Đáp án Đề thi GT2 Lớp CA -CLC HKII năm học 2018 – 2019

Câu 1. (2, 0 đ)

a) (1, 0 đ) Xét tính liên tục của hàm số sau tại điểm M(0,0):

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, (x,y)\neq(0,0)\\ 0, \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(1, 0đ) Tìm vi phân toàn phần và vi phân cấp hai của hàm sau:

$$f(x,y) = xsiny + x^2y + z^2$$

Giải

a) (1,0 đ) Với $(x,y)=(0,0)$: $f(x,y)=0$

Với $(x,y)\neq(0,0)$, nếu cho $(x,y)\to(0,0)$ theo đường cong $x=k.\mathrm{y}^2$ ta có:

$f(ky^2,y)=\dfrac{ky^2.y^2}{k^2y^4+y^4}=\dfrac{k}{k^2+1}$ khi $y\neq 0$. Do đó $\lim\limits_{y\to 0} f(ky^2,y)=\dfrac{k}{1+k^2}$

Vậy khi $(x,y)\to(0,0)$ theo các phương khác nhau, f(x,y) dần tới những giới hạn khác nhau. Do đó không tồn tại $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Vậy hàm đã cho không liên tục tại điểm M(0,0).

b) (1,0 đ) Vi phân cấp 1:

$$df(x,y)=d(x\sin y+x^2y)$$
$$=(\sin y+2xy)dx+(x\cos y+x^2)dy.$$

Vi phân cấp 2:

$$d^2f(x,y)=2ydx^2+2(\cos y+2x)dxdy-x\sin ydy^2.$$

Câu 2. (2,0 đ)

a) (1,0 đ) Tìm cực trị hàm số: $z=x^3+3xy^2-15x-12y; x>0$.

b) (1,0 đ) Tính đạo hàm của hàm số $f(x,y,z)=xe^y+ye^z+ze^x$ tại điểm $O(0,0,0)$, theo hướng của véc tơ $v(5,1,-2)$.

Giải:

a) (1,0 đ) Tìm điểm dừng: $\begin{cases} z'_x=3x^2+3y^2-15=0\\ z'_y=6xy-12=0\end{cases}$. Các điểm dừng: $P_1(2,1); P_2(1,2)$.

$z''_{xx}=z''_{yy}=6x, z''_{xy}=6y; \Delta=36(x^2-y^2)$. Khảo sát cực trị tại các điểm dừng:

P_1 là cực tiểu, $z_{ct} = -28$; P_2 không là cực trị.

b)(1,0 đ) Gradient của f là

$$\nabla f(x,y,z) = (f_x^{'}(x,y,z),\ f_y^{'}(x,y,z),\ f_z^{'}(x,y,z))$$
$$= (e^y + ze^x, e^z + xe^y, e^x + ye^z)$$

Tại $O(0,0,0)$ ta có $\nabla f(0,0,0) = (1,1,1)$. Véc tơ đơn vị theo hướng của $v(5,1,-2)$ là:

$$u = \frac{5}{\sqrt{30}} i + \frac{1}{\sqrt{30}} j - \frac{2}{\sqrt{30}} k$$

$$\rightarrow \begin{aligned} D_u f(0,0,0) &= \nabla f(0,0,0).u \\ &= (1,1,1)\left(\frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{-2}{\sqrt{30}}\right) \\ &= \frac{4}{\sqrt{30}}. \end{aligned}$$

Câu 3. (2,0 đ) a) (1,0 đ)Tính tích phân hai lớp sau trên miền tương ứng:

$$\iint_R \frac{1+x^2}{1+y^2} dA,\ R = \{(x,y)/0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$$

b) (1,0 đ) Tính tích phân sau nếu V là miền giới hạn bởi các mặt phẳng $x + z = 3, y = 2, x = 0, y = 0, z = 0$:

$$\iiint_V \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$$

Giải

a) (1,0 đ) Từ phân 2 lớp ta đưa về tích phân lặp

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{1+x^2}{1+y^2} dA &= \int_0^1 (1+x^2)dx \int_0^1 \frac{1}{1+y^2} dy \\ &= \left[x + \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 \right] * \arctan y \Big|_0^1 \\ &= \frac{4}{3} * \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

<u>b) (1,0 đ)</u> $I_2 = \iiint_V \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3} = \iint_G \left[\int_0^{3-x} \frac{dz}{(x+y+z+1)^3} \right] dxdy$

