GIẢI TÍCH 1

PGS.TS. TRẦN THU HÀ

Viện Cơ học

ÁNH XẠ

- 1.5.1 Mở đầu(Tr. 20)

Cho 2 tập E, F. Quy luật f liên hệ giữa phần tử của E và của F.

VD 1.5.1: E=F=R (R là nguyên).

$$x \in E \subset R; y \in F \subset R \Rightarrow y \overset{f}{=} x^3$$

1.5.2: $x \in R; y \in R \Rightarrow y \overset{f}{=} x^2$

1.5.3: $E \subset R; F \subset Z$ $x \in R; y \in Z$ $y \overset{f}{=} [x]$ (phần nguyên).

1.5.4:

$E = \{x | x \in R : -1 \leq x \leq 1\}$

$F = R$ liên hệ với nhau bởi: $x = \sin y =$ cung có sin là x?

$x \in E, y \in R$

Ví dụ 1.5.5:

E là tập các điểm trong không gian kí hiệu là K. F là tập các điểm trong mặt phẳng xác định Π. Điểm M$\in$ K liên hệ với điểm P$\in$ Π bởi quy luật hình chiếu vuông góc của điểm M lên mặt phẳng Π.

1.5.2 Định nghĩa ánh xạ

ĐN 1.5.1: Ánh xạ từ tập E tới tập F là một quy luật f liên hệ giữa E và F , sao cho khi nó tác động vào một phần tử x bất kỳ của E sẽ tạo ra 1 và chỉ 1 phần tử của F (không có 1 x ra 2 y, 2 x có thể ra 1 y).- xem lại các thí dụ từ 1.5.1 tới 1.5.3: là ánh xạ 1x $\rightarrow$ 1y.

Ví dụ 1.5.4 không phải là ánh xạ từ E tới R vì mỗi x $\in$ E tạo ra vô số y $\in$ R, được xác định bởi y= cung có sin là x. Chẳng hạn với $x = \frac{1}{2} \in E$, thì các cung : $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ và $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$. $k \in Z$ đều có sin là $\frac{1}{2}$.

5) Quy luật: ở VD 1.5.5 là 1 ánh xạ từ K tới Π. Vì mỗi điểm M $\in$ K chiếu vuông góc lên mặt phẳng Π cho 1 và chỉ 1 điểm P $\in$ Π.

1.5.3 Kí hiệu ánh xạ:

$$f: E \rightarrow F \text{ hay là } E \xrightarrow{f} F$$

Trong đó E là tập nguồn, F là tập đích.

$y \in F$ được tạo ra bởi phần tử $x \in E$ bởi quy luật f gọi là ảnh của x, x gọi là nghịch ảnh hay tạo ảnh của y.

$$y = f(x)$$

$x \mapsto y$ hay x tạo ra y.

f(x): f của x hay f tại x.

Mỗi phần tử của E chỉ có 1 và chỉ có 1 ảnh. (Ngược lại chưa chắc đã đúng. Mỗi $y \in F$ chưa chắc đã có nghịch ảnh) Ví dụ f(x) = 0 (y= 0) tìm x thực f(x)=0 chưa chắc đã có nghiệm thực.

ĐN 1.5.2 Tập tạo bởi các ảnh của tất cả các phần tử $x \in E$ gọi là ảnh của E (qua f) viết là f(E).

$$f(E) := \{y \mid y = f(x), x \in E\}$$

hay $f(E) := \{y \mid \exists x \in E, y \in = f(x)\}$

Ta có $f(E) \subset F$

ĐN 1.5.3 Nếu A là 1 tập con của E: $A \subset E$, thì tập $f(A) := \{y \mid y = f(x), x \in A\}$ gọi là ảnh của A (qua f).

Nếu $B \subset F$ thì tập $f^{-1}(B) = \{x \mid x \in E, f(x) = y \in B\}$ gọi là nghịch ảnh của B trong ánh xạ B.

1.5.4 Đơn ánh: $E \xrightarrow{f} F$

ĐN 1.5.4 Ánh xạ f: $E \to F$ gọi là 1 đơn ánh nếu

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \quad (1.1.1)$$

Nếu pt $f(x) = y; y \in F$ nếu pt với ẩn x này không thể có quá 1 nghiệm với mọi y của F thì f: đơn ánh.

