PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Mục lục:

Các khái niệm cơ bản:

- Định nghĩa: Phương trình vi phân là phương trình liên hệ giữa biến độc lập (hay các biến độc lập) hàm chưa biết và đạo hàm của hàm số đó.

- Cấp của phương trình vi phân: là cấp cao nhất của đạo hàm của hàm số có mặt trong phuong trình đó.

-Dạng tổng quát của PTVP cấp n với biến độc lập x, biến phụ thuộc y là $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ trong đó không được khuyết $y^{(n)}$.

- Nghiệm của phưng trình vi phân:

Cho một PTVP cấp n, mọi hàm số, khả biến đến cấp n mà khi thay vào phương trình đó cho ta đồng nhất thức đều gọi là nghiệm của PTVP đó.

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1

1.Định nghĩa:

Phương trình vi phân cấp 1 có dạng :

+ *Dạng tổng quát* $F(x, y, y') = 0$

+ *Dạng chính tắc* $y' = f(x)$

2. Định lí tồn tại và duy nhất nghiệm :

- Cho PTVP cấp 1:y'=f(x,y) nếu f(x,y) liên tục trên miền mở D với Mo(xo,yo) $\in$ D tồn tại nghiệm y=f(x) Thỏa mãn yo=y(xo). Nếu f(x)liên tục trên D thì *nghiệm đó là duy nhất*

3.Điều kiện ban đầu của PTVP:

Nếu $y_0 = y(x_0)$ *gọi là điều kiện ban đầu*

2.Các loại phương trình vi phân cấp 1

2.1 Phương trình có dạng $y' = f(x)$

Phương pháp giải: tích phân 2 vế ta được

$$y = \int f(x)d(x) + C$$

2.2 Phương trình vi phân cấp 1 biến số phân li:

a. Dạng: $f(x)dx = g(y)dy$

b. PP: tích phân 2 vế ta được

$$\boxed{\int g(y)dy = \int f(x)dx + c}$$

vd: $xdx + ydy = 0$ tích phân 2 vế ta được

$$\int xdx + \int ydy = c \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c$$

$\boxed{\Rightarrow x^2 + y^2 = 2c}$ là nghiệm của phương trình.

2.3 Phương trình đẳng cấp cấp 1:

a.Dạng $y' = \varphi(\frac{y}{x})$ (1)

cách làm: Đặt $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = u.x \Rightarrow y' = u + xu'$

Thay y' vào phương trình (1) ta được $x.u' = \varphi(u) - u$

vd: gpt $(x + 2y)dx - xdy = 0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 + 2\frac{y}{x} \quad (ĐK: x \neq 0)$$

Đặt $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = u + xu'$

Thay y' vào phương trình ta được $u + xu' = 1 + 2u$

$$\Rightarrow \frac{du}{1+u} = \frac{dx}{x} \quad (ĐK: 1 + u \neq 0)$$

$$\Rightarrow \ln|1+u| = \ln|x| + c \Rightarrow 1 + u = c.x$$

Thay $u = \dfrac{y}{x}$ ta có: $y = x(cx - 1)$

Trường hợp $x = 0$ là nghiệm của (1)

.

b.Phương trình đưa về phương trình đẳng cấp

- Dạng $y = f(\frac{ax + by + c}{dx + ey + g})$

- Cách giải:

+ Xét định thức $\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \neq 0$ + Đặt: $\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$

Khi đó ta có $\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX + bY}{dX + eY}\right) <=> \frac{dY}{dX} = f(\frac{a + b\frac{Y}{X}}{d + e\frac{Y}{X}})$

Đặt $u = \frac{Y}{X}$.Ta giải $y' = d(\frac{Y}{X})$ → giải PT đẳng cấp

+ Nếu định thức $\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = 0$ thì $y' = f(\frac{ax + by + c}{k_1(ax + by) + g})$

Đặt $z = ax + by$ đưa về PT vế phải không chứa x

Ví dụ: GPT $y' = \dfrac{x-y+1}{x+y-3} \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-y+1}{x+y-3}$

Ta có: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ Đặt: $\begin{cases} x = X+1 \\ y = Y+2 \end{cases}$

Khi đó ta có: $\dfrac{dY}{dX} = \dfrac{X-Y}{X+Y} = \dfrac{1-\frac{Y}{X}}{1+\frac{Y}{X}}$ (*)

Đặt: $\dfrac{Y}{X} = u \to Y = uX \to Y' = u'.X + u$

$$(*) \Leftrightarrow u'X + u = \frac{1-u}{1+u} \Leftrightarrow \frac{dX}{X} = \frac{d(-u^2-2u+1)}{(-2)(-u^2-2u+1)}$$

$$\Leftrightarrow X^2.(-u^2-2u+1) = e^C = D$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2xy - y^2 + 2x + 6y = D$$

2.4 Phương trình tuyến tính cấp 1

a. Dạng: $y' + P(x)y = Q(x)$ (*)

- Nếu $Q(x) = 0$ thì phương trình $y' + P(x)y = 0$

được gọi là phương trình tuyến tính cấp 1 thuần nhất.

