Nội dung Chương 4

1. **Định nghĩa, cách tính tích phân bội ba**
2. **Hệ tọa độ trụ**
3. **Hệ tọa độ cầu**
4. **Ứng dụng hình học**

1. Định nghĩa, cách tính tích phân bội ba

Định nghĩa

$f = f(x, y, z)$ xác định trên vật thể đóng, bị chặn E.

Chia E một cách tùy ý ra thành n khối hình hộp nhỏ: $E_1, E_2, ..., E_n$.

Thể tích tương ứng mỗi khối: $V(E_1), V(E_2), ..., V(E_n)$.

Trên mỗi khối E_i lấy tuỳ ý một điểm $M_i(x_i, y_i, z_i)$.

Lập tổng Riemann: $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot V(E_i)$

$I = \lim_{n \to +\infty} I_n$, không phụ thuộc cách chia E, và cách lấy điểm M_i

$$I = \iiint_E f(x, y, z)dxdydz$$

được gọi là tích phân bội ba của $f = f(x,y,z)$ trên khối E.

1. Định nghĩa, cách tính tích phân bội ba

Tính chất

1) Hàm liên tục trên một khối đóng, bị chặn, thì khả tích trên miền này.

2) $V_E = \iiint_E dxdydz$

3) $\iiint_E \alpha \cdot f(x,y,z)dxdydz = \alpha \iiint_E f(x,y,z)dxdydz$

4) $\iiint_E (f+g)dxdydz = \iiint_E fdxdydz + \iiint_E gdxdydz$

5) Nếu E được chia làm hai khối E_1 và E_2 rời nhau:

$$\iiint_E fdxdydz = \iiint_{E_1} fdxdydz + \iiint_{E_2} fdxdydz$$

6) $\forall (x,y,z) \in E,\ f(x,y,z) \le g(x,y,z) \Rightarrow \iiint_E fdxdydz \le \iiint_E gdxdydz$

Cách tính (Định lý Fubini): tích phân lặp

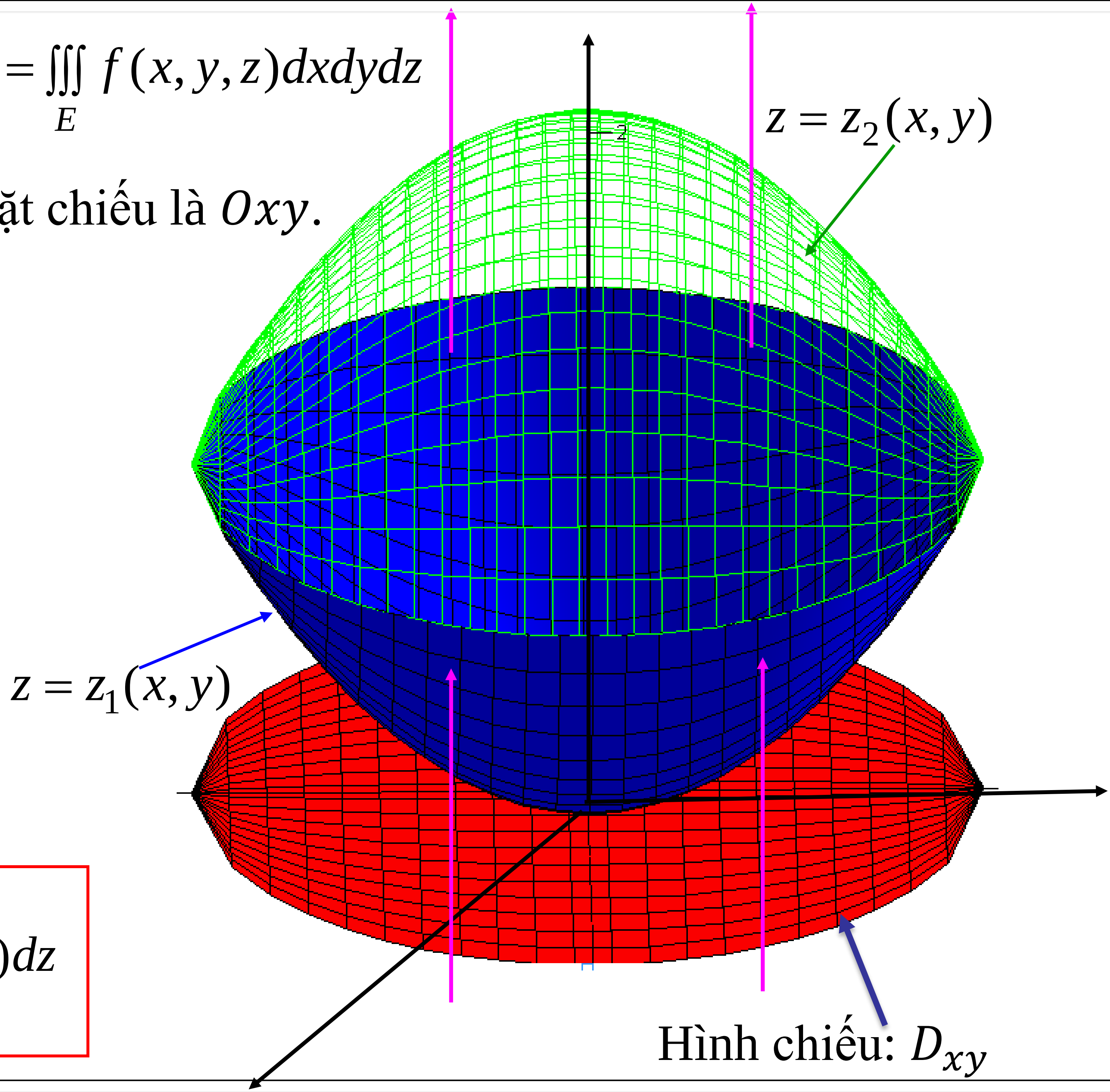
$$I = \iiint\limits_E f(x,y,z)\,dxdydz$$

Phân tích khối E: Chọn mặt chiếu là Oxy.

Mặt phía dưới: $z = z_1(x,y)$

Mặt phía trên: $z = z_2(x,y)$

Hình chiếu: $\mathrm{Pr}_{Oxy}\, E = D_{xy}$



$$I = \iiint\limits_E f(x,y,z)\,dxdydz$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \boxed{\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz}$$

1. Định nghĩa, cách tính tích phân bội ba

Cách tính – Định lý Fubini (tích phân lặp)

Chú ý

- Tương tự ta có 2 công thức tích phân lặp khác, khi chiếu khối E lên 2 mặt phẳng Oxz, Oyz.
- Thông thường, miền hình chiếu D_{xy} sẽ có biên là phương trình của biên khối E nhưng không chứa z.

➢ Ta sẽ khử z ở trong phương trình của biên khối E, hoặc tìm phương trình nào không chứa z của biên khối E.

Tính tích phân bội ba $I = \iiint\limits_E z\,dxdydz$ trong đó E là vật thể:

$$z \le 2 - x^2 - y^2, z \ge 0\,;\, x^2 + y^2 \le 1$$

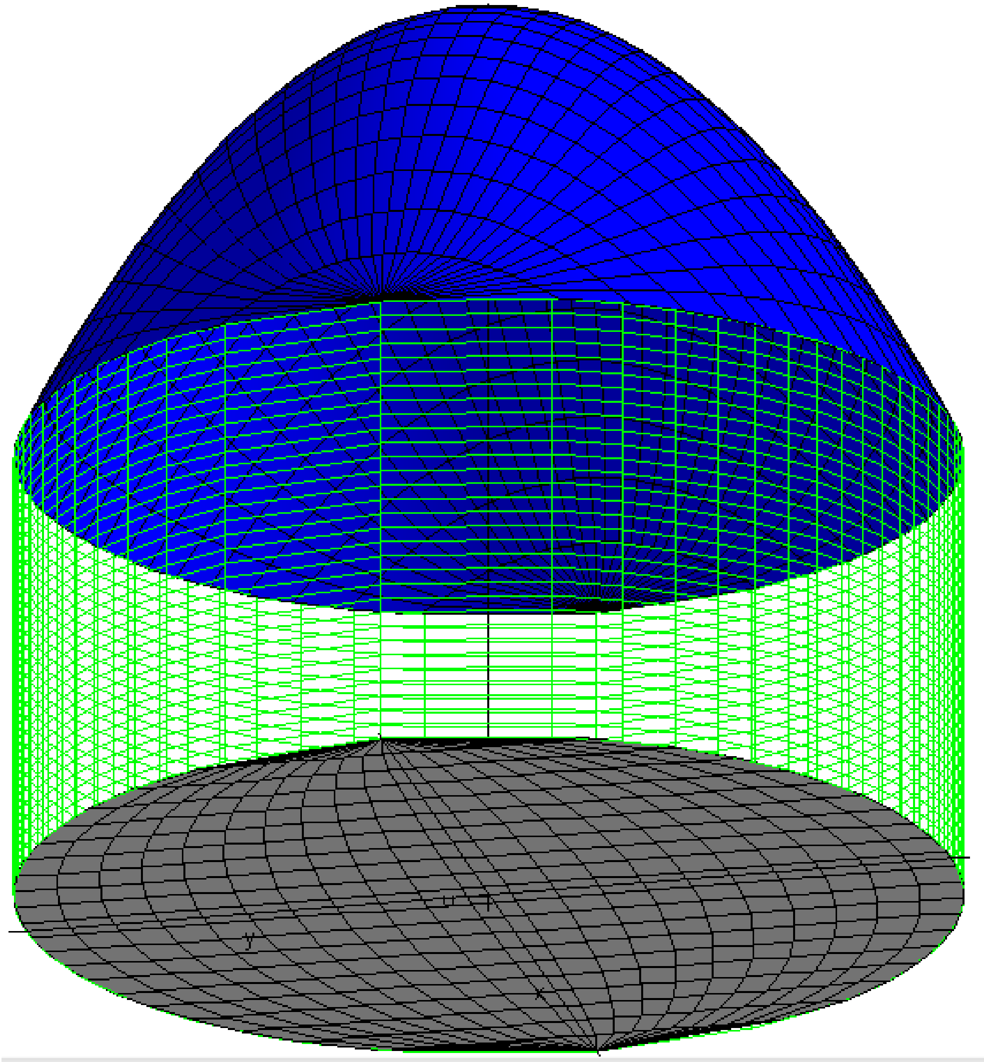
Hình chiếu của E xuống Oxy:

$$D : x^2 + y^2 \le 1$$

Mặt phía trên: $z_2(x, y) = 2 - x^2 - y^2$

Mặt phía dưới: $z_1 = 0$

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \left[\int\limits_0^{2-x^2-y^2} z\,dz \right] dxdy$$



$$I = \iint_{x^2+y^2\le 1} \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{2-x^2-y^2} dxdy$$

$$I = \iint_{x^2+y^2\le 1} \frac{(2-x^2-y^2)^2}{2} dxdy .$$ Đổi sang hệ tọa độ cực.

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{\left(2-r^2\right)^2}{2} \cdot r \cdot dr = \frac{7\pi}{6}$$

1. Định nghĩa, cách tính tích phân bội ba

Ví dụ

Tính tích phân bội ba $I = \iiint\limits_E z\,dxdydz$, trong đó E là vật thể giới hạn bởi:

$y = 1 - x, z = 1 - x^2$ và các mặt phẳng tọa độ (phần $z \ge 0$)

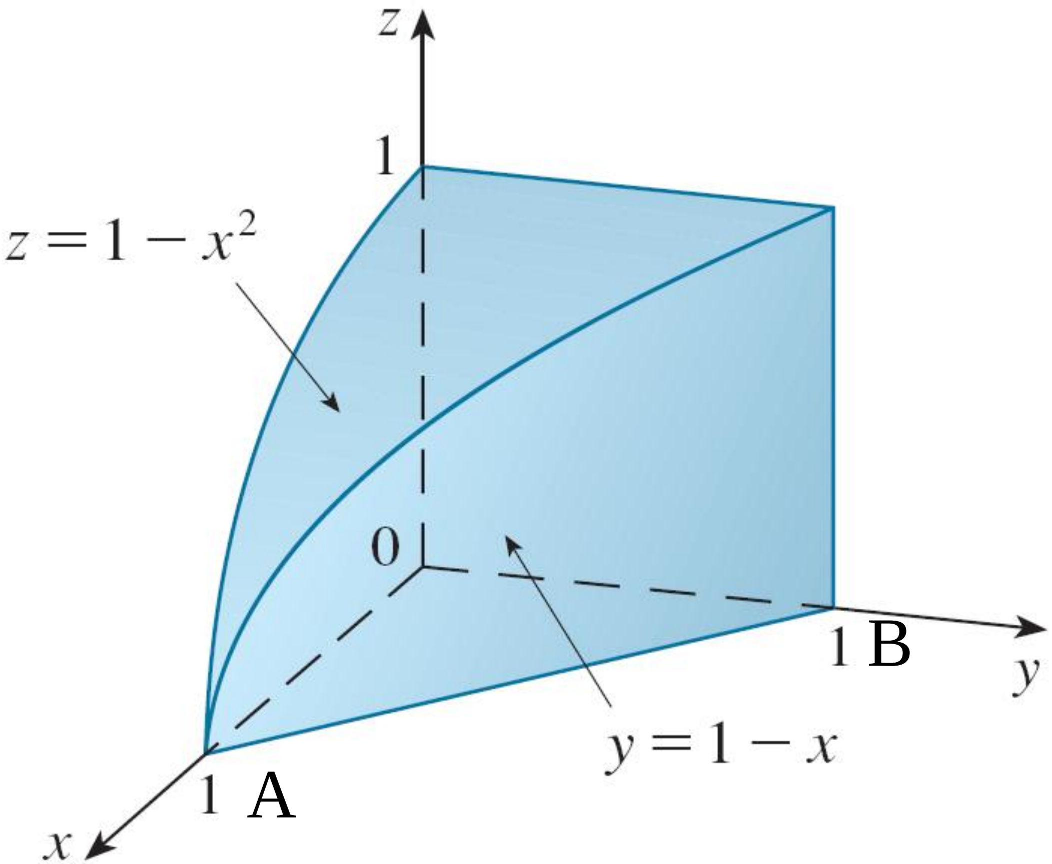
Hình chiếu của E xuống Oxy:

Tam giác OAB.

