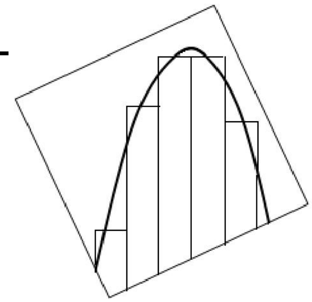
CHƯƠNG 4:

Véc tơ ngẫu nhiên



Nhiều thí nghiệm bao hàm nhiều biến ngẫu nhiên ở mỗi lần thí nghiệm. Trong một số thí nghiệm có nhiều đại lượng khác nhau đã được đo. Ví dụ, hiệu điện thế tại một vài điểm trên lưới điện ở một thời điểm xác định đã được đo. Những thí nghiệm khác bao gồm phép đo lặp lại một đại lượng nào đó. Một ví dụ về thí nghiệm này là phép đo lặp lại ("phép lấy mẫu") sự dao động của hiệu điện thế thay đổi theo thời gian. Trong chương 3 chúng ta đã phát triển các kỹ thuật tính xác suất của các biến cố thuộc về biến ngẫu nhiên riêng lẻ. Trong phần này chúng ta phát triển các kỹ thuật tính xác suất các xác suất của các biến cố liên quan đến dáng điệu đồng thời của hai hay nhiều biến ngẫu nhiên. Chúng ta cũng quan tâm đến việc xác định khi nào tập các biến ngẫu nhiên độc lập, cũng như việc lượng hóa bậc tương quan khi chúng không độc lập.

Trong phần tiếp theo chúng ta trình bày một số khái niệm cơ bản về đa biến ngẫu nhiên. Phần này là sự phác thảo tốt hơn và được dự kiến làm một sự tiên đoán cái gì sẽ xảy ra tiếp theo. Khi đó chúng ta xét trường hợp 2 biến ngẫu nhiên một cách chi tiết bởi vì trong trường hợp này chúng ta có thể minh họa bằng hình vẽ. Cuối cùng chúng ta quay trở lại trường hợp tổng quát của đa biến ngẫu nhiên.

4.1 Các biến vectơ ngẫu nhiên

Khái niệm biến ngẫu nhiên được tổng quát hoá một cách dễ dàng tới trường hợp nhiều biến ngẫu nhiên. **Vectơ ngẫu nhiên** (**vector random variable**) **X** là một hàm số nhận giá trị là một vectơ của các số thực với mỗi kết cục ζ của S, là không gian mẫu của thí nghiệm.

VÍ DỤ 4.1	Giả sử một thí nghiệm ngẫu nhiên là việc chọn tên của một sinh viên từ một cái hộp. Giả sử ζ ký hiệu kết cục của thí nghiệm mà từ đó xác định 3 hàm số sau:

$H(\zeta)$ = chiều cao của sinh viên ζ tính bằng inches

$W(\zeta)$ = cân nặng của sinh viên ζ tính bằng pounds, và

$A(\zeta)$ = tuổi của sinh viên ζ tính theo năm.

Vectơ $(H(\zeta), W(\zeta), A(\zeta))$ là một vectơ ngẫu nhiên.

VÍ DỤ 4.2 Một thí nghiệm ngẫu nhiên là việc tìm một số các khuyết tật trong một con chíp bản dẫn và xác định vị trí của chúng. Kết cục của thí nghiệm này là vectơ $\zeta = (n, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$, ở đây thành phần thứ nhất mô tả tổng số các khuyết tật và các thành phần còn lại mô tả tọa độ vị trí của chúng. Giả thiết $N_1(\zeta), N_2(\zeta), \ldots, N_M(\zeta)$ là số các khuyết tật trong mỗi miền này, nghĩa là $N_k(\zeta)$ là số các điểm $\mathbf{x}$ rơi vào miền thứ k. Vectơ $\mathbf{N}(\zeta) = (N_1, \ldots, N_M)$ là một vectơ ngẫu nhiên.

VÍ DỤ 4.3 Giả sử kết cục ζ của một số thí nghiệm ngẫu nhiên nào đó là hiệu điện thế X(t). Giả sử biến ngẫu nhiên $X_k = X(kT)$ là hiệu điện thế được đo tại thời điểm kT. Vectơ bao gồm n mẫu đầu tiên $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots X_n)$ khi đó là một vectơ ngẫu nhiên.

Các biến cố và xác suất

Mỗi một biến cố nhận được từ vectơ ngẫu nhiên n chiều $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots X_n)$ có một miền tương ứng trong một không gian thực n chiều. Các phương pháp từ lý thuyết tập hợp giới thiệu ở chương 2 có thể được dùng để tìm các miền này.

VÍ DỤ 4.4 Xét vectơ ngẫu nhiên 2 chiều $\mathbf{X} = (X, Y)$. Hãy tìm miền của mặt phẳng tương ứng với các biến cố:

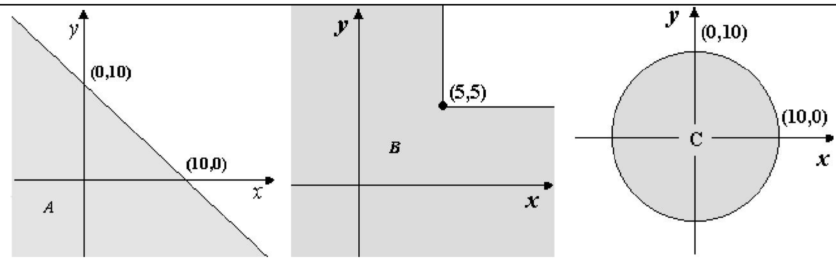
$A = \{X + Y \le 10\}$

$B = \{\min(X, Y) \le 5\}$, và

$C = \{X^2 + Y^2 \le 100\}$.

Các miền tương ứng với các biến cố A và C được tìm một cách trực tiếp và được chỉ ra trong Hình 4.1. Biến cố B tìm được bởi sự chú ý rằng $\{\min(X, Y) \le 5\} = \{X \le 5\} \cup \{Y \le 5\}$, nghĩa là, minimum của X và Y nhỏ hơn hoặc bằng 5 nếu X và/hoặc Y nhỏ hơn hoặc bằng 5.

HÌNH 4.1 Các ví dụ về các biến cố hai chiều.



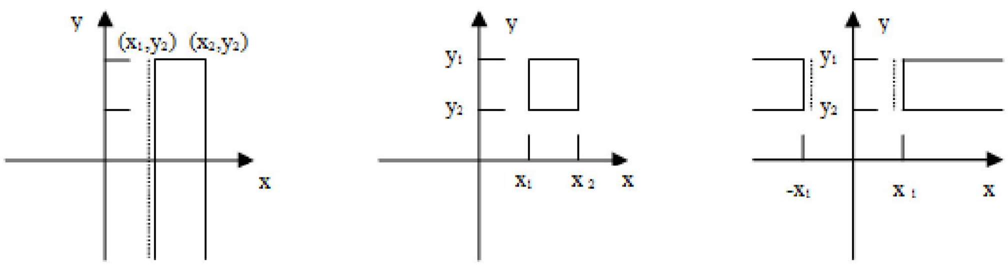
Đối với vectơ ngẫu nhiên *n* chiều **X** = (X_1, …, X_n), chúng ta đặc biệt quan tâm tới các biến cố **dạng tích**:

$$A = \{X_1 \text{ trong } A_1\} \cap \{X_2 \text{ trong } A_2\} \cap \ldots \cap \{X_n \text{ trong } A_n\} \quad (4.1)$$

ở đây A_k chính là biến cố một chiều (tức là tập con của đường thẳng thực) mà chỉ X_k thuộc vào. Biến cố A xảy ra khi tất cả các biến {X_k trong A_k} xảy ra đồng thời. Hình 4.2 chỉ ra một vài biến cố dạng tích 2 chiều.

HÌNH 4.2

Một vài biến cố tích hai chiều



Bài toán cơ bản trong việc mô hình hoá vectơ ngẫu nhiên **X** = (X_1, X_2, …, X_n) chính là việc mô tả xác suất của các biến cố dạng tích:

$$P[A] = P[\{X_1 \in A_1\} \cap \{X_2 \in A_2\} \cap \ldots \cap \{X_n \in A_n\}]$$

$$\triangleq P[X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n]. \qquad (4.2)$$

Về nguyên tắc, xác suất trong Hệ thức (4.2) có thể nhận được bởi việc tìm xác suất của biến cố tương đương trong không gian mẫu cơ sở, nghĩa là:

$$P[A] = P[\{\zeta \in S \text{ sao cho } \mathbf{X}(\zeta) \in A\}].$$

Trong phần sau của chương chúng ta sẽ chứng tỏ rằng Hệ thức (4.2) được mô tả bằng việc đưa ra hàm phân phối đồng thời, hàm mật độ đồng thời hoặc hàm xác suất đồng thời *n* chiều.

Nhiều biến cố mà ta quan tâm không có dạng tích. Tuy nhiên, các biến cố không có dạng tích mà ta quan tâm có thể xấp xỉ với độ chính xác tùy ý bởi các biến cố dạng tích được chỉ ra trong Ví dụ 4.5.

VÍ DỤ 4.5 Không có biến cố nào trong ví dụ 4.4 có dạng biến cố tích. Biến cố B là hợp của hai biến cố dạng tích :

$$B = \{X \le 5 \text{ và } Y < \infty\} \cup \{X > 5 \text{ và } Y \le 5\}.$$

Hình 4.3. chỉ ra các biến cố A và C được xấp xỉ như thế nào bởi các hình chữ nhật có chiều rộng vô hạn. Điều này gợi ý rằng chúng ta sẽ biểu diễn các xác suất như là tích phân của mật độ xác suất trên miền tương ứng với các biến cố.

Xác suất của các biến cố không ở dạng tích được tìm như sau : trước hết B được biểu diễn bởi hợp của các biến cố dạng tích đồng thời $B_1, B_2, \ldots, B_n$; khi đó xác suất của B được xấp xỉ bởi :

$$P[B] \approx P[\prod_k B_k] = \sum_k P[B_k].$$

Sự xấp xỉ tiến đến giá trị đúng khi B_k được làm mịn tuỳ ý. Chúng ta còn quay trở lại ví dụ này trong bài 4.2.

Sự độc lập

Một cách tự nhiên chúng ta hy vọng rằng nếu các biến ngẫu nhiên một chiều X và Y là "độc lập" khi đó các biến cố chỉ chỉ phụ thuộc vào X độc lập với các biến cố chỉ thuộc vào Y. Nói cách khác nếu A_1 là biến cố *bất kỳ* chỉ thuộc vào X và A_2 là một biến cố bất kỳ chỉ thuộc vào Y, khi đó :

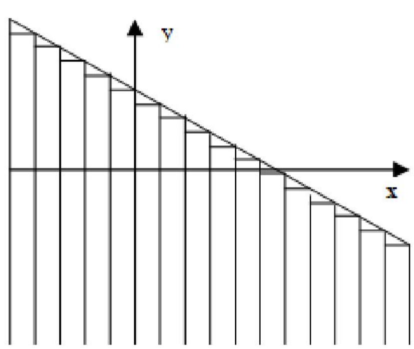
$$P[X \in A_1, Y \in A_2] = P[X \in A_1]P[Y \in A_2].$$

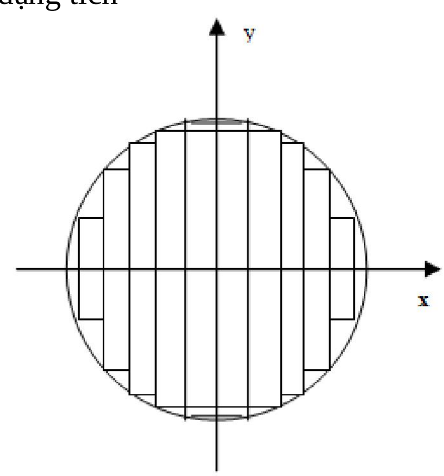
Trong trường hợp tổng quát gồm *n* biến ngẫu nhiên $X_1, \ldots, X_n$, chúng ta nói rằng các biến ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_n$ là **độc lập** nếu:

$$P[X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n] = P[X_1 \in A_1] \ldots P[X_n \in A_n], \tag{4.3}$$

ở đây A_k là biến cố chỉ thuộc vào X_k. Do đó, nếu các biến ngẫu nhiên là độc lập, khi thông tin về xác suất của các biến ngẫu nhiên riêng lẻ là đủ để mô tả xác suất của các biến cố đồng thời. Trong các Phần 4.3 và 4.5 chúng ta sẽ nhận thấy tập các A_k cần thiết để kiểm tra tính độc lâp của các biến ngẫu nhiên.

Hình 4.3 Một số biến cố 2 chiều không có dạng tích





4.2 Cặp biến ngẫu nhiên

Trong chương 3, chúng ta đã nhận thấy rằng xác suất của các biến cố phụ thuộc vào biến ngẫu nhiên riêng lẻ X có thể được biểu diễn qua hàm phân phối $F_X(x)$. Chúng ta cũng nhận thấy rằng các xác suất này cũng có thể được biểu diễn qua tổng của hàm xác suất nếu biến ngẫu nhiên là rời rạc, hoặc qua tích phân của hàm mật độ xác suất nếu biến ngẫu nhiên liên tục. Bây giờ đây chúng ta mở rộng các kết quả này cho trường hợp 2 chiều.

Cặp biến ngẫu nhiên rời rạc

Giả sử vectơ ngẫu nhiên **X** = (X, Y) nhận giá trị từ tập đếm được nào đó $S = \{(x_j, y_k), j = 1, 2, \ldots, k = 1, 2, \ldots\}$. **Hàm xác suất đồng thời** (**joint probability mass function**) của **X** được biểu diễn qua các xác suất của biến cố tích $\{X = x_j\} \cap \{Y = y_k\}$:

$$p_{X,Y}(x_j, y_k) = P[\{X = x_j\} \cap \{Y = y_k\}]$$

$$\triangleq P[X = x_j, Y = y_k] \quad j = 1, 2, \ldots \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (4.4)$$

Như vậy hàm xác suất đồng thời cho xác suất xảy ra cặp (x_j, y_k).

Xác suất của biến cố A bất kỳ là tổng của các xác suất của các kết cục thuộc A:

$$P[\mathbf{X} \text{ trong A}] = \sum_{(x_j, y_k)} \sum_{\text{trong A}} p_{X,Y}(x_j, y_k). \qquad (4.5)$$

Hiển nhiên là xác suất của không gian mẫu S bằng 1 dẫn đến:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} p_{X,Y}(x_j, y_k) = 1 \qquad (4.6)$$

Chúng ta cũng quan tâm đến xác suất của các biến cố liên quan đến các biến ngẫu nhiên riêng lẻ. Các xác suất này có thể tìm qua các **hàm xác suất biên** (**marginal probability mass functions**):

$$p_X(x_j) = P[X = x_j] = P[X = x_j, \text{Y bất kỳ}]$$

$$= P[\{X = x_j \text{ và } Y = y_1\} \cup \{X = x_j \text{ và } Y = y_2\} \cup \ldots]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} p_{X,Y}(x_j, y_k), \qquad (4.7a)$$

và tương tự,

$$p_Y(y_k) = P[Y = y_k]$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} p_{X,Y}(x_j, y_k). \qquad (4.7b)$$

Các hàm xác suất biên là các hàm xác suất một chiều và chúng có đầy đủ thông tin cần thiết để tính xác suất của các biến cố liên quan đến biến ngẫu nhiên riêng lẻ tương ứng.

Xác suất $p_{X,Y}(x_j, y_k)$ có thể tính như là giới hạn của tần suất tương đối của biến cố đồng thời $\{X = x_j\} \cap \{Y = y_k\}$ khi lặp lại dãy các thí nghiệm ngẫu nhiên. Hệ thức (4.7a) tương ứng với thực tế là tần suất tương đối của biến cố $\{X = x_j\}$ được tìm bằng việc cộng tần suất của tất cả các cặp kết cục mà ở đó x_j xuất hiện. Nói chung chung ta không thể suy ra tần suất tương đối của cặp các giá trị X và Y từ tần suất tương đối của X và Y riêng lẻ. Thực tế cũng như vậy đối với hàm xác suất. Thông tin về các hàm xác suất biên không cho phép mô tả hàm xác suất đồng thời.

VÍ DỤ 4.6 Thí nghiệm ngẫu nhiên là phép tung 2 con xúc xắc không cân đối và ghi lại cặp số (X, Y) của số chấm mặt trên. Khi đó hàm xác suất đồng thời $P_{X,Y}(j, k)$ với j = 1, …, 6 và k = 1, …, 6 là:

		k					
		1	2	3	4	5	6
	1	2/42	1/42	1/42	1/42	1/42	1/4
	2	1/42	2/42	1/42	1/42	1/42	1/4
	3	1/42	1/42	2/42	1/42	1/42	1/4
j	4	1/42	1/42	1/42	2/42	1/42	1/4
	5	1/42	1/42	1/42	1/42	2/42	1/4
	6	1/42	1/42	1/42	1/42	1/42	2/4

Hãy tìm hàm xác suất biên.

Trong bài toán này, các xác suất biên có thể được coi như là xác suất để kết cục rơi vào hàng hay cột nào đó. Xác suất để X = 1 tìm được bởi việc lấy tổng trên hàng thứ nhất.

$$P[X = 1] = \frac{2}{42} + \frac{1}{42} + \ldots + \frac{1}{42} = \frac{1}{6}.$$

Tương tự, chúng ta tìm được $P[X = j] = 1/6$ với j = 1, 2, …, 6. Xác suất để Y = k tìm được bởi việc lấy tổng trên cột thứ k. Khi đó chúng ta tìm được $P[Y = k] = 1/6$ với k = 1, 2, …, 6. Như vậy mỗi một xúc xắc riêng lẻ là cân đối do mỗi mặt có xác suất xuất hiện như nhau. Nếu chúng ta biết chỉ các hàm xác suất biên, chúng ta có thể nghĩ rằng con xúc xắc đồng chất.

VÍ DỤ 4.7 Thí nghiệm ngẫu nhiên là phép tung 2 con xúc xắc không cân đối và ghi lại cặp số (X, Y) của số chấm mặt trên. Khi đó hàm xác suất đồng thời $P_{X,Y}(j, k)$ với $j = 1, \ldots, 6$ và $k = 1, \ldots, 6$ là:

				k			
		1	2	3	4	5	6
	1	2/42	1/42	1/42	1/42	1/42	1/4
	2	1/42	2/42	1/42	1/42	1/42	1/4
	3	1/42	1/42	2/42	1/42	1/42	1/4
j	4	1/42	1/42	1/42	2/42	1/42	1/4
	5	1/42	1/42	1/42	1/42	2/42	1/4
	6	1/42	1/42	1/42	1/42	1/42	2/4

Hãy tìm hàm xác suất biên.

Trong bài toán này, các xác suất biên có thể được coi như là xác suất để kết cục rơi vào hàng hay cột nào đó. Xác suất để X = 1 tìm được bởi việc lấy tổng trên hàng thứ nhất.

$$P[X = 1] = \frac{2}{42} + \frac{1}{42} + \ldots + \frac{1}{42} = \frac{1}{6}.$$

Tương tự, chúng ta tìm được $P[X = j] = 1/6$ với $j = 1, 2, \ldots, 6$. Xác suất để Y = k tìm được bởi việc lấy tổng trên cột thứ k. Khi đó chúng ta tìm được $P[Y = k] = 1/6$ với $k = 1, 2, \ldots, 6$. Như vậy mỗi một xúc xắc riêng lẻ là cân đối do mỗi mặt có xác suất xuất hiện như nhau. Nếu chúng ta biết chỉ các hàm xác suất biên, chúng ta có thể nghĩ rằng con xúc xắc đồng chất.

Số byte N trong một tin nhắn có phân phối hình học với tham số $1-p$ với tập các giá trị có thể $S_N = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Giả sử các tin nhắn được cắt thành các gói tin có độ dài tối đa M byte. Giả sử Q số các gói tin đầy đủ M byte trong tin nhắn và R là số byte dư ra. Hãy tìm hàm phân phối đồng thời và các hàm phân phối biên của Q và R.

Nếu tin nhắn có N byte, khi đó số các gói tin đầy đủ trong tin nhắn là thương số Q trong phép chia N cho M, và số các byte còn lại là số dư của phép chia này. Q lấy giá trị trong tập $0, 1, \ldots, M-1$. Xác suất của các biến cố cơ bản $\{(q, r)\}$ được cho bởi :

$$P[Q = q, R = r] = P[N = qM + r] = (1-p)p^{qM+r}.$$

Hàm xác suất biên của Q là:

$$P[Q = q] = P[N \in \{qM, qM + 1, \ldots, qM + (M-1)\}]$$

$$= \sum_{k=0}^{(m-1)} (1-p)\ P^{qM+k}$$

$$= (1-p)\,p^{qM}\frac{1-p^M}{1-p} \qquad q = 0, 1, 2, \ldots$$

$$= (1-p^M)(p^M)^q.$$

Chúng ta nhận thấy rằng hàm xác suất biên của Q là phân phối hình học với tham số p^M. Hàm xác suất biên của R là:

$$P[R = r] = P[N \in \{r, M + r, 2M + r, \ldots\}]$$

$$= \sum_{q=0}^{\infty} (1-p)\,p^{\,qM+r} = \frac{1-p}{1-p^M}.p^{\,r} \qquad r = 0, 1, \ldots, M-1.$$

Chúng ta nhận thấy rằng R có phân phối hình học bị chặt. Như một bài tập, các bạn có thể kiểm tra rằng tổng các hàm xác suất trên bằng 1.

Hàm xác suất đồng thời của X và Y

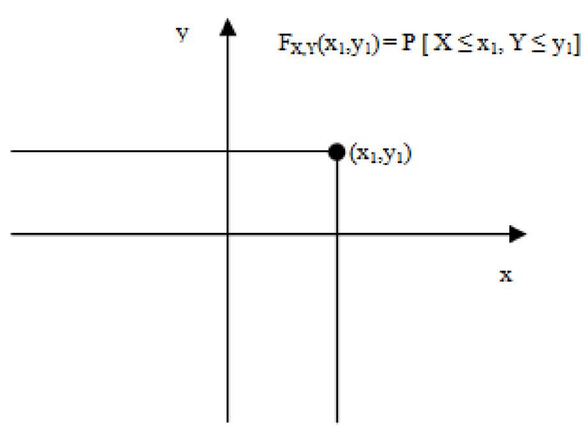
Trong Chương 3 chúng ta đã nhận thấy rằng các khoảng nửa vô hạn dạng $(-\infty, x]$ là cơ sở để xây dựng các biến cố một chiều khác. Bằng việc xác định hàm phân phối $F_X(x)$ như là xác suất của biến cố $(-\infty, x]$, khi đó chúng ta có thể biểu diễn xác suất của các biến cố khác qua hàm phân phối. Trong phần này chúng ta phát triển trên các phương pháp trên sang vectơ ngẫu nhiên hai chiều.

Một biến cố cơ sở liên quan đến vectơ ngẫu nhiên hai chiều là hình chữ nhật nửa vô hạn được xác định bởi $\{(x, y): x \le x_1$ và $y \le y_1\}$ như được chỉ ra trong Hình 4.4. Hàm phân phối đồng thời của X và Y được xác định như là xác suất của biến cố tích $\{X \le x_1\} \cap \{Y \le y_1\}$:

$$F_{X,Y}(x_1, y_1) = P[X \le x_1, Y \le y_1]. \qquad (4.8)$$

Theo ngôn ngữ tần suất tương đối, $F_{X,Y}(x_1, y_1)$ biểu diễn tỷ số giới hạn của số kết cục của thí nghiệm ngẫu nhiên bằng X là một điểm của miền chữ nhật nửa vô hạn như được chỉ ra trong Hình 4.4. Theo ngôn ngữ "khối lượng" xác suất, $F_{X,Y}(x_1, y_1)$ là tổng khối lượng được chứa trong miền chữ nhật.

Hình 4.4 Hàm xác suất đồng thời được xác định như là xác suất của hình chữ nhật nửa vô hạn với đỉnh là (x_1, y_1).



Hàm phân phối đồng thời là hàm không giảm theo hướng "đông bắc" nghĩa là,

(I) $F_{X,Y}(x_1, y_1) \leq F_{X,Y}(x_2, y_2)$ nếu $x_1 \leq x_2$ và $y_1 \leq y_2$,

Do hình chữ nhật nửa vô hạn được xác định bởi (x_1, y_1) được chứa trong hình chữ nhật nửa vô hạn được xác định bởi (x_2, y_2). Cả X và Y không thể nhỏ hơn $-\infty$, do đó :

(II) $F_{X,Y}(-\infty, y_1) = F_{X,Y}(x_1, -\infty) = 0$.

Chắc chắn là X và Y đều nhỏ hơn ∞, nên :

(III) $F_{X,Y}(\infty, \infty) = 1$.

Nếu chúng ta cho một biến tiến đến vô cùng còn biến khác giữ nguyên, chúng ta nhận được hàm phân phối biên :

(IV) $F_X(x) = F_{X,Y}(x, \infty) = P[X \leq x, Y < \infty] = P[X \leq x]$

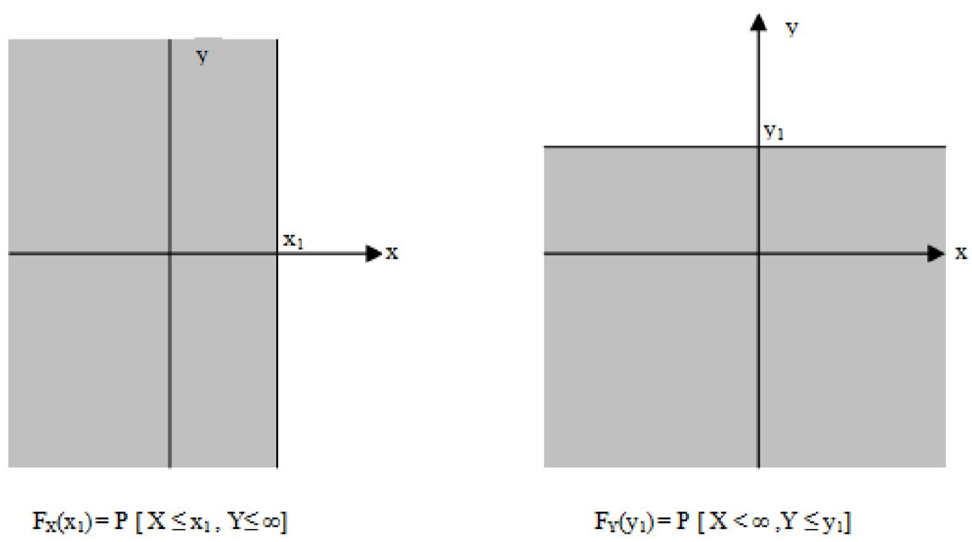
Và

$$F_Y(y) = F_{X,Y}(\infty, y) = P[\leq y].$$

Hàm phân phối biên là xác suất của miền được chỉ ra trong hình 4.5.

HÌNH 4.5

Hàm phân phối biên là xác suất của nửa mặt phẳng .



$F_X(x_1) = P[X \leq x_1, Y < \infty]$ $F_Y(y_1) = P[X < \infty, Y \leq y_1]$

Nhớ lại rằng hàm phân phối của biến ngẫu nhiên liên tục bên phải. Chúng ta cũng có thể chứng tỏ rằng hàm phân phối đồng thời liên tục từ phía "bắc" và phía đông và từ phía "đông", nghĩa là :

(V) $\lim\limits_{x \to a^+} F_{X,Y}(x,y) = F_{X,Y}(a, y)$

và $\lim\limits_{x \to y^+} F_{X,Y}(x,y) = F_{X,Y}(x,b)$.

Ví dụ 4.8 Hàm phân phối đồng thời của vectơ ngẫu nhiên **X** = (X, Y) được cho bởi :

$$F_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} (1-e^{-\alpha x})(1-e^{-\beta y}) & (x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ 0 & \text{trong các trường hợp khác} \end{cases}$$

Hãy tìm các hàm phân phối biên.

Các hàm phân phối biên nhận được bằng cách cho một biến tiến tới vô cùng :

$$F_X(x) = \lim_{y \to \infty} F_{X,Y}(x, y) = 1 - e^{-\alpha x} \qquad x \geq 0$$

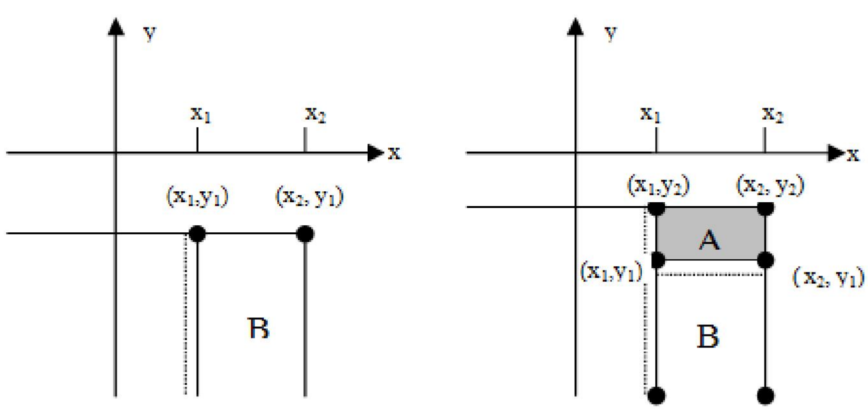
$$F_X(y) = \lim_{x \to \infty} F_{X,Y}(x, y) = 1 - e^{-\beta y} \qquad y \geq 0$$

Như vậy, mỗi biến X và Y đều có phân phối mũ với tham số α và β tương ứng.

