Nội dung Chương 6

1. Tích phân mặt loại 1

2. Tích phân mặt loại 2

1. Tích phân mặt loại 1

Định nghĩa

Cho hàm $f(x,y,z)$ xác định trên mặt cong S.
Chia S thành n mặt con: $S_1, S_2, \cdots, S_n$ rời nhau (không chồng lên nhau).
Diện tích tương ứng: $\Delta S_1, \Delta S_2, \cdots, \Delta S_n$.
Trên mỗi mặt S_i lấy điểm $M_i(x_i, y_i, z_i)$ tùy ý.
Lập tổng Riemann:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i).\Delta S_i$$

$I = \lim\limits_{n\to\infty} I_n$, không phụ thuộc cách chia mặt cong S, và cách lấy điểm M_i.

$$I = \iint_S f(x,y,z)dS$$

được gọi là tích phân mặt loại 1 của hàm $f(x,y,z)$ trên mặt S.

1. Tích phân mặt loại 1

Tính chất

1. $f(x, y, z)$ liên tục trên mặt cong trơn S thì khả tích trên S.

2. Diện tích của mặt S:

$$\iint_S \, dS.$$

3. $\iint_S (kf + mg)dS = k\iint_S fdS + m\iint_S gdS$

4. Nếu $S = S_1 \cup S_2$ thì:

$$\iint_S fdS = \iint_{S_1} fdS + \iint_{S_2} fdS.$$

1. Tích phân mặt loại 1

Cách tính

Cho hàm $f(x, y, z)$ xác định trên mặt cong $S: z = z(x, y)$.
Chia S thành n mặt con: $S_1, S_2, \cdots, S_n$ rời nhau (không chồng lên nhau).
Diện tích tương ứng: $\Delta S_1, \Delta S_2, \cdots, \Delta S_n$.
Trên mỗi mặt S_i lấy điểm $M_i(x_i, y_i, z_i)$ tùy ý.
Lập tổng Riemann:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i).\Delta S_i$$

Trong phần ứng dụng tích phân kép (tính diện tích mặt cong), ta có:

$$\Delta S_i \approx \sqrt{\left[z'_x(x_i, y_i)\right]^2 + \left[z'_y(x_i, y_i)\right]^2 + 1} \cdot S(D_i)$$

$$= \sqrt{\left[z'_x(x_i, y_i)\right]^2 + \left[z'_y(x_i, y_i)\right]^2 + 1} \cdot \Delta x \Delta y$$

1. Tích phân mặt loại 1

Cách tính

Do đó: $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot \Delta S_i$

$$\approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot \sqrt{\left[z'_x(x_i, y_i)\right]^2 + \left[z'_y(x_i, y_i)\right]^2 + 1} \cdot \Delta x \Delta y$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i(x_i, y_i)) \cdot \sqrt{\left[z'_x(x_i, y_i)\right]^2 + \left[z'_y(x_i, y_i)\right]^2 + 1} \cdot \Delta x \Delta y$$

$$\Rightarrow I = \lim_{n \to \infty} I_n \text{ hay } \iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z) \cdot \sqrt{\left[z'_x\right]^2 + \left[z'_y\right]^2 + 1} \cdot dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{\left[z'_x\right]^2 + \left[z'_y\right]^2 + 1} \cdot dxdy$$

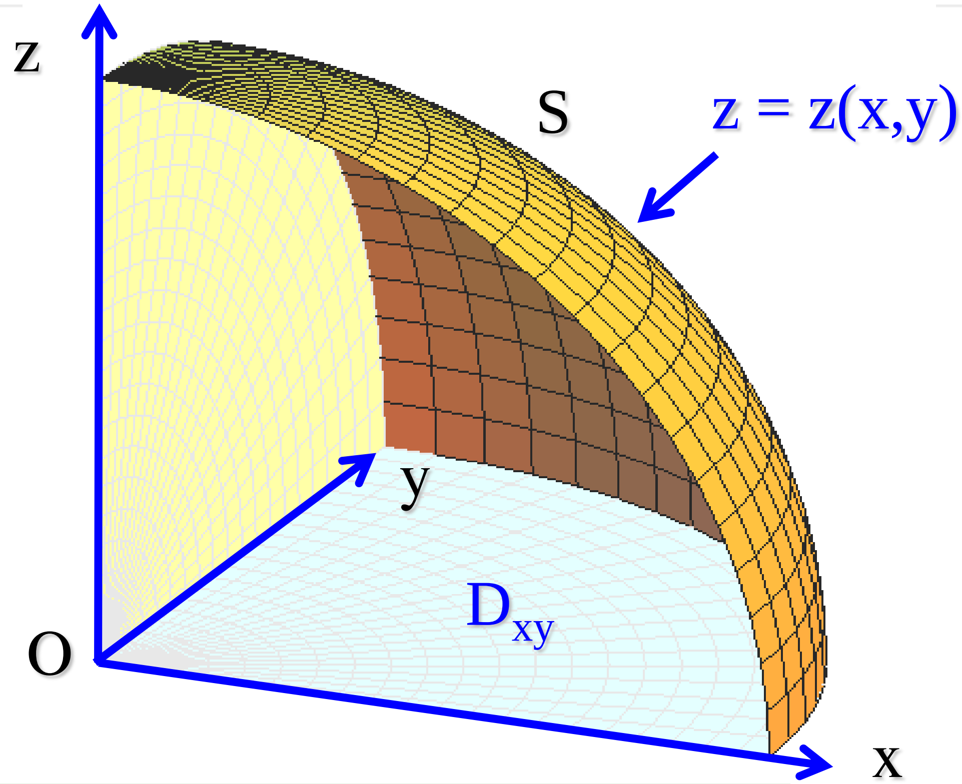
1. Tích phân mặt loại 1

Cách tính

1. Chiếu mặt cong S lên mp Oxy

Nếu S có phương trình $z = z(x, y)$

và S có hình chiếu trên mp Oxy là D_{xy} :



$$\iint_{S} f(x,y,\boxed{z})dS = \iint_{D_{xy}} f\left(x,y,\boxed{z(x,y)}\right)\boxed{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}dxdy}$$

1. Tích phân mặt loại 1

Cách tính

2. Chiếu mặt cong S lên mp Oxz

Nếu S có phương trình $y = y(x, z)$

và S có hình chiếu trên mp Oxz là D_{xz} :

$$\iint_S f(x, y, z)dS = \iint_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z)\sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2}dxdz$$

3. Chiếu mặt cong S lên mp Oyz

Nếu S có phương trình $x = x(y, z)$

và S có hình chiếu trên mp Oyz là D_{yz} :

$$\iint_S f(x, y, z)dS = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z)\sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2}dydz$$

1. Tích phân mặt loại 1

Chú ý

Nếu hình chiếu của S xuống mặt phẳng Oxy chỉ là một đường cong (trường hợp này xảy ra khi S là một mặt trụ có đường sinh song song với trục Oz) thì phải chiếu S xuống các mặt phẳng tọa độ khác, không được chiếu xuống mặt phẳng Oxy.