Mặt phía trên: $z_2(x, y) = 1 - x^2$

Mặt phía dưới: $z_1 = 0$

$$I = \iint\limits_{\Delta OAB} dxdy \left[\int_0^{1-x^2} z\,dz \right]$$



1. Định nghĩa, cách tính tích phân bội ba

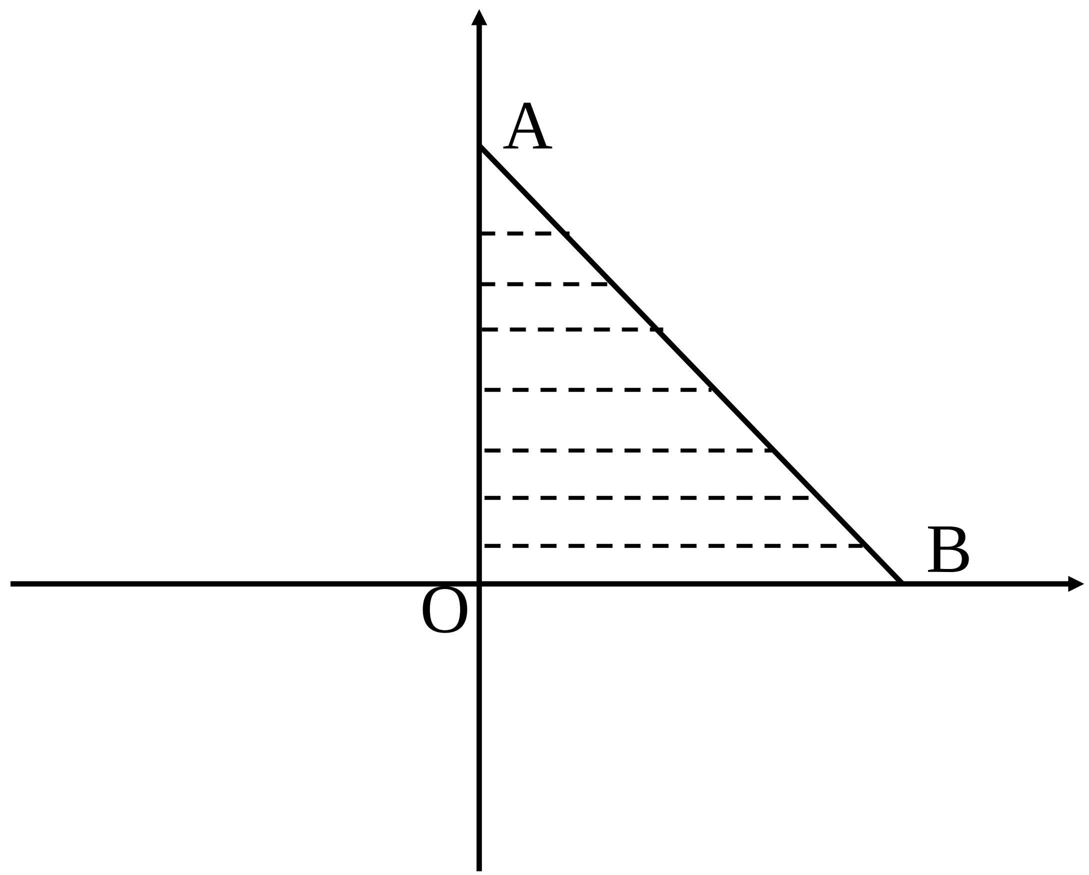
Ví dụ

$$I = \iint\limits_{\Delta OAB} \left[\int_0^{1-x^2} z\,dz \right] dxdy$$

$$I = \iint\limits_{\Delta OAB} \left[\left. \frac{z^2}{2} \right|_0^{1-x^2} \right] dxdy$$

$$I = \iint\limits_{\Delta OAB} \frac{\left(1-x^2\right)^2}{2}\, dxdy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{\left(1-x^2\right)^2}{2}\, dy \quad = \frac{11}{60}$$



1. Định nghĩa, cách tính tích phân bội ba

Ví dụ

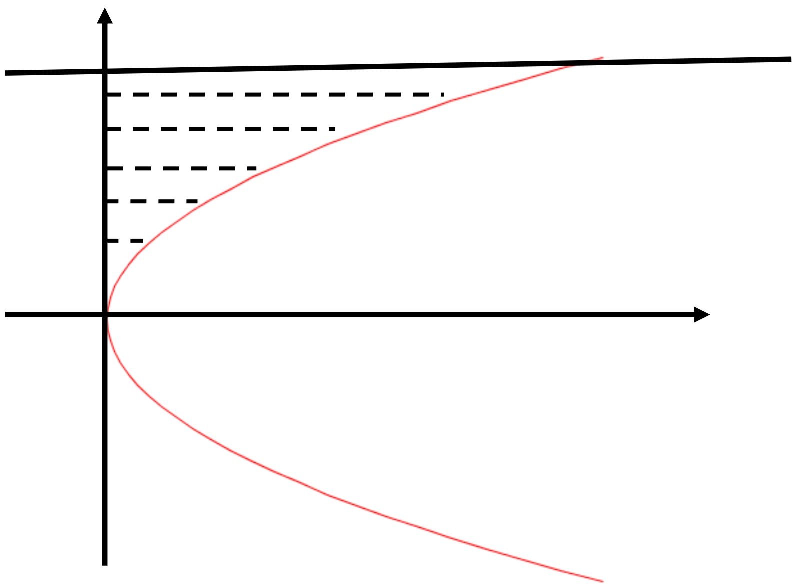
Tính tích phân $I = \iiint\limits_E (2x+3y)dxdydz$, trong đó E là vật thể giới hạn bởi:

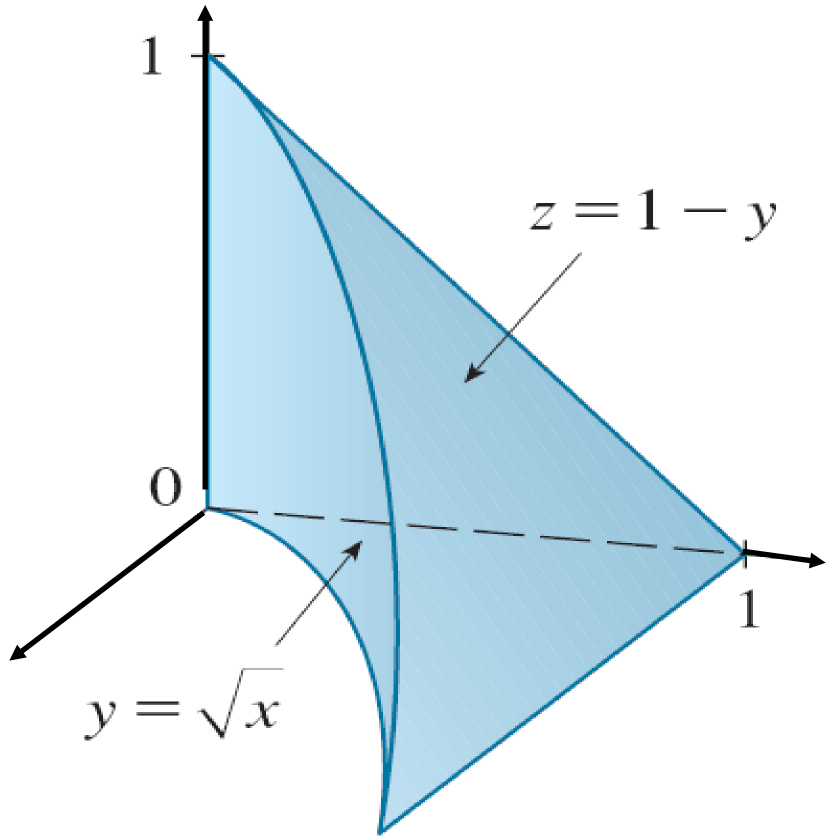
$$y=\sqrt{x}, z=1-y, x=0, z=0.$$

Mặt phía trên: $z=1-y$

Mặt phía dưới: $z=0$

Hình chiếu của E xuống Oxy:





Ví dụ

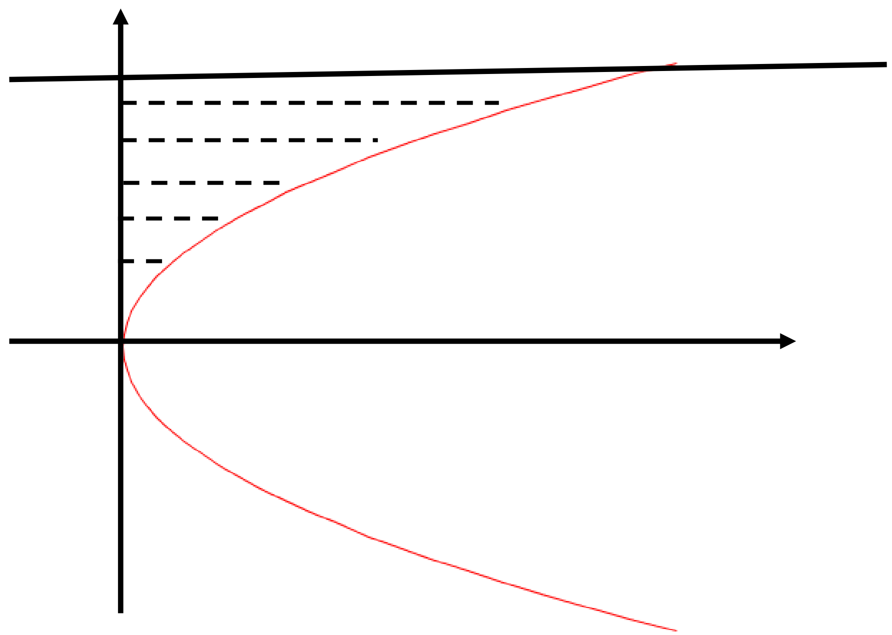
$$I = \iint\limits_{D}\left[\int_{0}^{1-y}(2x+3y)\,dz\right]dxdy$$

$$I = \iint\limits_{D}\left[(2x+3y)z\Big|_{0}^{1-y}\right]dxdy$$

$$I = \iint\limits_{D}\left[(2x+3y)(1-y)\right]dxdy$$

$$I = \int_{0}^{1}dx\int_{\sqrt{x}}^{1}\left[(2x+3y)(1-y)\right]dy$$

$$I = \frac{11}{60}$$



1. Định nghĩa, cách tính tích phân bội ba

Ví dụ

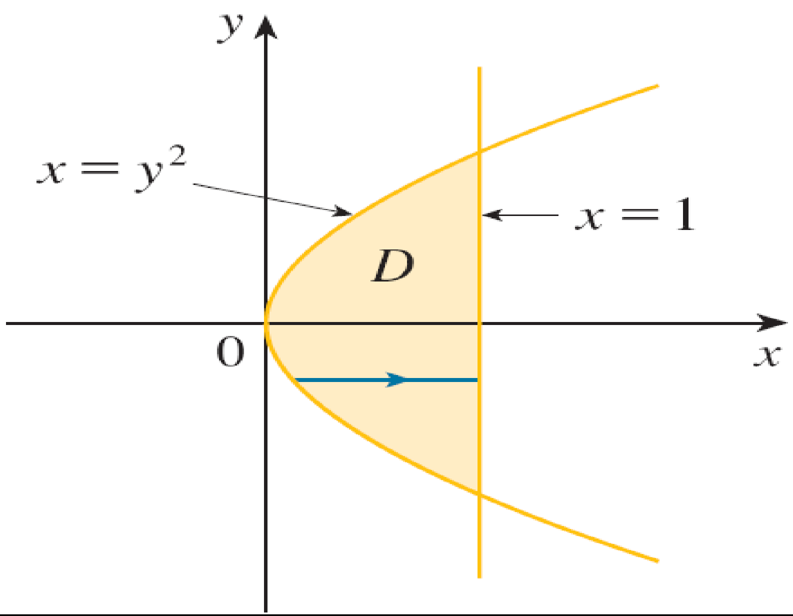
Tính tích phân $I = \iiint\limits_E (z+1)dxdydz$, trong đó E là vật thể giới hạn bởi:

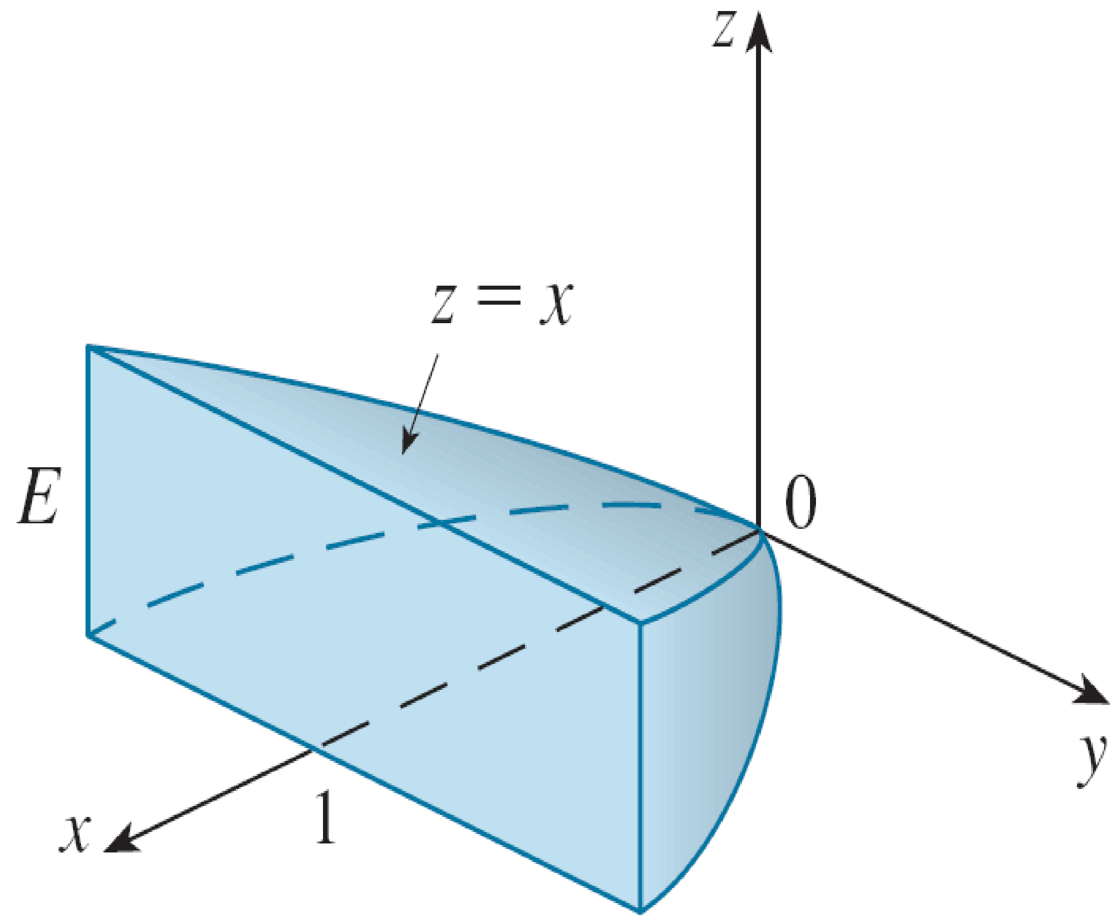
$$x = y^2, z = x, z = 0, x = 1.$$

Mặt phía trên: $z = x$

Mặt phía dưới: $z = 0$

Hình chiếu của E xuống Oxy:





Ví dụ

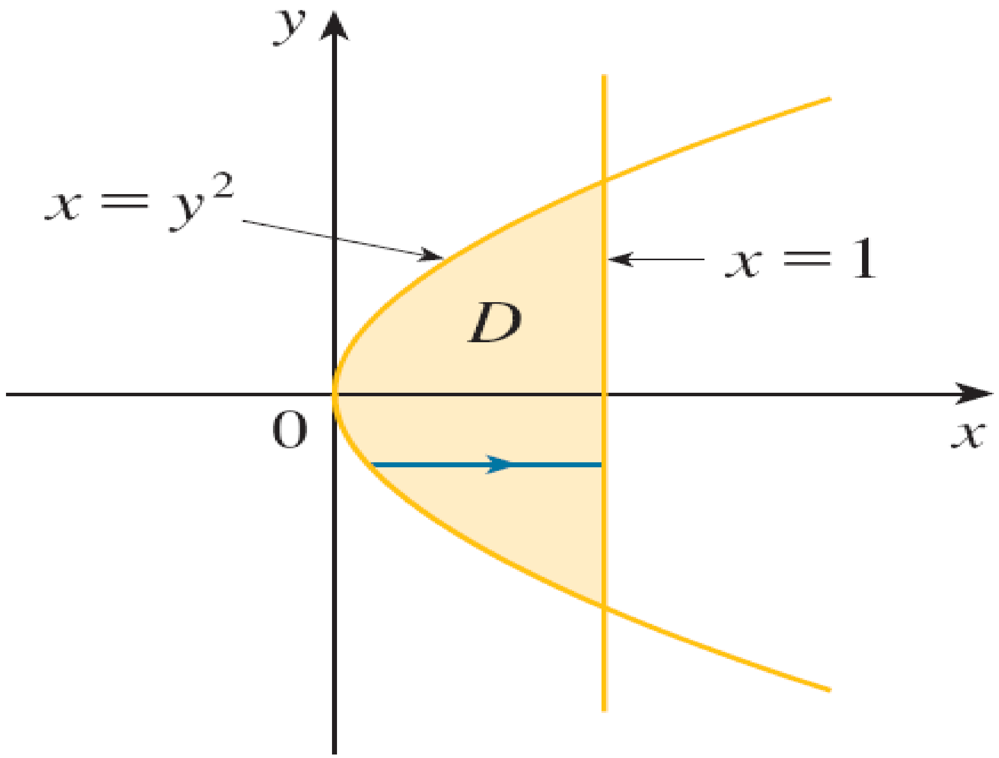
$$I=\iint\limits_D\left[\int_0^x (z+1)dz\right]dxdy$$

$$I=\iint\limits_D\left[\left(\frac{z^2}{2}+z\right)\Bigg|_0^x\right]dxdy$$

$$I=\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{2}+x\right)dxdy$$

$$I=\int_{-1}^{1}dy\int_{y^2}^{1}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)dx$$

$$I=\frac{38}{35}$$



1. Định nghĩa, cách tính tích phân bội ba

Đổi biến tổng quát

Định lý:

Giả sử có phép đổi biến: $x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)$; sao cho phép đổi biến này là 1-1 (có thể trừ trên biên), và $J \neq 0$ (có thể $J = 0$ tại một số điểm hữu hạn), khi đó:

$$\iiint_{E_{xyz}} f(x, y, z) dxdydz =$$

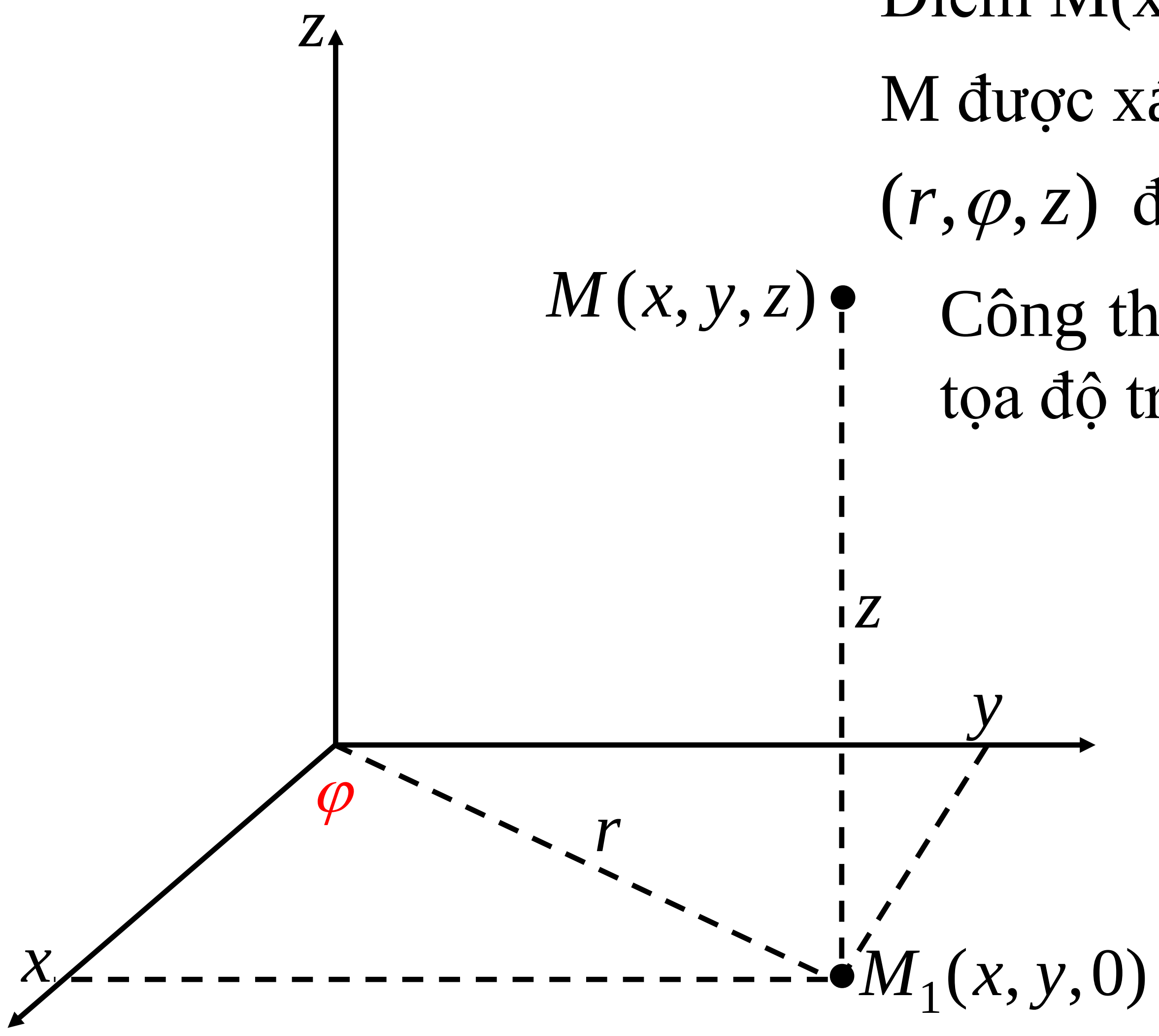
$$\iiint_{E_{uvw}} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)). |J|. dudvdw$$

Trong đó:

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}$$

2. Hệ tọa độ trụ

Định nghĩa



Điểm M(x,y,z) trong hệ trục tọa độ Oxyz.

M được xác định duy nhất bởi bộ (r,φ,z).

(r,φ,z) được gọi là hệ tọa độ trụ của điểm M.

Công thức đổi biến từ tọa độ Decasters sang tọa độ trụ:

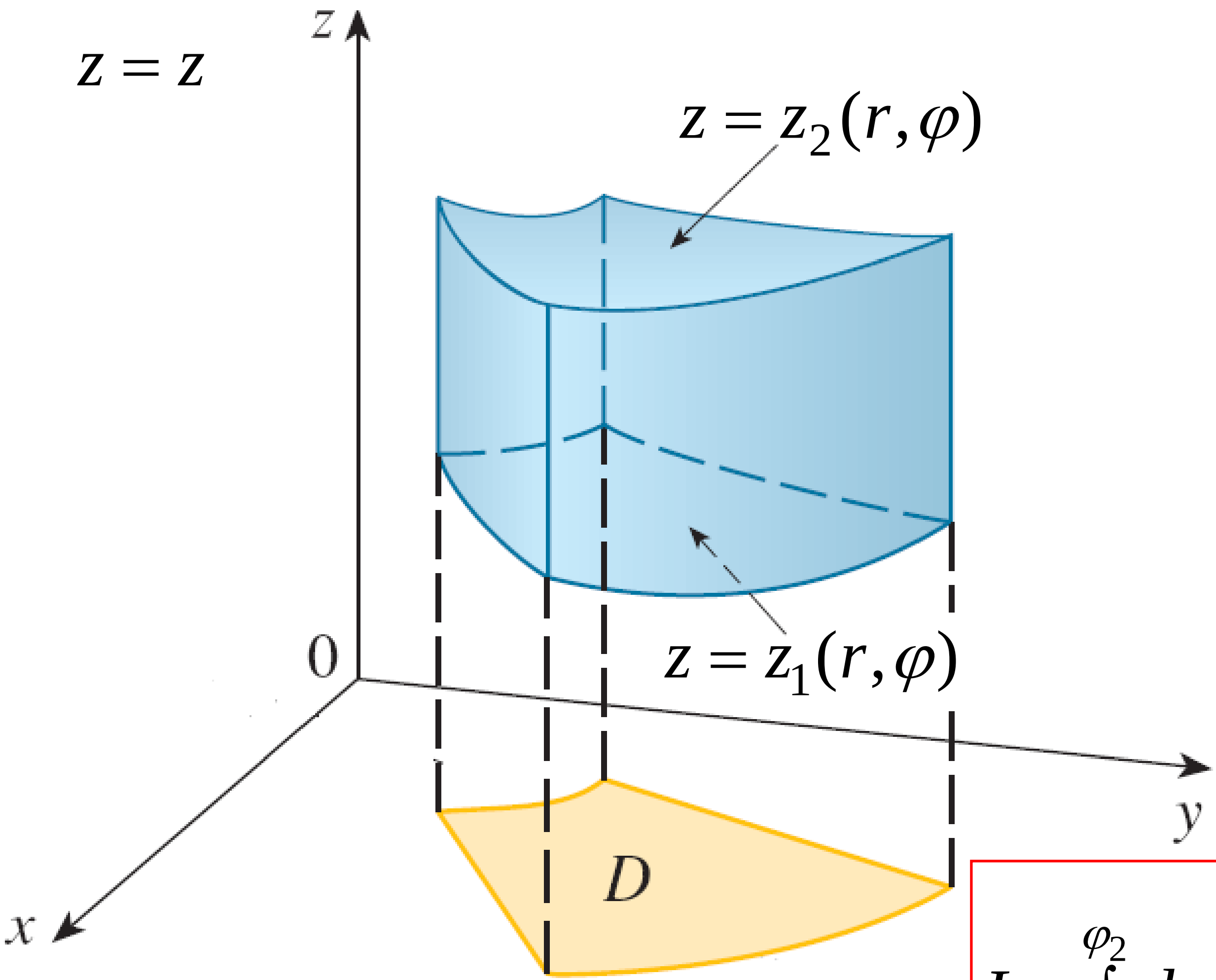
$$\begin{cases} x = r\cdot\cos\varphi \\ y = r\cdot\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi & x'_z \\ y'_r & y'_\varphi & y'_z \\ z'_r & z'_\varphi & z'_z \end{vmatrix} = r$$

Đổi biến sang tọa độ trụ.

$$I = \iiint_E f(x,y,z)\,dxdydz$$

$$\begin{cases} x = r\cdot\cos\varphi \\ y = r\cdot\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$



Mặt phía dưới: $z = z_1(r,\varphi)$

Mặt phía trên: $z = z_2(r,\varphi)$

Hình chiếu: D

Xác định cận r,φ của D:

$$D:\begin{cases} \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \\ r_1 \le r \le r_2 \end{cases}$$

$$\boxed{I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} dr \int_{z_1(r,\varphi)}^{z_2(r,\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\cdot {\color{red} r}\cdot dz}$$

Tính tích phân $I = \iiint\limits_E \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, trong đó E là vật thể giới hạn bởi:

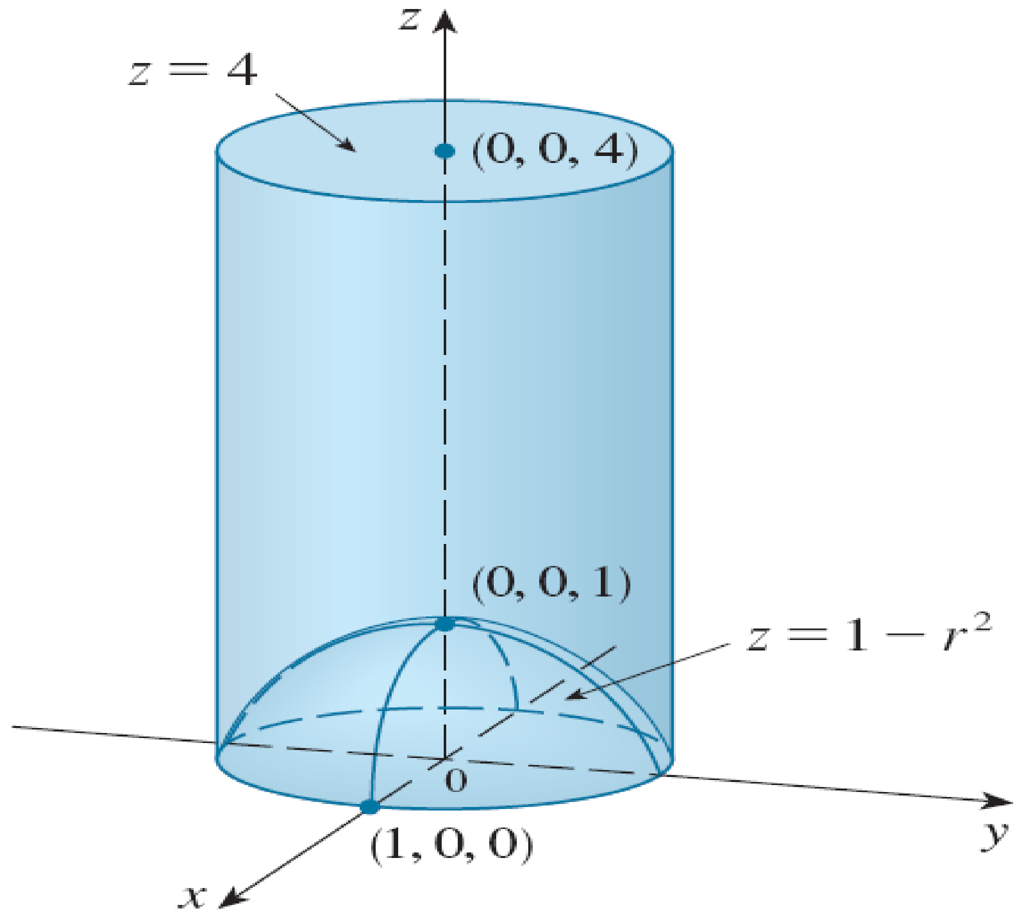
$$z = 4, z = 1 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 = 1.$$

Mặt phía trên: $z = 4$

Mặt phía dưới: $z = 1 - r^2$

Hình chiếu xuống Oxy: $D: x^2 + y^2 \le 1$

$$D: \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$$



$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_{1-r^2}^{4} r \cdot r \cdot dz$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \left[r^2 z \Big|_{1-r^2}^{4} \right] = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (3 + r^2) r^2 dr = \frac{12\pi}{5}$$

Tính tích phân $I = \iiint\limits_E z\,dxdydz$, trong đó E là vật thể giới hạn bởi:

$$z = x^2 + y^2, z = 2 + x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 1.$$

Mặt phía trên: $z = 2 + r^2$

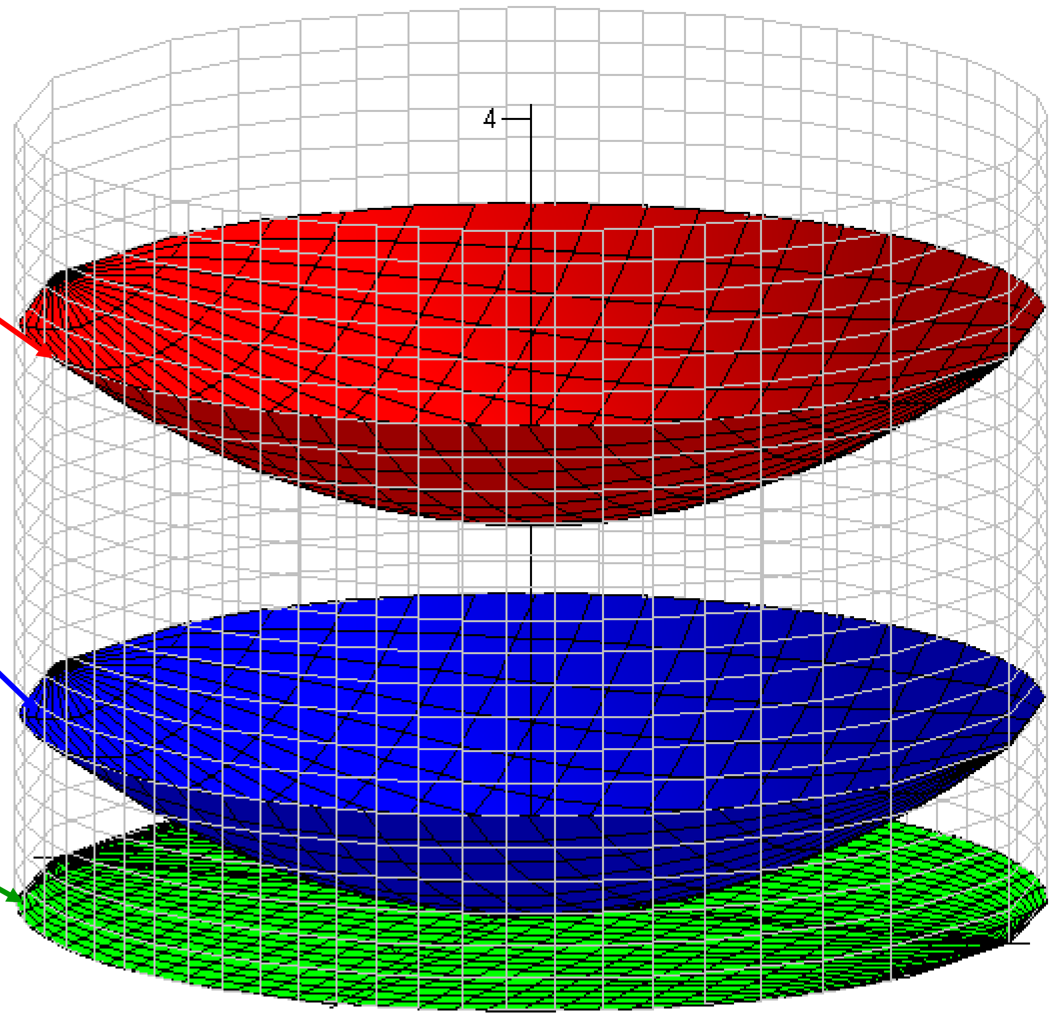
Mặt phía dưới: $z = r^2$

Hình chiếu của E xuống Oxy:

$D: x^2 + y^2 \le 1$

Cận của D:

$$D: \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$$



$$I=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 dr\int_{r^2}^{2+r^2} z\cdot r\cdot dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r\left.\frac{z^2}{2}\right|_{r^2}^{2+r^2}dr=3\pi$$

Tính tích phân $I=\iiint_E\left(x^2+z^2\right)dxdydz$, trong đó E: $2y=x^2+z^2, y=2.$

