CHƯƠNG 3: TÍCH PHÂN ĐƯỜNG VÀ TÍCH PHÂN MẶT

❖Tích phân đường là sự mở rộng của tích phân xác định và tích phân mặt là sự mở rộng của tích phân hai lớp

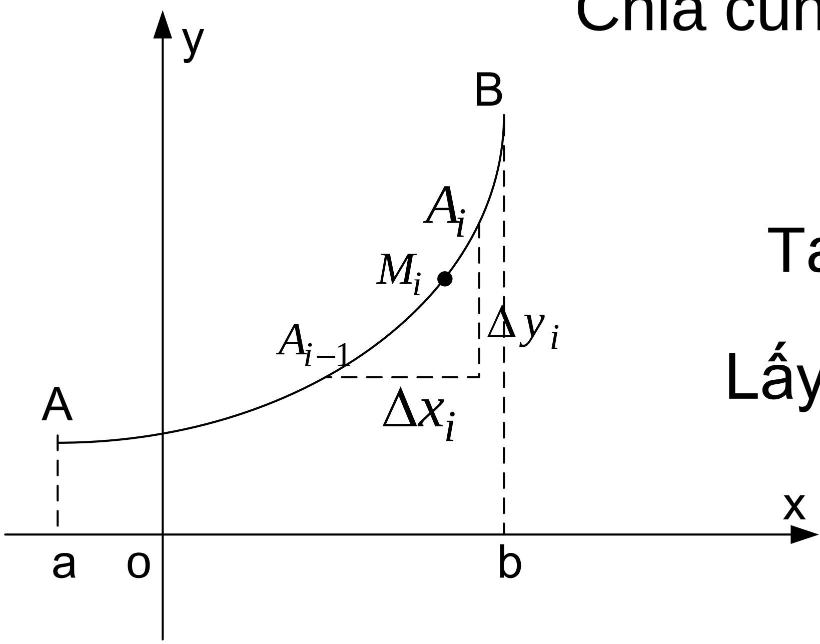
❖Tích phân đường lấy tích phân trên các cung cong thay cho trên đoạn thẳng, tích phân mặt lấy trên mặt cong thay cho miền phẳng, đồng thời khi tính tích phân còn để ý đến việc định hướng của đường cong và mặt cong

❖Hầu hết các bài toán kỹ thuật liên quan đến trường véctơ đều liên quan đến tích phân đường, tích phân mặt. Chẳng hạn: tính công của lực, tính thông lượng của trường…

❖Chính vì thế ý nghĩa thực tiễn của tích phân đường, tích phân mặt là rất lớn

3.1. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI MỘT

3.1.1. Định nghĩa tích phân đường loại một



Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trên một cung phẳng AB

Chia cung AB làm n cung nhỏ bởi các điểm chia

$$A_0 \equiv A,\ A_1, \ldots, A_{i-1},\ A_i, \ldots,\ A_n \equiv B$$

Ta gọi độ dài cung $A_{i-1}A_i$ là $\Delta s_i,\ (i = \overline{1,\ n})$

Lấy tuỳ ý n điểm $M_i(x_i, y_i) \in A_{i-1}A_i,\ (i = \overline{1,\ n})$

Tổng $$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i$$

được gọi là tổng tích phân đường loại một của hàm $f(x,y)$ trên cung AB ứng với một phân hoạch và một cách chọn tuỳ ý các điểm $M_i(x_i, y_i) \in A_{i-1}A_i,\ (i = \overline{1,\ n})$

Nếu $n \to \infty$ sao cho $\max \Delta s_i \to 0$, I_n hội tụ về số I không phụ thuộc cách chia cung AB và cách chọn $M_i(x_i, y_i) \in A_{i-1}A_i$, $(i = \overline{1, n})$ thì số I gọi là tích phân đường loại một của $f(x, y)$ dọc theo cung AB và ký hiệu $\int\limits_{AB} f(x, y)ds$

Vậy $$I = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i = \int\limits_{AB} f(x, y)ds$$

ds ký hiệu vi phân cung

Nếu $f(x, y, z)$ khả tích trên cung $AB \subset \mathbb{R}^3$ thì tích phân đường loại một của $f(x, y, z)$ trên cung AB ký hiệu là

$$I = \int\limits_{AB} f(x, y, z)ds$$

Cung $\overset{\frown}{AB}$ được cho bởi phương trình $y = f(x), x_1 \le x \le x_2$ được gọi là trơn nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[x_1, x_2]$

Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ được cho bởi PT tham số $x = x(t), y = y(t), t_1 \le t \le t_2$ thì cung $\overset{\frown}{AB}$ được gọi là trơn nếu $x(t)$, $y(t)$ có đạo hàm liên tục trên $[t_1, t_2]$

Cung $\overset{\frown}{AB}$ được gọi là trơn từng khúc nếu nó gồm một số hữu hạn cung trơn

Có thể chứng minh được: Nếu cung AB trơn hoặc trơn từng khúc và $f(x, y)$ liên tục trên cung AB thì $f(x, y)$ khả tích trên cung AB

Tích phần đường loại một có các tính chất giống như tích phân xác định

$$\int_{AB} (\alpha f + \beta g)(x,y)ds = \alpha \int_{AB} f(x,y)ds + \beta \int_{AB} g(x,y)ds$$

$$\int_{AC} f(x,y)ds = \int_{AB} f(x,y)ds + \int_{BC} f(x,y)ds$$

Nhận xét

a) Từ định nghĩa trên ta thấy chiều đi của cung AB không đóng vai trò gì cả vì I_n không phụ thuộc vào hướng đi của cung AB. Vậy $\int_{AB} f(x,y)ds = \int_{BA} f(x,y)ds$

b) Nếu gọi l là độ dài cung AB thì $l = \int_{AB} ds$

c) Nếu một dây vật chất có dạng cung AB và mật độ khối lượng là $\rho(x, y)$ thì khối lượng của dây vật chất đó tính theo công thức

$$M = \int_{AB} \rho(x, y) ds$$

Tọa độ trọng tâm G của cung cho bởi công thức

$$x_G = \frac{1}{M} \int_{AB} x\rho(x, y) ds, \; y_G = \frac{1}{M} \int_{AB} y\rho(x, y) ds.$$

3.1.2. Công thức tính tích phân đường loại một

1. Đường cong là đồ thị hàm số

$$AB:\ y = y(x),\ a \le x \le b$$

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + y'^2(x)}dx$$

2. Đường cong cho dưới dạng phương trình tham số

$$AB\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},\ t_1 \le t \le t_2$$

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{t_1}^{t_2} f[x(t), y(t)]\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$$

3. Đường cong trong không gian

$$AB \subset \mathbb{R}^3 : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t),\ t_1 \le t \le t_2 \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$\int_{AB} f(x,y,z)ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt$$

4. Đường cong trong dạng tọa độ cực

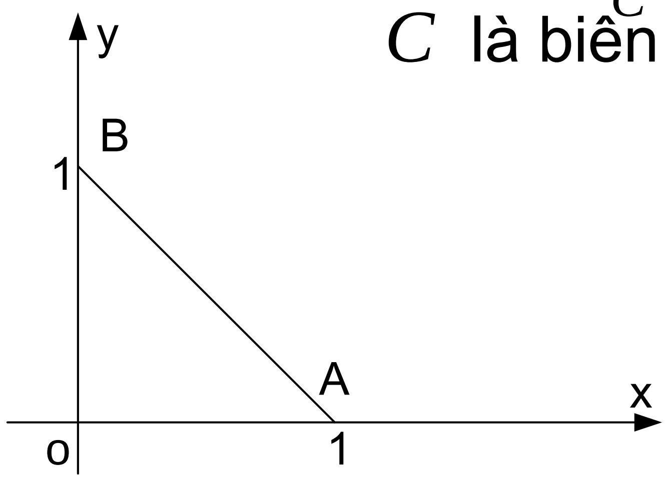
$$AB:\ r = r(\varphi),\ \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \ \Rightarrow x'^2(\varphi)+y'^2(\varphi) = r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)$$

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f\left[r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi\right]\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}d\varphi$$

Ví dụ

Tính $\int_C (x+y)ds$

C là biên tam giác với các đỉnh $O(0,0),\ A(1,0),\ B(0,1)$



$$\int_C = \int_{\overline{OA}} + \int_{\overline{AB}} + \int_{\overline{BO}}$$

Đoạn OA có phương trình $y=0,\ 0\le x\le 1$

$$\int_{\overline{OA}} (x+y)ds = \int_0^1 x\sqrt{1+0}\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Đoạn AB có phương trình

$y = 1-x,\ 0\le x\le 1$

$$\Rightarrow \int_{\overline{AB}} (x+y)ds = \int_0^1 1\sqrt{1+1}\,dx = \sqrt{2}$$