- Nếu $Q(x) \neq 0$ thì phương trình (*)

được gọi là phương trình tuyến tính cấp 1 không thuần nhất.

b. Cách giải: Nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính cấp 1 (*) có dạng:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)\, e^{\int P(x)dx} dx + c\right]$$

$\Rightarrow$

Cách giải:

Bước 1: giải pt thuần nhất: $y' + P(x)y = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} + P(x).y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{y} + P(x).dx = 0$$

(y=0 không phải nghiệm của phương trình đã cho)

$$\int \frac{dy}{y} + \int P(x).dx = 0 \Leftrightarrow \ln|y| = C - \int P(x).dx$$

$$\Leftrightarrow y = D.e^{-\int P(x)dx}$$

Bước 2: Coi D=D(x) $\Leftrightarrow y = D(x).e^{-\int P(x)dx}$

$$\rightarrow y' = D'(x).e^{-\int P(x)dx} - D(x).P(x).e^{-\int P(x)dx}$$

thay y' vào PT: $y' + P(x)y = Q(x)$ được:

$$D'(x).e^{-\int P(x)dx} = Q(x) \Longrightarrow D(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c]$$

Ví dụ: GPT

$$y' + 2xy = x.e^{-x^2} \quad (*)$$

Xét phương trình thuần nhất: $y' + 2xy = 0$

$$\Leftrightarrow \ln|y| + x^2 = C$$

$$\Leftrightarrow |y| = e^{C-x^2} = D.e^{-x^2}$$

Coi D=D(x) $\Rightarrow y = D(x).e^{-x^2} \quad (1)$

$$\Rightarrow y' = D'(x).e^{-x^2} - D(x).e^{-x^2}.2x$$

Thay y’ vào (*) ta được:

$$D'(x) = x \quad \Leftrightarrow D(x) = \frac{x^2}{2} + C$$

$$(1) \Leftrightarrow y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right).e^{-x^2}$$

2.5 Phương trình Bernouli

a) Dạng $y' + P(x)y = Q(x).y^{\alpha}$ (*)

b) Cách giải: +, $\alpha = 0$ (*) là pt tuyến tính cấp 1

+, $\alpha = 1$ (*) có dạng $y' + [P(x) - Q(x)]y = 0$

Đây là pt tuyến tính cấp 1 thuần nhất

+ $\alpha \# 0,1$ chia cả 2 vế y^{α} (*) có dạng

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} + P(x)\frac{y}{y^{\alpha}} = Q(x)$$ Đặt $z = y^{1-\alpha} \Rightarrow z' = (1-\alpha)\frac{y'}{y^{\alpha}}$

(*) $$\frac{z'}{1-\alpha} + P(x)z = Q(x) \Rightarrow z' + (1-z)zP(x) = (1-\alpha)Q(x)$$

+,y=0 là nghiệm của pt

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 2

1.Định nghĩa

- Phương trình vi phân cấp 2 tổng quát có dạng:

$F(x, y, y', y'') = 0$ hay $y'' = f(x, y, y')$

- Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp 2 là hàm $y = \varphi(x, c_1, c_2)$

Tìm nghiệm phương trình vi phân cấp 2: $y'' = f(x, y, y')$

thỏa mãn điều kiện đầu:

$$\begin{cases} y(x_0) = a \\ y'(x_0) = b \end{cases}$$

x, a, b các số cho trước

2. Các dạng toán của phương trình vi phân cấp2:

a. Dạng $\boxed{y'' = f(x)}$

- *Cách giải :tích phân 2 lần*

b- Dạng: $\boxed{y'' = f(x, y')}$

- Cách giải: Hạ bậc bằng cách đặt $z(x) = y'$

3. Phương trình dạng:

a- Dạng: $y'' = f(y, y')$

b- Cách giải: Hạ bậc bằng cách đặt $z(y) = y'$

$$\Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z \cdot \frac{dz}{dy} = z'.z$$