1. $x^3 = y; y \in R; x = \sqrt[3]{y}$ là ánh xạ đơn ánh.
2. $x^2 = y; y \in R : x = \pm\sqrt{y}$ nếu y>0, ánh xạ này không đơn ánh.
3. $[x] = y; y \in N$ có vô số nghiệm, ánh xạ naỳ không đơn ánh.
4. Không là ánh xạ.
5. Một điểm P$\in$ Π có vô số diểm M$\in$ K chiếu vuông góc lên mặt phẳng Π thành P. Điểm M nằm trên đường thẳng vuông góc với Π tại P. Ánh xạ này không là đơn ánh.

1.5.5 Toàn ánh: $f: E \to F$

f(E) là tập con của F: $f(E) \subset F$, nếu : f(E) = F thì f được gọi là toàn ánh.

ĐN 1.5.6:Ánh xạ f: $E \to F$ gọi là 1 toàn ánh nếu f(E) =F (1.1.2)

F(x)=y; $y \in F$

Nếu pt này có nghiệm với mọi $y \in F$ thì f là là một toàn ánh.

VD: 1.5.1: $x^3 = y; y \in R$ | luôn có nghiệm với $\forall y \in R$, ánh xạ này là 1 toàn ánh.

1.5.2 : $x^2 = y; y \in R$ chỉ có nghiệm khi $y \geq 0$, ánh xạ này không toàn ánh.

1.5.3 : $[x] = y; y \in N$ Bao giờ cũng có nghiệm $\forall y \in N$, ánh xạ này là toàn ánh.

4) 1.5.4 không là ánh xạ nên ko phải là toàn ánh.

5) 1.5.5 $f(K) = \Pi$ ánh xa này là toàn ánh.

1.5.6 Song ánh:

ĐN 1.5.6: Ánh xạ f: $E \to F$ là 1 song ánh nếu nó vừa là đơn ánh, vừa là toàn ánh.

1. 1.5.1 song ánh.
2. 1.5.2 không song ánh.
3. 1.5.3 ko la song ánh.
4. 1.5.4 ko phải là ánh xạ.
5. 1.5.5 ko phải là song ánh.

1.5.7 Ánh xạ ngược của song ánh : Ứng với mỗi $y \in F$,có1 và chỉ 1 $x \in E$ để $y \in f(x)$ (có 1 vì là toàn ánh từ E lên F, và chỉ có 1 vì f là đơn ánh từ E tới F.

ĐL và ĐN 1.5.7: song ánh f: $E \to F$ tạo ra 1 ánh xạ từ F tới E, ánh xạ này gọi là ánh xạ ngược của ánh xạ F và ký hiệu là f^{-1}: $f^{-1}: F \to E$

Với đặc điểm nếu f(x) = y, thì $f^{-1}(y) = x \quad (x \in E; y \in F)$

Nếu $f^{-1}(y) = x$ thì f(x) = y $(x \in E; y \in F)$

Rõ ràng f^{-1}: là song ánh.

Đồng thời với song ánh f: $E \to F$ có tương ứng 1- 2

VD 1.5.10: song ánh f từ $R \to R$

$$y \in R \mapsto y = x^3 \in R$$

có ánh xạ ngược: f^{-1}: từ R tới R xác định bởi $y \in R \mapsto x = \sqrt[3]{y} \in R$

1.5.8 Hợp(tích) của 2 ánh xạ

Cho 3 tập hợp E,F,G và 2 ánh xạ: $f : E \to F ; g : F \to G$

Mỗi $x \in E$ tạo ra bởi f thì 1 và chỉ 1 $y \in F$: $f(x) = y$

Cũng như vậy $y \in F \xrightarrow{g} Z \in G$: g(Y) = Z

Do vậy $x \in E \xrightarrow{f} y \in F \xrightarrow{g} z \in G$

Vậy có một ánh xạ từ E tới G xác định như sau: $x \in E \mapsto z = g[f(x)] \in G$

