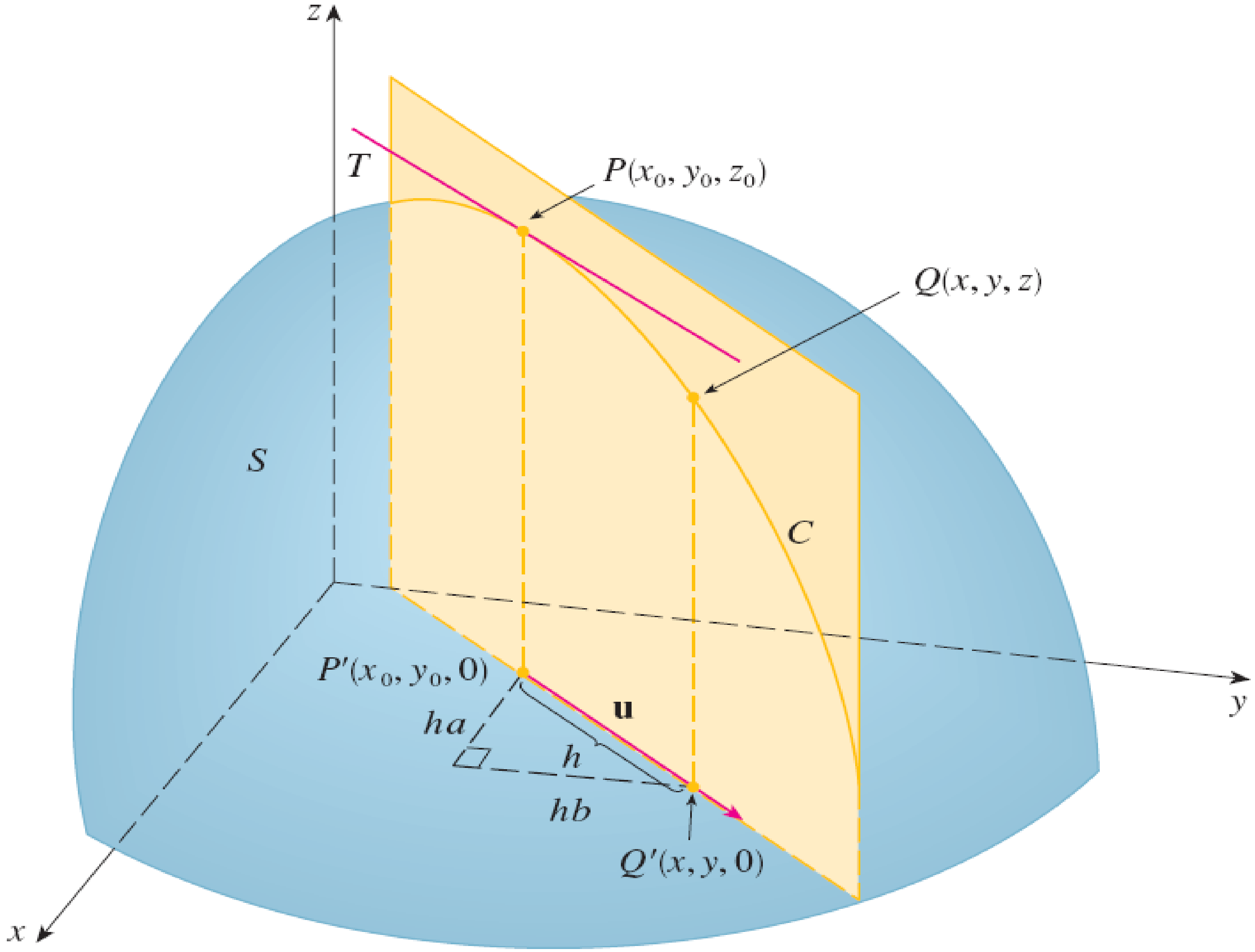
4. Đạo hàm theo hướng

Định nghĩa



4. Đạo hàm theo hướng

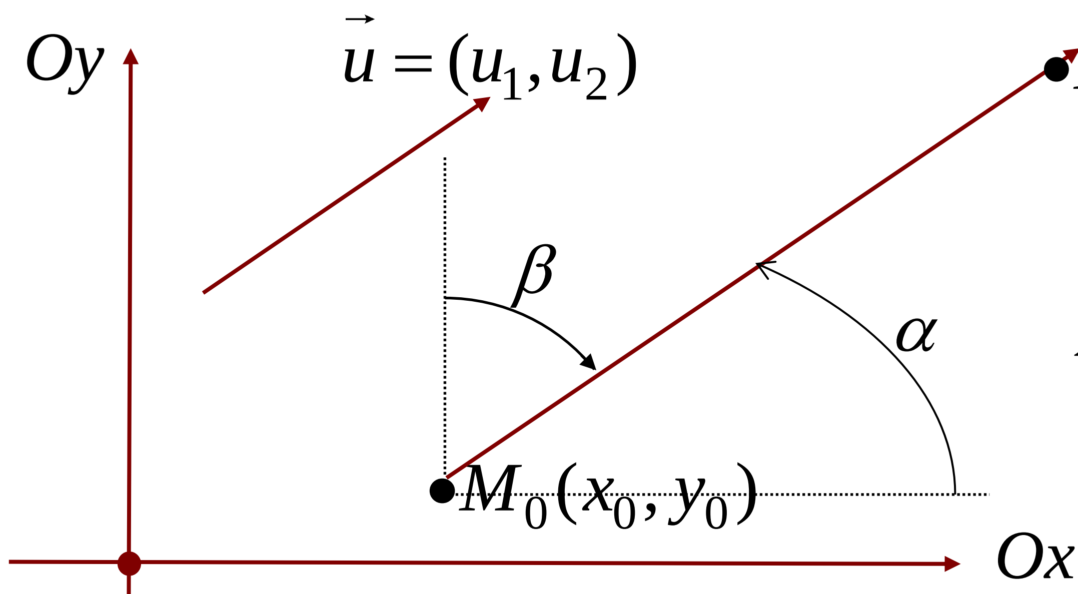
Định nghĩa

$f = f(x,y)$

Véctơ đơn vị cùng phương, chiều với $\vec{u}$

$$\vec{l_0} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = (l_1, l_2)$$

$$\vec{l_0} = (\cos\alpha, \cos\beta)$$



α, β là góc tạo bởi $\vec{u}$ và chiều dương trục Ox và Oy tương ứng.

Véctơ M_0M cùng phương, chiều với $\vec{u}$: $\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha \\ y = y_0 + t\cos\beta \end{cases}$, $t > 0$

Đạo hàm của hàm f theo hướng véctơ $\vec{u}$ tại điểm M_0 là giới hạn (nếu tồn tại):

$$f'_{\vec{u}}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(M_0) = \lim_{M \to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{MM_0}$$

4. Đạo hàm theo hướng

Định nghĩa

$$M_0M = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = t \qquad f'_{\vec{u}}(M_0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0)}{t}$$

$$f'_{\vec{u}}(M_0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta) - f(x_0,y_0)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t} = f'_+(0)$$

Theo quy tắc dây chuyền: $f'(t) = f'_x \cdot x'(t) + f'_y \cdot y'(t)$

Do đó: $f'_{\vec{u}}(M_0) = f'_x(x_0,y_0)\cdot\cos\alpha + f'_y(x_0,y_0)\cdot\cos\beta$

$$f'_{\vec{u}}(x_0,y_0) = \Big(\big(f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0)\big), (\cos\alpha, \cos\beta)\Big)$$

$\overrightarrow{\text{grad}f}(x_0,y_0) = \big(f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0)\big)$ véctơ gradient của f tại M_0 .

$$\boxed{f'_{\vec{u}}(M_0) = \left(\overrightarrow{\text{grad}f}(x_0,y_0), \vec{l_0}\right)}$$

Tích vô hướng của véctơ gradient tại M_0 với véctơ đơn vị.