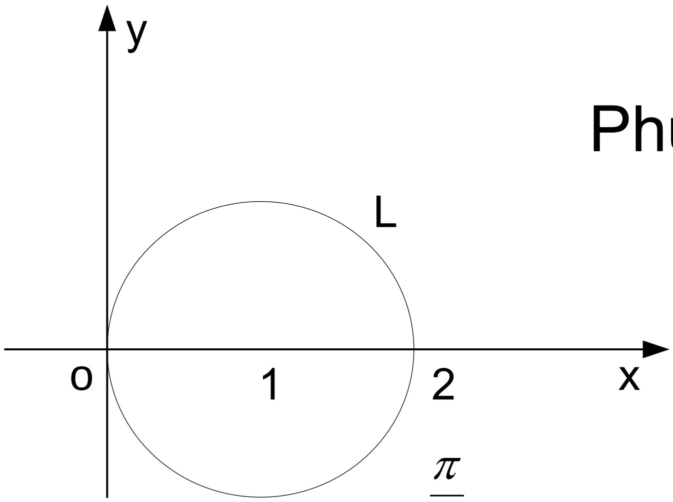
Đoạn BO có phương trình

$x=0,\ 0\le y\le 1$

$$\int_{\overline{BO}} (x+y)ds = \int_0^1 y\sqrt{1+0}\,dy = \frac{1}{2}y^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \int_C (x+y)ds = 1+\sqrt{2}$$

Ví dụ Tính $I = \int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}\,ds$ L là đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$



Phương trình đường L theo tọa độ cực có dạng

$$r = 2\cos\varphi, -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

$$I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\varphi\sqrt{4\cos^2\varphi + 4\sin^2\varphi}\,d\varphi = 8\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,d\varphi = 8\sin\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 8$$

Có thể tính tích phân dưới dạng tham số $\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, -\pi \le t \le \pi$

$$I = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sqrt{(1+\cos t)^2 + \sin^2 t}\,dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos t}\,dt = 2\int\limits_0^{\pi} \sqrt{4\cos^2\frac{t}{2}}\,dt = 8$$

Ví dụ: Tính $\int_C (x+y)\,ds$ trong đó C là nửa đường tròn

$$x = 2 + 2\text{cos}t, y = 2\text{sin}t, 0 \le t \le \pi.$$

Giải:

$$ds = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}dt = 2dt$$

$$I = \int_0^\pi (2 + 2\text{cos}t + 2\text{sin}t)\,2dt$$

$$= 4(t + \text{sin}t - \text{cos}t)\Big|_0^\pi = 4(\pi + 2)$$

Ví dụ: Tính $\int\limits_{AB} (x - y)ds$ trong đó AB là đoạn thẳng nối 2 điểm A(0,0) và B(4,3)

Giải: AB có phương trình $\dfrac{x-0}{4-0} = \dfrac{y-0}{3-0} \Leftrightarrow y = \dfrac{3x}{4}$

$$I = \int_0^4 \left(x - \frac{3x}{4}\right)\sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2}\, dx = \frac{5}{4}\int_0^4 \left(\frac{x}{4}\right) dx = \frac{5}{2}$$

Ví dụ: Tính $\int_C ysinzds$ trong đó C là một vòng của đường xoáy ốc có phương trình $x = cost, y = sint, z = t, 0 \le t \le 2\pi$

Giải:
$$\int_C ysinzds = \int_0^{2\pi} \sin^2 t\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 1}\,dt$$
$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sin^2 t\,dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2}dt = \sqrt{2}\pi$$

Ví dụ: Tính khối lượng của đường cong

$$x = \text{cos}t, y = \sqrt{2}\text{sin}t, \frac{2\pi}{3} \le t \le \frac{5\pi}{6}$$

biết mật độ của nó tại điểm (x,y) là $\rho(x,y) = |xy|$.

Giải:

$$m = \int_{\overset{\frown}{AB}} \rho(x,y)ds = \int_{\overset{\frown}{AB}} |xy|ds = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} \left|\text{cos}t\sqrt{2}\text{sin}t\right| \sqrt{1+\text{cos}^2t}dt$$

$$= -\sqrt{2}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} \text{sin}t\,\text{cos}t\sqrt{1+\text{cos}^2t}dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} \sqrt{1+\text{cos}^2t}\,d(1+\text{cos}^2t)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}.\frac{7\sqrt{7}-5\sqrt{5}}{8}$$

3.2. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI HAI

3.2.1. Định nghĩa tích phân đường loại hai

Cho hai hàm số $P(x,y), Q(x,y)$ xác định trên cung L (hay cung AB)

- Chia cung L thành n cung nhỏ bởi các điểm chia

$$A \equiv A_0,\ A_1, \dots,\ A_{i-1},\ A_i, \dots,\ A_n \equiv B$$

- Gọi toạ độ của vectơ $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ là $\Delta x_i,\ \Delta y_i$ và độ dài cung $A_{i-1}A_i$ là $\Delta s_i,\ i = \overline{1,\ n}$

- Lấy tuỳ ý n điểm $M_i(x_i, y_i) \in A_{i-1}A_i$

- Lập tổng $I_n = \sum_{i=1}^{n} P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i$ được gọi đó là tổng tích phân đường loại hai của hàm số $P(x,y),\ Q(x,y)$ dọc theo L đi từ A đến B ứng với một phân hoạch của L và một cách chọn $M_i \in A_{i-1}A_i$

Khi $n \to \infty$ sao cho $\max \Delta s_i \to 0$ $(\max \Delta x_i \to 0, \max \Delta y_i \to 0)$ mà I_n hội tụ về số I không phụ thuộc cách chia cung L và cách chọn tuỳ ý $M_i \in A_{i-1}A_i$ thì số I gọi là tích phân đường loại hai của các hàm $P(x,y), Q(x,y)$ dọc theo cung AB đi từ A đến B và ký hiệu là

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Như vậy

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i$$

Nhận xét

- Khác với tích phân đường loại một, ở tích phân đường loại hai, hướng lấy tích phân của L là quan trọng

  Nếu lấy tích phân dọc theo cung AB đi từ B đến A thì các véc tơ $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ đổi hướng. Vậy tổng tích phân sẽ đổi dấu, suy ra

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int_{BA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

- Công sinh ra do lực $\overrightarrow{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ để chất điểm dịch chuyển từ A đến B theo cung AB sẽ là

$$W = \int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

❖ Nếu AB là đường cong trong không gian và có ba hàm số $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ xác định trên cung AB thì tích phân đường loại hai của ba hàm số đó cũng được ký hiệu là

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

❖ Cho L là đường cong phẳng (nằm trên mặt phẳng Oxy) và kín. Người ta qui ước gọi hướng dương của đường cong L là hướng sao cho một người đi dọc L theo hướng đó thì thấy miền giới hạn bởi L gần mình nhất ở bên trái

Tích phân lấy theo hướng dương được ký hiệu là

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

- Nếu hai hàm $P(x,y),\ Q(x,y)$ liên tục trên cung AB trơn hoặc trơn từng khúc thì tồn tại tích phân đường loại hai

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

- Tích phân đường loại hai cũng có các tính chất tương tự như tích phân xác định

$$\int_{AC} Pdx + Qdy = \int_{AB} Pdx + Qdy + \int_{BC} Pdx + Qdy$$

3.2.2. Công thức tính tích phân đường loại hai

Giả sử hai hàm số $P(x,y)$, $Q(x,y)$ liên tục trên cung AB trơn cho bởi phương trình tham số

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases};\ A = \left(x(t_A), y(t_A)\right),\ B = \left(x(t_B), y(t_B)\right)$$

Khi đó

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{t_A}^{t_B} [P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)]dt$$

Khi cung AB phẳng cho bởi phương trình dạng

$$y = y(x);\ A\left(x_A, y(x_A)\right), B = \left(x_B, y(x_B)\right)$$

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{x_A}^{x_B} \left[P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x)\right]dx$$

Trường hợp đường lấy tích phân là một đường trong không gian

Nếu $\overset{\frown}{AB}$ là một cung trong không gian được tham số hóa bởi

$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ và các nút A và B tương ứng với t_A, t_B

$P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z),$ là 3 hàm số xác định trên $\overset{\frown}{AB}$ thì

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_{t_A}^{t_B} \left[\begin{gathered} P\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)y'(t) \\ +R\big(x(t),y(t),z(t)\big)z'(t) \end{gathered} \right] dt$$

(21)

Ví dụ: Tính $\oint\limits_L |x|\left(dx+dy\right)$ trong đó L là đường tròn $x^2+y^2=1$

hướng ngược chiều kim đồng hồ

Giải: Đặt $x=\cos t, y=\sin t \Rightarrow dx+dy=\left(-\sin t+\cos t\right)dt$.

$$I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\left(-\sin t+\cos t\right)dt+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} -\cos t\left(-\sin t+\cos t\right)dt=0$$

Ví dụ

Tính công sinh bởi lực $\overrightarrow{F} = -y\vec{i} + x\vec{j}$ sinh ra dọc theo đường ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ theo hướng dương của nó

Phương trình tham số của đường ellipse

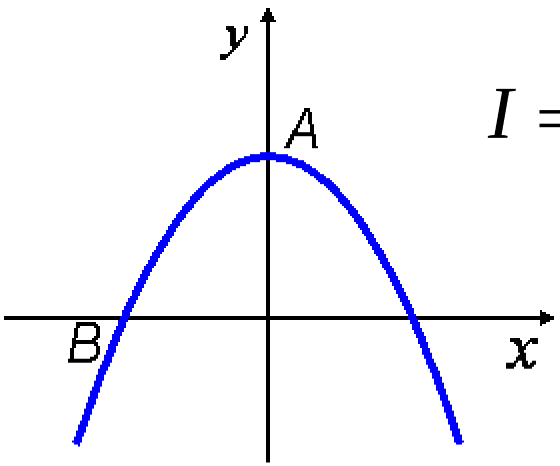
$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \ 0 \le t \le 2\pi$$

$$A = \oint_L xdy - ydx = \int_0^{2\pi} (a\cos t.b\cos t + b\sin t.a\sin t)dt = ab\int_0^{2\pi} dt = 2\pi ab$$

Ví dụ Tính $I = \int\limits_L (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$

trong đó L là cung của parabol $y = 1 - x^2$ đi từ điểm $A(0;1)$ đến điểm $B(-1;0)$

$$y = 1 - x^2 \Rightarrow dy = -2xdx$$



$$I = \int_0^{-1} \left[2x(1-x^2) - x^2 + (x+1-2x^2+x^4)(-2x) \right] dx$$

$$= \int_0^{-1} (-2x^5 + 2x^3 - 3x^2)dx$$

$$= (-\frac{1}{3}x^6 + \frac{1}{2}x^4 - x^3)\Big|_0^{-1} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{7}{6}$$

3.3. CÔNG THỨC GREEN VÀ ĐỊNH LÝ BỐN MỆNH ĐỀ TƯƠNG ĐƯƠNG

Định lý (Công thức Green)

Cho các hàm số $P(x,y)$, $Q(x,y)$ liên tục cùng các đạo hàm riêng cấp một trong miền liên thông D có biên là đường L. Khi đó

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy$$

Hệ quả

Giả sử D là miền đơn liên có biên là đường L, khi đó diện tích của miền D được tính bởi

$$S = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx = -\oint_L ydx = \oint_L xdy$$

Ví dụ: Dùng tích phân đường loại 2 tính diện tích hình phẳng D giới hạn

bởi trục Oy và đường $x = 2(1 - \cos t), y = 2(t - \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi$

Giải: Khi $t = 0, x = 0, y = 0$ Khi $t = 2\pi, x = 0, y = 4\pi$ $A = (0,4)$

Gọi OmA là cung $x = 2(1 - \cos t), y = 2(t - \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi$

và $L = OmA \cup AO$ là biên của miền D theo chiều dương

$$S(D) = \oint_L x dy = \int_{OmA} x dy + \int_{AO} x dy$$

Vì PT của AO là x=0 nên $\int_{AO} x dy = 0$ Do đó

$$S(D) = \int\limits_{OmA} xdy = \int_0^{2\pi} 2(1 - \cos t)\,2(1 - \cos t)dt$$

$$= 4\int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\right)dt = 12\pi$$

Ví dụ Tính diện tích ellipse với các bán trục $a\,,b$

Phương trình tham số của ellipse

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t;\ 0 \le t \le 2\pi$$

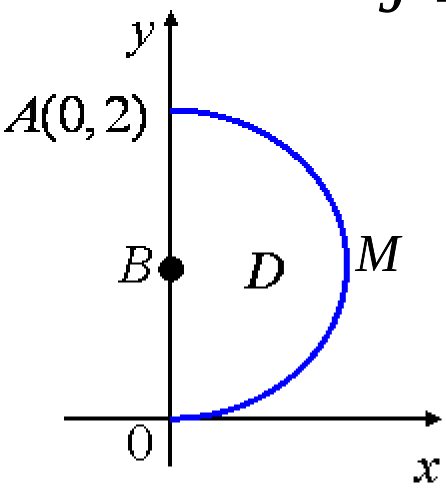
$$S = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(ab\cos^2 t + ab\sin^2 t)dt = \pi ab$$

Ví dụ Tính $J = \int_C (x\arctan x + y^2)dx + (x + 2yx + y^2 e^{-y^3})dy$

với C là nửa đường tròn bên phải đi từ gốc tọa độ đến $A(0,2)$

$$OA:\ x^2 + y^2 = 2y,\ x \ge 0$$

$$P = x\arctan x + y^2 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 2y;\ Q = x + 2yx + y^2 e^{-y^3} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y + 1$$



$$J = \int_{OMA} Pdx + Qdy = \oint_{OMABO} Pdx + Qdy + \int_{\overline{OA}} Pdx + Qdy$$

$$\oint_{OMABO} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D dxdy = \frac{\pi}{2}$$

$$I = \int_{\overline{OA}} (x\arctan x + y^2)dx + (x + 2yx + y^2 e^{-y^3})dy = \int_0^2 y^2 e^{-y^3} dy$$

$$= -\frac{1}{3}\int_0^2 e^{-y^3} d(-y^3) = -\frac{1}{3} e^{-y^3}\Big|_0^2 = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{e^8}\right) \Rightarrow J = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{e^8}\right)$$

Ví dụ: Tính $\oint\limits_{C} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ trong đó C là đường cong xác định bởi $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ theo chiều dương

Giải: Cách 1. C là đường Astroid. Các hàm

$P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}, Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2},$ không xác định tại $(0,0)$

Gọi L là đường tròn tâm tại $(0,0)$ có bán kính R đủ nhỏ để L nằm trong C. Áp dụng công thức Green cho miền nằm giữa đường Astroid và L. Ta có $Q'_x = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = P'_y$ nên TP đã cho bằng tích phân trên L lấy theo chiều ngược chiều kim đồng hồ $I = \oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ Tham số hóa L bởi

$$x = R\cos t, y = R\sin t, 0 \le t \le 2\pi$$

$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t}{R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t} dt = 2\pi$$

Cách 2: Tham số hóa đường C bởi

$$x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, 0 \le t \le 2\pi$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{3\cos^4 t\sin^2 t + 3\sin^4 t\cos^2 t}{\cos^6 t + \sin^6 t} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{3\cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)}{(\cos^2 t + \sin^2 t)(\cos^4 t - \cos^2 t \sin^2 t + \sin^4 t)} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{3\cos^2 t \sin^2 t}{\cos^4 t - \cos^2 t \sin^2 t + \sin^4 t} dt = \int_0^{2\pi} \frac{3\cos^2 t \sin^2 t}{1 - 3\cos^2 t \sin^2 t} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-1 + \frac{1}{1 - 3\cos^2 t \sin^2 t} \right) dt = -2\pi + \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 3\cos^2 t \sin^2 t} dt$$

$$= -2\pi + I_1$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1-\frac{3}{4}\sin^2 2t}dt = \int_0^{2\pi} \frac{8}{5+3\cos 4t}dt = \int_0^{8\pi} \frac{2du}{5+3\cos u}$$

$$= 4\int_0^{2\pi} \frac{2du}{5+3\cos u} = 4\int_0^{\pi} \frac{2du}{5+3\cos u} + 4\int_{\pi}^{2\pi} \frac{2du}{5+3\cos u}$$

$$= 4\int_0^{\pi} \frac{2du}{5+3\cos u} + 4\int_0^{\pi} \frac{2du}{5-3\cos u} = 4I_2 + 4I_3$$

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{2}{5+3\left(\frac{1-v^2}{1+v^2}\right)} \frac{2dv}{1+v^2} = \int_0^{+\infty} \frac{2dv}{4+v^2} = \arctan\frac{v}{2}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

$$I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{2}{5-3\left(\frac{1-v^2}{1+v^2}\right)} \frac{2dv}{1+v^2} = \int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}dv}{\frac{1}{4}+v^2} = \arctan 2v\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow I = 2\pi$$

Ví dụ: Tính $\int\limits_{C} \arctan\frac{x}{y}(xdx + ydy)$ C là đường $x = 3 + \sqrt{2}\cos t$

$y = 3 + \sqrt{2}\sin t$ theo chiều t tăng từ $-\frac{3\pi}{4}$ đến $\frac{\pi}{4}$

Giải: Ta viết lại phương trình của đường cong C

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 2$$

$$t = -\frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = 2, y = 2 \qquad t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 4, y = 4$$

Gọi $A(2,2), B(4,4) \Rightarrow I = \oint\limits_{C\cup BA} - \int\limits_{BA}$

Phương trình của đường BA là y=x. Từ đó

$$\int_{BA} \arctan\frac{x}{y}(xdx + ydy) = \int_{4}^{2} \frac{\pi}{4}.2xdx = -3\pi$$

Sử dụng công thức Green

$$\oint_{C\cup BA} \arctan\frac{x}{y}(xdx + ydy) = \iint_{D} (Q'_x - P'_y)dxdy$$

trong đó D là nửa hình tròn với biên là $C \cup BA$

$$P(x,y) = x\arctan\frac{x}{y}, Q(x,y) = y\arctan\frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow Q'_x = \frac{y^2}{x^2+y^2}, P'_y = -\frac{x^2}{x^2+y^2}, Q'_x - P'_y = 1$$

$$\iint_{D} 1dxdy = S(D) = \pi \Rightarrow I = \pi - (-3\pi) = 4\pi$$

Ví dụ: Cho C là đường tròn kín $x^2 + y^2 = 2ax, a > 0$ định hướng dương. Hãy tính $\oint\limits_C (2xy - x^3)\,dx + (x + y^3)dy$ theo 2 cách: tính trực tiếp và sử dụng công thức Green