ĐN 1.5.8 Ánh xạ này gọi là hợp của f và g (hay tích của f và g), kí hiệu

$g \circ f$: $g \circ f : E \to G$

xác đinh: $x \in E \mapsto (g \circ f)(x) = g[f(x)] \in G$

ví dụ: cho E=F=G=R

$$x \in R \to y = f(x) = x^2 \in R$$

$$y \in R \mapsto Z = g(y) = y - 5 \in R$$

Thì ánh xạ hợp $g \circ f : R \to R$

$$x \in R \mapsto (g \circ f)(x) = g[f(x)] = x^2 - 5 \in R$$

- Hợp của 2 đơn ánh là 1 đơn ánh.
- Hợp của 2 toàn ánh là 1 toàn ánh.

- Hợp của 2 song ánh là 1 song ánh.

Cho 2 tập E,F và song ánh $f : E \to F$. Tồn tại ánh xạ ngược : $f^{-1}: F \to E$

Có $x \in E \mapsto \left(f^{-1} \circ f\right)(x) = g[f(x)] = f^{-1}[f(x)] = f^{-1}(y) = x$

$y \in F \mapsto \left(f \circ f^{-1}\right)(y) = f\left[f^{-1}(y)\right] = f(x) = y$

$f^{-1} \circ f = I_E, f \circ f^{-1} = I_F$

I_E ánh xạ đồng nhất trong E

I_F ánh xạ đồng nhất trong F

$\forall x \in E : I_E(x) = x$

$\forall y \in F : I_F(y) = y$

1.2 Tập các sô thực (Tr.8, Q.2)

Tập tự nhiên N: = $\{0,1,2,...n,... \}$

Tập các số nguyên $Z = \{0,\pm1,\pm2,.....\pm n,...\}$

Tập các số hữu tỷ $Q = \left\{x; x = \frac{m}{n},, n \neq 0, m, n \in Z\right\}$ m,n chỉ có ước số chung là ±1.

$N \in Z \in Q$;Z~N, Q~N tập đếm được.

Số Vô tỷ: $\sqrt{2}$ là số vô tỷ.Vì g/s ngược lại

$\sqrt{2} = \frac{m}{n}, m, n \in N$ Do đó m:2 m=2p

$2n^2 = m^2$

$n^2 = 2p^2$ nên n:2

Như vậy các ƯSCLN của m,n là 2. Điều này trái với gt ƯSCLN của m,n là 1. Bởi vậy $\sqrt{2}$ là số vô tỷ.

Với n là nguyên dương không chính phương, thì $\sqrt{n}$ là số vô tỷ. $(\sqrt{2},, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}....)$

1.2.1 Số thập phân:

$\frac{1}{3} = 0,333; \frac{1}{4} = 0.25$

$\frac{1}{4}$ là số thập phân hữu hạn. $\frac{1}{3}$ là số thập phân vô hạn tuần hoàn.

Người ta CMR:- Bất kì một số hữu tỷ nào cũng có thể biểu diễn dưới dạng 1 số thập phân hữu hạn hay số thập phân vô hạn tuần hoàn.

- Bất kì một số vô tỷ nào cũng có thể biểu diễn dưới dạng số thập phân vô hạn không tuần hoàn.

N là Số tự nhiên. Z là số nguyên. Q là tập hợp các số hữu tỷ đếm được. R gồm các số hữu tỷ và vô tỷ.R là không đếm được. R liên tục.

$N \in Z \in Q \in R$

1.2.2 Trường sô thực

Trong R:

1. Phép cộng, nhân có tính giao hoán. $a+b=b+a$, $a.b=b.a$ $\quad (a,b)\in R^2$

2. Phép cộng, nhân có tính kết hợp. $(a+b)+c=a+(b+c)$, $(a.b).c=a.(b.c)$ $\quad \forall(a,b,c)\in R^3$

3. Tính phân bố: $a.(b+c)=a.b+a.c$, $(a+b)c=a.c+b.c$ $\quad \forall(a,b,c)\in R^3$

4. Phần tử trung hòa của phép cộng: $a+0=a \qquad \forall a \in R$

5. Phần tử trung hòa của phép nhân: $a.1=a$

6. Mọi phần tử $a \in R$ đều có phần tử đối $(-a)$: $a+(-a)=0$

7. $\forall a \in R-\{0\}$ đều có phần tử nghịch đảo kí hiệu là a^{-1}: $a.a^{-1}=1$

Tiên đề cận trên đúng (tính đầy của R).

