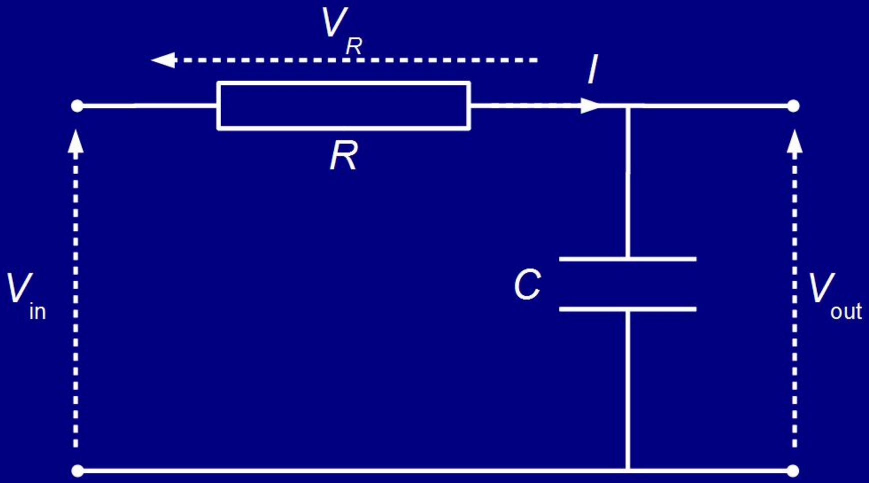
CHƯƠNG II
Biểu Diễn Hệ Thống TTBB trong Miền Thời Gian
Bài 1: Biểu diễn hệ thống liên tục theo thời gian

Lê Vũ Hà

Trường Đại học Công nghệ - ĐHQGHN

2014

- Mô hình phương trình vi phân là loại mô hình toán học phổ biến nhất cho việc mô tả các hệ thống động trong nhiều lĩnh vực.
- Đối với các hệ thống vật lý, các mô hình phương trình vi phân của chúng dựa vào phương trình của các định luật vật lý mô tả hoạt động của các thành phần của hệ thống.
- Hệ thống tuyến tính bất biến liên tục theo thời gian mô tả được bằng các phương trình vi phân tuyến tính với các hệ số là hằng số.



$$C\frac{dV_{out}}{dt} + \frac{V_{out}}{R} = \frac{V_{in}}{R}$$

- Dạng tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng biểu diễn hệ thống TTBB liên tục theo thời gian:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{M} b_j \frac{d^j x(t)}{dt^j}$$

  trong đó, $x(t)$ là tín hiệu vào và $y(t)$ là tín hiệu ra của hệ thống.
- Bằng việc giải phương trình vi phân, tín hiệu ra $y(t)$ được xác định khi biết tín hiệu vào $x(t)$.

- *Đáp ứng đầy đủ* của một hệ thống TTBB có dạng như sau:

$$y(t) = y_0(t) + y_s(t)$$

$y_0(t)$: *đáp ứng với điều kiện đầu* hay *đáp ứng tự nhiên*, là một nghiệm của *phương trình thuần nhất* sau đây:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = 0 \qquad (1)$$

$y_s(t)$: *đáp ứng với tín hiệu vào* hay *đáp ứng bắt buộc*, bao gồm một thành phần là *nghiệm thuần nhất* và một thành phần là *nghiệm riêng* của phương trình với tín hiệu vào $x(t)$.

- $y_0(t)$ là đáp ứng của hệ thống với các điều kiện tại thời điểm khởi đầu ($t = 0$), không tính tới tín hiệu vào $x(t)$.
- Phương trình (1) có một nghiệm dưới dạng e^{st} trong đó s là một biến phức, thay vào $y(t)$ trong phương trình thu được:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i s^i e^{st} = 0$$

$\rightarrow$ s là nghiệm của phương trình đại số bậc N sau đây:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i s^i = 0 \qquad (2)$$

- Phương trình (2) được gọi là *phương trình đặc trưng* của hệ thống.
- Gọi các nghiệm của phương trình (2) là $\{s_k | k = 1..N\}$, nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (1) sẽ có dạng sau đây nếu tất cả $\{s_k\}$ đều là nghiệm đơn:

$$\sum_{k=1}^{N} c_k e^{s_k t}$$

- Trong trường hợp phương trình (2) có nghiệm bội, dạng tổng quát của nghiệm thuần nhất sẽ là:

$$\sum_k \left(c_k e^{s_k t} \sum_{i=0}^{p_k - 1} t^i \right)$$

  trong đó mỗi s_k là nghiệm bội bậc p_k của phương trình đặc trưng.
- Các hệ số của nghiệm thuần nhất tương ứng với đáp ứng với điều kiện đầu $y_0(t)$ được xác định từ các điều kiện đầu của hệ thống.

- $y_s(t)$ là đáp ứng của hệ thống với tín hiệu vào $x(t)$ khi tất cả các điều kiện đầu đều bằng không.
- $y_s(t)$ có hai thành phần: thành phần nghiệm thuần nhất và thành phần nghiệm riêng của phương trình với tín hiệu vào $x(t)$.
    - Thành phần nghiệm thuần nhất của $y_s(t)$ có dạng của nghiệm thuần nhất tổng quát đã xác định trước đó, với các hệ số chưa biết và sẽ được xác định sau.
    - Thành phần nghiệm riêng của $y_s(t)$ thường có dạng tương tự dạng của tín hiệu vào $x(t)$ với các hệ số chưa biết và sẽ được xác định sau.

- Chú ý khi dự đoán dạng của $y_s(t)$: thành phần nghiệm riêng phải độc lập với tất cả các số hạng của thành phần nghiệm thuần nhất.
  Ví dụ, nếu $x(t) = e^{\alpha t}$, chúng ta cần xem xét các trường hợp sau:
  - Nếu $e^{\alpha t}$ không phải là một phần của nghiệm thuần nhất, thành phần nghiệm riêng có dạng $ce^{\alpha t}$.
  - Nếu α là một nghiệm đơn của phương trình đặc trưng (2) $\rightarrow e^{\alpha t}$ là một phần của nghiệm thuần nhất $\rightarrow$ thành phần nghiệm riêng có dạng $cte^{\alpha t}$.
  - Nếu α là một nghiệm bội bậc p của phương trình đặc trưng (2) $\rightarrow e^{\alpha t}$, $te^{\alpha t}$,...,$t^{p-1}e^{\alpha t}$ đều là các phần của nghiệm thuần nhất $\rightarrow$ thành phần nghiệm riêng có dạng $ct^pe^{\alpha t}$.

- Tích chập của hai tín hiệu $f(t)$ và $g(t)$, ký hiệu $f(t) * g(t)$, được định nghĩa như sau:

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

- Hoán vị:

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$$

- Kết hợp:

$$[f(t) * g(t)] * h(t) = f(t) * [g(t) * h(t)]$$

- Phân phối:

$$[f(t) + g(t)] * h(t) = f(t) * h(t) + g(t) * h(t)$$

- Dịch thời gian: nếu $x(t) = f(t) * g(t)$, thì

$$x(t - t_0) = f(t - t_0) * g(t) = f(t) * g(t - t_0)$$

- Tích chập của một tín hiệu với tín hiệu xung đơn vị:

$$f(t) * \delta(t) = f(t)$$

- Tính nhân quả: nếu $f(t)$ và $g(t)$ đều là tín hiệu nhân quả thì $f(t) * g(t)$ cũng nhân quả.

- Xét hệ thống TTBB $y(t) = \mathbf{T}[x(t)]$, chúng ta có:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathbf{T}[x(t) * \delta(t)] = \mathbf{T}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\mathbf{T}[\delta(t-\tau)]d\tau = x(t) * h(t) \end{aligned}$$

  trong đó, $h(t) = \mathbf{T}[\delta(t)]$ được gọi là đáp ứng xung của hệ thống được mô tả bởi hàm biến đổi **T**.
- Hệ thống TTBB xác định khi đáp ứng xung của hệ thống xác định.