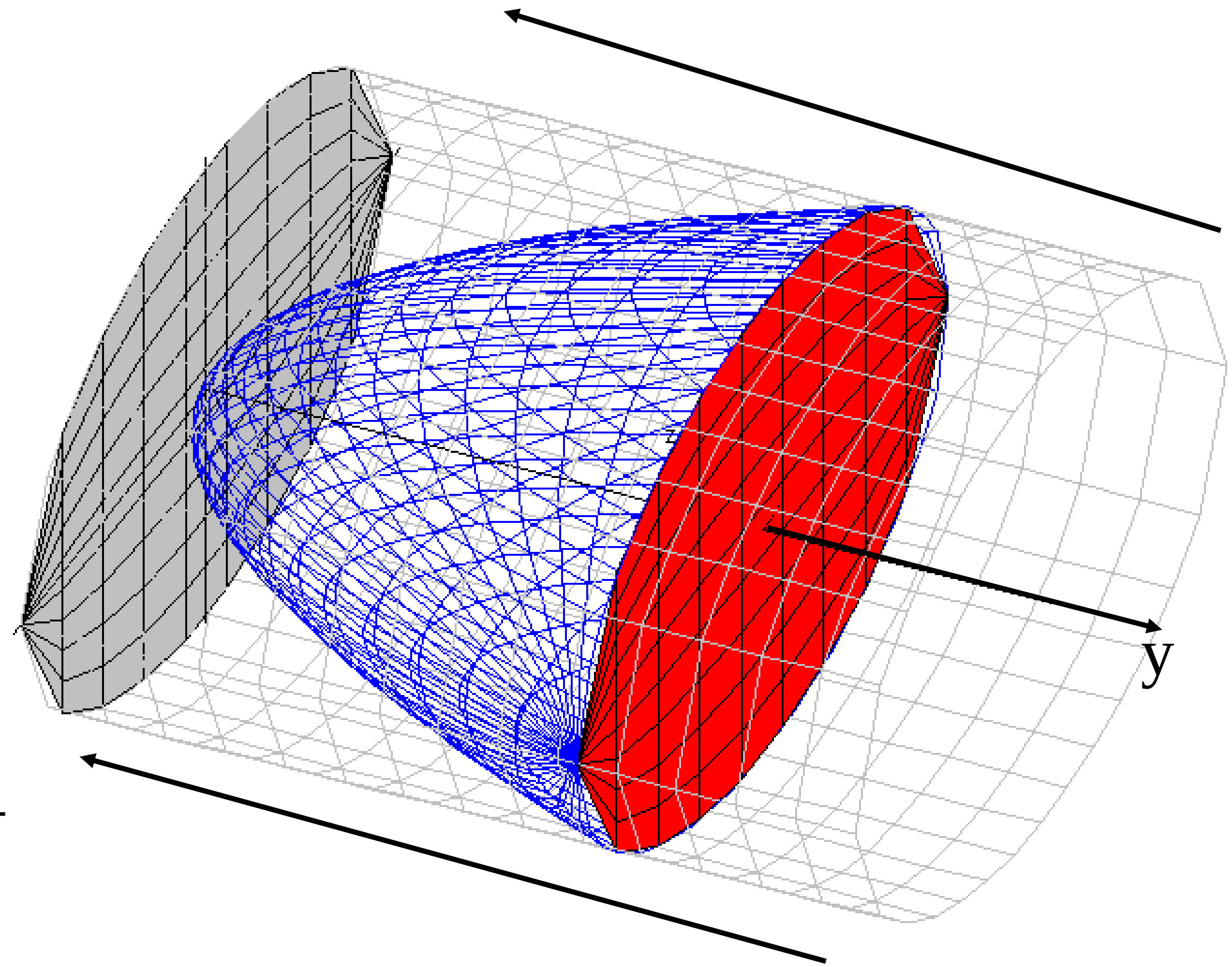
Chiếu xuống Oxz.

Mặt trên: $y=2$

Mặt dưới: $y=\dfrac{r^2}{2}$

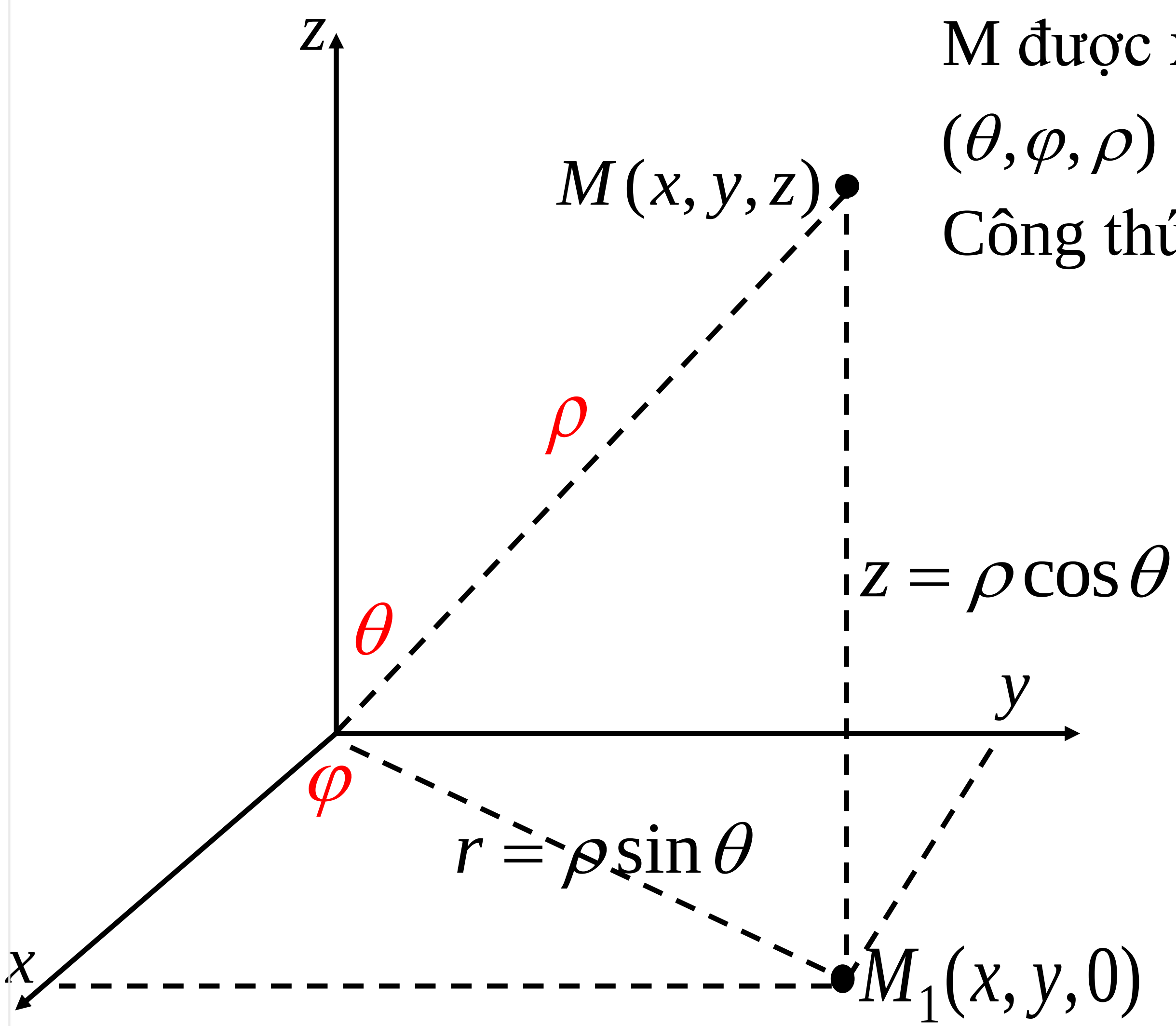
Hình chiếu: $D: x^2+z^2\le 4$

$$I=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2 dr\int_{r^2/2}^{2} r^2\cdot r\cdot dy=\frac{16\pi}{3}$$



3. Hệ tọa độ cầu

Định nghĩa



Điểm $M(x,y,z)$ trong hệ trục tọa độ Oxyz.

M được xác định duy nhất bởi bộ (θ,φ,ρ).

(θ,φ,ρ) được gọi là hệ tọa độ cầu của điểm M.

Công thức đổi biến sang tọa độ cầu:

$$\begin{cases} x=\rho\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi \\ y=\rho\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi \\ z=\rho\cdot\cos\theta \end{cases}$$

$$J=\begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi & x'_\theta \\ y'_\rho & y'_\varphi & y'_\theta \\ z'_\rho & z'_\varphi & z'_\theta \end{vmatrix} \Rightarrow |J|=\rho^2\cdot\sin\theta$$

3. Hệ tọa độ cầu

Định nghĩa

Giả sử trong tọa độ cầu, vật thể E được giới hạn bởi:

$$\begin{cases} \theta_1 \le \theta \le \theta_2 \\ \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \\ \rho_1 \le \rho \le \rho_2 \end{cases}$$

$$I = \iiint_E f(x,y,z)dxdydz$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)\cdot \rho^2 \sin\theta \cdot d\rho$$

Chú ý: $0 \le \theta \le \pi$

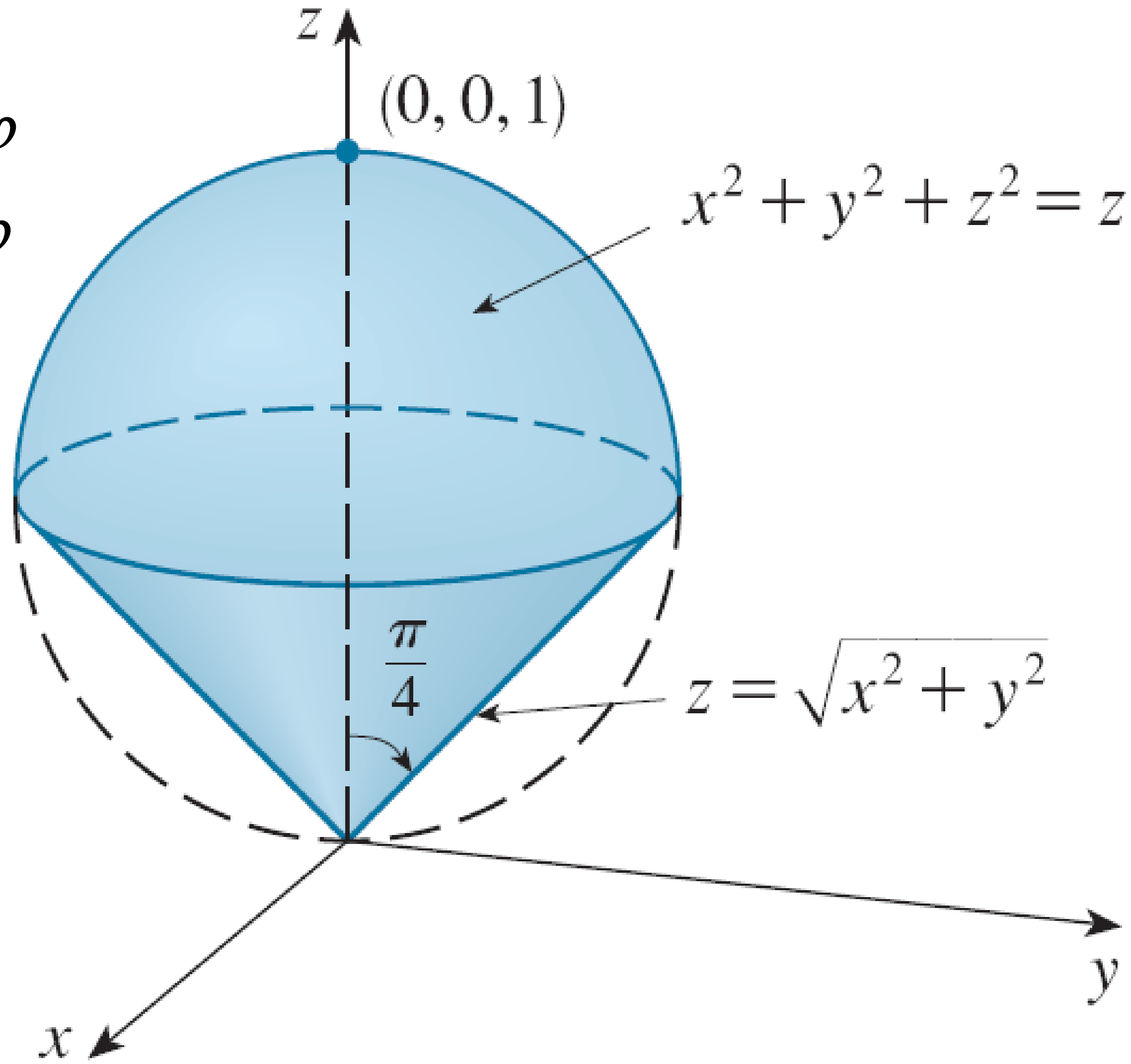
$0 \le \varphi \le 2\pi$ hay $-\pi \le \varphi \le \pi$

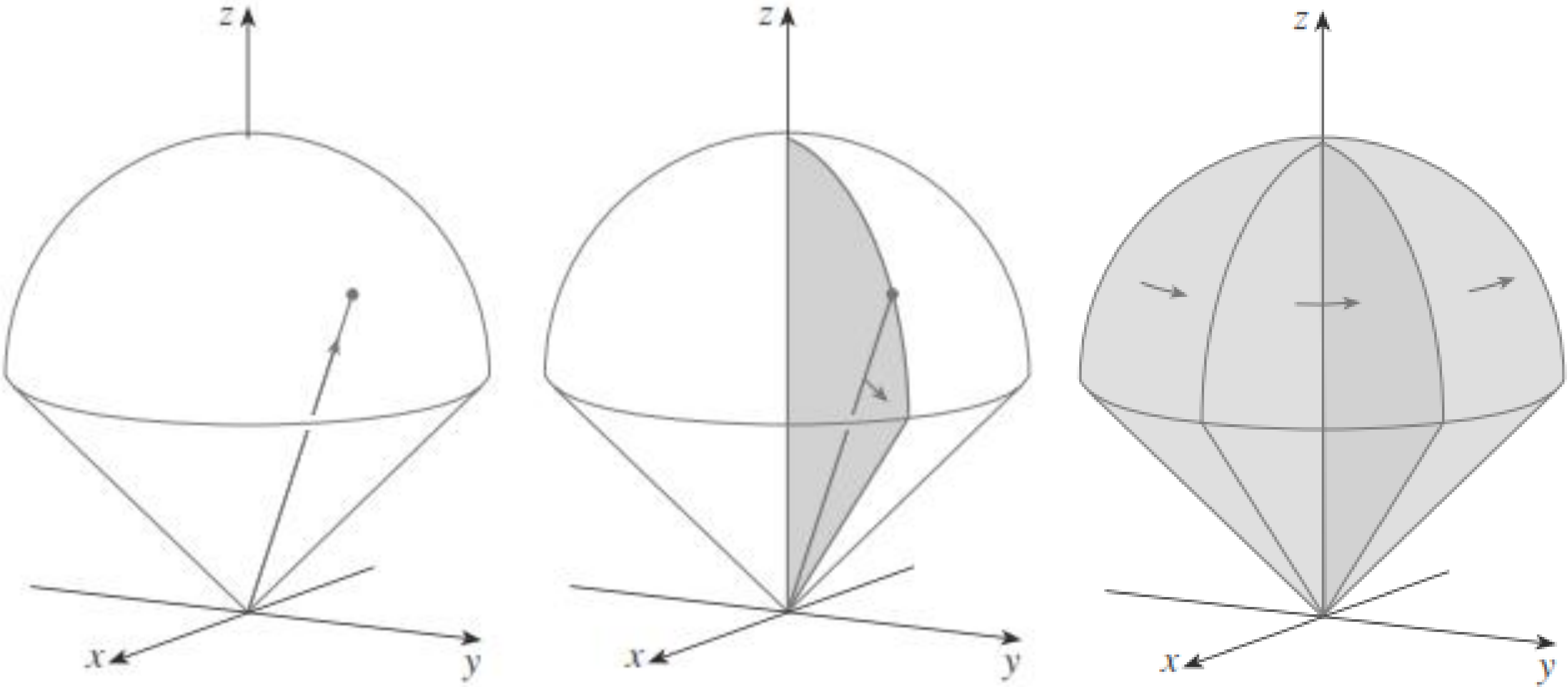
$0 < \rho < +\infty$

Tính tích phân $I = \iiint\limits_E \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz$, trong đó E là vật thể giới hạn bởi:

$$z \geq \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 + z^2 \leq z.$$

Đổi sang tọa độ cầu: $\begin{cases} x = \rho \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \\ y = \rho \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ z = \rho \cdot \cos\theta \end{cases}$





ρ varies from 0 to $\cos\phi$ while ϕ and θ are constant.