-Vd:

Vd: giải pt: $y.y''-y'^2=0$ (1)

Đặt $\boxed{z(y)=y'}$ $\Rightarrow y''=\dfrac{dz}{dy}\cdot z$

(1) $y\dfrac{dz}{dy}\cdot z-z^2=0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}\quad ;\quad (ĐK:\ \ y\neq 0, z\neq 0)$$

$$\Rightarrow \ln|y|+c_1=\ln|z| \qquad \Rightarrow z=c_1 y$$

Vậy phương trình có nghiệm $z=c_1 y$

4.Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 :

Phương trình tuyến tính cấp 2 có dạng tổng quát là

$$\boxed{y''+ay'+by = f(x)}$$

a, b các hằng số

a) Phương trình tuyến tính cấp 2 thuần nhất với hệ số hằng số: $\boxed{y''+ay'+by = 0}$ (*)

Phương trình $\boxed{\lambda^2 + a\lambda + b = 0}$ được gọi là

phương trình đặc trưng của phương trình (*).

* Nếu phương trình đặc trưng có 2 nghiệm phân biệt λ_1, λ_2

Nghiệm tổng quát của ptrinh (*) là: $\overline{y}(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

* Nếu phương trình đặc trưng có nghiệm kép $\lambda_1 = \lambda_2$

Nghiệm tổng quát của p trình (*) là: $\overline{y}(x) = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda_1 x}$

* Nếu phương trình đặc trưng có nghiệm phức

$$\begin{cases} \lambda_1 = \alpha + i\beta \\ \lambda_2 = \alpha - i\beta \end{cases}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (*) là:

$$\overline{y}(x) = e^{\alpha x}(c_1 \sin \beta x + c_2 \cos \beta x)$$

b) Phương trình tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng số: $y''+ay'+by=f(x)$

Nghiệm tổng quát của phương trình này có dạng:

$$\boxed{y(x)=\overline{y}(x)+\hat{y}(x)}$$

Với

- $\overline{y}(x)$ là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất: $y''+ay'+by=0$
- $\hat{y}(x)$ là nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất: $y''+ay'+by=f(x)$

Cách tìm nghiệm riêng $\hat{y}(x)$

Trường hợp $f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$

✓ Nếu α không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng: $\lambda^2+a\lambda+b=0$ $\hat{y}(x)=e^{\alpha x}.Q_n(x)$

✓ Nếu α là nghiệm kép của phương trình đặc trưng:

$\lambda^2+a\lambda+b=0$ Lúc này: $\hat{y}(x)=x^2.e^{\alpha x}.Q_n(x)$

✓ Nếu α là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng:

Khi đó: $\hat{y}(x)=x.e^{\alpha x}.Q_n(x)$

vd: tìm nghiệm tổng quát $y''-2y'+y=xe^{2x}$ (1)

Nghiệm tổng quát của pt (1) có dạng: $y(x)=\overline{y}(x)+\hat{y}(x)$

Bước 1: Tìm $\overline{y}(x)$

Phương trình đặc trưng $k^2-2k+1=0$ có

nghiệm kép $k_1=k_2=1 \Rightarrow \overline{y}(x)=(c_1+c_2x)e^x$

Bước 2: Tìm Ta có: $f(x)=e^{2x}x$

$\alpha=2$ là ko là nghiệm của phương trình đặc trưng

$\hat{y}(x)=e^{2x}.(Ax+B)$ là nghiệm riêng của (1)

Lấy $\hat{y}(x)$ *thế* vào(1) $A=1$, $B=-2$

Vậy nghiệm TQ là: $y(x)=(c_1+c_2x)e^x+(x-2).e^{2x}$

- Trường hợp

$$f(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)(\sin \beta x + Q_m(x).\cos \beta x]$$

✓ Nếu $\alpha \pm i\beta$ không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng thì

$$\hat{y}(x) = e^{\alpha x}[H_l(x)\sin \beta x + K_l(x)\cos \beta x]$$

$$l = \max\{m, n\}$$

✓ Nếu $\alpha \pm i\beta$ là nghiệm của phương trình đặc trưng thì

$$\hat{y}(x) = x.e^{\alpha x}[H_l(x)\sin \beta x + K_l(x)\cos \beta x]$$

$$l = \max\{m, n\}$$

VD1: Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$y''+4y=\cos 2x$$

Bước 1: Tìm $\overline{y}(x)$

Phương trình đặc trưng $k^2+4=0$ có nghiệm phức là: $k_1=2i,\ \ k_2=-2i$

$$\Rightarrow \overline{y}(x)=e^{ox}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)$$

