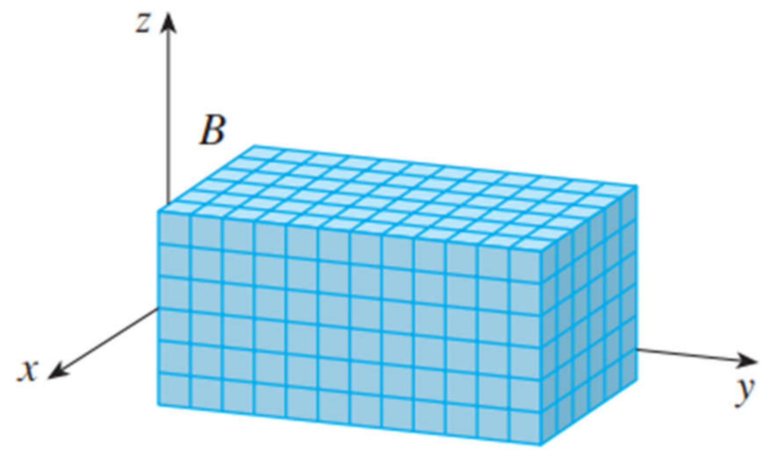
TÍNH TÍCH PHÂN BỘI BA

1. