ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ

ĐỀ THI HẾT MÔN
HỌC KỲ II - NĂM HỌC 2017 - 2018

<u>Đề thi số: 1</u>

Bài thi môn: Giải Tích II

Số tín chỉ: 5

Lớp: MAT1095

Thời gian làm bài: 120 phút

<u>Câu 1</u> (2.0 đ). Tìm cực trị hàm số: $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y\ ;\ x > 1.$

<u>Câu 2</u> (2.0 đ). Tính tích phân hai lớp: $\iint\limits_D x^2 dxdy$, D là miền phẳng được giới hạn bởi các đường: $y = x^2, x = y^2$.

<u>Câu 3</u> (2.0 đ). Tính tích phân: $I = \oint\limits_C \left(xy + x + y + \sin^3 x\right)dx + \left(xy + x - y + 2^y\right)dy$, với C là đường tròn: $x^2 + y^2 = 2x + 2y$, chiều C ngược chiều kim đồng hồ.

<u>Câu 4</u> (2.0 đ). Tính diện tích mặt cầu bán kính R.

<u>Câu 5</u> (2.0 đ). Giải phương trình vi phân: $y'' - y = 2x + 1 - xe^x$.

---------- **Hết** ----------

Sinh viên không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên sinh viên:……..……………………..; Số báo danh:……………………………….

Đáp án - Đề số 1

Câu 1 (2.0 đ):

(0.5) Tìm điểm dừng: $\begin{cases} z'_x = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ z'_y = 6xy - 12 = 0 \end{cases}$.

(0.5) Các điểm dừng: $P(2,1)$.

(0.5) $z''_{xx} = z''_{yy} = 6x, z''_{xy} = 6y; \Delta = 36(x^2 - y^2)$.

(0.5) Khảo sát cực trị tại các điểm dừng: P là cực tiểu, $z_{ct} = -28$.

Câu 2 (2.0 đ):

(1.0) Vẽ hình. $D = \left\{0 \le x \le 1, x^2 \le y \le \sqrt{x}\right\}$.

(1.0) Do đó, $\iint\limits_D x^2 dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} x^2 dy = \int\limits_0^1 \left(x^{5/2} - x^4\right) dx = \left[\frac{2}{7} x^{7/2} - \frac{1}{5} x^5\right]_0^1 = \frac{3}{35}$.

Câu 3 (2.0 đ):

(0.5) Vẽ hình. Ta có: $P = xy + x + y + \sin^3 x \,; Q = xy + x - y + 2^y$.

$\Rightarrow P'_y = x + 1; Q'_x = y + 1$: các đạo hàm riêng liên tục trên miền D được giới hạn bởi đường cong kín C.

(0.5) Dùng công thức Green đối với đường cong kín C:

$$I = \iint\limits_D \left(Q'_x - P'_y\right) dxdy = \iint\limits_D \left(y - x\right) dxdy.$$

(0.5) Đặt: $x = 1 + r\cos\varphi, y = 1 + r\sin\varphi, |J| = r, D_{r\varphi} = \left\{0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le \sqrt{2}\right\}$.

(0.5) Do đó, $I = \iint\limits_{D_{r\varphi}} r^2 \left(\sin\varphi - \cos\varphi\right) drd\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \left(\sin\varphi - \cos\varphi\right) d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} r^2 dr =$

$$= \left[-\sin\varphi - \cos\varphi\right]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}} = 0.$$

Câu 4 (2.0 đ):

(0.5) Phương trình của nửa trên mặt cầu S: $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

$$dS = \sqrt{1 + \left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2} = \frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Hình chiếu của nửa trên mặt cầu xuống mp xOy là miền $D_{xy} = \left\{x^2 + y^2 \le R^2\right\}$.

(0.5) Diện tích của mặt cầu: $DT = 2\iint\limits_S dS = 2\iint\limits_{D_{xy}} \frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$.

(0.5) Đặt: $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, |J| = r, D_{r\varphi} = \left\{0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le R\right\}$.

(0.5) Do đó, $DT = 2R\iint\limits_{D_{r\varphi}} \frac{rdrd\varphi}{\sqrt{R^2 - r^2}} = -R\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \left(R^2 - r^2\right)^{-1/2} d\left(R^2 - r^2\right) =$

$$= -4\pi R \cdot \sqrt{R^2 - r^2}\Big]_0^R = 4\pi R^2 \ .$$

Câu 5 (2.0 đ)

(0.5) Pt không thuần nhất: $y'' - y = 2x + 1 - xe^x$

Pt thuần nhất: $y'' - y = 0$

Pt đặc trưng: $k^2 - 1 = 0 \rightarrow k = 1, k = -1$

Nghiệm tổng quát của pt thuần nhất: $y^*(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

(0.5) Nghiệm riêng của pt không thuần nhất tìm dưới dạng:

$$\overline{y}(x) = Ax + B + x \cdot e^x \cdot \left(Cx + D\right)$$

(1.0) Dùng phương pháp đồng nhất thức: $A = -2, B = -1, C = -\frac{1}{4}, D = \frac{1}{4}$

Nghiệm tổng quát của pt không thuần nhất:

$$y(x) = y^*(x) + \overline{y}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 2x - 1 + xe^x\left(-\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\right).$$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ

ĐỀ THI HẾT MÔN
HỌC KỲ II - NĂM HỌC 2017 - 2018

Đề thi số: 2

Bài thi môn: Giải Tích II — **Số tín chỉ:** 5

Lớp: MAT1095 — **Thời gian làm bài:** 120 phút

Câu 1 (2.0 đ). Tìm cực trị hàm số: $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$; $x < -1$.