Giải : Cách 1: Tham số hóa đường cong

$$x = a(1 + \cos t), y = a\sin t, -\pi \le t \le \pi, dx = -a\sin t, dy = a\cos t$$

$$\oint\limits_C (2xy - x^3)\,dx + (x + y^3)dy = \oint\limits_C 2xydx + xdy - \oint\limits_C x^3dx + \oint\limits_C y^3dy$$

$$-\oint\limits_C x^3dx = \int_{-\pi}^{\pi} a^4(1 + \cos t)^3\sin t dt = 0$$ do hàm dưới dấu tích phân là hàm lẻ

$$\oint_C y^3 dy = \int_{-\pi}^{\pi} a^4 \sin^3 t \cos t dt = 0$$ do hàm dưới dấu tích phân là hàm lẻ

$$\oint_C 2xy dx + x dy = \int_{-\pi}^{\pi} \left[-2a^3(1+\cos t)\sin^2 t + a^2(1+\cos t)\cos t\right] dt$$

$$= -2a^3 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt - 2a^3 \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \sin^2 t dt + a^2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos t dt + a^2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t dt$$

$$= -2a^3 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2t}{2} dt - 2a^3 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t d(\sin t)$$

$$+ a^2 \sin t \Big|_{-\pi}^{\pi} + a^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2t}{2} dt$$

$$= -2\pi a^3 + 0 + 0 + \pi a^2 = -2\pi a^3 + \pi a^2$$

Cách 2: Sử dụng công thức Green với $P(x,y) = 2xy - x^3 \Rightarrow P'_y = 2x$

$Q(x,y) = x + y^3 \Rightarrow Q'_x = 1 \Rightarrow Q'_x - P'_y = 1 - 2x$

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(Q'_x - P'_y\right) dxdy = \iint_D (1 - 2x)\, dxdy$$

với D là miền giới hạn bởi đường cong C. Đổi sang hệ tọa độ cực

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, |J| = r, -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le 2a\cos\varphi$$

$$\iint_D (1 - 2x)\, dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} (1 - 2r\cos\varphi) r dr$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{2r^3}{3}\cos\varphi \right) \Bigg|_{r=0}^{2a\cos\varphi} d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2a^2\cos^2\varphi - \frac{16}{3}a^3\cos^4\varphi \right) d\varphi$$

$$= a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos2\varphi)\, d\varphi - \frac{16}{3}a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi d\varphi$$

$$= \pi a^2 + \frac{\sin2\varphi}{2} \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{16}{3}a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos2\varphi}{2} \right)^2 d\varphi$$

$$= \pi a^2 - \frac{4a^3}{3}\left(\varphi + \sin2\varphi + \frac{\pi}{2} + \frac{\sin2\varphi}{4} \right) \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi a^2 - 2a^3\pi$$

Ví dụ: Tính $\oint_C \sqrt{x^2+y^2}\,dx + \left(xy^2 + y\ln\left[x+\sqrt{x^2+y^2}\right]\right)dy.$

với C là đường tròn $x^2+y^2=2$ định hướng dương

Giải: Đặt

$$P(x,y)=\sqrt{x^2+y^2},\,Q(x,y)=xy^2+y\ln\left[x+\sqrt{x^2+y^2}\right]$$

$$P'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\,Q'_x=y^2+y\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x+\sqrt{x^2+y^2}}=y^2+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Áp dụng CT Green $I=\iint_D \left(Q'_x-P'_y\right)dxdy=\iint_D y^2dxdy$

trong đó $D: x^2+y^2\le 2$ Đổi biến $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$

trong đó $0\le\varphi\le 2\pi, 0\le r\le\sqrt{2}$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \sin^2\varphi r dr = \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r^3\, dr = \pi$$

Tích phân đường không phụ thuộc vào đường đi

Cho *P* và *Q* là các hàm số liên tục trên miền *D*. Tích phân đường loại 2 $\int_C Pdx + Qdy$ được gọi là không phụ thuộc vào đường đi trên D nếu

$$\int_{C_1} Pdx + Qdy = \int_{C_2} Pdx + Qdy$$

với C_1, C_2 là 2 đường đi bất kỳ thuộc D có cùng điểm đầu và cùng điểm cuối.

Giả sử rằng tích phân không phụ thuộc vào đường đi trên *D* và *C* là đường cong kín thuộc *D* Ta chọn hai điểm *A* và *B* trên *C* và xem *C* gồm đường C_1 từ *A* đến *B* và đường C_2 từ *B* đến *A* Khi đó

$$\int_{C} Pdx + Qdy = \int_{C_1} Pdx + Qdy + \int_{C_2} Pdx + Qdy$$

$$= \int_{C_1} Pdx + Qdy - \int_{C_2^-} Pdx + Qdy = 0$$

Định lý

Tích phân đường $\int_{C} Pdx + Qdy$ không phụ thuộc vào đường đi trong D khi và chỉ khi $\int_{C} Pdx + Qdy = 0$ dọc theo mọi đường cong kín C thuộc D

Trong trường hợp tích phân đường không phụ thuộc vào đường đi nối hai điểm ta có thể chọn đường đi bất kỳ nối hai điểm

Định lý (bốn mệnh đề tương đương)

Giả sử các hàm $P(x,y)$, $Q(x,y)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng trong miền đơn liên D. Khi đó bốn mệnh đề sau đây tương đương

1. $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x},\ \forall (x,y) \in D$
2. $\oint\limits_L Pdx + Qdy = 0$, L là đường cong kín bất kỳ nằm trong miền D
3. $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$, chỉ phụ thuộc vào 2 điểm A, B mà không phụ thuộc dạng cung AB nằm trong miền D
4. Biểu thức $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của hàm $u(x,y)$ nào đó trên miền D

Hệ quả Nếu $du(x,y) = Pdx + Qdy$ trong miền D thì

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = u(B) - u(A)$$

Nếu D là toàn bộ $\mathbb{R}^2$ thì $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của hàm

u(x,y) được cho bởi công thức:

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + C$$

hoặc

$$u(x,y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + C$$

Ví dụ Chứng minh rằng biểu thức

$$(x^2 - 2xy^2 + 3)dx + (y^2 - 2x^2y + 4y - 5)dy$$

là vi phân toàn phần của hàm $u(x,y)$ trên $\mathbb{R}^2$ và hãy tìm hàm đó

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -4xy = \frac{\partial P}{\partial y},\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\Rightarrow \exists u(x,y): \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) = x^2 - 2xy^2 + 3 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y) = y^2 - 2x^2y + 4y - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \dfrac{x^3}{3} - x^2y^2 + 3x + f(y) \\ \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial y} = -2x^2y + f'(y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(y) = y^2 + 4y - 5 \Rightarrow f(y) = \frac{y^3}{3} + 2y^2 - 5y + C$$

$$\Rightarrow u = \frac{x^3}{3} - x^2y^2 + 3x + \frac{y^3}{3} + 2y^2 - 5y + C$$

Ví dụ: Tìm a để biểu thức

$$\left(y^3 + \frac{y}{1 + x^2y^2}\right)dx + \left(axy^2 + \frac{x}{1 + x^2y^2}\right)dy$$

là vi phân toàn phần của hàm $U(x, y)$, tìm $U(x, y)$ đó

Giải: $P(x, y) = y^3 + \dfrac{y}{1 + x^2y^2}, Q(x, y) = axy^2 + \dfrac{x}{1 + x^2y^2}$

$$\Rightarrow P'_y = 3y^2 + \frac{(1 + x^2y^2) - 2x^2y^2}{(1 + x^2y^2)^2}, \qquad Q'_x = P'_y \Rightarrow a = 3$$

$$Q'_x = ay^2 + \frac{(1 + x^2y^2) - 2x^2y^2}{(1 + x^2y^2)^2}$$

$$U(x, y) = \int_0^x 0dx + \int_0^y \left(3xy^2 + \frac{x}{1 + x^2y^2}\right)dy + C$$

$$= xy^3 + \arctan(xy) + C$$

Ví dụ: Tính tích phân đường

$$\int_L \left(3x^2y^2 + \frac{2}{x^2+4}\right)dx + \left(3x^3y + \frac{2}{4y^3+1}\right)dy$$

trong đó L là đường cong $y = \sqrt{1-x^4}$ đi từ A(1,0) đến $B(-1,0)$

Giải: $P(x,y) = 3x^2y^2 + \frac{2}{x^2+4}, Q(x,y) = 3x^3y + \frac{2}{4y^3+1}$

$$\Rightarrow P'_y = 6x^2y, Q'_x = 9x^2y$$

$$I = \int_L \left(3x^2y^2 + \frac{2}{x^2+4}\right)dx + \left(2x^3y + \frac{2}{4y^3+1}\right)dy + \int_L x^3y\,dy$$

$= I_1 + I_2$ Do I_1 không phụ thuộc vào đường đi, chọn đường $y = 0$

nối A và B

$$I_1 = \int_1^{-1} \frac{2}{x^2+4}dx = -2\arctan\frac{1}{2}$$

Tính I_2

Trên L $\quad y^2 = 1 - x^4 \Rightarrow 2ydy = -4x^3dx$

$$\Rightarrow \int_L x^3y\,dy = -\int_1^{-1} 2x^6dx = \frac{4}{7}$$

$$\Rightarrow I = \frac{4}{7} - 2\arctan\frac{1}{2}$$

Ví dụ: Chứng minh rằng TP $I = \int_L (2 - ye^{-x})\, dx + (3 + e^{-x}) dy$

không phụ thuộc vào đường đi. Tính I với L là đoạn thẳng đi từ (1,0)

đến (2,1)

Giải: Đặt $P(x, y) = 2 - ye^{-x}, Q(x, y) = 3 + e^{-x}$

Do $Q'_x = -e^{-x} = P'_y$ nên theo ĐL 4 MĐ tương đương I không

phụ thuộc vào đường đi. Chon L là đường gấp khúc đi từ (1,0) đến

(2,0) rồi đến (2,1).

