VI PHÂN, CỰC TRỊ

1) Vi phân;
2) Cực trị không điều kiện hàm nhiều biến;
3) Cực trị có điều kiện;
4) Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

Tài liệu: Toán cao cấp tập 3, trang 10 – 29.
Calculus, page 922 – 941.

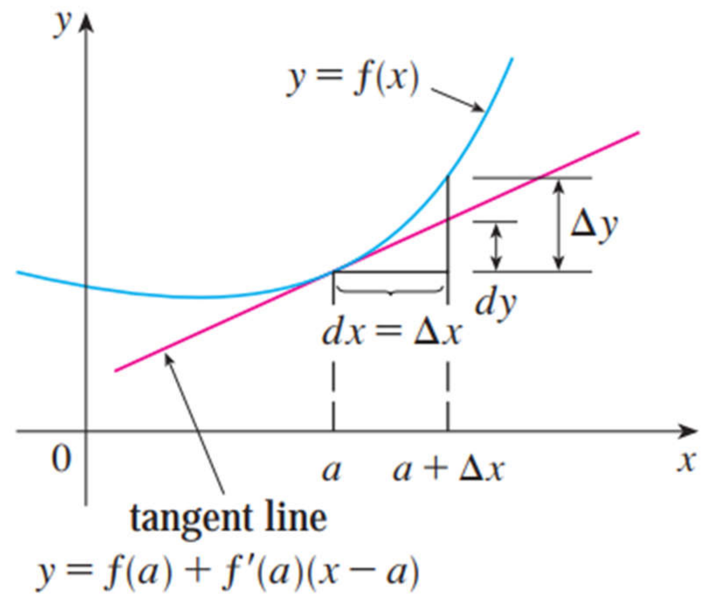
1. Vi phân (Differential)

- ***Nhắc lại***: Đối với hàm 1 biến
- Xét hàm $y = f(x)$, khi đó $dy = f'(x).dx$
- Với dx – số gia của biến số (là 1 biến độc lập) – có thể là một số thực tùy ý.
- Công thức tính gần đúng:

$f(x) \approx f(a) + f'(a).(x - a)$

Ý nghĩa: Tại lân cận điểm a,

$f(x) \approx$ giá trị nằm trên đường tiếp tuyến tại a. Suy ra Δx lớn sẽ k đúng



1. Vi phân (Differential)

- Đối với hàm 2 biến: $z = f(x, y)$, coi dx, dy – biến độc lập, do đó có thể là một số thực tùy ý.
- Khi đó vi phân $dz\ (df)$: vi phân toàn phần bằng:

$$dz = f_x(x, y).dx + f_y(x, y).dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Nếu lấy $dx = \Delta x = x - a;\ \ dy = \Delta y = y - b$ thì:

$$dz = f_x(x, y).(x - a) + f_y(x, y).(y - b)$$

1. Vi phân (Differential)

- ***Ví dụ.*** Tìm vi phân toàn phần của hàm số:

$$f(x,y) = \ln tan\frac{y}{x}$$

- ***Hướng dẫn***:

$$f'_x = \frac{-2y}{x^2 \sin\frac{2y}{x}}; \quad f'_y = \frac{2}{x\sin\frac{2y}{x}}$$

$$\Rightarrow df = f'_x dx + f'_y dy = \frac{-2y}{x^2\sin\frac{2y}{x}}dx + \frac{2dy}{x\sin\frac{2y}{x}} = \frac{2(xdy - ydx)}{x^2\sin\frac{2y}{x}}$$

1. Vi phân (Differential)

❖ **Áp dụng vi phân toàn phần để tính gần đúng:**

Để tính gần đúng giá trị $f(x,y)$ ở lân cận tiếp điểm M(a,b), ta tính thông qua $g(x,y)$ – phương trình mặt tiếp diện của S tại M.

Pt mặt tiếp diện:

$$z = g(x,y) = c + f_x(a,b).(x-a) + f_y(a,b).(y-b),$$

Hay:

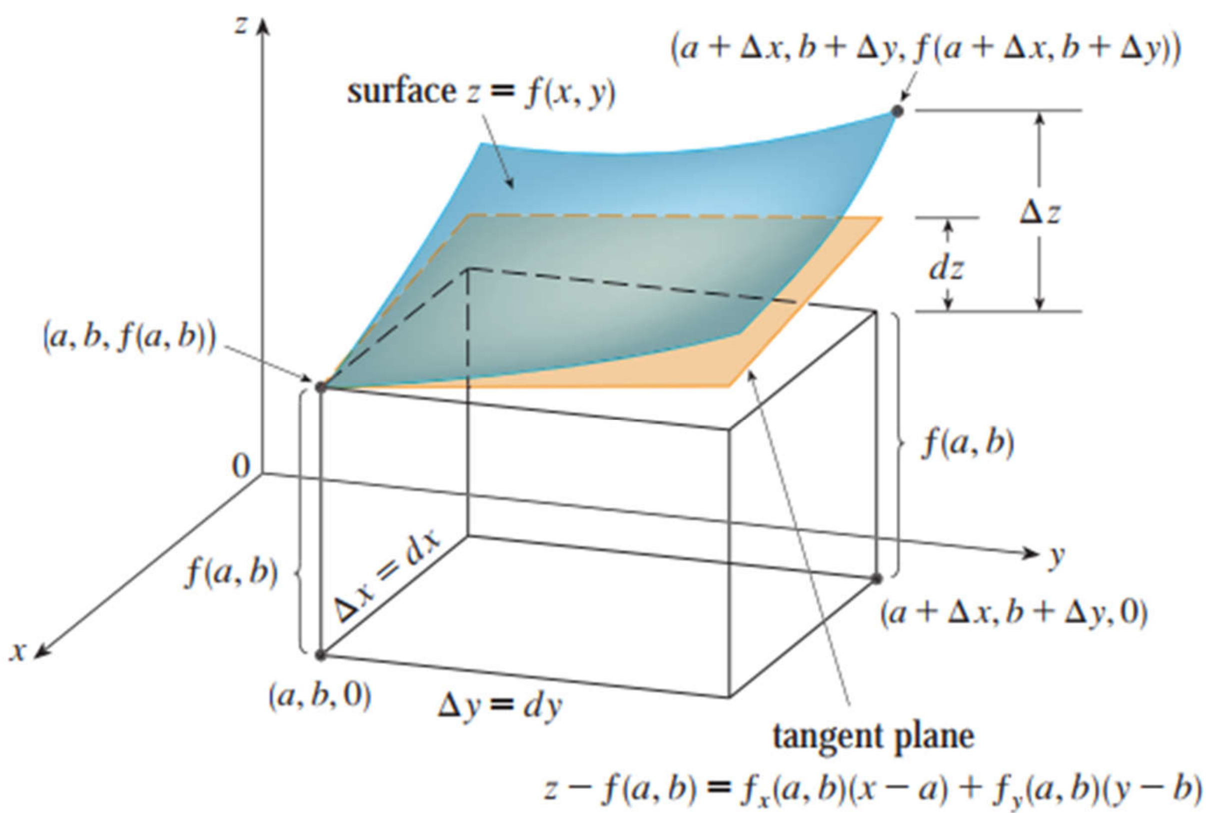
$$z(a+\Delta x, b+\Delta y) = c + f_x(a,b).\Delta x + f_y(a,b).\Delta y$$

Với $c = f(a,b)$

1. Vi phân (Differential)

- Vậy công thức tính gần đúng đối với hàm 2 biến:

$$f(a+\Delta x, b+\Delta y) \approx f(\mathrm{a},\mathrm{b}) + f_x'(\mathrm{a},\mathrm{b}).\Delta x + f_y'(\mathrm{a},\mathrm{b}).\Delta y$$



1. Vi phân (Differential)

- Các bước để tính gần đúng:

✓ Xác định hàm $f, \Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$

✓ Tính các đạo hàm riêng $f'_x, f'_y, f'_z, \ldots$

✓ Thay vào công thức tính gần đúng

Ví dụ: Cho hàm số $z = f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$.

a) Tính dz?

b) Nếu x thay đổi từ 2 tới 2.05, y thay đổi từ 3 tới 2.96, so sánh giá trị của Δz và dz?

1. Vi phân (Differential)

$$z = f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$$

a) Tính được: $z_x = 2x + 3y$; $z_y = 3x - 2y$

$$\Rightarrow dz = (2x + 3y)dx + (3x - 2y)dy$$

b) Thay $x = 2, y = 3, \Delta x = 0.05, \Delta y = -0.04$ vào dz:

$$dz = 13 \times 0.05 + 5 \times (-0.04) = 0.65$$

Số gia của z bằng:

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(2.05,2.96) - f(2,3)\\ &= (2.05)^2 + 3 \times 2.05 \times 2.96 - (2.96)^2 - 4 - 18 + 9\\ &= 0.6449\end{aligned}$$

Nhận thấy $\Delta z \approx dz$, nhưng dz dễ tính hơn.

1. Vi phân (Differential)

- ***Ví dụ***. Tính gần đúng $\sqrt[3]{(1,01)^2 + (0,05)^2}$

$f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2} = (x^2 + y^2)^{1/3}$,

$M_0(1,0), \Delta x = 0,01, \Delta y = 0,05$

$$f'_x = \frac{2}{3}\frac{x}{\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}} \Rightarrow f'_x(M_0) = \frac{2}{3}$$

$$f'_y = \frac{2}{3}\frac{y}{\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}} \Rightarrow f'_y(M_0) = 0$$

$f(1,0) = 1$

$$\sqrt[3]{(1,01)^2 + (0,05)^2}$$

$$\approx 1 + \frac{2}{3}.0,01 = 1,0067$$

1.2. Vi phân cấp 2

- Vi phân của vi phân toàn phần cấp 1 tại điểm *M(x,y)* được gọi là vi phân cấp 2 của hàm *f(x,y)* tại điểm *M(x,y)*.
- Kí hiệu: $d^2f(x,y) = d\big(df(x,y)\big)$.
- Nếu hàm *f(x,y)* có các đạo hàm riêng liên tục cấp 2 và là biến độc lập thì