ϕ varies from 0 to $\pi/4$ while θ is constant.

θ varies from 0 to 2π.

Xác định cận: $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{4}$

$$0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$0 \le \rho \le \cos\theta$$

$$I = \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\cos\theta} \rho \cdot \rho^2 \sin\theta \cdot d\rho \quad = \left(\frac{1}{10} - \frac{\sqrt{2}}{80} \right)\pi$$

Tính tích phân $I = \iiint\limits_E z\,dx\,dy\,dz$, trong đó E là vật thể giới hạn bởi:

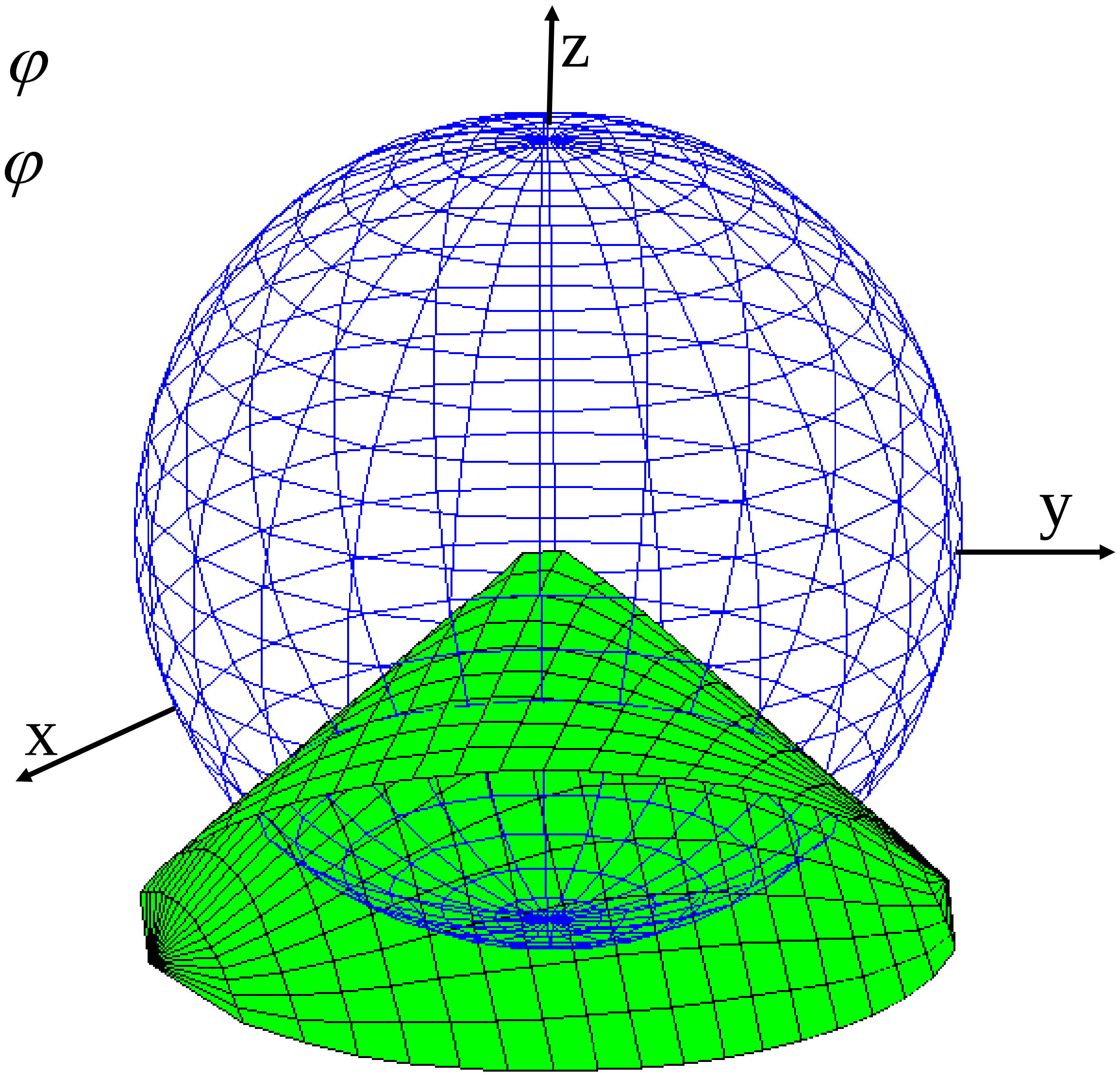
$$z \le -\sqrt{x^2+y^2}, x^2+y^2+z^2 = 1.$$

Đổi sang tọa độ cầu: $\begin{cases} x = \rho \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \\ y = \rho \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ z = \rho \cdot \cos\theta \end{cases}$

Xác định cận: $\frac{3\pi}{4} \le \theta \le \pi$

$0 \le \varphi \le 2\pi$

$0 \le \rho \le 1$



$$I = \int_{3\pi/4}^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho\cos\theta \cdot \rho^2 \sin\theta \cdot d\rho$$

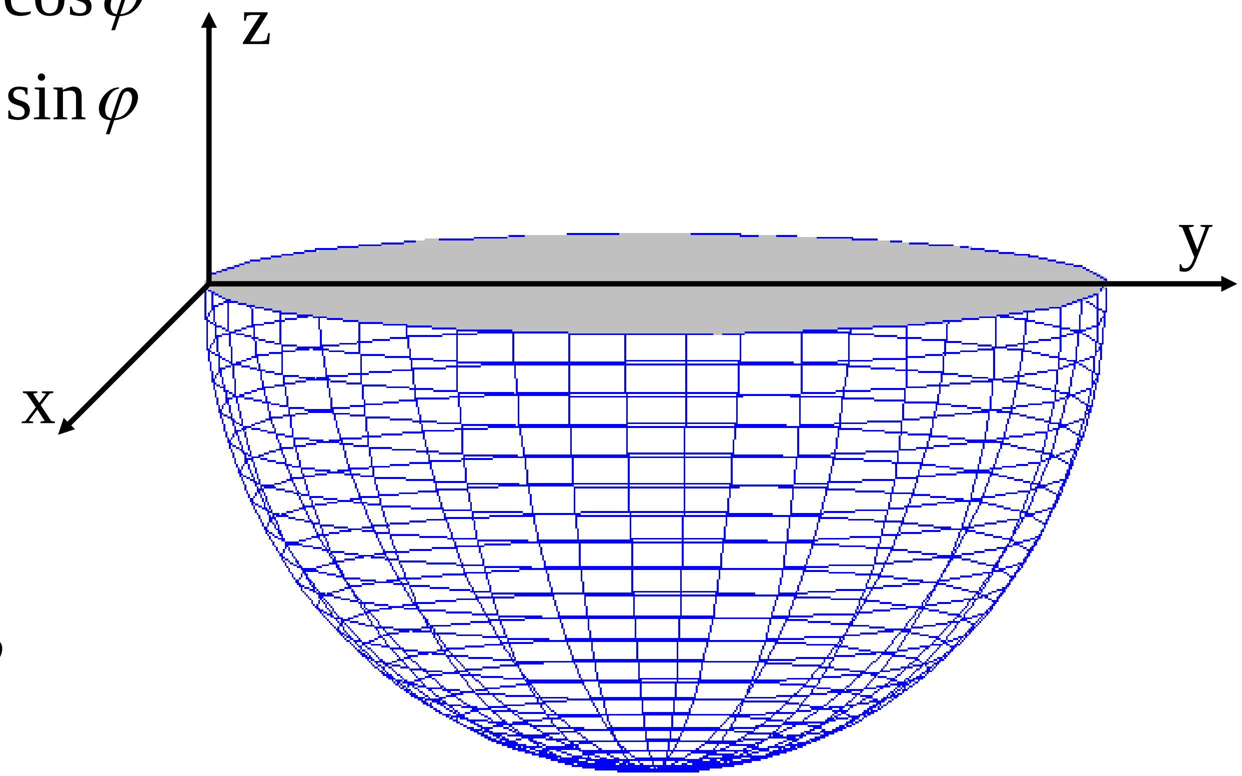
$$= -\frac{\pi}{8}$$

Tính tích phân $I = \iiint\limits_E (y+z)dxdydz$, trong đó E là vật thể giới hạn bởi:

$$z = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 2y \quad (z \le 0)$$

Cách 1:

Đổi sang tọa độ cầu: $\begin{cases} x = \rho \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \\ y = \rho \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ z = \rho \cdot \cos\theta \end{cases}$



Xác định cận: $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$

$0 \le \varphi \le \pi$

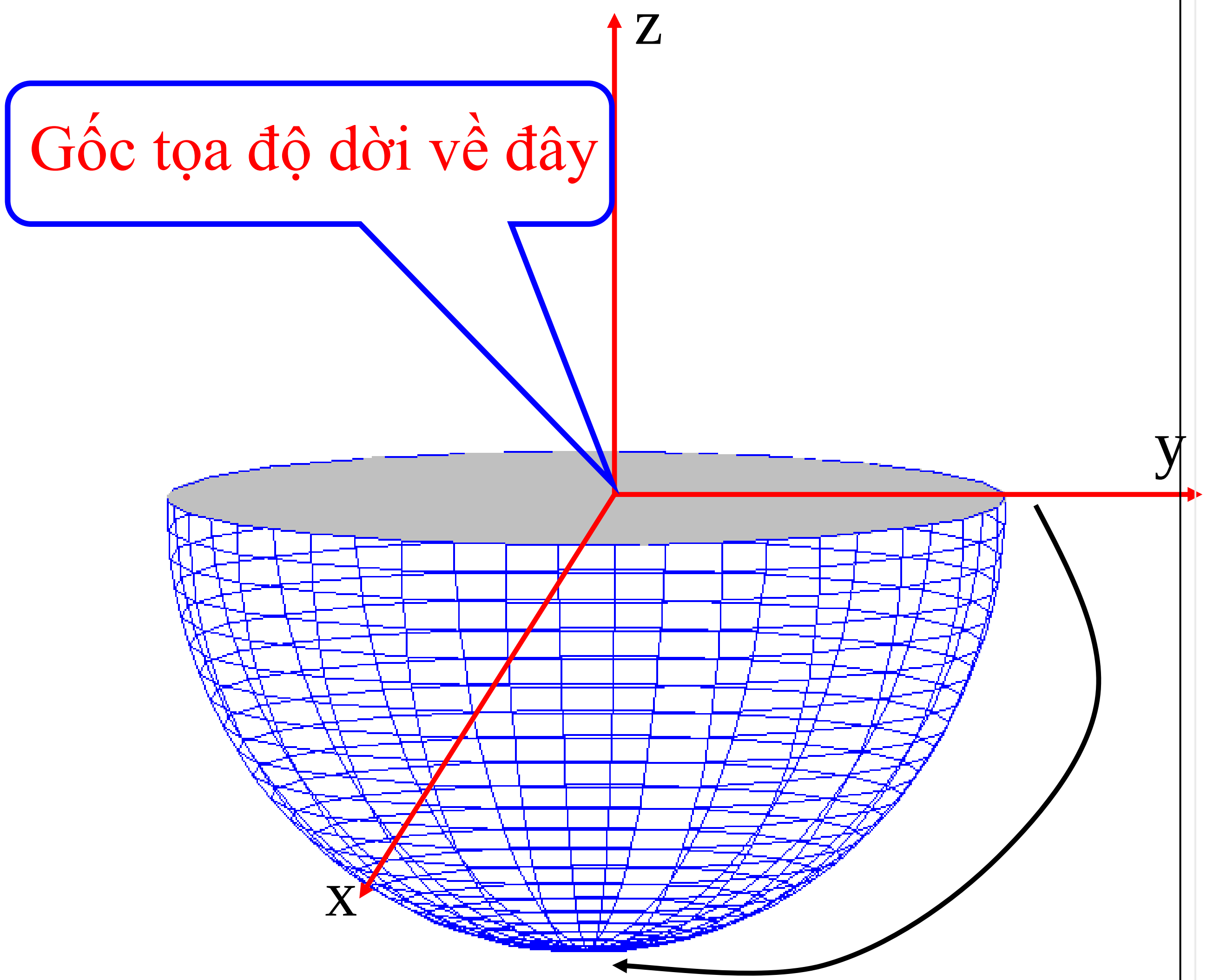
$0 \le \rho \le 2\sin\theta \cdot \sin\varphi$

$$I = \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2\sin\theta\cdot\sin\varphi} (\rho\sin\theta\sin\varphi + \rho\cos\theta) \cdot \rho^2 \sin\theta \cdot d\rho = \frac{5\pi}{12}$$

Cách 2:

Đổi sang tọa độ cầu mở rộng:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \\ y - 1 = \rho \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ z = \rho \cdot \cos\theta \end{cases}$$



Xác định cận:

$$\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$$

$$0 \le \varphi \le 2\pi$$

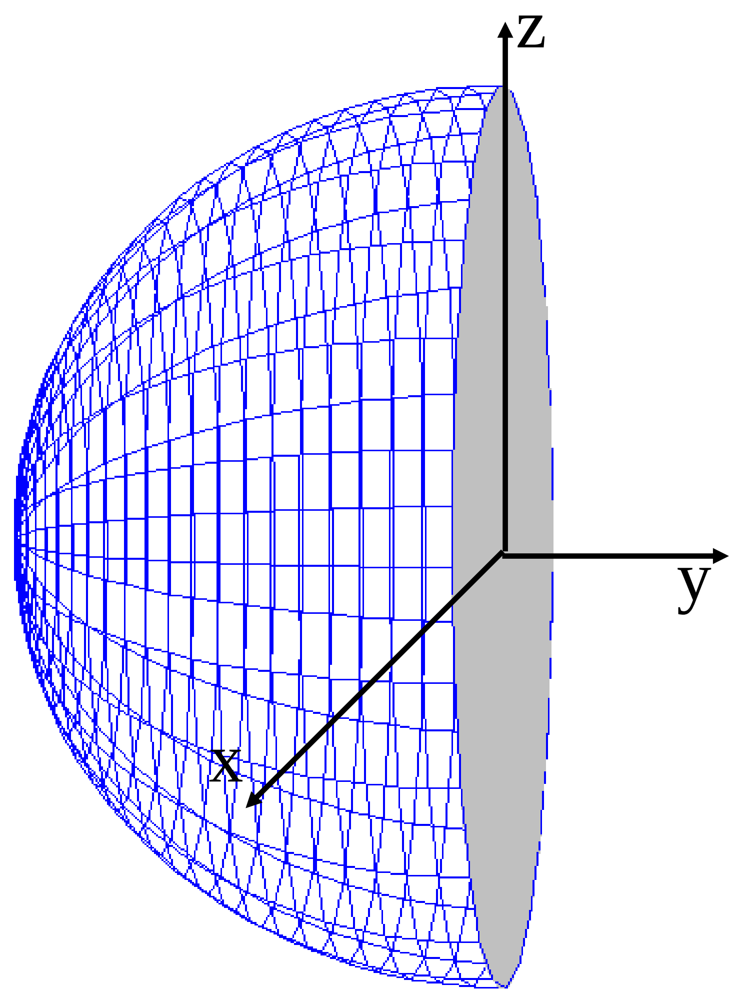
$$0 \le \rho \le 1$$

$$I = \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1 + \rho\sin\theta\sin\varphi + \rho\cos\theta) \cdot \rho^2 \sin\theta \cdot d\rho \quad = \frac{5\pi}{12}$$

Tính tích phân $I = \iiint\limits_E e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dxdydz$, trong đó E là vật thể giới hạn bởi:

$$y = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1 \;\; (y \le 0)$$

Đổi sang tọa độ cầu: $\begin{cases} x = \rho \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \\ y = \rho \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ z = \rho \cdot \cos\theta \end{cases}$



Xác định cận: $0 \le \theta \le \pi$

$\pi \le \varphi \le 2\pi$

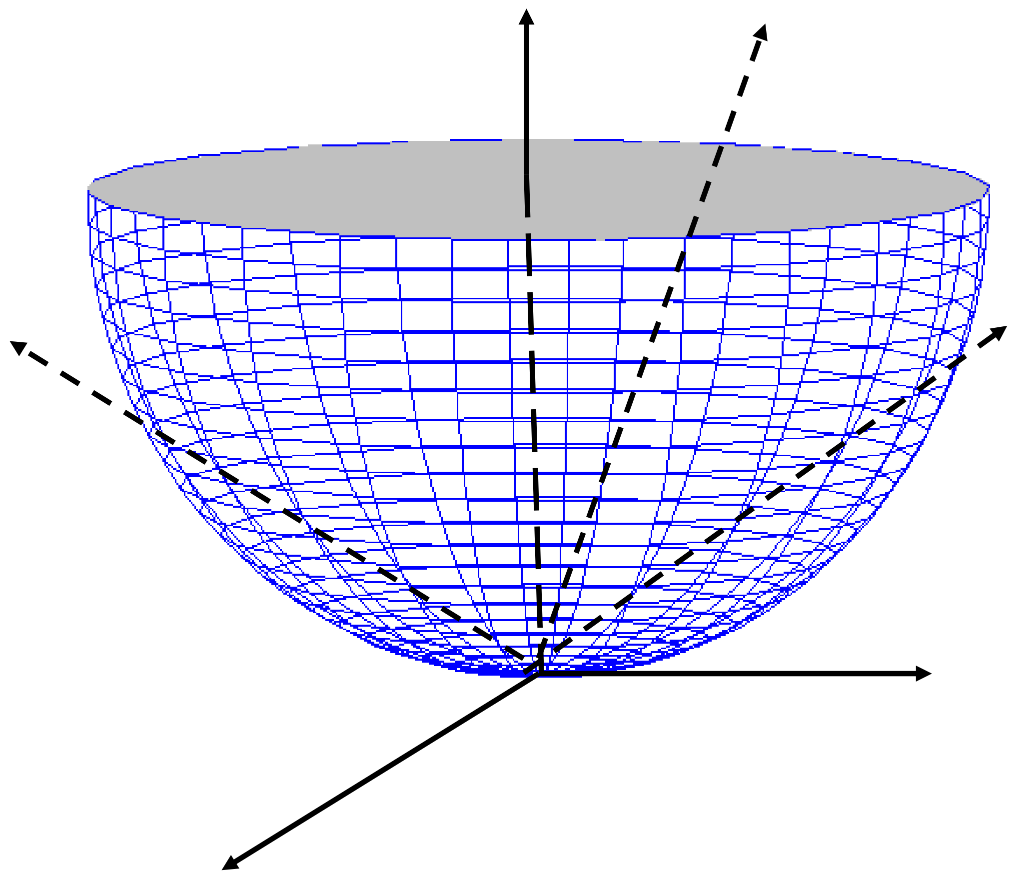
$0 \le \rho \le 1$

$$I = \int_0^{\pi} d\theta \int_{\pi}^{2\pi} d\varphi \int_0^1 e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin\theta \cdot d\rho \;\; = \frac{2(e-1)\pi}{3}$$

Tính tích phân $I = \iiint\limits_E z\,dxdydz$, trong đó E là vật thể giới hạn bởi:

$$z = 1, x^2 + y^2 + z^2 = 2z \quad (z \le 1)$$

Đổi sang tọa độ cầu: $\begin{cases} x = \rho \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \\ y = \rho \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ z = \rho \cdot \cos\theta \end{cases}$



Xác định cận: $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$

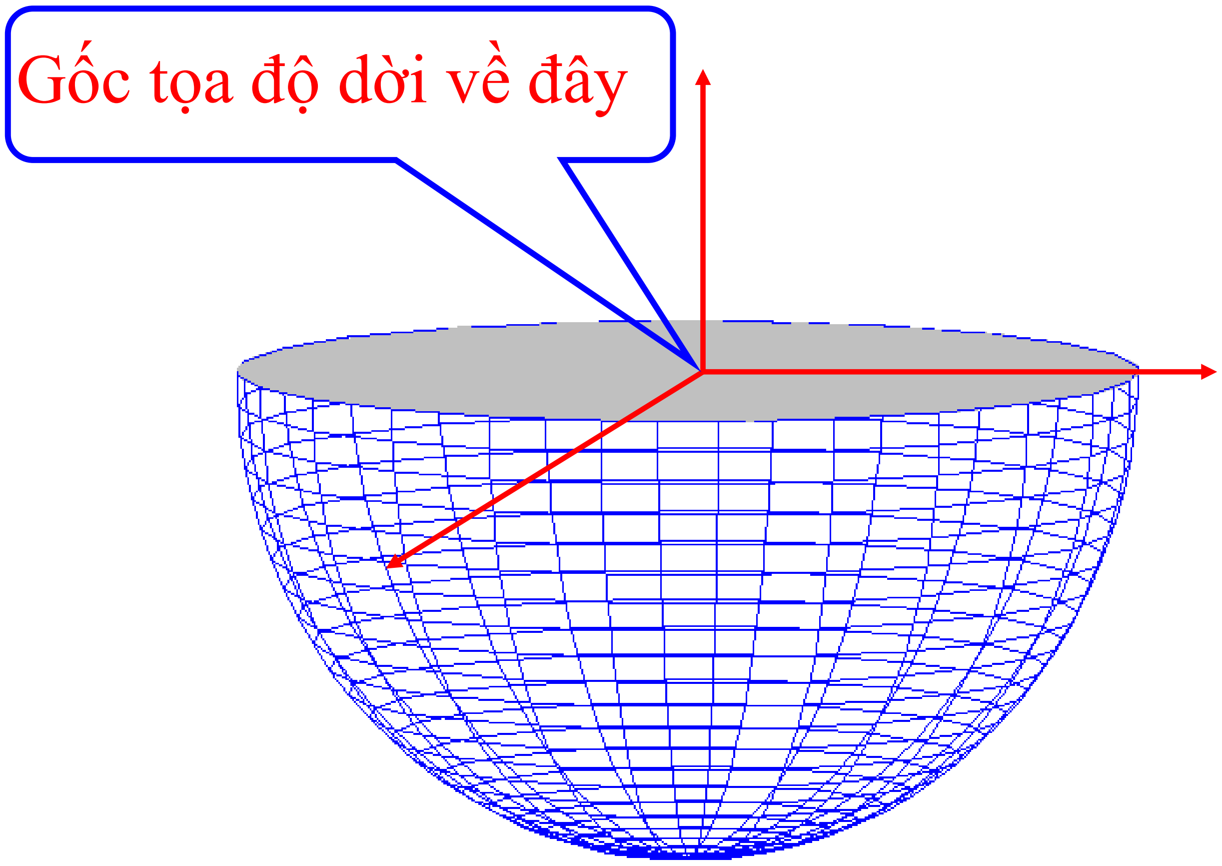
$0 \le \varphi \le 2\pi$

$0 \le \rho \le$?

Phải chia khối E ra làm 2 khối. Việc tính toán rất phức tạp.

Đổi sang tọa độ cầu mở rộng:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \\ y = \rho \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ z - 1 = \rho \cdot \cos\theta \end{cases}$$



Xác định cận: $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$

$0 \le \varphi \le 2\pi$

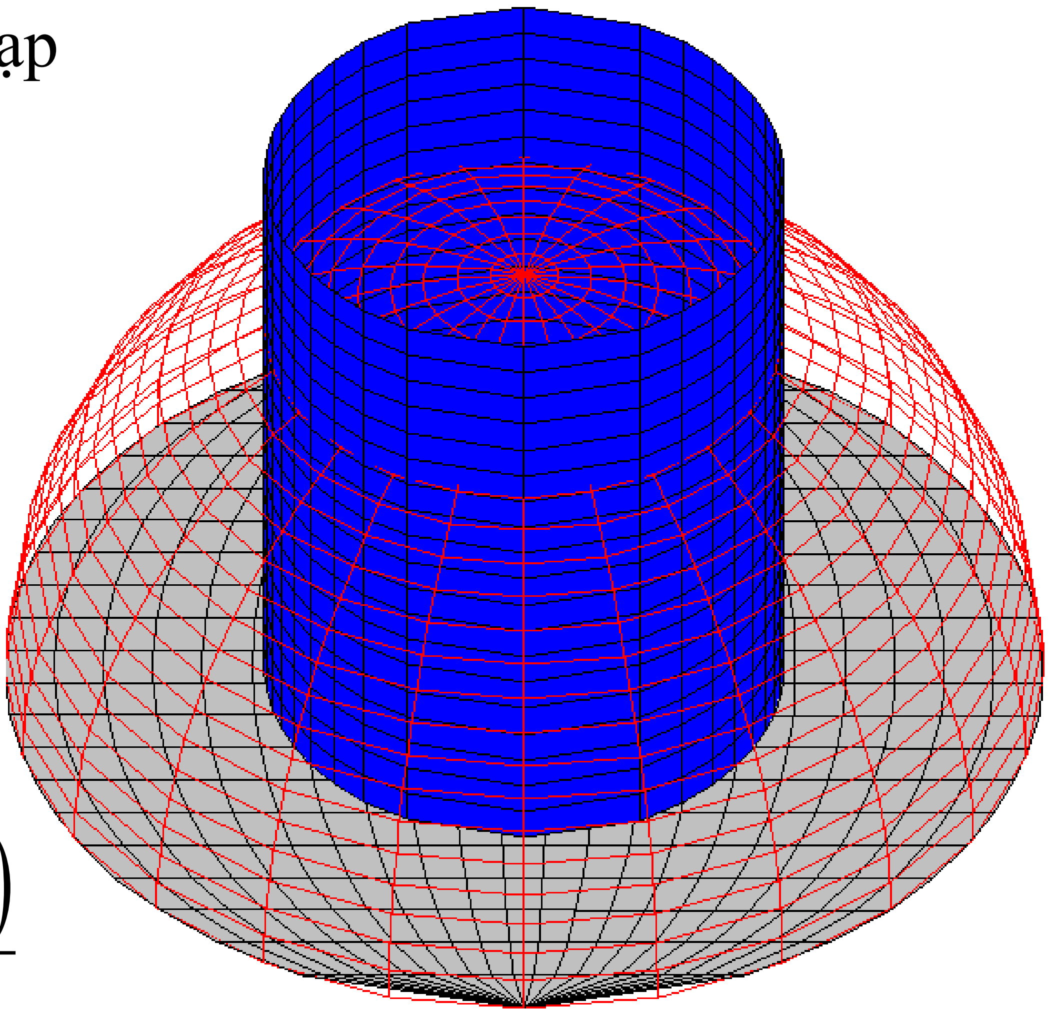
$0 \le \rho \le 1$

$$I = \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1 + \rho\cos\theta) \cdot \rho^2 \sin\theta \cdot d\rho \;= \frac{5\pi}{12}$$

Tính tích phân $I = \iiint\limits_E \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdydz$, trong đó E là vật thể giới hạn bởi:

$$z = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 \le 1 \quad (z \ge 0)$$

Sử dụng tọa độ cầu, việc tính toán phức tạp hơn nhiều.



Đổi sang tọa độ trụ: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$

Xác định cận: $0 \le \varphi \le 2\pi$

$0 \le r \le 1$

$0 \le z \le \sqrt{4 - r^2}$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_0^{\sqrt{4-r^2}} \frac{r}{r}\, dz = \frac{\pi\left(2\pi + 3\sqrt{3}\right)}{3}$$

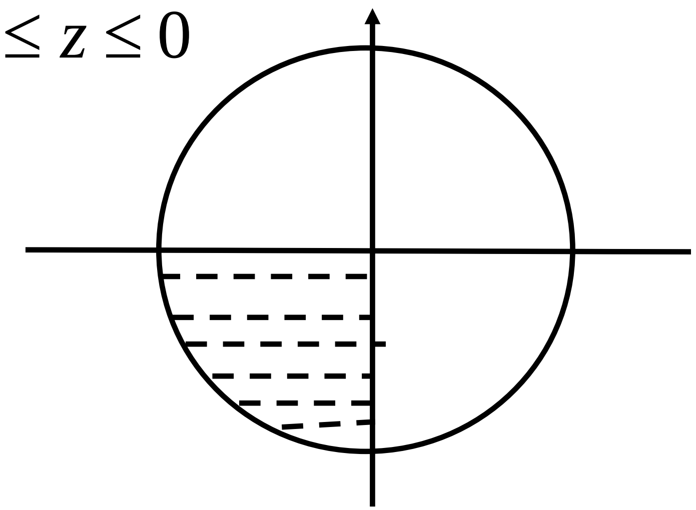
3. Hệ tọa độ cầu

Ví dụ

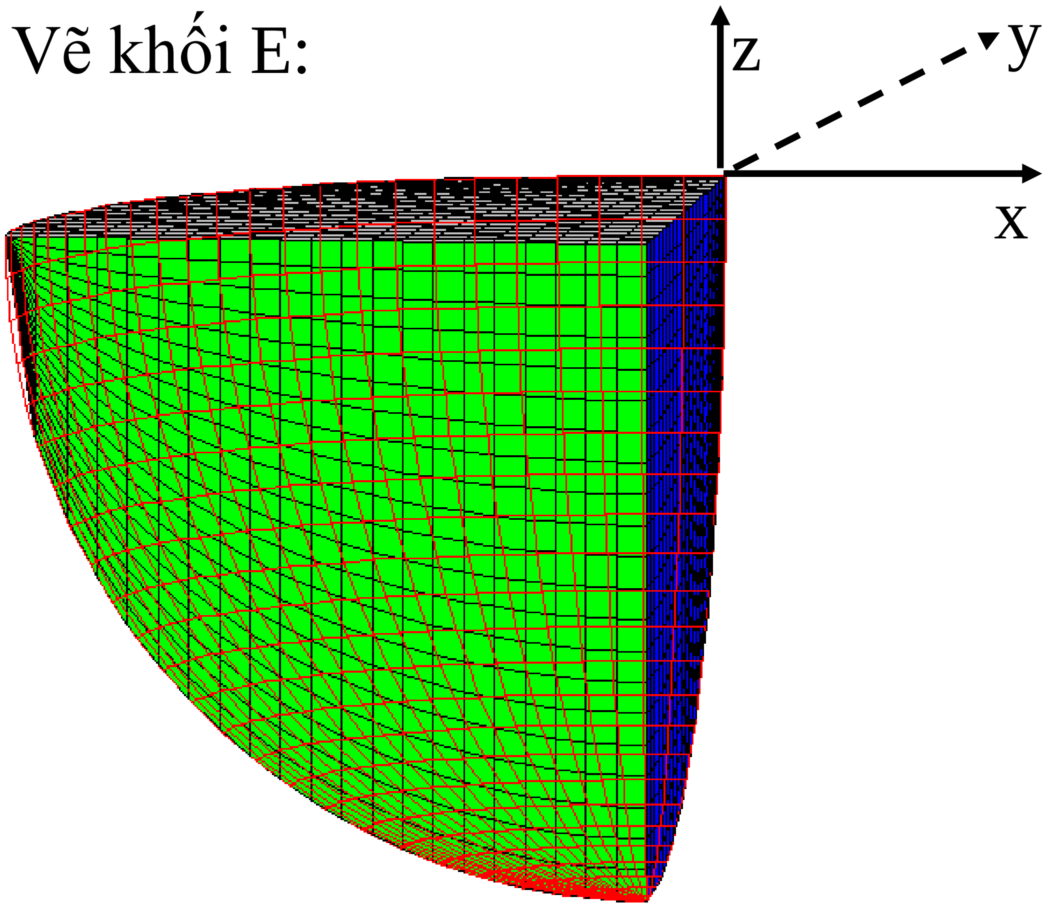
Đổi sang tọa độ cầu rồi tính: $I = \int_{-2}^{0} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} dy \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{0} x dz$

Xác định vật thể E:

$$\begin{cases} -2 \le x \le 0 \\ -\sqrt{4-x^2} \le y \le 0 \\ -\sqrt{4-x^2-y^2} \le z \le 0 \end{cases}$$