4. Đạo hàm theo hướng

Định nghĩa

Tương tự, ta có định nghĩa đạo hàm của *f*=*f*(x,y,z) tại M_0 theo hướng $\vec{u}$:

$$f'_{\vec{u}}(M_0) = f'_x(M_0)\cdot\cos\alpha + f'_y(M_0)\cdot\cos\beta + f'_z(M_0)\cdot\cos\gamma$$

$$\boxed{f'_{\vec{u}}(M_0) = \left(\overrightarrow{\mathrm{grad} f}(x_0, y_0, z_0), \vec{l_0}\right)}$$

Trong đó: véctơ đơn vị cùng hướng với $\vec{u}$ là: $\vec{l_0} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

α, β, γ là các góc tạo bởi $\vec{u}$ và chiều dương trục Ox, Oy và Oz tương ứng.

Véctơ gradient của *f*(x,y,z) tại M_0 là: $\overrightarrow{\mathrm{grad} f}(M_0) = \left(f'_x(M_0), f'_y(M_0), f'_z(M_0)\right)$

Ví dụ

Tìm đạo hàm của $f(x,y) = xy^2 - 3x^4y^5$ tại điểm $M_0(1,1)$ theo hướng của véctơ $\vec{u} = (1,-2)$

Véctơ đơn vị cùng hướng với $\vec{u}$ là: $\vec{l_0} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta)$

$$f'_x = y^2 - 12x^3y^5 \Rightarrow f'_x(1,1) = -11$$

$$f'_y = 2xy - 15x^4y^4 \Rightarrow f'_y(1,1) = -13$$

$$f'_{\vec{l_0}}(1,1) = f'_x(1,1)\cdot\cos\alpha + f'_y(1,1)\cdot\cos\beta = -\frac{11}{\sqrt{5}} + \frac{26}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}$$

4. Đạo hàm theo hướng

Ví dụ

Tìm đạo hàm của $f(x,y) = x^3 - 3xy + 4y^2$ tại điểm $M_0(1,2)$ theo hướng của véctơ tạo với chiều dương trục Ox một góc 30^0.

Véctơ đơn vị là: $\vec{l_0} = (\cos\alpha, \cos\beta)$.

$$\alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \vec{l_0} = \left(\cos\frac{\pi}{6}, \cos\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$f'_x = 3x^2 - 3y \Rightarrow f'_x(1,2) = -3$$

$$f'_y = -3x + 8y \Rightarrow f'_y(1,2) = 13$$

$$f'_{\vec{l_0}}(1,2) = f'_x(1,2)\cdot\cos\alpha + f'_y(1,2)\cdot\cos\beta = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{13}{2}$$

4. Đạo hàm theo hướng

Ví dụ

Tìm đạo hàm của $f(x,y) = \arctan\dfrac{y}{x}$ tại điểm $M_0 = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ theo hướng véctơ pháp tuyến ngoài của đường tròn: $x^2 + y^2 = 2x$ tại M_0.

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - 2x = 0 \Rightarrow \vec{n} = \left(F'_x, F'_y\right) = \left(2x-2, 2y\right) = (-1, \sqrt{3})$$

Véctơ đơn vị là: $\vec{l_0} = \left(\dfrac{-1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$f'_x = -\frac{y}{x^2+y^2} \Rightarrow f'_x(M_0) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad f'_y = \frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow f'_y(M_0) = \frac{1}{2}$$

$$f'_{\vec{l_0}}(M_0) = f'_x(M_0)\cdot\cos\alpha + f'_y(M_0)\cdot\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

4. Đạo hàm theo hướng

Ví dụ

Tìm đạo hàm của $f(x,y,z) = x^3 + 2xy^2 + 3yz^2$ tại điểm $M_0(3,3,1)$ theo hướng của véctơ l=(2,1,2).

Véctơ đơn vị là: $\vec{l_0} = \left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

$$f'_x = 3x^2 + 2y^2 \qquad \Rightarrow f'_x(3,3,1) = 45$$

$$f'_y = 4xy + 3z^2 \qquad \Rightarrow f'_y(3,3,1) = 39$$

$$f'_z = 6yz \qquad \Rightarrow f'_z(3,3,1) = 18$$

$$f'_{\vec{l}}(M_0) = f'_x(M_0)\cdot\cos\alpha + f'_y(M_0)\cdot\cos\beta + f'_z(M_0)\cdot\cos\gamma = 55$$

4. Đạo hàm theo hướng

Ví dụ

Tìm đạo hàm của $f(x,y,z)=x^2-3yz+4$ tại điểm $M_0(1,2,-1)$ theo hướng của véctơ tạo với các trục tọa độ những góc nhọn bằng nhau.

Véctơ đơn vị là: $\vec{l_0} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \Leftrightarrow 3\cos^2\alpha=1 \quad \Leftrightarrow \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$f'_x = 2x \quad \Rightarrow f'_x(1,2,-1)=2$$

$$f'_y = -3z \quad \Rightarrow f'_y(1,2,-1)=3$$

$$f'_z = -3y \Rightarrow f'_z(1,2,-1)=-6$$

$$f'_{\vec{l}}(M_0)=f'_x(M_0)\cdot\cos\alpha+f'_y(M_0)\cdot\cos\beta+f'_z(M_0)\cdot\cos\gamma \quad =-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

4. Đạo hàm theo hướng

Chú ý

Theo công thức tính đạo hàm đạo hàm theo hướng:

$$f'_{\vec{u}}(M_0) = \left(\overrightarrow{\text{grad}f}(M_0), \vec{l_0}\right) = \left\|\overrightarrow{\text{grad}f}(M_0)\right\| \cdot \left\|\vec{l_0}\right\| \cdot \cos\theta$$

$$\leq \left\|\overrightarrow{\text{grad}f}(M_0)\right\| \cdot \left\|\vec{l_0}\right\| = \left\|\overrightarrow{\text{grad}f}(M_0)\right\|$$

Đạo hàm của f tại M_0 đạt giá trị lớn nhất theo hướng của véctơ $\overrightarrow{\text{grad}f}(M_0)$.

Giá trị lớn nhất của đạo hàm theo hướng là: $\left\|\overrightarrow{\text{grad}f}(M_0)\right\|$.

Đạo hàm của f tại M_0 đạt giá trị nhỏ nhất theo hướng ngược với $\overrightarrow{\text{grad}f}(M_0)$.

Giá trị nhỏ nhất của đạo hàm theo hướng là: $-\left\|\overrightarrow{\text{grad}f}(M_0)\right\|$.

