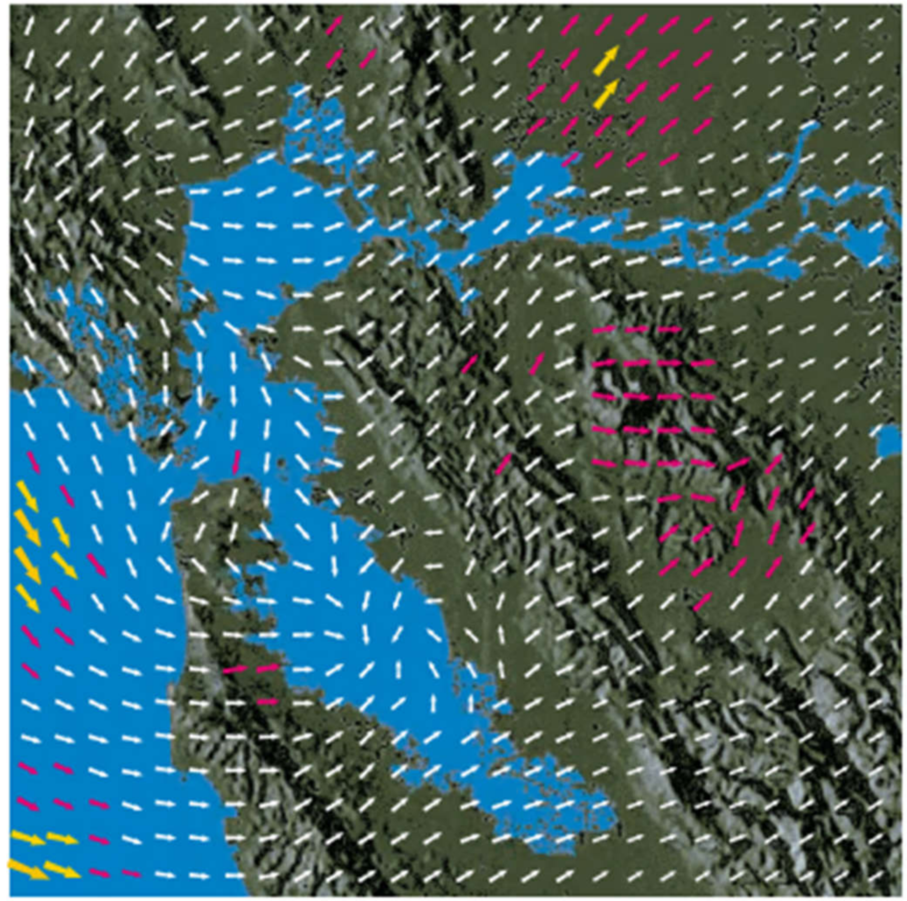
TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

1) Trường véc-tơ
2) Tích phân đường loại I
3) Tích phân đường loại II

1. Trường véc-tơ

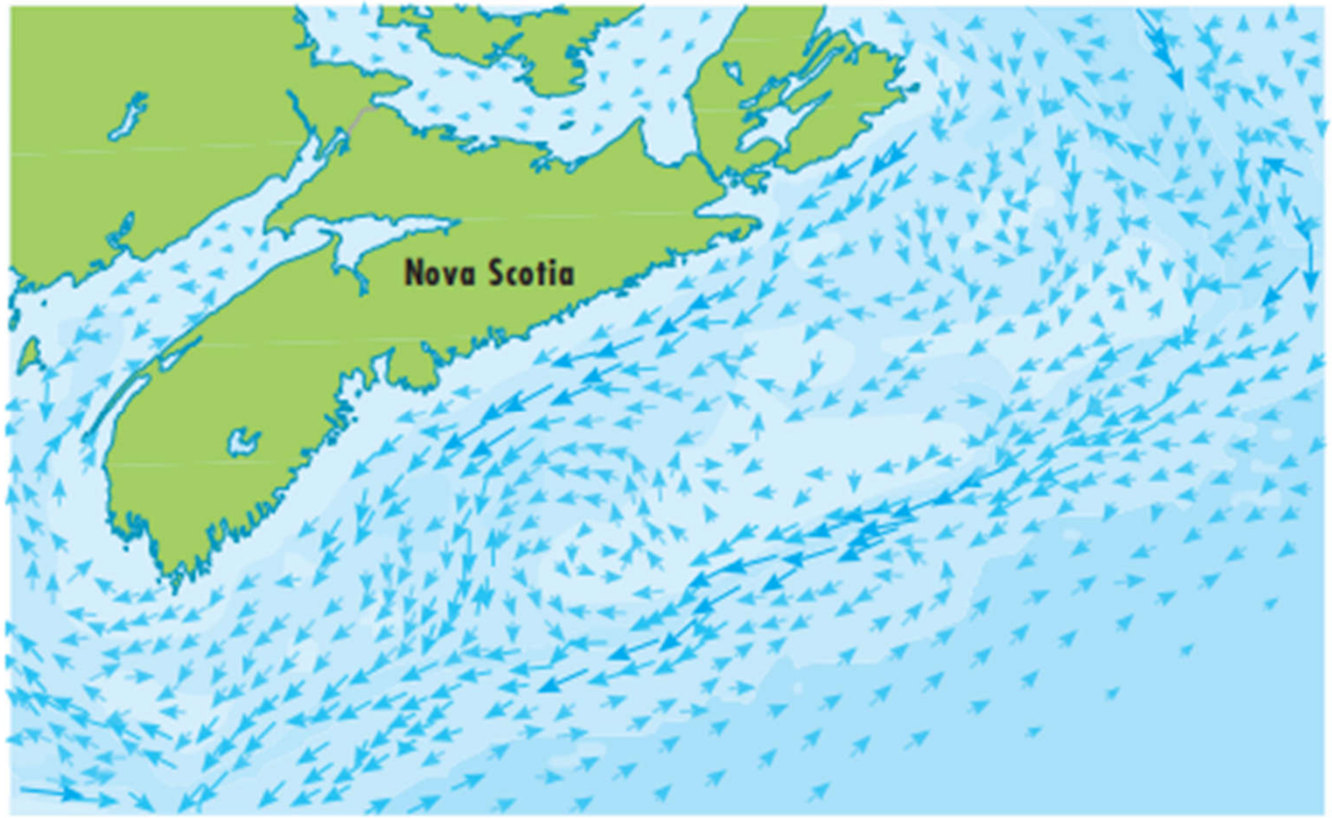
Trường véc-tơ vận tốc: mô hình gió ở vịnh San Fransisco



