ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ

ĐỀ THI HẾT MÔN
HỌC KỲ PHỤ NĂM HỌC 2016 - 2017

Đề thi số 1

Môn thi: Giải tích II.
Hệ: Chính quy.
Lớp: MAT1095 1.

Số tín chỉ: 5.
Thời gian làm bài: 120 phút.

Câu 1. (2.0 điểm) Tính gần đúng giá trị: $A=\left(\sqrt{98}+\sqrt[3]{123}\right)^3$.

Câu 2. (2.0 điểm) Tìm cực trị hàm số: $z=x^3+3xy^2-15x-12y-1$; $x>0$.

Câu 3. (2.0 điểm) Tính tích phân: $I=\int\limits_C \left(2x^2+5\sin x\right)dx+\left(\sqrt[5]{1+y^3}+2x\right)dy$,

với C là cung tròn: $x^2+y^2=2y$; $y\le 1$. Chiều của C là chiều ngược chiều kim đồng hồ.

Câu 4. (2.0 điểm) Tính tích phân: $I=\iint\limits_S \left(z+x^2\right)dxdy$, với S là phần của mặt: $z=x^2+y^2$ nằm trong hình trụ: $x^2+y^2=1; x\ge 0, y\ge 0$, phía dưới là phía dương nhìn từ hướng dương của trục Oz.

Câu 5. (2.0 điểm) Giải phương trình vi phân: $y''+y'-2y=-x^2+2x+1+4e^{-2x}$.

--------- **Hết** ---------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:…….………………….; Số báo danh:……………………

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ

ĐỀ THI HẾT MÔN
HỌC KỲ PHỤ NĂM HỌC 2016 - 2017

<u>Đề thi số 2</u>

Môn thi: Giải tích II.
Hệ: Chính quy.
Lớp: MAT1095 1.

Số tín chỉ: 5.
Thời gian làm bài: 120 phút.

<u>Câu 1</u>. (2.0 điểm) Tính gần đúng giá trị: $A = \ln\left(\sqrt[3]{1,03} - \sqrt[4]{0,96} + 1\right)$.

<u>Câu 2</u>. (2.0 điểm) Tìm cực trị hàm số: $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y - 1$; $x < 0$.

<u>Câu 3</u>. (2.0 điểm) Tính tích phân: $I = \int_C \left(2x^2 + \cos x\right)dx + \left(\sqrt[7]{1+y^3} + 2x\right)dy$,

với C là cung tròn: $x^2 + y^2 = 2y$; $y \le 1$. Chiều của C là chiều ngược chiều kim đồng hồ.

<u>Câu 4</u>. (2.0 điểm) Tính tích phân: $I = \iint_S xz^2 dxdy$, phía dương của S là phía ngoài của mặt cầu xác định bởi: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$; $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$.

<u>Câu 5</u>. (2.0 điểm) Giải phương trình vi phân: $y'' + y' - 2y = -x^2 + 2x + e^{-2x}$.

--------- **Hết** ---------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:……..……………………; Số báo danh:……………………

Đáp án Đề thi số 1

Câu 1. (2.0đ)

Xét hàm số: $z=\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{y}\right)^3 \to\ z'_x=\frac{3}{2}\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{y}\right)^2}{\sqrt{x}}\ ;\ z'_y=\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{y}\right)^2}{\sqrt[3]{y^2}}$.

Chọn $x_0=100, y_0=125 \to \Delta x=x-x_0=-2; \Delta y=y-y_0=-2$.

$z(x_0,y_0)=3375; z'_x(x_0,y_0)=\frac{135}{4}; z'_y(x_0,y_0)=9 \to A\approx 3375-2\cdot\frac{135}{4}-2\cdot 9=\frac{6579}{2}$.