1. Tích phân mặt loại 1

Ví dụ

Tính $I = \iint_S x^2 dS$, trong đó S là hình cầu đơn vị: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Do các hàm dưới dấu tích phân là hàm chẵn, và mặt cầu đối xứng qua các mặt phẳng tọa độ.

$$I = \iint_S x^2 dS = \iint_S y^2 dS = \iint_S z^2 dS$$

Do đó: $I = \frac{1}{3}\iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS = \frac{R^2}{3}\iint_S dS = \frac{4\pi R^4}{3}$

1. Tích phân mặt loại 1

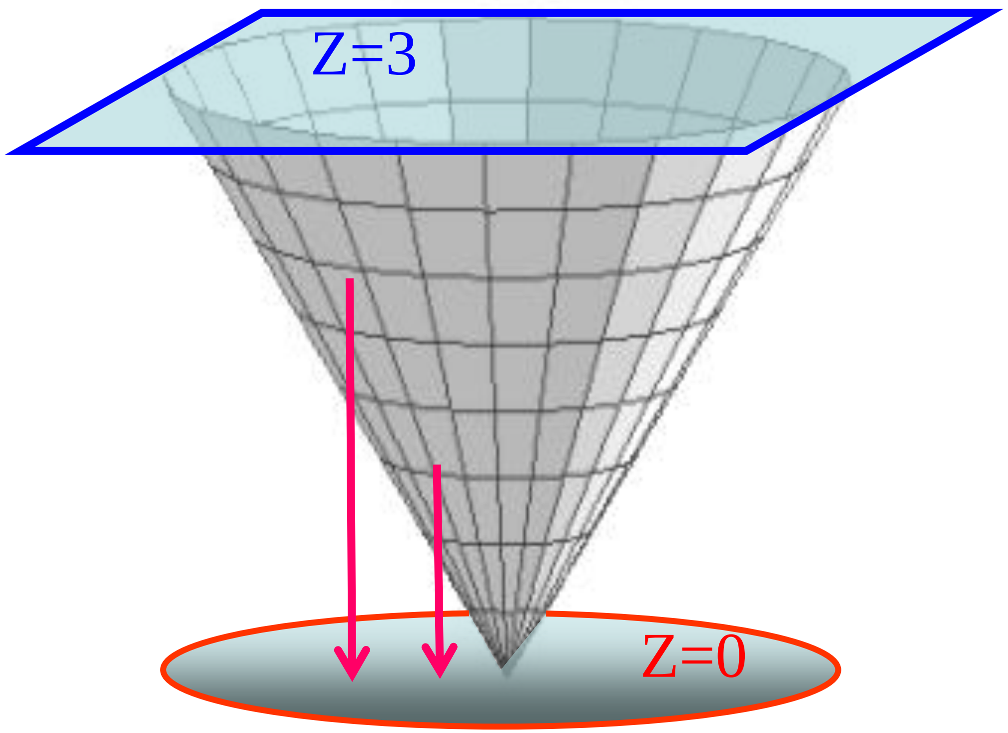
Ví dụ

Tính $I = \iint\limits_S (x^2 + y^2 + z^2)dS$, trong đó S là phần của mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ nằm giữa hai mặt phẳng z = 0 và z = 3.

$$D_{xy} = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 9\}$$

Phương trình mặt nón: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$



1. Tích phân mặt loại 1

Ví dụ

$$I = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2)dS = 2 \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2)\sqrt{2}dxdy$$

Chuyển sang hệ tọa độ cực: $x = rcos\varphi, y = rsin\varphi$

$D_{r\varphi} = \{(r, \varphi): 0 \le r \le 3, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$

$$I = 2\sqrt{2} \iint_{D_{r\varphi}} r^2.r.drd\varphi = 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 r^3dr = 81\sqrt{2}\pi$$

1. Tích phân mặt loại 1

Ví dụ

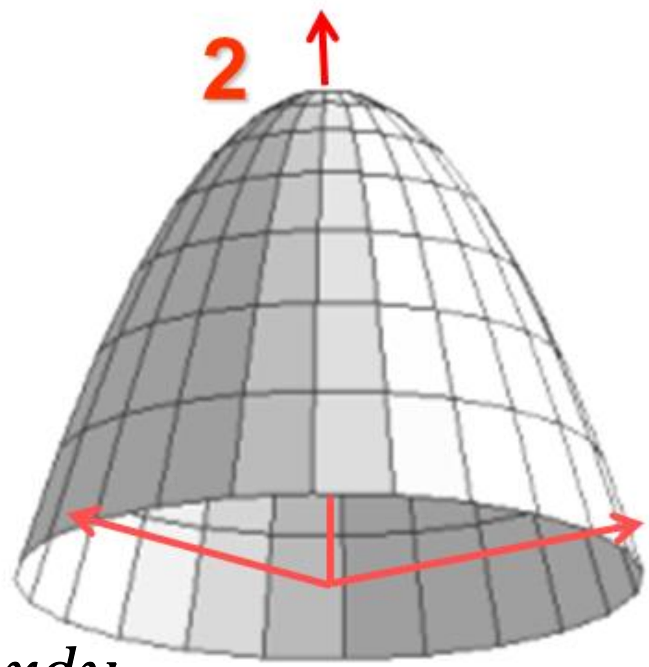
Tính $I = \iint\limits_S z dS$, trong đó S là phần của mặt paraboloid $z = 2 - x^2 - y^2$ trong miền $z \geq 0$.

$$D_{xy} = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 2\}$$

Phương trình mặt S: $z = 2 - x^2 - y^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y$$

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}\, dxdy = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dxdy$$



1. Tích phân mặt loại 1

Ví dụ

$$I = \iint\limits_{S} zdS = \iint\limits_{D_{xy}} (2 - x^2 - y^2)\sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}dxdy$$

Chuyển sang hệ tọa độ cực: $x = rcos\varphi, y = rsin\varphi$

$$D_{r\varphi} = \{(r, \varphi): 0 \le r \le \sqrt{2}, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$$

$$I = \iint\limits_{D_{r\varphi}} (2 - r^2)\sqrt{1 + 4r^2}.r.drd\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} (2 - r^2)\sqrt{1 + 4r^2}.rdr$$

$$= \frac{37}{10}\pi$$

1. Tích phân mặt loại 1

Ví dụ

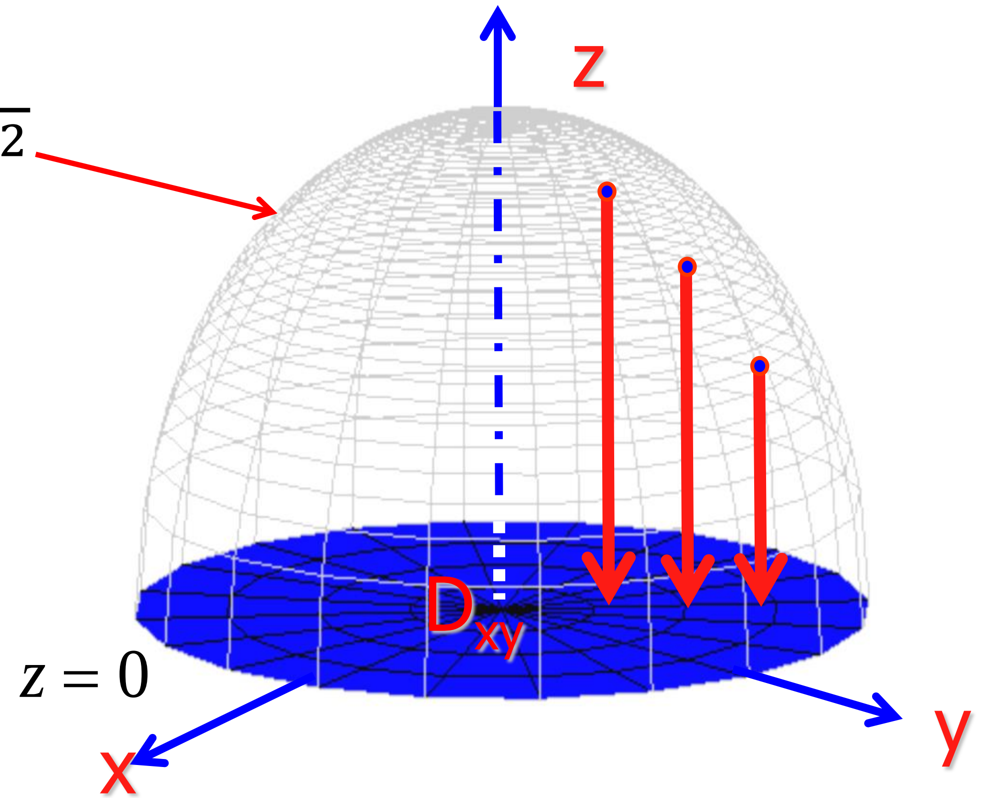
Tính $I = \iint\limits_S (x^2 + y^2) dS$, trong đó S là phần nửa trên của mặt cầu:

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0.$

$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$

$D_{xy} = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq R^2\}$

Phương trình mặt S: $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$



1. Tích phân mặt loại 1

Ví dụ

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \; ; \; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \rightarrow dS = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dxdy$$

Chuyển sang hệ tọa độ cực: $x = rcos\varphi, y = rsin\varphi$

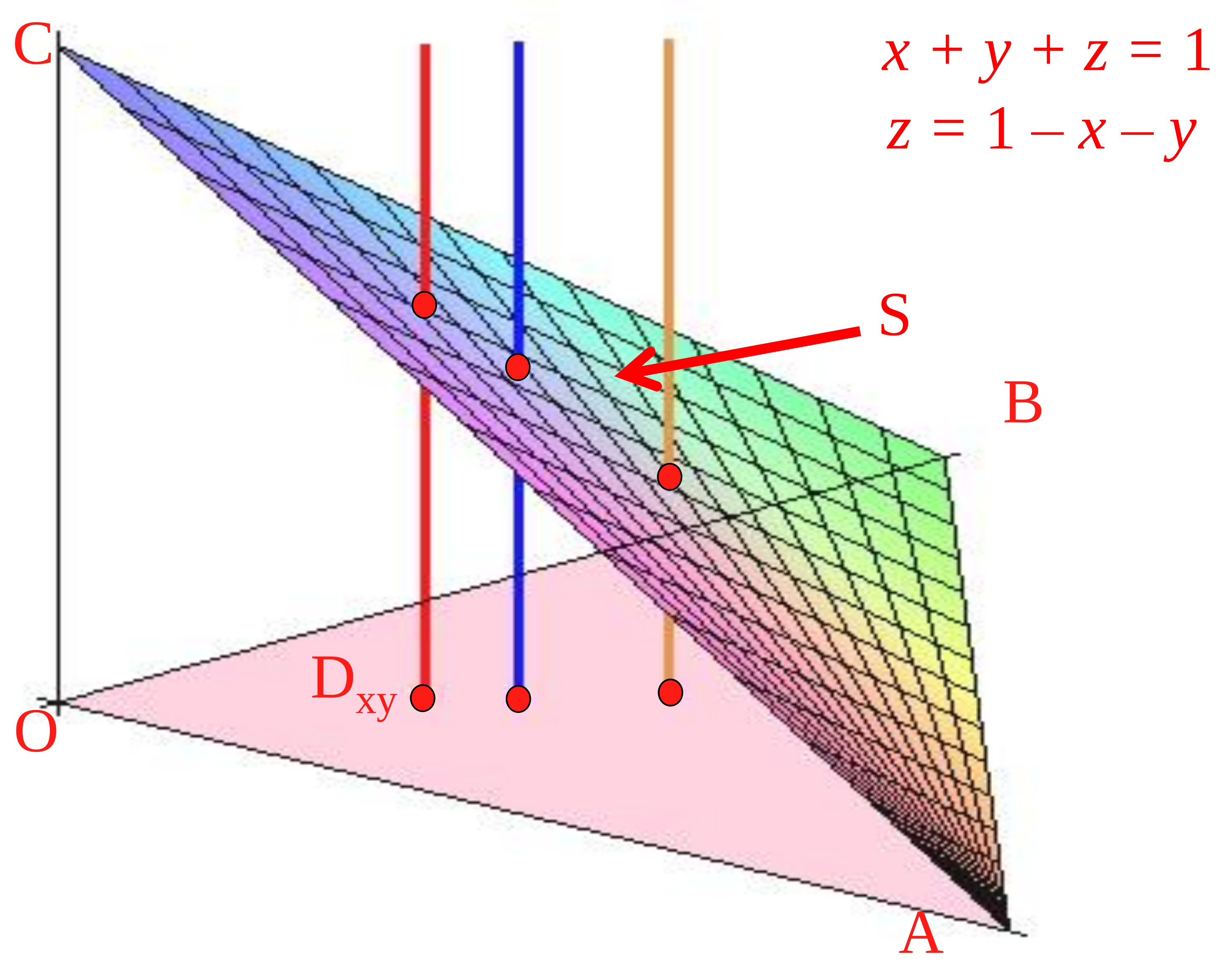
$$D_{r\varphi} = \{(r, \varphi): 0 \le r \le R, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$$

$$I = \iint\limits_{D_{r\varphi}} r^2 . \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} . r . drd\varphi = R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{r^3}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr$$

$$= \frac{4\pi R^4}{3}$$

Ví dụ

Tính $I = \iint\limits_S (x + y + z)dS$, trong đó S cho bởi: $x + y + z = 1$ và $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$


C
$x + y + z = 1$
$z = 1 - x - y$
S
B
D_{xy}
O
A

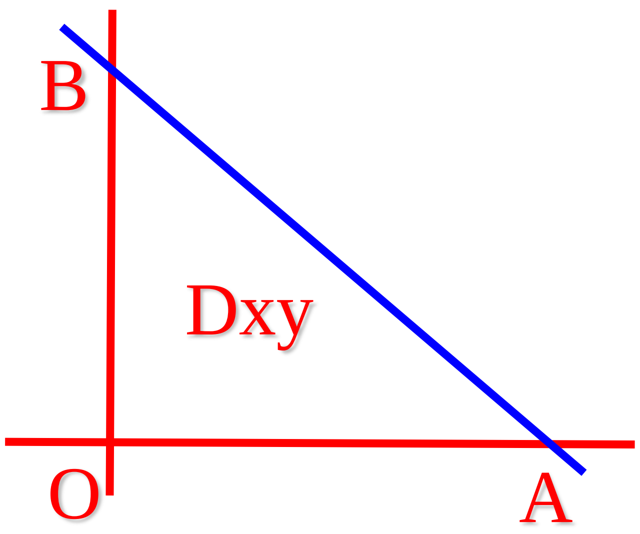
1. Tích phân mặt loại 1

Ví dụ

Tính $I = \iint\limits_S (x+y+z)dS$, trong đó S cho bởi: $x + y + z = 1$
và $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$

$$I = \iint\limits_{D_{xy}} [x + y + (1 - x - y)]\sqrt{1 + 1 + 1}dxdy$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