Ta biết giữa 2 số hữu tỷ a và b, tồn tại một số hữu tỷ thứ 3 là $\frac{a+b}{2}$. Do đó giữa 2 số hữu tỷ bất kì ,tồn tại vô số hữu tỷ khác.

ĐN 1: Số thực x được gọi là cận trên của tập hợp $A \in R$, nếu $\forall a \in A; a \leq x$ khi đó tập A bị chặn trên, x gọi là cận dưới của A, nếu $\forall a \in A; a \geq x$,Tập hợp A bị chặn dưới . Tập hợp A gọi là bị chặn , nếu nó vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới.

ĐN 2: Cận trên bé nhất của tập A, nếu có được gọi là cận trên đúng của tập A, kí hiệu là: $\sup A$. Cận dưới lớn nhất của A nếu có được gọi là cận dưới đúng của A. kí hiệu là $\inf A$. $\sup A$ và $\inf A$ có thể thuộc A, nhưng cũng có thể không thuộc A. Nếu $\sup A \in A$ thì $\sup A = \max A \in A$ là phần tử lớn nhất. Nếu $\inf A \in A$ thì $\inf A = \min A \in A$ là phần tử bé nhất của A

- Tập $A=\{x\in Q; x^2<2\}$, $1\in A$ nên $A\neq\{\Phi\}$ nhưng A không có cận trên đúngQ do $x<\sqrt{2}$; $\sup A=\sqrt{2}$, mà $\sqrt{2}\bar{\in} Q$. Q là số hữu tỉ đếm được. Do đó Q là trường sắp thứ tự không đầy.

- Tiên đề cận trên đúng: Mọi tập hợp $A \in R$ không rỗng, bị chặn trên đều có cận trên đúng $\in R$.
- Tiên đề cận dưới đúng: Mọi tập hợp $A \in R$ không rỗng, bị chặn dưới đều có cận dưới đúng $\in R$.

1.2.3 Trị số tuyệt đối của 1 số thực:

$x \in R$ TSTD

(1.1) $$|x| = \begin{cases} x; x \geq 0 \\ -x; x \leq 0 \end{cases}$$

T/C:

(1.2) $|a.b| = |a|.|b|$

(1.3) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}; b \neq 0$

(1.4) $|a + B| \leq |a| + |b|$

$|a - b| \geq \|a| - |b\|$

ĐL 1.1 (Archimede) Với mọi $\varepsilon > 0; \forall x; \exists k$ nguyên dương sao cho: $k\varepsilon > x$.

CM : g/s ngược lại $\forall n \in N^* : n\varepsilon \leq x$ khi đó tập $E = \{n\varepsilon . n \in N^*\}$ là tập trong R không rỗng, bị chặn trên vì $n\varepsilon \leq x$ theo tiên đề cận trên đúng $\exists b = \sup E$. Vì

$b - \varepsilon < b; b - \varepsilon < \sup E$, nên $\exists n_0 = \sup E \in N^* : n_0\varepsilon > b - \varepsilon$

Hay là $(n_0 + 1)\varepsilon > b$. Mâu thuẫn với $b = \sup E$. đ/l được cm.

Hệ quả: $\forall x \in R; \exists k \in Z$ $\quad x = 2.1; \rightarrow k = 2; k+1 = 3$

$k \le x \le k+1$

K: là phần nguyên của x. Kí hiệu E(x).

ĐL 1.2: Giữa 2 số thực bất kỳ, luôn tồn tại 1 số hữu tỷ.