$$I = \int_1^2 2dx + \int_0^1 (3 + e^{-2})\, dy = 5 + e^{-2}$$

Ví dụ: Tìm a,b để TP đường sau không phụ thuộc vào đường đi

$$\int_{AB} e^x\left[\left(2x + ay^2 + 1\right)dx + \left(bx + 2y\right)dy\right]$$

Giải: $P(x,y) = e^x\left(2x + ay^2 + 1\right); Q(x,y) = e^x(bx + 2y)$

$$P'_y = 2aye^x; Q'_x = e^x(bx + 2y) + e^x b$$

Để TP đường sau không phụ thuộc vào đường đi ta cần

$$e^x(bx + 2y) + e^x b = 2aye^x, \forall x, y$$

$$\Leftrightarrow e^x(bx + 2y + b - 2ay) = 0, \forall x, y$$

$$\Leftrightarrow b(x + 1) + 2y(1 - a) = 0, \forall x, y$$

$$\Leftrightarrow b = 0, a = 1$$

Ví dụ: Tính TP đường $\int\limits_C \frac{(2x+y^2e^x)dx+2ye^xdy}{\sqrt{1+x^2+y^2e^x}}$ trong đó C là nửa dưới của đường tròn $(2x-1)^2+(2y-1)^2=2$ từ O(0,0) đến M(1,1)

Giải: $P(x,y)=\frac{(2x+y^2e^x)}{\sqrt{1+x^2+y^2e^x}};Q(x,y)=\frac{2ye^x}{\sqrt{1+x^2+y^2e^x}}$

$$P'_y=\frac{2ye^x+2x^2ye^x+y^3e^{2x}-2xye^x}{(1+x^2+y^2e^x)\sqrt{1+x^2+y^2e^x}}=Q'_x$$

Do đó TP không phụ thuộc vào đường đi. Ta chọn đường thẳng OM: y=x

$$I=\int\limits_0^1 \frac{(2x+x^2e^x+2xe^x)dx}{\sqrt{1+x^2+x^2e^x}}=2\sqrt{1+x^2+x^2e^x}\Big|_0^1=2\sqrt{2+e}-2$$

Ví dụ: Tính TP $\displaystyle\int_{(2,1)}^{(5,2)} \frac{3}{1+y^2}\left(ydx + \frac{x-xy^2}{1+y^2}dy\right)$

Giải: $P(x,y) = \dfrac{3y}{1+y^2}, Q(x,y) = \dfrac{3x-3xy^2}{(1+y^2)^2}$

Do $P'_y = \dfrac{3-3y^2}{(1+y^2)^2} = Q'_x$ nên TP không phụ thuộc đường đi

Chọn đường $x = 1+y^2$

$$\Rightarrow dx = 2ydy \Rightarrow I = \int_1^2 \left(\frac{3y}{1+y^2}.2y + \frac{3(1+y^2)(1-y^2)}{(1+y^2)^2}\right)dy$$

$$= \int_1^2 \frac{3y^2+3}{1+y^2}dy = 3$$

Ví dụ: CMR nếu f(u) là một hàm số cùng với đạo hàm của nó liên tục trên $\mathbb{R}$ và L là đường đi từ O(0,0) đến A(a,b) thì

$$\int_L f(x+y)(dx+dy) = \int_0^{a+b} f(u)du$$

Giải: Đặt $P(x,y) = f(x+y) = Q(x,y) \Rightarrow P'_y = f'(x+y) = Q'_x$

Từ đó TP không phụ thuộc vào đường đi. Ta chọn đường đi là OB và BA với B(a,0). Khi đó

$$I = \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f(a+y)dy$$

$$= \int_0^a f(u)du + \int_a^{a+b} f(u)du = \int_0^{a+b} f(u)du$$

3.4. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI MỘT

3.4.1. Định nghĩa tích phân mặt loại một

Cho hàm số $f(M) = f(x, y, z)$ xác định trên mặt cong S

- Chia mặt cong S thành n mảnh không dẫm lên nhau, gọi tên và ký hiệu diện tích, đường kính của mảnh thứ i là ΔS_i ,d_i; $i = \overline{1, n}$
- Lấy tuỳ ý n điểm $M_i(x_i, y_i, z_i) \in \Delta S_i$, $i = \overline{1, n}$
- Lập tổng $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$, được gọi là tổng tích phân mặt loại một ứng với một cách chia mặt cong S và một cách chọn $M_i(x_i, y_i, z_i) \in \Delta S_i$, $i = \overline{1, n}$

Nếu khi $n \to \infty$ sao cho $\max d_i \to 0$ mà I_n hội tụ về số I không phụ thuộc cách chia mặt cong S và cách lấy các điểm M_i thì số I gọi là tích phân mặt loại một của $f(M)$ trên mặt cong S, ký hiệu là

$$\iint_S f(x, y, z)dS$$

Như vậy $$\iint_S f(x,y,z)dS = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i$$

- Có thể chứng minh được rằng

Nếu mặt cong S trơn (mặt cong S có pháp tuyến biến thiên liên tục) hoặc là trơn từng mảnh (chia S thành hữu hạn các mặt cong trơn) và hàm số $f(x,y,z)$ liên tục hoặc liên tục từng mảnh trên mặt cong S thì tồn tại tích phân mặt loại một của hàm số đó trên S

- Tích phân mặt loại một có các tính chất giống như tích phân kép

$$\iint_S (\alpha f + \beta g)dS = \alpha \iint_S f dS + \beta \iint_S g dS$$

$$\iint_S f dS = \iint_{S_1} f dS + \iint_{S_2} f dS ; S = S_1 \cup S_2, \, \mathrm{dt}(S_1 \cap S_2) = 0$$

Nhận xét

- Từ định nghĩa ta nhận được công thức tính diện tích mặt cong S nhờ vào tích phân mặt loại một

$$S = \iint\limits_S dS$$

- Nếu S là mặt cong vật chất có hàm mật độ khối lượng là $\rho(x, y, z)$ thì khối lượng của mặt cong vật chất đó sẽ là

$$M = \iint\limits_S \rho(x, y, z) dS$$

- Công thức xác định trọng tâm của mặt cong

$$x_G = \frac{1}{M} \iint\limits_S x\rho(M) dS,\ y_G = \frac{1}{M} \iint\limits_S y\rho(M) dS,\ z_G = \frac{1}{M} \iint\limits_S z\rho(M) dS$$

3.4.2. Công thức tính tích phân mặt loại một

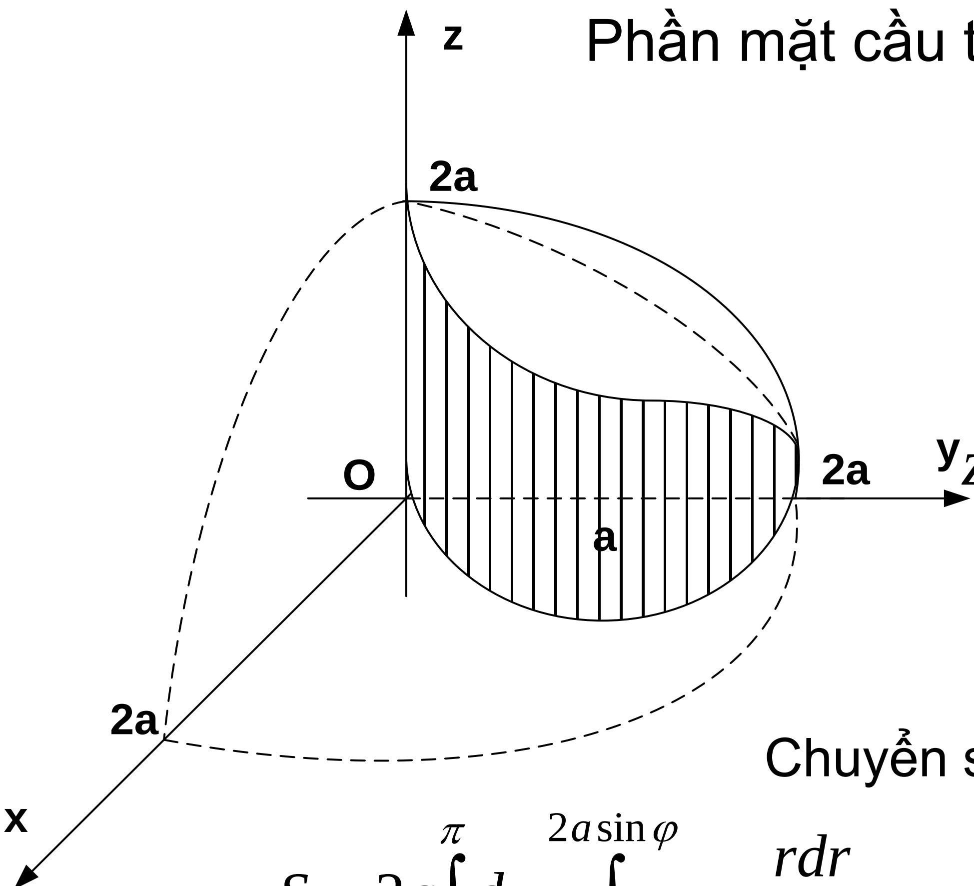
Định lý

Giả sử hàm số $f(x,y,z)$ liên tục trên mặt cong S trơn cho bởi phương trình $z = z(x,y), (x,y) \in D$. Khi đó