Câu 2. (2.0đ)

Tìm điểm dừng: $\begin{cases} z'_x=3x^2+3y^2-15=0 \\ z'_y=6xy-12=0 \end{cases}$. Các điểm dừng: $P_1(2,1); P_2(1,2)$

$z''_{xx}=z''_{yy}=6x, z''_{xy}=6y; \Delta=36(x^2-y^2)$

Khảo sát cực trị tại các điểm dừng: P_1 là cực tiểu, $z_{ct}=-29$; P_2 không là cực trị.

Câu 3. (2.0đ)

$P(x,y)=2x^2+5\sin x \to P'_y=0$

$Q(x,y)=\sqrt[5]{1+y^3}+2x \to Q'_x=2$

Gọi: $L=C\cup\overline{AB}; A(1,1), B(-1,1)$. Chiều của L là chiều ngược chiều kim đồng hồ.

$$\to \int\limits_L=\int\limits_C+\int\limits_{\overline{AB}} \to I=\int\limits_C=\int\limits_L-\int\limits_{\overline{AB}}=J-K$$

Dùng công thức Green đối với đường cong kín L:

$J=\int\limits_L Pdx+Qdy=2\iint\limits_D dxdy\quad;\quad D=\{(x,y): x^2+y^2\le 2y\ ;\ y\le 1\} \to J=2\cdot S_D=\pi$

Đường thẳng AB: $y=1; x_A=1, x_B=-1$. $\to K=\int\limits_{\overline{AB}} Pdx+Qdy=\int\limits_1^{-1}(2x^2+5\sin x)dx=-\frac{4}{3}$

Do đó: $I=J-K=\pi+\frac{4}{3}$

Câu 4. (2.0đ)

Phương trình mặt $S: z=x^2+y^2$

Vecto pháp tuyến của mặt S: $\vec{l}=\left(z'_x,z'_y,-1\right)=\left(2x,2y,-1\right)$

Hình chiếu của phần mặt S xuống mp Oxy: $D_{xy}=\{(x,y): x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$

$\to I=\iint\limits_{D_{xy}}\left[\left((x^2+y^2)+x^2\right)\cdot(-1)\right]dxdy=-\iint\limits_{D_{xy}}(2x^2+y^2)dxdy$

Đặt: $x=r.\cos\varphi, y=r.\sin\varphi$; $D_{r\varphi}=\{(r,\varphi): 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}, 0\le r\le 1\}$; $|J|=r$.

$\to I=-\iint\limits_{D_{r\varphi}}(1+\cos^2\varphi)\cdot r^3\cdot drd\varphi=-\int\limits_0^{\pi/2}(1+\cos^2\varphi)d\varphi\cdot\int\limits_0^1 r^3dr=-\frac{3\pi}{4}\cdot\frac{1}{4}=-\frac{3\pi}{16}$

Câu 5. (2.0đ)

Pt không thuần nhất: $y''+y'-2y=-x^2+2x+1+4e^{-2x}$.

Pt thuần nhất: $y'' + y' - 2y = 0$

Pt đặc trưng: $k^2 + k - 2 = 0 \rightarrow k = 1, k = -2$

Nghiệm tổng quát của pt thuần nhất: $y^*(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$

Nghiệm riêng của pt không thuần nhất tìm dưới dạng: $\overline{y}(x) = Ax^2 + Bx + C + D \cdot x \cdot e^{-2x}$

Dùng phương pháp đồng nhất thức: $A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}, C = -\frac{1}{4}, D = -\frac{4}{3}$.

Nghiệm tổng quát của pt không thuần nhất:

$$y(x) = y^*(x) + \overline{y}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} - \frac{4}{3}xe^{-2x}$$

Đáp án Đề thi số 2

Câu 1. (2.0đ)

Xét hàm số: $z=\ln\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{y}+1\right)\to\ z'_x=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{y}+1\right)}$; $z'_y=-\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{y}+1\right)}$.