Hàm phân phối đồng thời có thể được sử dụng để tính xác suất của các biến cố mà ta có thể biểu diễn qua hợp hoặc giao của các hình chữ nhật nửa vô hạn.Ví dụ : Xét dải được xác định bởi $\{ x_1 < X \leq x_2$ và $Y \leq y_1 \}$ được ký hiệu bởi hình B trong hình 4.6 (a). Hình chữ nhật nửa vô hạn được xác định bởi (x_2, y_1) bằng hợp của hình chữ nhật nửa vô hạn được xác định bởi (x_1,y_1) và miền B. Sử dụng tiên đề xác suất thứ 3 chúng ta có :

$$F_{X,Y}(x_2, y_1) = F_{X,Y}(x_1, y_1) + P[x_1 < X \leq x_2, \ Y \leq y_1].$$

Hình 4.6
Hàm phân phối đồng thời có thể được dùng để tìm xác suất của các biến cố



Do đó xác suất của nửa dải vô hạn là :

$$P[x_1 < X \le x_2, Y \le y_1] = F_{X,Y}(x_2, y_1) - F_{X,Y}(x_1, y_1).$$

Tiếp theo xét hình chữ nhật $\{ x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2 \}$ được ký hiệu bởi miền A trong hình (4.6. b). Hình chữ nhật nửa vô hạn xác định bởi (x_2, y_2) bằng hợp của miền A, B và hình chữ nhật nửa vô hạn được xác định bởi (x_1, y_2). Do đó:

$$F_{X,Y}(x_2, y_2) = P[x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2] +$$

$$+ F_{X,Y}(x_2, y_1) - F_{X,Y}(x_1, y_1) + F_{X,Y}(x_1, y_2).$$

Bởi vậy xác suất của hình chữ nhật là :

(VI) $P[x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2] =$

$$= F_{X,Y}(x_2, y_2) - F_{X,Y}(x_2, y_1) - F_{X,Y}(x_1, y_2) + F_{X,Y}(x_1, y_1).$$

Ví dụ 4.9 Hãy tìm xác suất của các biến cố

$A = \{X \le 1, Y \le 1\}$, $B = \{X > 1, Y > 1\}$, trong đó $x > 0$ và $y > 0$ và $D = (1 < X \le 2, 2 < Y \le 5\}$ trong ví dụ 4.8.

Xác suất của A được cho trực tiếp bởi hàm phân phối:

$P[A] = P[X \le 1, Y \le 1] = F_{X,Y}(1, 1) = (1 - e^{-\alpha})(1 - e^{-\beta})$.

Xác suất của B đòi hỏi phải làm việc nhiều hơn. Xét B^c:

$B^c = (\{X > x\} \cap \{Y > y\})^c = \{X \le x\} \cup \{Y \le y\}$,

Theo quy tắc DeMorgan. Theo hệ quả 5 trong bài 2.2 tính được xác suất của hai biến cố là :

$$P[B^c] = P[X \le x] + P[Y \le y] - P[X \le x ; Y \le y]$$
$$= (1 - e^{-\alpha x}) + (1 - e^{-\beta y}) - (1 - e^{-\alpha x})(1 - e^{-\beta x})$$
$$= 1 - e^{-\alpha x} . e^{-\beta y}$$

Cuối cùng chúng ta nhận được xác suất của B :

$$P[B] = 1 - P[B^c] = e^{-\alpha x} e^{-\beta y}.$$

Chúng ta có thể vẽ miền B trên mặt phẳng và đồng nhất các biến cố liên quan khi tính xác suất B^c.

Xác suất biến cố D có thể tìm được bằng cách áp dụng tính chất (VI) của hàm phân phối đồng thời.

$$P[1 < X \le 2, 2 < Y \le 5]$$
$$= F_{X,Y}(2,5) - F_{X,Y}(2,2) - F_{X,Y}(1,5) + F_{X,Y}(1,2)$$
$$= (1 - e^{-2\alpha})(1 - e^{-5\beta}) - (1 - e^{-2\alpha})(1 - e^{-2\beta})$$
$$- (1 - e^{-\alpha})(1 - e^{-5\beta}) + (1 - e^{-\alpha})(1 - e^{-2\beta}).$$

Hàm mật độ đồng thời của vectơ ngẫu nhiên liên tục đồng thời hai chiều.

Để tính xác suất của các biến cố tương ứng với các miền khác hình chữ nhật, chúng ta chú ý rằng dạng thông thường bất kỳ (tức là dạng hình tròn, hình đa giác, hay nửa mặt phẳng) có thể được xấp xỉ bởi hợp các hình chữ nhật. Do vậy xác suất của những biến cố như thế có thể được xấp xỉ bởi tổng xác suất của các hình chữ nhật, như tính chất VI của hàm phân phối đồng thời. Nếu hàm phân phối đủ trơn, khi chúng ta tăng lên vô hạn các hình chữ nhật, thì tổng xấp xỉ đến tích phân của hàm mật độ xác suất.

Chúng ta nói rằng các biến ngẫu nhiên **X và Y** liên tục đồng thời nếu xác suất của các biến cố liên quan đến (X, Y) có thể được biểu diễn như là tích phân của hàm mật độ xác suất. Nói cách khác có một hàm không âm $F_{X,Y}(x, y)$, được gọi là hàm mật độ xác suất đồng thời xác định trên mặt phẳng thực, sao cho với mọi biến cố A là một tập con của mặt phẳng.

$$P[\mathbf{X} \in A] = \int_A\int f_{X,Y}(x', y')dx'dy', \qquad (4.9)$$

như được chỉ ra trong hình 4.7. Chú ý tương tự như hệ thức (4.5) đối với các biến ngẫu nhiên rời rạc. Khi A toàn bộ mặt phẳng, tích phân là bằng 1:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x', y')dx'dy'. \qquad (4.10)$$

Các hệ thức (4.9) và (4.10) một lần nữa gợi ý rằng "khối lượng" xác suất của một biến cố tìm được bằng cách tích phân hàm mật độ xác suất trên miền tương ứng với biến cố.

Hàm phân phối đồng thời có thể nhận được qua hàm mật độ đồng thời của biến ngẫu nhiên liên tục bằng cách lấy tích phân trên hình chữ nhật nửa vô hạn được xác định bởi (x, y) :

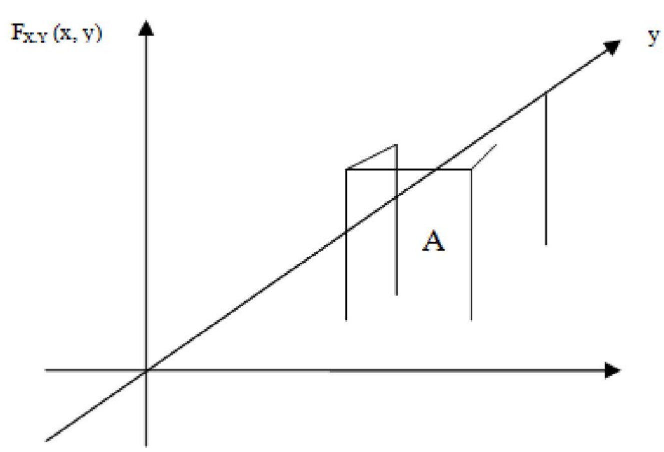
$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(x', y')dx'dy'. \qquad (4.11)$$

Nếu X và Y là hai biến ngẫu nhiên liên tục đồng thời, thì chúng ta có thể nhận được hàm mật độ xác suất bằng cách lấy đạo hàm phân phối.

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x, y)}{\partial x \partial y}. \qquad (4.12)$$

Chú ý rằng nếu X và Y không phải là hàm liên tục đồng thời, có thể ra các đạo hàm riêng ở trên là không tồn tại. Đặc biệt nếu $F_{X,Y}(x,y)$ là gián đoạn hoặc các đạo hàm riêng của nó là gián đoạn, khi đó hàm mật độ đồng thời như được xác định bởi hệ thức (4.12) sẽ không tồn tại.

HÌNH 4.7
Xác suất của A là tích phân của $f_{X,Y}(x,y)$ trên miền được xác định bởi A



Xác suất của miền chữ nhật nhận được bởi việc lấy $A = \{(x,y) : a_1 < x \leq b_1$ và $a_2 < y \leq b2\}$ trong hệ thức (4.9) :

$$P[a_1 < X \leq b_1, \ a_2 < Y \leq b_2] = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f_{X,Y}(x',y')\, dx', dy'. \quad (4.13)$$

Từ dó suy ra rằng xác suất của miền chữ nhật nhỏ tùy ý là xấp xỉ với tích của hàm mật độ xác suất với diện tích của hình chữ nhật đó :

$$P[x < X \leq x + dx, y < Y \leq y + dy] = \int_{x}^{x+dx} \int_{y}^{y+dy} f_{X,Y}(x', y')\, dx'\, dy' \approx f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy. \quad (4.14)$$

Hệ thức (4.14) có thể được được giải thích rằng hàm mật độ xác suất đồng thời mô tả xác suất của biến cố tích :

$\{x < X \leq x + dx\} \cap \{y < Y \leq y + dy\}$.

Hàm mật độ xác suất biên $f_X(x)$ và $f_Y(y)$ nhận được bằng cách lấy đạo hàm phân phối biên tương ứng, $F_X(x) = F_{X,Y}(x, \infty)$ và $F_Y(y) = F_{X,Y}(\infty, y)$.

Như vậy

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x', y')dy' \right\}dx'$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x', y')dy'. \quad (4.15a)$$

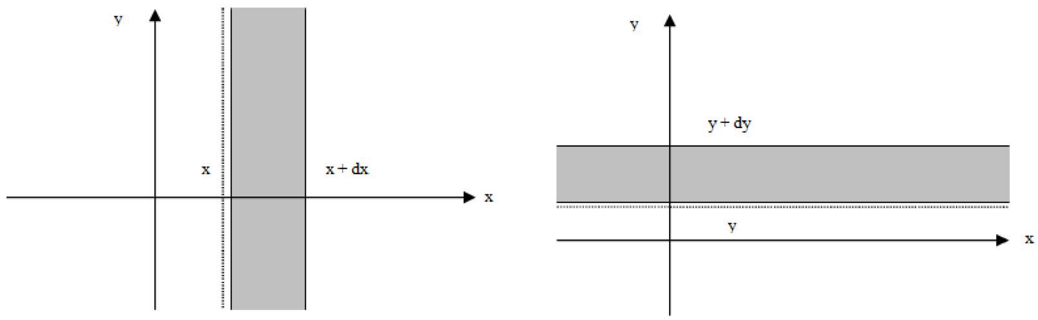
Tương tự ,

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x', y)dx'. \quad (4.15b)$$

Như vậy hàm mật độ xác suất biên nhận được bằng cách lấy tích phân theo biến cố mà ta không quan tâm.

Chú rằng $f_X(x) \approx P[x < X \leq x + dx, \ Y < \infty]$ là xác suất của dải vô hạn được chỉ ra trong hình 4.8(a) Điều này nhắc chúng ta nhớ đến hàm xác suất biên của vectơ ngẫu nhiên rời rạc, như tổng xác suất theo hàng và theo cột. Điều này không làm cho chúng ta ngạc nhiên vì các hệ thức (4.15a) và (4.15b) là hàm mật độ xác suất và hai hệ thức (4.7a) và (4.7b) cũng là hàm mật độ xác suất trong trường hợp lấy tích phân và trong trường hợp lấy tổng. Cũng như trong trường hợp hàm xác suất, chúng ta chú ý rằng, hàm mật độ xác suất đồng thời nói chung không thể nhận được từ các hàm mật độ xác suất biên.

Hình 4.8 Sự giải thích các hàm mật độ xác suất biên



Ví dụ 4.10 Các biến ngẫu nhiên đều đồng thời.

Lấy ngẫu nhiên một điểm (X,Y) trong hình vuông đơn vị có hàm mật độ đều đồng thời được cho bởi:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \quad 0 \le y \le 1 \\ 0 & \neq \end{cases}$$

Hãy tìm hàm phân phối đồng thời.

Hàm phân phối tìm được bằng cách lấy tích phân trong hệ thức (4.11). Chúng ta cần phải thận trọng với cận của tích phân. Các cận xác định miền chứa giao của hình cvhữ nhật nởa vô hạn xác định theo (x,y) với miền ở đó hàm mật độ xác suất khác không. Xảy ra 5 trường hợp có thể tương ứng với 5 miền được chỉ ra trong hình 4.9.

1. Nếu x < 0 hoặc y < 0, thì hàm mật độ xác suất bằng 0 và hệ thức (4.12) suy ra: $F_{X,Y}(x,y) = 0$.

2. Nếu (x,y) nằm trong khoảng đơn vị,

$$F_{X,Y}(x,y)\int_0^x\int_0^y 1dx'\,dy' = xy.$$

3. Nếu 0 ≤ x ≤ 1 và y > 1

$$F_{X,Y}(x,y)\int_0^x\int_0^x 1dx'dy' = x$$

4. Tương tự nếu x > 1 và 0 ≤ y ≤ 1:

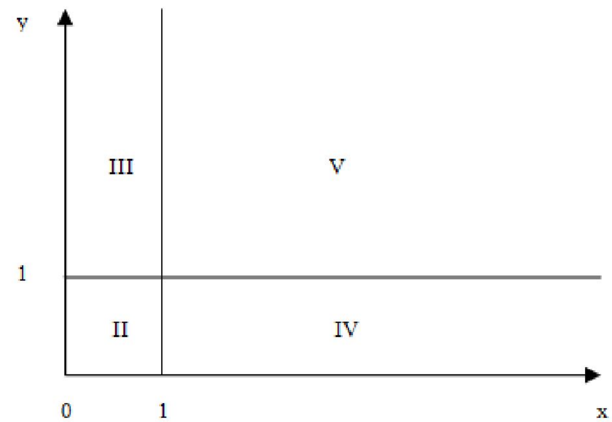
$$F_{X,Y}(x,y) = \int_0^1\int_0^y 1dx'dy' = y\,.$$

Cuối cùng x > 1 và y > 1,

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_0^1\int_0^1 1dx'dy' = 1$$

HÌNH 4.9

Các miền mà ta cần phải xét riêng rẽ khi tính hàm phân phối trong ví dụ 4.10



VÍ DỤ 4.11 Hãy tìm hằng số định chuẩn c và các hàm mật độ xác suất biên của hàm mật độ xác suất đồng thời sau :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} ce^{-x}e^{-y}, & 0 \le y \le x < \infty \\ 0 & \neq \end{cases}$$

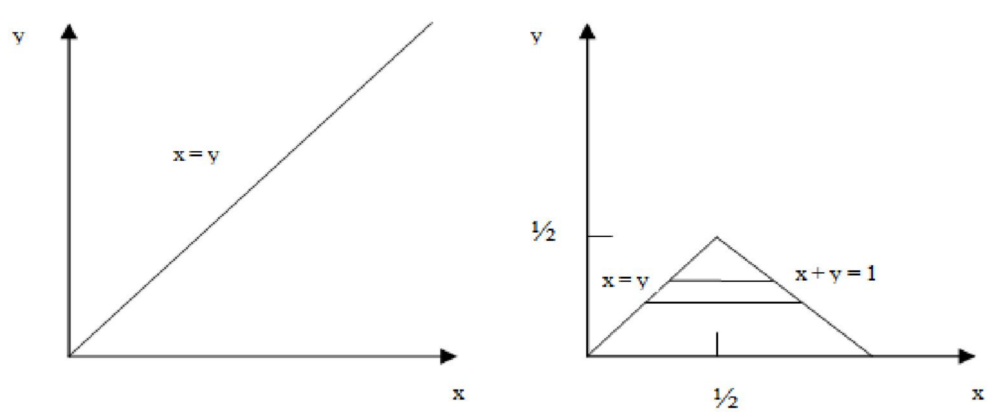
Hàm mật độ xác suất khác 0 trong miền đánh dấu được chỉ ra trong hình 4.10(a). Hằng số c tìm được từ điều kiện định chuẩn theo hệ thức (4.10) :

$$1 = \int_0^\infty\int_0^x ce^{-x}e^{-y}dydx = \int_0^\infty ce^{-x}(1-e^{-x})dx = \frac{c}{2}.$$

Do đó c = 2. Hàm mật độ biên tìm được bằng cách tính theo công thức 4.15(a) và 4.15(b):

$$f_X(x) = \int_0^\infty f_{X,Y}(x,y)dy = \int_0^x 2e^{-x}e^{-y}dy = 2e^{-x}(1-e^{-x}) \qquad 0 \le x < \infty$$

HÌNH 4.10 Các biến ngẫu nhiên X và Y trong các ví dụ 4.11 và 4.12 có hàm mật độ khác 0 chỉ chỉ trong miền đánh dấu được thể hiện ở phần (a).



và

$$f_Y(y) = \int_0^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \int_y^{\infty} 2e^{-x}e^{-y}dx = 2e^{-2y} \qquad 0 \le y < \infty.$$

Chúng ta có thể nhận thấy các toán tích phân một cách rõ ràng rằng tích phân của các hàm mật độ biến bằng 1.

Ví dụ 4.12 Hãy tìm P[X+Y ≤ 1] trong ví dụ 4.11.

Miền tương ứng với giao của biến cố {X + Y ≤ 1 } và miền ở đó hàm mật độ xác suất khác 0 được chỉ ra trong hình 4.10 (b). Chúng ta nhận xác suất của biến cố bằng cách "cộng" (thực ra là lấy tích phân) các hình chữ nhật vô cùng bé với chiều rộng *dy* như được chỉ ra trong hình vẽ :

$$P[X+Y \le 1] = \int_0^{0,5}\int_y^{1-y} 2e^{-x}e^{-y}dxdy = \int_0^{0,5} 2e^{-y}\left[e^{-y} - e^{-(1-y)}\right]dy$$

$$= 1 - 2e^{-1}.$$

VÍ DỤ 4.13 Các biến ngẫu nhiên Gauss đồng thời.

Hàm mật độ đồng thời của X và Y được chỉ ra trong hình 4.11 là:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-(x^2-2\rho xy+y^2)/2(1-\rho^2)} \quad , \; -\infty < x,y < \infty$$

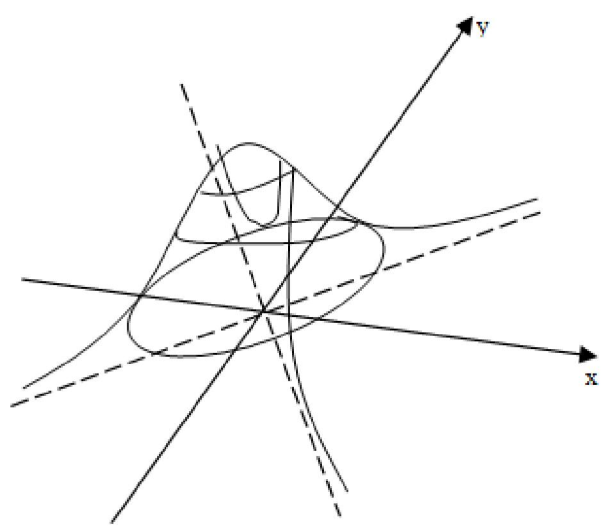
(4.16)

Ta nói rằng X và Y là Gauss đồng thời[(1)]. Hãy tìm các hàm mật độ xác suất biên.

Đây là trường hợp đặc biệt quan trọng cho các biến ngẫu nhiên Gauss. Trường hợp tổng quát được thảo luận ở phần 4.8.

Hình 4.11

Hàm mật độ đồng thời của các biến ngẫu nhiên Gauss đồng thời.



Hàm mật độ xác suất biên của X có thể tìm được bằng cách lấy tích phân $f_{X,Y}(x,y)$ theo y :

$$f_X(x) = \frac{e^{-x^2/2(1-\rho^2)}}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[(y-\rho x)^2-\rho^2x^2\right]/2(1-\rho)^2} dy.$$

Chúng ta có thể đưa biến của lũy thừa về dạng bình phương bằng cách cộng và trừ đi một lượng ρ^2, x^2, nghĩa là:

$$y^2 - 2\rho xy + \rho^2x^2 - \rho^2x^2 = (y - \rho x)^2 - \rho^2x^2.$$

Do vậy :

$$f_X(x) = \frac{e^{-x^2/2(1-\rho)^2}}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[(y-\rho x)^2-\rho^2x^2\right]/2(1-\rho^2)} dy$$

$$= \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(y-\rho x)^2/2(1-\rho)^2}}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} dy$$

$$= \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}},$$

Ở đây chúng ta chú ý rằng tích phân cuối cùng bằng 1 do là tích phân hàm mật độ xác suất Gauss với trung bình ρx và phương sai $(1 - \rho^2)$. Do vậy hàm mật độ biên của X là hàm mật độ phân phối Gauss một chiều với trung bình 0 và phương sai 1. Từ tính đối xứng của $f_{X,Y}(x,y)$ đối với x và y, chúng ta kết luận rằng hàm mật độ biên của Y cũng là hàm mật độ Gauss một chiều với trung bình 0 và phương sai 1.

CÁC BIẾN NGẪU NHIÊN HỖN HỢP

Trong một số bài toán ta phải làm việc với các biến ngẫu nhiên đồng thời hỗn hợp, nghĩa là một biến rời rạc, còn biến kia liên tục. hay nói một cách đơn giản là làm việc với hàm phấn phối đồng thời và thường làm việc với các xác suất $P[X = k, Y \le y_1]$ hoặc $P[X = k, y_1 < Y \le y_2]$. Các xác suất này đủ để tính các hàm phân phối mà ta có thể gặp.

VÍ DỤ 4.14 Một kênh thông tin với tín hiệu vào rời rạc

Giả sử X là tín hiệu vào của một kênh thông tin còn Y là tín hiệu ra. Tín hiệu vào kênh là + 1 vôn và – 1 vôn với xác suất bằng nhau. Tín hiệu của kênh là tín hiệu vào và tín hiệu ra liên tục

cộng với điện áp ồn N có phân phối đều trong khoảng -2 đến 2 vôn. Hãy tìm

P[X = +1, Y ≤ 0].

Bài toán này thích hợp với việc dùng xác suất có điều kiện P[X = k, Y ≤ y] = P[Y ≤ y | X = k] P[X = k] ; do đó

$$P[X = +1, Y \le y] = P[Y \le y \mid X = +1]\, P[X = +1],$$

ở đây P[X = +1] = 1/2. Khi tín hiệu vào X = 1, tín hiệu ra Y phân phối đều trong khoảng [– 1, 3]; do đó :

$$P[Y \le y \mid X = +1] = \frac{y+1}{4} \quad \text{với } -1 \le y \le 3.$$

Bởi vậy :

$$P[X = +1, Y \le 0] = P[Y\le 0 \mid X = +1]\,.\,P[X = +1] = \frac{1}{4}.\frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

4.3 TÍNH ĐỘC LẬP CỦA HAI BIẾN NGẪU NHIÊN

X và Y là hai biến ngẫu nhiên độc lập, nếu biến cố A_1 bất kỳ được xác định theo X là độc lập với biến cố A_2 bất kỳ được xác định theo Y ; nghĩa là :

$$P[X \text{ trong } A_1, Y \text{ trong } A_2] = P[X \text{ trong } A_1]\, P[Y \text{ trong } A_2]. \tag{4.17}$$

Trong phần này chúng ta đưa ra các điều kiện để xác đinh sự độc lập của hai biến ngẫu nhiên X và Y.

Giả sử rằng X và Y là cặp các biến ngẫu nhiên rời rạc, và giả sử chúng ta quan tâm đến xác suất của biến cố $A = A_1 \cap A_2$, ở đây A_1 chỉ phụ thuộc vào X, và A_2 chỉ phụ thuộc vào Y. Nếu X và Y là hai biến ngẫu nhiên độc lập thì khi đó A_1 và A_2 là các biến cố độc lập. Nếu chúng ta đặt $A_1 = \{X = x_j \}$ và $A_2 = \{Y = y_k \}$, khi đó từ sự độc lập của X và Y suy ra rằng:

$$\begin{aligned} P_{X,Y}(x_j,y_k) &= P[X = x_j, Y = y_k] \\ &= P[X = x_j]\, P[Y = x_k] \\ &= P_X(x_j)p_Y(y_k) \qquad \text{với mọi } x_j \text{ và } y_k. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Do vậy, nếu X và Y là các biến ngẫu nhiên rời rạc độc lập thì hàm xác suất đồng thời bằng tích của các hàm xác suất biên.

Bây giờ chúng ta giả thiết rằng X và Y có độc lập với nhau hay không, nhưng chúng ta biết rằng hàm xác suất thoả mãn hệ thức (4.18). Đặt $A = A_1 \cap A_2$ là biến cố tích như chỉ ra ở trên, khi đó :

$$P[A] = \sum_{x_j trong A_1} \sum_{y_k trong A_2} p_{X,Y}(x_j, y_k)$$

$$= \sum_{x_j trong A_1} \sum_{y_k trong A_2} p_X(x_j) p_Y(y_k)$$

$$= \sum_{x_j trong A_1} p_X(x_j) \sum_{y_k trong A_2} p_Y(y_k)$$

$$= P[A_1]\, P[A_2], \qquad (4.19)$$

mà từ đó suy ra rằng A_1 và A_2 là các biến cố độc lập. Bởi vậy nếu hàm xác suất đồng thời của X và Y bằng tích của các hàm xác suất biên, thì X và Y độc lập. Như thế chúng ta đã chứng minh được rằng phát biểu "X và Y độc lập" là tương đương với phát biểu "hàm xác suất đồng thời bằng tích các hàm xác suất thành phần". Theo ngôn ngữ toán học chúng ta phát biểu rằng "các biến ngẫu nhiên rời rạc X và Y độc lập nếu và chỉ nếu hàm xác suất đồng thời bằng tích của các hàm xác suất thành phần với mọi x_j và y_k .

VÍ DỤ 4.15 Hàm xác suất trong ví dụ 4.6 có phải là hàm xác suất của phép tung độc lập 2 con xúc xắc cân đối ?

Xác suất của mỗi mặt khi tung con xúc xắc cân đối bằng 1/6. Nếu 2 con xúc xắc cân đối được tung độc lập khi đó xác suất cặp bất kỳ các mặt mà ta ký hiệu là j và k là:

$$P[X = j, Y = k] = P[X = j]P[Y = k] = \frac{1}{36}.$$

Khi đó tất cả các cặp có thể đều đồng xác suất. Điều này không giống như hàm xác suất đồng thời được cho trong ví dụ 4.6 là không độc lập.

VÍ DỤ 4.16 Các đại lượng Q và R trong Ví dụ 4.7 có độc lập hay không ? Từ Ví dụ 4.7 chúng ta có :

$$P[Q = q]P[R = r] = (1 - p^M)(p^M)^q \frac{(1 - p)}{1 - p^M} p^r$$

$$= (1 - p)p^{Mq + r}$$

$$= P[Q = q, R = r] \qquad \forall\, q = 0, 1, \dots$$

$$r = 0, \dots, M - 1$$

Do đó Q và R độc lập.

Nói chung, có thể chứng minh rằng các biến ngẫu nhiên X và Y độc lập khi và chỉ khi hàm phân phối đồng thời của chúng bằng tích của các hàm phân phối biên của chúng :

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y) \qquad \text{với } \forall \text{ x và y} \tag{4.20}$$

Tương tự, nếu X và Y là các biến ngẫu nhiên liên tục, khi đó X và Y độc lập nếu và chỉ nếu hàm mật độ đồng thời của chúng bằng tích của các hàm mật độ xác suất biên :

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \qquad \text{với } \forall \text{ x, y} \tag{4.21}$$

Hệ thức (4.21) nhận được từ hệ thức (4.20) bằng phép lấy đạo hàm. Ngược lại,hệ thức (4.20) nhận được từ hệ thức (4.21) bằng phép lấy tích phân.

VÍ DỤ 4.17. Các biến ngẫu nhiên X và Y trong ví dụ 4.11 có độc lập không ?

Chú ý rằng $f_X(x)$ và $f_Y(y)$ khác 0 với $\forall x > 0$, và $\forall\ y > 0$. Do đó $f_X(x)$ $f_Y(y)$ khác 0 trongcả góc phần tư thứ nhất. trong khi đó, $f_{X,Y}(x, y)$ khác 0 chỉ trong miền $y < x$ thuộc góc phần tư thứ nhất. Do đó hệ thức (4.21) không còn đúng với $\forall x$, y và các biến ngẫu nhiên là không độc lập. Các bạn có thể nhận xét rằng trong ví dụ này hàm mật độ xác suất đồng thời xuất hiện nhân tử, tuy nhiên nó không phải là tích của các hàm mật độ biên.

VÍ DỤ 4.18. Các biến ngẫu nhiên trong ví dụ 4.13 có phải là độc lập hay không ? Tích của các hàm mật độ xác suất biên của X và Y trong ví dụ 4.13 là :

$$f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{2\pi}e^{-(x^2 + y^2)/2} \qquad -\infty < x, y < +\infty.$$

So sánh với hệ thức (4.16) chúng ta nhận thấy rằng tích các hàm mật độ biên bằng hàm mật độ xác suất đồng thời nếu và chỉ nếu $\rho = 0$. Do đó các biến ngẫu nhiên Gauss đồng thời X và Y độc lập nếu và chỉ nếu $\rho = 0$. Chúng ta sẽ thấy trong phần sau rằng ρ là hệ số tương quan giữa X và Y.

VÍ DỤ 4.19. Các biến ngẫu nhiên X và Y trong ví dụ 4.8 có độc lập với nhau hay không ? Nếu chúng ta nhân các hàm phân phối biên tìm được trong Ví dụ 4.8 chúng ta có :

$$F_X(x)F_Y(y) = (1 - e^{-\alpha x})(1 - e^{-\beta x}) = F_{X,Y}(x, y) \qquad \text{với } \forall x, y.$$

Do vậy hệ thức (4.20) được thỏa mãn do đó X và Y độc lập.

Nếu X và Y là các biến ngẫu nhiên độc lập, khi đó các biến ngẫu nhiên được xác định bởi cặp hàm g(X) và h(Y) bất kỳ cũng độc lập. Để chứng minh điều này, xét các biến cố một chiều A và B. Đặt A' là tập tất cả các giá trị x sao cho nếu $x \in A'$ thì $g(x) \in A$, và đặt B' là tập tất cả các giá trị y sao cho nếu y trong B' khi đó $h(y) \in B$. (Trong chương 3 chúng ta đã gọi A' và B' là các biến cố tương đương với A và B). Khi đó :

$$\begin{aligned} P[g(X) \in A, h(Y) \in B] &= P[X \in A', Y \in B'] \\ &= P[X \in A']\, P[Y \in B'] \end{aligned}$$

$= P[g(X) \in A]\, P[h(Y) \in B].$

Hệ thức thứ nhất và thứ ba suy ra từ việc A và A' ; B và B' là các biến cố tương đương. Hệ thức thứ hai suy ra từ sự độc lập của X và Y. Như vậy g(X) và h(Y) là các biến ngẫu nhiên độc lập.

4.4 XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN VÀ KỲ VỌNG CÓ ĐIỀU KIỆN

Nhiều biến ngẫu nhiên trong thực là không độc lập. Tín hiệu ra Y của kênh thông tin cần phải phụ thuộc với tín hiệu vào X để tải thông tin; các sóng điện tiếp theo biến đổi chậm và rất giống tín hiệu thực và do đó chúng không độc lập với nhau. Trong phần này chúng ta quan tâm tới việc tính xác suất của các biến cố liên quan đến biến ngẫu nhiên Y khi đã biết X = x. Chúng ta cũng quan tâm đến giá trị kỳ vọng của Y khi đã cho X = x. Chúng ta cũng chứng tỏ rằng các khái niệm xác suất có điều kiện và kỳ vọng có điều kiện là các công cụ hữu ích để giải các bài toán, ngay cả khi chúng ta chỉ làm việc với một biến ngẫu nhiên.

Xác suất điều kiện

Định nghĩa xác suất điều kiện trong phần 2.4 cho chúng ta công thức để tính xác suất để Y thuộc A khi đã biết giá trị của x ghĩa là X = x:

$$P[Y \in A \mid X = x] = \frac{P[Y \in A, X = x]}{P[X = x]}. \tag{4.22}$$

Nếu X là rời rạc khi đó hệ thức (4.22) có thể được dùng để nhận được hàm phân phối có điều kiện của Y khi biết $X = x_k$:

$$F_Y(y|x_k) = \frac{P[Y \le y, X = x_k]}{P[X = x_k]}, \text{đối với } P[X = x_k] > 0. \tag{4.23}$$

Hàm Mật độ xác suất có điều của Y khi biết $X = x_k$, nếu đạo hàm tồn tại, được cho bởi :

$$F_Y(y \mid x_k) = \frac{d}{dy} F_Y(y \mid x_k). \tag{4.24}$$

Xác suất của biến cố A khi biết $X = x_k$ nhận được bởi việc lấy tích phân hàm mật độ xác suất có điều kiện:

$$F[Y \in A \mid X = x_k] = \int_{y\in A} f_Y(y \mid x_k)\,dy. \tag{4.25}$$

Chú ý rằng nếu X và Y độc lập, $P[Y \le y, X = x_k] = P[Y \le y]P[X = x_k]$ do vậy $F_Y(y \mid x) = F_Y(y)$ và $f_Y(y \mid x) = f_Y(y)$.

Nếu X và Y rời rạc, khi đó hàm mật độ xác suất có điều kiện sẽ là hàm delta với khối lượng xác suất được cho bởi hàm xác suất có điều kiện khi $X = x_k$:

$$P_Y(y_j \mid x_k) = P[Y = y_j \mid X = x_k] = \frac{P[X = x_k, Y = y_j]}{P[X = x_k]} = \frac{p_{x,y}(x_k, y_j)}{p_X(x_k)}.$$

(4.26)

với mỗi x_k mà $P[X = x_k] > 0$. Chúng ta xác định $p_Y(y_j|x_k) = 0$ với x_k mà $P[X = x_k] = 0$. Hàm xác suất điều kiện thoả mãn tất cả các tính chất của một hàm xác suất. Trong trường hợp riêng, xác suất có điều kiện của biến cố A bất kỳ khi biết $X = x_k$ tìm được bằng phép lấy tổng các hàm xác suất trên biến cố:

$$P[Y \in A \mid X = x_k] = \sum_{y_j \in A} p_Y(y_j \mid x_k). \tag{4.27}$$

Chú ý rằng nếu X và Y độc lập, khi đó:

$$p_Y(y_j, x_k) = \frac{P[X = x_k]P[Y = y_j]}{P[X = x_k]} = P[Y = y_j] = p_Y(y_j).$$

VÍ DỤ 4.20 Giả sử X là tín hiệu vào và Y là tín hiệu ra của hệ truyền thông được xét trong ví dụ 4.14. Hãy tìm xác suất để Y nhận giá trị âm khi biết X = +1.

Nếu X = +1, khi đó Y có phân phối đều trên khoảng [–1, 3] có nghĩa là:

$$f_Y(y|1) = \begin{cases} \frac{1}{4} & -1 \le y \le 3 \\ 0 & .. \ne .... \end{cases}$$

Do vậy

$$P[Y < 0 \mid X = +1] = \int_{-1}^{0} \frac{dy}{4} = \frac{1}{4}.$$

Nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục khi đó $P[X = x] = 0$ bởi vậy hệ thức (4.22) là không có nghĩa. Giả sử rằng X và Y là các biến ngẫu nhiên liên tục đồng thời với hàm mật độ xác suất đồng thời, liên tục và khác 0 trên miền nào đó của mặt phẳng. Chúng ta định nghĩa hàm mật độ xác suất của Y khi X = x đã biết là giới hạn sau:

$$F_Y(y \mid x) = \lim_{h \to 0} F_Y(y \mid x < X \le x + h). \tag{4.28}$$

Hàm xác suất có điều kiện ở vế phải của hệ thức (4.28) là :

$$F_Y(y \mid x < X \le x + h) = \frac{P[Y \le y, x < X \le x + h]}{P[x < X \le x + h]}$$

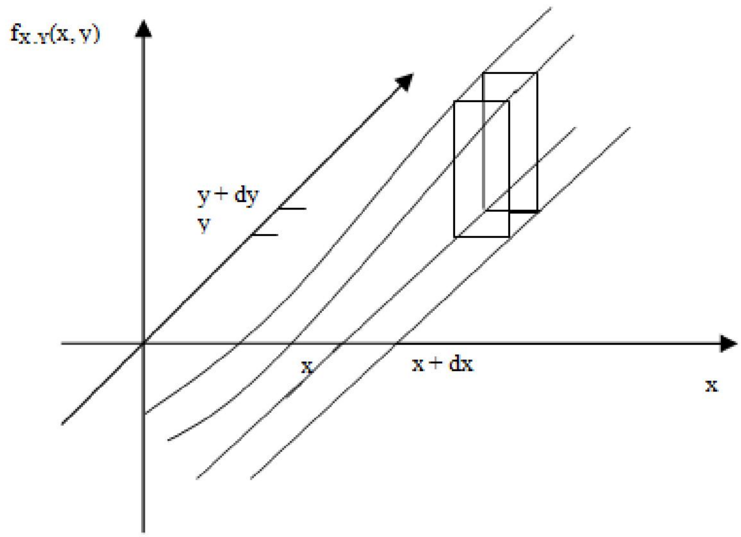
$$= \frac{\int_{-\infty}^{y} \int_{x}^{x+h} f_{X,Y}(x', y')dx'dy'}{\int_{x}^{x+h} f_X(x')dx'}$$

$$\approx \frac{\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(x, y')dy' h}{f_X(x)h}. \tag{4.29}$$

Khi chúng ta cho h tiến dần đến 0, từ hệ thức (4.28) và (4.29) suy ra rằng:

$$F_Y(y \mid x) = \frac{\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(x, y')dy'}{f_X(x)}. \tag{4.30}$$

HÌNH 4.12
Sự giải thích hàm mật độ xác suất có điều kiện



$f_Y(y \mid x)$

Hàm mật độ xác suất có điều kiện của Y khi biết X = x nhận được bởi việc lấy đạo hàm của $F_X(y \mid x)$ theo y :

$$f_Y(y \mid x) = \frac{d}{dy} F_Y(y \mid x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

(4.31)

Chú ý rằng chúng ta có thể giải thích $f_Y(y \mid x)$ như là xác suất để Y thuộc dải vô cùng bé (y,y +dy) khi biết X thuộc dải vô cùng bé (x, x + dx), như được chỉ ra trong hình 4.12. Hệ thức (4.31) có thể được coi như là một dạng của định lý Bayes theo nghĩa đây là xác suất hậu nghiệm để Y bằng y khi biết X = x.

Chú ý rằng nếu X và Y độc lập, khi đó $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ và $f_Y(y \mid x) = f_Y(y)$ và $F_Y(y \mid x) = F_Y(y)$.

VÍ DỤ 4.21 Giả sử X và Y là các biến ngẫu nhiên được giới thiệu trong ví dụ 4.11. Hãy tìm $f_X(x \mid y)$ và $f_Y(y \mid x)$.

Dùng hàm mật độ xác suất biên nhận được trong ví dụ 4.11, chúng ta có :

$$f_X(x \mid y) = \frac{2e^{-x}e^{-y}}{2e^{-2y}} = e^{-(x-y)} \qquad \text{với } \forall\ x \geq y$$

và

$$f_Y(y \mid x) = \frac{2e^{-x}e^{-y}}{2e^{-x}(1-e^{-x})} = \frac{e^{y}}{1-e^{-x}} \qquad \text{với } \forall\ 0 < y < x$$

Hàm mật độ xác suất có điều kiện của X là một hàm mật độ mũ với sự dịch chuyển sang phải một lượng là y. Hàm mật độ xác suất điều kiện của Y là hàm mật độ có phân phối mũ bị cát cụt trong khoảng [0, x].

Nếu chúng ta nhân hệ thức (4.26) với $P[X = x_k]$ chúng ta tìm được rằng xác suất đồng thời có thể nhận được bằng cách nhân xác suất có điều kiện với xác suất biên :

$$P[X = x_k, Y = y_j] = P[Y = y_j \mid X = x_k]\, P[X = x_k] \qquad (4.32)$$

$$p_{X,Y}(x_k, y_j) = p_Y(y_j \mid x_k)\, p_X(x_k)$$

Giả sử chúng ta quan tâm xác suất để Y thuộc A :

$$P[Y \in A] = \sum_{\forall x_k} \sum_{y_j \in A} p_{X,Y}(x_k, y_j)$$

$$= \sum_{\forall x_k} \sum_{y_j \in A} p_Y(y_j \mid x_k) p_X(x_k)$$

$$= \sum_{\forall x_k} p_{\mathrm{X}}(x_k) \sum_{y_j \in A} p_Y(y_j, x_k)$$

$$\mathrm{P}[\mathrm{Y} \in \mathrm{A}] = \sum_{\forall x_k} \mathrm{P}[\mathrm{Y} \in \mathrm{A} \mid \mathrm{X} = x_k]\, p_X(x_k). \tag{4.33}$$

Hệ thức (4.33) là sự khẳng định lại định lý xác suất toàn phần được xét trong chương 2. Diễn tả bằng lời, kết quả trên khẳng định rằng để tinh xác suất P[Y ∈ A] trước hết chúng ta tính P[Y ∈ A | X = x_k] rồi lấy trung bình theo x_k. Có thể chứng minh rằng hệ thức (4.33) đúng cả khi X là rời rạc , Y là liên tục.

Nếu X và Y liên tục, chúng ta nhận hệ thức (4.31) với $f_X(x)$ để nhận được :

$$f_{X,Y}(x, y) = f_Y(y \mid x)\, f_X(x). \tag{4.34}$$

Nếu chúng ta thay việc lấy tổng bằng việc lấy tích phân và thay hàm xác suất bởi hàm mật độ xác suất với cùng các biến ngẫu nhiên ở hệ thức (4.33) trong trường hợp này dẫn tới :

$$\mathrm{P}[\mathrm{Y} \in \mathrm{A}] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{P}[\mathrm{Y} \in \mathrm{A} \mid \mathrm{X} = x]\, f_X(x)dx. \tag{4.35}$$

Bạn có thể nghĩ rằng hệ thức (4.35) là phiên bản “liên tục”của định lý xác suất toàn phần. Hệ thức (4.35) cũng đúng trong trường hợp Y là biến ngẫu nhiên rời rạc. Các ví dụ sau chứng tỏ tính hữu dụng của kết quả trên khi tính xác suất của các biến cố phức tạp.

VÍ DỤ 4.22 Số khuyết tật trong một miền ; phép tách ngẫu nhiên của quá trình đếm Poisson

Tổng số các khuyết tật X trên một chíp là biến ngẫu nhiên có phân phối Poisson với trung bình α. Giả sử mỗi khuyết tật có một xác suất p rơi vào miền xác định R và vị trí của mỗi khuyết tật độc lập với các vị trí của các khuyết tật khác. Hãy tìm hàm xác suất của số khuyết tật Y rơi vào trong miền R.

Từ hệ thức (4.33) chúng ta có:

$$\mathrm{P}[\mathrm{Y} = j] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}[\mathrm{Y} = j \mid \mathrm{X} = k]\, \mathrm{P}[\mathrm{X} = k].$$

Chúng ta có thể tưởng tượng thực hiện một phép thử Bernoulli mỗi khi một khuyết tật xảy ra với một “thành công” xảy ra khi khuyết tật rơi vào miền R. Nếu tổng số các khuyết tật X = k, khi đó số các khuyết tật rơi vào miền R là biến ngẫu nhiên nhị thức với các tham số k và p :

$$P[Y = j \mid X = k] = \begin{cases} 0 & j > k \\ \binom{k}{j} p^j (1-p)^{k-j} & 0 \le j \le k. \end{cases}$$

Do đó với chú ý k ≥ j, chúng ta có

$$P[Y = j] = \sum_{k=j}^{\infty} \frac{k!}{j!(k-j)!} p^j (1-p)^{k-j} \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}$$

$$= \frac{(\alpha p)^j e^{-\alpha}}{j!} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{\{(1-p)\alpha\}^{k-j}}{(k-j)!}$$

$$= \frac{(\alpha p)^j e^{-\alpha}}{j!} e^{(1-p)\alpha} = \frac{(\alpha p)^j}{j!} e^{-\alpha p}.$$

Do đó Y là một biến ngẫu nhiên Poisson với trung bình αp.

VÍ DỤ 4.23 Số các khách hàng đến

Số các khách hàng đến một hệ phục vụ trong khoảng thời gian t là biến ngẫu nhiên Poisson với tham số βt. Thời gian cần thiết để phục vụ mỗi khách hàng là biến ngẫu nhiên mũ với tham số α. Hãy tìm hàm xác suất của số các khách hàng N đến trong khoảng thời gian T của một khách hàng đặc biệt nào đó. Giả sử rằng các lần đến của khách hàng độc lập với thời gian phục vụ khách hàng.

Hệ thức (4.35) vẫn đúng ngay cả khi Y là biến ngẫu nhiên rời rạc, do vậy :

$$P[N = k] = \int_0^{\infty} P[N = k \mid T = t] f_T(t)dt$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{(\beta t)^k}{k!} e^{-\beta t} \alpha e^{-\alpha t} dt$$

$$= \frac{\alpha \beta^k}{k!} \int_0^{\infty} t^k e^{-(\alpha+\beta)t} dt.$$

Đặt r = (α + β)t, khi đó :

$$P[N = k] = \frac{\alpha\beta^k}{k!(\alpha+\beta)^{k+1}} \int_0^{\infty} r^k e^{-r} dr$$

$$= \frac{\alpha\beta^k}{(\alpha+\beta)^{k+1}} = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^k,$$

Ở đây chúng ta đã sử dụng nhận xét tích phân cuối là hàm gamma và bằng k ! . Như vậy N là biến ngẫu nhiên hình học với xác suất “thành công” là β / (α+ β).

VÍ DỤ 4.24 Biến ngẫu nhiên X là số được lấy ngẫu nhiên từ khoảng đơn vị ; biến ngẫu nhiên Y là số được lấy ngẫu nhiên từ khoảng (0, X). Hãy tìm hàm phân phối của Y.

Hệ thức (4.35) cho :

$F_Y(y) = P[Y \le y] = \int_0^1 P[Y \le y \mid X = x]\, f_X(x)dx.$

Khi X = x, Y là phân phối đều trong (0, x) bởi vậy hàm phân phối có điều kiện khi biết X = x là :

$$P[Y \le y \mid X = x] = \begin{cases} \frac{y}{x} & 0 \le y \le x \\ 1 & x < y. \end{cases}$$

Thế vào tích phân trên nhận được :

$$F_Y(y) = \int_0^y 1dx' + \int_y^1 \frac{y}{x'}dx' = y - y\ln y.$$

Hàm mật độ xác suất tương ứng nhận được bằng phép lấy đạo hàm hàm phân phối :

$$F_Y(y) = -\ln y \qquad 0 \le y \le 1.$$

KỲ VỌNG CÓ ĐIỀU KIỆN

Kỳ vọng có điều kiện của Y khi biết X = x được xác định bởi

$$E[Y \mid x] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y \mid x)dy. \qquad (4.36a)$$

Trong trường hợp cả X và Y là các biến ngẫu nhiên rời rạc chúng ta có :

$$E[Y \mid x] = \sum_{y_j} y_j p_Y(y_j \mid x). \qquad (4.36b)$$

Rõ ràng rằng, E[Y | x] là trọng tâm của hàm mật độ xác suất có điều kiện hoặc hàm xác suất có điều kiện.

Kỳ vọng có điều kiện có thể coi như là một hàm số của x : g(x) = E[Y|x]. Từ đó chúng ta có thể đưa ra biến ngẫu nhiên g(x) = E[Y | x] khi đó chúng ta tưởng tượng rằng thí nghiệm ngẫu nhiên đã được thực hiện, và nhận giá trị X = x_0 và cuối cùng nhận được giá trị g(x_0) = E[Y| x_0] được tạo ra. Chúng ta quan tâm đến E[g(X)] = E[E[Y | X]]. Bây giờ chúng ta chứng minh rằng :

$$E[Y] = E[E[Y \mid X]], \qquad (4.37)$$

ở đây vế phải là :

$$E[E[Y \mid X]] = \int_{-\infty}^{\infty} E[Y \mid x] f_X(x)dx \quad \text{X liên tục}$$

và

$$E[E[Y \mid X]] = \sum_{x_k} E[Y \mid x_k] p_X(x_k) \quad \text{X rời rạc.}$$

Chúng ta chứng minh hệ thức (4.37) cho trường hợp X và Y là các biến ngẫu nhiên liên tục, khi đó :

$$\begin{aligned} E[E[Y \mid X]] &= \int_{-\infty}^{\infty} E[Y \mid x] f_X(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y \mid x)dy f_X(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy \end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = E[Y].$$

Kết quả trên vẫn còn đúng cho giá trị kỳ vọng của hàm của Y :

$E[h(Y)] = E[E[h(Y) \mid X]]$.

Trường hợp riêng mô men cấp k của Y được cho bởi :

$E[Y^k] = E[E[Y^k \mid X]]$.

VÍ DỤ 4.25 Số trung bình của các khuyết tật trong một miền

Tìm trung bình của Y trong Ví dụ 4.22 dùng kỳ vọng có điều kiện.

$$E[Y] = \sum_{k=0}^{\infty} E[Y \mid X = k] P[X = k] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} kpP[X = k] = pE[X] = p\alpha$$

Hệ thức thứ hai sử dụng kết quả $E[Y \mid X = k] = kp$, cho Y là biến ngẫu nhiên nhị thức với tham số k và p. Chú ý rằng hệ thức thứ hai dẫn đến hệ thức cuối đúng với hàm xác suất bất kỳ của X. Sự kiện X là biến ngẫu nhiên Poisson với trung bình α không được sử dụng cho đến tận hệ thức cuối cùng.

VÍ DỤ 4.26 Số trung bình các cuộc đến trong một thời gian phục vụ

Hãy tìm giá trị trung bình và phương sai của số N các cuộc đến của các khách hàng trong suốt thời gian phục vụ T của một khách hàng ở Ví dụ 4.23. Chúng ta sẽ cần hai mô men kỳ vọng đầu tiên của N khi cho T = t :

$E[N \mid T = t] = \beta t \qquad E[N^2 \mid T = t] = (\beta t) + (\beta t)^2$,

Ở đây chúng ta sử dụng sự kiện N là biến ngẫu nhiên Poisson với tham số βt khi cho T = t. Hai mô men đầu tiên của N là :

$$E[N] = \int_0^{\infty} E[N \mid T = t] f_T(t) dt = \int_0^{\infty} \beta t f_T(t) = \beta E[T]$$

$$E[N^2] = \int_0^{\infty} E[N^2 \mid T = t] f_T(t) dt = \int_0^{\infty} \{\beta t + \beta^2 t^2\} f_T(t) dt$$

$$= \beta E[T] + \beta^2 E[T^2].$$

Khi đó phương sai của N là:

$$\begin{aligned} VAR[N] &= E[N^2] - (E[N])^2 \\ &= \beta^2 E[T^2] + \beta E[T] - \beta^2 (E[T])^2 \\ &= \beta^2 VAR[T] + \beta E[T]. \end{aligned}$$

Chú ý rằng nếu T là không ngẫu nhiên (nghĩa là E[T] = const và VAR[T] = 0) khi đó giá trị trung bình và phương sai của biến ngẫu nhiên Poisson với tham số $\beta E[T]$. Khi T là ngẫu nhiên, thì giá trị trung bình của N vẫn bằng $\beta E[T]$ nhưng phương sai tăng thêm một lượng $\beta^2 VAR[T]$, nghĩa là độ biến đổi của T làm tăng lên độ biến đổi của N. Trên quan điểm này, chúng ta chủ tâm tránh việc sử dụng yếu tố T có phân phối mũ để nhấn mạnh rằng kết quả trên đúng phân phối thời gian phục vụ bất kỳ $f_T(t)$. Nếu T là phân phối mũ với tham số α, khi đó $E[T] = 1/\alpha$ và $VAR[T] = 1/\alpha^2$, bởi vậy :

$$E[N] = \frac{\beta}{\alpha} \qquad \text{và} \quad \text{VAR[N]} = \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \frac{\beta}{\alpha}.$$

4.5 ĐA BIẾN NGẪU NHIÊN

Giả sử X_1, X_2, …, X_n là các thành phần của vectơ ngẫu nhiên n chiều. Trong phần này chúng ta mở rộng phương pháp mô tả xác suất của cặp biến ngẫu nhiên sang trường hợp n biến ngẫu nhiên.

Phân phối đồng thời

Hàm phân phối đồng thời X_1 , X_2 ,…, X_n được xác định như là xác suất của hình hộp chữ nhật nửa vô hạn n chiều liên kết bởi điểm (x_1, x_2,…, x_n) :

$$F_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P[X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \ldots, X_n \le x_n]. \qquad (4.38)$$

Hàm phân phối đồng thời được xác định cho trường hợp biến ngẫu nhiên rời rạc, liên tục, và hỗn hợp. Xác suất của biến cố dạng tích $\{X_1 \in A_1\} \cap \{X_2 \in A_2\} \cap \ldots \cap \{X_n \in A_n\}$ có thể được biểu diễn qua hàm phân phối đồng thời.

Hệ thức (4.38) sinh ra họ các hàm phân phối biên cho các tập con của các biến ngẫu nhiên X_1,…, X_n. Các hàm phân phối biên này nhận được bằng cách chọn các cận thích hợp bằng + ∞ trong hàm phân phối đồng thời ở hệ thức (4.38). Ví dụ hàm phân phối đồng thời của X_1,…, X_{n-1} được cho bởi $F_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \infty)$, và hàm phân phối đồng thời của X_1 và X_2 được cho bởi $F_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \infty, \ldots, \infty)$.

VÍ DỤ 4.27 Giả sử biến cố A được xác định như sau:

A = {max(X_1, X_2, X_3) ≤ 5}.

Hãy tìm xác suất của A

Maximum của ba số là nhỏ hơn hoặc bằng 5 nếu và chỉ nếu mỗi một số đều nhỏ hơn 5 : do vậy

$$P[A] = P[\{X_1 \le 5\} \cap \{X_2 \le 5\} \cap \{X_3 \le 5\}]$$
$$= F_{x_1,x_2,x_3}(5,5,5).$$

Hàm xác suất đồng thời của n biến ngẫu nhiên rời rạc được xác định bởi :

$$p_{X_1,X_2,\ldots Xn}(x_1, x_2, \ldots x_n) = P[X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n]. \quad (4.39)$$

xác suất của biến cố n chiều A bất kỳ tìm được bằng cách lấy tổng các xác suất của các điểm thuộc vào biến cố.

$$P[(X_1, \ldots, X_n)] = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \qquad (4.40)$$

Hệ thức (4.39) sinh ra họ các hàm xác suất biên mà dựa vào đó để mô tả các xác suất đồng thời của các tập con n biến ngẫu nhiên. Ví dụ hàm xác suất một chiều X_j tìm được bởi việc cộng hàm xác suất đồng thời trên tất cả các biến khác x_j:

$$p_{X_j}(x_j) = P[X_j = x_j] = \sum_{x_1} \ldots \sum_{x_{j-1}} \sum_{x_{j+1+}} \ldots \sum_{x_n} p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

(4.41)

Hàm xác suất đồng thời hai chiều của cặp X_j và X_k bất kỳ tìm được bằng cách cộng tất cả các hàm xác suất đồng thời trên tất cả các biến ngẫu nhiên khác X_j và X_k, và vân vân. Như vậy hàm xác suất biến của $X_1,\ldots, X_{n-1}$ được cho bởi:

$$p_{X_1,\ldots,X_{n-1}}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})=\sum_{x_n} p_{X_1,\ldots X_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n). \qquad (4.42)$$

Họ các hàm xác suất có điều kiện nhận được từ hàm xác suất đồng thời bằng cách đặt điều kiện trên các tập con khác nhau của biến ngẫu nhiên. Ví dụ ,

$$p_{X_n}(x_n\mid x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})=\frac{p_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)}{p_{X_1,\ldots X_{n-1}}(x_1,\ldots,x_{n-1})}, \qquad (4.43a)$$

Nếu $p_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_{n-1})>0.$ Ứng dụng lặp lại hệ thức (4.43a) tạo ra

$$p_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)=p_{X_n}(x_n\mid x_1,\ldots,x_{n-1})$$
$$\times\, p_{X_{n-1}}(x_{n-1}\mid x_1,\ldots,x_{n-2})\ldots p_{X_2}(x_2\mid x_1)\,p_{X_1}(x_1) \qquad (4.43b)$$

VÍ DỤ 4.28 Một hệ máy tính nhận tin nhắn trên 3 kênh thông. Giả sử X_j là số tin nhắn nhận được trên kênh j trong một giờ. Giả sử rằng hàm xác suất đồng thời của X_1, X_2 và X_3 được cho bởi:

$$p_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3)=(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)a_1^{x_1}a_2^{x_2}a_3^{x_3}$$
$$x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0.$$

Hãy tìm $p(x_1,x_2)$ và $p(x_1)$ biết rằng $0 < a_i < 1$.
Hàm xác suất của X_1 và X_2 nhận được như sau:

$$p_{X_1X_2}(x_1,x_2)=(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)\sum_{x_3=0}^{\infty} a_1^{x_1}a_2^{x_2}a_3^{x_3}$$
$$=(1-a_1)(1-a_2)a_1^{x_1}a_2^{x_2}.$$

Hàm xác suất của X_1 khi đó nhận được bằng cách lấy tổng theo x_2:

$$p_{X_1}(x_1)=(1-a_1)(1-a_2)\sum_{x_2=0}^{\infty} a_1^{x_1}a_2^{x_2}$$
$$=(1-a_1)a_1^{x_1}$$

Chúng ta nói rằng các biến ngẫu nhiên $X_1,X_2,\ldots, X_n$ là các biến ngẫu nhiên liên tục đồng thời nếu xác suất của biến cố n chiều A bất kỳ được cho bởi tích phân n chiều của hàm mật độ xác suất:

$$P[(X_1,\ldots,X_n)\in A]=\int\underset{xtrongA}{\ldots}\int f_{X_1,\ldots X_n}(x_1',\ldots,x_n')dx_1'\ldots dx_n', \qquad (4.44)$$

ở đây $f_{x_1,\ldots,x_n}(x_1,\ldots,x_n)$ là mật độ xác suất đồng thời.