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + z'^2_x(x,y) + z'^2_y(x,y)}dxdy$$

Ví dụ

Tính diện tích phần phía trên mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ nằm trong hình trụ $x^2 + y^2 \le 2ay,\ a > 0$



Phần mặt cầu trên có phương trình $z = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}$

$$D:\ x^2 + (y-a)^2 \le a^2$$

$$S = \iint_S dS = \iint_D \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\,dxdy$$

$$z'_x = -\frac{x}{z},\ z'_y = -\frac{y}{z} \Rightarrow \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \frac{2a}{|z|}$$

$$\Rightarrow S = \iint_D \frac{2a}{\sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}}\,dxdy$$

Chuyển sang toạ độ cực ta được

$$S = 2a\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2a\sin\varphi} \frac{rdr}{\sqrt{4a^2 - r^2}} = -2a\int_0^{\pi} \sqrt{4a^2 - r^2}\Big|_0^{2a\sin\varphi} d\varphi = 8a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

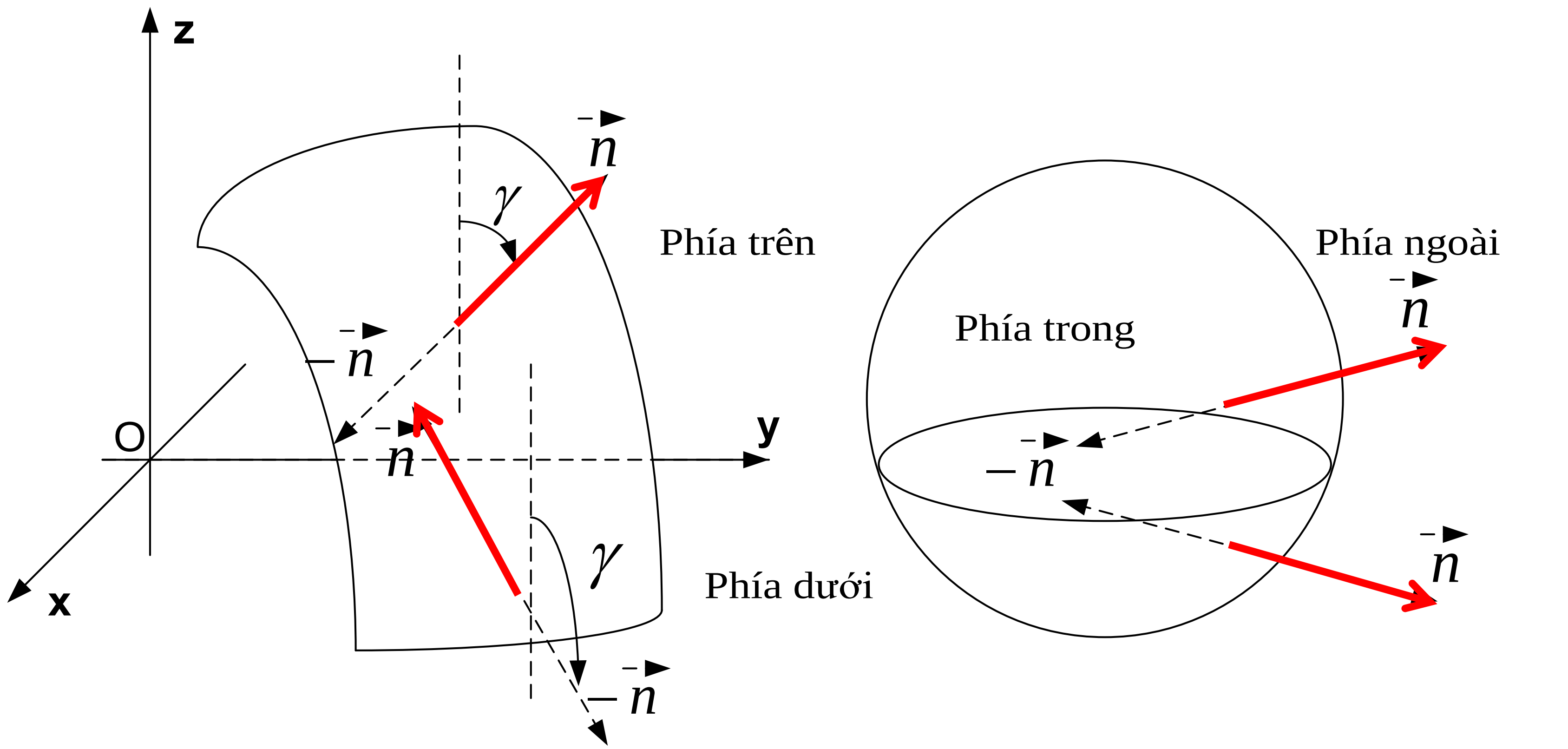
Nhận xét

❖ Trường hợp mặt cong S cho bởi phương trình $y = y(z, x)$ hoặc $x = x(y, z)$ thì ta phải chiếu S lên mặt phẳng Ozx hoặc Oyz để tìm miền tính tích phân kép tương ứng

3.5. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI HAI

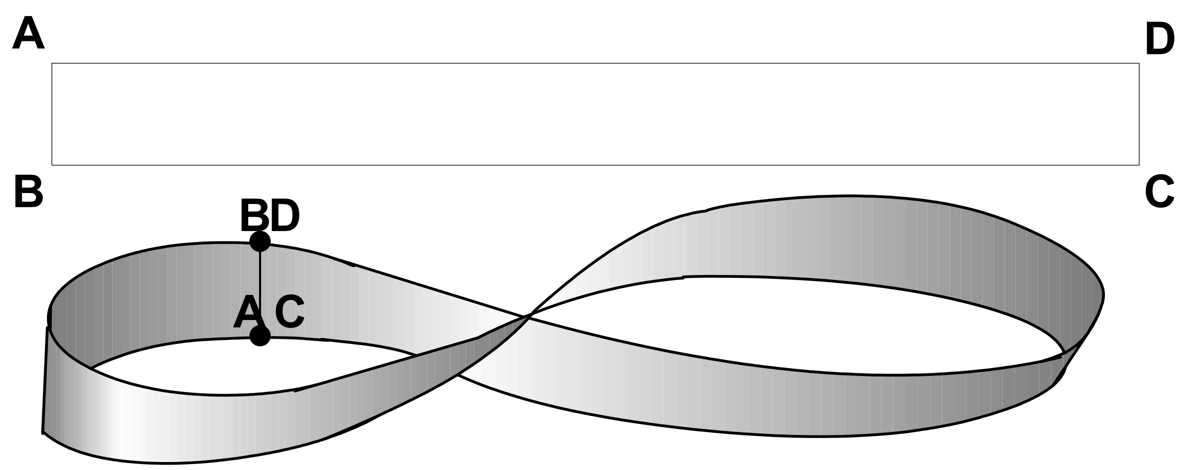
3.5.1. Mặt định hướng

- Mặt cong S trơn gọi là định hướng được nếu véctơ pháp tuyến đơn vị $\vec{n}(M)$ hoàn toàn xác định tại mọi $M \in S$ (có thể trừ biên của S) và biến đổi liên tục khi M chạy trên S
- Tập hợp $\vec{n}(M), \forall M \in S$ của mặt cong có định hướng xác định một phía của mặt cong
- Vì rằng $-\vec{n}(M)$ cũng là véctơ pháp tuyến nên mặt định hướng luôn có hai phía



- Khi mặt cong S không kín và định hướng được, người ta thường dùng từ phía trên và phía dưới để chỉ hướng đã xác định bởi $\vec{n}(M)$
- Phía trên của mặt S là phía mà $\vec{n}(M)$ lập với trục Oz góc nhọn, còn phía dưới là phía mà $\vec{n}(M)$ lập với trục Oz góc tù

- Khi mặt cong S kín định hướng được, người ta dùng từ phía trong và phía ngoài để mô tả hướng đã xác định
- Phía ngoài là phía mà $\vec{n}(M)$ hướng ra phía ngoài vật thể V bao quanh bởi mặt cong S, phía trong là phía ngược lại
- Lá Mobius là ví dụ điển hình cho mặt một phía, không định hướng được



3.5.2. Định nghĩa tích phân mặt loại hai

Cho mặt cong S đã định hướng theo véctơ pháp tuyến $\vec{n}(M)$ và ba hàm $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ xác định trên S

- Chia mặt cong S thành n mảnh không dẫm lên nhau ΔS_i. Ký hiệu đường kính của mảnh thứ i là d_i, $i = \overline{1, n}$
- Lấy tuỳ ý n điểm $M_i(x_i, y_i, z_i) \in \Delta S_i$. Véc tơ pháp tuyến của mặt S tại điểm M_i là $\vec{n}(M_i) = (\cos\alpha_i; \cos\beta_i; \cos\gamma_i)$

  trong đó $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ lần lượt là góc tạo bởi $\vec{n}(M_i)$ và chiều dương của Ox, Oy, Oz
- Lập tổng

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} \left[P(M_i)\cos\alpha_i + Q(M_i)\cos\beta_i + R(M_i)\cos\gamma_i \right] \Delta S_i$$

- I_n được gọi là tổng tích phân mặt loại hai của ba hàm P, Q, R lấy trên mặt cong S đã định hướng theo $\vec{n}(M)$ với một cách chia và một cách chọn $M_i \in \Delta S_i,\ i = \overline{1, n}$