Tại mỗi một điểm trong không khí có thể hình dung ra một véc-tơ gió (độ lớn và hướng)

1. Trường véc-tơ

Dòng hải lưu ngoài khơi bờ biển Nova Scotia



- Trường véc-tơ là một hàm số có miền xác định là tập hợp các điểm trong $\mathbb{R}^2$ hoặc $\mathbb{R}^3$, miền giá trị là một tập các véc-tơ trong V_2 hoặc V_3.

1. Trường véc-tơ

❖ ***Định nghĩa 1***:

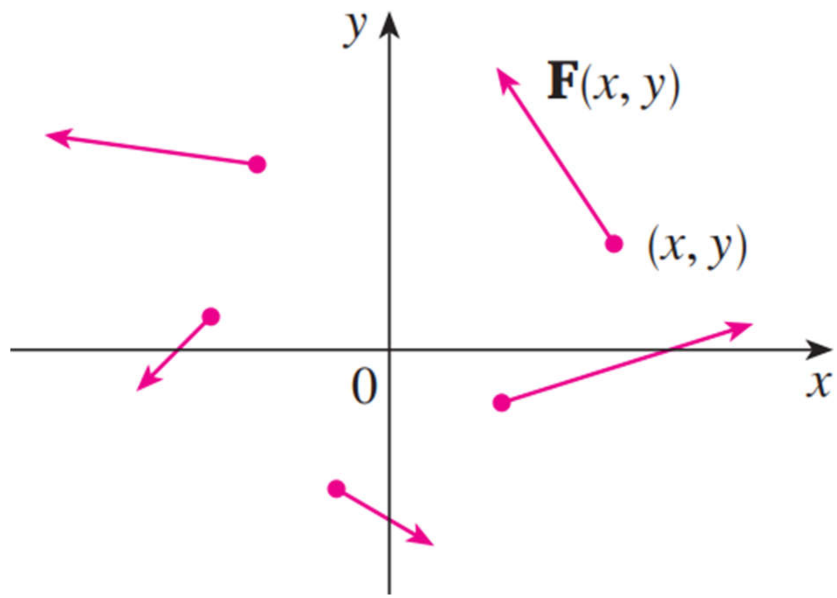
Cho tập $D \subset \mathbb{R}^2$. Trường véc-tơ trên $\mathbb{R}^2$ là một hàm **F** sao cho ứng với mỗi điểm $(x, y) \in D$ là một véc-tơ hai chiều $\boldsymbol{F}(x, y)$.

$$\boldsymbol{F}(x,y) = P(x,y).\mathbf{i} + \mathrm{Q}(\mathrm{x},\mathrm{y}).\mathbf{j} = \langle P(x,y), Q(x,y)\rangle$$

Hoặc $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j}$

Chú ý:

P, Q là các hàm vô hướng hai biến



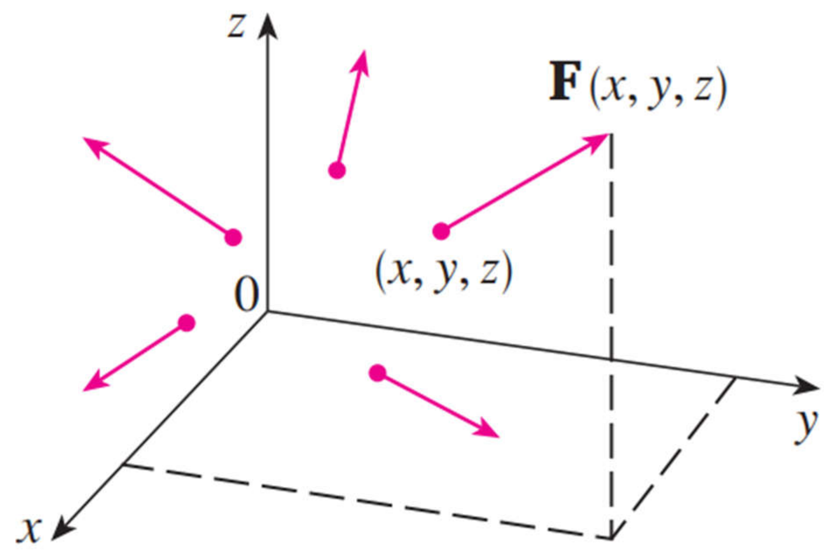
Trường véc-tơ trong $\mathbb{R}^2$

1. Trường véc-tơ

❖ ***Định nghĩa 2***:

Cho E là một tập con trong $\mathbb{R}^3$. Một trường véc-tơ trên không gian $\mathbb{R}^3$ là một hàm $\boldsymbol{F}$ sao cho tương ứng với mỗi điểm $(x, y, z) \in E$ là một véc-tơ ba chiều $\boldsymbol{F}(x, y, z)$.

$$\boldsymbol{F}(x, y) = P(x, y, z)\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\boldsymbol{k}$$



Trường véc-tơ trong $\mathbb{R}^3$.