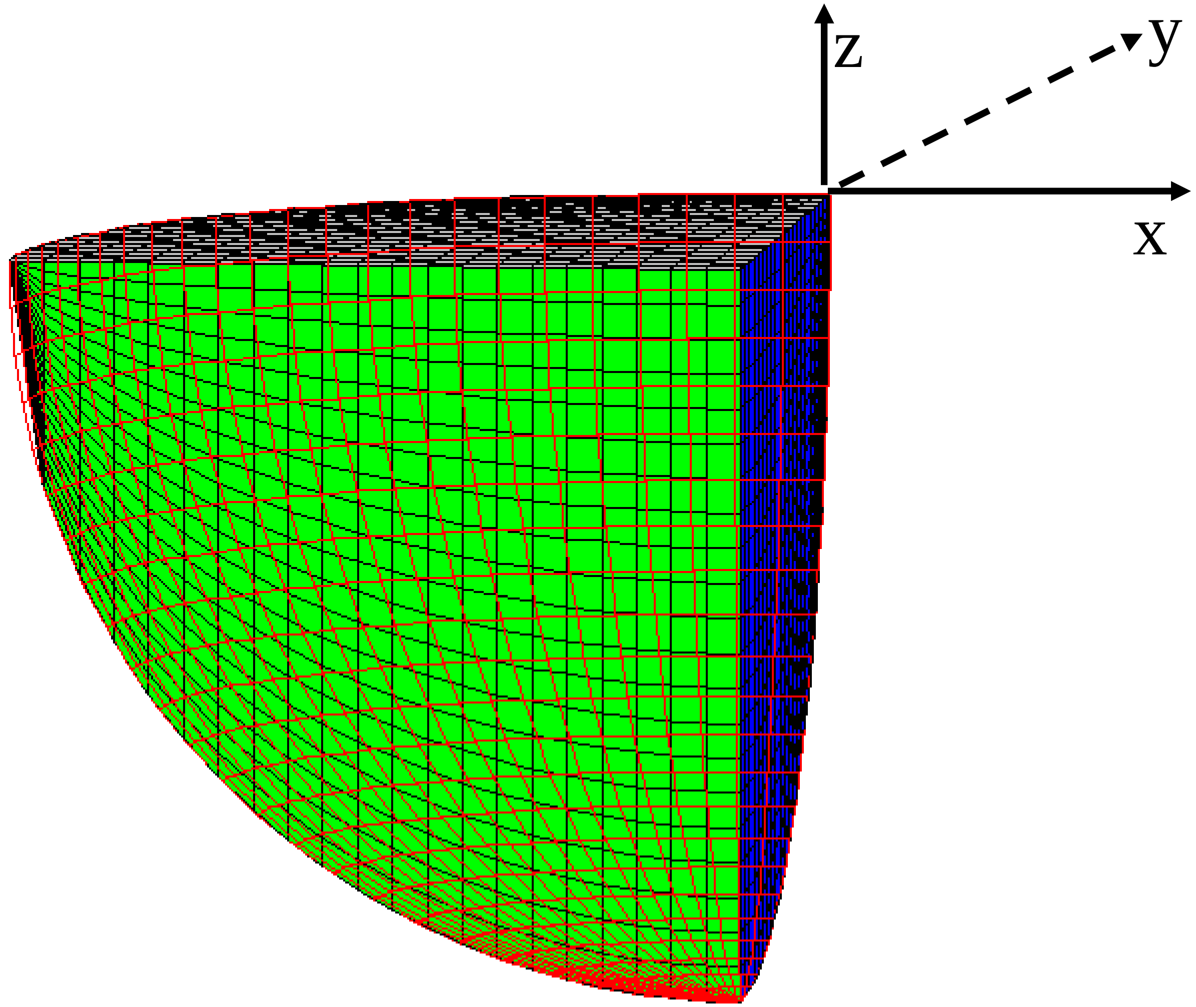


Vẽ khối E:



Đổi biến sang tọa độ cầu:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \\ y = \rho \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ z = \rho \cdot \cos\theta \end{cases}$$



Xác định cận: $\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$

$$\pi \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}$$

$$0 \le \rho \le 2$$

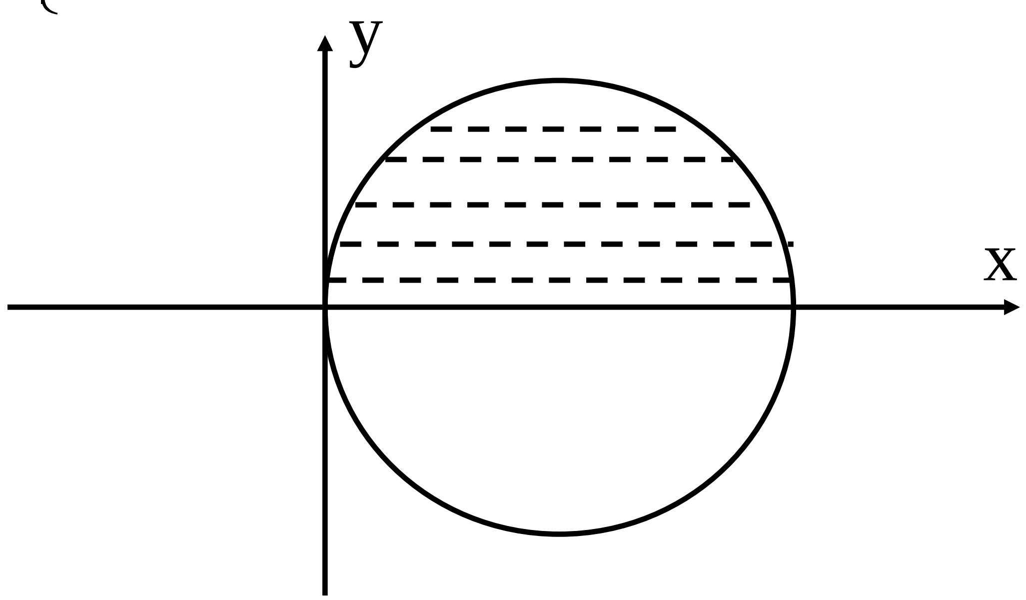
$$I = \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \int_{\pi}^{3\pi/2} d\varphi \int_0^2 \rho \sin\theta \cos\varphi \cdot \rho^2 \sin\theta \cdot d\rho$$

$$I = \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2\theta d\theta \cdot \int_{\pi}^{3\pi/2} \cos\varphi d\varphi \cdot \int_0^2 \rho \cdot \rho^2 d\rho \ = \frac{1}{4} \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2\theta d\theta \cdot \int_{\pi}^{3\pi/2} \cos\varphi d\varphi \ = -\pi$$

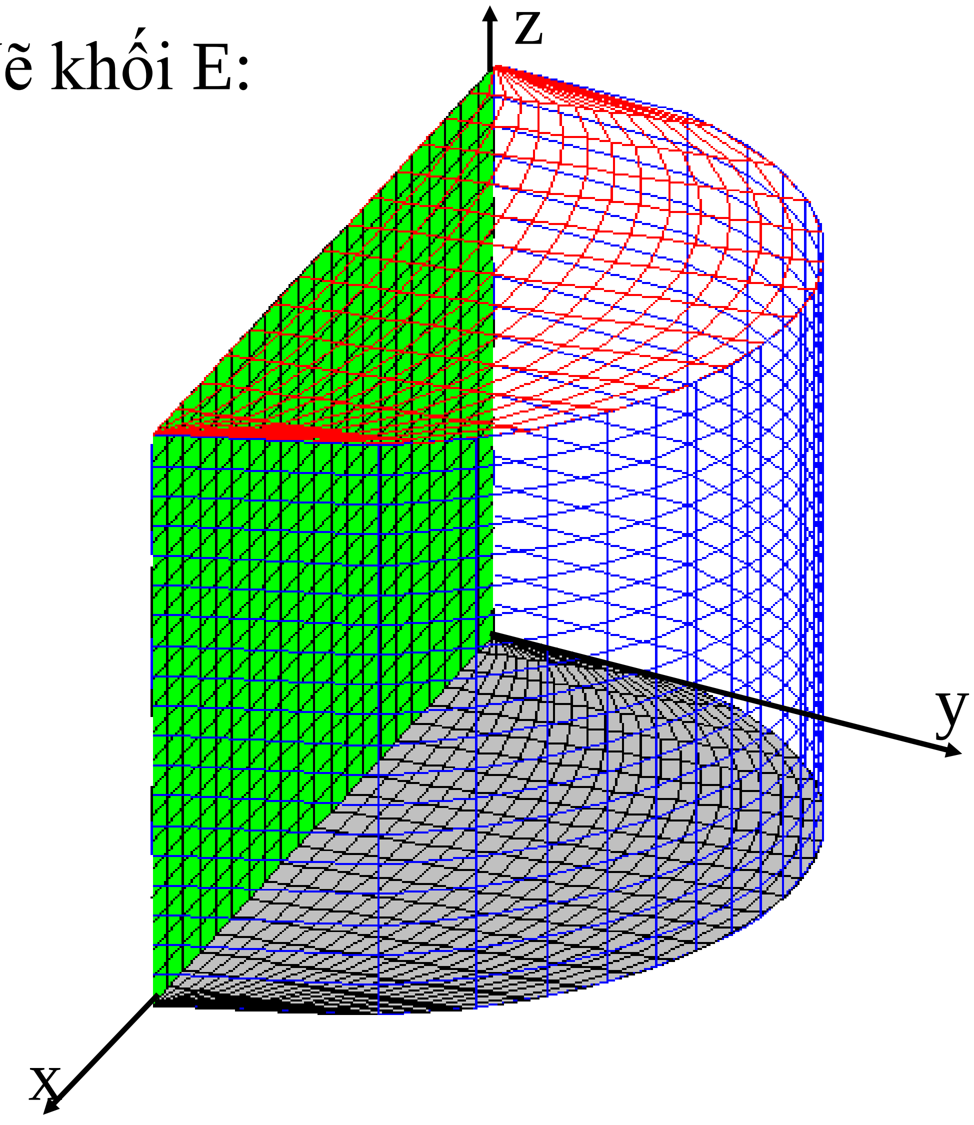
Đổi sang tọa độ trụ rồi tính: $I = \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^4 z\sqrt{x^2+y^2}\,dz$

Xác định vật thể E:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le \sqrt{2x - x^2} \\ 0 \le z \le 4 \end{cases}$$

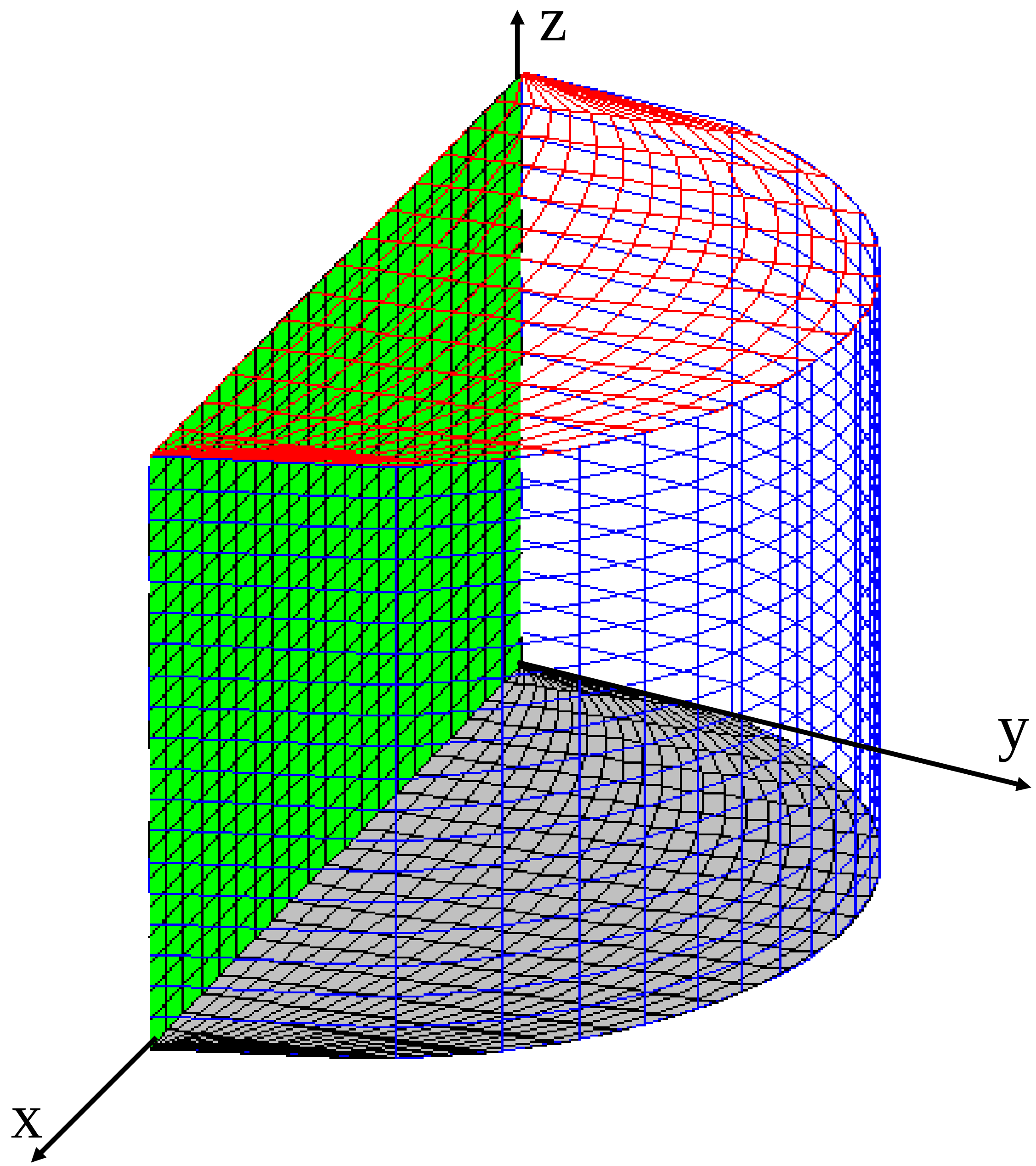


Vẽ khối E:



Đổi biến sang tọa độ trụ:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\varphi \\ y = r \cdot \sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$



Xác định cận: $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$

$$0 \le r \le 2\cos\varphi$$

$$0 \le z \le 4$$

$$I = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} dr \int_0^4 z \cdot r \cdot r \cdot dz$$

$$I = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^2 dr \left. \frac{z^2}{2} \right|_0^4$$

$$I = \frac{128}{9}$$

4. Ứng dụng hình học

Ứng dụng hình học của tích phân bội ba

Từ định nghĩa tích phân bội ba ta có công thức tính thể tích vật thể E:

$$V_E = \iiint_E dxdydz$$

Có thể sử dụng tích phân kép để tính thể tích vật thể.

Tuy nhiên trong một số trường hợp sử dụng tích phân bội ba tính nhanh hơn,

vì tích phân bội ba có cách đổi sang tọa độ trụ hoặc tọa độ cầu.

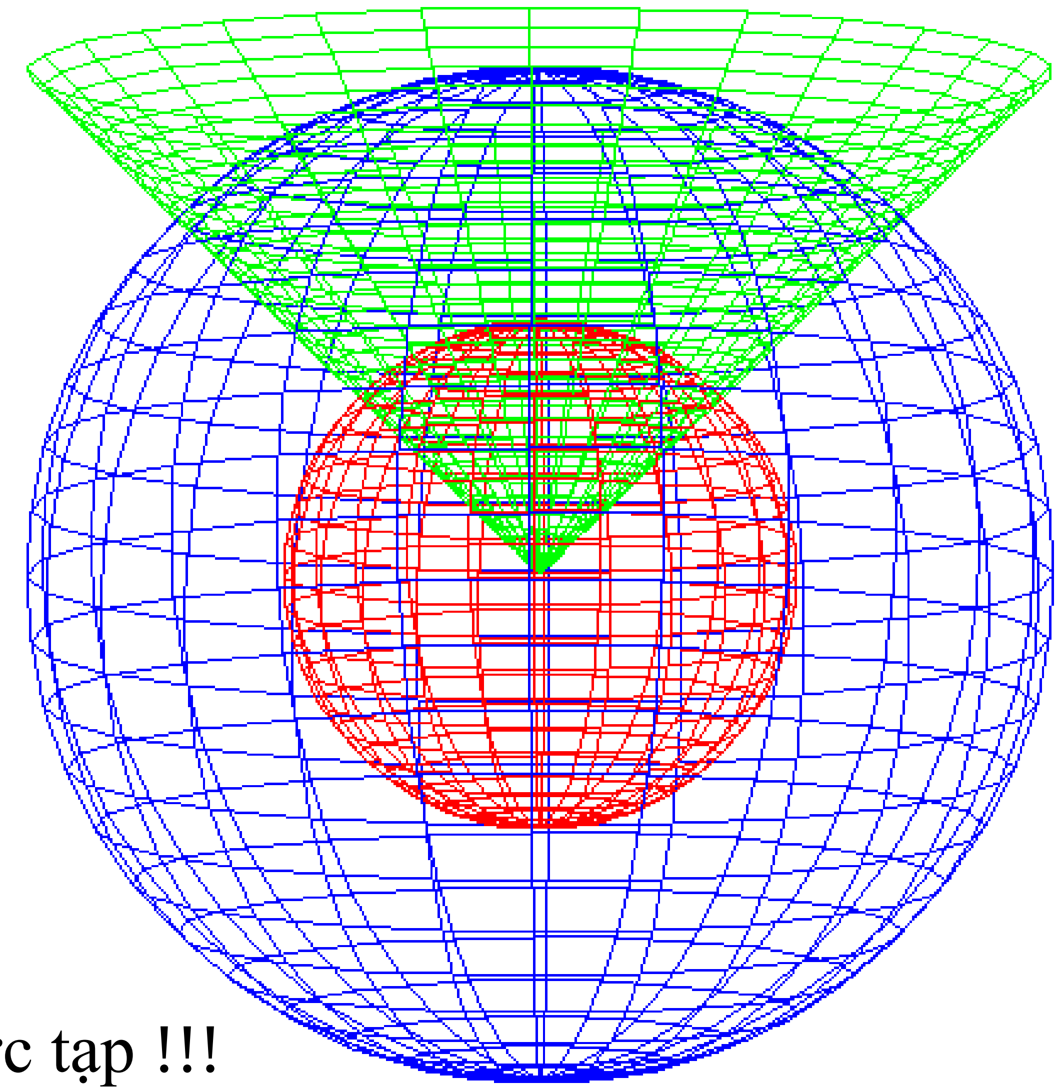
Tính thể tích vật thể E được giới hạn bởi:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1; x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \ge \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$V = \iiint_E dxdydz \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$$

Sử dụng tọa độ cầu: $0 \le \varphi \le 2\pi$

$$1 \le \rho \le 2$$



$$V = \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 \rho^2 \sin\theta \cdot d\rho$$

$$V = \frac{(14 - 7\sqrt{2})\pi}{3}$$

Sử dụng tích phân kép, tính toán rất phức tạp !!!