- Nếu khi $n \to \infty$ sao cho $\max d_i \to 0$ mà I_n hội tụ về số I không phụ thuộc cách chia S và cách chọn $M_i \in \Delta S_i$ thì số I gọi là tích phân mặt loại hai của ba hàm P, Q, R lấy trên mặt cong S đã định hướng và ký hiệu

$$I = \iint_S \left[P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\right] dS$$

- Tích phân mặt loại hai của trường véctơ $\vec{F}(P, Q, R)$ qua mặt cong S theo hướng $\vec{n}$ là tích phân mặt loại một của hàm $\vec{F}.\vec{n}$

$$I = \iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$$

Nhận xét

- Người ta chứng minh rằng, nếu mặt S định hướng được, trơn hoặc trơn từng mảnh và các hàm P,Q,R liên tục trên S thì tích phân mặt loại hai của P,Q,R tồn tại
- Nếu đổi hướng của mặt thì tích phân mặt loại hai đổi dấu
- Tích phân mặt loại hai cũng có các tính chất như tích phân kép
- Giả sử dòng chất lỏng chảy qua mặt S với vận tốc $\vec{v}(M)$. Khi đó thông lượng của trường véc tơ $\vec{v}(M)$ qua mặt S là lượng chất lỏng chảy qua S trong một đơn vị thời gian
- Thông lượng của trường véctơ $\overrightarrow{F}(P,Q,R)$ qua mặt cong đã định hướng S được tính theo công thức

$$\Phi = \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

3.5.3. Công thức tính tích phân mặt loại hai

Định lý

Giả sử $R(x, y, z)$ liên tục trên mặt cong định hướng S trơn cho bởi phương trình $z = z(x, y), (x, y) \in D$. Khi đó

$$\iint\limits_S R(x, y, z)dxdy = \iint\limits_D R(x, y, z(x, y))dxdy$$

nếu tích phân mặt loại hai được lấy theo phía trên của mặt S

tức là $\cos\gamma \geq 0$

$$\iint\limits_S R(x, y, z)dxdy = -\iint\limits_D R(x, y, z(x, y))dxdy$$

nếu tích phân mặt loại hai được lấy theo phía dưới của mặt S

tức là $\cos\gamma \leq 0$

Tương tự

$$\iint_S P(x,y,z)dydz = \begin{cases} \iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)dydz \quad \text{khi } \cos\alpha \geq 0 \\ -\iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)dydz \text{ khi } \cos\alpha \leq 0 \end{cases}$$

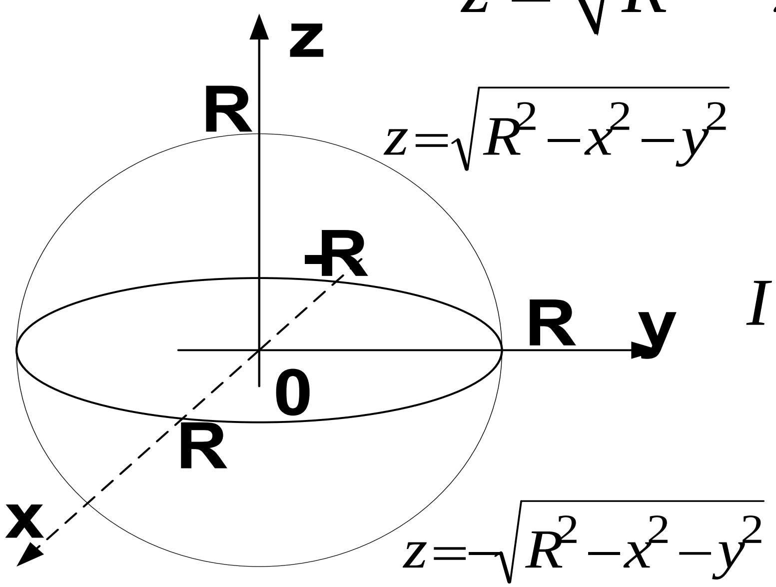
$$\iint_S Q(x,y,z)dzdx = \begin{cases} \iint_{D_{zx}} Q(x,y(z,x),z)dzdx \quad \text{khi } \cos\beta \geq 0 \\ -\iint_{D_{zx}} Q(x,y(z,x),z)dzdx \text{ khi } \cos\beta \leq 0 \end{cases}$$

Ví dụ Tính $I = \iint_S z\,dxdy$

với S là phía ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

Chia mặt cầu thành nửa trên S_+ và nửa dưới S_- có phương trình lần lượt là

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \text{ và } z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$



Chiếu các nửa mặt cầu lên Oxy ta được

$$D: x^2 + y^2 \le R^2$$

$$I = \iint_{S_+} z\,dxdy + \iint_{S_-} z\,dxdy = 2\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dxdy$$

$$I = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2}.r.dr = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Cách khác

$$I = \iint_S z\,dxdy = \iint_S z\cos\gamma\,dS = \frac{1}{R}\iint_S z^2 dS = \frac{1}{3R}\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)dS = \frac{R}{3}\iint_S dS = \frac{4\pi R^3}{3}$$

do $R\cos\gamma = z$

3.6. CÔNG THỨC STOKES, CÔNG THỨC GAUSS-OSTROGRADSKY

3.6.1. Công thức Stokes

Công thức Stokes mở rộng công thức Green, đó là mối liên hệ giữa tích phân đường loại hai trong không gian với tích phân mặt loại hai

Định lý (Stokes)

Giả sử mặt cong S định hướng được, trơn từng mảnh có biên là đường L trơn từng khúc và các hàm số P, Q, R liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng trên mặt cong S. Khi đó

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

trong đó tích phân đường ở vế trái lấy theo hướng dương của L

Hướng dương của L được quy ước: nếu đi theo hướng đó thì mặt cong S ở phía tay trái và mặt cong S được định hướng bởi véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$ hướng từ chân lên đầu

Nhận xét

- Khi thay $z=0,\ R(x,y,z)=0$ vào công thức Stokes ta nhận được công thức Green
- Cho trường véc tơ $\overrightarrow{F}=(P,Q,R)$;

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{F}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

Công thức Stokes có thể viết dưới dạng

$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint_S \operatorname{rot}\overrightarrow{F}.\overrightarrow{n}_0.dS=\iint_S \begin{vmatrix} dydz & dxdz & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

trong đó $\overrightarrow{n_0}$ là véc tơ pháp tuyến có độ dài bằng 1, tức là

$\overrightarrow{n_0}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ trong đó α,β,γ lần lượt là góc tạo bởi

$\overrightarrow{n_0}$ và chiều dương của Ox, Oy, Oz

- Xuất phát từ công thức Stokes, ta nhận được định lý bốn mệnh đề tương đương xét trong không gian $\mathbb{R}^3$

Định lý

Giả sử các hàm P, Q, R liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng trên miền đơn liên V. Khi đó bốn mệnh đề sau đây là tương đương

1) $\dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial z}, \quad \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x}, \quad \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}, \quad \forall (x, y, z) \in V$

2) $\oint\limits_L P dx + Q dy + R dz = 0,$

L là đường cong kín bất kỳ nằm trong miền V

3) $\int\limits_{AB} P dx + Q dy + R dz$, trong đó $AB \subset V$,

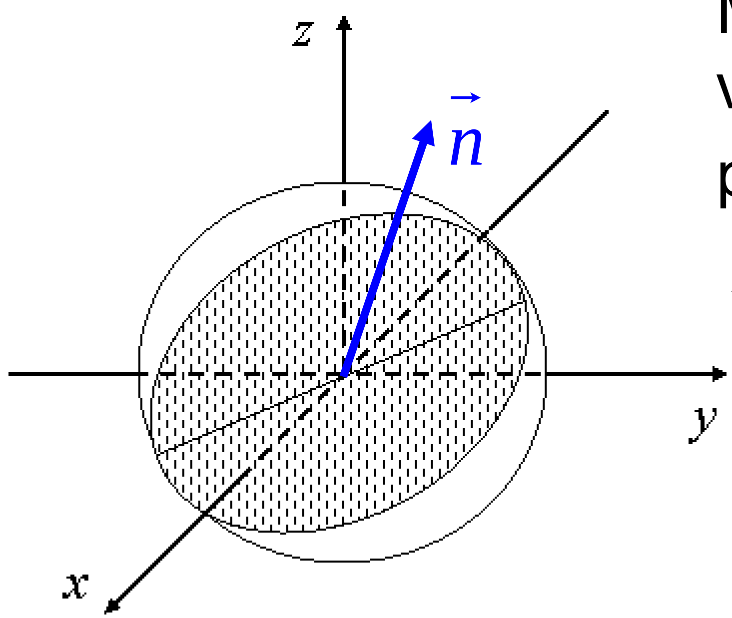
không phụ thuộc vào dạng cung AB

4) Biểu thức $P dx + Q dy + R dz$ là vi phân toàn phần của hàm $u(x, y, z)$ nào đó trên miền V

$$\int\limits_{AB} P dx + Q dy + R dz = u(B) - u(A)$$

Ví dụ Tính $I = \oint\limits_C ydx + zdy + xdz$

với C là đường tròn, giao của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ và mặt phẳng $x + y + z = 0$ và hướng của C là ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn về phía $z > 0$