Hàm phân đồng thời của X nhận được từ hàm mật độ xác suất đồng thời bằng cách lấy tích phân.

$$F_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\ldots\int_{-\infty}^{x_n} f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1',\ldots,x_n')dx_1'\ldots dx_n'. \qquad (4.45)$$

Hàm mật độ xác suất đồng thời (nếu đạo hàm ∃) được cho bởi :

$$f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\frac{\partial^n}{\partial x_1\ldots\partial x_n}F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n). \quad (4.46)$$

Họ các hàm mật độ xác suất biên liên kết với hàm mật độ xác suất đồng thời ở trong hệ thức (4.46). Hàm mật độ xác suất biên của tập con các biến ngẫu nhiên nhận được bằng cách lấy tích phân theo các biến ngẫu nhiên khác. Ví dụ, hàm mật độ xác suất biên của X_1 là:

$$f_{X_1}(x_1)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1,x_2',\ldots,x_n')dx_2'\ldots dx_n'. \quad (4.47)$$

Ví dụ khác, hàm mật độ xác suất biên của X_1, …X_{n-1} được cho bởi

$$f_{X_1,\ldots,X_{n-1}}(x_1,\ldots x_{n-1})=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,\ldots X_n}(x_1,\ldots,x_{n-1})x_n'. \quad (4.48)$$

Họ các hàm mật độ xác suất có điều kiện cũng liên kết với các hàm mật độ xác suất đồng thời. Ví dụ, hàm mật độ của X_n khi đã biết giá trị của $X_1,\ldots,X_{n-1}$ được cho bởi

$$f_{X_n}(x_n\,|\,x_1,\ldots,x_{n-1})=\frac{f_{X_1,\ldots X_n}(x_1,\ldots,x_n)}{f_{X_1\ldots X_{n-1}}(x_1,\ldots,x_{n-1})} \quad (4.49a)$$

nếu $f_{X_1,\ldots X_{n-1}}(x_1,\ldots,x_{n-1})>0.$

Sử dụng lặp lại hệ thức (4.49a) ta nhận được

$$f_{X_1,\ldots X_n}(x_1,\ldots,x_n)$$
$$=f_{X_n}(x_n\,|\,x_1,\ldots,x_{n-1})f_{X_{n-1}}(x_{n-1}\,|\,x_1,\ldots,x_{n-2})\ldots f_{X_2}(x_2\,|\,x_1)f_{X_1}(x_1). \quad (4.49b)$$

VÍ DỤ 4.29 Các biến ngẫu nhiên X_1, X_2 và X_3 có hàm phân phối Gauss đồng thời:

$$f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3)=\frac{e^{-(x_1^2+x_2^2-\sqrt{2}x_1x_2+\frac{1}{2}x_3^2)}}{2\pi\sqrt{\pi}}.$$

Hãy tìm hàm mật độ biên của X_1 và X_3.

Hàm mật độ xác suất biên của cặp X_1 và X_3 tìm được bằng cách tích phân hàm mật độ xác suất đồng thời theo x_2:

$$f_{X_1,X_3}(x_1,x_3)=\frac{e^{-x_3^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-(x_1^2+x_2^2-\sqrt{2}x_1x_2)}}{2\pi/\sqrt{2}}dx_2.$$

Tích phân trên đã được tính trong ví dụ 4.13 với $\rho = 1/\sqrt{2}$. Bằng việc thế kết quả này vào tích phân trên, chúng ta nhận được:

$$f_{X_1,X_3}(x_1,x_3)=\frac{e^{-x_3^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-x_1^2/2}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Do vậy X_1 và X_3 là các biến ngẫu nhiên Gauss độc lập có trung bình 0 và phương sai 1:

Sự độc lập

Nhắc lại từ phần 4.1 rằng $X_1,\ldots,X_n$ độc lập nếu

$$P[X_1 \in A_1,\ldots,X_n \in A_n] = P[X_1 \in A_1]\ldots P[X_n \in A_n]$$

với các biến cố $A_1, \ldots, A_n$ một chiều bất kỳ. Chúng ta cũng có thể chứng minh rằng $X_1,\ldots,X_n$ là độc lập nếu và chỉ nếu

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) = F_{X_1}(x_1)\ldots F_{X_n}(x_n) \qquad (4.50)$$

với $\forall\ x_1,\ldots,x_n$. Nếu các biến ngẫu nhiên là rời rạc, hệ thức (4.50) là tương đương với

$$p(x_1,\ldots,x_n) = p_{X_1}(x_1)\ldots p_{X_n}(x_n) \quad \text{với } \forall\ x_1,\ldots,x_n$$

Nếu các biến ngẫu nhiên là liên tục đồng thời, hệ thức (4.50) đương đương với

$$f_{X_{1(x}\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) = f_{X_1}(x_1)\ldots f_{X_n}(x_n) \qquad \text{với } \forall\ x_1,\ldots,x_n.$$

VÍ DỤ 4.30 Mẫu cỡ n $X_1, X_2,\ldots,X_n$ có tín hiệu ồn "ồn trắng" có hàm mật độ xác suất đồng thời được cho bởi

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) = \frac{e-(x_1^2+\ldots+x_n^2)/2}{(2\pi)^{n/2}} \quad \text{với } \forall\ x_1,\ldots,x_n.$$

Rõ ràng rằng biểu thức trên bằng tích của n hàm mật độ xác suất Gauss một chiều. Bởi vậy $X_1,\ldots,X_n$ là các biến ngẫu nhiên Gauss độc lập.

4.6 HÀM CỦA CÁC BIẾN NGẪU NHIÊN

Hoàn toàn tự nhiên chúng ta quan tâm đến một hay nhiều hàm của các biến ngẫu nhiên liên quan đến thí nghiệm nào đó. Ví dụ, nếu $X_1, \ldots, X_n$ là một thể hiện phép đo lặp lại của cùng một đại lượng ngẫu nhiên, chúng ta cần phải quan tâm đến giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trong tập hợp, cũng như trung bình mẫu và phương sai mẫu. Trong phần này chúng ta trình bày các phương pháp xác định xác suất của các biến cố liên quan đến các hàm của các biến ngẫu nhiên.

Một hàm của các biến ngẫu nhiên

Giả sử biến ngẫu nhiên Z được xác định như là một hàm của các biến ngẫu nhiên :

$$Z = g(X_1, X_2,\ldots, X_n). \qquad (4.51)$$

Hàm phân phối của Z được xác định trước hết bởi việc tìm biến cố tương đương với biến cố $\{Z \le z\}$, nghĩa là tập hợp $R_z = \{\mathbf{x} = (x_1,\ldots, x_n)$ sao cho $g(\mathbf{x}) \le z\}$, khi đó

$$F_Z(z) = P[\mathbf{X} \in R_z]$$

$$\int \underset{x\in R_z}{\ldots} \int f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1',\ldots,x_n')dx_1'\ldots dx_n'. \qquad (4.52)$$

Khi đó hàm mật độ xác suất của Z tìm được bằng cách lấy đạo hàm $F_Z(z)$.

VÍ DỤ 4.31 Tổng hai biến ngẫu nhiên

Giả sử Z = X + Y. Hãy tìm $F_Z(z)$ và $f_Z(z)$ theo hàm mật độ đồng thời của X và Y.

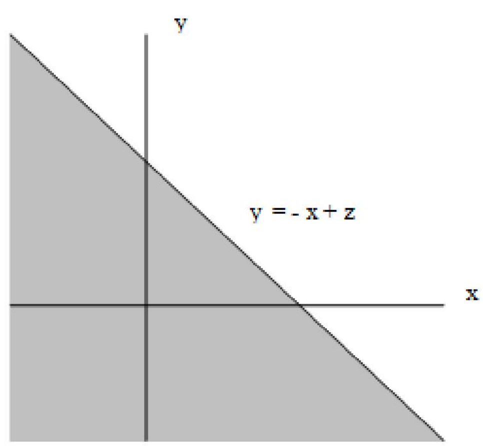
Hàm phân phối của Z tìm được bằng cách lấy tích phân hàm mật độ đồng thời của X và Y trên miền tương ứng với biến cố { Z ≤ z} như được chỉ ra trong hình 4.13:

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x'} f_{X,Y}(x', y')dy', dx'.$$

Hàm mật độ của Z là:

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x', z - x')dx'. \quad (4.53)$$

HÌNH 4.13 p[Z ≤ z] = p[X+Y≤ z].



Như vậy, hàm mật độ của tổng hai biến ngẫu nhiên được cho bởi một tích phân chồng . Nếu X và Y là các biến ngẫu nhiên độc lập, khi đó hệ thức (4.21) của hàm mật độ xác suất được cho bởi tích phân chập của các hàm mật độ xác suất thành phần của X và Y.

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x') f_Y(z - x')dx'. \quad (4.54)$$

Trong phần 5.1 chúng ta sẽ chỉ ra phép biến đổi nào đã được dùng để tính tích phân chập như hệ thức (4.54).

VÍ DỤ 4.32 Tổng các biến ngẫu nhiên Gauss không độc lập

Hãy tìm hàm mật độ xác suất của tổng Z = X + Y của 2 biến ngẫu nhiên Gauss trung bình 0, phương sai 1 với hệ số tương quan ρ = – 1/2 .

Hàm mật độ đồng thời của cặp biến ngẫu nhiên được cho trong ví dụ 4.13. Hàm mật độ của Z nhận được bởi phép thế hàm mật độ xác suất của các biến ngẫu nhiên Gauss đồng thời vào tích phân chồng đã tìm được trong ví dụ 4.31:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x', z - x')dx'$$

$$= \frac{1}{2\pi(1-p^2)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[x'^2 - 2\rho x'(z-x') + (z-x')^2\right]/2(1-\rho^2)} dx'$$

$$= \frac{1}{2\pi(3/4)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x'^2 - x'z + z^2)/2(3/4)} dx'$$

Sau khi bổ sung bình phương của biến ở lũy thừa, chúng ta nhận được:

$$f_Z(z) = \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Như vậy tổng của hai biến ngẫu nhiên Gauss không độc lập cũng là biến ngẫu nhiên Gauss.

VÍ DỤ 4.33 Hệ với độ dôi dự trữ

Hệ có độ dôi dự trữ có một thành phần khóa đơn làm việc và một thành phần giống như vậy dự trữ. Khi thành phần thứ nhất hỏng, thì thành phần thứ hai làm việc thay thế. Hãy tìm hàm mật độ xác suất thời gian sống của hệ dự trữ nếu các thành phần có thời gian sống có phân phối mũ độc lập với cùng một giá trị trung bình.

Giả sử T_1 và T_2 là thời gian sống của 2 thành phần, khi đó thời gian sống của hệ là $T = T_1 + T_2$, và hàm mật độ xác suất của T được cho bởi hệ thức (4.54.) Các hàm dưới dấu tích phân là:

$$f_{T_1} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$f_{T_2} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(z-x)} & z - x \geq 0 \\ 0 & x > z. \end{cases}$$

Chú ý rằng hệ phương trình thứ nhất nhận cận dưới của tích phân bằng 0, và hệ phương trình thứ 2 cận trên của tích phân bằng z. Hệ phương trình (4.54) đã đến:

$$f_T(z) = \int_0^z \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda(z-x)} dx$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda z} \int_0^z dx = \lambda^2 z e^{-\lambda z}.$$

Như vậy T là biến ngẫu nhiên Erlang với tham số m = 2.

Hàm mật độ xác suất có điều kiện có thể được dùng để tìm hàm mật độ của hàm của các biến ngẫu nhiên . Giả sử Z = g(X,Y) và giả sử đã biết Y = y, khi đó Z = g(X,y) là hàm của một biến ngẫu nhiên. Bởi vậy chúng ta có thể dùng các phương pháp được phát triển trong phần 3.5 đối với biến ngẫu nhiên đơn để tìm hàm mật độ xác suất của Z khi biết Y = y :$f_Z(z \mid Y = y)$. Hàm mật độ xác suất của Z khi đó bằng:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Z(z \mid y') f_Y(y') dy'.$$

VÍ DỤ 4.34 Giả sử Z = X/Y. Hãy tìm hàm mật độ xác suất của Z nếu X và Y là những biến ngẫu nhiên và cả hai đến có phân phối mũ với cùng một giá trị trung bình .

Giả sử rằng Y = y, khi đó Z = X/y là một phiên bản tỷ lệ với X. Từ ví dụ 3.23 ta có:

$f_Z(z \mid y) = f_X(yz \mid y)$.

Do đó hàm mật độ xác suất của Z bằng:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |y'| f_X(y'z \mid y') f_Y(y') dy' = \int_{-\infty}^{\infty} |y'| f_{X,Y}(y'z, y') dy'.$$

Bây giờ chúng ta sử dụng giả thiết X và Y là các biến ngẫu nhiên độc lập có phân phối mũ với trung bình bằng 1 :

$$f_Z(z) = \int_0^{\infty} y' f_X(y'z) f_Y(y') dy' \quad z > 0$$

$$= \int_0^{\infty} y' e^{-y'z} e^{-y'} dy$$

$$=\frac{1}{(1+z)^2} \qquad z > 0.$$

Phép biến đổi véctơ ngẫu nhiên

Giả sử $X_1,\ldots, X_n$ là các biến ngẫu nhiên liên quan với một thí nghiệm ngẫu nhiên nào đó, và giả sử các biến ngẫu nhiên $Z_1,\ldots,Z_n$ được xác định bởi n hàm của $\mathbf{X} = (X_1,\ldots, X_n)$:

$$Z_1 = g_1(\mathbf{X}) \qquad Z_2 = g_2(\mathbf{X}) \quad \ldots \quad Z_n = g_n(\mathbf{X}).$$

Bây giờ chúng ta xét bài toán tìm hàm phân phối đồng thời và hàm mật độ đồng thời của $Z_1,\ldots, Z_n$.

Hàm phân phối đồng thời của $Z_1,\ldots,Z_n$ tại điểm $\mathbf{z} = (z_1,\ldots, z_n)$ là bằng xác suất của miền $\mathbf{x}$ mà ở đó$g_k(\mathbf{x}) \le z_k$ với k = 1,…, n:

$$F_{Z_1,\ldots,Z_n}(z_1,\ldots,z_n) = P\left[g_1(\mathbf{X}) \le z_1,\ldots, g_n(\mathbf{X}) \le z_n\right].$$
(4.55a)

Nếu $X_1,\ldots, X_n$ có hàm mật độ đồng thời, khi đó

$$F_{Z_1,\ldots,Z_n}(z_1,\ldots,z_n) = \int\limits_{x':g_k(\mathbf{x}')\le z_k}\!\!\ldots\!\int f_{X_1,\ldots,X_n}(x'_1,\ldots,x'_n)dx'_1\ldots dx'_n. \qquad (4.55b)$$

VÍ DỤ 4.35 Giả sử các biến ngẫu nhiên W và Z được xác định bởi

W = min(X, Y) và Z = max (X, Y).

Hãy tìm hàm phân phối đồng thời của W và Z theo hàm phân phối đồng thời của X và Y.

Hệ thức (4.55a) suy ra rằng

$$F_{W,Z}(w,z) = P[\{\min(X,Y) \le w\} \cap \{\max(X,Y)\le z\}].$$

Miền ứng với biến cố này được chỉ ra trong hình (4.14). Từ hình vẽ, rõ ràng rằng nếu z < w, xác suất trên là xác suất của hình chữ nhật nửa vô hạn được xác suất định bởi điểm (z,z) trừ đi xác suất của hình vuông được ký hiệu là A.

Như vậy nếu z > w

$$\begin{aligned}F_{W,Z}(w,z) &= F_{X,Y}(z,z) - P[A]\\ &= F_{X,Y}(z,z)\\ &\quad - \{F_{X,Y}(z,z) - F_{X,Y}(w,z) - F_{X,Y}(z,w) + F_{X,Y}(w,w)\}\end{aligned}$$

$$= F_{X,Y}(w,z) + F_{X,Y}(z,w) - F_{X,Y}(w,w).$$

Nếu $z < w$ khi đó

$$F_{W,Z}(w,z) = F_{X,Y}(z,z).$$

Hình 4.14

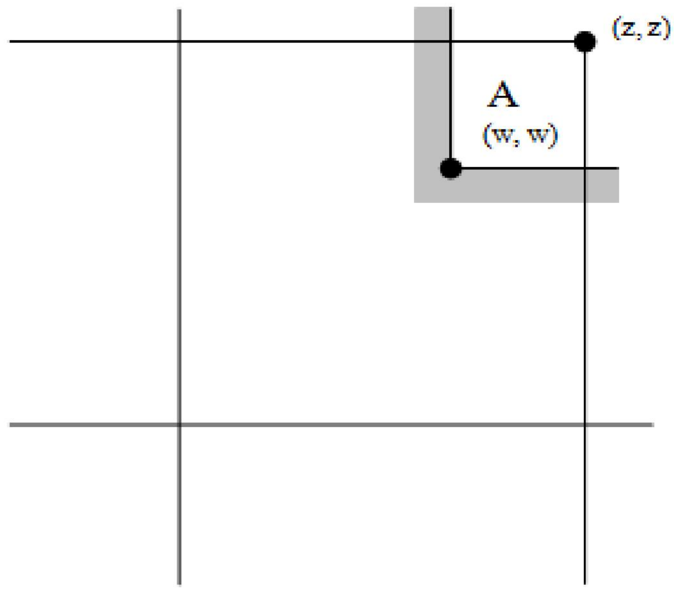
$\{\min(X,Y) \le W\}$

$=\{X \le W\} \cup \{Y \le W\}$

và

$\{\max(X,Y) \le Z\}$

$= \{X \le Z\} \cap \{Y \le Z\}$.



Hàm mật độ xác suất của phép biến đổi tuyến tính

Hàm mật độ xác suất của **Z** có thể tìm được trực tiếp theo hàm mật độ xác suất của **X** bằng cách tìm biến cố tương đương với hình chữ nhật nửa vô hạn. Trước hết chúng ta xét phép biến cố tuyến tính của hai biến ngẫu nhiên :

$$\begin{aligned} V &= aX + bY \\ W &= cX + eY \end{aligned} \qquad \text{hoặc} \qquad \begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}.$$

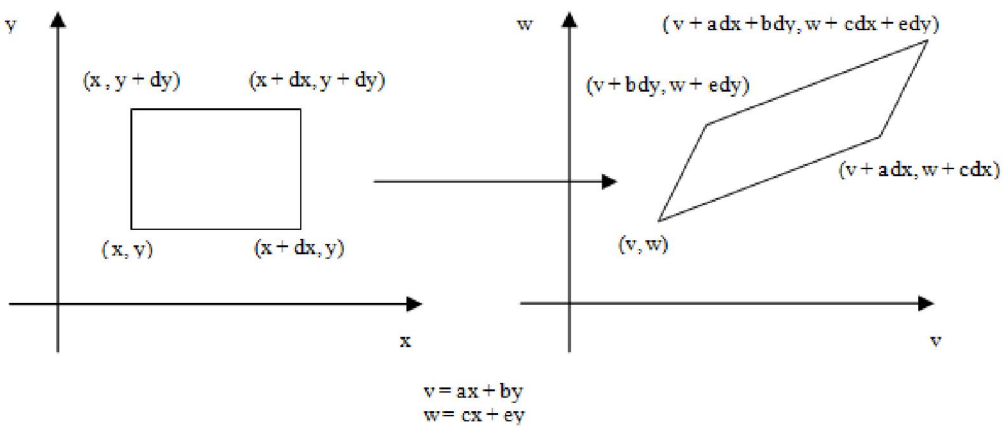
Ký hiệu ma trận trên A. Chúng ta sẽ giả sử rằng A có ma trận nghịch đảo, nghĩa là nó có định thức $|\, ae - bc \,| \neq 0$, khi đó với mỗi điểm (v,w) có một điểm (x,y) tương ứng duy nhất nhận được từ :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}. \qquad (4.56)$$

Xét hình chữ nhật vô cùng bé được chỉ ra trong hình 4.15. Các điểm của hình chữ nhật này ánh xạ sang hình bình hành được thể hiện qua hình vẽ.

Hình 4.15

Ảnh của hình chữ nhật vô cùng bé qua phép biếnđổi tuyến tính



Các hình chữ nhật và hình bình hành nhỏ vô hạn là các biến cố tương đương, bởi vậy xác suất của chúng cần phải bằng nhau. Do đó:

$$F_{X,Y}(x,y)dxdy = f_{V,\,W}(v,w)dp$$

ở đây dp là diện tích của hình bình hành khi đó hàm mật độ xác suất đồng thời được cho bởi :

$$f_{V,W}(v,w) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{\left|\frac{dP}{dxdy}\right|}, \qquad (4.57)$$

ở đây x và y liên hệ với (v,w) bởi hệ thức (4.56). Hệ thức (4.57) chỉ ra rằng hàm mật độ xác suất đồng thời của V và W tại (v,w) là hàm mật độ xác suất của X và Y tại điểm (x,y) tương ứng nhưng được chia cho “nhân tử giãn” là:

$$\left|\frac{dP}{dxdy}\right| = \frac{|ae-bc|(dxdy)}{(dxdy)} = |ae-bc| = |A|,$$

ở đây |A| là định thức của A.

Kết quả trên vẫn còn đúng cho phép biến đổi tuyến tính nói chung của n biến ngẫu nhiên. Giả sử Z là biến ngẫu nhiên n chiều bằng:

$$\mathbf{Z} = A\mathbf{X},$$

Ở đây A là một ma trận vuông khả nghịch cấp $n \times n$ chiều. Hàm mật độ đồng thời của **Z** khi đó băng :

$$f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = f_{Z_1,\ldots,Z_n}(z_1,\ldots,z_n) = \left.\frac{f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)}{|A|}\right|_{\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{z}} = \frac{f_{\mathbf{X}}(A^{-1}\mathbf{z})}{|A|} \tag{4.58}$$

VÍ DỤ 4.36 Phép biến đổi tuyến tính các biến ngẫu nhiên Gauss đồng thời

Giả sử X và Y là các biến ngẫu nhiên Gauss đồng thời được giới thiệu trong ví dụ 4.13**.** Giả sử V và W nhận được từ (X, Y) bởi

$$\begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}.$$

Hãy tìm hàm mật độ đồng thời của V và W.

Định thức của ma trận là |A| = 1 và ánh xạ biến đổi ngược đảo được cho bởi

$$\begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix},$$

Như vậy $X = (V - W)/\sqrt{2}$ và $Y = (V + W)/\sqrt{2}$. Do đó hàm mật độ xác suất của V và W là :

$$f_{V,W}(v,w) = f_{X,Y}\left(\frac{v-w}{\sqrt{2}}, \frac{v+w}{\sqrt{2}}\right),$$

ở đây

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-(x^2 - 2\rho xy + y^2)/2(1-\rho^2)}.$$

Bằng việc thay thế *x* và *y* bởi *v, w* trong biến của lũy thừa đi đến :

$$\frac{(v-w)^2/2 - 2\rho(v-w)(v+w)/2 + (v+w)^2/2}{2(1-\rho^2)}$$

$$= \frac{v^2}{2(1+\rho)} + \frac{w^2}{2(1-\rho)}.$$

Như vậy

$$f_{V,W}(v,w)=\frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}}e^{-\{[v^2/2(1+\rho)]+[w^2/2(1-\rho)]\}}.$$

Từ đây nhận thấy rằng các biến được biến đổi V và W là các biến ngẫu nhiên Gauss độc lập, trung bình 0 với phương sai 1 + ρ và 1 – ρ tương ứng. Hình 4.16 chỉ ra các đường đẳng trị của hàm mật độ xác suất đồng thời của (X,Y). Có thể thấy rằng hàm mật độ xác suất có đường đẳng trị hình elíp với trục chính tạo với 0*x* một góc 45^o. Trong phần 4.8 chúng ta sẽ chỉ ra rằng phép biến đổi tuyến tính trên tương ứng với phép quay hệ tọa độ để trục của mặt phẳng trùng với trục của elíp.

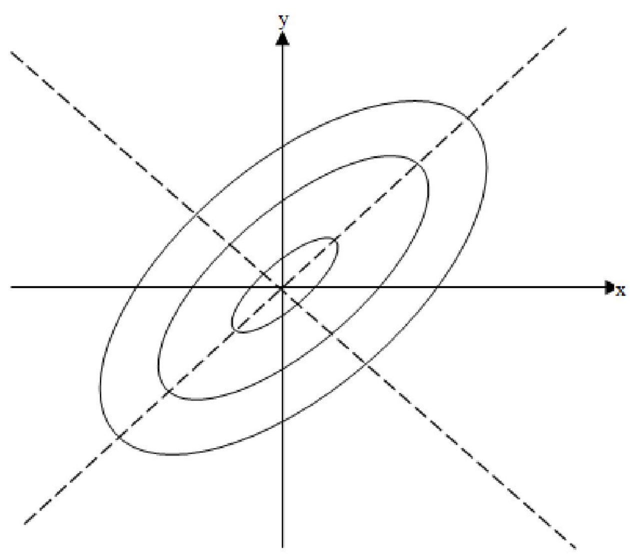
*__Hàm mật độ xác suất của các phép biến đổi tổng quát__

Bây giờ giả sử các biến ngẫu nhiên V và W được xác định bởi hai hàm phi tuyến của X và Y :

$V = g_1(X,Y)$ và $W = g_2(X,Y)$. (4.59)

HÌNH 4.16

Các đường đẳng trị của hàm mật độ xác suất Gauss đồng thời được xét trong ví dụ 4.36



Giả sử rằng các hàm $v(x,y)$ và $w(x,y)$ là khả nghịch theo nghĩa là các phương trình $v=g_1(x,y)$ và $w = g_2(x,y)$ có thể giải ra được theo x và y, có nghĩa là :

$x = h_1(v,w)$ và $y = h_2(v,w)$.

Hàm mật độ xác suất đồng thời của V và W tìm được nhờ việc xác định biến cố tương đương với hình chữ nhật nhỏ vô hạn. Ảnh của hình chữ nhật nhỏ vô hạn được chỉ ra trong hình 4.17(a). Ảnh có thể được xấp xỉ bởi hình bình hành được chỉ ra trong hình 4.17(b) bởi việc lấy xấp xỉ :

$$g_k(x+dx,y)\approx g_k(x,y)+\frac{\partial}{\partial x}g_k(x,y)dx \qquad k=1,2$$

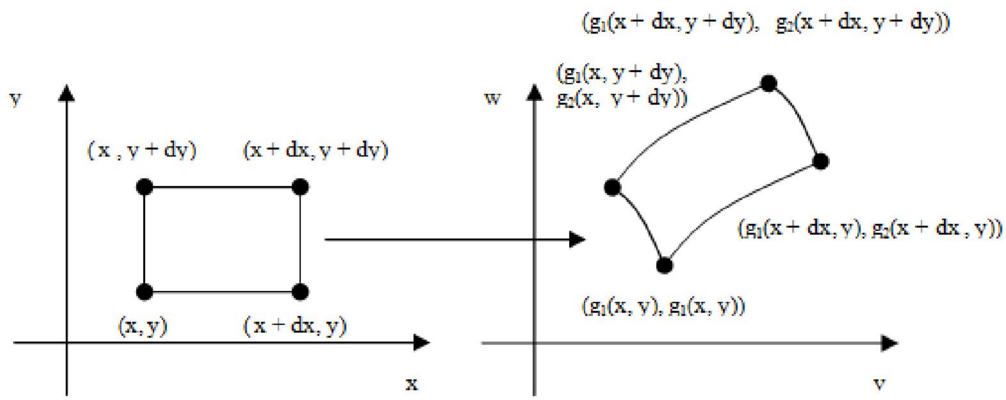
Và tương tự như vậy đối với biến *y*. Xác suất của hình chữ nhật nhỏ vô hạn và của hình bình hành là xấp xỉ bằng nhau, do đó

$$f_{X,Y}(x, y)dxdy = f_{V,W}(v, w)dP$$

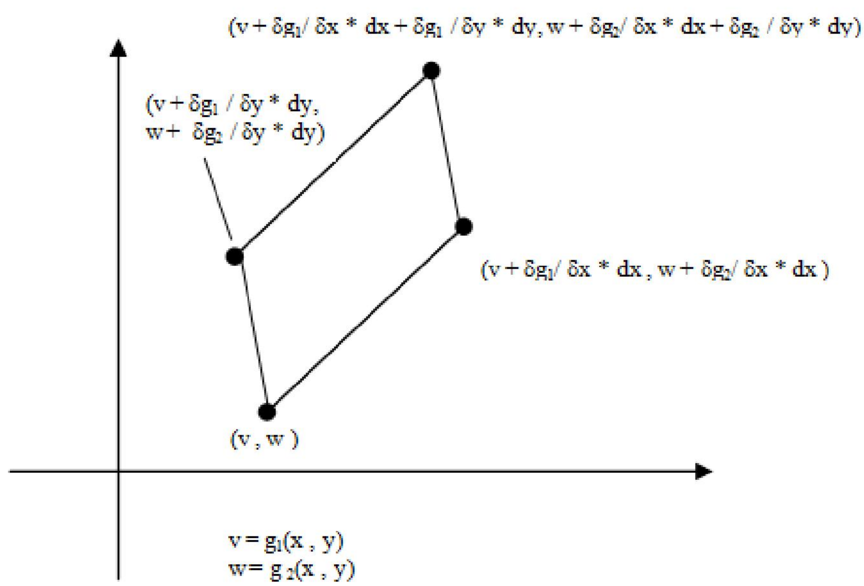
và

$$f_{V,W}(v, w) \frac{f_{X,Y}(h_1(v, w), h_2(v, w))}{\left| \frac{dP}{dxdy} \right|}, \qquad (4.60)$$

Hình 4.17(a) Ảnh của một hình chữ nhật nhỏ vô hạn trên phép biến đổi chung.