1. Trường véc-tơ

❑ ***Ví dụ***. Một trường véc-tơ trong $\mathbb{R}^2$ được xác định bởi $\boldsymbol{F}(x, y) = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$. Vẽ một số véc-tơ $\boldsymbol{F}(x, y)$ để minh họa trường **F**.

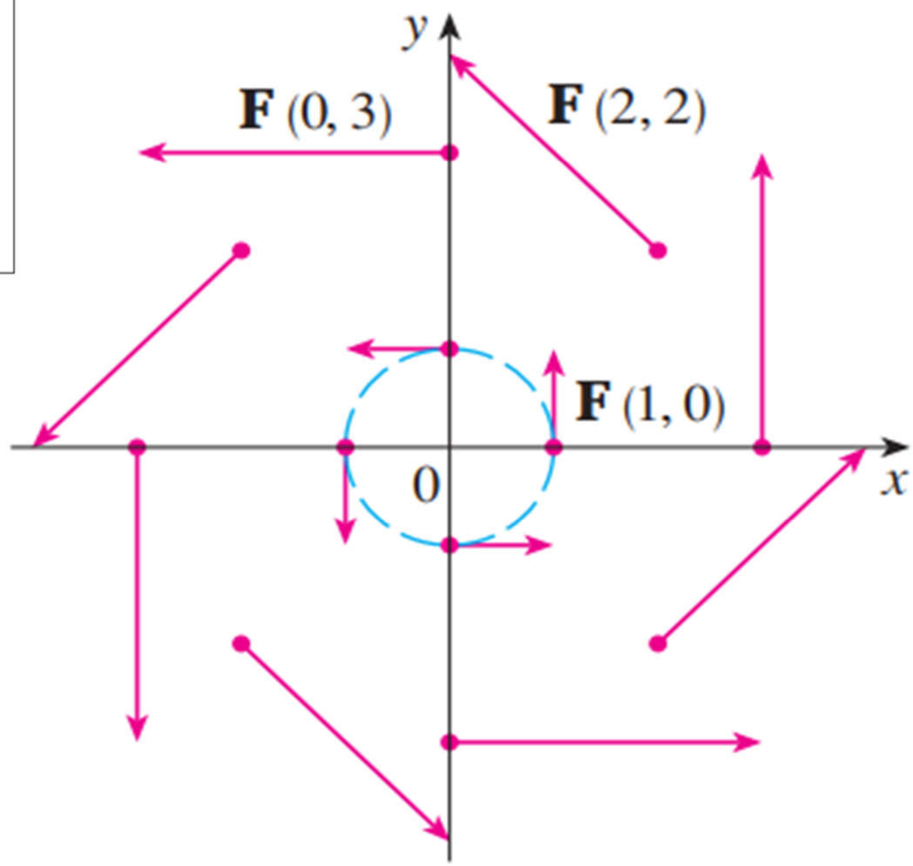
(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$	(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$
$(1, 0)$	$\langle 0, 1 \rangle$	$(-1, 0)$	$\langle 0, -1 \rangle$
$(2, 2)$	$\langle -2, 2 \rangle$	$(-2, -2)$	$\langle 2, -2 \rangle$
$(3, 0)$	$\langle 0, 3 \rangle$	$(-3, 0)$	$\langle 0, -3 \rangle$
$(0, 1)$	$\langle -1, 0 \rangle$	$(0, -1)$	$\langle 1, 0 \rangle$
$(-2, 2)$	$\langle -2, -2 \rangle$	$(2, -2)$	$\langle 2, 2 \rangle$
$(0, 3)$	$\langle -3, 0 \rangle$	$(0, -3)$	$\langle 3, 0 \rangle$

1. Trường véc-tơ

(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$	(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$
$(1, 0)$	$\langle 0, 1\rangle$	$(-1, 0)$	$\langle 0, -1\rangle$
$(2, 2)$	$\langle -2, 2\rangle$	$(-2, -2)$	$\langle 2, -2\rangle$
$(3, 0)$	$\langle 0, 3\rangle$	$(-3, 0)$	$\langle 0, -3\rangle$
$(0, 1)$	$\langle -1, 0\rangle$	$(0, -1)$	$\langle 1, 0\rangle$
$(-2, 2)$	$\langle -2, -2\rangle$	$(2, -2)$	$\langle 2, 2\rangle$
$(0, 3)$	$\langle -3, 0\rangle$	$(0, -3)$	$\langle 3, 0\rangle$

Trường véc-tơ

$\boldsymbol{F}(x, y) = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$.



1. Trường véc-tơ

Gọi $\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ là véc-tơ vị trí trong trường véc-tơ.

Khi đó:

$$\boldsymbol{x}.\boldsymbol{F} = (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}).(-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}) = -xy + xy = 0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{F}$$