Trong đó G là hình chiếu của V lên Oxy

$$I_2=-\frac{1}{2}\int_0^3\int_0^2\left[\frac{1}{(x+y+z+1)^2}\Bigg|_{z=0}^{z=3-x}\right]dydx=-\frac{1}{2}\int_0^3\int_0^2\left[\frac{1}{(4+y)^2}-\frac{1}{(x+y+1)^2}\right]dydx$$

$$I_2=-\frac{1}{2}\left[-3.\frac{1}{4+y}\Bigg|_{y=0}^{y=2}-\int_0^3\frac{-1}{x+y+1}\Bigg|_{y=0}^{y=2}dx\right]=\frac{-1}{2}\left[\frac{1}{4}+\int_0^3\left[\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+1}\right]dx\right]$$

$$I_2=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}+\ln\left|\frac{x+3}{x+1}\right|\Bigg|_0^3\right]=\frac{4\ln 2-1}{8}$$

Câu 4. (2,0 đ) a) (1,0 đ)Tính các tích phân đường loại I sau:

$K=\int_C x^2yds$, ở đây C là đoạn thẳng nối hai điểm A(1, 0), B(4, 3).

b) (1,0 đ) Tính tích phân

$$I=\oint_C(xy+y+\sin x)dx+\left(xy+x+3^y\right)dy$$

với C là đường tròn: $x^2+y^2=2x+2y$, chiều C ngược chiều kim đồng hồ.

Giải

a) (1,0 đ) Vẽ hình. Phương trình đường thẳng đi qua AB là $y-x+1=0$ hay y = x – 1 . Khi đó $ds=\sqrt{2}dx$ và ta có :

$$K=\int_C x^2yds=\int_1^4 x^2(x-1)\sqrt{2}dx$$

$$=\sqrt{2}\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_1^4=\sqrt{2}(64-\frac{64}{3}+\frac{1}{12})$$

$$=42.75\sqrt{2}=\frac{171\sqrt{2}}{4}$$

b) (1,0 đ) Vẽ hình. Vì hàm P,Q, các đạo hàm riêng là các hàm sơ cấp trên R^2 nên các hàm này liên tục trên miền D được giới hạn bởi đường cong kín C.

Dùng công thức Green đối với đường cong kín C: $I=\iint_D\left(Q'_x-P'_y\right)dxdy=\iint_D(y-x)dxdy$.

Đặt: $x=1+r\cos\varphi, y=1+r\sin\varphi, |J|=r, D_{r\varphi}=\left\{0\le\varphi\le 2\pi, 0\le r\le\sqrt{2}\right\}$.

Do đó, $I=\iint_{D_{r\varphi}}r^2(\sin\varphi-\cos\varphi)drd\varphi=\int_0^{2\pi}(\sin\varphi-\cos\varphi)d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}r^2dr=$

$$=\left[-\sin\varphi-\cos\varphi\right]_0^{2\pi}\cdot\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}}=0\ .$$

Câu 5. (2,0 đ)

a) (1,0 đ) Giải các phương trình vi phân sau:

$y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$ với điều kiện ban đầu $y(0) = \frac{1}{2}$.

b)(1,0 đ) Tìm nghiệm riêng của phương trình vi phân $y'' + 4y = x$

thỏa mãn điều kiên $y(0) = 1$ và $y'(0) = 2$.

Giải

a) (1,0 đ) Từ phương trình đã cho, suy ra

$$p = \frac{-2}{x+1} \Rightarrow \int p(x)dx = \int \frac{-2}{x+1}dx = -2\ln|x+1|;\ q(x) = (x+1)^3$$

Nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính cấp 1

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right] = e^{2\ln|x+1|}\left[C + \int (x+1)^3 .e^{-2\ln|x+1|}dx\right]$$

$$y = (x+1)^2\left[C + \int (x+1)dx\right] = (x+1)^2\left(C + \frac{x^2}{2} + x\right)$$

Điều kiện ban đầu $y(0) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = C$

Vậy nghiệm cần tìm $y = (x+1)^2\left(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} + x\right) = \frac{1}{2}(x+1)^4$.

b) (1,0 đ) Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân thuần nhất $y'' + 4y = 0$ tương ứng là:

Y(x) = C_1sin2x + C_2 cos2x.

Ta tìm nghiệm riêng dưới dạng Ax + B. Dùng phương pháp hệ số bất định:

$4(Ax + B) = x \to A = 0.25, B = 0.$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình vi phân không thuần nhất là:

$y(x) = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x + 0.25x$.

Với 2 điều kiện ban đầu: $y(0) = 1$ và $y'(0) = 2$ ta nhận được:

C_2 = 1, C_1 = (2 - 0.25) /2=0.875=7/8.

Vậy, nghiệm riêng cần tìm là: y(x) = 0.875sin2x + cos2x + 0.25x.