Hình 4.17(b)
Xấp xỉ ảnh bởi hình bình hành.



ở đây *dP* là diện tích của hình bình hành. Tương tự với trường hợp biến đổi tuyến tính (xem hệ thức 4.57 ở trên), chúng ta có thể làm ghép các đạo hàm trong công thức xấp xỉ trên với các hệ số biến đổi tuyến tính và kết luận "hệ số giãn" tại (v,w) là được cho bởi định thức của ma trận các đạo hàm riêng:

$$\Im(x,y) = \det\begin{bmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Định thức $\Im(x,y)$ được gọi là **Jacobian** của phép biến đổi. Jacobi của phép biến đổi ngược được cho bởi:

$$\Im(v,w) = \det\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \end{bmatrix}.$$

Có thể chứng tỏ rằng

$$|\Im(v,w)| = \frac{1}{|\Im(x,y)|}.$$

Do đó chúng ta kết luận rằng hàm mật độ xác suất đồng thời của V và W có thể tìm được khi dùng các hệ thức sau:

$$f_{V,W}(v,w) = \frac{f_{X,Y}(h_1(v,w),h_2(v,w))}{|\Im(x,y)|} \qquad (4.61a)$$

$$= f_{X,Y}(h_1(v,w),h_2(v,w))\,|\Im(v,w)|. \qquad (4.61b)$$

Có thể nhận xét rằng hệ thức (4.60) là áp dụng được ngay cả khi hệ thức (4.59) có hơn một nghiệm, khi đó hàm mật độ bằng tổng các từ có dạng được cho bởi hệ thức(4.61a) và (4.61b), với mỗi nghiệm đem đến một từ như vậy.

VÍ DỤ4.37 Bán kính và góc các biến ngẫu nhiên Gauss độc lập

Giả sử X và Y là biến ngẫu nhiên Gauss độc lập có trung bình 0 và phương sai đơn vị. Hãy tìm hàm mật độ xác suất V và W được xác định bởi:

$V = (X^2 + Y^2)^{1/2}$

$W = \angle(X, Y)$,

ở đây $\angle\theta$ ký hiệu góc trong khoảng $(0,2\pi)$ mà được xác định tại điểm (x, y).

Phép biến đổi trên đơn giản là phép biến đổi từ tọa độ Đề các sang hệ tọa độ cực. Phép biến đổi ngược được cho bởi:

$x = v\cos w$ *và* $y = v\sin w$.

Định thức Ja cô bi cho bởi:

$$\Im(v,w) = \begin{vmatrix} \cos w & -v\sin w \\ \sin w & v\cos w \end{vmatrix} = v.$$

Do vậy:

$$f_{V,W}(v,w) = \frac{v}{2\pi} e^{-\left[v^2 \cos^2(w) + v^2 \sin^2(w)\ \right]/2}$$

$$= \frac{1}{2\pi} v e^{-v^2/2} \qquad v \geq 0, 0 \leq w < 2\pi.$$

Hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên Rayleigh được cho bởi

$$f_V(v) = v e^{-v^2/2} \qquad v \geq 0.$$

Do đó chúng ta kết luận rằng bán kính
V và góc W là các biến ngẫu nhiên độc lập, với bán kính V có hàm mật độ xác suất Rayleigh, trong khi đó góc W phân bố đều trong khoảng $(0,2\pi)$.

Phương pháp được phát triển trên có thể được dùng ngay cả khi chúng ta chỉ quan tâm đến một hàm của biến ngẫu nhiên. Bằng việc xác định biến "phụ", chúng ta có thể dùng phương pháp biến đổi để tìm hàm mật độ xác suất đồng thời của cả hai biến ngẫu nhiên và khi đó chúng ta tìm được hàm mật độ xác suất biên của biến ngẫu nhiên mà ta quan tâm. Ví dụ sau đây minh họa cho phương pháp này.

VÍ DỤ 4.38 t – phân phối dạng Student

Giả sử X là một biến ngẫu nhiên Gauss với trung bình 0 và phương sai đơn vị và Y là biến ngẫu nhiên khi bình phương với *n* bậc tự do. Giả sử rằng X và Y là các biến ngẫu nhiên độc lập. Hãy tìm hàm mật độ xác suất của $V = X/\sqrt{Y/n}$.

Chúng ta xác định hàm phụ W = Y. Các biến X và Y khi đó liên hệ với V và W bởi

$$X = V\sqrt{W/n} \qquad \text{và} \qquad Y = W.$$

Jacôbi của phép biến đổi ngược là

$$|\Im(v,w)| = \begin{vmatrix} \sqrt{w/n} & (v/2)/\sqrt{wn} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{w/n}.$$

Do $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$, hàm mật độ đồng thời của V và W khi đó bằng:

$$f_{V,W}(v,w) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{(y/2)^{n/2-1} e^{-y/2}}{2\Gamma(n/2)} |\Im(v,w)| \Bigg|_{\substack{x=v\sqrt{w/n} \\ y=w}}$$

$$\frac{(w/2)^{(n-1)/2} e^{-\left[(w/2)(1+v^2/2)\right]}}{2\sqrt{n\pi}\,\Gamma(n/2)}.$$

Hàm mật độ của V tìm được bằng cách lấy tích phân hàm mật độ đồng thời theo w:

$$f_V(v) = \frac{1}{2\sqrt{n\pi}\,\Gamma(n/2)} \int_0^\infty (w/2)^{(n-1)/2} e^{-\left[(w/2)(1+v^2/2)\right]} dw.$$

Nếu ta đặt $w' = (w/2)(v^2/n + 1)$, tích phân trở thành

$$f_V(v) = \frac{(1+v^2/n)^{-(n+1)/2}}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(n/2)} \int_0^{\infty} (w')^{(n-1)/2} e^{-w'} dw'.$$

Bằng việc chú ý rằng, tích phân trên là hàm gamma (γ) được tính tại (n +1)/2, cuối cùng chúng ta nhận được t – phân phối Student :

$$f_V(v) = \frac{(1+v^2/n)^{-(n+1)/2}\,\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(n/2)}$$

Hàm mật độ này được dùng đặc biệt nhiều trong các bảng thống kê. (Xem Phần 5.4).

Cuối cùng xét bài toán tìm hàm mật độ đồng thời n của n biến ngẫu nhiên $\mathbf{X} = (X_1,\dots, X_n)$:

$Z_1 = g_1(\mathbf{X})$, $Z_2 = g_2(\mathbf{X}),\dots,$ $Z_n = g_n(\mathbf{X})$.

Như giả thiết chúng ta giả thiết rằng hệ phương trình

$$z_1 = g_1(\mathbf{x}), \quad z_2 = g_2(\mathbf{x}),\dots, \ z_n = g_n(\mathbf{x}) \tag{4.62}$$

có nghiệm duy nhất được cho bởi

$x_1 = h_1(\mathbf{z})$, $x_2 = h_2(\mathbf{z}),\dots,$ $x_n = h_n(\mathbf{z})$.

Hàm mật độ đồng thời của **Z** khi đó được cho bởi

$$f_{Z_1,\dots,Z_n}(z_1,\dots,z_n) = \frac{f_{X_1,\dots,X_n}(h_1(\mathbf{z}),h_2(\mathbf{z}),\dots,h_n(\mathbf{z}))}{|\Im(x_1,x_2,\dots,x_n)|} \tag{4.63a}$$

$$= f_{X_1,\dots,X_n}(h_1(\mathbf{z}),h_2(\mathbf{z}),\dots,h_n(\mathbf{z}))\,|\Im(z_1,z_2,\dots,z_n)|,$$

(4.63b)

trong đó $|\Im(x_1,\dots x_n)|$ và $|\Im(z_1,\dots, z_n)|$ là định thức của phép biến đổi và biến đổi ngược tương ứng.

$$\Im(x_1,\dots,x_n) = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

và

$$\Im(z_1,\dots,z_n) = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial z_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial h_n}{\partial z_n} \end{bmatrix}.$$

4. 7 GIÁ TRỊ KỲ VỌNG CỦA CÁC HÀM CỦA CÁC BIẾN NGẪU NHIÊN

Bài toán tìm giá trị kỳ vọng của hàm của hai hoặc hơn nữa các biến ngẫu nhiên là tương tự với bài toán tìm giá trị kỳ vọng của hàm của một biến ngẫu nhiên. Có thể chứng tỏ rằng giá trị kỳ vọng của Z = g(X,Y) có thể tìm được khi sử dụng các biểu thức sau:

$$E[Z] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{X,Y}(x,y)dxdy & X,Y\ lientucdongthoi \\ \sum_i \sum_n g(x_i,y_n) p_{X,Y}(x_i,y_n) & X,Y \quad roirac \end{cases} \quad (4.64)$$

Hệ thức (4.64) tổng quát hoá phương pháp hiển nhiên tính kỳ vọng của hàm của *n* biến ngẫu nhiên.

VÍ DỤ 4.39 Giả sử Z = X + Y. Hãy tìm E[Z].

Tổng của các biến ngẫu nhiên

$$E[Z\ ] = E[X + Y]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x'+y') f_{X,Y}(x',y')dx'dy'$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x' f_{X,Y}(x',y')dy'dx' + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y' f_{X,Y}(x',y')dx'dy'$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x' f_X(x')dx' + \int_{-\infty}^{\infty} y' f_Y(y')dy' = E[X] + E[Y]. \quad (4.65)$$

Như vậy giá trị kỳ vọng của tổng 2 biến ngẫu nhiên bằng tổng các giá trị kỳ vọng riêng lẻ. Chú ý rằng X và Y không cần thiết phải độc lập.

Kết quả trong Ví dụ 4.39 và sử dụng phương pháp quy nạp chứng tỏ rằng giá trị kỳ vọng của tổng các biến ngẫu nhiên bằng tổng các giá trị kỳ vọng:

$$E[X_1 + X_2 + \ldots + X_n\ ] = E[X_1\ ] + E[X_2] + \ldots + E[X_n\ ]. \quad (4.66)$$

Chú ý rằng các biến ngẫu nhiên không yêu cầu phải độc lập.

VÍ DỤ 4.40 Giả sử rằng X và Y là các biến ngẫu nhiên độc lập, và giả sử g(X,Y) = g_1(X)g_2(Y). Hãy tìm E[g(X,Y) = E[g_1(X)g_2(Y)].

Tích của hàm của các biến ngẫu nhiên độc lập

$$E[g_1(X)g_2(Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x')g_2(y') f_X(x') f_Y(y')dx'dy'$$

$$= \left\{\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x') f_X(x')dx'\right\}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} g_2(y') f_Y(y')dx'\right\}$$

$$= E[g_1(X)]E[g_2(Y)].$$

Nói chung nếu $X_1,\ldots, X_n$ là các biến ngẫu nhiên độc lập, khi đó:

$$E[g_1(X_1)g_2(X_2)\ldots g_n(X_n)]=E[g_1(X_1)]E[g_2(X_2)]\ldots E[g_n(X_n)]. \quad (4.67)$$

Hệ số tương quan và COVARIANCE của hai biến ngẫu nhiên

Các mô men đồng thời của hai biến ngẫu nhiên X và Y tóm lược thông tin về dáng điệu đồng thời của chúng. Mô men đồng thời cấp jk của X và Y được xác định bởi:

$$\mathbf{E[X^j\,Y^k\,]} = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^j y^k f_{X,Y}(x,y)dxdy & X,Y \quad lientucdongthoi \\ \sum_i \sum_n x_i^j y_n^k p_{X,Y}(x_i, y_n) & X,Y \quad roirac \end{cases}$$

(4.68)

Nếu j = 0, chúng ta nhận được mô men của Y, và nếu k = 0 chúng ta nhận được mô men của X. Trong kỹ thuật điện, gọi mô men j = 1, k = 1, E[XY] là tương quan của X và Y. Nếu E[XY] = 0 khi đó chúng ta nói rằng X và Y trực giao.

Mô men trung tâm cấp jk của X và Y được định nghĩa như là mô men đồng thời của các biến ngẫu nhiên có tâm X – E[X] và Y – E[Y].

$E[(X - E[X])^j\,(Y - E[Y])^k]$.

Chú ý rằng j = 2, k = 0 cho VAR(X) và j = 0, k = 2 cho VAR(Y) Covariance của X và Y được định nghĩa như là mô men trung tâm với j = k = 1 :

COV(X,Y) = E[(X – E[X])(Y – E[Y])]. (4.69)

Tiếp theo từ COV(X,Y) thuận tiện hơn khi làm việc với :

$$\begin{aligned} COV(X,Y) &= E[XY - XE[Y] - YE[X] + E[X]E[Y]] \\ &= E[XY] - 2E[X]E[Y] + E[X]E[Y] \\ &= E[XY] - E[X]E[Y]. \end{aligned} \qquad (4.70)$$

Chú ý rằng COV(X,Y) = E[XY] nếu có ít nhất một biến ngẫu nhiên có trung bình 0.

VÍ DỤ 4.41 Covariance của các biến ngẫu nhiên độc lập

Giả sử X và Y là các biến ngẫu nhiên độc lập. Hãy tìm Covariance của chúng.

$$\begin{aligned} COV(X,Y) &= E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \\ &= E[X - E[X]]E[Y - E[Y] \\ &= 0, \end{aligned}$$

ở đây hệ thức thứ hai suy ra từ tính độc lập của X và Y, và hệ thức thứ ba nhận được từ E[X – E[X]] = E[Y] – E[Y] = 0. Do vậy cặp biến ngẫu nhiên độc lập có phương sai bằng 0.

Hệ số tương quan của **X** và **Y** được định nghĩa bởi :

$$\rho_{X,Y} = \frac{COV(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{E[XY] - E[X]E[Y]}{\sigma_X \sigma_Y}, \qquad (4.71)$$

ở đây $\sigma_X = \sqrt{VAR(X)}$ và $\sigma_Y = \sqrt{VAR(Y)}$ là độ lệch chuẩn của X và Y tương ứng.

Hệ số tương quan là một số thỏa mãn

$-1 \le \rho_{X,Y} \le 1.$ (4.72)

Để chứng minh hệ thức (4.72), chúng ta bắt đầu với bất đẳng thức nhận được từ tính chất kỳ vọng của biến ngẫu nhiên là không âm.

$$0 \le E\left\{\left(\frac{X - E[X]}{\sigma_X} \pm \frac{Y - E[Y]}{\sigma_Y}\right)^2\right\}$$

$= 1 \pm 2\rho_{X,Y} + 1$

$= 2(1 \pm \rho_{X,Y})$.

Từ đẳng thức cuối cùng suy ra (4.72).

Các giá trị biên của $\rho_{X,Y}$ đạt được khi X và Y là biên hệ tuyến tính,

Y = aX + b; $\rho_{X,Y} = 1$ nếu a > 0 và $\rho_{X,Y} = -1$ nếu a < 0. Trong phần 4.9 chúng ta sẽ chứng tỏ rằng $\rho_{X,Y}$ có thể được coi như là độ đo thống kê mức độ mà Y có thể được dự báo bởi hàm tuyến tính của X.

X và Y được gọi là không tương quan nếu $\rho_{X,Y} = 0$. Nếu X và Y độc lập, khi đó X và Y là không tương quan. Trong Ví dụ 4.18 chúng ta đã nhận thấy rằng nếu X và Y là Gauss đồng thời và không tương quan, khi đó X và Y là các biến ngẫu nhiên độc lập. Ví dụ 4.42 chỉ ra rằng điều này không phải là luôn đúng với các biến ngẫu nhiên không phải là Gauss. Có thể xảy ra X và Y không tương quan nhưng cũng không độc lập.

VÍ DỤ 4.42 Các biến ngẫu nhiên không tương quan và phụ thuộc

Giả sử Θ là biến ngẫu nhiên có phân phối đều trên (0,2π). Giả sử X = cos Θ và Y = sin Θ. Khi đó điểm (X,Y) tương ứng với điểm trên đường tròn đơn vị được mô tả bởi góc Θ, như được chỉ ra trong hình 4.18. Trong Ví dụ 3.28, chúng ta đã nhận thấy rằng các hàm mật độ xác suất biên của X và Y là arcsin của hàm phân phối ≠ 0 trong khoảng (–1, 1). Tích của các hàm mật độ xác suất biên là ≠ 0 trong hình vuông được xác định bởi $-1 \le x \le 1$ và $-1 \le y \le 1$, bởi vậy nếu X và Y độc lập thì điểm (X,Y) có thể nhận tất cả các điểm trong hình vuông này. Điều này là không thể, bởi vậy X và Y phụ thuộc.

Bây giờ chúng ta chứng tỏ rằng X và Y là không tương quan :

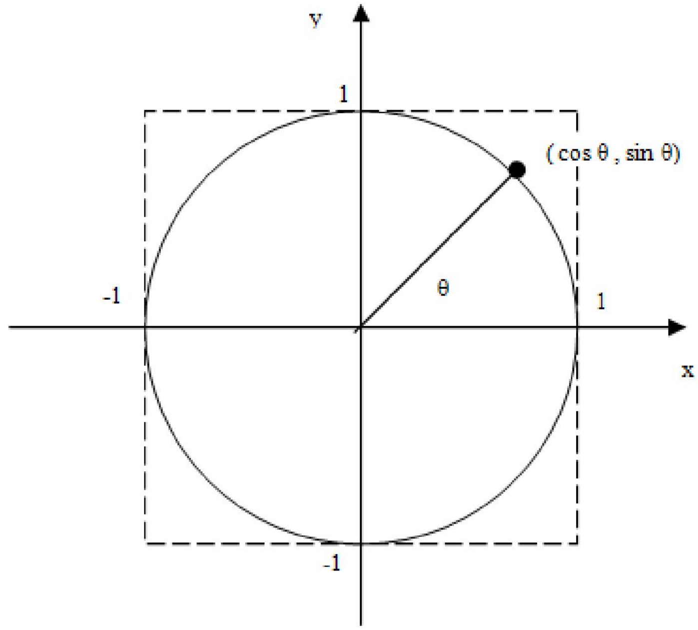
$$E[XY] = E[\sin\Theta \cos\Theta] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin\phi \cos\phi \, d\phi$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \sin 2\phi \, d\phi = 0.$$

Do E[X] = E[Y] = 0, hệ thức (4.70) khi đó suy ra X và Y là không tương quan.

HÌNH 4.18

(X,Y) là điểm được chọn một cách ngẫu nhiên trên đường tròn đơn vị. X và Y là không tương quan, nhưng không phụ thuộc.



VÍ DỤ 4.43 Giả sử X và Y là các biến ngẫu nhiên được xét trong Ví dụ 4.11 và 4.21. Hãy tìm E[XY], COV[X, Y], và $\rho_{X,Y}$.

Hệ thức (4.70) và (4.71) yêu cầu phải tìm giá trị trung bình, phương sai và sự tương quan của X và Y. Từ các hàm mật độ biên của X và Y nhận được trong Ví dụ 4.11, chúng ta tìm được E[X] = 3/2 và VAR[X] = 5/4, và E[Y] = 1/2 và VAR[Y] = 1/4 .Tương quan của X và Y là :

$$\text{E[XY]} = \int_0^\infty \int_0^x xy2e^{-x}e^{-y}dydx$$

$$= \int_0^\infty 2xe^{-x}(1-e^{-x}-xe^{-x})dx = 1.$$

Như vậy hệ số tương quan được cho bởi

$$\rho_{X,Y} = \frac{1-\frac{3}{2}\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

***Hàm đặc trưng đồng thời**

Hàm đặc trưng đồng thời của *n* biến ngẫu nhiên được xác định như sau:

$$\Phi_{X_1,X_2,...,X_n}(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n) = E\left[e^{j(\omega_1X_1+\omega_2X_2+...+\omega_nX_n)}\right].$$

(4.73a)

Trong phần còn lại của mục này chúng ta sẽ phát triển các tính chất của hàm đặc trưng của 2 biến ngẫu nhiên. Các tính chất này được mở rộng trực tiếp cho trường hợp *n* biến ngẫu nhiên. Do vậy xét:

$\Phi_{X,Y}(\omega_1,\omega_2) = E\left[e^{j(\omega_1 X+\omega_2 Y)}\right]$ (4.73b)

Nếu X và Y là các biến ngẫu nhiên liên tục đồng thời, khi đó

$$\Phi_{X,Y}(\omega_1,\omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)e^{j(\omega_1 x+\omega_2 y)}dxdy. \quad (4.73c)$$

Hệ thức (4.73c) chứng tỏ rằng hàm đặc trưng đồng thời là phép biến đổi Fourier 2 chiều của hàm mật độ đồng thời của X và Y. Công thức ngược của phép biến đổi Fourier suy ra rằng hàm mật độ xác suất đồng thời được cho bởi:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_{X,Y}(\omega_1,\omega_2)e^{-j(\omega_1 x+\omega_2 y)}d\omega_1 d\omega_2.$$

(4.74)

Chú ý trong hệ thức (4.73b) rằng các hàm đặc trưng biên có thể nhận được từ hàm đặc trưng đồng thời :

$\Phi_X(\omega) = \Phi_{X,Y}(\omega,0)$ $\Phi_Y(\omega) = \Phi_{X,Y}(0,\omega)$. (4.75)

Nếu X và Y là các biến ngẫu nhiên độc lập, khi đó hàm đặc trưng đồng thời là tích của các hàm đặc trưng biên do

$$\Phi_{X,Y}(\omega_1,\omega_2) = E\left[e^{j\omega_1 X+j\omega_2 Y}\right] = E\left[e^{i\omega_1 X}e^{j\omega_2 Y}\right]$$
$$= E\left[e^{j\omega_1 X}\right]E\left[e^{j\omega_2 Y}\right] = \Phi_X(\omega_1)\Phi_Y(\omega_2), \quad (4.76)$$

ở đây hệ thức thứ 3 suy ra từ Ví dụ 4.40.

Hàm đặc trưng của tổng Z = aX + bY có thể nhận được từ hàm đặc trưng đồng thời của X và Y như sau :

$$\Phi_Z(\omega) = E\left[e^{j\omega(aX+bY)}\right] = E\left[e^{j(\omega aX+\omega bY)}\right] = \Phi_{X,Y}(a\omega,b\omega).$$

(4.77a)

Nếu X và Y là các biến ngẫu nhiên độc lập, hàm đặc trưng của Z = aX + bY khi đó là:

$\Phi_Z(\omega) = \Phi_{X,Y}(a\omega,b\omega) = \Phi_X(a\omega)\Phi_Y(b\omega)$. (4.77b)

Trong Phần 5.1 chúng ta sẽ sử dụng kết quả trên khi nói về tổng tổng các biến ngẫu nhiên .

Các mô men đồng thời của X và Y (nếu chúng hữu hạn) có thể nhận được bằng cách lấy đạo hàm hàm đặc trưng đồng thời. Để chứng minh điều này chúng ta viết lại hệ thức (4.73b) như là giá trị kỳ vọng của tích các hàm mũ và biểu diễn các hàm mũ dưới dạng chuỗi :

$$\Phi_{X,Y}(\omega_1,\omega_2) = E[e^{j\omega_1 X}e^{j\omega_2 X}]$$
$$= E\left[\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(j\omega_1 X)^i}{i!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(j\omega_2 Y)^k}{k!}\right]$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}E\left[X^iY^k\right]\frac{(j\omega_1)^i}{i!}\frac{(j\omega_2)^k}{k!}.$$

Từ đó suy ra rằng các mô men có thể nhận được bởi việc lấy đạo hàm một cách thích hợp :

$$[X^iY^k] = \frac{1}{j^{i+k}}\frac{\partial^i\partial^k}{\partial\omega_1^i\partial\omega_2^k}\Phi_{X,Y}(\omega_1\omega_2)\Big|_{\omega_1=0,\omega_2=0}. \qquad (4.78)$$

VÍ DỤ 4.44 Giả sử U và V là các biến ngẫu nhiên Gauss độc lập trung bình 0, phương sai 1, và giả sử:

X = U + V Y = 2U + V.

Hãy tìm hàm đặc trưng đồng thời của X và Y và tìm E[XY].

Hàm đặc trưng của X và Y là:

$$\Phi_{X,Y}(\omega_1,\omega_2) = E\left[e^{j(\omega_1 X+\omega_2 Y)}\right] = E\left[e^{j(\omega_1(U+V)+\omega_2(2U+V))}\right]$$
$$= E\left[e^{j((\omega_1+2\omega_2)U+(\omega_1+\omega_2)V}\right].$$

Do U và V là các biến ngẫu nhiên độc lập, hàm đặc trưng đồng thời của U và V bằng tích các hàm đặc trưng thành phần

$$\Phi_{X,Y}(\omega_1,\omega_2) = E\left[e^{j((\omega_1+2\omega_2)U)}\right]E\left[e^{j((\omega_1+\omega_2)V)}\right]$$
$$= \Phi_U(\omega_1+2\omega_2)\Phi_V(\omega_1+\omega_2)$$
$$= e^{-\frac{1}{2}(\omega_1+2\omega_2)^2}e^{-\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)^2}$$
$$= e^{-\frac{1}{2}(\omega_1^2+6\omega_1\omega_2+5\omega_2^2)},$$

ở đây các hàm đặc trưng đồng thời nhận được từ Bảng 3.2.

Tương quan E[XY] tìm được từ hệ thức (4.78) với i = 1 và k = 1:

$$E[XY] = \frac{1}{j^2}\frac{\partial^2}{\partial\omega_1\partial\omega_2}\Phi_{X,Y}(\omega_1,\omega_2)\Big|_{\omega_1=0,\omega_2=0}$$
$$= -e^{-\frac{1}{2}(2\omega_1^2+6\omega_1\omega_2+5\omega_2^2)}\left[6\omega_1+10\omega_2\right]\left(\frac{1}{4}\right)\left[4\omega_1+6\omega_2\right]$$
$$+\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(2\omega_1^2+6\omega_1\omega_2+5\omega_2^2)}[6]\Big|_{\omega_1=0,\omega_2=0}$$
$$= 3.$$

Các bạn có thể kiểm tra lại kết quả này bằng cách tính E[XY] = E[(U + V)(2U + V)] một cách trực tiếp.

CÁC BIẾN NGẪU NHIÊN GAUSS ĐỒNG THỜI

Các biến ngẫu nhiên Gauss đồng thời xuất hiện nhiều trong ứng dụng trong kỹ thuật điện. Chúng thường được dùng thường xuyên để mô phỏng các tín hiệu trong ứng dụng xử lý tín hiệu và chúng là mô hình quan trọng nhất được dùng trong các hệ truyền thông để mô tả tiếng ồn. Trong 2 phần đầu tiên của bài này, chúng tôi giới thiệu các tính chất cơ bản của cặp và vectơ ngẫu nhiên Gauss đồng thời. Trong phần còn lại của bài chúng ta phát triển các kết quả liên quan đến phép biến đổi tuyến tính và hàm đặc trưng đồng thời của vectơ Gauss.

Các biến ngẫu nhiên X và Y được gọi là Gauss đồng thời nếu hàm mật độ xác suất đồng thời của nó có dạng :

$F_{X,Y}(x,y)$

$$= \frac{\exp\left\{ \frac{-1}{2(1-\rho_{X,Y}^2)} \left[\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho_{X,Y} \left(\frac{x-m_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{y-m_2}{\sigma_2} \right) + \left(\frac{y-m_2}{\sigma_2} \right)^2 \right] \right\}}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho_{X,Y}^2}} \quad (4.79)$$

với $-\infty < x < \infty$ và $-\infty < y < \infty$.

Hàm mật độ xác suất có tâm tại điểm (m_1,m_2) và có hình quả chuông phụ thuộc vào các giá trị σ_1, σ_2 và $\rho_{X,Y}$ như đã được chỉ ra trong Hình 4.11 trong phần trước. Hàm mật độ là hằng số với các giá trị x và y mà với nó số mũ của lũy thừa là hằng số:

$$\left[\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho_{X,Y} \left(\frac{x-m_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{y-m_2}{\sigma_2} \right) + \left(\frac{y-m_2}{\sigma 2} \right)^2 \right] = \text{hằng số.}$$

Hình 4.19 chỉ ra đường đẳng trị của hàm phân phối với các giá trị σ_1,σ_2 và $\rho_{X,Y}$. Khi $\rho_{X,Y} = 0$ nghĩa là X và Y độc lập đường đẳng trị là một hình elíp với trục chính trùng với trục x và y. Khi $\rho_{X,Y} \neq 0$, trục lớn của elíp được định hướng dọc theo góc [Tài liệu tham khảo 8, trang 531–532]

$$\theta = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2\rho_{X,Y}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2} \right). \quad (4.80)$$

Chú ý rằng góc = 45° khi phương sai bằng nhau.

Hàm mật độ biên của X tìm được bởi việc lấy tích phân $f_{X,Y}(x,y)$ theo mọi y. Phép lấy tích phân được đưa ra ngoài bằng việc bổ sung bình phương trong lũy thừa như được đưa ra trong ví dụ 4.13. Khi đó kết quả nhận được hàm mật độ của X là :

$$f_X(x) = \frac{e^{-(x-m_1)^2/2\sigma_1^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}, \quad (4.81)$$

nghĩa là, X là biến ngẫu nhiên Gauss với trung bình m_1 và phương sai σ_1^2. Tương tự hàm mât độ biên của Y tìm được là hàm mật độ Gauss với trung bình m_2 và phương sai σ_2^2.