Cm: c,d số thực c<d. Vì d-c >0 nên theo đ/l 1.1: sẽ $\exists q \in N^*$ sao cho: q(d-c)>1 hay là :

(1.9) cq+1 < dq .Theo hệ quả đl 1.1: $\exists p \in Z$

(1.10) $p \le cq+1 < p+1$

Từ (1.9);(1.10) $\rightarrow p-1 \le cq < p \le cq+1 < dq$

Do đó: cq<p<dq $\rightarrow c < \frac{p}{q} < d; \frac{p}{q} \in Q$

Hệ quả : Giữa 2 số thực bất kỳ, có vô số số hữu tỉ.

ĐL 1.1 (Archimede) Với mọi $\varepsilon > 0; \forall x; \exists k$ nguyên dương sao cho: $k\varepsilon > x$.

1.2.6 Tập sô thực mở rộng:

Thêm vào tập R: $-\infty, +\infty$

$$\bar{R} = R \cup \{-\infty, +\infty\}$$

1.11
$$\begin{cases} \forall x \in R^{*}; x + (+\infty) = +\infty \\ \forall x \in R_{+}; x \circ (+\infty) = (+\infty) \circ x = +\infty \\ x \circ (-\infty) = (-\infty) \circ x = -\infty \\ \forall x \in R_{-}; x \circ (+\infty) = (+\infty) \circ x = -\infty \\ x \circ (-\infty) = (-\infty) \circ x = +\infty \\ (+\infty) \circ (+\infty) = (-\infty) \circ (-\infty) = +\infty \\ \forall x \in R(+\infty); -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

$\bar{R}$ được gọi là tập số thực mở rộng hay đường thẳng thực mở rộng.

ĐL 1.3: Mọi tập hợp A không rỗng của $\bar{R}$ (supA có thể $= +\infty$) và cận dưới đúng(inf A có thể $= -\infty$)

1.3 Dãy số thực:

1.3,1 Các định nghĩa:

ĐN 1: Một dãy số thực (nói ngắn gọn là dãy số) là ánh xạ từ N^* vào R: $N^* \subset n \mapsto x_n \in R$?

$$\text{VD:} \quad x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

ĐN 2: Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là hội tụ, nếu $\exists a \in R$ sao cho với $\forall \varepsilon > 0$, tìm được $n_0 \in N^*$ sao cho $\forall n \geq n_0$ có $|x_n - a| < \varepsilon$.

$\{x_n\}$ hội tụ đến a : $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$ hay $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

$\{x_n\} = \dfrac{1}{n}$ $\quad x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ (hội tụ)

Nếu $\{x_n\}$ không hội tụ, người ta nói nó phân kì: $\{x_n\} = n^2$

1.3.2 Các t/c của dãy số hội tụ (hs tự cm)

ĐL 1.1: 1-Nếu dãy số $\{x_n\}$ hội tụ thì giới hạn của nó là duy nhất.

2- Nếu dãy số $\{x_n\}$ hội tụ thì nó giới hạn nội, tức là tồn tại một khoảng(b,c), chứa mọi phần tử x_n .

CM: giả sử: $\lim_{n\to\infty} x_n = a; \lim_{n\to\infty} x_n = b; \varepsilon$ là 1 số dương bất kỳ: $\exists n_1 \in N^* n_2 \in N^*$ sao cho:

$$n \geq n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$n \geq n_2 \Rightarrow (|x_n - b|) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$n_0 = \max(n_1, n_2)$:

$$|a-b| = |a - x_n + (x_n - b)| \leq |a - x_n| + |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow |a-b| < \varepsilon$$

Vì $\varepsilon > 0$ bất kỳ, do đó: $|a-b| = 0 \to a = b$

2- Nếu dãy số $\{x_n\}$ hội tụ thì nó giới hạn nội, tức là tồn tại một khoảng(b,c), chứa mọi phần tử x_n .

2) Giả sử: $\lim x_n = a$, $\exists n_0 \in N^*, n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - a| < 1$ nghĩa là $a - 1 < x_n < a + 1$. Gọi b,c lần lượt là bé nhất và lớn nhất của tập $\{a-1, x_1, ..., x_{n_0 - 1}, a+1\}$ do vậy $b \leq x_n \leq c; \forall n$ do đó $\{x_n\}$ giới nội.