4. Đạo hàm theo hướng

Ví dụ

Cho hàm $f(x,y,z) = xyz + 2xy^2 + yz^3$ và một điểm $M_0 = (1,1,2)$.

1) Tìm hướng mà đạo hàm của f theo hướng đó tại M_0 đạt giá trị lớn nhất.
Tìm giá trị lớn nhất này.

2) Tìm hướng mà đạo hàm của f theo hướng đó tại M_0 đạt giá trị nhỏ nhất.
Tìm giá trị nhỏ nhất này.

1) Hướng cần tìm là hướng của véctơ gradf (M_0):

$$\overrightarrow{\text{grad}f}(M_0) = \left(f'_x\,(M_0), f'_y\,(M_0), f'_z\,(M_0) \right)$$

Giá trị lớn nhất bằng độ lớn véctơ gradf (M_0): $f'_{\text{grad}f\,(M_0)} = \left\| \overrightarrow{\text{grad}f}(M_0) \right\|$.

2) Hướng cần tìm là ngược hướng của véctơ gradf (M_0).

4. Đạo hàm theo hướng

Ví dụ

Cho hàm $f(x,y) = \ln(xyz)$ và một điểm $M_0 = (1,-2,-3)$.

1) Tìm giá trị lớn nhất của đạo hàm theo hướng của f tại M_0.

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của đạo hàm theo hướng của f tại M_0.

Đạo hàm theo hướng của hàm f tại M_0 là một hàm phụ thuộc vào hướng của véctơ $l = (l_1, l_2, l_3)$.

Giá trị lớn nhất của đạo hàm theo hướng bằng độ lớn véctơ gradf (M_0).

Giá trị lớn nhất đạt được khi lấy đạo hàm theo hướng của véctơ gradf (M_0).

4. Đạo hàm theo hướng

Ví dụ

Cho hàm $f(x,y) = x^2 + \sin(xy)$ và một điểm $M_0 = (1,0)$.

Tìm hướng mà đạo hàm của f theo hướng đó tại M_0 có giá trị bằng 1.

Giả sử hướng cần tìm là hướng của véctơ đơn vị: $\vec{l}_0 = (a,b), a^2 + b^2 = 1.$

$$f'_{\vec{l}_0}(M_0) = f'_x(M_0)\cdot a + f'_y(M_0)\cdot b$$

$f'_x = 2x + y\cos(xy) \Rightarrow f'_x(M_0) = 2.$ $\quad$ $f'_y = x\cos(xy) \Rightarrow f'_y(M_0) = 1.$

$f'_{\vec{l}_0}(M_0) = 2a + b = 1.$

$\begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}; \begin{cases} a = 4/5 \\ b = -3/5 \end{cases}$

Vậy có hai hướng:

$\vec{l}_0 = (0,1)$ hoặc $\vec{l}_0 = (4/5, -3/5).$

4. Đạo hàm theo hướng

Ví dụ

Cho hàm $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y.$

Tìm tất cả các điểm mà tốc độ thay đổi nhanh nhất của hàm f tại những điểm này là theo hướng của véctơ $\vec{i} + \vec{j}$.

Giả sử điểm cần tìm là $M(a,b)$.

Tốc độ thay đổi nhanh nhất của f tại M là theo hướng của véctơ gradf(M):

$$\overrightarrow{\text{grad}f}(M) = \left(f'_x(a,b), f'_y(a,b) \right) = (2a-2, 2b-4).$$

Mà grad$f$(M) cùng hướng với véctơ i + j = (1,0) + (0,1) = (1,1).

$$(2a-2, 2b-4) = t(1,1),\ t > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 + t/2 \\ b = 2 + t/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 + s \\ b = 2 + s \end{cases},\ s > 0$$

Tập hợp các điểm là nửa đường thẳng.

4. Đạo hàm theo hướng

Ví dụ

Nhiệt độ *T* tại một điểm (x,y,z) được cho bởi công thức:

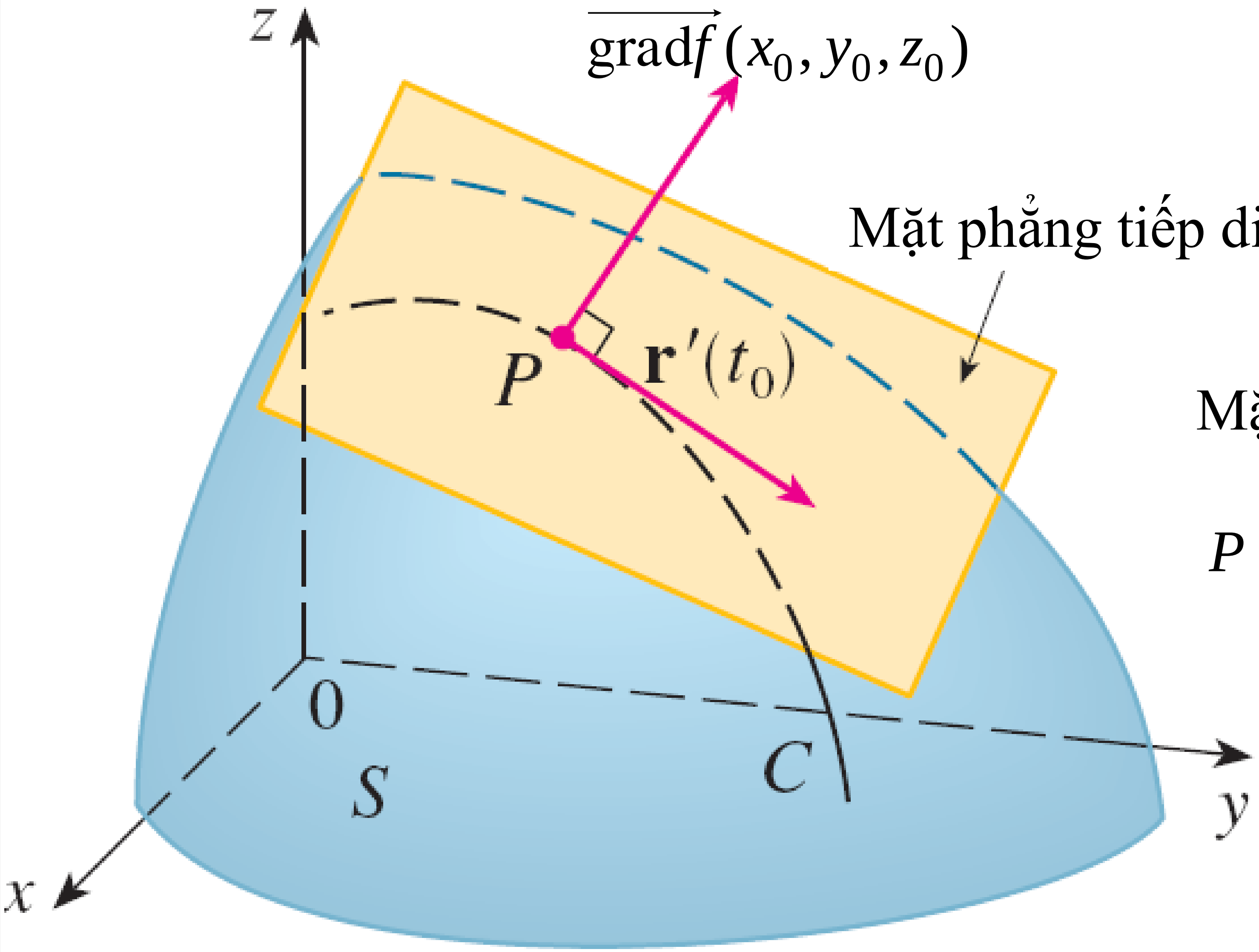
$$T(x,y,z) = 200 \cdot e^{-x^2-3y^2-9z^2}.$$

T tính bằng ^{0}C; x, y, z tính bằng mét.