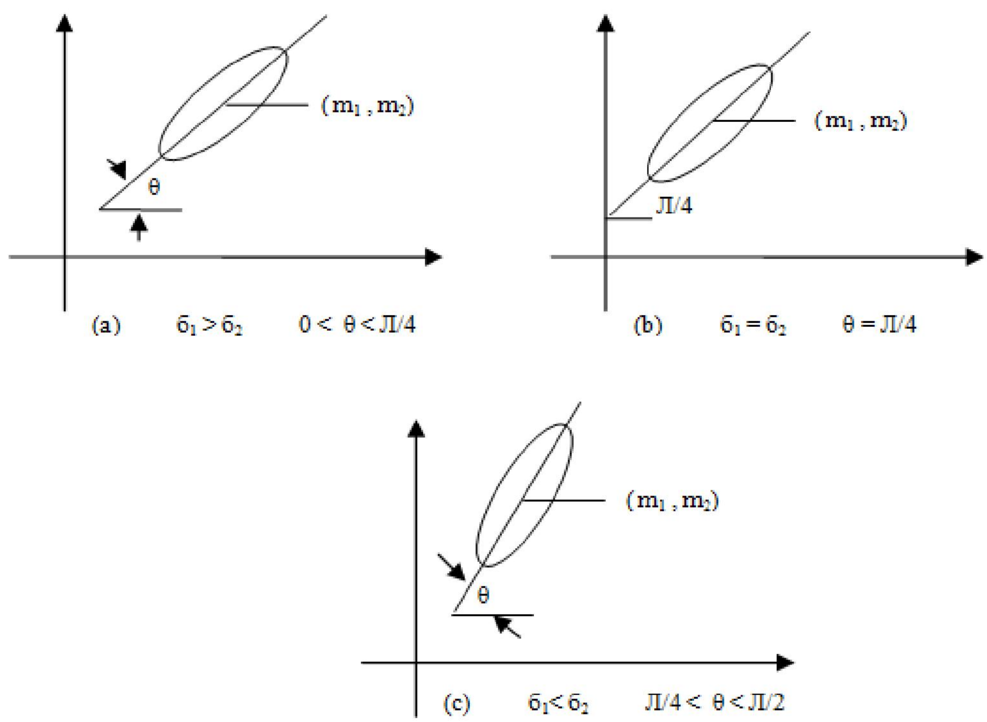
Hàm mật độ xác suất có điều kiện $f_X(x|y)$ và $f_Y(y|x)$ cho chúng ta thông tin về sự tương quan lẫn nhau giữa X và Y. Hàm mật độ xác suất có điều kiện của X khi biết Y = y là:

$$f_X(x\,|\,y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$= \frac{\exp\left\{\dfrac{-1}{2(1-\rho_{X,Y}^2)\sigma_1^2}\left[x - \rho_{X,Y}\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-m_2) - m_1\right]^2\right\}}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2(1-\rho_{X,Y}^2)}}. \quad (4.82)$$

HÌNH 4.19

Hướng của đường đẳng trị của hàm mật độ Gauss đồng thời với $\rho_{X,Y} > 0$



Hệ thức (4.82) chỉ ra rằng hàm mật độ xác suất có điều kiện của X khi biết Y = y cũng là Gauss nhưng với trung bình có điều kiện $m_1 + \rho_{X,Y}(\sigma_1/\sigma_2)(y - m_2)$ và phương sai có điều kiện $\sigma_1^2(1 - \rho^2_{X,Y})$. Chú ý rằng khi $\rho_{X,Y} = 0$, hàm mật độ có điều kiện của X khi Y = y bằng hàm mật độ xác suất biên của X. Điều này phù hợp với kết luận X và Y độc lập khi $\rho_{X,Y} = 0$. Mặt khác khi $|\rho_{X,Y}| \to 1$ phương sai có điều kiện của X tiến tới 0, và do vậy hàm mật độ xác suất có điều kiện tiến tới hàm delta tại trung bình có điều kiện. Như vậy khi $|\rho_{X,Y}| = 1$, phương sai có điều kiện bằng 0 và X bằng trung bình có điều kiện với xác suất 1.

Bây giờ chúng ta chứng minh rằng $\rho_{X,Y}$ trong hệ thức (4.79) là hệ số tương quan giữa X và Y. Covariance giữa X và Y được xác định bởi

$$\mathrm{COV}(X,Y) = E[(X - m_1)(Y - m_2)]$$
$$= E[E[(X - m_1)(Y - m_2)\,|\,Y]].$$

Khi đó kỳ vọng có điều kiện của $(X - m_1)(Y - m_2)$ khi Y = y là

$$E[(X - m_1)(Y - m_2)| Y = y] = (y - m_2)E[X - m_1| Y = y]$$
$$= (y - m_2)(E[X|Y = y] - m_1)$$
$$= (y - m_2)\left(\rho_{X,Y}\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - m_2)\right),$$

ở đây chúng ta đã sử dụng kết quả kỳ vọng co điều kiện của X khi biết Y = y bằng $m_1 + \rho_{X,Y}(\sigma_1/\sigma_2)(y - m_2)$. Do đó

$$E[(X - m_1)(Y - m_2) \mid Y] = \rho_{X,Y}\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(Y - m_2)^2$$

và

$$COV(X,Y) = E[E[(X - m_1)(Y - m_2) \mid Y]] = \rho_{X,Y}\frac{\sigma_1}{\sigma_2}E[(Y - m_2)^2]$$
$$= \rho_{X,Y}\,\sigma_1\sigma_2.$$

Hệ thức trên là phù hợp với định nghĩa về hệ số tương quan, $\rho_{X,Y} = COV(X,Y) / \sigma_1\sigma_2$. Như vậy $\rho_{X,Y}$ trong hệ thức (4.79) thực sự là hệ số tương quan giữa X và Y.

VÍ DỤ 4.45 Lượng mưa hàng năm ở thành phố 1 và thành phố 2 được mô hình hoá bởi cặp biến ngẫu nhiên Gauss đồng thời X và Y, với hàm mật độ xác suất được cho bởi hệ thức (4.79). Hãy tìm giá trị có thể nhất của X khi biết Y = y.

Giá trị có thể nhất của X khi biết Y = y là giá trị *x* làm cho $f_X(x \mid y)$ đạt maximum. Hàm mật độ xác suất có điều kiện của X khi Y = y được cho bởi hệ thức (4.82) mà nó đạt được maximum tại kỳ vọng có điều kiện

$$E[X \mid y] = m_1 + \rho_{X,Y}\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - m_2).$$

Chú ý rằng ước lượng "hợp lý nhất" này là hàm tuyến tính của giá trị quan trắc *y*.

Các biến ngẫu nhiên Gauss đồng thời n chiều

Các biến ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_n$ được gọi là Gauss đồng thời nếu hàm mật độ xác suất đồng thời của nó được cho bởi

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) \triangleq f_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\mathbf{exp}\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T K^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})\right\}}{(2\pi)^{\pi/2} \mid K \mid^{1/2}}, \quad (4.83)$$

ở đây **x** và **m** là các véc tơ cột được định nghĩa bởi

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \\ \vdots \\ E[X_n] \end{bmatrix}$$

và K là ma trận Covariance được xác định bởi

$$K = \begin{bmatrix} \mathbf{VAR}(X_1) & \mathbf{COV}(X_1, X_2) & \cdots & \mathbf{COV}(X_1, X_n) \\ \mathbf{COV}(X_2, X_1) & \mathbf{VAR}(X_2) & \cdots & \mathbf{COV}(X_1, X_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{COV}(X_n, X_1) & \cdots & & \mathbf{VAR}(X_n) \end{bmatrix}$$

(4.84)

Biểu thức $(\ldots)^T$ trong hệ thức (4.83) ký hiệu chuyển vị ma trận hay vectơ. Chú ý rằng ma trận covariance là ma trận đối xứng do $COV(X_i, X_j) = COV(X_j, X_i)$. Hệ thức (4.83) chỉ ra rằng hàm mật độ xác suất đồng thời của véc tơ ngẫu nhiên Gauss là hoàn toàn được xác định bởi các giá trị trung bình và phương sai của các biến ngẫu nhiên và covariance của các cặp biến ngẫu nhiên. Hàm đặc trưng đồng thời này chỉ ra tất cả các hàm mật độ xác suất biên liên hệ với Hệ thức (4.83) đều là của biến Gauss và chúng cũng hoàn toàn được xác định bởi tập các giá trị trung bình, phương sai và covariance.

VÍ DỤ 4.46 Hãy kiểm tra rằng hàm mật độ xác suất Gauss hai chiều được cho bởi hệ thức (4.79) đưa được về dạng thức (4.83).

Ma trận covariance của trường hợp hai chiều được cho bởi

$$K = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{X,Y}\sigma_1\sigma_2 \\ \rho_{X,Y}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix},$$

ở đây chúng ta đã sử dụng $COV(X_1, X_2) = \rho_{X,Y}\sigma_1\sigma_2$. Định thức của K là $\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho_{X,Y}^2)$ giống như mẫu thức của hàm mật độ xác suất ở dạng hiệu chỉnh. Ma trận nghịch đảo của ma trận covariance là:

$$K^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho_{X,Y}^2)} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\rho_{X,Y}\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho_{X,Y}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{bmatrix}.$$

Do vậy lũy thừa của hàm mũ là:

$$\frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho_{X,Y}^2)}(x-m_1)(y-m_2) \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\rho_{X,Y}\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho_{X,Y}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-m_1 \\ y-m_2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho_{X,Y}^2)}(x-m_1, y-m_2) \begin{bmatrix} \sigma_2^2(x-m_1) - \rho_{X,Y}\sigma_1\sigma_2(y-m_2) \\ -\rho_{X,Y}\sigma_1\sigma_2(x-m_1) + \sigma_1^2(y-m_2) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{((x-m_1)/\sigma_1)^2 - 2\rho_{X,Y}((x-m_1)/\sigma_1)((y-m_2)/\sigma_2) + ((y-m_2)/\sigma_2)^2}{(1-\rho_{X,Y}^2)}$$

XEM LẠI BT trên
Như vậy hàm mật độ xác suất hai chiều có dạng như hệ thức (4.83).

VÍ DỤ 4.47 Các vectơ ngẫu nhiên (X, Y, Z) là Gauss đồng thời với trung bình 0 và ma trận covariance:

$$K = \begin{bmatrix} \mathbf{VAR}(X) & \mathbf{COV}(X,Y) & \mathbf{COV}(X,Z) \\ \mathbf{COV}(Y,X) & \mathbf{VAR}(Y) & \mathbf{COV}(Y,Z) \\ \mathbf{COV}(Z,X) & \mathbf{COV}(Z,Y) & \mathbf{VAR}(Z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 1.0 & 0.4 \\ 0.3 & 0.4 & 1.0 \end{bmatrix}.$$

Hãy tìm hàm mật độ xác suất biên của X và Z.

Chúng ta có thể giải bài toán này bằng hai cách. Cách thứ nhất là lấy tích phân trực tiếp hàm mật độ đồng thời để nhận được hàm mật độ biên. Cách thứ hai là sử dụng tính chất hàm mật độ biên của X và Z cũng là Gauss và có cùng tập giá trị trung bình, phương sai và covariance. Chúng ta sẽ dùng cách thứ hai.

Cặp (X,Z) có vectơ trung bình 0 và ma trận covariance:

$$K' = \begin{bmatrix} \mathbf{VAR}(X) & \mathbf{COV}(X,Z) \\ \mathbf{COV}(Z,X) & \mathbf{VAR}(Z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.3 \\ 0.3 & 1.0 \end{bmatrix}.$$

Hàm mật độ xác suất đồng thời của X và Z tìm được bằng việc thế véc tơ trung binh 0 và ma trận covariance này vào hệ (4.83).

VÍ DỤ 4.48 Sự độc lập của các biến ngẫu nhiên Gauss đồng thời không tương quan

Giả sử $X_1, X_2, \ldots, X_n$ là các biến ngẫu nhiên Gauss đồng thời với $\text{COV}(X_i, X_j) = 0$ với $i \neq j$. Chứng minh rằng $X_1, X_2, \ldots, X_n$ là các biến ngẫu nhiên độc lập.

Từ hệ thức (4.84) chúng ta nhận thấy rằng, ma trận covariance là ma trận chéo:

$$K = \text{diag}[\text{VAR}(X_i)] = \text{diag}[\sigma_i^2]$$

Do đó

$$K^{-1} = \text{diag}\left[\frac{1}{\sigma_i^2}\right]$$

và

$$(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T K^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-m_i}{\sigma_i}\right)^2.$$

Bởi vậy hệ thức (4.83)

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[(x_i-m_i)/\sigma_1]^2}}{(2\pi)^{n/2}\,|K|^{1/2}} = \prod_{i=1}^{n}\frac{e^{-\frac{1}{2}[(x_i-m_i)/\sigma_i]^2}}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i).$$

Do vậy $X_1, X_2, \ldots, X_n$ là các biến ngẫu nhiên Gauss độc lập.

***Phép biến đổi tuyến tính của các biến ngẫu nhiên Gauss**

Tính chất rất quan trọng của các biến ngẫu nhiên Gauss đồng thời là phép biến đổi tuyến tính n biến ngẫu nhiên Gauss đồng thời bất kỳ cũng nhận được n biến ngẫu nhiên Gauss đồng thời. Điều này dễ dàng chứng minh được bằng cách dùng ký hiệu ma trận trong hệ thức (4.83). Giả sử $X = (X_1, \ldots, X_n)$ véc tơ ngẫu nhiên Gauss đồng thời và xác định Y bởi:

$$Y = AX$$

ở đây A là ma trận khả nghịch cấp $n \times n$. Từ hệ thức (4.58) chúng ta đã biết rằng hàm mật độ xác suất của **Y** được cho bởi :

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \frac{f_{\mathbf{X}}(A^{-1}\mathbf{y})}{|A|}$$

$$= \frac{\mathbf{exp}\left\{-\frac{1}{2}(A^{-1}\mathbf{y}-\mathbf{m})^T K^{-1}(A^{-1}\mathbf{y}-\mathbf{m})\right\}}{(2\pi)^{\pi/2}|A\|K|^{1/2}}.$$

Từ các tính chất sơ cấp của ma trận chúng ta nhận được rằng :

$$(A^{-1}\mathbf{y} - \mathbf{m}) = A^{-1}(\mathbf{y} - A\mathbf{m})$$

và

$$(A^{-1}\mathbf{y}-\mathbf{m})^T = (\mathbf{y}-A\mathbf{m})^T A^{-1T}$$

Do vậy biến của lũy thừa bằng :

$$(\mathbf{y} - A\mathbf{m})^T A^{-1T} K^{-1} A^{-1}(\mathbf{y} - A\mathbf{m}) = (\mathbf{y} - A\mathbf{m})^T (AKA^T)^{-1}(\mathbf{y} - A\mathbf{m})$$

do $A^{-1T}K^{-1}A^{-1} = (AKA^T)^{-1}$. Đặt $C = AKA^T$ và $\mathbf{n} = A\mathbf{m}$ và chú ý rằng $\det(C) = \det(AKA^T) = \det(A)\det(K)\det(A^T) = \det(A)^2\det(K)$, cuối cùng chúng ta nhận được hàm mật độ xác suất của **Y** là :

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \frac{e^{-(1/2)(\mathbf{y}-\mathbf{n})^{\mathbf{T}}C^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{n})}}{(2\pi)^{n/2}|C|^{1/2}}. \qquad (4.85)$$

Như vậy hàm mật độ xác suất của **Y** có dạng như ở hệ thức (4.83), và do $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ là các biến ngẫu nhiên Gauss đồng thời với trung bình **n** và ma trận covariance C :

$$\mathbf{n} = A\mathbf{m} \qquad \text{và } C = AKA^T.$$

Trong nhiều bài toán chúng ta muốn biến đổi **X** thành véc tơ ngẫu nhiên Gaus độc lập **Y.** Do đó K là ma trận đối xứng nên luôn tìm được ma trận A sao cho $AKA^T = \Lambda$, ở đây Λ là ma trận chéo.(Xem phần 4.10). Với ma A như vậy, hàm mật độ xác suất của **Y** sẽ có dạng:

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \frac{e^{-(1/2)(\mathbf{y}-\mathbf{n})^{\mathbf{T}}\Lambda^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{n})}}{(2\pi)^{n/2}|\Lambda|^{1/2}}$$

$$= \frac{\mathbf{exp}\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - n_i)^2/\lambda_i\right\}}{[(2\pi\lambda_1)(2\pi\lambda_2)\ldots(2\pi\lambda_n)]^{1/2}}, \qquad (4.86)$$

ở đây $\lambda_1,\ldots, \lambda_n$ là các phần tử trên đường chéo của Λ. Chúng ta giả thiết rằng tất cả các giá trị này đều khác 0. Hàm mật độ xác suất ở trên suy ra rằng $Y_1,\ldots, Y_n$ là các biến ngẫu nhiên Gauss độc lập với trung bình n_i và phương sai λ_i. Đến đây ta có thể kết luận rằng tồn tại phép biến đổi tuyến tính chuyển vectơ Gauss đồng thời thành véc tơ ngẫu nhiên Gauss độc lập.

Chúng ta cũng luôn luôn có thể chọn ma trận A làm chéo hoá K có $\det(A) = 1$. Khi đó phép biến đổi $A\mathbf{X}$ tương ứng với phép quay hệ trục tọa độ sao cho các trục chính của e lípsoid tương ứng với hàm mật độ xác suất trùng với các trục của hệ toạ độ. Ví dụ 4.49 xét trường hợp hai chiều.

VÍ DỤ 4.49 Phép quay các biến ngẫu nhiên Gauss đồng thời

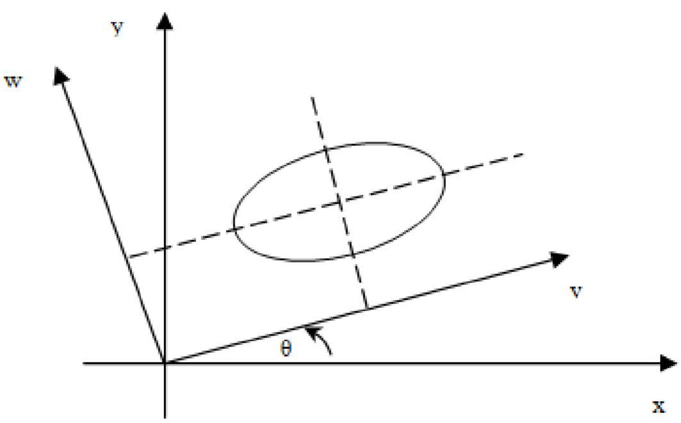
Elíp tương ứng với véc tơ ngẫu nhiên Gauss hai chiều tạo ra một góc:

$$\theta = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2-\sigma_2^2}\right) \text{ với trục X}$$

đối với trục $0x$. Giả sử rằng chúng ta xác định hệ tọa độ mới có các trục trùng với các trục của elíp như được chỉ ra trong hình 4.20. Điều này được thực hiện bởi việc dùng ma trận quay hệ trục tọa độ sau :

$$\begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}.$$

HÌNH 4.20
Phép quay hệ trục tọa độ cặp biến ngẫu nhiên Gauss phụ thuộc thành cặp biến ngẫu nhiên Gauss độc lập.



Để chứng minh các biến ngẫu nhiên mới độc lập cần phải chứng minh chúng có covariance bằng 0:

$$\begin{aligned}\mathrm{COV}(V, W) &= E\,[(V - E\,[V\,])(\,W - E\,[W\,])] \\ &= E\,[\{(X - m_1)\cos\theta + (Y - m_2)\sin\theta\} \\ &\quad\times\{-(X - m_1)\sin\theta + (Y - m_2)\cos\theta\}] \\ &= -\sigma_1^2\sin\theta\cos\theta + \mathrm{COV}(X,Y)\cos^2\theta \\ &\quad - \mathrm{COV}(X, Y\,)\sin^2\theta + \sigma_2^2\sin\theta\cos\theta\end{aligned}$$

$$= \frac{(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)\mathbf{sin}2\theta + 2\mathbf{COV}(X,Y)\cos 2\theta}{2}$$

$$= \frac{\cos 2\theta\left[(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)\mathbf{tan}2\theta + 2\mathbf{COV}(X,Y)\right]}{2}.$$

Nếu chúng ta lấy góc của phép quay sao cho

$$\tan 2\theta = \frac{2\mathbf{COV}(X,Y)}{\sigma_1^2\sigma_2^2},$$

khi đó covariance của V và W bằng 0 như yêu cầu.

VÍ DỤ 4.50 Tổng của các biến ngẫu nhiên Gauss đồng thời

Giả sử $X_1, X_2, \ldots, X_n$ là các biến ngẫu nhiên Gauss đồng thời với hàm mật độ xác suất đồng thời được cho bởi hệ thức (4.83).

Giả sử:

$$Z = a_1 X1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n.$$

Chúng ta sẽ chứng minh rằng *Z* luôn là một biến ngẫu nhiên Gauss.

Chúng ta sẽ tìm hàm mật độ xác suất của *Z* nhờ đưa vào những biến ngẫu nhiên phụ. Giả sử $Z_2 = X_2$, $Z_3 = X_3, \ldots$, $Z_n = X_n$.

Nếu chúng ta định nghĩa $\mathbf{Z} = (Z, Z_2, \ldots, Z_n)$, thì

$\mathbf{Z} = A\mathbf{X}$

trong đó

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & . & a_n \\ 0 & 1 & \ldots & . & 0 \\ . & . & \ldots & . & . \\ 0 & . & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Từ phương trình (4.85) chúng ta thấy rằng **Z** là Gauss đồng thời với kỳ vọng $\mathbf{n} = A\mathbf{m}$, và ma trận hiệp phương sai $C = AKA^T$. Hơn nữa hàm mật độ xác suất biên của Z là hàm phân phối xác suất Gauss với kỳ vọng cho bởi thành phần đầu tiên của **n** và phương sai cho bởi thành phần 1 – 1 của ma trận hiệp phương sai C. Nhờ tiến hành những phép nhân ma trận trên, chúng ta tìm ra

$$E[Z] = \sum_{i=1}^{n} a_i E[X_i]$$

(4.87a)

$$\mathbf{VAR}[Z] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j \,\mathrm{COV}(X_i, X_j).$$

(4.87b)

***Hàm đặc trưng đồng thời của các biến ngẫu nhiên Gauss**

Hàm đặc trưng đồng thời là rất hữu ích để phát triển các tính chất của các biến ngẫu nhiên Gauss đồng thời. Chúng ta sẽ chỉ ra rằng hàm đặc trưng đồng thời của ***n* biến ngẫu nhiên Gauss đồng thời** $X_1, X_2, \ldots, X_n$ được cho bởi

$$\Phi_{X_1,X_2,\dots,X_n}(\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_n) = e^{j\sum_{i=1}^{n}\omega_i m_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\omega_i\omega_k \mathbf{C}OV(X_i,X_k)},$$
(4.88a)

có thể được viết cô đọng hơn như sau:

$$\Phi_X(\omega) \triangleq \Phi_{X_1,X_2,\dots,X_n}(\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_n) = e^{j\omega^T\mathbf{m} - \frac{1}{2}\omega^T K\omega},$$
(4.88b)

trongđó **m** là vectơ kỳ vọng và K là ma trận hiệp phương sai được xác định ở phương trình (4.84).

Phương trình (4.88) được xác nhận nhờ lấy tích phân trực tiếp (xem bài toán 86). Chúng ta sẽ dùng phương pháp ở Papoulis [ref 9] để khai triển phương trình (4.88) bởi dùng kết quả từ Ví dụ 4.50 là tổ hợp tuyến tính của các biến ngẫu nhiên Gauss đồng thời luôn luôn là Gauss. Xét tổng

$Z = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n$.

Hàm đặc trưng của Z được cho bởi

$$\Phi_Z(\omega) = E\left[e^{j\omega Z}\right] = E\left[e^{j(\omega a_1X_1 + \omega a_2X_2 + \dots + \omega a_nX_n)}\right]$$
$$= \Phi_{X_1,\dots,X_n}(a_1\omega, a_2\omega,\dots,a_n\omega).$$

Mặt khác, vì Z là biến ngẫu nhiên Gauss với kỳ vọng và phương sai được cho ở phương trình (4.87) chúng ta có

$$\Phi_Z(\omega) = e^{j\omega E[Z] - \frac{1}{2}\mathbf{VAR}[Z]\omega^2}$$
$$= e^{j\omega\sum_{i=1}^{n}a_i m_i - \frac{1}{2}\omega^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_i a_k \mathbf{COV}(X_i,X_k)}$$

Ta cho bằng nhau cả 2 biểu thức đối với $\Phi_Z(\omega)$ với $\omega = 1$, cuối cùng chúng ta có

$$\Phi_{X_1,X_2,\dots,X_n}(a_1,a_2,\dots,a_n) = e^{j\sum_{i=1}^{n}a_i m_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_i a_k \mathbf{COV}(X_i,X_k)}$$
$$= e^{j\mathbf{a}^\mathbf{T}\mathbf{m} - \frac{1}{2}\mathbf{a}^\mathbf{T}K\mathbf{a}}.$$

Bằng cách thế a_j’ với ω_i’ chúng ta nhận được phương trình (4.88).

Hàm đặc trưng biên của tập con bất kỳ các biến ngẫu nhiên $X_1, X_2,\dots, X_n$ có thể nhận được nhờ các ω_I’ thích hợp bằng 0. Ví dụ hàm đặc trưng biên của $X_1, X_2,\dots, X_m$ đối với $m < n$ nhận được nhờ đặt $\omega_{m+1} = \omega_{m+1} = \dots = \omega_n = 0$. Chú ý rằng hàm đặc trưng kết quả một lần nữa lại tương ứng với hàm đặc trưng của các biến ngẫu nhiên Gauss đồng thời với các thành phần kỳ vọng và hiệp phương sai tương ứng với tập rút gọn $X_1, X_2, \dots, X_m$.

4.7 ƯỚC LƯỢNG BÌNH PHƯƠNG TRUNG BÌNH

Trong cuốn sách này chúng ta sẽ bắt gặp khi kiểu bài toán ước lượng cơ bản. Trong kiểu đầu chúng ta quan tâm đến ước lượng các tham số của một hoặc nhiều biến ngẫu nhiên đó là xác suất, kỳ vọng, phương sai hiệp phương sai. Trong chương 1 chúng ta đã phát biểu rằng tần suất tương đối có thể được sử dụng để ước lượng xác suất các biến cố và trung bình mẫu thử dùng để ước lượng kỳ vọng và các mô men khác của biến ngẫu nhiên. Trong chương 5 chúng ta sẽ xét kiểu ước lượng này thêm nữa. Trong phần này chúng ta chỉ tập trung vào kiểu bài toán ước lượng thứ hai mà ở đó chúng ta quan tâm đến ước lượng giá trị của biến ngẫu nhiên Y chưa biết dưới dạng quan trắc biến ngẫu nhiên X biết được. Chẳng hạn Y có thể đầu vào của một kênh truyền thông và X có thể là đầu ra quan trắc được. Trong ứng dụng dự báo Y có thể là một giá trị trong tương lai của một đại lượng nào đó và X là giá trị hiện tại của nó.

Ở kiểu bài toán ước lượng thứ hai, ước lượng cho Y được cho bởi hàm của X, g(X). Nói chung sai số ước lượng, Y – g(X) là ≠ 0 và có một phí tổn kết hợp với sai số, C (Y – g(X)). Chúng ta thường quan tâm về việc tìm ra hàm g(X) cực tiểu giá trịi kỳ vọng của phí tổn, E[C(Y – g(X))]. Chẳng hạn nếu Y và X là đầu vào và đầu ra của một kênh truyền thông và C = 0 khi Y = g(X) và C = 1 khi = 1 khi Y ≠ g(X) thì giá trị kỳ vọng của chi phí tương ứng với xác suất của sai số khi X và Y là các biến ngẫu nhiên liên tục, chúng ta thường xuyên dùng sai số bình phương trung bình là hàm phí tổn.

$$\text{Cost} = E[(Y - g(X))^2].$$

Đoạn còn lại trong mục này, chúng ta sẽ tập trung vào hàm chi phí thực tế này. Trước hết chúng ta xét trường hợp g(X) bị ràng buộc là hàm tuyến tính của X rồi chúng ta xét trường hợp g(X) là phi tuyến.

Trước hết xét bài toán ước lượng biến ngẫu nhiên Y bởi một hằng số a nhằm để sai số bình phương trung bình là nhỏ nhất:

$$\min_a E\left[(Y-a)^2\right] = E\left[Y^2\right] - 2aE[Y] + a^2. \qquad (4.89)$$

a tốt nhất tìm được bằng cách lấy đạo hàm theo a đặt kết quả bằng 0 và giải phương trình đối với a. Kết quả là

$$a^* = E[Y], \qquad (4.90)$$

và sai số bình phương trung bình bằng $E[(Y - a^*)^2] = VAR(Y)$.