1. Tích phân mặt loại 1

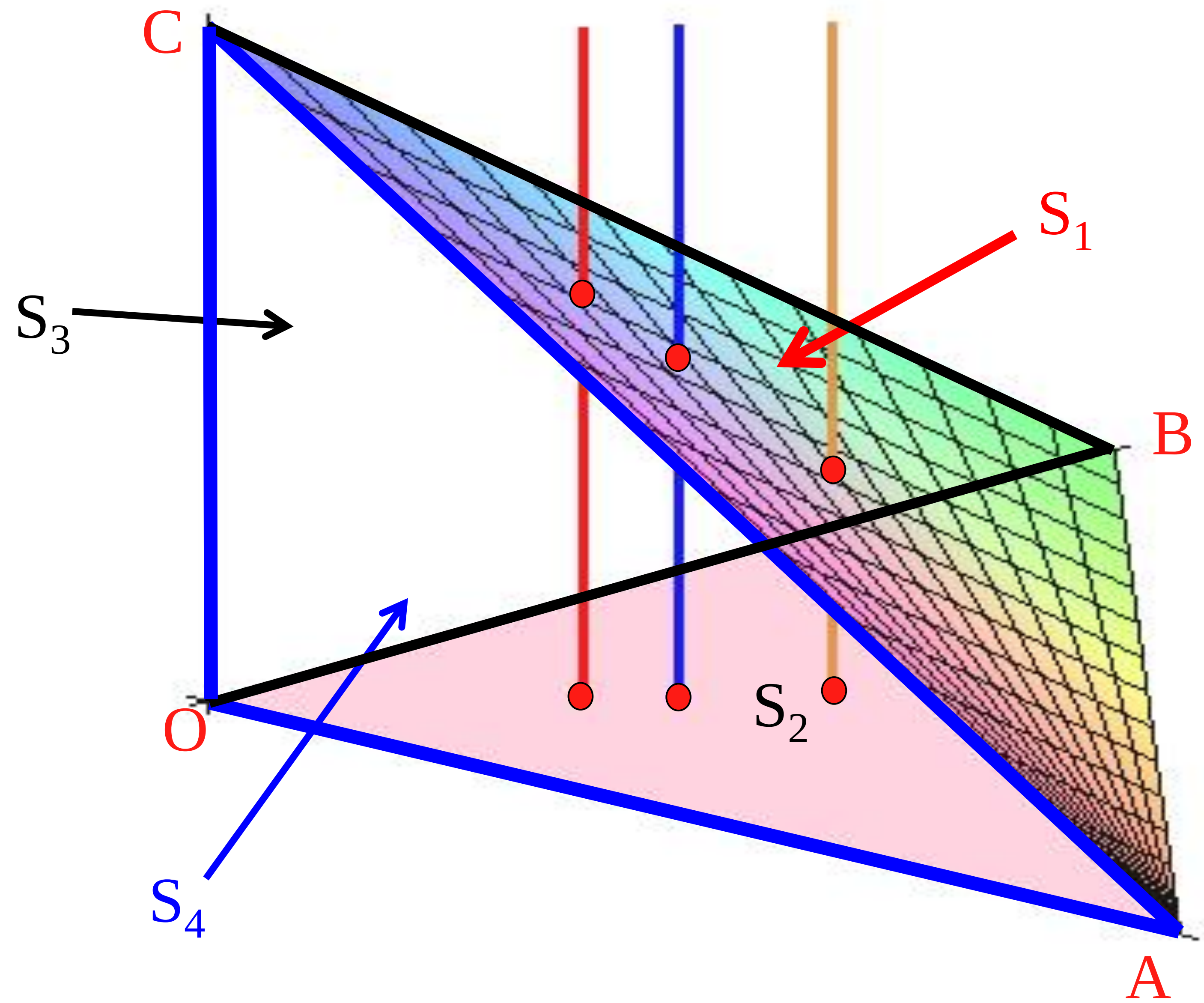
Ví dụ

Tính $I = \iint\limits_S (x + y + z)dS$, trong đó S là mặt xung quanh hình chóp cho bởi:
$x + y + z \le 1, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0.$

Mặt S gồm 4 mặt của tứ diện OABC.

Tích phân I_1 trên mặt ABC đã tính trong ví dụ trước.

Ta tính tích phân trên các mặt còn lại $\underbrace{OAB}_{I_2}, \underbrace{OBC}_{I_3}, \underbrace{OCA}_{I_4}$.


C
S_1
S_3
B
S_2
O
S_4
A

Trên mặt OAB, phương trình của mặt là: z = 0.

Hình chiếu của mặt xuống Oxy là tam giác OAB.

$$I_2 = \iint\limits_{OAB} [x + y + 0]\sqrt{1 + 0 + 0}dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x + y)dy = \frac{1}{3}$$

Tích phân trên các mặt còn lại tính tương tự.

$$\rightarrow I = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

1. Tích phân mặt loại 1

Ví dụ

Tính diện tích nửa trên mặt cầu bán kính R và diện tích toàn bộ mặt cầu.

$$S = \iint\limits_{S} dS = \iint\limits_{D_{xy}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dxdy \;= R\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr$$

$$= 2\pi R^2$$

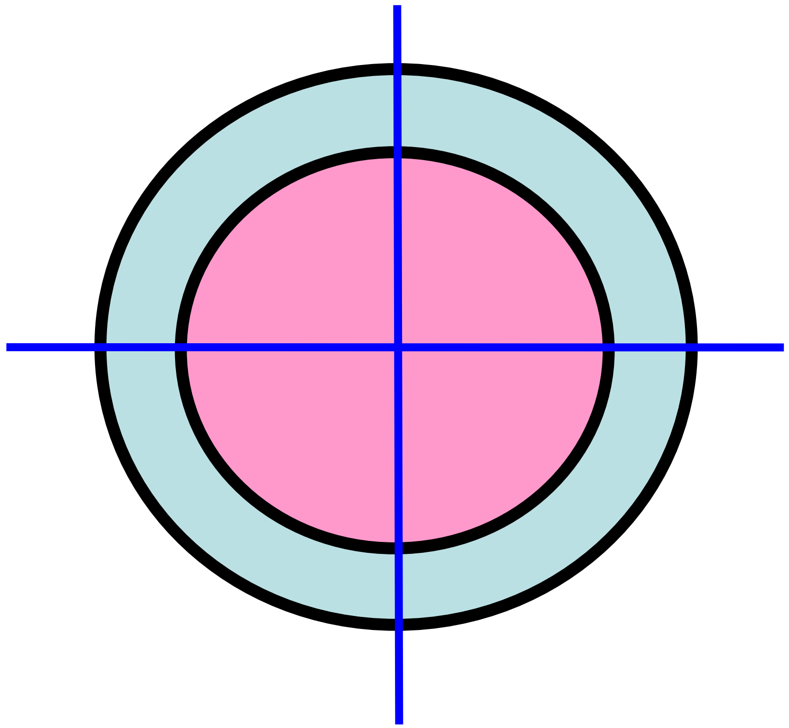
Diện tích toàn bộ mặt cầu bằng 2 lần diện tích nửa mặt cầu và bằng $4\pi R^2$.

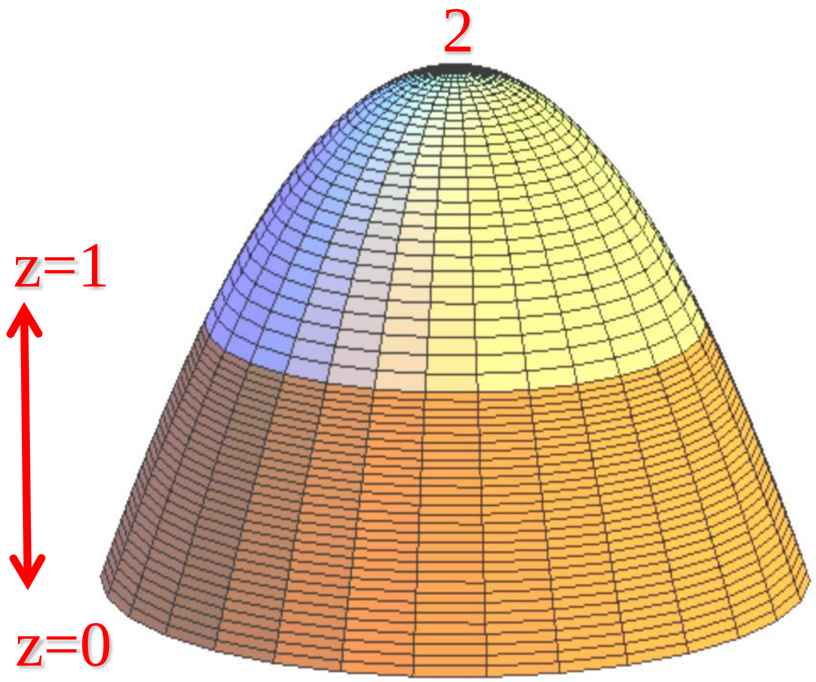
1. Tích phân mặt loại 1

Ví dụ

Tính diện tích của mặt cong S, trong đó S là phần của mặt paraboloid

$z = 2 - x^2 - y^2$ lấy trong phần $0 \leq z \leq 1$.