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f$$

1.2. Vi phân cấp 2

- ***Ví dụ.*** Xác định vi phân cấp 2 của hàm số:

$$f(x,y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$$

Theo bài cho ta có:

$$f'_x = 4x - y - 6;\ \ f'_y = -x - 2y - 3$$

$$f''_{xx} = 4;\quad f''_{xy} = -1;\ \ f''_{yy} = -2$$

$$\Rightarrow d^2 f\left(x,y\right) = 4dx^2 - 2dxdy - 2dy^2$$

1.3. Khai triển Taylor

❑ ***Công thức khai triển Taylor***:

$$f(M) = f(M_0) + df(M_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(M_0) + \ldots + \frac{1}{n!}d^n f(M_0) + R_n$$

Trong đó, R_n là phần dư.

Ví dụ. Khai triển hàm số sau theo công thức Taylor ở lân cận điểm $M_0(1, -2)$

$$f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$$

1.3. Khai triển Taylor

$$f(x,y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5; M_0(1,-2)$$

Ta có: $f(M_0) = 5$

$$f_x^{'} = 4x - y - 6; \; f_y^{'} = -x - 2y - 3$$

$$f_{xx}^{''} = 4; \quad f_{xy}^{''} = -1; \; f_{yy}^{''} = -2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_x^{'}(M_0) = 0; \; f_y^{'}(M_0) = 0 \\ f_{xx}^{''}(M_0) = 4; \; f_{xy}^{''}(M_0) = -1; \; f_{yy}^{''}(M_0) = -2 \end{cases}$$

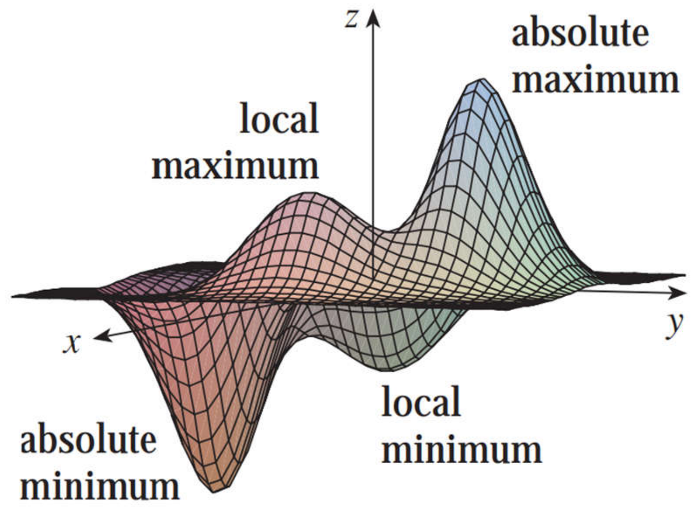
Thay vào công thức khai triển Taylor, suy ra:

$$f(x,y) = 5 + 2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2$$

2. Cực trị không có điều kiện hàm 2 biến

- ***Định nghĩa***

Một hàm hai biến có cực đại tại (a,b) nếu $f(x,y) \leq f(a,b)$ khi (x,y) gần (a,b).



Giá trị $f(a,b)$: giá trị cực đại.

Cực tiểu:

Nếu $f(x,y) \geq f(a,b)$ khi (x,y) gần (a,b) thì $f(x,y)$ có cực tiểu tại (a,b). Giá trị $f(a,b)$ là giá trị cực tiểu.

➢ Điểm cực đại, cực tiểu: điểm cực trị

2. Cực trị không có điều kiện của hàm 2 biến

- ***Định lý:***

Nếu hàm f có cực đại hoặc cực tiểu tại (a, b) và các đạo hàm riêng cấp một của f tồn tại thì:

$$f_x(a, b) = 0 \ \text{và} \ f_y(a, b) = 0$$

- ***Điểm tới hạn:***

Điểm (a, b) được gọi là điểm tới hạn (hoặc điểm dừng) của f nếu $f_x(a, b) = 0$ và $f_y(a, b) = 0$, hoặc 1 trong các đạo hàm riêng đó không tồn tại.

Nếu (a, b) là điểm cực trị $\Rightarrow$ (a, b) là điểm tới hạn.

Nếu (a, b) là điểm tới hạn $\nRightarrow$ (a, b) là điểm cực trị.

2. Cực trị không có điều kiện của hàm 2 biến

- ***Ví dụ***. Xét hàm $f = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$.

Có: $f_x(x, y) = 2x - 2$; $\quad f_y(x, y) = 2y - 6$

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ 2y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy điểm dừng: $M(1,3)$.

Lại có: $f = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$

$$= (x-1)^2 + (y-3)^2 + 4 \geq 4.$$

Vậy $M(1,3)$: điểm cực tiểu của f,

$f(1,3) = 4$: giá trị cực tiểu của f.