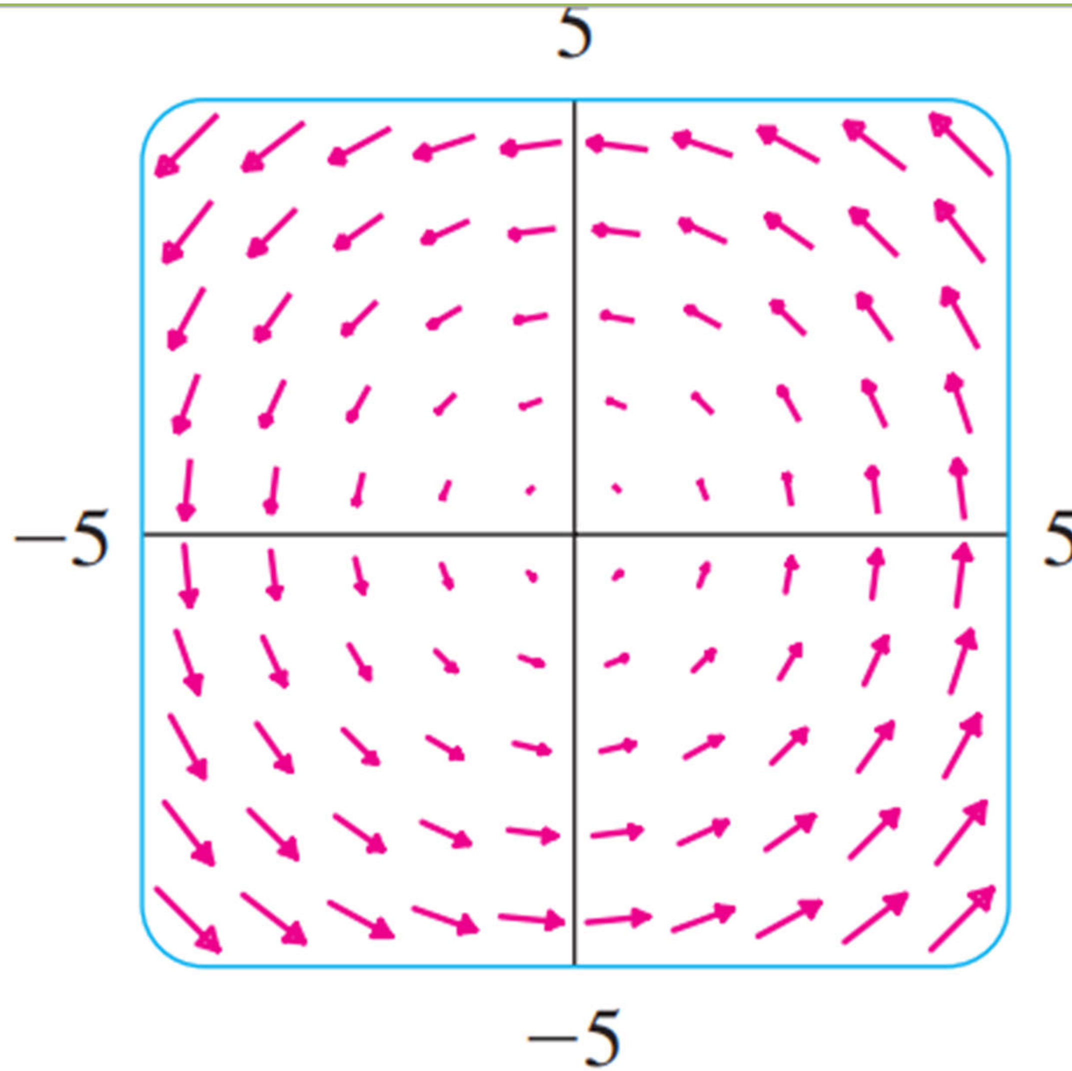
$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x^2 + y^2};\ |\boldsymbol{F}| = \sqrt{(-y)^2 + x^2} = |\boldsymbol{x}|$$

- *Nhận xét*:

➢ Mỗi véc-tơ đều tiếp xúc với một đường tròn có gốc ở tâm.

➢ Độ lớn của véc-tơ **F** bằng với bán kính đường tròn.

1. Trường véc-tơ



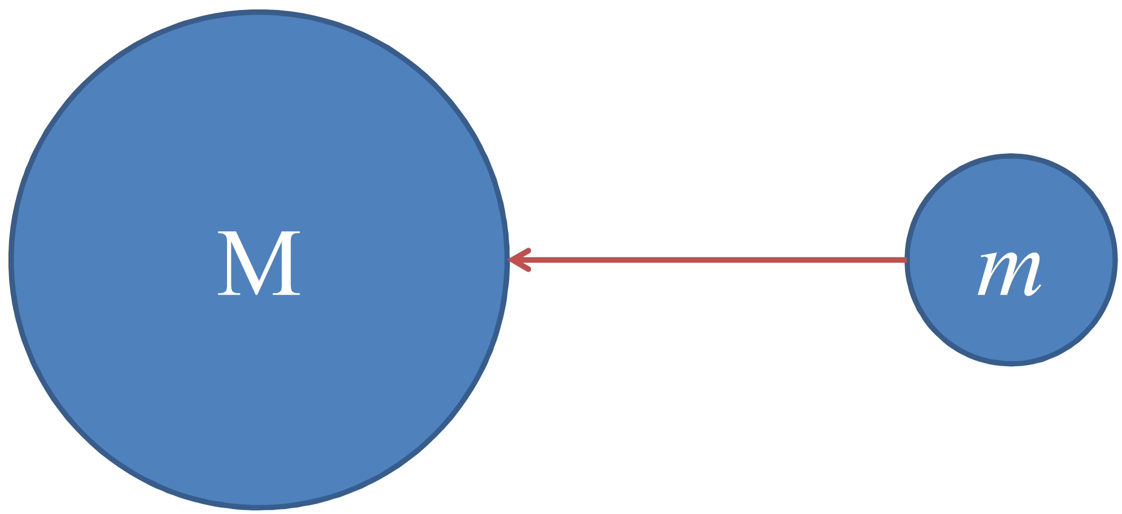
1. Trường véc-tơ

❑ ***Ví dụ***. Trường lực hấp dẫn

Theo định luật hấp dẫn của Newton, độ lớn lực hấp dẫn giữa hai vật có khối lượng m, M là:

$$|F| = \frac{mMG}{r^2}$$

G: hằng số hấp dẫn



1. Trường véc-tơ

Giả sử rằng đối tượng M được đặt ở gốc tọa độ trong $\mathbb{R}^3$ (M: trái đất).

Véc-tơ vị trí của vật m :

$$\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \Rightarrow r = |\boldsymbol{x}|, r^2 = |\boldsymbol{x}|^2$$

Lực hấp dẫn tác dụng lên vật thứ 2 này hướng về gốc tọa độ, có véc-tơ đơn vị là:

$$-\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}$$

Khi đó, lực hấp dẫn tác động lên vật m tại vị trí $\boldsymbol{x}$ là:

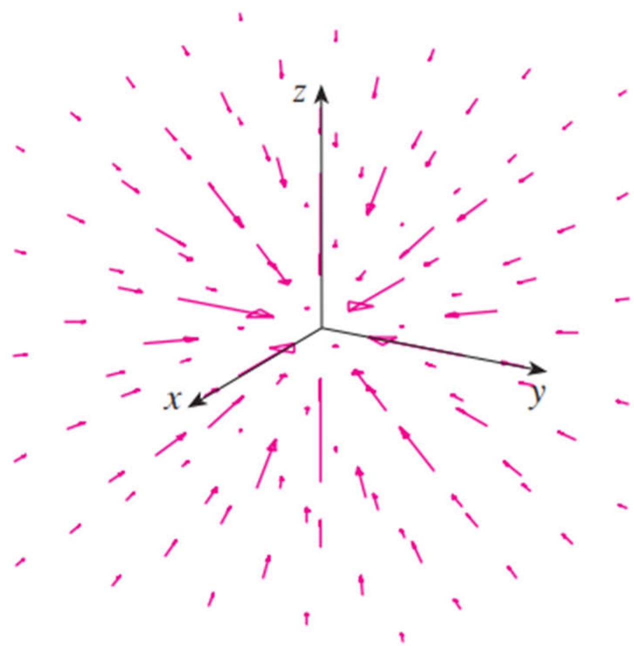
$$\boldsymbol{F} = -\frac{mMG}{|\boldsymbol{x}\,|^3}\boldsymbol{x} \;\wedge\; \boldsymbol{F} = -\frac{mMG}{|\mathrm{r}\,|^3}\boldsymbol{r}, G = 6.67 \times 10^{-11}\ (SI)$$

1. Trường véc-tơ

- **F**: trường lực hấp dẫn

$$\mathbf{F} = \frac{-mMGx}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\mathbf{i} + \frac{-mMGy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\mathbf{j} + \frac{-mMGz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\mathbf{k}$$

Trường lực hấp dẫn



1. Trường véc-tơ

❖ ***Trường Gradient***

Nếu $f(x,y)$ là một hàm vô hướng hai biến, gradient của hàm f, kí hiệu ∇f được định nghĩa bằng:

$$\nabla f = f'_x\,\mathbf{i} + f_y'\boldsymbol{j}$$

Do đó, ∇f là một trường véc-tơ trong $\mathbb{R}^2$- trường véc-tơ gradient.

Tương tự, đối với hàm vô hướng ba biến

$$\nabla f(x,y,z) = f'_x(x,y,z)\mathbf{i} + f_y'\boldsymbol{j} + f'_z(x,y,z)\mathbf{k}$$

2. Tích phân đường loại I

- Cho hàm số $f(P) = f(x, y)$ xác định trên một cung phẳng $\overset{\frown}{AB}$.

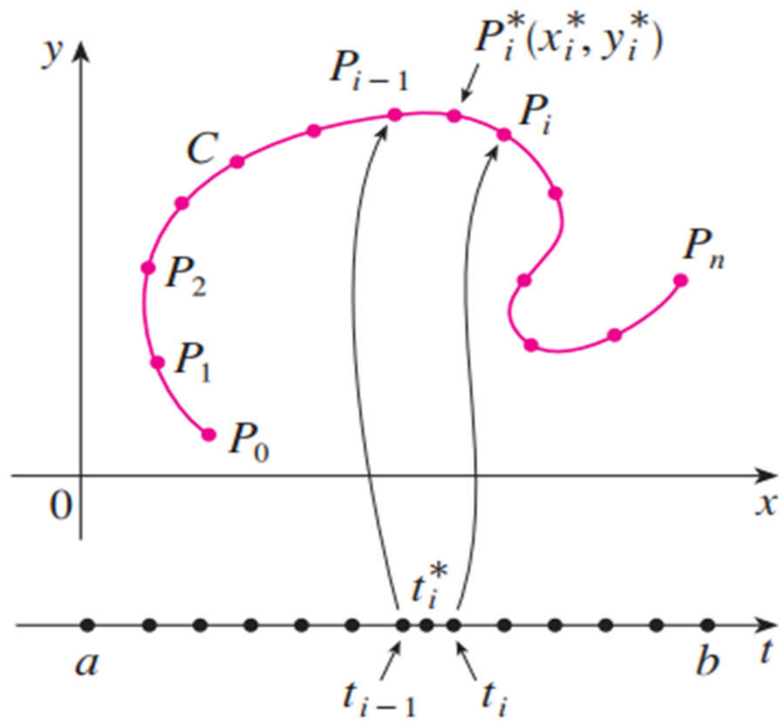
Chia cung AB thành n cung nhỏ bởi các điểm $P_0 = A, P_1$, $P_2, \ldots, P_n =$ B

Gọi độ dài cung $\overset{\frown}{P_{i-1}P_i} = \Delta s_i$

$P_i^*(x_i^*, y_i^*) \in \overset{\frown}{P_{i-1}P_i}$

Lập tổng:

$\sum_{i=1}^{n} f(P_i^*)\Delta s_i$



2. Tích phân đường loại I

Nếu:

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i \to L\ (xác\ định), \qquad n \to \infty: max\Delta s_i \to 0$$

- L: tích phân đường loại I của hàm số $f(x, y)$ dọc theo $\overset{\frown}{AB}$.