1. Tích phân mặt loại 1

Ví dụ

Phương trình mặt S: $z = 2 - x^2 - y^2$

Do đó: $z'_x = -2x, z'_y = -2y$

$$D(x, y) = \{(x, y): 1 \le x^2 + y^2 \le \sqrt{2}\}$$

Diện tích mặt S: $I = \iint_S \, dS = \iint_{D(x,y)} \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dxdy$

Đổi biến qua hệ tọa độ cực: $x = rcos\varphi, y = rsin\varphi$

$$D(r, \varphi) = \{(r, \varphi): 0 \le \varphi \le 2\pi, 1 \le r \le \sqrt{2}\}$$

1. Tích phân mặt loại 1

Ví dụ

Do đó, diện tích mặt S: $I = \iint_{D(r,\varphi)} \sqrt{1+4r^2}.r.drd\varphi$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^{\sqrt{2}} r\sqrt{1+4r^2}dr$$

$$= \pi\left(\frac{9}{2} - \frac{5\sqrt{5}}{6}\right)$$

2. Tích phân mặt loại 2

Định nghĩa mặt 2 phía

Cho mặt cong S. Di chuyển vector pháp tuyến của S từ một điểm A nào đó theo một đường cong (kín) tùy ý.

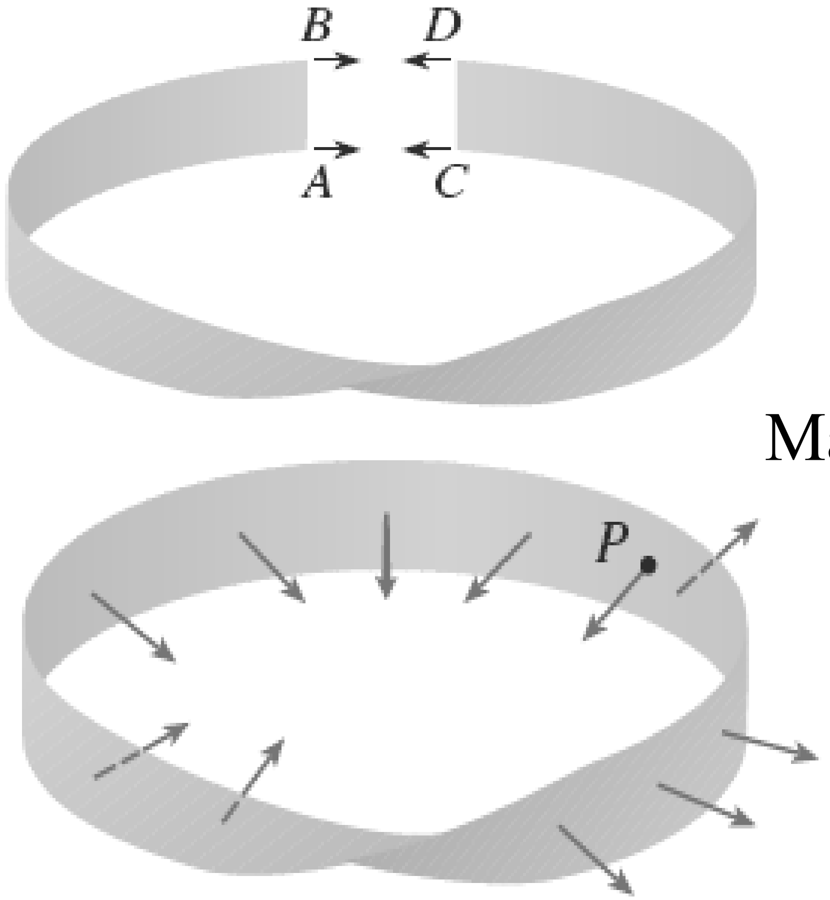
Nếu khi quay lại vị trí xuất phát, vector pháp tuyến không đổi chiều thì mặt cong S được gọi là mặt hai phía.

Trong trường hợp ngược lại, vector pháp tuyến đổi chiều thì mặt cong S được gọi là mặt một phía.

2. Tích phân mặt loại 2

Ví dụ

Mặt Mobius tạo bằng cách lấy 1 hình chữ nhật ABCD, sau đó vặn cong hình chữ nhật này để điểm A chạm vào điểm C, điểm D chạm vào điểm B. Khi đó mặt Mobius là mặt 1 phía.

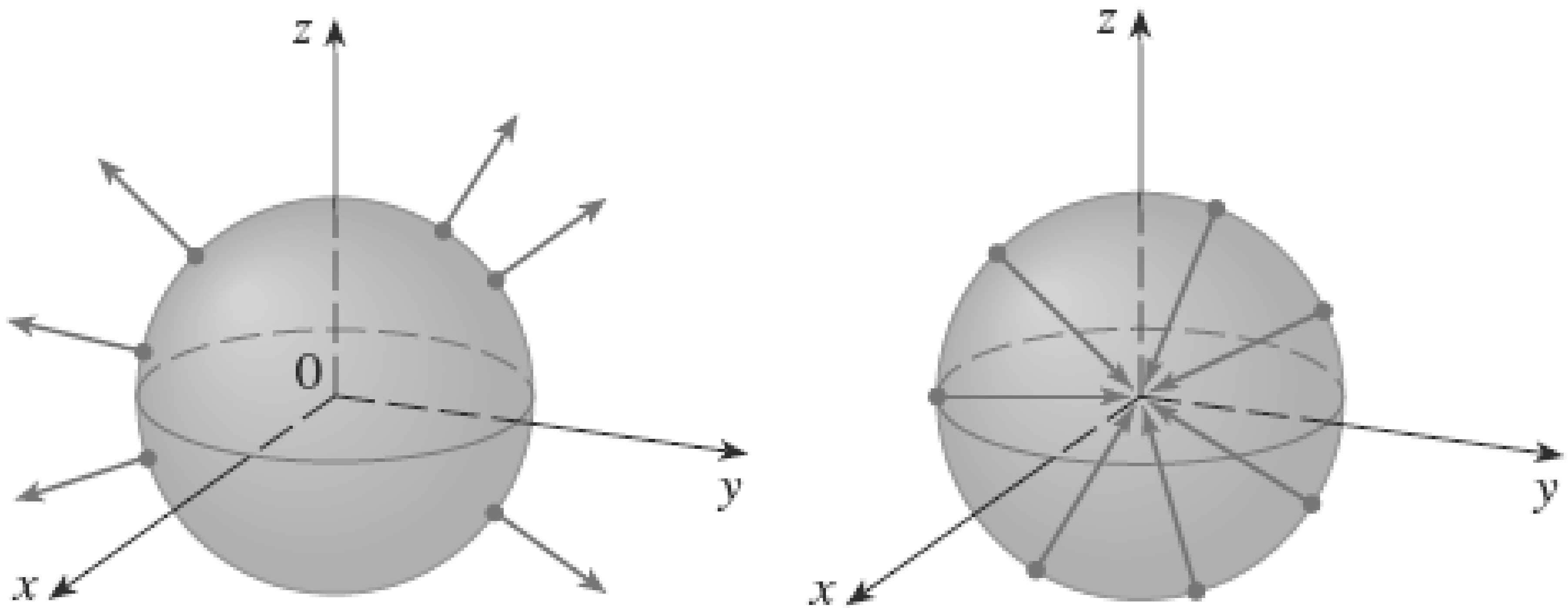


Mặt Mobius

2. Tích phân mặt loại 2

Ví dụ

Mặt cầu, mặt nón, mặt bàn… là mặt 2 phía.



Mặt cầu

2. Tích phân mặt loại 2

Định nghĩa mặt định hướng

S là mặt cong hai phía.