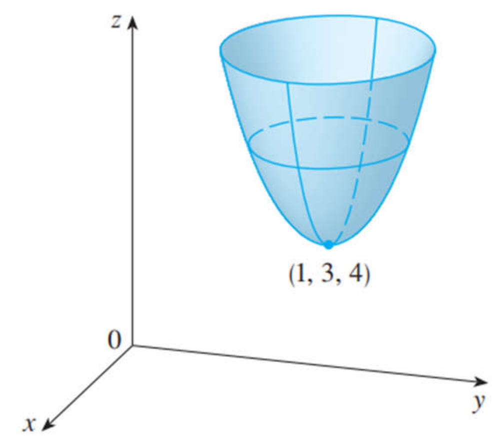


FIGURE 2
$z = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$

2. Cực trị không có điều kiện của hàm 2 biến

- ***Ví dụ***: Tìm giá trị cực trị của $f = y^2 - x^2$.

Ta có: $f_x(x,y) = -2x$; $\quad f_y(x,y) = 2y$;

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Điểm dừng: $M(0,0)$;

Các điểm trên Ox: $f = -x^2 < 0, x \neq 0$;

Các điểm trên Oy:$f = y^2 > 0, y \neq 0$;

Lân cận (0,0), *f* lấy giá trị dương và âm.

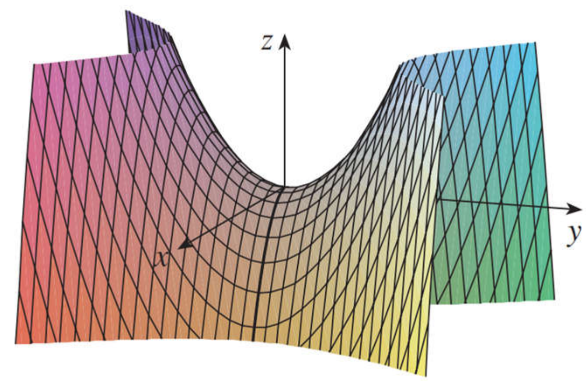


FIGURE 3
$z = y^2 - x^2$

➢ Hàm *f* không có cực trị tại (0,0). M(0,0): điểm yên ngựa.

2. Cực trị không có điều kiện của hàm 2 biến

- ***Dấu hiệu sử dụng đạo hàm riêng cấp 2***

Giả sử các đạo hàm riêng cấp 2 của *f* liên tục tại lân cận (a,b) và (a,b) là một điểm tới hạn của f.

$$\text{Xét } D = f_{xx}(a,b).f_{yy}(a,b) - \left[f_{xy}(a,b)\right]^2$$

- Nếu $D > 0$ và $f_{xx}(a,b) > 0$ thì (a,b): điểm cực tiểu;
- Nếu $D > 0$ và $f_{xx}(a,b) < 0$ thì (a,b): điểm cực đại;
- Nếu $D < 0$ thì (a,b): không là điểm cực trị.

2. Cực trị không có điều kiện của hàm 2 biến

- ***Ví dụ***. Tìm cực trị của hàm $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.
- ***Giải***: Ta có $f_x = 4x^3 - 4y$; $f_y = 4y^3 - 4x$

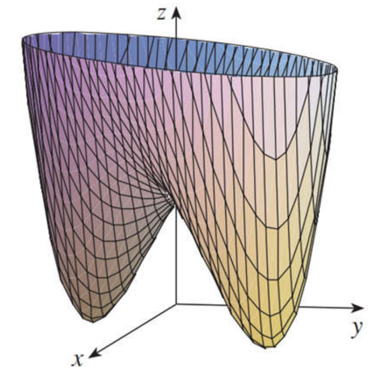


FIGURE 4
$z = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

Giải hệ: $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4y = 0 \\ 4y^3 - 4x = 0 \end{cases}$;

Các điểm tới hạn: $A(0,0)$; $B(1,1)$; $C(-1,-1)$;

Đạo hàm riêng cấp 2: $f_{xx} = 12x^2$; $f_{yy} = 12y^2$; $f_{xy} = -4$

$$D(x,y) = 144x^2y^2 - 16$$

$D(0,0) = -16 \Rightarrow A(0,0)$: không là cực trị;

$D(1,1) = 128$; $f_{xx} = 12 \Rightarrow B(1,1)$: điểm cực tiểu;

$D(-1,-1) = 128$; $f_{xx} = 12 \Rightarrow C(-1,-1)$: điểm cực tiểu.

2. Cực trị không có điều kiện của hàm 2 biến

- Tóm tắt: Các bước làm bài toán tìm cực trị không điều kiện

1. $f(x, y)$
2. Tính f_x, f_y, tìm điểm dừng
3. Tính f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}; Lập D
4. Kiểm tra D tại điểm dừng rồi KL

2. Cực trị không có điều kiện của hàm 2 biến

- ***Ví dụ***. Tìm các điểm cực trị của hàm số:

$$z = 8x^3 + 2xy - 3x^2 + y^2$$

$$z'_x = 24x^2 + 2y - 6x; \quad z'_y = 2x + 2y$$

$$z''_{xx} = 48x - 6; \quad z''_{xy} = z''_{yx} = 2; \quad z''_{yy} = 2$$

Điểm dừng hàm số được xác định từ hệ:

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x^2 + y - 3x = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ x = \dfrac{1}{3},\ y = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$M_1(0,0);\ M_2\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

2. Cực trị không có điều kiện của hàm 2 biến

- Xét tại điểm M_1 ta có:

$$A(0,0) = -6; \quad B(0,0) = 2; \quad C(0,0) = 2$$

$$\Rightarrow D = AC - B^2 = -12 - 4 = -16 < 0$$

Vậy M_1 không phải là điểm cực trị của hàm đã cho

- Xét tại điểm M_2 ta có:

$$A\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = 10; \quad B\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = 2; \quad C\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = 2$$

$$\Rightarrow D = AC - B^2 = 20 - 4 = 16 > 0$$

Vậy M_2 là điểm cực tiểu của hàm đã cho.

2. Cực trị không có điều kiện của hàm 2 biến

- ***Ví dụ:*** Tìm các điểm cực trị của hàm số:

$$z = x + 2e.y - e^{x} - e^{2y}$$

$$\begin{cases} z'_x = 1 - e^{x} \\ z'_y = 2e - 2e^{2y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - e^{x} = 0 \\ 2e - 2e^{2y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M_0\left(0, \frac{1}{2}\right)$$

$$z''_{xx} = -e^{x} \Rightarrow z''_{xx}\left(M_0\right) = -1$$

$$z''_{yy} = -4e^{2y} \Rightarrow z''_{yy}\left(M_0\right) = -4e \quad \Rightarrow D = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4e \end{vmatrix} = 4e > 0$$

$$z''_{xy} = 0 \Rightarrow z''_{xy}\left(M_0\right) = 0$$

M_0: điểm cực đại.

2.2. Cực trị hàm nhiều biến

❖ ***Cực trị của hàm nhiều biến số***.

- Xét hàm n biến (n > 2): $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ có tập xác định A trong R^n.
- Điểm dừng của hàm f thỏa mãn hệ: $$\begin{cases} f'_{x_1} = 0 \\ f'_{x_2} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f'_{x_n} = 0 \end{cases}$$
- Gọi $M(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ là một điểm dừng của hàm f.
- Xét: $$d^2 f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} dx_i dx_j; \qquad a_{ij} = \frac{\partial^2 f(M)}{\partial x_i \partial x_j}$$

2.2. Cực trị hàm nhiều biến

- Lập ma trận H = $(a_{ij})_{n.n}$ (Hess)
- Kí hiệu H_k: định thức con chính cấp k (tạo từ k hàng đầu và k cột đầu của H).

Khi đó:

- Nếu $H_k > 0$ với mọi k = 1, 2,.., n thì M là điểm cực tiểu;
- Nếu $(-1)^k H_k > 0$ với mọi k thì M là điểm cực đại.
-

2.2. Cực trị hàm nhiều biến

- ***Ví dụ:*** Tìm cực trị hàm:

$$f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z},\ (x,y,z > 0)$$

- ***Hướng dẫn:***

  Xác định điểm dừng:

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \\ f'_z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \dfrac{y^2}{4x^2} = 0 \\ \dfrac{y}{2x} - \dfrac{z^2}{y^2} = 0 \\ \dfrac{2z}{y} - \dfrac{2}{z^2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{1}{2},1,1\right)$$

2.2. Cực trị hàm nhiều biến

- Lập ma trận Hess:

$$a_{11} = f''_{xx}(M) = 4;\ a_{22} = f''_{yy}(M) = 3;\ a_{33} = f''_{zz}(M) = 6$$

$$a_{12} = a_{21} = f''_{xy}(M) = -2;\ a_{13} = a_{31} = f''_{xz}(M) = 0$$

$$a_{23} = a_{32} = f''_{yz}(M) = -2$$

$$H = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} H_1 = 4 > 0 \\ H_2 = 8 > 0 \\ H_3 = 32 > 0 \end{cases}$$

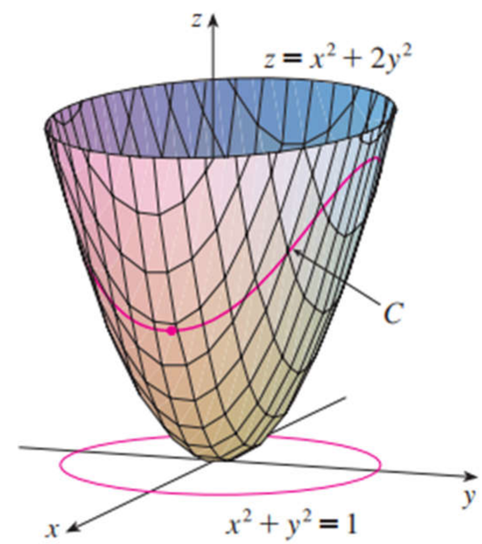
- Vậy M (1/2, 1, 1) là điểm cực tiểu.

3. Cực trị có điều kiện của hàm 2 biến

- ***Định nghĩa:***

Cực trị của hàm *f(x,y)* trong đó *x, y* bị rằng buộc bởi hệ thức *g(x,y) = 0* được gọi là cực trị có điều kiện trong miền xác định D.

Ví dụ: Tìm cực trị của hàm $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.