ĐL 1.5: Cho 2 dãy số hội tụ: $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x; \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Khi đó:

1. $\lim\limits_{x_n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(Cx_n) = C.x; \lim\limits_{n\to\infty}(C + x_n) = C + x$. C là hằng số.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n.y_n) = xy$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{y_n} = \frac{1}{y} \quad y_n \neq 0; y \neq 0$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{x}{y}$

CM: Vì $x_n \to x; y_n \to y; \varepsilon > 0; \exists n_1 \in N^*, n_2 \in N^*$ sao cho $n \ge n_1 \Rightarrow |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}; n > n_2 \Rightarrow |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$

Đặt $n_0 = \max(n_1, n_2)$: $\forall n \ge n_0$

$|(x_n + y_n) - (x + y)| \le |x_n - x| + |y_n - y| < \varepsilon$ Vậy $x_n + y_n \to x + y$

2) tự cm.

3) $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ hội tụ nên giới nội (đl 1.4) $\Rightarrow \exists M : |x_n| \le M, |y_n| \le M \forall n$, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N^*$ sao cho với $n \ge n_0$:

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2M}; |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

Vậy với $n \ge n_0$:

$$|x_n y_n - xy| = |(x_n - x) y_n + x(y_n - y)| \le |(x_n - x) y_n| + |x(y_n - y)|$$
$$\le \frac{\varepsilon}{2M} M + M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

4)Vì $y_n \to y \neq 0$ nên $|y_n| \to |y > 0|$ vậy tìm được $n_1 \in N^*; n \geq n_1 \Rightarrow |y_n| > \frac{1}{2}|y|$. Vậy với $n \geq n_1$:

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|y_n - y|}{|y_n||y|} \leq \frac{2|y_n - y|}{|y|^2}$$

Vì $y_n \to y$ nên với $\varepsilon > 0, \exists n_2 \in N^* : n \geq n_2 \Rightarrow |y_n - y| < \frac{\varepsilon y^2}{2}$

Với $n_0 = \max(n_1, n_2)$: $\forall n \geq n_0$:

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}\right| \leq \frac{2}{y^2}\frac{\varepsilon y^2}{2} = \varepsilon$$ Vậy $$\frac{1}{y_n} \to \frac{1}{y}$$

ĐL 1.6: (1) Cho 2 dãy số : $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ nếu $x_n \geq y_n, \forall n : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ thì : $a \geq b$

(2) Cho 3 dãy số : $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ nếu $x_n \leq y_n \leq z_n, \forall n : nêu \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

CM:

(1) Giả sử: a<b. $\exists r : a < r < b$ Vì $x_{n\to a}; \exists n_1 \in N^* : n \geq n_1 : x_n < r$. Tương tự: $\exists n_r \in N^* : n \geq n_2 \Rightarrow y_n > r.$ $n_0 = \max(n_1, n_2) : n \geq n_0 \rightarrow x_n < r < y_n$

. Như vậy trái với g/t của (1) là $x_n \geq y_n$

(2) Cho 3 dãy số : $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ nếu $x_n \le y_n \le z_n, \forall n$: nêu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

(2) Vì $x_n \to a, \forall \varepsilon > 0 \exists n_1 \in N^*$ sao cho: $n \ge n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon, \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Tương tự: $z_n \to a : \exists n_2 \in N^0 : n \ge n_2 \Rightarrow a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$ Đặt $n_0 = \max(n_1, n_2)$, với $n \ge n_0 : |y_n - a| < \varepsilon \to y_n \to a$.

DÃY ĐƠN ĐIỆU

ĐN: $\{x_n\}$ tăng nếu $x_n \le x_{n+1}, \forall n$, giảm nếu $x_n \ge x_{n+1}, \forall n$. Dãy tăng hay giảm là dãy đơn điệu. $\{x_n\}$ bị chặn trên nếu tồn tại c thực : $x_n \le c$, bị chặn dưới nếu $\exists d$ thực: $x_n \ge d, \forall n$.