Nếu trên mặt S ta qui ước một phía là dương, phía còn lại là âm thì mặt S được gọi là mặt định hướng.

Vector pháp tuyến của mặt định hướng là vector pháp tuyến hướng về phía dương của mặt định hướng.

Ví dụ

Tìm vector pháp tuyến của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ tại $A\left(1, 0, \sqrt{3}\right)$ biết phía ngoài của mặt cầu là phía dương.

Phương trình nửa trên mặt cầu: $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

Vector pháp tuyến: $\mathbf{l} = \left(-z'_x, -z'_y, 1\right) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, 1\right)$

Vector pháp tuyến tại điểm A: $\mathbf{l} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0, 1\right)$

2. Tích phân mặt loại 2

Ví dụ

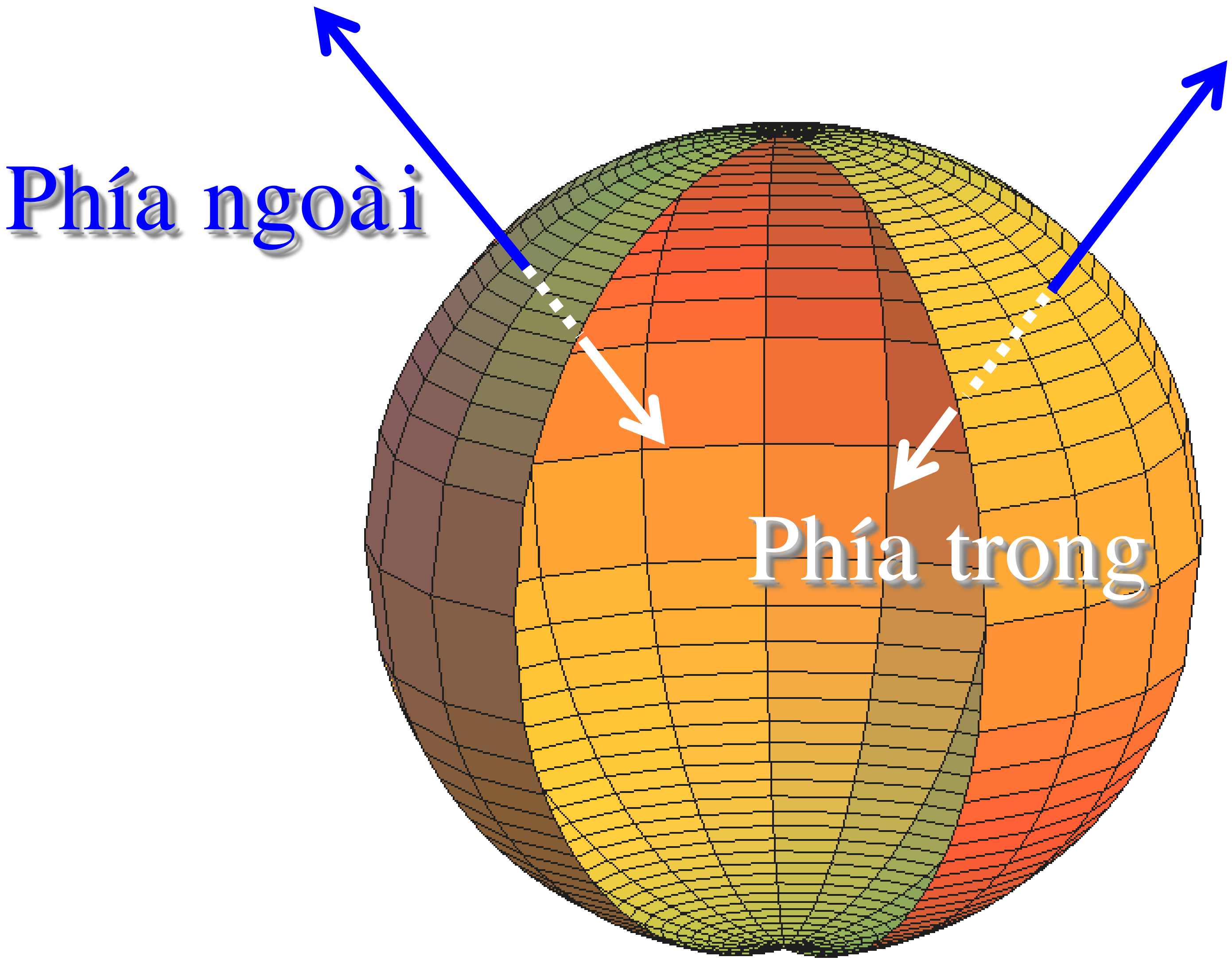
Tìm vector pháp tuyến của mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ tại $A\left(1,1,\sqrt{2}\right)$

biết phía dương của mặt nón là phía dưới nhìn từ hướng của trục Oz.

Phương trình mặt nón: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

Vecto pháp tuyến: $\mathbf{l} = \left(z'_x, z'_y, -1\right) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -1\right)$

Vecto pháp tuyến tại điểm A: $\mathbf{l} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, -1\right)$


Phía ngoài
Phía trong

2. Tích phân mặt loại 2

Định nghĩa

$P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ xác định trên mặt định hướng S.

Vector pháp tuyến đơn vị của mặt S là: $\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

α, β, γ lần lượt là góc hợp bởi **n** với các trục Ox, Oy, Oz.

Tích phân mặt loại một $I = \iint\limits_S \left(P\cdot\cos\alpha + Q\cdot\cos\beta + R\cdot\cos\gamma\right)dS$

được gọi là tích phân mặt loại hai của P, Q, R trên mặt định hướng S lấy theo hướng dương của mặt S, khi đó:

$$I = \iint\limits_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

2. Tích phân mặt loại 2

Định nghĩa

Định lý

Cho S là mặt định hướng các hàm $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ liên tục trên mặt S. Khi đó tích phân mặt loại 2 luôn tồn tại.

Tính chất

- Tích phân mặt loại 2 có các tính chất tương tự như đối với tích phân đường loại 2.

$$\iint_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = -\iint_{S^-} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

2. Tích phân mặt loại 2

Cách tính

Nếu $\mathbf{F} = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$ là trường vector liên tục xác định trên mặt định hướng S, hướng dương của S trùng với vector pháp đơn vị $\mathbf{n}$, thì tích phân mặt của $\mathbf{F}$ trên S là:

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

Nếu S được cho bởi hàm vector $\mathbf{r}(u, v)$, thì:

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\frac{\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|}dS = \iint_{D(u,v)}\left[\mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v))\cdot\frac{\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|}\right]\cdot|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|\,dudv$$

$$= \iint_{D(u,v)} \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v))\cdot(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)\,dudv$$

2. Tích phân mặt loại 2

Cách tính

Các hàm $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ xác định trên mặt định hướng $S: z = z(x,y)$.

Vector pháp tuyến đơn vị hướng về phía dương của mặt S: $\mathbf{n} = \left(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\right)$.

$$\cos\alpha = \frac{\mp z'_x}{\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}}, \cos\beta = \frac{\mp z'_y}{\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}}, \cos\gamma = \frac{\pm 1}{\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}}$$

Mặt khác: $dS = \dfrac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}\,dxdy.$

Do đó, $I = \iint\limits_S \left(P\cdot\cos\alpha + Q\cdot\cos\beta + R\cdot\cos\gamma\right)dS$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} \left[P\cdot(\mp z'_x) + Q\cdot\left(\mp z'_y\right) + R\cdot(\pm 1)\right]dxdy.$$

2. Tích phân mặt loại 2

Cách tính

Cho S là mặt định hướng có phương trình: $z = z(x, y)$.

Hình chiếu của S trên mp Oxy là miền D_{xy} .

Vector pháp tuyến: $\mathbf{l} = (A, B, C) = \pm(-z'_x, -z'_y, 1)$.