3. Cực trị có điều kiện của hàm 2 biến

❖ ***Cách tìm:*** Phương pháp nhân tử Lagrange

- Lập hàm Lagrange: $L = f(x,y) + \lambda g(x,y)$

  Với λ : hằng số nhân chưa xác định (nhân tử Lagrange)

- Tính: $L'_x; L'_y;$

- Tìm điểm dừng:

$$\text{Giải hệ } \begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow x, y, \lambda$$

3. Cực trị có điều kiện của hàm 2 biến

- Xét dấu của d^2L:

$$d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}dy^2$$

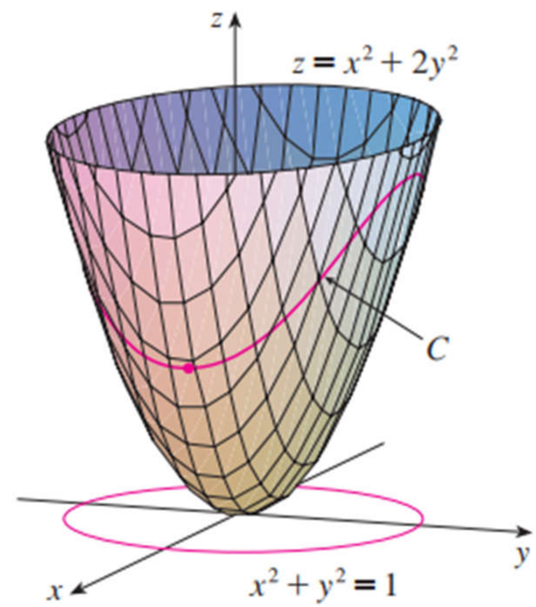
Với điều kiện:

$$\frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy = 0 \left(dx^2 + dy^2 \neq 0\right)$$

- Nếu $d^2L < 0$: *f(x,y)* có cực đại có điều kiện
- Nếu $d^2L > 0$: *f(x,y)* có cực tiểu có điều kiện
- Nếu $d^2L = 0$: chưa nhận xét được gì

3. Cực trị có điều kiện của hàm 2 biến

- Ví dụ. Tìm cực trị của hàm $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.
- Giải. Từ bài cho ta có: $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$
- Hàm Lagrange:
- $L = x^2 + 2y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$
- $L_x = 2x + 2x\lambda;\ \ L_y = 4y + 2y\lambda$
- $\begin{cases} 2x + 2x\lambda = 0 \\ 4y + 2y\lambda = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$



3. Cực trị có điều kiện của hàm 2 biến

- Có 4 điểm dừng: $\lambda = -2: A(0,1); B(0,-1);$

$$\lambda = -1: C(-1,0); D(1,0)$$

$$L_{xx} = 2 + 2\lambda; L_{xy} = 0; L_{yy} = 4 + 2\lambda$$

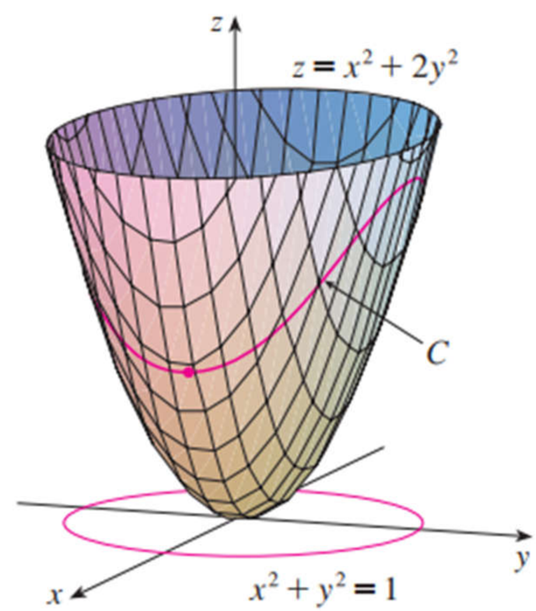
Xét: $d^2L = L_{xx}dx^2 + 2L_{xy}dxdy + L_{yy}dy^2$

$d^2L(0,1) = d^2L(0,-1) = -2dx^2 > 0$

$d^2L(1,0) = d^2L(-1,0) = 2dy^2 < 0$

Vậy $A(0,1); B(0,-1)$: điểm cực đại

$C(-1,0); D(1,0)$: điểm cực tiểu.



3. Cực trị có điều kiện của hàm 2 biến

Ví dụ: Tìm cực trị của hàm số: $f(x,y) = x^2 + y^2$ với điều kiện $g(x, y) = 2x + 2y - 1$.

➢ ***Hướng dẫn:***

– Lập hàm Lagrange: $L = x^2 + y^2 + \lambda(2x + 2y - 1)$

– Xác định điểm dừng: Giải hệ

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2\lambda = 0 \\ 2y + 2\lambda = 0 \\ 2x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\lambda \\ y = -\lambda \\ -2\lambda - 2\lambda - 1 = 0 \end{cases}$$

3. Cực trị có điều kiện của hàm 2 biến

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/4 \\ y = 1/4 \\ \lambda = -1/4 \end{cases}$$

Điểm dừng $M_0\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$

Mà $L''_{x^2} = 2; \quad L''_{y^2} = 2; \quad L''_{xy} = 0$

$$\Rightarrow d^2L = 2dx^2 + 2dy^2 = 2\left(dx^2 + dy^2\right) > 0$$

Suy ra M_0 là điểm cực tiểu của hàm số với điều kiện đã cho.

3. Cực trị có điều kiện của hàm 2 biến

- ***Ví dụ 2.*** Tìm cực trị có điều kiện của hàm:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 5x - 4y + 10,\ x + y = 4$$

- ***Hướng dẫn:***

Hàm Lagrange:

$$L = x^2 + y^2 + xy - 5x - 4y + 10 + \lambda(x + y - 4)$$

Tìm điểm dừng: Giải hệ

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 5 + \lambda = 0 \\ 2y + x - 4 + \lambda = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \\ 2x + y - 5 - \lambda = 0 \end{cases}$$

3. Cực trị có điều kiện của hàm 2 biến

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{2},\ y = \frac{3}{2},\ \lambda = -\frac{3}{2} \Rightarrow M_0\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

Vì $L''_{x^2} = 2; \quad L''_{xy} = 1; \quad L''_{y^2} = 2$

Suy ra:

$$d^2L = 2\left(dx^2 + dxdy + dy^2\right) = 2\left(dx + \frac{1}{2}dy\right)^2 + \frac{3}{4}dy^2 > 0$$

Vậy điểm M_0 là điểm cực tiểu của hàm với điều kiện đã cho.

$$\min f(x,y) = f\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{15}{4}$$

3. Cực trị có điều kiện của hàm 2 biến

- ***<u>Cách 2.</u>*** Phương pháp khử biến số
- Từ điều kiện ta có: $y = 4 - x$, thế vào $f(x,y)$ ta được:

$$h(x) = x^2 + (4-x)^2 + x(4-x) - 5x - 4(4-x) + 10$$

$$h(x) = x^2 - 5x + 10$$ ⇒ Hàm một biến số

- Khảo sát cực trị hàm $h(x)$:

$$h'(x) = 2x - 5$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$h''\left(\frac{5}{2}\right) = 2 > 0$$

3. Cực trị có điều kiện của hàm 2 biến

Suy ra: $x = 5/2$ là điểm cực tiểu của $h(x)$

$$x = \frac{5}{2} \Rightarrow y = 4 - x = \frac{3}{2}$$

Vậy:

$$\min f(x, y) = f\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{15}{4}$$

4. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

➢ Nhận xét: Mọi hàm số nhiều biến số *liên tục trong một miền đóng bị chặn D* đều đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của nó trong miền đó.

Cách tìm: Hàm số *f(x,y)* xác định trên miền D.

Tìm các điểm tới hạn → Tính các giá trị cực trị → So sánh các giá trị cực trị và giá trị trên biên rồi KL

4. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

❖ ***Ví dụ***. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$$

Trong miền $D = \{x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -3\}$.

❖ ***Hướng dẫn:***

- Xác định điểm dừng: giải hệ

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Suy ra điểm dừng: $M(-1, -1)$.

4. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

Xét tại điểm M:

$$f(M) = f(-1,-1) = -1$$

Khảo sát trên biên:

Biên $x = 0$

$\Rightarrow f = y^2 + y$: hàm một biến đối với $y, -3 \leq y \leq 0$

$f' = 0 \Leftrightarrow y = -1/2$

$$f(-1/2) = -\frac{1}{4}; \quad f(0) = 0; f(-3) = 6$$

4. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

Biên $y = 0$

$\Rightarrow f = x^2 + x$: hàm một biến đối với x, $-3 \le x \le 0$

$f' = 0 \Leftrightarrow x = -1/2$

$$f(-1/2) = -\frac{1}{4}; \quad f(0) = 0; f(-3) = 6$$

Biên $x + y = -3 \Rightarrow y = -3 - x$

$\Rightarrow f = 3x^2 + 9x + 6$: hàm 1 biến đối với x, $-3 \le x \le 0$

$f' = 0 \Leftrightarrow x = -3/2$

$$f(-3/2) = -\frac{3}{4}; \quad f(0) = 6; f(-3) = 6$$

4. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

So sánh các giá trị của *f(x,y)* kết luận:

- $\max f(x,y) = 6$ tại $(x,y) = \{(0,-3),(-3,0)\}$
- $\min f(x,y) = -1$ tại $(x,y) = (-1,-1)$

4. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

- Ví dụ. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$z = 8x^2 + 3y^2 + 1 - (2x^2 + y^2 + 1)^2$$

Trong miền tròn đóng D xác định bởi $x^2 + y^2 \leq 1$.