Tính thể tích vật thể E được giới hạn bởi: $x^2 + y^2 = 2x; x + z = 3, x - z = 3$

$$V = \iiint_E dxdydz$$

Sử dụng tọa độ trụ: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$

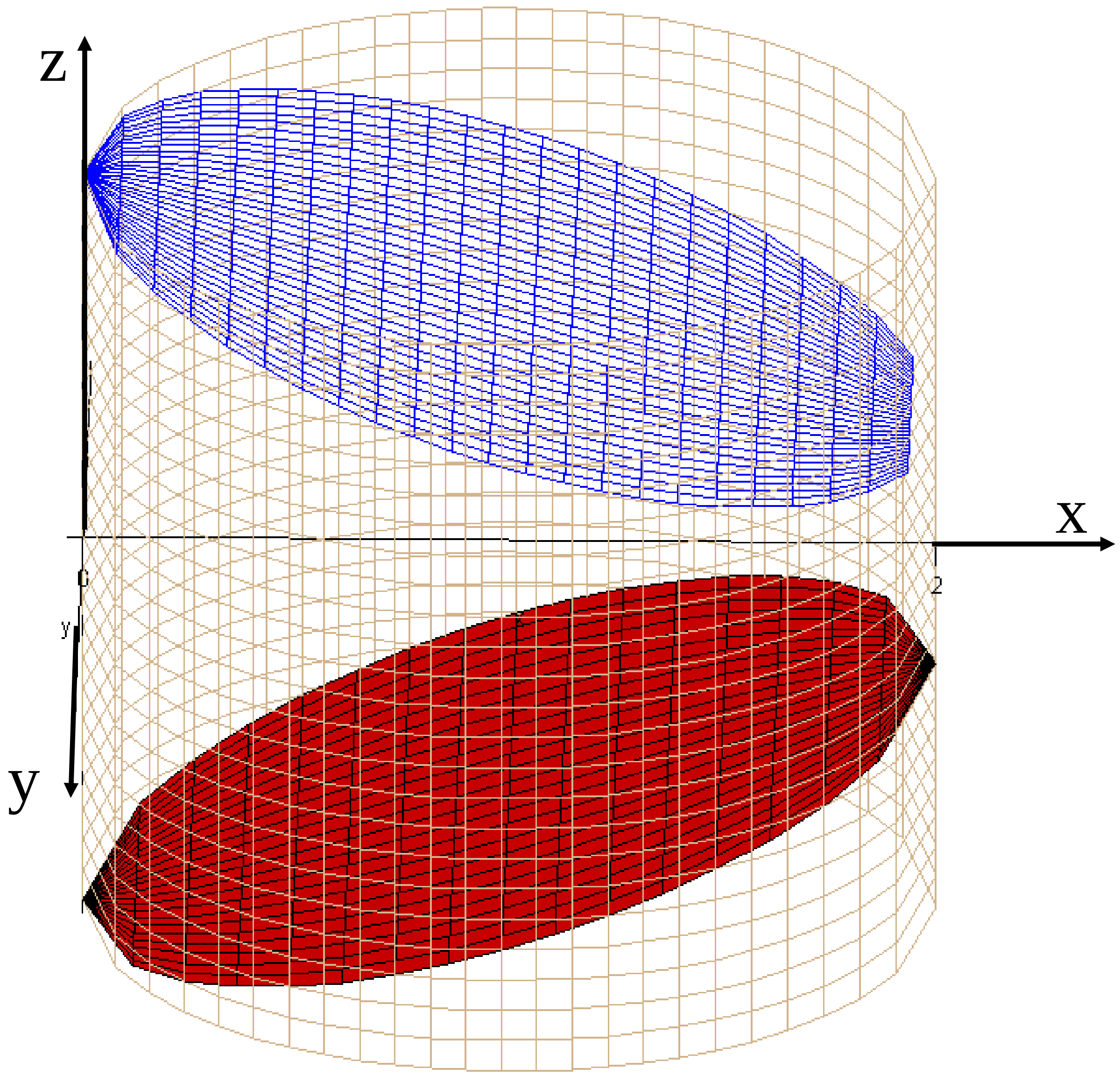
$$\frac{-\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

$$0 \le r \le 2\cos\varphi$$

$$r\cos\varphi - 3 \le z \le 3 - r\cos\varphi$$

$$V = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} dr \int_{r\cos\varphi-3}^{3-r\cos\varphi} r \cdot dz$$

$$V = 4\pi$$



Tính thể tích vật thể E được giới hạn bởi: $x^2+y^2+z^2=4; x^2+y^2+z^2=4z$

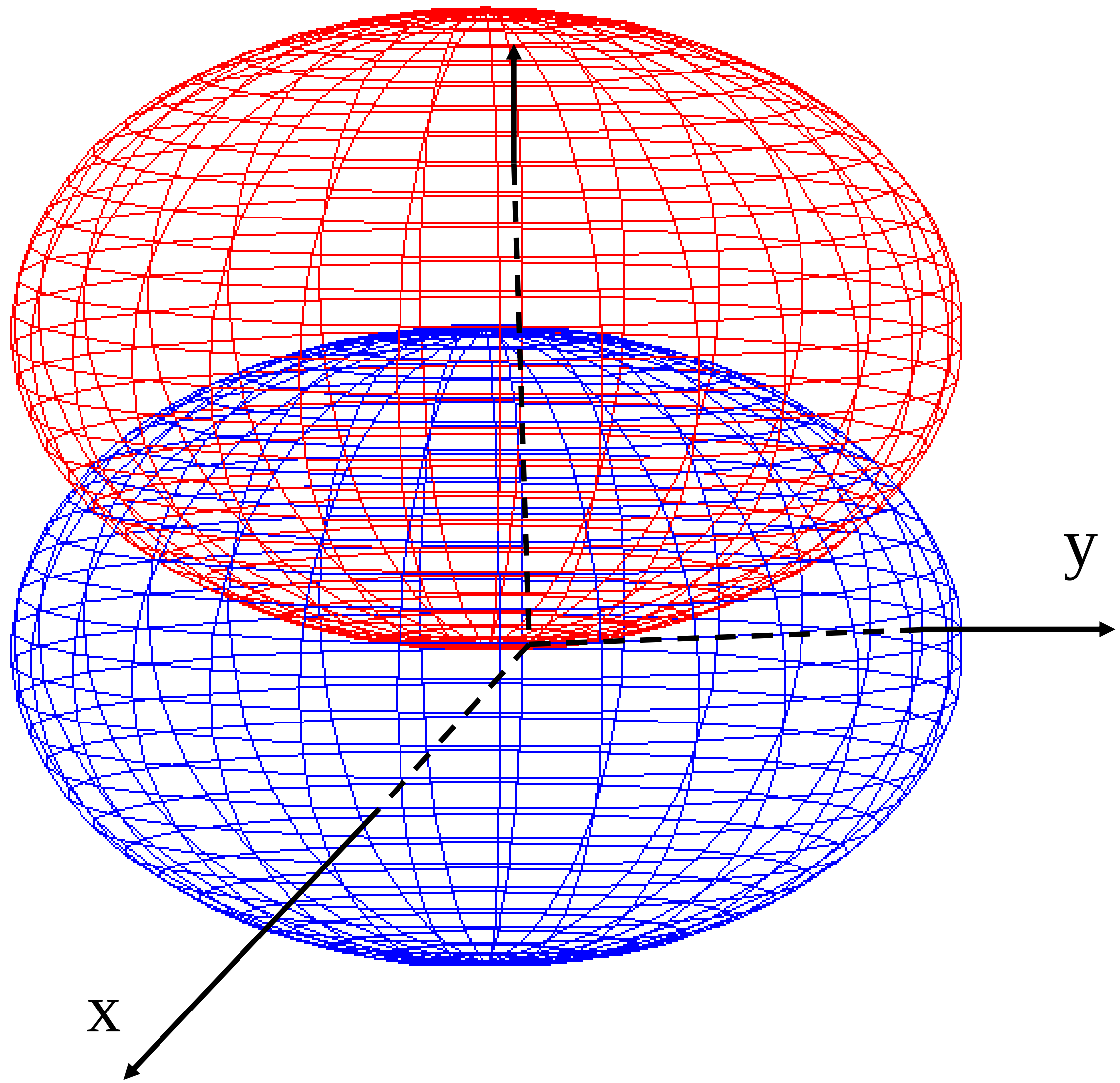
$$V=\iiint\limits_E dxdydz$$

Sử dụng tọa độ trụ:

$$0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$0 \le r \le \sqrt{3}$$

$$2-\sqrt{4-r^2} \le z \le \sqrt{4-r^2}$$

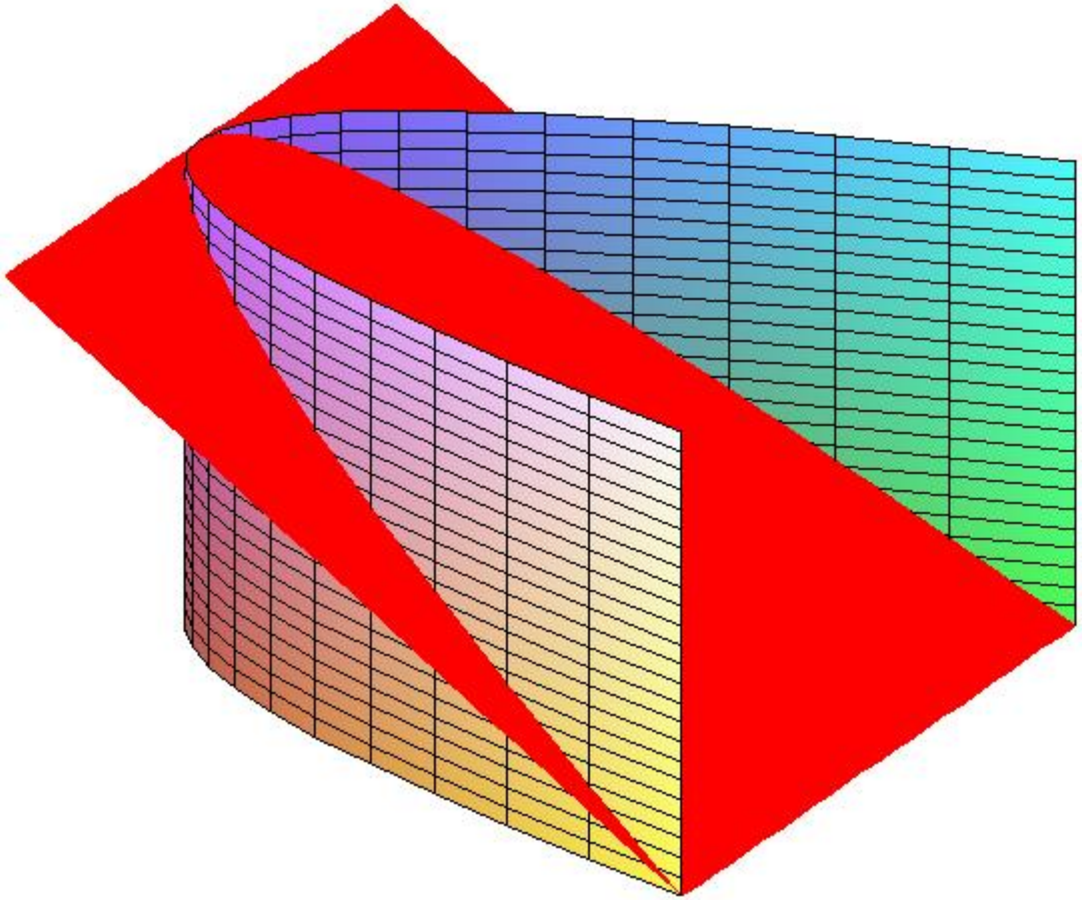


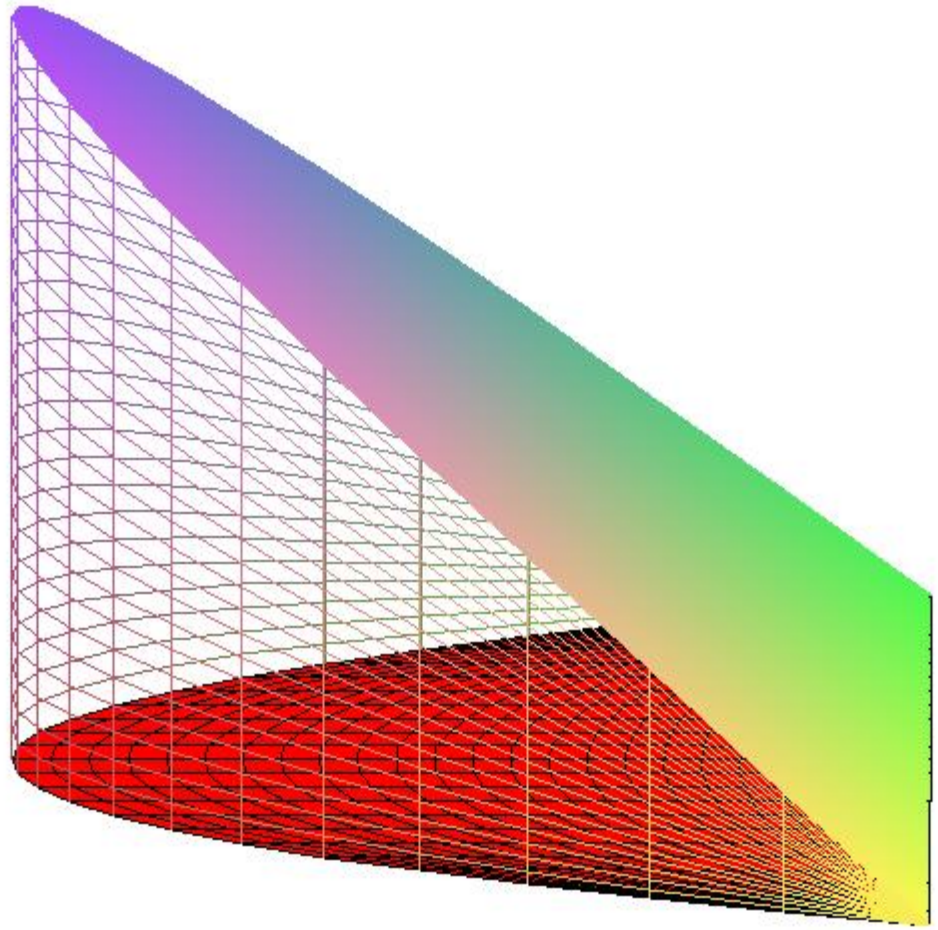
$$V=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} dr \int_{2-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r \cdot dz$$

$$V=\frac{10\pi}{3}$$

Sử dụng tọa độ cầu tính phức tạp hơn nhiều.

Tính thể tích vật thể E được giới hạn bởi: $y = x^2, y + z = 1, z = 0.$





$$V = \iiint_E dxdydz = \iint_{Parabol} \left[\int_0^{1-y} dz \right] dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} dy \int_0^{1-y} dz$$