Đề thi Môn Giải Tích 2 HK 2-2022 - Hệ CLC

(Thời gian 120')

Đề số 2:

1. (1 đ) Cho hàm số:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\ln(2x^2+2y^2), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   a) Khảo sát tính liên tục của hàm
   b) Từ kết quả của câu a) có thể kết luận hàm f khả vi tại $(0,0)$?

2. (1 đ) Cho hàm $z = \arctan(x^2+y^2), x = s+2t, y = t-2s$. Tính $\dfrac{\partial z}{\partial s}, \dfrac{\partial z}{\partial t}$.

3. (1.5 đ) Tìm cực trị địa phương và điểm yên ngựa nếu có của hàm:

$$f(x,y) = 4xy - 2x^4 - y^2$$

4. (1.5 đ) Sử dụng tích phân kép để tính thể tích của miền nằm dưới mặt paraboloid $x = y^2 + z^2 + 2$, bên trong mặt trụ $y^2 + z^2 = 4$ và trên mặt phẳng $x = -2$.

5. (1.5) Tính tích phân sau bằng cách chuyển sang tọa độ cực:

$$\int_{-\sqrt{2}}^{0}\int_{-x}^{\sqrt{4-x^2}} (x-y)\,dydx - \int_{-1/\sqrt{2}}^{0}\int_{-x}^{\sqrt{1-x^2}} (x-y)\,dydx$$

6. (1.5 đ) Sử dụng tích phân 3 lớp tính khối tâm của vật rắn E có mật độ không đổi, là một phần của mặt $y = x^2 + z^2$ bị giới hạn bởi các mặt phẳng $y = 4$ và $y = 1$, cho biết thể tích của E là $V = \dfrac{15\pi}{2}$.

7. (1 đ) Tính tích phân $\displaystyle\oint_C (e^{x^2} + \ln(x^2+4) + y^2)\,dx + (x^3 + 3xy^2 + 2xy)\,dy$, với C là đường cong kín gồm hai nửa đường tròn $y = \sqrt{4-x^2}, y = \sqrt{1-x^2}$ và các đoạn thẳng $(-2,0) \to (-1,0)$ và $(1,0) \to (2,0)$, hướng dương của C ngược chiều kim đồng hồ.

8. (1 đ) Xét phương trình vi phân $xy' + y = x^2 \ln x$.
   a) (0.5 đ) Tìm nghiệm tổng quát
   b) (0.5 đ) Tìm nghiệm thỏa mãn điều kiện ban đầu $y(1) = 0$

Đáp án đề số 2:

1. (1 đ) Cho hàm số:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\ln(2x^2+2y^2), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) (0.5 đ) Khảo sát tính liên tục của hàm:
Trước hết ta thấy rằng các hàm x^2+y^2 và $\ln 2x^2+2y^2$ liên tục với $\forall (x,y) \neq (0,0)$, do đó hàm $f(x,y)$ liên tục với $\forall (x,y) \neq (0,0)$. Bây giờ ta xét sự liên tục của $f(x,y)$ tại $(0,0)$. Sử dụng tọa độ cực:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(2x^2+2y^2) &= \lim_{r\to 0^+} r^2\ln(2r^2) = \lim_{r\to 0^+} \frac{\ln(2r^2)}{1/r^2} \\ &\overset{L}{=} \lim_{r\to 0^+} \frac{2/r}{-2/r^3} = 0 = f(0,0) \end{aligned}$$

Do đó hàm liên tục tại $(0,0)$. Vậy hàm $f(x,y)$ liên tục với $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

b) (0.5 đ) Liên tục chỉ là điều kiện cần, do đó từ câu a) không thể kết luận hàm f khả vi tại $(0,0)$.

2. (1 đ) Cho hàm $z = \arctan(x^2+y^2), x = s+2t, y = t-2s$. Tính $\dfrac{\partial z}{\partial s}, \dfrac{\partial z}{\partial t}$.

$$\begin{aligned} z_x &= \frac{2x}{(x^2+y^2)^2+1} \\ z_y &= \frac{2y}{(x^2+y^2)^2+1} \\ x_s &= 1, x_t = 2, y_s = -2, y_t = 1 \\ z_s &= \frac{2(x-2y)}{x^4+2x^2y^2+y^4+1} = \frac{10s}{25s^4+50s^2t^2+25t^4+1} \\ z_t &= \frac{2(2x+y)}{x^4+2x^2y^2+y^4+1} = \frac{10t}{25s^4+50s^2t^2+25t^4+1} \end{aligned}$$

3. (1.5 đ) Tìm cực trị địa phương và điểm yên ngựa nếu có của hàm
Tìm điểm dừng:

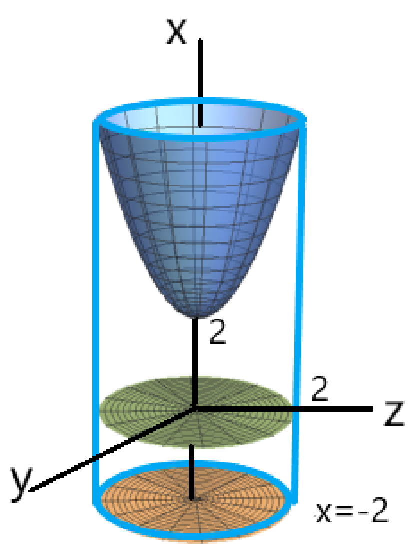
$$\begin{aligned} & f_x = 4y - 8x^3, f_y = 4x - 2y \\ & f_x = 0, f_y = 0 \\ \Rightarrow & M_0 = \{(-1,-2),(0,0),(1,2)\}, f(M_0) = \{2,0,2\} \quad (0.5\text{ đ}) \end{aligned}$$

Định thức Hess:

$$f_{xx} = -24x^2, f_{yy} = -2, f_{xy} = 4$$
$$D(M_0) = \{32, -16, 32\}, f_{xx}(M_0) = \{-24, 0, -24\} \quad (0.5 \text{ đ})$$

+) Tại điểm $(-1, -2)$: Hàm có cực đại là $f_{max} = 2$
+) Tại điểm $(0, 0)$: Điểm yên ngựa
+) Tại điểm $((1, 2)$: Hàm có cực đại là $f_{max} = 2$ (0.5 đ)

4. (1.5 đ) Sử dụng tích phân kép để tính thể tích của miền giới hạn bởi mặt paraboloid $x = y^2 + z^2 + 2$, mặt trụ $y^2 + z^2 = 4$ và mặt phẳng $x = -2$.
Phương trình giao tuyến của mặt paraboloid và mặt trụ là $y^2 + z^2 = 4, x = 6$. Sử dụng tọa độ trụ trục $x : y = r\cos\theta, z = r\sin\theta, x = x$ và tính thể tích theo 2 cách:



+) Cách 1:

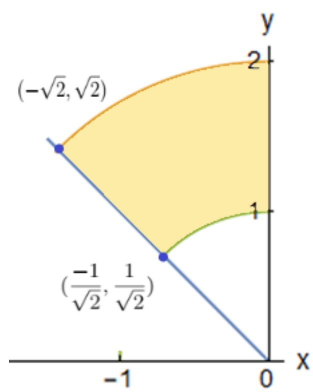
$$\begin{aligned}
V &= \iint_{y^2+z^2\le 4} [y^2 + z^2 + 2 - (-2)]\, dA && (0.5 \text{ đ})\\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (r^2 + 4) r\, dr d\theta && (0.5 \text{ đ})\\
&= 2\pi \cdot \frac{1}{4} r^2 \left(r^2 + 8\right) \Big|_0^2 \\
&= 24\pi && (0.5 \text{ đ})
\end{aligned}$$

+) Cách 2:

$$\begin{aligned} V &= 4\pi \cdot 8 - \iint_{y^2+z^2\leq 4} [6-(y^2+z^2+2)]\, dA && (0.5 \text{ đ}) \\ &= 32\pi - \int_0^{2\pi}\int_0^2 (4-r^2)r\, drd\theta && (0.5 \text{ đ}) \\ &= 32\pi - 8\pi = 24\pi && (0.5 \text{ đ}) \end{aligned}$$

5. (1.5) Tính tích phân bằng cách chuyển sang tọa độ cực.

$$\int_{-\sqrt{2}}^{0}\int_{-x}^{\sqrt{4-x^2}} (x-y)\, dydx - \int_{-1/\sqrt{2}}^{0}\int_{-x}^{\sqrt{1-x^2}} (x-y)\, dydx$$



Hình 1: (0.5 đ)

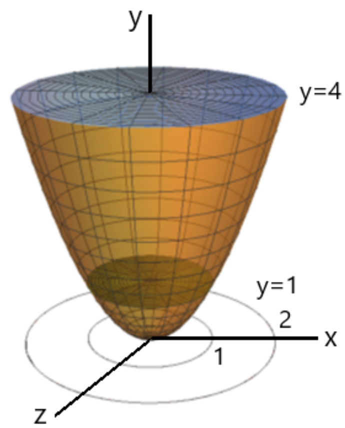
Tọa độ giao điểm của các đường $x^2+y^2=1$ và $y=-x$ với $x\leq 0, y\geq 0$ là: $(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.
Tọa độ giao điểm của các đường $x^2+y^2=4$ và $y=-x$ với $x\leq 0, y\geq 0$ là: $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. (0.5 đ)
Chuyển sang tọa độ cực $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ miền tích phân D được xác định bởi

$$D = \{(r,\theta):\ \pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/4, 1\leq r\leq 2\}$$