1) Tìm tốc độ thay đổi của nhiệt độ tại điểm *P*(2,-1,2) theo hướng đến điểm (3,-3,3).

2) Tìm hướng mà nhiệt độ thay đổi nhanh nhất tại điểm *P*(2,-1,2).

3) Tìm giá trị lớn nhất của tốc độ thay đổi tại điểm *P*(2,-1,2).



Mặt cong *S* có pt: f(x,y,z) = 0.

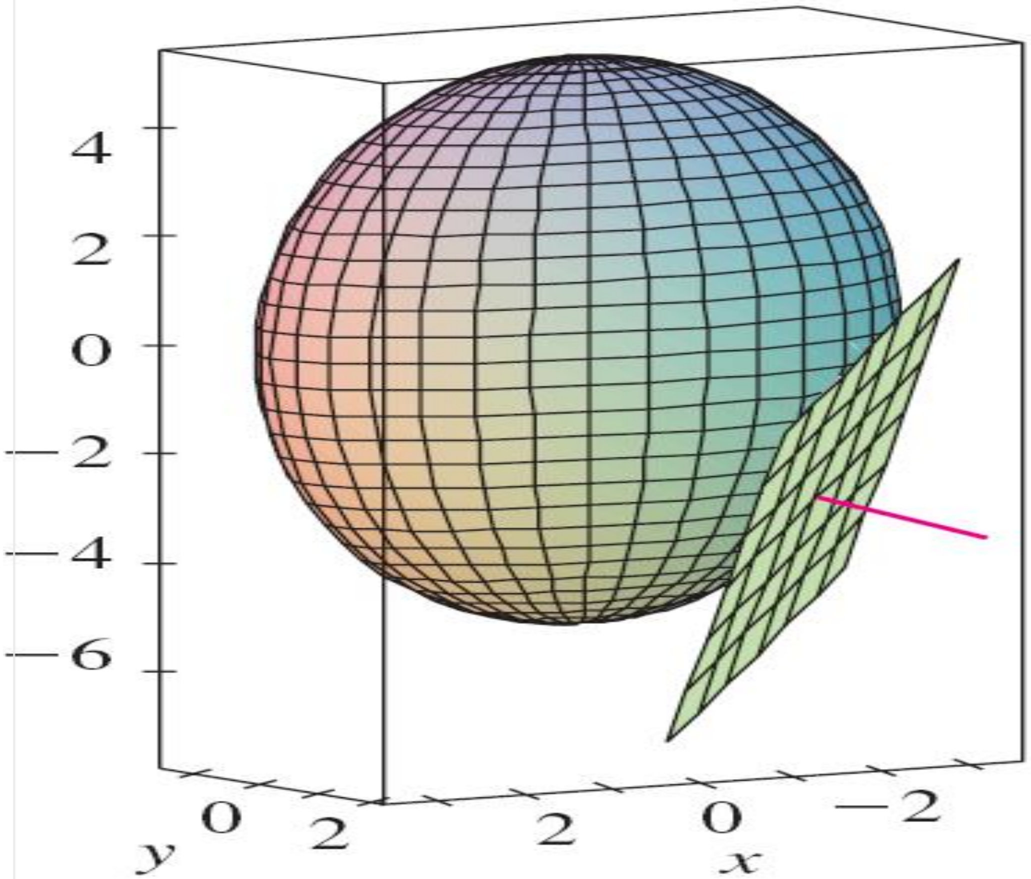
P là một điểm thuộc mặt *S*.

Phương trình mặt phẳng tiếp diện tại *P* với *S*:

$$f'_x(P)(x - x_0) + f'_y(P)(y - y_0) + f'_z(P)(z - z_0) = 0.$$

Véctơ pháp tuyến của mặt phẳng tiếp diện chính là vectơ grad*f*(*P*).

Viết phương trình mặt tiếp diện và phương trình của pháp tuyến với mặt $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$ tại điểm P(-2, 1, -3).



$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} - 3 = 0.$$

$$F'_x = \frac{x}{2}; F'_y = 2y; F'_z = \frac{2z}{9}.$$

Phương trình mặt tiếp diện:

$$-1(x+2) + 2(y-1) - \frac{2}{3}(z+3) = 0.$$

$$3x - 6y + 2z + 18 = 0.$$

Phương trình pháp tuyến qua P và có VTCP (-1, 2, -2/3): $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{-2/3}$.

5. Công thức Taylor, Maclaurint

Định nghĩa

Cho hàm $f = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp (n+1) trong lân cận V của điểm $M_0 = (x_0, y_0)$.

Công thức Taylor của *f* đến cấp n tại điểm M_0 là:

$$f(x, y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f}{k!}(x_0, y_0) + R_n(\Delta x, \Delta y).$$

trong đó $R_n(\Delta x, \Delta y)$ là phần dư cấp n.

Khai triển Taylor tại điểm $M_0(0,0)$ được gọi là khai triển Maclaurint.

Định nghĩa

Có hai cách thường dùng để biểu diễn phần dư:

1) Nếu cần đánh giá phần dư, thì sử dụng phần dư ở dạng Lagrange:

$$R_n(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x_0 + \theta \cdot \Delta x, x_0 + \theta \cdot \Delta y).$$

trong đó $0 < \theta < 1.$

2) Nếu không quan tâm phần dư, thì sử dụng phần dư ở dạng Peano:

$$R_n(\Delta x, \Delta y) = o(\rho^n).$$

trong đó: $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$

Ứng dụng khai triển Taylor

1) Xấp xỉ hàm đã cho với một đa thức (một hoặc nhiều biến) trong lân cận một điểm cho trước.

2) Tính đạo hàm cấp cao của f tại một điểm cho trước.

3) Tính giới hạn của hàm số (giới hạn kép nếu hàm 2 biến).

4) Tính gần đúng với sai số cho trước (vi phân cấp một không làm được điều này).

5. Công thức Taylor, Maclaurint

Ví dụ

Cho hàm $f(x,y) = x^2 + 2xy$ và một điểm $M_0 = (1,2)$.

Tìm công thức Taylor của f tại M_0 đến cấp hai.

$$f(x,y) = f(1,2) + \frac{df(1,2)}{1!} + \frac{d^2 f(1,2)}{2!} + o(\rho^2)$$

$$f(x,y) = f(1,2) + \frac{f'_x(1,2)(x-1) + f'_y(1,2)(y-2)}{1!} +$$

$$+ \frac{f''_{xx}(1,2)(x-1)^2 + 2f''_{xy}(1,2)(x-1)(y-2) + f''_{yy}(1,2)(y-2)^2}{2!} + o(\rho^2)$$

trong đó: $\rho = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$.

Tính tất cả các đạo hàm riêng trong công thức và thay vào biểu thức trên.