Dấu (+) , (-) được chọn sao cho **l** hướng về phía dương của mặt S.

$$\iint\limits_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint\limits_{D_{xy}} (PA + QB + RC)dxdy$$

2. Tích phân mặt loại 2

Cách tính

Cho S là mặt định hướng có phương trình: $x = x(y, z)$.

Hình chiếu của S trên mp Oyz là miền D_{yz} .

Vector pháp tuyến: $\mathbf{l} = (A, B, C) = \pm(1, -x'_y, -x'_z)$.

Dấu (+) , (-) được chọn sao cho **l** hướng về phía dương của mặt S.

$$\iint_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_{D_{yz}} (PA + QB + RC)dydz$$

2. Tích phân mặt loại 2

Cách tính

Cho S là mặt định hướng có phương trình: $y = y(x, z)$.

Hình chiếu của S trên mp Oxz là miền D_{xz} .

Vector pháp tuyến: $\mathbf{l} = (A, B, C) = \pm(-y'_x, 1, -y'_z)$.

Dấu (+) , (-) được chọn sao cho **l** hướng về phía dương của mặt S.

$$\iint_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_{D_{xz}} (PA + QB + RC)dxdz$$

2. Tích phân mặt loại 2

Ví dụ

Tính $I = \iint_{S^+} ydydz + xdzdx + zdxdy$.

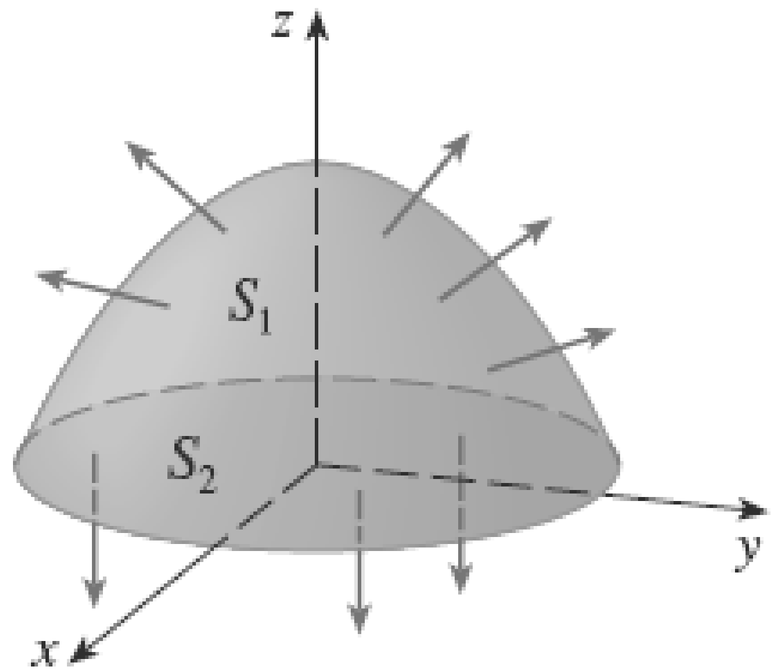
Trong đó S^+ là phía ngoài của vật thể được giới hạn bởi các mặt:

$$z = 1 - x^2 - y^2, z = 0.$$

$$I = \iint_{S^+} ydydz + xdzdx + zdxdy =$$

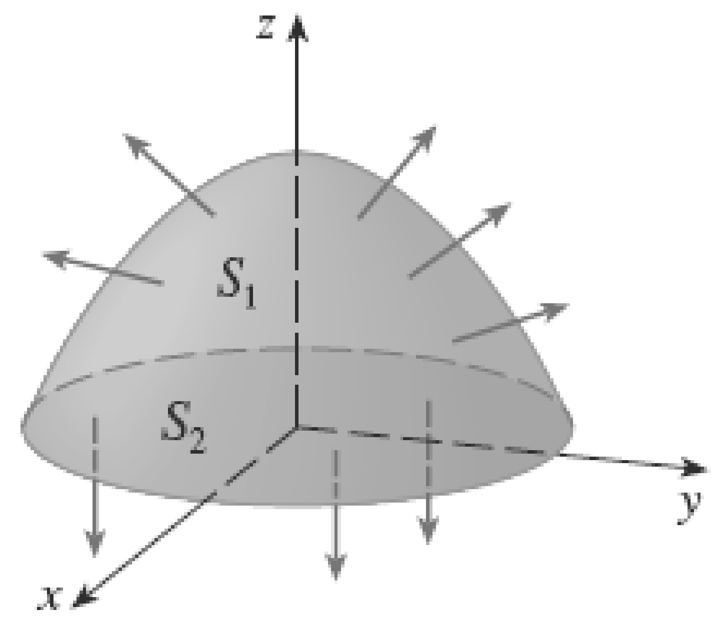
$$= \iint_{S_1^+} ydydz + xdzdx + zdxdy +$$

$$+ \iint_{S_2^+} ydydz + xdzdx + zdxdy$$



$S_1: z = 1 - x^2 - y^2$. Do đó:

$$z'_x = -2x, z'_y = -2y$$



Hình chiếu của S_1 xuống mặt phẳng Oxy là miền:

$$D_{xy} = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$$

S_1^+ hướng ra ngoài nên vector pháp tuyến của mặt S_1^+:

$$\mathbf{l} = (-z'_x, -z'_y, 1)$$

$$\iint\limits_{S_1^+} ydydz + xdzdx + zdxdy = \iint\limits_{S_1^+} ydydz + xdzdx + (1 - x^2 - y^2)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} \left(-z'_x . y - z'_y . x + (1 - x^2 - y^2)\right)dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} (1 + 4xy - x^2 - y^2)dxdy$$

Chuyển sang hệ tọa độ cực: $x = rcos\varphi, y = rsin\varphi$.

$$D_{r\varphi} = \{(r,\varphi): 0 \le r \le 1, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$$

Do đó:

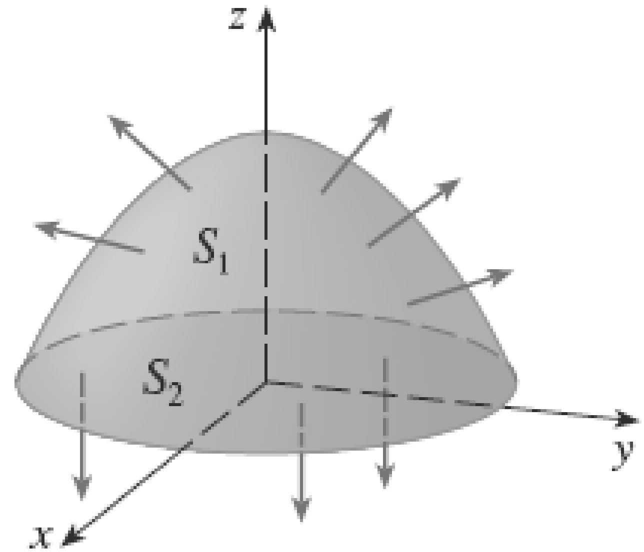
$$\iint_{D_{xy}} (1 + 4xy - x^2 - y^2)dxdy = \iint_{D_{r\varphi}} (1 + 4r^2 cos\varphi sin\varphi - r^2).r.drd\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r - r^3 + 4r^3 cos\varphi sin\varphi)drd\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} + cos\varphi sin\varphi\right)d\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$S_2 : z = 0$. Do đó:

$$z'_x = z'_y = 0$$

Hình chiếu của S_2 xuống mặt phẳng Oxy là miền:



$$D_{xy} = \{(x, y): x^2 + y^2 \le 1\}$$

$$\iint\limits_{S_2^+} ydydz + xdzdx + zdxdy = \iint\limits_{S_2^+} ydydz + xdzdx + 0.dxdy$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} (y.0 + x.0 + 0.-1)dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} 0.dxdy = 0$$

$$I = \iint\limits_{S^+} ydydz + xdzdx + zdxdy = \frac{\pi}{2}$$

2. Tích phân mặt loại 2

Ví dụ

Tính $\iint_{S^+}(2x+y)dydz+(2y+z)dzdx+(2z+x)dxdy$.
Trong đó S^+ là phía phần của mặt phẳng $x+y+z=3$ nằm trong hình trụ $x^2+y^2=2x$, phía dương là phía dưới nhìn từ hướng dương của Oz.