Bây giờ ước lượng Y bởi g(X) = aX+ b :

$$\min_{a.b} E\left[(Y - aX - b)^2\right]. \qquad (4.91)$$

Phương trình (4.91) được coi là một xấp xỉ của Y – aX bởi một hằng số b.Đây là bài toán cực tiểu đưa về dạng phương trình (4.89) và b tốt nhất là

$$b^* = E[Y - aX] = E[Y] - aE[X].$$

Thế vào phương trình (4.91), ta thấy a tốt nhất tìm được bởi

$$\min_a E[\{(Y - E[Y] - a(X - E[X])\}]$$

Một lần nữa chúng ta lấy đạo hàm đối với a, đặt kết quả bằng 0 và giải phương trình tìm a :

$$0 = \frac{d}{da} E\,[(Y - E\,[Y]) - a(X - E\,[X\,])^2\,]$$
$$= -2E[\{(Y - E[Y]) - a(X - E[X])\}(X - E[X])]$$
$$= -2(COV(X,Y) - aVAR(X)).$$

(4.92)

Hệ số a tốt nhất tìm được là

$$a^* = \frac{\mathbf{COV}(X,Y)}{\mathbf{VAR}(X)} = \rho_{X,Y}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X},$$

trong đó $\sigma_X = \sqrt{\mathbf{VAR}(X)}$ và $\sigma_Y = \sqrt{\mathbf{VAR}(Y)}$. Do đó ước lượng tuyến tính sai số bình phương trung bình nhỏ nhất đối với Y biểu diễn tuyến tính qua X là

$$\hat{Y} = a^* X + b^*$$
$$\rho_{X,Y}\sigma_Y\left(\frac{X - E[X]}{\sigma_X}\right) + E[Y].$$

(4.93)

Hạng thức $(X - E[X])/\sigma_X$ là một bản sao phương sai 1, kỳ vọng 0 của X. Như vậy $\sigma_Y(X - E[X])/\sigma_X$ là một bản sao định lại tỷ lệ của X có phương sai của một biến ngẫu nhiên đang được ước lượng cụ thể là σ_Y^2. Hạng thức $E[Y]$ đảm bảo rằng ước lượng có kỳ vọng chính xác. Hạng thức chủ đạo trong ước lượng trên là hệ số tương quan $\rho_{X,Y}$ chỉ thị dấu và tầm rộng của ước lượng Y đối với $\sigma_Y(X - E[X])/\sigma_X$. Nếu X và Y không tương quan (tức $\rho_{X,Y} = 0$) thì ước lượng tốt nhất cho Y là kỳ vọng của nó $E\,[Y\,]$. Mặt khác nếu $\rho_{X,Y} = \pm 1$ thì ước lượng tốt nhất bằng $\pm\,\sigma_Y(X - E\,[X]/\sigma_X + E\,[Y]$.

Trước khi tìm sai số bình phương trung bình cho ước lượng tuyến tính tốt nhất trước hết chúng ta chú ý vào đẳng thức thứ hai ở phương trình (4.92) :

$$E[\{(Y - E[Y]) - a^*(X - E[X])\}(X - E[X])] = 0$$

(4.94)

Phương trình này được gọi là điều kiện trực giao vì nó tuyên bố rằng sai số ước lượng tuyến tính tốt nhất, đại lượng trong dấu ngoặc trực giao với quan trắc $X - E\,[X]$. Điều kiện trực giao là kết quả căn bản về ước lượng bình phương trung bình. Đoạn sau trong phần này chúng ta sẽ thấy nó xuất hiện trong các bài toán dự báo tuyến tính ra làm sao và trong Phần 7.4 chúng ta sẽ dùng nó để phát triển các ước lượng tối ưu trong một số ứng dụng sử lý tín hiệu quan trọng.

Sai số bình phương trung bình của ước lượng tốt nhất là

$$E[((Y - E[Y]) - a^*(X - E[X]))^2]$$
$$= E[((Y - E[Y] - a^*(X - E[X]))(Y - E[Y])]$$
$$- a^*E[((Y - E[Y] - a^*(X - E[X]))(X - E[X])]$$
$$= E[((Y - E[Y]\,) - a^*(X - E[X]))(Y - E[Y])]$$
$$= VAR(Y) - a^*COV(X,Y)$$
$$= VAR(Y)(1 - \rho^2_{X,\,Y}),$$

(4.95)

trong đó đẳng thức thứ hai tuân theo từ điều kiện trực giao. Chú ý rằng khi $|\rho_{X,Y}|$ = 1 sai số bình phương trung bình bằng 0. Điều này có nghĩa rằng $P[|Y - a^*X - b^*| = 0] = P[|Y = a^*X + b^*] = 1$ bởi phương trình (3.90)

Cho đến nay chúng ta mới chỉ xét ước lượng Y bởi hàm tuyến tính của X. Nói chung, ước lượng đối với Y mà cực tiểu sai số bình phương trung bình là một hàm phi tuyến đối với X. Ước lượng $g(X)$ xấp xỉ tốt nhất Y theo nghĩa cực tiểu sai số bình phương trung bình cần phải thoả mãn

$$\underset{g(.)}{\textbf{minimize}}\, E\left[(Y - g(X))^2\right]. \qquad (4.96)$$

Bài toán có thể được giải nhờ dùng kỳ vọng có điều kiện

$$E[(Y - g(X))^2] = E[E[(Y - g(X))^2 \mid X]]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} E\left[(Y - g(X))^2 \mid X = x\right] f_X(x)dx.$$

Hàm dưới dấu tích phân trên là dương $\forall\, x$; do đó tích phân được cực tiểu bởi cực tiểu

$E[(Y - g(x))^2 \mid X = x]$ cho $\forall x$. Nhưng $g(x)$ là một hằng số chừng nào mà kỳ vọng có điều kiện còn được quan tâm, bởi vậy bài toán tương đương với phương trình (4.89) và "hằng số" làm cực tiểu $E[(Y - g(x))^2 \mid X = x]$ là

$$g^*(x) = E[Y \mid X = x] \qquad (4.97)$$

Hàm $g(x) = E[Y \mid X = x]$ được gọi là đường cong hồi qui. Bởi vậy $E[Y \mid X]$ là ước lượng đối với Y theo X mà tạo nên sai số bình phương trung bình nhỏ nhất. các ước lượng tuyến tính nói chung có sai số bình phương trung bình lớn hơn.

Ví dụ 4.51 Giả sử X được phân phối đều trong khoảng (– 1, 1) và gải sử $Y = X^2$. Tìm ước lượng tuyến tính tốt nhất cho Y theo X. So sánh tính năng của ước lượng tuyến tính này với ước lượng tốt nhất của nó.

Kỳ vọng của X = 0 và sự tương quan của nó với Y là

$$E[XY] = E[XX^2] = \int_{-1}^{1} x^3/2dx = 0.$$

Do đó COV(X,Y) = 0 và ước lượng tuyến tính tốt nhất đối với Y là $E[Y]$ bởi theo phương trình (4.93). Sai số bình phương trung bình cho ước lượng này là VAR(Y) bởi phương trình (4.95).

Ước lượng tốt nhất được cho bởi phương trình (4.97):

$$E[Y \mid X = x] = E[X^2 \mid X = x] = x^2.$$

Sai số bình phương trung bình của ước lượng này là

$$E[(Y - g(X))^2] = E[(X^2 - X^2)^2] = 0.$$

Như vậy trong bài toán này, ước lượng tuyến tính tốt nhất thể hiện một cách nghèo nàn trong khi đó ước lượng phi tuyến cho sai số bình phương trung bình nhỏ nhất bằng 0.

Ví dụ 4.52 Các biến ngẫu nhiên Gauss đồng thời

Tìm ước lượng của Y theo X có sai số bình phương trung bình nhỏ nhất khi X và Y là những biến ngẫu nhiên Gauss đồng thời.

Ước lượng sai số bình phương trung bình nhỏ nhất được cho bởi kỳ vọng điều kiện của Y với X cho trước. Bằng việc hoán vị chỗ lẫn nhau x và y vào phương trình (4.82), chúng ta thấy rằng kỳ vọng điều kiện của Y với $X = x$ cho trước bởi

$$E[Y \mid X = x] = E[Y] + \rho_{X,Y}\frac{\rho_Y}{\rho_X}(X - E[X]).$$

Ước lượng này trùng hợp với ước lượng tuyến tính tốt nhất. Như vậy đối với các biến ngẫu nhiên Gauss đồng thời ước lượng có sai số bình phương trung bình nhỏ nhất là ước lượng tuyến tính.

***Dự báo tuyến tính**

Các phương pháp dự báo tuyến tính được dùng rộng rãi trong việc sử lý các tín hiệu ngẫu nhiên. Phần còn lại của mục này chúng ta phát triển các phương trình xác định ước lượng tuyến tính tốt nhất của Y theo một số biến ngẫu nhiên .

Giả sử X_1, X_2 và X_3 là các biến ngẫu nhiên kỳ vọng 0 và giả sử chúng ta muốn xấp xỉ X_3 bởi $a X_1 + bX_2$ sao cho

$$\underset{a,b}{\textbf{minimize}}\, E\left[(X_3 - aX_1 - bX_2)^2\right].$$

Nếu chúng ta lấy đạo hàm của sai số bình phương trung bình đối với a và đặt kết quả bằng 0, chúng ta nhận được

$$E[-2(X_3 - aX_1 - bX_2)X_1] = 0,$$

tương đương với :

$$E[(X_3 - aX_1 - bX_2)X_1] = 0. \qquad (4.98a)$$

Tương tự lấy đạo hàm đối với b tạo ra

$$E[(X_3 - aX_1 - bX_2)X_2] = 0. \qquad (4.98b)$$

Các phương trình (4.98a) và (4.98b) phát biểu rằng sai số $X_3 - aX_1 - bX_2$ là trực giao với mỗi quan trắc X_1 và X_2 .

Các phương trình (4.98a) và phương trình (4.98b) dẫn tới 2 phương trình về 2 ẩn số :

$$\begin{bmatrix} E\left[X_1^2\right] & E\left[X_1X_2\right] \\ E\left[X_1X_2\right] & E\left[X_2^2\right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E\left[X_1X_3\right] \\ E\left[X_2X_3\right] \end{bmatrix}. \qquad (4.99)$$

Nghiệm cho tập phương trình này là :

$$a = \frac{\mathbf{VAR}(X_2)\mathbf{COV}(X_1, X_3) - \mathbf{COV}(X_1, X_2)^2\mathbf{COV}(X_2, X_3)}{\mathbf{VAR}(X_1)\mathbf{VAR}(X_2) - \mathbf{COV}(X_1, X_2)^2} \qquad (4.100a)$$

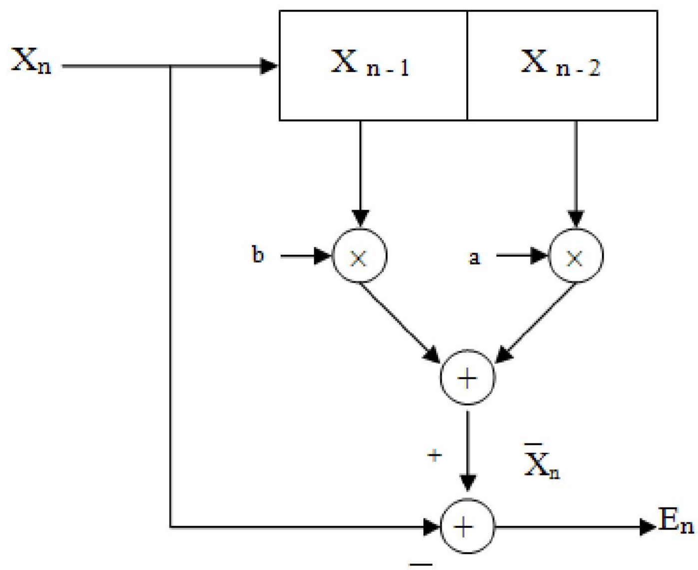
$$b = \frac{\mathbf{VAR}(X_1)\mathbf{COV}(X_2, X_3) - \mathbf{COV}(X_1, X_2)\mathbf{COV}(X_1, X_3)}{\mathbf{VAR}(X_1)\mathbf{VAR}(X_2) - \mathbf{COV}(X_1, X_2)^2} \qquad (4.100b)$$

Bài toán tìm ước lượng tuyến tính cho X_{n+1} theo $X_1,\ldots, X_n$ được giải quyết theo cùng một cách này. Điều kiện trực giao cung cấp cho chúng ta với 1 tập n phương trình tuyến tính mà có thể giải được cho một tập tốt nhất các hệ số. Bài toán này được thảo luận chi tiết ở phần 7.4.

Ví dụ 4.53 Dự báo bậc hai giọng

Giả sử X_1, X_2,… là dãy mẫu dạng sóng điện áp giọng nói và giả sử các mẫu được đưa vào một máy dự báo bậc hai nói được thể hiện trong Hình 4.21. Tìm tập các biến dự báo *a* và *b* làm cực tiểu giá trị bình phương trung bình của sai số dự báo.

Hình 4.21
Máy dự báo tuyến tính 2 nút ấn để xử lý giọng nói



Chúng ta tìm dự báo tốt nhất cho X_1, X_2 và X_3 và giả sử tình thế cũng y như vậy đối với X_2, X_3 và X_4,vv… Việc mô hình hoá các mẫu giọng nói có kỳ vọng 0 và phương sai σ^2 và hiệp phương sai không phụ thuộc vào chỉ số riêng của mẫu mà phụ thuộc vào khoảng cách giữa chúng:

$$\mathrm{COV}(X_j, X_k) = \rho_{|j-k|}\sigma^2.$$

Phương trình (100) trở thành

$$a = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1-\rho_1^2}$$

và

$$b = \frac{\rho_1(1-\rho_2)}{1-\rho_1^2}.$$

Trong bài toán 93, yêu cầu ta phải chứng minh sai số bình phương trung bình khi sử dụng các giá trị trên của *a* và *b* là

$$\sigma^2\left\{1-\rho_1^2 - \frac{(\rho_1^2-\rho_2)^2}{1-\rho_1^2}\right\}. \qquad (4.101)$$

Jayant và Noll (1984,263) đưa ra các giá trị ρ_1 = .825 và ρ_2 = .562 cho tín hiệu giọng nói. Giá trị bình phương trung bình của đầu ra dự báo là .281 σ^2 thấp hơn 5.5 dB so với phương sai dãy đầu vào. Có thể chỉ ra rằng các bộ lượng tử tín hiệu đầu vào giảm. Vì lý do này, nhiều thiết bị mã hóa giọng nói cho qua một loạt các mẫu nói thử qua bộ dự báo tuyến tính trước khi lượng tử hóa. Xem tham khảo [4] cho nhiều thông tin thêm nữa về mã hóa giọng nói.

*4.10 PHÁT SINH CÁC BIẾN VECTƠ NGẪU NHIÊN TƯƠNG QUAN

Nhiều ứng dụng liên quan đến các vectơ hoặc dãy các biến ngẫu nhiên tương quan. Do vậy máy tính mô phỏng các mô hình của những ứng dụng như vậy đòi hỏi các phương pháp phát ra các biến ngẫu nhiên như vậy. Trong phần này, chúng ta trình các phương pháp để phát sinh các vectơ các biến ngẫu nhiên với các ma trận hiệp phương sai được chỉ ra. Chúng ta cũng thảo luận việc phát ra các biến vectơ ngẫu nhiên Gauss đồng thời. Trong ví dụ 7.13 chúng ta thảo luận phát sinh các dãy biến ngẫu nhiên tương quan.

Phát ra các vectơ các biến ngẫu nhiên với hiệp phương sai cho trước

Giả sử **X** = (X_1,…, X_n) là các vectơ biến ngẫu nhiên không tương quan kỳ vọng 0, phương sai 1. **X** có thẻ được phát ra khi dùng các phương pháp được thảo luận ở chương 2.

Giả sử chúng ta quan tâm về việc phát ra vectơ kỳ vọng không **Y** = (Y_1, Y_2,…, Y_n) với ma trận hiệp phương sai K^3 cho trước. Chúng ta sẽ chứng minh rằng điều này có thể thực hiện được bởi đặt **Y =** A **X,** trong đó A là ma trận cấp $n \times n$. Chúng ta cũng sẽ chỉ ra rằng ánh xạ **Y =** A**X** có thể được dùng để biến đổi một vectơ **X** với hiệp phương sai K_X thành vectơ **Y** với ma trận hiệp phương sai dạng đường chéo, có nghĩa là thành một tập các biến ngẫu nhiên trực giao.

Giả sử a_{kj} là một phần tử ở hàng thứ k , cột thứ j của A . Thì phần tử thứ k của **Y** là

$$Y_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} X_j . \qquad (4.102)$$

Rõ ràng rằng, kỳ vọng của $Y_k = 0$ vì các kỳ vọng của các X_j bằng 0. Hiệp phương sai giữa các phần tử **Y** được cho bởi

$$\begin{aligned} E[Y_k Y_{k'}] &= E\left[\sum_{j=1}^{n} a_{kj} X_j \sum_{j'=1}^{n} a_{k'j'} X_{j'}\right] \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{j'=1}^{n} a_{kj} a_{k'j'} E\left[X_j X_{j'}\right]. \end{aligned} \qquad (4.103)$$

Vì X_j’ là không tương quan có kỳ vọng 0 và phương sai 1chúng ta có $E[X_j X_{j'}]$ = 1 nếu j = j’ và $E[X_j X_{j'}] = 0$ nếu $j \neq j'$. Do đó tất cả các hạng thức ở tổng kép trên là bằng 0 trừ j = j’ và ta có

$$E[Y_k Y_{k'}] = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} a_{k'j} . \qquad (4.104)$$

Phương trình (4.104) nói lên rằng phần tử *k,k’* của ma trận hiệp phương sai của Y bằng tích giữa dòng thứ *k* của ma trận *A* và cột thứ *k’* của ma trận A^T là ma trận chuyền vị của *A*. Nói một cách khác nếu **Y =** A**X**, trong đó **X** bao gồm các biến ngẫu nhiên không tương quan phương sai 1 thì ma trận hiệp phương sai của **Y** là

$K = AA^{\mathrm{T}}$. (4.105)

Tiếp theo chúng ta càn một phương pháp tìm ma trận A thỏa mãn phương trình (4.105) đối với K cho trước. Bài toán này được giải khi sử dụng các phương pháp sơ cấp từ đại số tuyến tính. Vì K là ma trận đối xứng có thể biểu diễn dưới dạng

$K = P\Lambda P^{\mathrm{T}}$, (4.106)

trong đó Λ là ma trận đường chéo bao gồm các giá trị đặc trưng của K và P là một ma trận mà các cột của nó bao gồm một tập trực chuẩn các vectơ riêng của K.[4,5] xác định $\Lambda^{1/2}$ là ma trận đường chéo mà các phần tử của nó là căn bậc hai của các phần tử Λ. Cuối cùng giả sử $A = P\,\Lambda^{1/2}$, thì

$AA^{\mathrm{T}} = P\Lambda^{1/2}\,\Lambda^{1/2}P^{\mathrm{T}} = P\Lambda P^{\mathrm{T}} = K.$

Do đó A tạo ra **Y** với ma trận hiệp phương sai mong muốn.

Bây giờ giả sử rằng **X** là một vectơ kỳ vọng 0 với hiệp phương sai K_X, và giả sử chúng ta nhận được một vectơ $\mathbf{Y} = A\mathbf{X}$ của các biến ngẫu nhiên trực giao có nghĩa là , $E[Y_i\ Y_j\ ] = 0$ nếu $i \neq j$. Phương trình (4.103) cho mục vào (k,k') của ma trận hiệp phương sai của Y, K_Y. Viết lại dưới dạng ma trận có nghĩa là

$K_Y = AK_XA^{\mathrm{T}}$,

trong đó K_X là ma trận hiệp phương sai của **X** với các mục vào $E[X_j\ X_{j'}\ ]$. Nếu chúng ta nhân trái phương trình (4.106) với P^{T} và nhân phải với P , chúng ta nhận được

$\Lambda = P^{\mathrm{T}}K_XP$,

do P là ma trận trực giao (tức $PP^{\mathrm{T}} = \mathrm{I}$), và trong đó Λ là ma trận các giá trị riêng của K_X. Bằng các so sánh hai phương trình trên, chúng ta thấy rằng nếu chúng ta giả sử $A = P^{\mathrm{T}}$ thì $K_Y = \Lambda$ và các biến ngẫu nhiên trong **Y** là trực giao như đòi hỏi. Khi A được chọn sao cho K_Y là đường chéo A được gọi là phép biến đổi *Krhunen–Loevetransform* (*KLT*). KLT đóng một vai trò quan trọng trong các bài toán về nhận mẫu(pattern) và mã hóa hình ảnh.

Ví dụ 4.54 Giả sử $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ bao gồm hai biến ngẫu nhiên không tương quan, phương sai 1. Tìm ma trận A sao cho $\mathbf{Y} = A\mathbf{X}$ có ma trận tương quan

$$K = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}, \qquad (4.107a)$$

trong đó $|\rho| > 1$.

Nhờ tính giá trị riêng và vectơ riêng của K chúng ta tìm thấy rằng

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad D^{1/2} = \begin{bmatrix} \sigma(1-\rho)^{1/2} & 0 \\ 0 & \sigma(1-\rho)^{1/2} \end{bmatrix},$$

và do đó

$$A = \sigma \begin{bmatrix} [(1-\rho)/2]^{1/2} & [(1+\rho)/2]^{1/2} \\ -[(1-\rho)/2]^{1/2} & [(1+\rho)/2]^{1/2} \end{bmatrix}. \qquad (4.107b)$$

Bạn cần xác nhận rằng $K = AA^{\mathrm{T}}$.

Phát sinh các vectơ các biến ngẫu nhiên Gauss đồng thời

Trong phần 4.8 chúng ta tìm thấy rằng nếu **X** là vectơ các biến ngẫu nhiên Gauss đồng thời với hiệp phương saiK_X, thì **Y** = A**X** cũng Gauss đồng thời với hiệp phương sai$K_Y = AK_XA^T$. Nếu chúng ta giả thiết rằng **X** bao gồm các biến ngẫu nhiên không tương quan, phương sai 1, thì $K_X = I$, là ma trận đồng nhất và do đó $K_Y = AA^T$.

Chúng ta có thể dùng phương pháp từ đầu phần này để tìm A đối với ma trận hiệp phương sai mong muốn bất kỳ K_Y. Như vậy chúng ta kết luận rằng chúng ta có thể phát ra đồng thời các vectơ ngẫu nhiên Gauss **Y** với ma trận hiệp phương sai tuỳ ý K_Y như sau :

1. Tìm ma trận A sao cho $K_Y = A\,A^T$.
2. Phát ra **X** bao gồm n biến ngẫu nhiên Gauss kỳ vọng 0, phương sai 1.
3. Giả thiết **Y** = A**X.**

Bây giờ chúng ta đưa một phương pháp để phát sinh các biến ngẫu nhiên Gauss đồng thời kỳ vọng 1, không tương quan (và ở đây là độc lập). Giả sử rằng X và Y là các biến ngẫu nhiên Gauss đồng thời, phương sai 1, kỳ vọng 0 và độc lập; hàm phân phối xác suất đồng thời là

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2}.$$

Xét phép biến đổi

$R^2 = X^2 + Y^2$ và $\Theta = \angle(X,Y)$,

thì phép biến đổi ngược là

$$X = R\cos\Theta \quad \text{và} \quad Y = R\sin\Theta\,. \tag{4.108}$$

Dễ dàng chỉ ra rằng Jacobi cho phép biến đổi này là 1/2 ; do đó hàm phân phối xác suất đồng thời của R^2 và Θ được cho bởi

$$f_{R^2,\Theta}(s,t) = \frac{1}{4\pi} e^{-s/2} = f_{R^2}(s)\, f_\Theta(t),$$

trong đó

$$f_{R^2}(s) = \frac{1}{2} e^{-s/2} \quad \forall\ s > .0$$

và

$$f_\Theta(t) = \frac{1}{2\pi} \qquad \forall\ 0 < t < 2\pi.$$

Do chúng ta có thể phát ra R^2 nhờ phát sinh biến ngẫu nhiên mũ với tham số 1/2 , và chúng ta có thể phát ra Θ nhờ nhờ phát sinh biến ngẫu nhiên phân phối đều ở khoảng $(0, 2\pi)$. Nếu chúng ta thế những biến ngẫu nhiên này vào phương trình (4.108), thì chúng ta nhận được cặp những biến ngẫu nhiên Gauss phương sai 1, kỳ vọng 0 và độc lập. Như vậy việc thảo luận ở trên dẫn tới thuật toán sau đây :

1. Phát ra U_1 và U_2 , hai biến ngẫu nhiên độc lập phân phối đều trong khoảng đơn vị.
2. Giả sử $R^2 = -2\log U_1$ và U_2 $\Theta = 2\pi U_2$.
3. Giả sử $X = R\cos\Theta = (-2\log U_1)\cos 2\pi U_2$ và
   $Y = R\sin\Theta = (-2\log U_1)\sin 2\pi U_2$.

thì X và Y là những biến ngẫu nhiên Gauss phương sai 1, kỳ vọng 0 và độc lập. Bằng cách lặp lại thủ tục trên chúng ta có thể phát ra một số bất kỳ các biến ngẫu nhiên như vậy.

TÓM TẮT

.Cách cư xử thống kê đồng thời của một vectơ các biến ngẫu nhiên **X** được chỉ ra nhờ biểu diễn qua hàm phân phối tích luỹ đồng thời, hàm khối lượng xác suất đồng thời hoặc hàm mật độ xác suất đồng thời. Xác suất của một biến cố bất kỳ liên quan đến cách cư xử đồng thời của những biến ngẫu nhiên này có thể được tính nhờ những hàm này.

. Cách cư xử thống kê của một tập con các biến ngẫu nhiên từ một vectơ **X** được chỉ ra bởi hàm phân phối tích lũy biên, hàm mật độ xác suất biên, hoặc hàm khối lượng xác suất biên có thể nhận được từ hàm phân phối tích lũy đồng thời, hàm mật độ xác suất đồng thời hoặc hàm xác suất đồng thời của **X**.

. Tập các biến ngẫu nhiên là độc lập nếu như xác suất của một biến cố dạng tích bằng tích của các xác suất của các biến cố thành phần. Các điều kiện tương đương cho tính độc lập của mọt tập các biến ngẫu nhiên là hàm phân phối tích luỹ đồng thời, hàm mật độ xác suất đồng thời, hàm mật độ xác suất đồng thời hoặc hàm xác suất đồng thời bằng tích các hàm biên tương ứng.

. Cách cư xử thống kê của tập con các biến ngẫu nhiên từ một vectơ **X,** cho trước các giá trị đúng của các biến ngẫu nhiên khác trong vectơ là được chỉ ra bởi hàm phân phối tích luỹ điều kiện, hàm khối lượng xác suất điều kiện hoặc hàm mật độ xác suất điều kiện. Nhiều bài toán có thể dùng một cách tự nhiên lời giải liên quan đến điều kiện về các giá trị một số biến

. Hiệp phương sai giữa 2 biến ngẫu nhiên và dạng chuẩn tắc của nó, hệ số tương quan là các độ đo về sự phụ thuộc tuyến tính giữa các biến ngẫu nhiên. Hiệp phương sai giữa các biến ngẫu nhiên là cần thiết trong việc tổng hợp các dự báo tiên đoán một biến ngẫu nhiên bởi một tổ hợp tuyến tính các biến ngẫu nhiên khác.

. Hàm mật độ xác suất đồng thời của một vectơ **X** bao gồm các biến ngẫu nhiên Gauss đồng thời được xác định bởi vectơ các kỳ vọng và xác định bởi ma trận hiệp phương sai. Tất cả các hàm mật độ xác suất biên và hàm mật độ xác suất điều kiện của tập con của **X** có hàm phân phối xác suất Gauss. Một hàm tuyến tính bất kỳ hay một phép biến đổi tuyến tính của các biến ngẫu nhiên Gauss đồng thời sẽ có kết quả là một tập các biến ngẫu nhiên Gauss đồng thời.

. Một vectơ các biến ngẫu nhiên với ma trận hiệp phương sai tuỳ ý có thể được sinh ra bởi dùng phép biến đổi tuyến tính của một vectơ các biến ngẫu nhiên không tương quan phương sai 1. Vectơ các biến ngẫu nhiên Gauss với ma trận hiệp phương sai tuỳ ý có thể được sinh ra bởi việc tiến hành một phép biến đổi tuyến tính vectơ các biến ngẫu nhiên Gauss đồng thời độc lập phương sai 1.

ngẫu nhiên . Trong những bài toán đó giá trị kỳ vọng của các biến ngẫu nhiên có thể nhận được qua việc dùng kỳ vọng điều kiện.

BẢNG LIỆT KÊ CÁC THUẬT NGỮ QUAN TRỌNG

Mô men trung tâm của *X* và *Y*	Các biến ngẫu nhiên liên tục đồng thời
Hàm phân phối tích luỹ điều kiện	Các biến ngẫu nhiên Gauss đồng thời
Kỳ vọng điều kiện	Biến đổi tuyến tính
Hàm mật độ xác suất điều kiện	Hàm phân phối xác suất tích lũy biên
Hàm khối lượng xác suất điều kiện	Hàm mật độ xác suất biên
Hệ số tương quan	Hàm khối lượng xác suất biên
Tương quan của *X* và *Y*	Sai số bình phương trung bình
Hiệp phương sai của *X* và *Y*	Ước lượng tuyến tính Mmse
Các biến ngẫu nhiên độc lập	Điều kiện trực giao
Ja cô bi của phép biến đổi	Các biến ngẫu nhiên trực giao
Hàm phân phối tích lũy đồng thời	Biến cố dạng tích
Hàm đặc trưng đồng thời	Đường cong hồi qui
Mô men đồng thời của *X* và *Y*	Các biến ngẫu nhiên không tương quan
Hàm mật độ xác suất đồng thời	Biến ngẫu nhiên vectơ
Hàm khối lượng xác suất đồng thời	

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Papoulis [tham khảo 1] là sách tham khảo chuẩn về kỹ thuật điện cho các biến ngẫu nhiên . Các tham khảo [2] và [3] trình bày nhiều ví dụ thú vị liên quan đến đa biến ngẫu nhiên . Cuốn sách của Jayant và Noll [tham khảo] đưa ra nhiều ứng dụng các khái niệm xác suất về mã hóa số dạng sóng.