❖ ***Định nghĩa:***

Nếu $f(x, y)$ xác định trên một đường cong trơn C, thì tích phân đường loại I của f dọc theo C là:

$$\int_C f(x, y)ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(P_i^*)\Delta s_i$$

2. Tích phân đường loại I

- Tích phân tồn tại: *f(x,y)* khả tích trên $\overset{\frown}{AB}$

❑ *Chú ý*:

- Nếu $\overset{\frown}{AB}$ trơn, $f(x,y)$ liên tục trên $\overset{\frown}{AB}$ thì $f(x,y)$ khả tích trên $\overset{\frown}{AB}$
- Trong TP đường loại I, không chú ý đến chiều trên $\overset{\frown}{AB}$.
- Tp đường loại I có tích chất giống tích phân xác định

2. Tích phân đường loại I

- Cung $\overset{\frown}{AB}$: trơn từng khúc nếu nó gồm một số hữu hạn cung trơn.
- Nếu $\overset{\frown}{AB}$ trơn tùng khúc, $f(x, y)$ liên tục trên $\overset{\frown}{AB}$ thì $f(x, y)$ khả tích trên $\overset{\frown}{AB}$.

❖ Chiều dài cung $\overset{\frown}{AB}$: $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} ds$

❖ Cung vật chất $\overset{\frown}{AB}$ có khối lượng riêng tại $M(x, y)$ là $\rho(x, y)$, khối lượng cung:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \rho(x, y) ds$$

2. Tích phân đường loại I

❖ ***Cách tính***

❑ *TH1*. Cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn, cho bởi pt: $y = y(x), a \leq x \leq b$

- Giả sử $f(x, y)$ liên tục trên $\overset{\frown}{AB}$
- Kí hiệu: $A_i(x_i, y_i)$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \Delta y_i = y_i - y_{i-1}$
- Khi Δx_i nhỏ rất nhỏ:

$$\Delta s_i \approx \sqrt{\Delta x_i{}^2 + \Delta y_i{}^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,.\Delta x_i = \sqrt{1 + y'_i{}^2(\xi_i)}.\Delta x_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, y(\xi_i))\sqrt{1 + y_i'^2(\xi_i)}\Delta x_i$$

2. Tích phân đường loại I

- Vậy:

$$\Rightarrow \int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)\,dx = \int_a^b f\big(x, y(x)\big)\sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx$$

- ***Ví dụ***. Tính tích phân sau với L là đoạn thẳng nối O(0,0) với A(1,2)

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$$

2. Tích phân đường loại I

- ***Hướng dẫn***

  Phương trình đường thẳng qua O, A: $y = 2x$

$$ds = \sqrt{1+2^2}\,dx = \sqrt{5}\,dx$$

Suy ra:

$$I = \int_L \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}} = \int_0^1 \frac{\sqrt{5}\,dx}{\sqrt{x^2+4x^2+4}}$$

$$I = \sqrt{5}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{5x^2+4}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4/5}} = \ln\frac{\sqrt{5}+3}{2}$$

2. Tích phân đường loại I

❑ *TH2*. Cung $\overset{\frown}{AB}$ được cho bởi phương trình tham số

$$x = x(t), y = y(t), t_1 \le t \le t_2$$

Thay: $y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$

Ta được:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)\,ds = \int_{t_1}^{t_2} f\big(x(t), y(t)\big)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt$$

2. Tích phân đường loại I

- ***Ví dụ***. Tính tích phân sau với L là đường tròn $x^2 + y^2 = 4x$

$$I = \int_L \sqrt{x^2 + y^2}\, ds$$

- ***Hướng dẫn:***
- Phương trình đường tròn:

$$x^2 + y^2 = 4x \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4$$

Tham số hóa đường cong:

$$x = 2 + 2\cos t, \quad y = 2\sin t, -\pi \le t \le \pi$$

Suy ra: $x' = -2\sin t, \ y' = 2\cos t$

2. Tích phân đường loại I

- Do đó: $x'^2 + y'^2 = 4$

$$x^2 + y^2 = 8(1+\cos t) = 16\cos^2\frac{t}{2}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 4\cos\frac{t}{2},\ -\frac{\pi}{2} \le \frac{t}{2} \le \frac{\pi}{2}$$

- Vậy:

$$I = 8\int_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{t}{2}dt = 16\int_{0}^{\pi}\cos\frac{t}{2}dt = 32$$

2. Tích phân đường loại I

❑ *TH3*. Đường lấy tích phân là một đường trong không gian

Cung $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình tham số:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), t_1 \le t \le t_2$$

Thì:

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt$$

Ta có công thức:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y,z)\,ds = \int_{t_1}^{t_2} f\left(x(t), y(t), z(t)\right)\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt$$

2. Tích phân đường loại I

- ***Ví dụ***: Tính $\int_C \ ysinz\, ds$, C là đường cong cho bởi các phương trình: $x = \cos t\,, y = \sin t\,, z = t, 0 \le t \le 2\pi$.

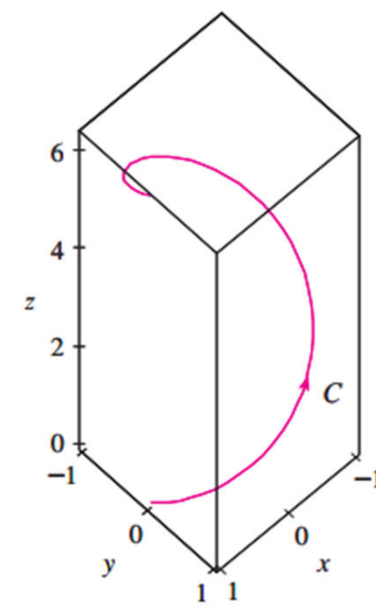
Ta có:

$$ds = \sqrt{\left(x_t^{'}\right)^2 + \left(y_t^{'}\right)^2 + \left(z_t^{'}\right)^2}\, dt = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1}\, dt = \sqrt{2}\, dt$$

Suy ra: $\displaystyle\int_C y \sin z ds = \int_0^{2\pi} \sin t . \sin t \sqrt{2} dt$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos 2t\right) dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[t - \frac{1}{2} \sin 2t \right] \Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= \sqrt{2}\pi$$