5. Công thức Taylor, Maclaurint

Chú ý

Tìm khai triển Taylor bằng công thức trên rất mất thời gian, nên trong đa số trường hợp ta sử dụng cách sau:

Tìm khai triển Taylor của f = f(x,y) tại $M_0(x_0,y_0)$:

1) Đặt $X = x - x_0, Y = y - y_0 \Leftrightarrow x = X + x_0\ , y = Y + y_0.$

2) Tìm khai triển Maclaurint của hàm f(X,Y), sử dụng khai triển Maclaurint của hàm một biến.

3) Đổi f(X,Y) sang f(x,y) (thay $X = x - x_0, Y = y - y_0$).

4) Sắp xếp theo thứ tự tăng dần các bậc của $(x - x_0), (y - y_0)$.

5. Công thức Taylor, Maclaurint

Ví dụ

Tìm khai triển Taylor đến cấp hai của $f(x,y)=\dfrac{1}{2x+3y}$ tại $M_0=(1,2)$.

Đặt $X=x-1, Y=y-2 \Leftrightarrow x=X+1;\ y=Y+2.$

$$f=\frac{1}{2(X+1)+3(Y+2)}=\frac{1}{2X+3Y+8}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1+2X/8+3Y/8}$$

Sử dụng khai triển hàm một biến: $g(t)=\dfrac{1}{1+t}=1-t+t^2+o(t^2)$, $t=\dfrac{2X}{8}+\dfrac{3Y}{8}$

$$f=\frac{1}{8}\left[1-\left(\frac{2X}{8}+\frac{3Y}{8}\right)+\left(\frac{2X}{8}+\frac{3Y}{8}\right)^2\right]+o(\rho^2).$$

Khai triển, bỏ bậc cao hơn 2, đổi biến lại, sắp xếp theo thứ tự.

$$f=\frac{1}{8}-\frac{2}{8^2}(x-1)-\frac{3}{8^2}(y-2)+\frac{4}{8^3}(x-1)^2+\frac{12}{8^3}(x-1)(y-2)+\frac{9}{8^3}(y-2)^2+o(\rho^2).$$

5. Công thức Taylor, Maclaurint

Ví dụ

Tìm khai triển Taylor đến cấp ba của $f(x,y) = \ln(x+y)$ tại $M_0 = (1,1)$.

Đặt $X = x-1, Y = y-1 \Leftrightarrow x = X+1; y = Y+1.$

$$f = \ln(2+X+Y) = \ln\left[2\cdot\left(1+\frac{X}{2}+\frac{Y}{2}\right)\right] = \ln 2 + \ln\left(1+\frac{X}{2}+\frac{Y}{2}\right).$$

Sử dụng khai triển hàm một biến: $g(t) = \ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$, $t = \frac{X+Y}{2}$

$$f = \ln 2 + \frac{X+Y}{2} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{X+Y}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{X+Y}{2}\right)^3 + o(\rho^3).$$

Khai triển, bỏ bậc cao hơn 3, đổi biến lại, sắp xếp theo thứ tự.

$$f = \ln 2 + \frac{x-1}{2} + \frac{y-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{8} - \frac{(x-1)(y-1)}{4} - \frac{(y-1)^2}{8} + \ldots\ldots$$

Ví dụ

Tìm khai triển Maclaurint đến cấp ba của $f(x,y) = e^x \sin y$.

Sử dụng khai triển hàm một biến:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \qquad \sin y = y - \frac{y^3}{3!} + o(y^4).$$

$$f(x,y) = e^x \sin y = \left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right] \cdot \left[y - \frac{y^3}{3!} + o(y^4)\right].$$

$$f(x,y) = y - \frac{y^3}{6} + xy - \frac{xy^3}{6} + \frac{x^2y}{2} - \frac{x^2y^3}{36} + \frac{x^3y}{6} - \frac{x^3y^3}{36} + o(\rho^3).$$

Khai triển, bỏ bậc cao hơn 3, đổi biến lại, sắp xếp theo thứ tự:

$$f(x,y) = y + xy + \frac{x^2y}{2} - \frac{y^3}{6} + o(\rho^3).$$

6. Cực trị hàm nhiều biến

Cực trị không điều kiện

Định nghĩa

Hàm $f = f(x, y)$ đạt cực đại địa phương tại $f = f(x, y)$, nếu tồn tại một lân cận của (x_0, y_0): $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$, với mọi (x, y) thuộc lân cận đó.

Tức là: $\exists B(M_0, r): \forall M \in B(M_0, r): f(M) \leq f(M_0)$.

Định nghĩa tương tự cho cực tiểu địa phương.

Điểm dừng: các đạo hàm riêng cấp 1 bằng 0.

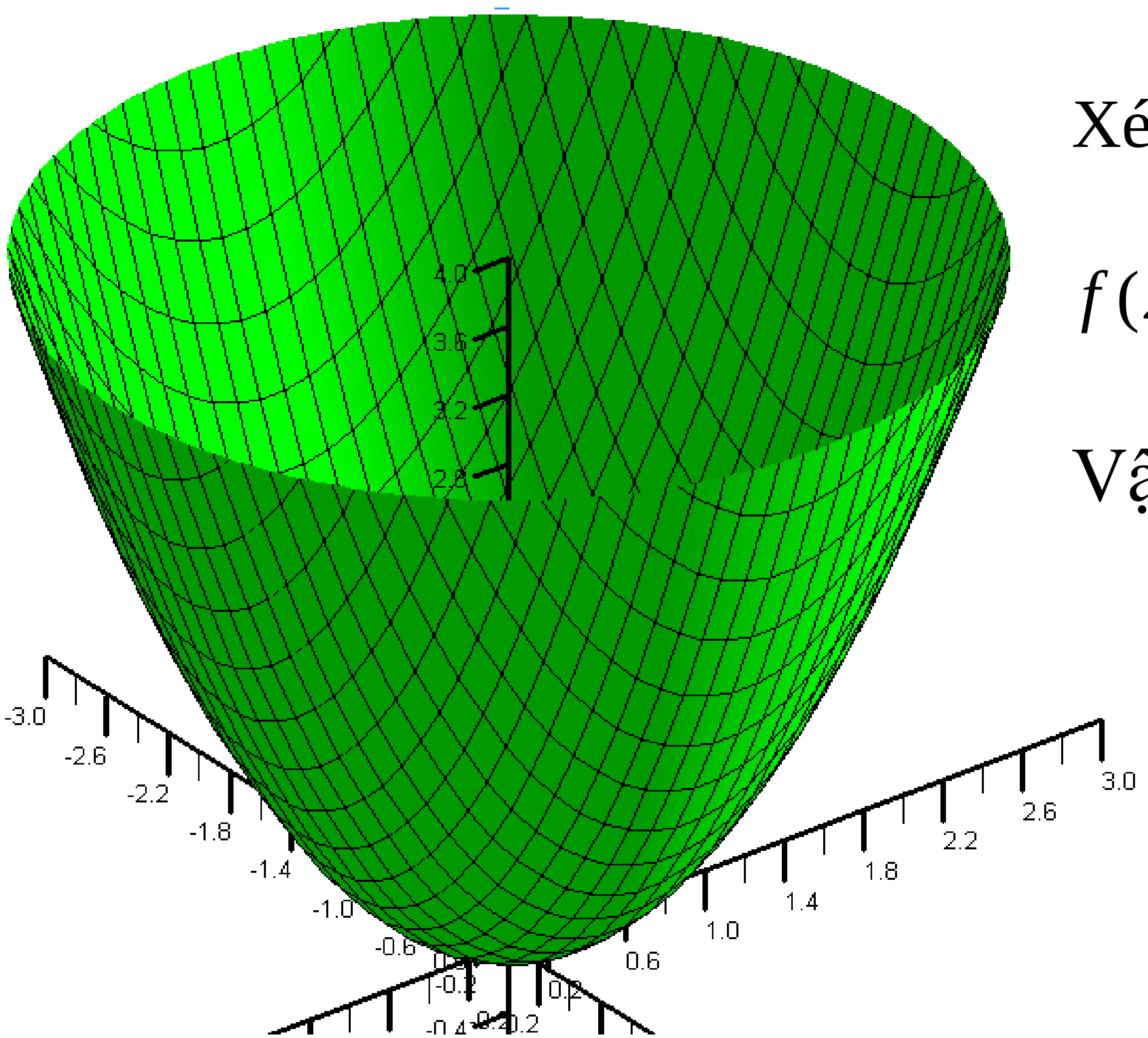
Điểm tới hạn: các đạo hàm riêng cấp 1 bằng 0 hoặc không tồn tại.