$S: z=3-x-y$. Do đó:

$$z'_x=z'_y=-1.$$

S^+ là phía dưới nhìn từ hướng dương của trục Oz.

Vector pháp tuyến của mặt S có dạng: $\mathbf{l}=(z'_x, z'_y, -1)$.

$$D_{xy}=\{(x,y): x^2+y^2\le 2x\}$$

$$\iint_{S^+} (2x+y)dydz + (2y+z)dzdx + (2z+x)dxdy =$$

$$= \iint_{S^+} (2x+y)dydz + (2y+3-x-y)dzdx + (6-2x-2y+x)dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} \left[(2x+y)z'_x + (y-x+3)z'_y - 1.(6-x-2y)\right]dxdy$$

$$= -9 \iint_{D_{xy}} dxdy$$

$$= -9.S_{D_{xy}} = -9\pi$$

2. Tích phân mặt loại 2

Ví dụ

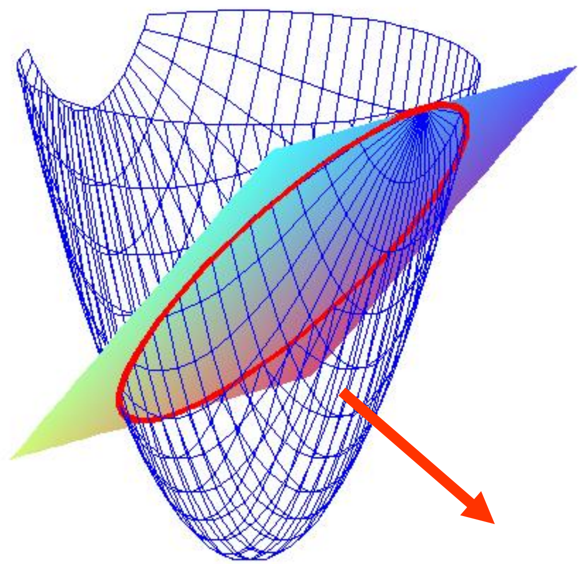
Tính $I = \iint_{S^+}(x+z)dxdy$
Trong đó S^+ là phần của mặt phẳng $z = 2 - x$ giới hạn bởi mặt $z = x^2 + y^2$, phía dương là phía dưới nhìn từ hướng dương của trục Oz.

$S: z = 2 - x$. Do đó:

$$z'_x = -1, z'_y = 0.$$

S^+ là phía dưới nhìn từ hướng dương của trục Oz.

Vector pháp tuyến của mặt S có dạng: $\mathbf{l} = (z'_x, z'_y, -1)$.



$$D_{xy} = \{(x,y): x^2 + y^2 \le 2 - x\} = \{(x,y): (x+\frac{1}{2})^2 + y^2 \le \frac{9}{4}\}$$

$$I = \iint\limits_{S^+} (x+z)dxdy = \iint\limits_{S^+} (x+(2-x))dxdy = \iint\limits_{S^+} 2dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} 2.-1.dxdy = -2.S_{D_{xy}} = -2\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{9\pi}{2}$$

2. Tích phân mặt loại 2

Ví dụ

Tính $\mathrm{I} = \iint_{S^+} yzdxdy$, trong đó S^+ là phía ngoài của vật thể:

$$\Omega:\ x^2 + y^2 \le R^2; x \ge 0, y \ge 0, 0 \le z \le h$$

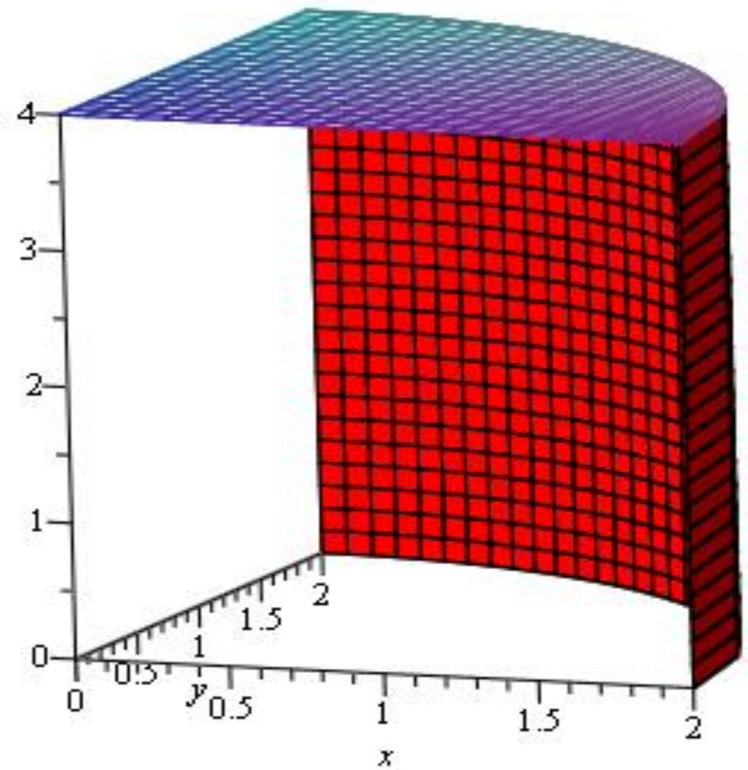
Mặt S được chia thành 5 mặt gồm:

- Hai mặt đáy S_1, S_2.
- Hai mặt bên S_3, S_4 nằm trong mp: $y = 0, x = 0$.
- Mặt trụ cong S_5.

$$I = \iint_{S^+} yzdxdy = \iint_{S_1^+} yzdxdy +$$

$$+ \iint_{S_2^+} yzdxdy + \iint_{S_3^+} yzdxdy +$$

$$+ \iint_{S_4^+} yzdxdy + \iint_{S_5^+} yzdxdy.$$



$S_3: y = 0$ nên $\iint_{S_3^+} yzdxdy = \iint_{D_{xz}} (0.0 + 0. -1 + yz.0)dxdz = 0.$

$S_4: x = 0$ nên $\iint_{S_4^+} yzdxdy = \iint_{D_{yz}} (0. -1 + 0.0 + yz.0)dydz = 0.$

$S_5: x = \sqrt{R^2 - y^2}$ nên $\iint_{S_5^+} yzdxdy = \iint_{D_{yz}} (0.1 + 0. -x'_y + yz.0)dydz = 0.$

$S_1: z = 0$ nên $\iint_{S_1^+} yzdxdy = \iint_{D_{xy}} (0.0 + 0.0 + y.0. -1)dxdy = 0.$

$S_2: z = h \to z'_x = z'_y = 0$. Vector pháp tuyến của mặt S_2: $\mathbf{l} = (0,0,1)$

$$D = \{(x,y): x^2 + y^2 \le R^2, x \ge 0, y \ge 0\}$$

$$I = \iint_{S_2^+} yzdxdy = h \iint_{D_{xy}} ydxdy$$

Chuyển sang hệ tọa độ cực: $x = rcos\varphi, y = rsin\varphi$.

$$D_{r\varphi} = \{(r,\varphi): 0 \le r \le R, 0 \le \varphi \le \pi/2\}$$

$$I = \iint_{S_2^+} yzdxdy = h \iint_{D_{r\varphi}} rsin\varphi.r.drd\varphi =$$

$$= h \int_0^{\pi/2} sin\varphi d\varphi \int_0^R r^2 dr =$$

$$= h\frac{R^3}{3}$$