1. Tích phân đường loại I

- *Trọng tâm của cung đường*

- Nếu $\overset{\frown}{AB}$ có khối lượng riêng tại $M(x,y)$ là $\rho(x,y)$, thì tọa độ của trọng tâm G của $\overset{\frown}{AB}$:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int_{\overset{\frown}{AB}} x\rho(M)\,ds \\ y_G = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int_{\overset{\frown}{AB}} y\rho(M)\,ds, \qquad m = \displaystyle\int_{\overset{\frown}{AB}} \rho(M)\,ds \\ z_G = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int_{\overset{\frown}{AB}} z\rho(M)\,ds \end{cases}$$

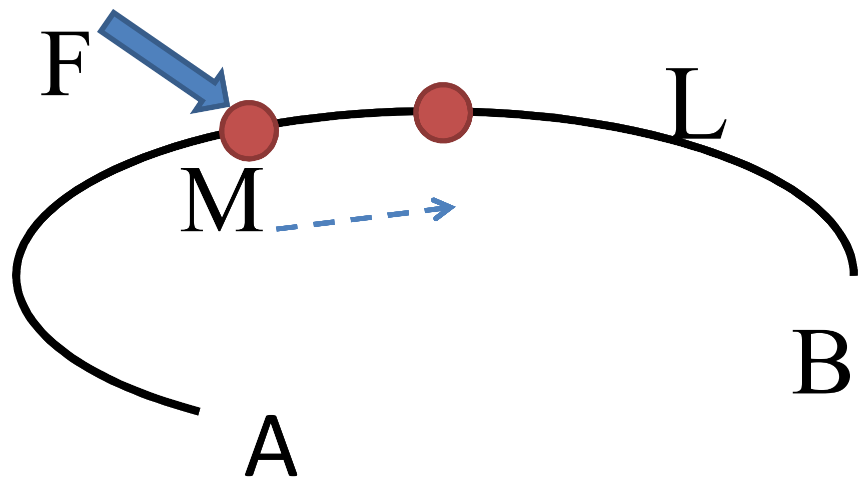
Khối lượng của cung $\overset{\frown}{AB}$

Tích phân đường loại 2

2.1. Công của lực biến đổi

- *Bài toán*: Một chất điểm M di chuyển theo một cung phẳng L: $A \to B$, dưới tác động của lực $\vec{F} = \vec{F}\,(M)$ biến thiên liên tục dọc theo $\widehat{AB}$.

  Tính công của lực đó?



Tích phân đường loại 2

- Chia $\overset{\frown}{AB}$ thành n cung nhỏ bởi các điểm $A_0 = A, A_1$, $A_2, \ldots, A_n = B$
- Gọi Δx_i, Δy_i là các thành phần của $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$
- Nếu cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ nhỏ: coi như $\vec{F} = \vec{F}(M_i) = const$, với $M_i(\xi_i, \eta_i) \in \overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$
- Công của lực F làm M: $A_{i-1} \to A_i$

$$\Delta W_i = \overrightarrow{F}\left(M_i\right).\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$$

- Nếu lực $\vec{F} = \vec{F}(P(M), Q(M))$

$$\Delta W_i = P\left(\xi_i, \eta_i\right).\Delta x_i + Q\left(\xi_i, \eta_i\right).\Delta y_i$$

Tích phân đường loại 2

- Nếu mọi cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ đều nhỏ:

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} \left[P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i \right]$$

➢ *Nhận xét:*

- Nếu n càng lớn, các cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ càng nhỏ thì độ chính xác của phép tính càng cao

Tích phân đường loại 2

❖ ***Định nghĩa tích phân đường loại II.***

- Cho 2 hàm số $P(x,y), Q(x,y)$ xác định trên cung $\overset{\frown}{AB}$.
- Chia $\overset{\frown}{AB}$ thành n cung nhỏ bởi các điểm $A_0 = A, A_1,$ $A_2, \ldots, A_n = \mathrm{B}$
- Gọi $\Delta x_i, \Delta y_i$ là hình chiếu của $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ lên 2 trục *Ox, Oy.*
- $M_i(\xi_i, \eta_i) \in \overset{\frown}{A_{i-1}A_i}, n \to \infty: \Delta x_i, \Delta y_i \to 0$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i\right] \to L,\ n \to \infty$$

L: tích phân đường loại II của $P(x,y), Q(x,y)$ dọc cung $\overset{\frown}{AB}$

Tích phân đường loại 2

- *Kí hiệu:*

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \left[P(x,y)dx + Q(x,y)dy \right]$$

➢ *Chú ý:*

- Nếu $\overset{\frown}{AB}$ trơn, $P(x,y), Q(x,y)$ liên tục trên $\overset{\frown}{AB}$ thì tích phân đường loại II tồn tại.
- Nếu đổi chiều đường lấy tích phân thì tích phân đổi dấu:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \left[P(x,y)dx + Q(x,y)dy \right] = -\int_{\overset{\frown}{BA}} \left[P(x,y)dx + Q(x,y)dy \right]$$

Tích phân đường loại 2

- *Quy ước*: Chiều dương trên L (kín) là chiều sao cho đi dọc L theo chiều ấy sẽ thấy miền giới hạn bởi L ở bên trái
- Kí hiệu:

$$\oint_L P dx + Q dy$$

- Tích phân đường loại II có các tính chất như tích phân xác định.