Điểm cực trị: hàm đạt cực đại địa phương hoặc cực tiểu địa phương.

6. Cực trị hàm nhiều biến

Ví dụ

Hàm $f(x,y) = x^2 + y^2$ đạt cực tiểu tại (0,0).



Xét $f(x,y) - f(0,0) = x^2 + y^2 \geq 0$

$f(x,y) = x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$

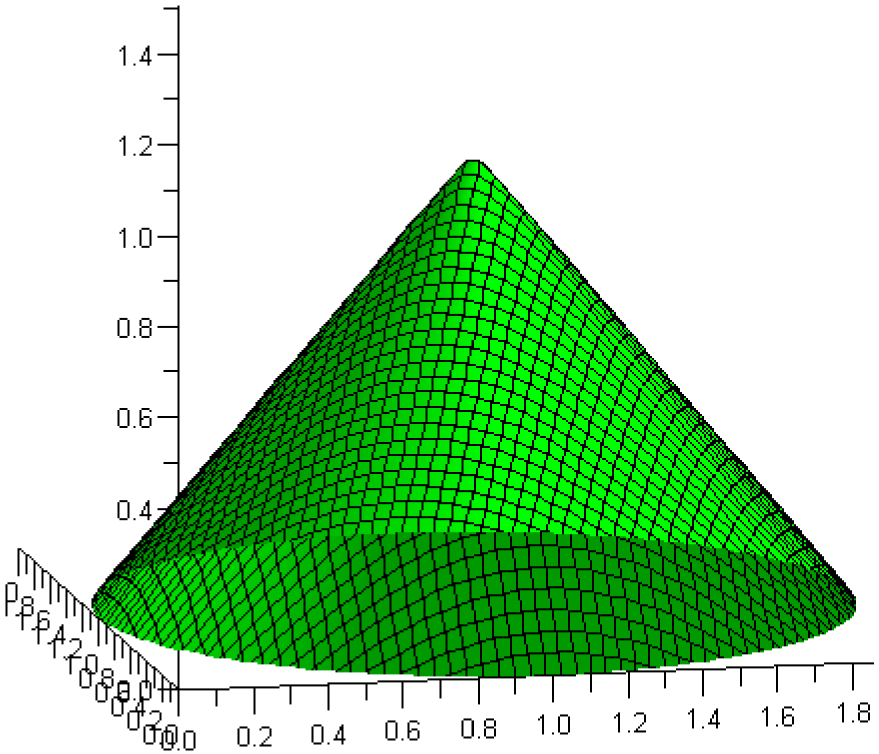
Vậy điểm (0,0) là điểm cực tiểu.

6. Cực trị hàm nhiều biến

Ví dụ

Khảo sát cực trị của $f(x,y) = 1 - \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$ tại (1,1).

$$f(x,y) - f(1,1) = 1 - \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} - 1 = -\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \le 0$$



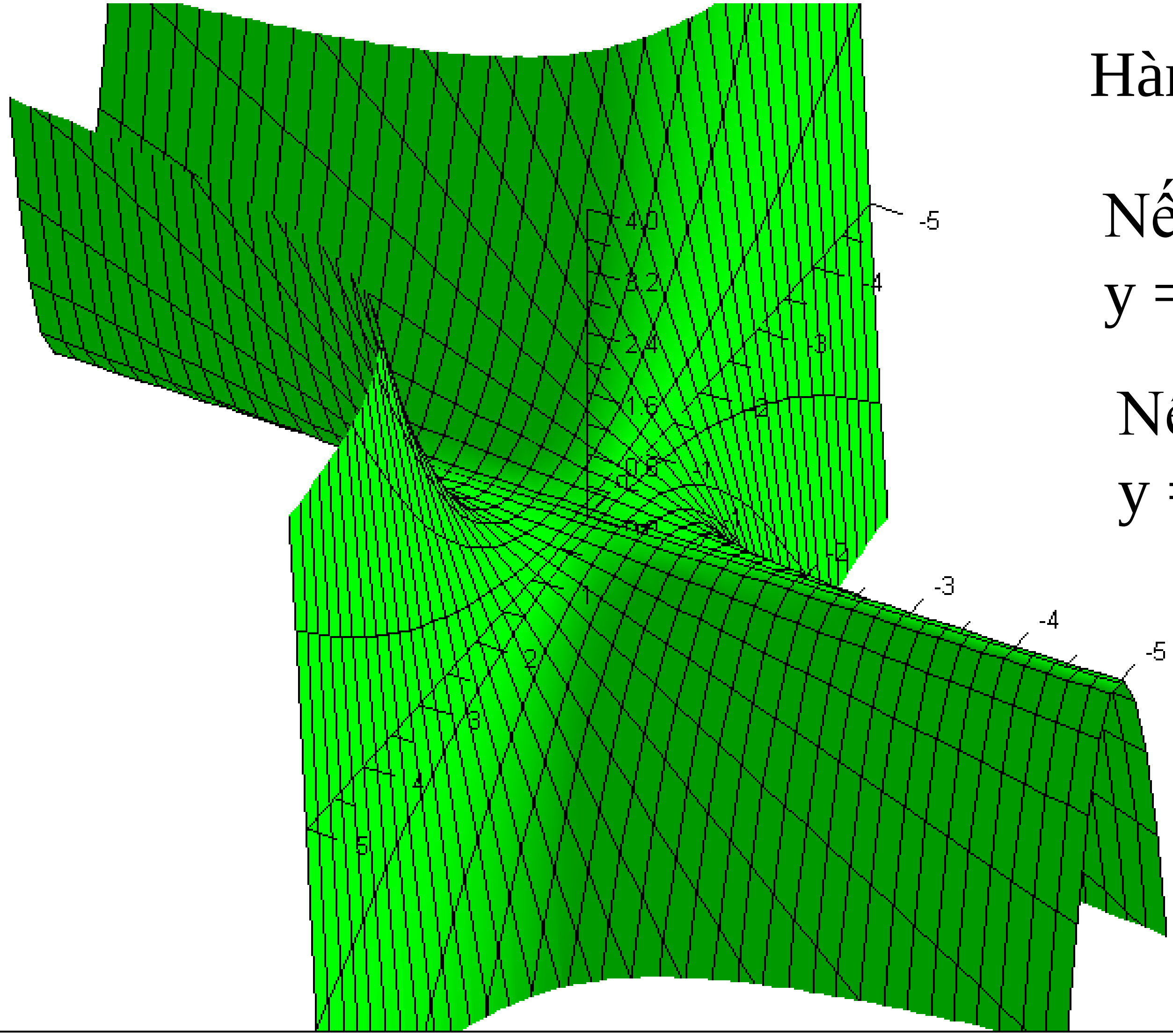
$$\Leftrightarrow f(x,y) \le f(1,1)$$

$$f(x,y) = 1 \Leftrightarrow (x,y) = (1,1)$$

Vậy hàm đạt cực đại tại (1,1).

