặt phẳng Oxy là miền D, được giới hạn bởi các đường:

$x^2 + y^2 = x,\ x^2 + y^2 = 2x,\ y = \sqrt{3}x,\ y = 0$.

(0.5) Do đó, thể tích của khối E: $V_E = \iint\limits_D \left(4 - x^2 - y^2\right) dxdy$

Vẽ hình và chuyển sang hệ tọa độ cực: $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, |J| = r$.

Từ: $x^2 + y^2 = x \to r = \cos\varphi$

$x^2 + y^2 = 2x \to r = 2\cos\varphi$

$y = \sqrt{3}x \to \varphi = \dfrac{\pi}{3}$

$y = 0 \to \varphi = 0$

$$D_{r\varphi}=\left\{(r,\varphi):\cos\varphi\le r\le 2\cos\varphi, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}\right\}$$

$$V_E=\iint_{D_{r\varphi}}\left(4-r^2\right)\cdot r\cdot drd\varphi=\int_0^{\pi/3}d\varphi\int_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi}\left(4r-r^3\right)dr=$$

(0.5) $$=\int_0^{\pi/3}\left(6\cos^2\varphi-\frac{15}{4}\cos^4\varphi\right)d\varphi=\int_0^{\pi/3}\left(\frac{51}{32}+\frac{9}{8}\cos 2\varphi-\frac{15}{32}\cos 4\varphi\right)d\varphi$$

(0.5) $$=\left[\frac{51}{32}\varphi+\frac{9}{16}\sin 2\varphi-\frac{15}{128}\sin 4\varphi\right]_0^{\pi/3}=\frac{17\pi}{32}+\frac{87\sqrt{3}}{256}$$

Câu 4 (1.5 đ):

(0.5) Vẽ hình. Ta có: $P=x-1; Q=\sqrt[3]{2y^2+y^5}-x$.

(0.5) Gọi: $L=C\cup\overline{AB}$; $A(1+\sqrt{2},-1)$, $B(1-\sqrt{2},-1)$. Chiều L ngược chiều kim đồng hồ.

$$\to\oint_L=\int_C+\int_{\overline{AB}}\to I=\oint_L-\int_{\overline{AB}}=J-K$$

Dùng công thức Green đối với đường cong kín L:

$$J=\iint_D\left(Q'_x-P'_y\right)dxdy=-\iint_D dxdy=-S_D=-\frac{1}{2}\pi\left(\sqrt{2}\right)^2=-\pi$$

(0.5) Phương trình AB: $y=-1$; $x_A=1+\sqrt{2}$, $x_B=1-\sqrt{2}$

$K=\int_{1+\sqrt{2}}^{1-\sqrt{2}}(x-1)dx=\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_{1+\sqrt{2}}^{1-\sqrt{2}}=0$. Do đó: $I=J-K=-\pi$

Câu 5 (1.5 đ):

(0.5) Phương trình mặt S: $z=x^2+y^2$. Vì phía dưới là phía dương, nên véc tơ pháp tuyến của mặt S: $\vec{l}=\left(z'_x,z'_y,-1\right)=\left(2x,2y,-1\right)$.

Hình chiếu của phần mặt S xuống mp Oxy:

$$D_{xy}=\left\{(x,y):x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\le 0\right\}$$

(0.5) $$\to I=\iint_{D_{xy}}\left(x^2+y^2+xy\right)\cdot(-1)\cdot dxdy$$

Vẽ hình và chuyển sang hệ tọa độ cực: $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi, |J|=r$.

$$D_{r\varphi}=\left\{(r,\varphi):0\le r\le 1, -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le 0\right\}$$

(0.5) $$I=-\iint_{D_{r\varphi}}\left(r^2+r^2\sin\varphi\cos\varphi\right)\cdot r\cdot drd\varphi$$

$$=-\int_{\pi/2}^{0}\left(1+\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)d\varphi\cdot\int_0^1 r^3dr=-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}-\frac{\pi}{8}$$

Câu 6 (2.0 đ):

(0.5) Pt không thuần nhất: $y'' + y' - 2y = x^2 - 2x - 1 + 4e^x$

Pt thuần nhất: $y'' + y' - 2y = 0$. Pt đặc trưng: $k^2 + k - 2 = 0 \to k = 1,\ k = -2$

(0.5) Nghiệm tổng quát của pt thuần nhất: $y^*(x) = C_1e^x + C_2e^{-2x}$

Nghiệm riêng của pt không thuần nhất tìm dưới dạng:

$$\bar{y}(x) = Ax^2 + Bx + C + D \cdot x \cdot e^x$$

(2.0) Dùng phương pháp đồng nhất thức: $A = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}, C = \frac{1}{4}, D = \frac{4}{3}$

Nghiệm tổng quát của pt không thuần nhất:

$$y(x) = y^*(x) + \bar{y}(x) = C_1e^x + C_2e^{-2x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{4}{3}xe^x$$