Ví dụ: $\{x_n\}$: $x_n = \dfrac{1}{n}$ là dãy giảm bị chặn dưới bởi số 0, bị chặn trên bởi số 1: $1 \ge \dfrac{1}{n} \ge 0$

$\{x_n\}$: $x_n = (-1)^n$ không đơn điệu: $1 > x_n \ge -1$

1) $\{x_n\}$: $\quad x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = 1+\dfrac{1}{n}C_n^1 + \dfrac{1}{n^2}C_n^2 + \ldots + \dfrac{1}{n^n}C_n^n = 1 + n\dfrac{1}{n} + \dfrac{n(n-1)}{1.2}\dfrac{1}{n^2} + \ldots + \dfrac{n(n-1)}{1.2\ldots n}\dfrac{1}{n^n}$

$$\left\{C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}\right\}$$

$$\{x_n\} = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

$\{x_n\}$ là dãy tăng. Đặt $y_n = 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}$

$x_n < y_n$

vì $\frac{1}{3!} = \frac{1}{2.3} < \frac{1}{2.2} = \frac{1}{2^2}$; $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$

$$y_n < 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}} = 1+\frac{\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 1+2.\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = 1+2, n\to\infty : y_n < 3$$

ĐL 1.7: 1) Nếu $\{x_n\}$ tăng và bị chặn trên thì nó hội tụ.

2) Nếu $\{x_n\}$ giảm và bị chặn dưới thì nó hội tụ.

CM: $\{x_n\}$ bị chặn trên thì $\exists l = \sup\left\{x_n, n \in N^*\right\}, \forall \varepsilon > 0, l - \varepsilon$ không là cận trên đúng của tập, do đó

$$\exists n_0 \in N^*, x_n > l - \varepsilon, \forall n \geq n_0 : l - \varepsilon < x_{n0} \leq x_n \leq l \Rightarrow \left|x_n - l\right| < \varepsilon, \forall n \geq n_o \Rightarrow x_n \to l$$

(2) Tương tự.

Ví dụ: $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ dãy tăng bị chặn trên hội tụ.

Gọi e là giới hạn: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e; e \approx 2,718...$

ĐL 1.8 (ĐL Cantor): Cho 2 dãy số $\{x_n\}, \{b_n\}$

$$(1.12)\begin{cases} \forall n \in N, a_n \le b_n, [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \\ \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0 \end{cases}$$

Khi đó tồn tại một số thực duy nhất: $c \in [a_n, b_n], \forall n$

CM: Chọn n nguyên dương cố dịnh bất kỳ ta có: $a_1 \le a_2 \le ... \le a_k \le ... \le b_n$

a_n tăng, bị chặn trên nên hội tụ

$$c = \lim_{k\to\infty} a_k; a_k \le b_n, \forall k \Rightarrow c \le b_n; c = \sup[a_k] \Rightarrow a_n \le c \le b_n; \forall n \Rightarrow c \in [a_n, b_n] \forall n$$

c là duy nhất vì nếu d cũng là điểm chnung của mọi đoạn $[a_n, b_n]$ thì:

$|c - d| \le b_n - a_n, \forall n$ nhưng $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0 \Rightarrow c = d$

ĐN: Dãy các đoạn $\{[a_n, b_n]\}$ thỏa mãn (1.12) là dãy các đoạn bao nhau.

3.4 Dãy giới nội : $\{x_n\} : x_n = (-1)^n$: Giới nội không hội tụ.

$\{x_n\}$ $n = 2k$: Dãy giới nội, hội tụ giới hạn = 1.

$\{x_n\}$ $n = 2k+1$: Dãy giới nội, hội tụ giới hạn = -1.

ĐN Cho dãy số : $\{x_n\}$ từ đó trích ra dãy $\{x_{nk}\}$: $x_{n1}, x_{n2}, \ldots x_{nk}$ với các chỉ số nguyên dương thỏa mãn điều kiện: $n1 < n2 < \ldots < nk <$. Dãy $\{x_{nk}\}$ được gọi là dãy con trích từ dãy $\{x_n\}$

ĐL 1.9 (Bolzano-Weierstrass): Từ mọi dãy giới nội , ta đều có thể trích ra một dãy con hội tụ.