- ***Hướng dẫn***:

$$z = 8x^2 + 3y^2 + 1 - \left(2x^2 + y^2 + 1\right)^2$$

- Điểm tới hạn: giải hệ phương trình

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x\left(1 - 2x^2 - y^2\right) = 0 \\ 2y\left(1 - 4x^2 - 2y^2\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, y = 0 \\ x = 0, y = \pm 1/\sqrt{2} \\ x = \pm 1/\sqrt{2}, y = 0 \end{cases}$$

4. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

Các điểm tới hạn:

$$M_1(0,0);\ M_2\left(0,\frac{-1}{\sqrt{2}}\right);\ M_3\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right);\ M_4\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},0\right);\ M_5\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$$

Ta có:

$$z(M_1)=0;\quad z(M_2)=z(M_3)=\frac{1}{4};\quad z(M_4)=z(M_5)=1$$

Xét trên biên: $x^2+y^2=1 \Rightarrow y^2=1-x^2; -1\le x\le 1$

$$\Rightarrow z=8x^2+3(1-x^2)+1-(2x^2+1-x^2+1)^2$$

$$z=-x^4+x^2=x^2(1-x^2)$$: hàm 1 biến đối với x

$$z'=-4x^3+2x=2x(1-2x^2)$$

4. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$$z' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$$

$$z(0) = 0;\ z\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = z\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4}$$

Vậy: $\min\limits_{D} z = 0; \quad \max\limits_{D} z = 1$

Bài tập

- **Bài 1**. (Kết thúc môn HKI-19-20)
- Cho hàm số hợp

$$\begin{cases} f = f(u) = u^3 \\ u = u(x,y) = 2xy + e^{2x} \end{cases}; \text{ Tính } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

6(u^2+4xyu+e^2x.4ux)

- **Bài 2**. Dùng vi phân, tính gần đúng các hàm số sau:

1) $\sqrt[3]{(1,02)^2 + (0,05)^2}$

2) $\ln\left(\sqrt[3]{1,03}\right) + \sqrt[4]{0,98} - 1$

3) $\sqrt{9.(1,95)^2 + (8,1)^2}$

4) $\sqrt{\sin^2 1,55 + 8.e^{0,015}}$

Bài tập

- ***Bài 2***. Tìm d^2u nếu:

1) $u = e^{xy}$
2) $u = xyz$
3) $u = \varphi(t),\ t = x^2 + y^2$
4) $u = f(v, \mathrm{w}),\ v = ax,\ w = by$
5) $u = v^w,\ v = \dfrac{x}{y},\ w = xy$
6) $u = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y;\ d^2u(1,2) = ?$

Bài tập

Bài 3. a) Chứng minh rằng hàm số:

$$u = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Thỏa mãn phương trình: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

b) Chứng minh rằng hàm số: $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ thỏa mãn:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Bài tập

- ***Bài 4.*** Tìm cực trị các hàm số

1) $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$
2) $f(x,y)=x^3+3xy^2-15x-12y$
3) $f(x,y)=x+y-xe^y$
4) $f(x,y)=xy\ln(x+2y),\ x>0, y>0$ (HKI, 19-20)
5) $f(x,y)=x^2(x+1)+y^3$
6) $f(x,y)=2x^4+y^4-x^2-2y^2$
7) $f(x,y)=1+6x-x^2-xy-y^2$

Bài tập

Tiếp bài 4:

8) $f(x,y)=(x-1)^2+2y^2$

9) $f(x,y)=x^2+xy+y^2-2x-y$

10) $f(x,y)=x^3y^2(6-x-y)\ (x>0, y>0)$

Bài tập

- **Bài 5**. Tìm cực trị của các hàm số sau với các điều kiện kèm theo:

1) $f(x,y) = x + 2y;\ x^2 + y^2 = 5$
2) $f(x,y) = x^2 + y^2;\ xy = 1$
3) $f(x,y) = 4x + 6y;\ x^2 + y^2 = 13$
4) $f(x,y) = x^2 y;\ x^2 + 2y^2 = 6$
5) $f(x,y) = e^{xy};\ x^3 + y^3 = 16$

Bài tập

- Tiếp bài 5:

6) $f(x,y)=x^2+y^2;\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1$

7) $f(x,y)=x^2+y^2+xy-5x-4y+10;\ x+y=4$

8) $f(x,y,z)=x+y+z^2;\ \begin{cases} z-x=1 \\ y-xz=1 \end{cases}$

9) Một hình hộp chữ nhật không có nắp được tạo ra từ 1 tấm bìa catton $12m^2$. Tìm kích thước của hình hộp có thể tích lớn nhất tạo được.

Bài tập

Bài 6. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số:

1) $f = x^2y(2-x-y);\ D = \{x=0, y=0, x+y=6\}$

2) $f = x + y,\ D = \{x^2 + y^2 \le 1\}$

3) $f = (x^2 - y^2),\ D = \{x^2 + y^2 \le 1\}$

4) $f = x^3 - y^3 - 3xy,\ D = \{0 \le x \le 2, -1 \le y \le 2\}$

5) $f = 1 + x + 2y,\quad D = \{x \ge 0, y \ge 0,\ x + y \le 1\}$

6) $f = 1 + x + 2y,\quad D = \{x \ge 0, y \le 0,\ x - y \le 1\}$

7) $f = x^3 + y^3 - 3xy,\quad D = \{0 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 2\}$