Chọn $x_0=1, y_0=1\to\Delta x=x-x_0=0,03;\Delta y=y-y_0=-0,04$.

$$z(x_0,y_0)=0;z'_x(x_0,y_0)=\frac{1}{3};z'_y(x_0,y_0)=-\frac{1}{4}\to A\approx 0+0,03\cdot\frac{1}{3}-0,04\cdot-\frac{1}{4}=0,02$$

Câu 2. (2.0đ)

Tìm điểm dừng: $\begin{cases} z'_x=3x^2+3y^2-15=0\\ z'_y=6xy-12=0\end{cases}$. Các điểm dừng: $P_1(-2,-1);P_2(-1,-2)$

$z''_{xx}=z''_{yy}=6x,z''_{xy}=6y;\Delta=36(x^2-y^2)$

Khảo sát cực trị tại các điểm dừng: P_1 là cực đại, $z_{cd}=27$; P_2 không là cực trị.

Câu 3. (2.0đ)

$P(x,y)=2x^2+\cos x\to P'_y=0$

$Q(x,y)=\sqrt[7]{1+y^3}+2x\to Q'_x=2$

Gọi: $L=C\cup\overline{AB};A(1,1),B(-1,1)$. Chiều của L là chiều ngược chiều kim đồng hồ.

$$\to\int_L=\int_C+\int_{\overline{AB}}\ \to I=\int_C=\int_L-\int_{\overline{AB}}=J-K$$

Dùng công thức Green đối với đường cong kín L:

$J=\int_L Pdx+Qdy=2\iint_D dxdy$; $D=\{(x,y):x^2+y^2\le 2y\,;\,y\le 1\}\to J=2\cdot S_D=\pi$

Đường thẳng AB: $y=1;x_A=1,x_B=-1\ \to K=\int_{\overline{AB}}Pdx+Qdy=\int_1^{-1}(2x^2+\cos x)dx=-\dfrac{4}{3}-2\sin 1$

Do đó: $I=J-K=\pi+\dfrac{4}{3}+2\sin 1$

Câu 4. (2.0đ)

Phương trình mặt cầu: $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$

Vecto pháp tuyến của mặt cầu: $\vec{l}=\left(-z'_x,-z'_y,1\right)=\left(\dfrac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2}},\dfrac{y}{\sqrt{9-x^2-y^2}},1\right)$

Hình chiếu của phần mặt cầu xuống mp Oxy: $D_{xy}=\{(x,y):x^2+y^2\le 9,x\ge 0,y\ge 0\}$

$\to I=\iint_{D_{xy}}x(9-x^2-y^2)dxdy$.

Đặt: $x=r.\cos\varphi, y=r.\sin\varphi$; $D_{r\varphi}=\{(r,\varphi):0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2},0\le r\le 3\}$; $|J|=r$.

$$\to I=\iint_{D_{r\varphi}}r\cos\varphi\cdot(9-r^2)\cdot r\cdot drd\varphi=\int_0^{\pi/2}\cos\varphi d\varphi\cdot\int_0^3 r^2(9-r^2)dr=1.\frac{162}{5}=\frac{162}{5}$$

Câu 5. (2.0đ)

Pt không thuần nhất: $y'' + y' - 2y = -x^2 + 2x + e^{-2x}$.

Pt thuần nhất: $y'' + y' - 2y = 0$

Pt đặc trưng: $k^2 + k - 2 = 0 \to k_1 = 1, k_2 = -2$

Nghiệm tổng quát của pt thuần nhất: $y^*(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$

Nghiệm riêng của pt không thuần nhất tìm dưới dạng: $\overline{y}(x) = Ax^2 + Bx + C + D \cdot x \cdot e^{-2x}$

Dùng phương pháp đồng nhất thức: $A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}, C = \frac{1}{4}, D = -\frac{1}{3}$.

Nghiệm tổng quát của pt không thuần nhất:

$$y(x) = y^*(x) + \overline{y}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}xe^{-2x}$$