Tích phân đường loại 2

❖ ***Cách tính:***

❑ *TH1*: Giả sử $\overset{\frown}{AB}$ trơn, được cho bởi phương trình $y = y(x), x_A = a, x_B = b$

- Khi đó:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \left[P(x,y)dx + Q(x,y)dy \right]$$

$$= \int_a^b \left[P\left(x, y(x)\right) + Q\left(x, y(x)\right) y'\left(x\right) \right] dx$$

Tích phân đường loại 2

- *TH2*: Giả sử $\overset{\frown}{AB}$ trơn, được cho bởi phương trình tham số:

$$x = x(t), y = y(t)$$

Khi đó:

$$\Delta x_i = x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\tau_i)\Delta t_i,\ t_{i-1} \le \tau_i \le t_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} P(M_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} P\left(x(\tau_i), y(\tau_i)\right)x'(\tau_i)\Delta t_i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \displaystyle\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx = \int_{t_A}^{t_B} P\left[x(t), y(t)\right]x'(t)dt \\ \displaystyle\int_{\overset{\frown}{AB}} Q(x,y)dy = \int_{t_A}^{t_B} Q\left[x(t), y(t)\right]y'(t)dt \end{cases}$$

Tích phân đường loại 2

- Vậy: $$\int_{\overset{\frown}{AB}} \left[P(x,y)dx + Q(x,y)dy \right]$$

$$= \int_{t_A}^{t_B} \left[P\big(x(t),y(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t),y(t)\big)y'(t) \right] dt$$

❑ *TH 3*: Nếu $\overset{\frown}{AB}$ là một cung trong không gian, được cho bởi phương trình tham số:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \left[P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dx \right]$$

$$= \int_{t_A}^{t_B} \left[P(x,y,z)x'(t) + Q(x,y,z)y'(t) + R(x,y,z)z'(t) \right] dt$$

Tích phân đường loại 2

- ***Ví dụ.*** Tính:

$$I = \oint_L xdy - ydx, \qquad L: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

- ***Hướng dẫn:***

Phương trình tham số của L: $x = 2cost, y = 3sint, 0 \leq t \leq 2\pi$, chiều tăng của t ứng với chiều dương của L.

Ta có: $dx = -2sintdt, dy = 3costdt$

$$I = \int_0^{2\pi} \left[2\cos t.3\cos t - 3\sin t\left(-2\sin t\right)\right] dt$$

$$I = 6\int_0^{2\pi} dt = 12\pi$$

Tích phân đường loại 2

- ***Ví dụ***. Tính:

$$\int_L (x-y)\,dx + (x+y)\,dy$$

L là đường nối điểm (0,0) với điểm (1,1) nếu L là:

a) Đường $y = x$;

b) Đường $y = x^2$.

- ***Hướng dẫn:***

a) Đường $y = x \Rightarrow dy = dx$

$$I = \int_0^1 2dx = 1$$

Tích phân đường loại 2

- ***Ví dụ***. Tính:

$$I = \int_L \left(2xy - x^2\right)dx + \left(x + y^2\right)dy$$

L là cung của Parabol $y^2 = 1 - x$ từ điểm $A(0,-1) \to B(0,1)$

- ***Hướng dẫn:***

Trên đường L: $x = 1 - y^2$, suy ra:$dx = -2ydy$

$$I = \int_{-1}^{1} \left(2y^5 + 4y^4 - 4y^3 - 4y^2 + 2y + 1\right)dy \qquad I = \frac{14}{15}$$

Tích phân đường loại 2

❖ *Nhắc lại*:

- Tập E: liên thông nếu mỗi cặp điểm $M_1 M_2 \in D$ đều được nối với nhau bởi 1 đường cong liên tục nào đó trong E
- Tập E: đơn liên nếu nó bị giới hạn bởi 1 mặt kín (đường cong kín trong R^2; 1 mặt kín trong R^3).
- Tập E: đa liên nếu nó bị giới hạn từ 2 mặt kín trở lên rời nhau từng đôi một

Tích phân đường loại 2

❖ ***Công thức Green***

- D là một miền liên thông, bị chặn có biên L (1 hay nhiều đường kín trơn từng khúc, rời nhau từng đôi 1).
- Nếu $P(x,y), Q(x,y)$ và các đạo hàm riêng cấp 1 của chúng liên tục trong D thì:

$$\boxed{\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy}$$

- Mối liên hệ giữa tích phân kép trong D và tích phân đường loại II dọc theo L.

Tích phân đường loại 2

- ***Ví dụ***. Tính tích phân sau với L: $x^2 + y^2 = 2y$

$$\oint_L \left(x\arctan x + y^2\right)dx + \left(x + 2xy + y^2e^{-y}\right)dy$$

- ***Hướng dẫn***:

  Tính tích phân đường loại II, L: đường cong kín

  Ta có: $\begin{cases} P = x\arctan x + y^2 \\ Q = x + 2xy + y^2e^{-y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = 2y; \ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2y + 1 \end{cases}$

  Áp dụng công thức Green:

Tích phân đường loại 2

$$I = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint\limits_D dxdy = S$$

- S là diện tích của miền D.
- D: miền tròn có bán kính bằng 1, suy ra $I = S = \pi$.

❑ *Hệ quả:* Nếu đường kín L là biên của miền D thì:

$$S_D = \frac{1}{2} \oint\limits_L xdy - ydx$$

Tích phân đường loại 2

- ***Định lý***. Giả sử $P(x,y), Q(x,y)$ và các đạo hàm riêng cấp 1 của chúng liên tục trong miền đơn liên D thì:

1) $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}, \forall x, y \in D$

2) $\oint\limits_L Pdx + Qdy = 0, \quad \forall L \subset D$

3) $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy, \quad \overset{\frown}{AB} \subset D$ Không phụ thuộc đường đi từ A-B

4) $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của một hàm số $u(x,y) \subset D$.

Tích phân đường loại 2

❑ *Hệ quả*:

- Nếu $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của hàm số $u(x, y)$ thì:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = u(B) - u(A)$$

dọc theo mọi đường $\overset{\frown}{AB} \subset D$.

- Nếu D là toàn bộ R^2 thì $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của hàm số $u(x, y)$ cho bởi công thức:

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + C$$

Hoặc: $$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + C$$