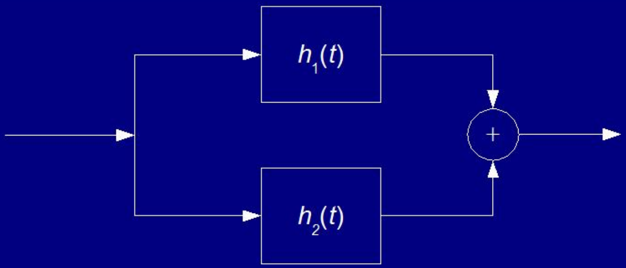
- Hệ thống không có bộ nhớ: đáp ứng xung chỉ khác không tại $t = 0$.
- Hệ thống nhân quả: đáp ứng xung là tín hiệu nhân quả.
- Hệ thống ổn định: khi và chỉ khi điều kiện sau đây được thỏa mãn

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

- Sơ đồ nối tiếp:

Đáp ứng xung tổng hợp $h(t) = h_1(t) * h_2(t)$

- Sơ đồ song song:



Đáp ứng xung tổng hợp $h(t) = h_1(t) + h_2(t)$

- Trạng thái của hệ thống mô tả được bằng một tập các biến trạng thái.
- Mô hình biến trạng thái của hệ thống TTBB là một tập các phương trình vi phân của các biến trạng thái, qua đó trạng thái tiếp theo của hệ thống sẽ được xác định khi trạng thái hiện tại và tín hiệu vào xác định $\rightarrow$ hệ thống hoàn toàn xác định nếu biết tín hiệu vào và trạng thái đầu của hệ thống.
- Mô hình biến trạng thái rất thuận tiện cho việc biểu diễn các hệ thống đa biến.

- Gọi $\{u_1(t), u_2(t)...\}$ là các tín hiệu vào, $\{y_1(t), y_2(t)...\}$ là các tín hiệu ra, và $\{q_1(t), q_2(t)...\}$ là các biến trạng thái của hệ thống TTBB.
- Phương trình trạng thái của hệ thống là các phương trình vi phân tuyến tính bậc nhất:

$$\frac{dq_i(t)}{dt} = \sum_j a_{ij} q_j(t) + \sum_k b_{ik} u_k(t) \ (i = 1, 2, ...)$$

- Tín hiệu ra được tính từ các biến trạng thái và các tín hiệu vào như sau:

$$y_i(t) = \sum_j c_{ij} q_j(t) + \sum_k d_{ik} u_k(t) \ (i = 1, 2, ...)$$

- Mô hình biến trạng thái của một hệ thống TTBB thường được biểu diễn dưới dạng phương trình ma trận như sau:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{q}(t)}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{q}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{q}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned}$$

trong đó, $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{y}(t)$ và $\mathbf{q}(t)$ là các vector cột với các thành phần lần lượt là các tín hiệu vào, các tín hiệu ra, và các biến trạng thái của hệ thống; **A**, **B**, **C** và **D** là các ma trận hệ số.

- Phương trình trạng thái có thể thiết lập được từ phương trình vi phân sau đây của hệ thống TTBB:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{M} b_j \frac{d^j x(t)}{dt^j}$$

- Ký hiệu $u_j(t) = d^j x(t)/dt^j$ $(j = 0..M)$ là các tín hiệu vào của hệ thống và viết lại phương trình trên dưới dạng sau đây:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{M} b_j u_j(t)$$

- Chọn các biến trạng thái như sau:

$$q_1(t) = y(t), q_2(t) = \frac{dy(t)}{dt}, \dots, q_N(t) = \frac{d^{N-1}y(t)}{dt^{N-1}}$$

- Chúng ta thu được các phương trình trạng thái sau đây:

$$\begin{aligned}
\frac{dq_1(t)}{dt} &= q_2(t), \frac{dq_2(t)}{dt} = q_3(t), \dots \\
\frac{dq_{N-1}(t)}{dt} &= q_N(t) \\
\frac{dq_N(t)}{dt} &= \frac{1}{a_N}\left[-\sum_{0}^{N-1} a_i q_{i+1}(t) + \sum_{j=0}^{M} b_j u_j(t)\right]
\end{aligned}$$