Ví dụ

Khảo sát cực trị của $f(x,y) = xy^2$ tại điểm (0,0).



Hàm không đạt cực trị tại (0,0).

Nếu dần về (0,0) theo đường thẳng y = x (x > 0) thì f (x,y) > 0.

Nếu dần về (0,0) theo đường thẳng y = x (x < 0) thì f (x,y) < 0.

Trong mọi lân cận của (0,0) đều tìm được điểm (x,y) mà f (x,y) > 0 và điểm (x,y) mà f (x,y) < 0.

Cực trị không điều kiện

Định lý điều kiện cần của cực trị

Hàm f đạt cực trị tại $M_0(x_0, y_0)$ thì tại đó:

1) Không tồn tại đạo hàm riêng cấp 1, hoặc

2) $\exists\ f'_x(x_0, y_0) = 0, \exists\ f'_y(x_0, y_0) = 0$

Cực trị không điều kiện

Định lý điều kiện đủ của cực trị

Cho $M_0(x_0, y_0)$ là điểm dừng của hàm $f = f(x, y)$ và f có các đạo hàm riêng liên tục đến cấp 2 trong lân cận của điểm M_0.

1) $d^2 f(M_0) > 0$: M_0 là điểm cực tiểu.

2) $d^2 f(M_0) < 0$: M_0 là điểm cực đại.

3) $d^2 f(M_0)$ không xác định dấu thì M_0 không phải là điểm cực trị.

6. Cực trị hàm nhiều biến

Cực trị không điều kiện

Sơ đồ khảo sát cực trị của hàm hai biến $f = f(x, y)$:

1) Tìm điểm dừng $\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2), \dots$

2) Tính tất cả các đạo hàm riêng cấp hai $f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy}$.

3) Khảo sát từng điểm dừng.

$$P_1(x_1,y_1):\ \ A = f''_{xx}(P_1), B = f''_{xy}(P_1), C = f''_{yy}(P_1), \Delta = AC - B^2$$

• $\begin{cases} \Delta > 0 \\ A > 0 \end{cases} \Rightarrow P_1$ là điểm cực tiểu

• $\begin{cases} \Delta > 0 \\ A < 0 \end{cases} \Rightarrow P_1$ là điểm cực đại

• $\Delta < 0 \Rightarrow P_1$ không là điểm cực trị

• $\Delta = 0$: không kết luận được

phải khảo sát bằng định nghĩa

Cực trị không điều kiện

Chú ý:

1) Sơ đồ này không cho phép khảo sát cực trị tại điểm mà các đạo hàm riêng không tồn tại (điểm tới hạn, nhưng không phải là điểm dừng). Những điểm này phải khảo sát bằng định nghĩa.

2) Sơ đồ này chỉ áp dụng cho hàm hai biến.

6. Cực trị hàm nhiều biến

Ví dụ

Khảo sát cực trị của hàm: $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$

1) Tìm điểm dừng: $\begin{cases} f'_x = 2x + y - 2 = 0 \\ f'_y = x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow P_1(1,0)$

2) Tìm đạo hàm riêng cấp 2: $f''_{xx} = 2,\ f''_{xy} = 1,\ f''_{yy} = 2$

3) Khảo sát từng điểm dừng: $P_1(1,0): A = f''_{xx}(P_1) = 2; B = f''_{xy}(P_1) = 1$

$$C = f''_{yy}(P_1) = 2; \Delta = AC - B^2 = 3 > 0$$

Kết luận cho điểm dừng P_1: $\begin{cases} \Delta > 0 \\ A > 0 \end{cases} \Rightarrow P_1$ là điểm cực tiểu, $f_{ct} = f(P_1) = -1$

6. Cực trị hàm nhiều biến

Ví dụ

Khảo sát cực trị của hàm: $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

1) Tìm điểm dừng: $\begin{cases} f'_x = 4x^3 - 2x - 2y = 0 \\ f'_y = 4y^3 - 2x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow P_1(1,1), P_2(-1,-1), P_3(0,0)$

2) Tìm đạo hàm riêng cấp 2: $f''_{xx} = 12x^2 - 2,\ f''_{xy} = -2,\ f''_{yy} = 12y^2 - 2$

3) Khảo sát từng điểm dừng: $P_1(1,1): A = f''_{xx}(P_1) = 10; B = -2$

$$C = f''_{yy}(P_1) = 10; \Delta = AC - B^2 = 10^2 - 4 > 0$$

Kết luận cho điểm dừng P_1: $\begin{cases} \Delta > 0 \\ A > 0 \end{cases} \Rightarrow P_1$ là điểm cực tiểu, $f_{ct} = f(P_1) = -2.$

Tương tự P_2 là điểm cực tiểu.

Ví dụ

Tại điểm dừng $P_3(0,0): \Delta = AC - B^2 = 0$ không thể kết luận được.

Khảo sát bằng định nghĩa: $\Delta f = f(x,y) - f(0,0) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

Xét dấu của Δf trong lân cận của (0,0):

Chọn dãy: $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, 0\right) \xrightarrow{n \to +\infty} (0,0)$

Khi đó: $\Delta f(x_n, y_n) = \frac{1}{n^4} - \frac{1}{n^2} = \frac{1-n^2}{n^4} < 0$

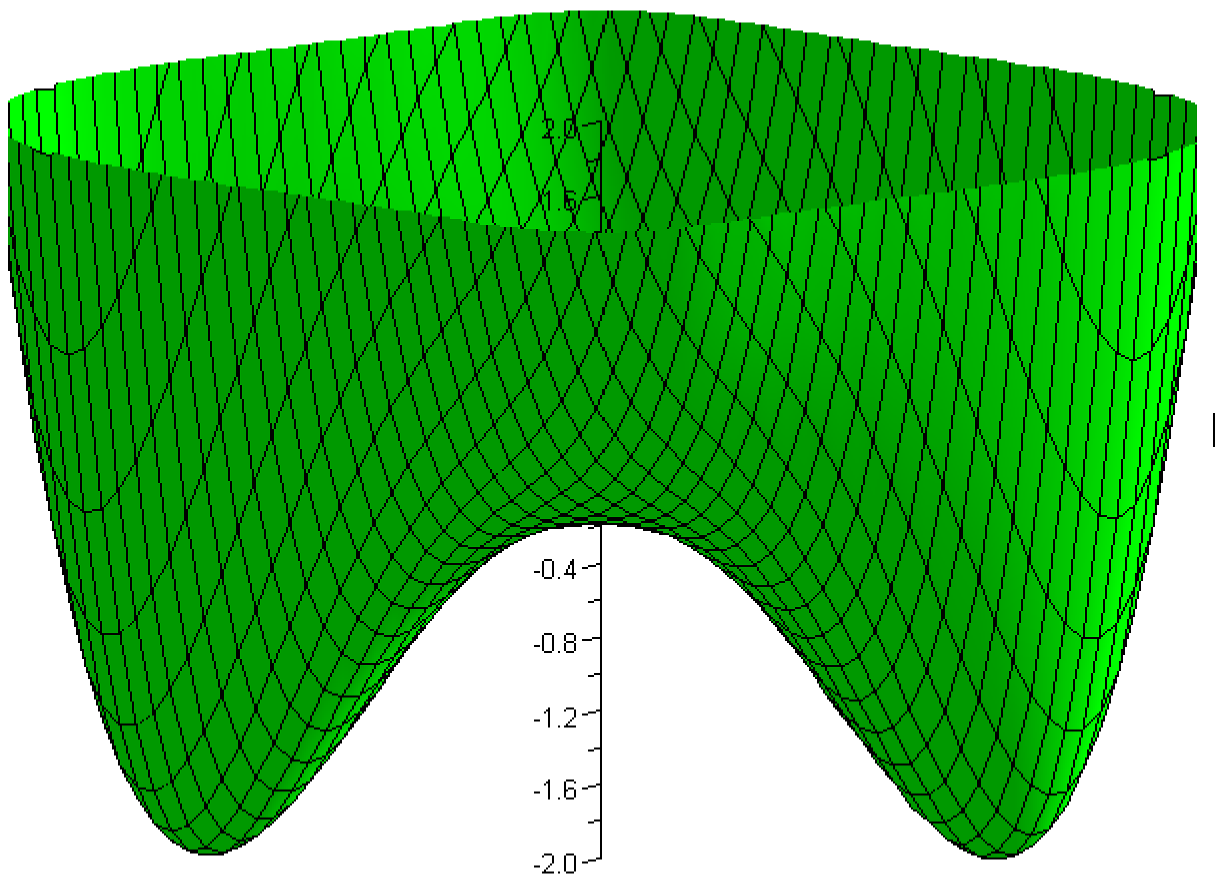
Chọn dãy: $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{-1}{n}\right) \xrightarrow{n \to +\infty} (0,0)$

Khi đó: $\Delta f(x_n, y_n) = \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4} = \frac{2}{n^4} > 0$

Vậy hàm không đạt cực trị tại (0,0).

6. Cực trị hàm nhiều biến

Ví dụ



Ví dụ

Khảo sát cực trị của hàm: $f(x,y) = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$

1) Tìm điểm dừng: $\begin{cases} f'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \\ f'_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \end{cases}$ Không có điểm dừng.

Dùng định nghĩa ta thấy đạo hàm riêng theo x, theo y tại (0,0) không tồn tại.

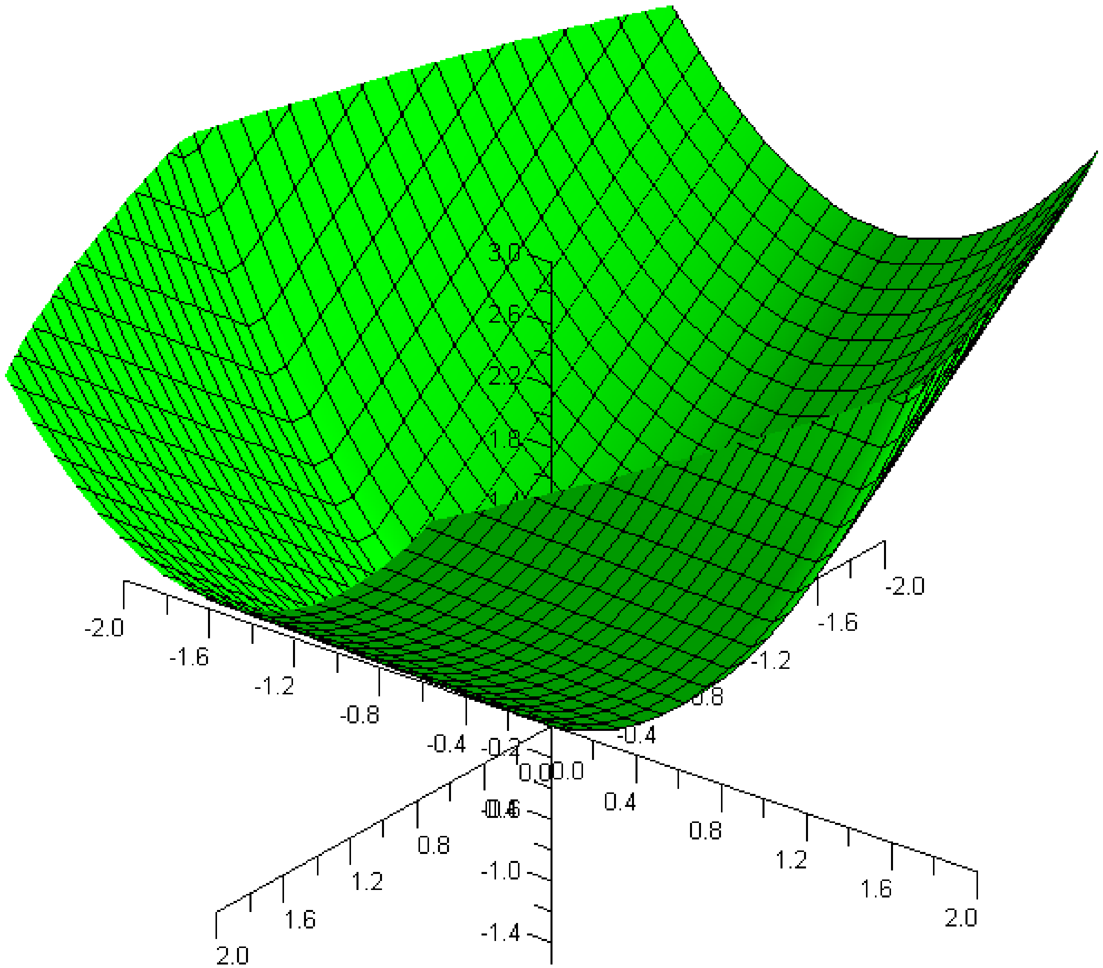
Do đó (0,0) là điểm tới hạn, nhưng không phải là điểm dừng.

$\Delta f(0,0) = f(x,y) - f(0,0) = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0$ $\qquad \Delta f(0,0) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0).$

Suy ra (0,0) là điểm cực tiểu.

Ví dụ

Khảo sát cực trị của $f(x,y) = |x| + y^2$ tại điểm (0,0).



Không tồn tại $f'_x(0,0)$

Điểm (0,0) không là điểm dừng.

Điểm (0,0) là điểm tới hạn.

$$f(x,y) - f(0,0) = |x| + y^2 \geq 0$$

Do đó (0,0) là điểm cực tiểu.