1. A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, McGraw–Hill, New York, 1965.

2. L. Breiman, *Probability and Stochastic Processes*, Houghton Mifflin, Boston,1969.

3. H. J. Larson và B. O. Shubert, *Probabilistic Models in Engineering Sciences*, vol. 1, Wiley, New York, 1979.

4. N. S. Jayant and P. Noll, *Digital Coding of Waveforms*, Prentice–Hall, Englewood Cliffs, N. J. , 1984.

5.R. L. Rabiner and R. W. Schafer, *Digital Processing of Speech Signals*, Prentice – Hall, Englewood Cliffs N. J.,1978.

6. H. Stark and J. W. Woods, *Probability, Random Processes, and Estimation Theory for Engineers*, Prentice–Hall, Englewood Cliffs N. J., 1986.

7. H. Anton, *Elementary Linear Algebra*, 3rd ed., Wiley, New York 1981.

8. C. H. Edwards, Jr., and D. E. Penney, *Calculus and Analytic Geometry*, Prentice–Hall, Englewood Cliffs N. J., 1986.

BÀI TẬP

PHẦN 4.1
Vectơ ngẫu nhiên

1. Đối với biến ngẫu nhiên hai chiều **X** = (X, Y), hãy phác họa miền trong mặt phẳng tương ứng với các biến cố sau và xác định xem đâu là các biến cố tích.
   a. $\{X - Y \le 2\}$.
   b. $\{e^X < 6\}$.
   c. $\{\max(X, Y) < 6\}$.
   d. $\{|X - Y| \le 2\}$.
   e. $\{|X| > |Y|\}$.
   f. $\{X/Y < 1\}$.
   g. $\{X^2 \le Y\}$.
   h. $\{XY \le 2\}$.
   i. $\{\max(|X|, |Y|) < 3\}$.
2. Một hộp chứa một quả bóng đen và 3 quả bong trắng. Bốn quả được rút ra khỏi hộp. Lấy $I_k = 1$ nếu kết cục của lần rút thứ *k* là nhận được quả bong đen và $I_k = 0$ trong trường hợp ngược lại. Định nghĩa ba biến ngẫu nhiên sau:

   $X = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$,

   $Y = \min\{I_1, I_2, I_3, I_4\}$, và

   $Z = \max\{I_1, I_2, I_3, I_4\}$.

   a. Tìm luật xác suất cho (X, Y, Z) nếu mỗi quả bóng đều được hoàn trả vào hộp sau mỗi lần rút.
   b. Tìm luật xác suất cho (X, Y, Z) nếu mỗi quả bóng đều không được hoàn trả vào hộp sau mỗi lần rút.
3. Cho các biến ngẫu nhiên X, Y, và Z là độc lập. Tìm các xác suất sau theo $F_X(x)$, $F_Y(y)$, và $F_Z(z)$.
   a. $P[|X| < 5, Y < 2, Z^2 \ge 2]$.
   b. $P[X < 5, Y < 0, Z = 1]$
   c. $P[\min(X, Y, Z) > 2]$.
   d. $P[\max(X, Y, Z) < 6]$.

PHẦN 4.2
Các Cặp Biến

4. Một con xúc xắc được tung hai lần; lấy X_1 và X_2 ký hiệu các kết cục tương ứng của lần tung thứ nhất và thứ hai.
   a. Hàm xác suất đồng thời cho (X_1, X_2) là gì nếu các lần tung là độc lập và nếu các kết cục của mỗi lần tung là đồng khả năng?
   b. Đặt $X = \min(X_1, X_2)$ và $Y = \max(X_1, X_2)$. Tìm hàm xác suất

đồng thời cho (X, Y).

c. Tìm các hàm xác suất biên của X và Y đã cho ở câu b.

5. a. Tìm các hàm xác suất biên của các cặp biến ngẫu nhiên với các hàm xác suất được cho trước.

i.

Y \ X	–1	0	1
–1	1/6	0	1/6
0	0	1/3	0
1	1/6	0	1/6

ii.

Y \ X	–1	0	1
–1	1/9	1/9	1/9
0	1/9	1/9	1/9
1	1/9	1/9	1/9

iii.

Y \ X	–1	0	1
–1	0	0	1/3
0	0	1/3	0
1	1/3	0	0

b. Tìm xác suất của các biến cố A ={X ≤ 0}, B = {X ≤ Y}, và C = {X = –Y} với các xác suất đồng thời như trên.

6. Hãy phác họa ba hàm phân phối đồng thời được cho trong Bài tập 5, câu a, và chứng tỏ rằng các tính chất của hàm phân phối đều được thỏa mãn. Bạn có thể thấy thật hữu ích nếu chia mặt phẳng thành các miền mà hàm phân phối là hằng.

7. Hãy phác họa hàm phân phối trong Ví dụ 4.10 và chứng tỏ rằng các tính chất của hàm phân phối đều được thỏa mãn. Hình vẽ của các bạn phải có locus các điểm mà tại đó hàm phân phối lấy giá trị 1/10, 1/2, và 9/10.

8. a. Tìm các hàm phân phối đồng thời của vectơ ngẫu nhiên được giới thiệu ở Ví dụ 4.11.

b. Hãy sử dụng kết quả của câu a để tìm các hàm phân phối biên.

9. X và Y ký hiệu biên độ của tín hiệu ồn tại hai antenna (ăngten). Vectơ ngẫu nhiên (X, Y) có hàm mật độ xác suất đồng thời

$$f(x, y) = axe^{-ax^2/2}bye^{-bx^2/2} \qquad x > 0, y > 0, a > 0, b > 0.$$

a. Tìm hàm phân phối đồng thời.

b. Tìm P[X > Y].

c. Tìm các hàm mật độ biên.

10. Vectơ ngẫu nhiên (X, Y) có hàm mật độ xác suất đồng thời

$$f(x, y) = k(x + y) \qquad 0 < x < 1, 0 < y < 1.$$

a. Tìm k.

b. Tìm hàm phân phối đồng thời của (X, Y).

c. Tìm các hàm mật độ biên của X và của Y.

11. Vectơ ngẫu nhiên (X, Y) có phân phối đều (tức $f(x, y) = k$) trong các miền cho bởi Hình P4.1 và bằng 0 tại mọi điểm khác.

a. Tìm giá trị của k trong từng trường hợp.

b. Tìm hàm mật độ biên của X và của Y trong từng trường hợp.

12. Vectơ ngẫu nhiên (X, Y) có hàm mật độ xác suất đồng thời

$$f_{X,Y}(x, y) = 2e^{-x} e^{-2y} \qquad x > 0, y > 0.$$

Hãy tìm xác suất của các sự kiện sau:

a. $\{X + Y \leq 8\}$.

b. $\{X < Y\}$.

c. $\{X - Y \leq 10\}$.

d. $\{X^2 < Y\}$.

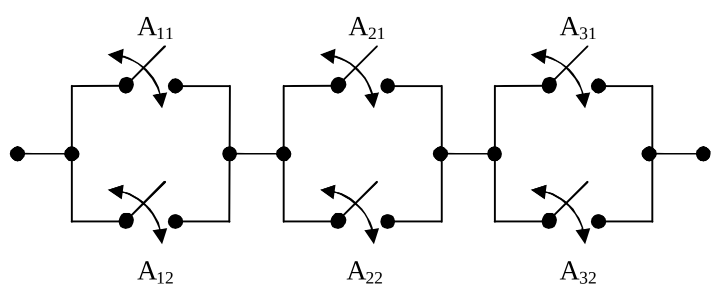
13. Cho (X, Y) có hàm mật độ xác suất đồng thời

$$f_{X,Y}(x, y) = xe^{-x(1+y)} \qquad x > 0, y > 0.$$

Tìm hàm mật độ biên của X và của Y.

14. Cho (X, Y) là biến ngẫu nhiên Gauss đồng thời đã được thảo luận trong Ví dụ 4.13. Hãy tìm $P[X^2 + Y < R^2]$ khi $\rho = 0$. *Hướng dẫn*: Dùng tọa độ cực để tính tích phân.

HÌNH P2.1



15. Dạng tổng quát của hàm mật độ đồng thời của hai biến ngẫu nhiên Gauss đồng thời là

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\exp\left\{\dfrac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\dfrac{x-m_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\dfrac{x-m_1}{\sigma_1}\right)\left(\dfrac{y-m_1}{\sigma_2}\right) + \left(\dfrac{y-m_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

với $-\infty < x < \infty$ và $-\infty < y < \infty$. Chứng minh rằng các hàm mật độ biên của X và Y chính là các hàm mật độ biên của các biến ngẫu nhiên Gauss tương ứng với kỳ vọng $m_1$và m_2, phương sai σ_1^2 và σ_2^2.

16. Hãy tìm hàm mật độ biên của đầu ra Y của kênh thông tin trong Ví dụ 4.14.

17. Gọi X là đầu vào của một kênh thông tin. X nhận giá trị ±1 với các khả năng như nhau. Giả sử đầu ra của kênh là Y = X + *N*, với *N* là biến ngẫu nhiên Laplace với hàm mật độ

$$f_N(z) = \frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha|z|} \qquad -\infty < z < \infty.$$

    a. Hãy tìm P[X = *k*, Y ≤ *y*] với *k* = ±1.

    b. Hãy tìm hàm mật độ biên của Y.

    c. Giả sử đã biết Y > 0. Điều nào chắc hơn, X = 1 hay X = –1?

18. Một nhà máy có *n* chiếc máy kiểu nào đó. Gọi *p* là xác suất để một máy hoạt động trong một ngày cho trước bất kỳ, và gọi *N* là tổng số máy hoạt động trong một ngày nào đó. Thời gian *T* cần thiết để sản xuất một sản phẩm là một biến ngẫu nhiên mũ với tốc độ $k\alpha$ nếu có *k* máy cùng hoạt động. Hãy tìm P[*N* = *k*, *T* ≤ *t*] và P[*T* ≤ *t*]. Tìm P[*T* ≤ *t*] khi $t \to \infty$ và lý giải cho kết quả.

PHẦN 4.3

Sự Độc lập của Hai Biến Ngẫu nhiên

19. Trong Bài tập 5, X và Y có phải độc lập hay không?

20. X và Y trong Bài tập 9 có độc lập hay không?

21. X và Y trong Bài tập 10 có độc lập hay không?

22. X và Y trong Bài tập 11 có độc lập hay không?

23. Cho X và Y là các biến ngẫu nhiên độc lập. Hãy tìm biểu diễn cho xác suất của các biến cố sau theo $F_X(x)$ và $F_Y(y)$:

    a. $\{a < X \le b\} \cap \{Y \le d\}$.

    b. $\{a \le X \le b\} \cap \{c \le Y \le d\}$.

    c. $\{|X| > a\} \cap \{c \le Y \le d\}$.

24. Cho X và Y là các biến ngẫu nhiên độc lập có phân phối đều trong đoạn [0, 1]. Hãy tìm các xác suất sau:

    a. $P[X^2 < 1/2, |Y - 1| < 1/2]$.

    b. $P[X/2 < 1, Y > 0]$.

    c. $P[XY < 1/2]$.

    d. $P[\min(X, Y) > 1/3]$.

25. Gọi X và Y là các biến ngẫu nhiên Gauss đồng thời đã được giới thiệu ở Bài tập 15.

a. Chứng minh rằng X và Y là độc lập nếu $\rho = 0$.

b. Giả sử $\rho = 0$, hãy tìm P[XY > 0].

26. Xét một dãy $n + m$ phép thử Bernoulli độc lập với xác suất thành công p cho mỗi lần thử. Gọi N là số lần thành công trong n phép thử đầu tiên và M là số thành công trong m phép thử còn lại.

    a. Tại sao N và M lại là các biến ngẫu nhiên độc lập?

    b. Hãy tìm hàm mật độ đồng thời của N và M và các hàm mật độ biên của N và của M.

    c. Tìm hàm mật độ của tổng số lần thành công trong $n + m$ phép thử.

27. a. Chứng minh rằng Hệ thức (4.20) kéo theo Hệ thức (4.21).

    b. Chứng minh rằng Hệ thức (4.19) kéo theo Hệ thức (4.20).

28. Hãy chứng tỏ trong các Hệ thức (4.20) và (4.21), cái này có thể rút ra được từ cái kia.

29. Gọi X và Y là các biến ngẫu nhiên lấy giá trị từ tập {–1, 0, 1}.

    a. Hãy tìm phép gán khối lượng xác suất đồng thời sao cho X và Y là độc lập, và hãy chứng minh khi đó X^2 và Y^2 cũng độc lập.

    b. Hãy tìm phép gán hàm xác suất sao cho X và Y là *không* độc lập, nhưng X^2 và Y^2 lại độc lập.

PHẦN *2.3

Tính Xác suất bằng các Phương pháp Tính

30. Hãy tìm các hàm xác suất có điều kiện của Y trong Bài tập 5 biết X = –1.

31. Tìm $f_Y(y \mid x)$ trong Bài tập 10.

32. Tìm $f_Y(y \mid x)$ trong Bài tập 11.

33. Tìm $f_Y(y \mid x)$ và $f_X(x \mid y)$ trong Bài tập 15.

34. Cho X = cos Θ và Y = sin Θ, với Θ là góc có phân phối đều trên khoảng $(0, 2\pi)$. Hãy tìm $f(y \mid x)$ và E[Y | X].

35. Một khách hàng vào một cửa hàng được nhân viên i phục vụ với xác suất p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Khoảng thời gian để nhân viên i đó phục vụ khách hàng là biến ngẫu nhiên mũ với tham số α_i.

    a. Hãy tìm hàm mật độ xác suất của T, là khoảng thời gian để phục vụ khách hàng.

    b. Tìm E[T] và VAR[T].

36. Một tin nhắn cần N đơn vị thời gian để được truyền đi, ở đây N là biến ngẫu nhiên hình học với hàm xác suất $p_j = (1 - a)a^{j-1}$, $j = 1, 2, \ldots$. Trong một khoảng đơn vị thời gian, có một tin nhắn đơn mới đến với xác suất p, và không có tin nhắn nào đến với xác suất $1 - p$.

Gọi K là số các tin nhắn mới đến trong quá trình truyền một tin nhắn đơn.

a. Tìm hàm xác suất của K. *Gợi ý*:

$$(1-\beta)^{-(k+1)} = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \beta^{n-k}.$$

b. Tìm E[K] và VAR[K], dùng kỳ vọng có điều kiện.

37. Số khuyết tật trong một chip VLSI là một biến ngẫu nhiên Poisson với tốc độ r. Tuy nhiên, r chính nó lại là một biến ngẫu nhiên Gamma với các tham số α và λ.

a. Hãy tìm hàm xác suất của N, là số lượng khuyết tật.

b. Sử dụng kỳ vọng có điều kiện, hãy tìm E[T] và VAR[T].

38. Đầu vào X của một kênh thông tin là một biến ngẫu nhiên Gauss kỳ vọng bằng 0 và phương sai là 1. Đầu ra Y của kênh là tổng hợp của X và tín hiệu ồn N, ở đây N là biến ngẫu nhiên Gauss với kỳ vọng bằng 0 và phương sai σ_N^2. X và N là các biến ngẫu nhiên độc lập.

a. Hãy tìm hàm mật độ xác suất có điều kiện của Y, biết X = x. Gợi ý: Y = $N + x$ là hàm tuyến tính theo N.

b. Tìm hàm mật độ xác suất đồng thời của X và Y.

c. Tìm hàm mật độ xác suất có điều kiện của đầu vào X nếu biết quan trắc được Y = y.

d. Giả sử khi Y = y chúng ta ước lượng được đầu vào X bởi giá trị $x_0 = g(y)$ mà làm cực đại $P[x_0 < X < x_0 + dx \mid Y = y]$. Tìm x_0. Điều gì sẽ xảy ra với $g(y)$ khi σ_N^2 tiến tới 0? Khi σ_N^2 tiến ra vô cùng? Tính $E[(X - g(Y))^2]$, kỳ vọng của bình phương sai số ước lượng.

PHẦN 4.5

Đa Biến Ngẫu nhiên

39. Cho X, Y, Z có hàm mật độ xác suất đồng thời

$$f_{X,Y,Z}(x, y, z) = k(x + y + z) \qquad x, y, z \in [0, 1].$$

a. Tìm k.

b. Tìm $f_Z(z \mid x, y)$.

40. Một điểm (X, Y, Z) được chọn ngẫu nhiên trong hình cầu đơn vị.

a. Hãy tìm hàm mật độ đồng thời biên của X và Y.

b. Tìm hàm mật độ biên của X.

c Cho trước Z, hãy tìm hàm mật độ đồng thời có điều kiện của X và Y.

d X, Y và Z có độc lập hay không?

41. Chứng minh rằng $f_{X,Y,Z}(x, y, z) = f_Z(z \mid x, y) f_X(y \mid x) f_X(x)$.

42. Cho U_1, U_2 và U_3 là những biến ngẫu nhiên độc lập và đặt X = U_1, Y = $U_1 + U_2$, và Z = $U_1 + U_2 + U_3$.

   a. Sử dụng kết quả của Bài tập 11, hãy tìm hàm mật độ xác suất đồng thời của X, Y, và Z.

   b. Giả sử U_i là các biến ngẫu nhiên độc lập phân phối đều trên khoảng [0, 1]. Tìm hàm mật độ xác suất đồng thời biên của Y và Z. Tìm hàm mật độ biên của Z.

   c. Giả sử U_i là các biến ngẫu nhiên độc lập phân phối Gauss với kỳ vọng 0 và phương sai 1. Tìm hàm mật độ xác suất đồng thời biên của Y và Z. Tìm hàm mật độ biên của Z.

43. Cho X_1 được phân phối đều trên [0, 1], X_2 có phân phối đều trên [0, X_1], X_3 có phân phối đều trên [0, X_2], và cứ tiếp tục vậy.

   a. Tìm hàm mật độ xác suất đồng thời của (X_1, X_2, X_3). *Gợi ý*: Sử dụng các hàm mật độ xác suất có điều kiện.

   b. Tìm hàm mật độ biên của X_k với $k = 1, 2, 3$.

   c. Tìm hàm mật độ xác suất có điều kiện của X_3, cho trước X = x.

   d. Lặp lại các câu a, b, c cho (X_1, …, X_n).

44. Một thí nghiệm ngẫu nhiên có bốn kết cục khả dĩ, với các xác suất lần lượt là p_1, p_2, p_3, và $1 - p_1 - p_2 - p_3$. Giả sử thí nghiệm được lặp lại n lần độc lập với nhau và đặt X_k là số lần kết cục k xảy ra. Hàm xác suất của (X_1, X_2, X_3) được cho như sau

$$p(k_1, k_2, k_3) = \frac{n!\, p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3} (1 - p_1 - p_2 - p_3)^{n - k_1 - k_2 - k_3}}{k_1!\, k_2!\, k_3!(n - k_1 - k_2 - k_3)!},$$

   với $k_j \geq 0$ và $k_1 + k_2 + k_3 \leq n$.

   a. Hãy tìm hàm xác suất biên của (X_1, X_2). *Gợi ý*: sử dụng Định lý nhị thức, Hệ thức (2.36).

   b. Tìm hàm xác suất biên của X_1.

   c. Tìm hàm xác suất đồng thời có điều kiện của (X_2, X_3) nếu cho trước $X_1 = m$, ở đây m là một số nguyên không âm nhỏ hơn hoặc bằng n.

45. Số N các lần khách hàng đến một điểm phục vụ là biến ngẫu nhiên Poisson với trung bình α khách hàng trong một giây. Có bốn kiểu

khách hàng. Gọi X_k là số khách hàng kiểu k đến. Giả sử

$$P[X_1 = k_1, X_2 = k_2, X_3 = k_3 \mid N = n] \quad = \quad p(k_1, k_2, k_3),$$

p là hàm xác suất được cho trong bài tập trước.

a. Hãy tìm hàm xác suất đồng thời của (N, X_1, X_2, X_3).

b. Hãy tìm hàm xác suất biên của (X_1, X_2, X_3).

46. Một thí nghiệm ngẫu nhiên có bốn kết cục khả dĩ. Giả sử thí nghiệm được lặp đi lặp lại n lần độc lập với nhau và gọi X_k là số lần thí nghiệm k xảy ra. Hàm xác suất đồng thời của (X_1, X_2, X_3) được cho như sau

$$p(k_1, k_2, k_3) = \frac{n!\,3!}{(n+3)!} = \binom{n+3}{3}^{-1},$$

ở đây $k_j \geq 0$ và $k_1 + k_2 + k_3 \leq n$.

a. Hãy tìm hàm xác suất đồng thời biên của (X_1, X_2).

b. Hãy tìm hàm xác suất biên của X_1.

c. Hãy tìm hàm xác suất đồng thời có điều kiện của (X_2, X_3) khi biết trước $X_1 = m$, ở đây m là số nguyên không âm nhỏ hơn hoặc bằng n.

PHẦN 4.6
Các Hàm của Một vài Biến Ngẫu nhiên

47. Thời gian sống của một thiết bị là biến ngẫu nhiên Rayleigh. Gọi T là thời gian tính đến lúc xuất hiện lỗi đầu tiên trong lô n thiết bị loại đó. Hãy tìm hàm phân phối của T. Tìm kỳ vọng của T.

48. Cho X và Y là các biến ngẫu nhiên mũ độc lập. Hãy tìm hàm mật độ của $Z = |X - Y|$.

49. Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên độc lập, phân phối đều trên khoảng $[-1, 1]$. Hãy tìm hàm mật độ của $Z = XY$.

50. Cho X và Y là các biến ngẫu nhiên Gauss độc lập với kỳ vọng 0 và phương sai 1. Chứng minh rằng X/Y là biến ngẫu nhiên Cauchy.

51. Hai biến ngẫu nhiên X và Y có hàm mật độ đồng thời

$$f_{X,Y}(x, y) = 2e^{-(x+y)} 0 \leq y \leq x < \infty.$$

Hãy tìm hàm mật độ của $Z = X + Y$. *Chú ý*: X và Y không độc lập.

52. Cho X và Y là các biến ngẫu nhiên Rayleigh độc lập. Hãy tìm hàm mật độ xác suất của $Z = X/Y$.

53. a. Hãy tìm hàm mật độ xác suất đồng thời của

$U = X_1$,

$V = X_1 + X_2$, và

$W = X_1 + X_2 + X_3$.

b. Tìm hàm mật độ đồng thời của (U, V, W) nếu X_i là các biến ngẫu nhiên Gauss độc lập, với kỳ vọng 0 và phương sai 1.

54. Hãy tìm hàm mật độ xác suất của giá trị trung bình và phương sai mẫu sau

$$M = \frac{X_1 + X_2}{2}$$

$$V = \frac{(X_1 - M)^2 + (X_2 - M)^2}{2}$$

tính theo hàm mật độ xác suất đồng thời của X_1 và X_2. Tìm hàm mật độ này khi X_1 và X_2 là các biến ngẫu nhiên mũ độc lập với cùng tham số.

55. a. Sử dụng phương pháp biến bổ trợ, hãy tìm hàm mật độ xác suất đồng thời của

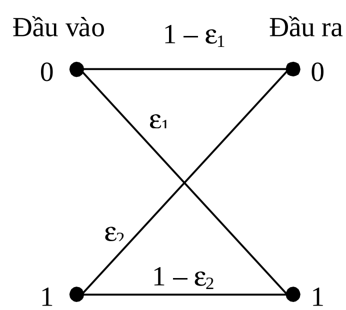
$$Z = \frac{X}{X + Y}.$$

b. Tìm hàm mật độ đồng thời của Z nếu X và Y là các biến ngẫu nhiên mũ độc lập, với cùng tham số là α.

56. Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên có phân phối Gauss đồng thời với giá trị trung bình 0 và phương sai 1, cùng hệ số tương quan ρ. Tìm hàm mật độ xác suất đồng thời của $U = X^2$ và $V = Y^4$.

57. Hãy tìm hàm mật độ xác suất của $Z = X_1X_2X_3$ với X_i là các biến ngẫu nhiên độc lập có phân phối đều trên [0, 1].

HÌNH P2.2



58. Cho X, Y và Z là các biến ngẫu nhiên Gauss độc lập với kỳ vọng 0 và phương sai 1. Tìm hàm mật độ xác suất của

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

PHẦN 4.7

Giá trị Kỳ vọng của Các Hàm của các Biến Ngẫu nhiên

59. a. Hãy tìm $E[(X + Y)^2]$.

 b. Hãy tìm phương sai của X + Y.

 c. Trong điều kiện nào thì phương sai của tổng bằng tổng các phương sai riêng biệt?

60. Hãy tìm $E[|X – Y|]$ nếu X và Y là các biến ngẫu nhiên mũ độc lập với cùng tham số $\alpha = 1$.

61. Hãy tìm $E[X^2Y]$ với X là biến ngẫu nhiên Gauss có kỳ vọng 0 và phương sai 1, còn Y là biến ngẫu nhiên phân phối đều trên khoảng [–1, 3], và X và Y độc lập.

62. Hãy tìm $E[M]$ và $E[V]$ trong Bài tập 54.

63. Hãy tính E[Z] trong Bài tập 57 theo hai cách:

 a. lấy tích phân $f_Z(z)$.

 b. lấy tích phân hàm mật độ xác suất đồng thời của (X_1, X_2, X_3).

64. Với các biến ngẫu nhiên rời rạc X và Y trong Bài tập 5, hãy tìm hệ số tương quan và hiệp phương sai (covariance), và chỉ rõ ra khi nào thì các biến ngẫu nhiên là độc lập, khi nào trực giao, hay không tương quan.

65. Lặp lại Bài tập 64 cho các biến ngẫu nhiên liên tục X và Y trong Bài tập 10.

66. Lặp lại Bài tập 64 cho X và Y trong Bài tập 11.

67. Chứng minh rằng hệ số tương quan bằng ±1 nếu $Y = aX + b$.

68. Hãy hoàn thành nốt các tính toán đã làm ở Ví dụ 4.43.

69. Hãy tìm hệ số tương quan giữa đầu vào X và đầu ra Y của kênh thông tin ồn đã được bàn luận tại Bài tập 17.

70. Cho $V = aX + bY + c$, ở đây X và Y là các biến ngẫu nhiên.

 a. Tìm hàm đặc trưng của V theo hàm đặc trưng đồng thời của X và Y.

 b. Tìm hàm đặc trưng của V nếu X và Y là các biến ngẫu nhiên đã được thảo luận ở Ví dụ 4.44. Tìm hàm mật độ xác suất của V.

71. a. Tìm hàm đặc trưng đồng thời của các biến ngẫu nhiên Gauss đã được giới thiệu ở Ví dụ 4.36. *Gợi ý*: Xét X và Y như là dạng biến đổi của các biến ngẫu nhiên Gauss độc lập V và W.

 b. Tìm $E[X^2Y]$.

 c. Tìm hàm đặc trưng đồng thời của $X' = X + a$ và $Y' = Y + b$.

72. Cho $X = aU + bV$ và $Y = cU + dV$, với $|ad - bc| \neq 0$.

 a. Tìm hàm đặc trưng đồng thời của X và Y theo hàm đặc trưng đồng thời của U và V.

b. Tìm dạng biểu diễn cho E[XY] theo các moment đồng thời của U và V.

73. Cho X và Y là các biến ngẫu nhiên lấy giá trị nguyên không âm. *Hàm sinh xác suất đồng thời* được định nghĩa như sau

$$G_{X,Y}(z_1, z_2) = E[z_1^X z_2^Y] = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} z_1^j z_2^k P[X = j, Y = k].$$

a. Hãy tìm hàm sinh xác suất đồng thời cho hai biến ngẫu nhiên Poisson độc lập có tham số α_1 và α_2.

b. Hãy tìm hàm sinh xác suất đồng thời cho hai biến ngẫu nhiên nhị thức với tham số n và p, và m và p.

74. Giả sử X và Y có hàm sinh xác suất đồng thời

$$G_{X,Y}(z_1, z_2) = e^{\alpha_1(z_1 - 1) + \alpha_2(z_2 - 1) + \beta(z_1 z_2 - 1)}.$$

a. Hãy sử dụng các hàm sinh xác suất biên để chứng tỏ rằng X và Y là các biến ngẫu nhiên Poisson.

b. Hãy tìm hàm sinh xác suất của Z = X + Y. Z có phải là một biến ngẫu nhiên Poisson hay không?

75. X và Y là các biến ngẫu nhiên tam thức có hàm xác suất đồng thời

$$P[X = j, Y = k] = \frac{n!}{j!\,k!\,(n - j - k)!} p_1^j p_2^k (1 - p_1 - p_2)^{n-j-k},$$

$$\text{với } j \geq 0,\ k \geq 0,\ j + k \leq n.$$

a. Hãy tìm hàm sinh xác suất đồng thời của X và Y.

b. Hãy tìm hệ số tương quan và covariance của X và Y.