Câu 2 (2.0 đ). Tính tích phân hai lớp: $\iint_D \sqrt{x}dxdy$, D là miền phẳng được giới hạn bởi các đường: $y = x^2, x = y^2$.

Câu 3 (2.0 đ). Tính tích phân: $I = \oint_C \left(xy + x + y + \sin^3 x\right)dx + \left(xy + x - y + 2^y\right)dy$, với C là đường tròn: $x^2 + y^2 = 2x - 2y$, chiều C ngược chiều kim đồng hồ.

Câu 4 (2.0 đ). Tính diện tích mặt cầu bán kính R.

Câu 5 (2.0 đ). Giải phương trình vi phân: $y'' - y = 3x + 2xe^x$.

---------- **Hết** ----------

Sinh viên không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên sinh viên:……..……………………..; Số báo danh:………………………………

Đáp án - Đề số 2

Câu 1 (2.0 đ):

(0.5) Tìm điểm dừng: $\begin{cases} z'_x = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ z'_y = 6xy - 12 = 0 \end{cases}$.

(0.5) Các điểm dừng: $P(-2,-1)$.

(0.5) $z''_{xx} = z''_{yy} = 6x, z''_{xy} = 6y; \Delta = 36(x^2 - y^2)$.

(0.5) Khảo sát cực trị tại các điểm dừng: P là cực đại, $z_{cd} = 28$.

Câu 2 (2.0 đ):

(1.0) Vẽ hình. $D = \left\{0 \le x \le 1, x^2 \le y \le \sqrt{x}\right\}$.

(1.0) Do đó, $\iint\limits_D \sqrt{x}dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \sqrt{x}dy = \int_0^1 \left(x - x^{5/2}\right)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{7}x^{7/2}\right]_0^1 = \frac{3}{14}$.

Câu 3 (2.0 đ):

(0.5) Vẽ hình. Ta có: $P = xy + x + y + \sin^3 x$; $Q = xy + x - y + 2^y$.

$\Rightarrow P'_y = x + 1; Q'_x = y + 1$: các đạo hàm riêng liên tục trên miền D được giới hạn bởi đường cong kín C.

(0.5) Dùng công thức Green đối với đường cong kín C:

$$I = \iint\limits_D \left(Q'_x - P'_y\right)dxdy = \iint\limits_D \left(y - x\right)dxdy.$$

(0.5) Đặt: $x = 1 + r\cos\varphi, y = -1 + r\sin\varphi, |J| = r, D_{r\varphi} = \left\{0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le \sqrt{2}\right\}$.

(0.5) Do đó, $I = \iint\limits_{D_{r\varphi}} \left[r^2\left(\sin\varphi - \cos\varphi\right) - 2r\right]drd\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \left[r^2\left(\sin\varphi - \cos\varphi\right) - 2r\right]dr =$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\sin\varphi - \frac{2\sqrt{2}}{3}\cos\varphi - 2\right)d\varphi = -4\pi.$$

Câu 4 (2.0 đ):

(0.5) Phương trình của nửa trên mặt cầu S: $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

$$dS = \sqrt{1 + \left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2} = \frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Hình chiếu của nửa trên mặt cầu xuống mp xOy là miền $D_{xy} = \left\{x^2 + y^2 \le R^2\right\}$.

(0.5) Diện tích của mặt cầu: $DT = 2\iint\limits_S dS = 2\iint\limits_{D_{xy}} \frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$.

(0.5) Đặt: $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, |J| = r, D_{r\varphi} = \left\{0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le R\right\}$.

(0.5) Do đó, $DT = 2R\iint\limits_{D_{r\varphi}} \frac{rdrd\varphi}{\sqrt{R^2 - r^2}} = -R\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \left(R^2 - r^2\right)^{-1/2} d\left(R^2 - r^2\right) =$

$$= -4\pi R \cdot \sqrt{R^2 - r^2}\Big]_0^R = 4\pi R^2 .$$

Câu 5 (2.0 đ)

(0.5) Pt không thuần nhất: $y'' - y = 3x + 2xe^x$

Pt thuần nhất: $y'' - y = 0$

Pt đặc trưng: $k^2 - 1 = 0 \rightarrow k = 1, k = -1$

Nghiệm tổng quát của pt thuần nhất: $y^*(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

(0.5) Nghiệm riêng của pt không thuần nhất tìm dưới dạng:

$$\overline{y}(x) = Ax + B + x \cdot e^x \cdot \left(Cx + D\right)$$

(1.0) Dùng phương pháp đồng nhất thức: $A = -3, B = 0, C = \frac{1}{2}, D = -\frac{1}{2}$

Nghiệm tổng quát của pt không thuần nhất:

$$y(x) = y^*(x) + \overline{y}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 3x + xe^x\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right).$$