Mặt phẳng $x + y + z = 0$ đi qua tâm mặt cầu, vậy giao tuyến là đường tròn lớn có véc tơ pháp tuyến hướng $z > 0$ là $\vec{n} = (1,1,1)$

Áp dụng công thức Stokes với $\overrightarrow{n_0} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y & z & x \end{vmatrix} = (-1,-1,-1)$$

$$I = \oint\limits_C ydx + zdy + xdz = \iint\limits_S \operatorname{rot}\vec{F}.\overrightarrow{n_0}.dS = -\sqrt{3}\iint\limits_S dS = -\sqrt{3}\pi R^2$$

S là hình tròn giao của hình cầu và mặt phẳng

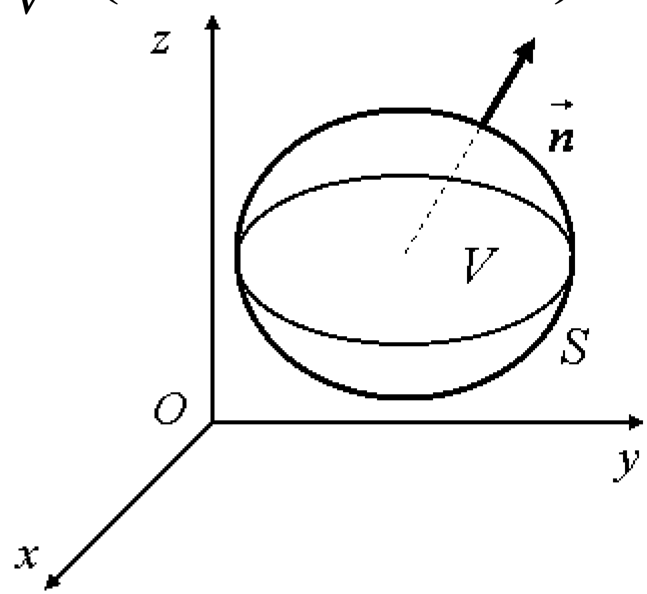
3.6.2. Công thức Gauss - Ostrogradsky

Định lý (Gauss – Ostrogradski)

Giả sử các hàm số P, Q, R liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng trong miền giới nội $V \subset \mathbb{R}^3$ có biên là mặt kín S trơn từng mảnh. Khi đó

$$\oiint\limits_S P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz$$

trong đó mặt lấy tích phân được định hướng ra phía ngoài



Nhận xét

- Bằng cách xét $P = x,\ Q = y,\ R = z$ ta nhận được công thức tính thể tích vật thể V nhờ vào tích phân mặt loại hai

$$V = \frac{1}{3}\oiint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$$

trong đó S được định hướng ra phía ngoài miền V

- Có thể coi rằng công thức Gauss – Ostrogradsky là mở rộng công thức Green từ không gian hai chiều ra ba chiều. Đôi khi tính tích phân trên mặt S không kín, ta có thể thêm mặt cong nào đó để áp dụng công thức Gauss –Ostrogradsky

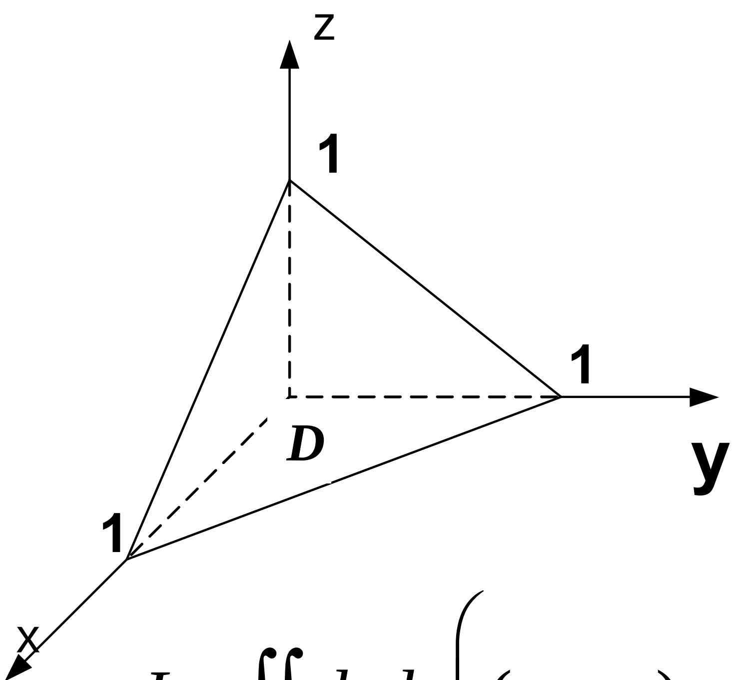
- Cho trường véc tơ $\overrightarrow{F} = (P, Q, R)$;

Công thức Gauss – Ostrogradsky có thể viết dưới dạng

$$\oiint\limits_S \overrightarrow{F}.\overrightarrow{n}.dS = \iiint\limits_V \operatorname{div}\overrightarrow{F}dxdydz$$

Ví dụ Tính $I=\iint\limits_S xzdydz+yxdzdx+zydxdy$

lấy theo phía ngoài của mặt S là biên của hình chóp



$$x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ x+y+z\le 1$$

Áp dụng công thức Gauss-Ostrogradsky

$$I=\iiint\limits_V (z+x+y)dxdydz$$

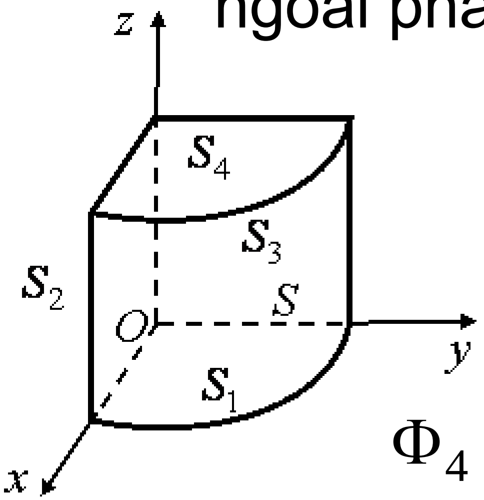
$$I=\iint\limits_D dxdy\int_0^{1-x-y}(x+y+z)dz$$

$$I=\iint\limits_D dxdy\left((x+y)z+\frac{1}{2}z^2\Big|_{z=0}^{1-x-y}\right)=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{1}{2}\left[1-(x+y)^2\right]dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\left(y-\frac{1}{3}(x+y)^3\Big|_{y=0}^{y=1-x}\right)=\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-x-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}x^3\right)dx=\frac{1}{8}$$

Ví dụ

Tính thông lượng của trường véc tơ $\vec{F}(x^3, y^3, z^3)$ qua phía ngoài phần mặt trụ $x^2 + y^2 = R^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0, 0 \le z \le h$



$$\Phi = \iint_S x^3 dydz + y^3 dxdz + z^3 dxdy$$

$$\Phi_k = \iint_{S_k} x^3 dydz + y^3 dxdz + z^3 dxdy \quad \Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = 0$$

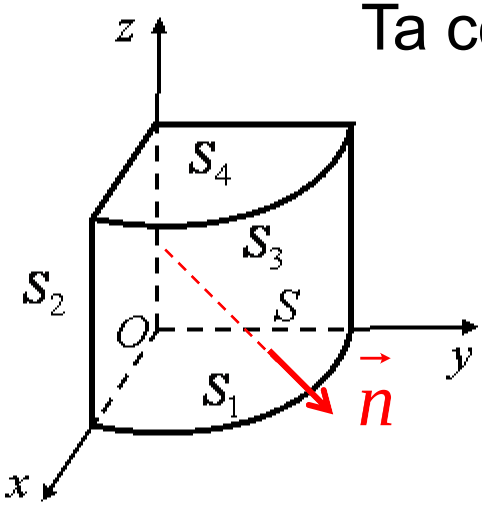
$$\Phi_4 = \iint_D h^3 dxdy = h^3 \frac{\pi R^2}{4}; D = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \le R^2, x \ge 0, y \ge 0\right\}$$

Áp dụng công thức Gauss-Ostrogradsky ta được

$$\Phi + \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 = 3\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz$$

$$\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R rdr \int_0^h (r^2 + z^2) dz = \frac{\pi h R^4}{8} + \frac{\pi h^3 R^2}{12}$$

$$\Phi = 3\left(\frac{\pi h R^4}{8} + \frac{\pi h^3 R^2}{12}\right) - h^3 \frac{\pi R^2}{4} = \frac{3\pi h R^4}{8}$$



Ta có thể tính trực tiếp $\Phi = \iint\limits_S x^3 dydz + y^3 dxdz + z^3 dxdy$

$$\vec{n} = \left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, 0\right) \Rightarrow \iint\limits_S z^3 dxdy = 0$$

$$\iint\limits_S y^3 dxdz = \iint\limits_{D_1} \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^3 dxdz$$

$$\iint\limits_{D_1} \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^3 dxdz = \int_0^R \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^3 dx \int_0^h dz = h\int_0^R \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^3 dx$$

Đổi biến $x = R\sin t$

$$h\int_0^R \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^3 dx = hR^4 \int_0^{\pi/2} \cos^4 t dt = \frac{3\pi h R^4}{16}$$

Tương tự $\iint\limits_S x^3 dydz = \frac{3\pi h R^4}{16} \Rightarrow \Phi = \frac{3\pi h R^4}{8}$