Bước 2: Tìm $\hat{y}(x)$

$$f(x)=(1.\cos 2x+0.\sin 2x)$$

$$(\alpha=0,\beta=2,m=0,n=0)$$

Ta có: $\alpha \pm i\beta = \pm 2i$ là nghiệm của phương trình

đặc trưng nên $\hat{y}(x) = xe^{ox}(A\cos 2x + B\sin 2x)$

Lấy $\hat{y}(x)$ thế vào phương trình đầu ta tính được

$$A = 0 \quad , \quad B = \frac{1}{4}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đầu là:

$$y(x) = \overline{y}(x) + \hat{y}(x)$$

$$= (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + x\frac{1}{4}\sin 2x$$

- Trường hợp nguyên lí chồng chất nghiệm:

Với $\begin{cases} \hat{y}_1(x) & \text{là nghiệm riêng của phương trình: } y''+a(x)y'+b(x)y = f_1(x) \\ \hat{y}_2(x) & \text{là nghiệm riêng của phương trình: } y''+a(x)y'+b(x)y = f_2(x) \end{cases}$

Khi đó: $\hat{y}(x) = \hat{y}_1(x) + \hat{y}_2(x)$ Là nghiệm của phương trình

$$y''+a(x)y'+b(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$

Phần 3:ứng dụng của phương trình vi phân

Mô hình ô nhiễm môi trường

- *Gọi y là hàm lượng CO_2 . Hàm lượng tăng theo quy luật:*

$$\frac{dy}{dx} = x - \alpha y \quad (1)$$

x: lượng CO_2 mà nhà máy thải ra vào khí quyển

α: tham số biểu diễn tỉ phần C hấp thụ bởi MTTN

- *Giả sử CO_2 thải ra khí quyển tăng theo quy luật:*

$$\frac{dx}{dy} = a.e^{bt} - \beta y \quad (2)$$

(*a*,*b*, β: hằng số dương)

β: biểu diễn tỉ phần CO_2 bị hạn chế bớt do hoạt động chống ô nhiễm của các quốc gia

Mô hình này là 1 hệ 2 PTVP cấp 1, ta có biểu diễn chúng dưới dạng PTVP cấp 2.

Đạo hàm 2 vế phương trình (1) ta có:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\alpha\frac{dy}{dt} + x' \qquad (3)$$

Thế (2) vào (3)

$$a.e^{bt} - \beta y - \alpha\frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \alpha\frac{dy}{dx} + \beta y = a.e^{bt}$$

Xét phương trình thuần nhất, tìm nghiệm

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}$$

Nghiệm của phương trình thuần nhất:

$$\overline{y}(t) = C_1.e^{\lambda_1 t} + C_2.e^{\lambda_2 t}$$

Sử dụng hệ số bất định :

$$\hat{y}_{(t)} = \frac{a}{b^2 + b\alpha + b} \cdot e^{bt}$$

- $\alpha^2 - 4\beta > 0$ → nghiệm phương trình

$$y(t) = C_1.e^{k_1 t} + C_2.e^{k_2 t} + \frac{a}{b^2 + b\alpha + b} \cdot e^{bt}$$

- $\alpha^2 - 4\beta = 0$ → nghiệm kép : $\lambda = \frac{-\alpha}{2}$

→ nghiệm của PT :

$$y(t) = C_1.e^{\frac{-\alpha}{2}} + t.C_2.e^{\frac{-\alpha}{2}} + \frac{a}{b^2 + b\alpha + b} \cdot e^{bt}$$

- $\alpha^2 - 4\beta < 0$ → $\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0$

Nghiệm phức

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{(4\beta - \alpha^2)i}}{2} \qquad (\theta = \frac{\sqrt{4\beta - \alpha^2}}{2})$$

Nghiệm tổng quát:

y(t) = $e^{\frac{-\alpha}{2}}.(C_1 \sin\theta t + C_2 \cos\theta t) + \dfrac{a.e^{bt}}{b^2 + b\alpha + \beta}$

3 trường hợp y(t)= $\dfrac{a.e^{bt}}{b^2 + b\alpha + \beta} \rightarrow$ 0 khi $t \rightarrow +\infty$

($\alpha, \beta > 0, k_1, k_2, \dfrac{-\alpha}{2}$ số âm)