Tích phân mặt

Loại I.

Cho một mặt cong S và một hàm số f(M) = f(x,y,z) xác định trên S.

Tích phân mặt loại I của hàm số f(x,y,z) trên mặt S kí hiệu là $\iint\limits_S f\left(x,y,z\right)dS$.

Diện tích của mặt S: $\iint\limits_S dS$.

Cách tính

- Giả sử mặt S được cho bởi phương trình z = z(x,y), trong đó z là hàm số liên tục, có các đạo hàm riêng $p = z_x^{'}\left(x,y\right);\ q = z_y^{'}\left(x,y\right)$ liên tục trong miền đóng giới nội D (hình chiếu của S lên mặt Oxy. Khi đó $dS = \sqrt{1+p^2+q^2}dxdy$,

  $$\iint\limits_S f\left(x,y,z\right)dS = \iint\limits_D f\left(x,y,z\left(x,y\right)\right)\sqrt{1+p^2+q^2}dxdy.$$

  Tương tự nếu mặt S cho bởi phương trình x = x(y,z), hs tự rút ra công thức tính.

- Trường hợp mặt S có phương trình tham số

  $x = x\left(u,v\right),\ y = y\left(u,v\right),\ z = z\left(u,v\right),\ \left(u,v\right)\in D\subset R^2.$ f(x,y,z) là hàm xác định liên tục trên S.

  Khi đó: $\iint\limits_S f\left(x,y,z\right)ds = \iint\limits_D f\left(x\left(u,v\right),y\left(u,v\right),z\left(u,v\right)\right)\sqrt{EG-F^2}$dud*v*.

  E,F,G là hệ số Gauss:

  $$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

  $$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

  $$E = \frac{\partial x}{\partial u}.\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}.\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial z}{\partial v}$$

Trọng tâm của mặt

Nếu khối lượng riêng của mặt S tại điểm M(x,y,z) là $\rho\left(M\right)$.

Tọa độ trọng tâm G của mặt S

Trong đó $m = \iint\limits_S \rho\left(M\right)dS$ là khối lượng của mặt S.

<u>**Bài tập**</u>. Tính

a) $\iint_S zdS$, S là mặt paraboloit hyperbolic $z = x^2 + y^2$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 4$.

b) $\iint_S ydS$, S là phần của mặt $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y2$.

c) $\iint_S \frac{dS}{(1+x+z)^2}$, S là phần mặt phẳng $x + y + z = 1$ nằm trong góc phần tám thứ nhất.

d) $\iint_S (2x + y + z)dS$, S là phần mặt phẳng $x + y + z = 1$ nằm trong góc phần tám thứ nhất.

e) $\iint_S (x^2 + y^2)dS$, S là phần mặt nón nằm giữa các mặt phẳng $z = 0, z = 1$.

f) $\iint_S (6x + 4y + 3z)dS$, S là phần mặt phẳng $x + 2y + 3z = 6$ thuộc góc phần tám thứ nhất.

g) $\iint_S \left(z + 2x + \frac{4y}{3}\right)dS$, S là phần mặt phẳng $6x + 4y + 3z = 12$ thuộc góc phần tám thứ nhất.

h) $\iint_S (x + y + z)dS$, S là nửa mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \ge 0$.

i) $\iint_S (x^2 + y^2)dS$, S là mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

j) $\iint_S (xy + yz + zx)dS$, S là phần của mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 2ax$.

k) $\iint_S (x^2z^2 + z^2y^2)dS$, S là mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$.

l) $\iint_S (y^2 + z^2)dS$, S là phần của mặt paraboloit $x = 4 - y^2 - z^2$ nằm ở trên mặt phẳng x = 0.

Loại II.

Tích phân mặt loại II tổng quát $\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$, Trong đó giả sử ba hàm

$P(M) = P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ liên tục trên S.

Cách tính.

Giả thiết mặt S được chiếu đơn trị lên miền D(y,z) của mặt yOz và $x = f(y, z)$ là phương trình của nó, khi đó $\iint_S Pdydz = \pm\iint_D P\left[f(y,z), y, z\right]\mathrm{dyd}z$.

Tương tự ta có

$$\iint_S Qdxdz = \pm\iint_D \mathrm{Q}\left[x, g(x,z), z\right]\mathrm{dxd}z$$

$$\iint_S Rdxdy = \pm\iint_D R\left[x, y, h(x,y)\right]\mathrm{dxdy}$$

Dấu + trong trường hợp nếu phía mặt được chọn $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma > 0$, dấu – nếu các cos âm

Bài tập. Tính các tích phân mặt sau

a) $\iint\limits_{D} dxdy$, S là phía ngoài phần mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ khi $0 \le z \le 1$.

b) $\iint\limits_{S} -xdydz + zdxdz + 5dxdy,$ S là phía trên của phần mặt phẳng $2x + 3y + z = 6.$

c) $\iint\limits_{S} \left(xdydz + ydzdx + zdxdy\right)$, trong đó S là phía ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

d) $\iint\limits_{S} \sqrt{x^2 + y^2} dxdy$ theo phía dưới của hình tròn $x^2 + y^2 \le R^2$.