Tích phân trở thành:

$$\begin{aligned} &\int_{-\sqrt{2}}^{0}\int_{-x}^{\sqrt{4-x^2}} (x-y)\, dydx - \int_{-1/\sqrt{2}}^{0}\int_{-x}^{\sqrt{1-x^2}} (x-y)\, dydx \\ &= \int_{\pi/2}^{3\pi/4}\int_1^2 r^2(\cos\theta - \sin\theta)\, drd\theta && (0.5 \text{ đ}) \\ &= (\sin\theta + \cos\theta)\Big|_{\pi/2}^{3\pi/4} \cdot \frac{r^3}{3}\Big|_1^2 = -\frac{7}{3} && (0.5 \text{ đ}) \end{aligned}$$

6. (1.5 đ) Sử dụng tích phân 3 lớp tính khối tâm của vật rắn E có mật độ không đổi, là một phần của mặt $y = x^2 + z^2$ bị giới hạn bởi các mặt phẳng $y = 4$ và $y = 1$, cho biết thể tích của E là $V = \dfrac{15\pi}{2}$.



Phương trình giao tuyến của mặt paraboloid với các mặt $y = 4$ và $y = 1$ lần lượt là:

$$x^2 + z^2 = 4,\ x^2 + z^2 = 1$$

Vật thể có trục đối xứng là y nên khối tâm nằm trên trục y, do đó:

$$x_c = z_c = 0, y_c = \frac{1}{V\rho} M_{xz} \qquad (0.5 \text{ đ})$$

$$M_{xz} = \iiint_E y\rho\, dxdydz = \rho \iiint_E y\, dxdydz$$

$$= \rho \iint_{x^2+z^2\le 4} \left[\int_{x^2+z^2}^{4} y\, dy\right] dA - \rho \iint_{x^2+z^2\le 1} \left[\int_{x^2+z^2}^{1} y\, dy\right] dA$$

Chuyển sang tọa độ trụ $z = r\cos\theta, x = r\sin\theta, y = y$:

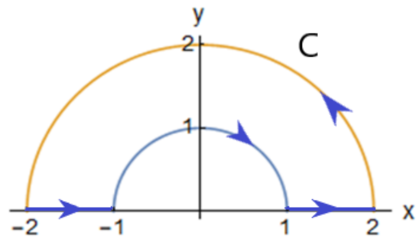
$$\iiint_E y\, dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{r^2}^4 yr\, dydrd\theta - \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^1 yr\, dydrd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (8r - \frac{r^5}{2})\, drd\theta - \int_0^{2\pi}\int_0^1 (\frac{1}{2}\left(r - r^5\right))\, drd\theta$$

$$= 2\pi \cdot \frac{32}{3} - 2\pi \cdot \frac{1}{6} = 21\pi \qquad (0.5 \text{ đ})$$

$$\Rightarrow z_c = \frac{M_{xy}}{V\rho} = \frac{14}{5} \qquad (0.5 \text{ đ})$$

7. (1 đ) Tính tích phân $\oint_C (e^{x^2} + \ln(x^2+4) + y^2)\, dx + (x^3 + 3xy^2 + 2xy)\, dy$, với C là đường cong kín gồm hai nửa đường tròn $y = \sqrt{4-x^2}, y = \sqrt{1-x^2}$ và các đoạn thẳng $(-2, 0) \to (-1, 0)$ và $(1, 0) \to (2, 0)$, hướng dương của C ngược chiều kim đồng hồ.



Sử dụng công thức Green và sử dụng tọa độ cực:

$P_y = 2y,\ Q_x = 3x^2 + 3y^2 + 2y$
$D = \{(r, \theta) : 0 \le \theta \le \pi, 1 \le r \le 2\}$
$\oint_C (e^{x^2} + \ln(x^2+4) + y^2)\, dx + (x^3 + 3xy^2 + 2xy)\, dy = \iint_D (3x^2 + 3y^2)\, dxdy$ (0.5 đ)
$= \int_0^\pi \int_1^2 3r^3\, dr d\theta = \pi \cdot \frac{45}{4} = \frac{45\pi}{4}$ (0.5 đ)

8. (1 đ) Xét phương trình vi phân $xy' + y = x^2 \ln x$.
a) (0.5 đ) Tìm nghiệm tổng quát
Phương trình được viết thành $y' + \frac{1}{x}y = x\ln x$
+) Nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow y = \frac{C}{x}$$

+) Phương trình không thuần nhất: Sử dụng phương pháp biến thiên hằng số

$$C(x) = \int \frac{q(x)}{1/x}\, dx = \int x^2 \ln x\, dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{x^3}{9} + K$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là:

$$y = \frac{C(x)}{x} = \frac{1}{3}x^2 \ln x - \frac{x^2}{9} + \frac{K}{x}$$

b) (0.5 đ) Tìm nghiệm thỏa mãn điều kiện ban đầu $y(1) = 0$

$$y(1) = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{1}{9} + K \Rightarrow K = \frac{1}{9}$$

Vậy nghiệm của bài toán Cauchy là:

$$y = \frac{1}{3}x^2 \ln x - \frac{x^2}{9} + \frac{1}{9x}$$