CM: Dùng pp chia đôi: $\{x_n\}$ giới nội nên: $\exists a_o, b_0 : a_0 \le x_n \le b_0, \forall n : \frac{a_0 + b_0}{2} : 2$ đoạn : $\left[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}\right], \left[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0\right]$ 1 trong 2 đoạn phải chứa vô số pt $\{x_n\}$ gọi là $[a_1, b_1]$. Lại dùng pp chia đôi tiếp: $[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ... \supset [a_k, b_k] \supset$ chứa vô số phần tử x_n: $\lim\limits_{k\to\infty}(b_k - a_k) = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{b_0 - a_0}{2^k} = 0$

Theo ĐL Cantor: $\exists$ số thực C duy nhất: $c \in [a_k, b_k], \forall k$. Vì mỗi đoạn $[a_k, b_k]$ đều chứa vô số phần tử của $\{x_n\}$, ta lấy trong $[a_k, b_k]$ 1 điểm $x_{nk} \in \{x_n\}$ sao cho $x_{nk} \notin \{x_{n1}, x_{n2}, ..., x_{nk}\}$ ($\{x_{nk}\}$ là dãy con của dãy $\{x_n\}$) . x_{nk} và C đều $\in [a_k, b_k]$: $x_{nk} - c \le b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k} \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} |x_{nk} - c| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{nk} = c$

1.3.5 Tiêu chuẩn hội tụ Cauchy:

ĐN: Dãy $\{x_n\}$ gọi là dãy Cauchy hay dãy cơ bản, nếu

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N^* : m \geq n_0 : |x_m - x_n| < \varepsilon$

Bổ đề: Dãy Cauchy là 1 dãy giới nội.

Dãy Cauchy $\{x_n\}$. $\exists n_0 \in N^* : \forall m \geq n_0, n \geq n_0 : |x_m - x_n| < 1, \forall n > n_0$

Vì $|x_n - x_{n0}| > |x_n| - |x_{n0}| \to |x_n| < |x_{n0}| + 1 : |x_n| \leq M, \forall n$

ĐL 1.10 (tiêu chuẩn Cauchy): Điều kiện cần và đủ để $\{x_n\}$ thực hội tụ là nó là một dãy Cauchy.

CM: g/s $\{x_n\}$ hội tụ.

$\{x_n\}$ là dãy Cauchy.

Ngược lại g/s $\{x_n\}$ là dãy Cauchy, theo bổ đề là dãy giới nội, theo đ/l 1.9 có thể trích ra 1 dãy con hội tụ $\{x_{nk}\}$:

g/s $\lim_{k\to\infty} x_{nk} = l$; ta c/m $\lim_{n\to\infty} x_n = l$

Thật vậy: $|x_n - l| \le |x_n - x_{nk}| + |x_{nk} - l|$. Vì $x_{nk} \to l$ nên

$\forall \varepsilon > 0 : \exists \nu_1 \in N^* : n_k \ge \nu_1 \Rightarrow |x_{nk} - l| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Vì $\{x_n\}$ là dãy Cauchy: $\exists \nu_2 \in N^* : \forall n > \nu_2, n_k \ge \nu_2 \Rightarrow |x_n - x_{nk}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Đặt

$\nu_0 = \max(\nu_1, \nu_2) : \forall n \ge \nu_0 : |x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = l$

*KL: Mọi dãy hội tụ đều là dãy Cauchy.

*Đảo lại: Mọi dãy Cauchy trong trường hợp tổng quát chưa chắc đã hội tụ nếu không thực…)

*Mọi dãy số thực là dãy Cauchy đều hội tụ trên R.

1.3.6 Vô cùng bé và vô cùng lớn: $\{x_n\}$ gọi là vô cùng bé, nếu:

$$\lim_{n\to\infty} \bar{x}_n = 0, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N^* : n \geq n_0, |x_n| < \varepsilon$$

Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \Rightarrow \{x_n - l\} - VCB$?

$\{x_n\}$ goi là VCL: $\forall A > 0, \exists n_0 \in N^* : n \geq n_0, |x_n| > A$:

* $\forall A > 0, \exists n_0 \in N^* : n \geq n_0 : x_n > 0 : |x_n| > A$ ta có: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$

* $\forall A > 0, \exists n_0 \in N^* : n \geq n_0 : x_n < 0 : |x_n| > A$ ta có: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = -\infty$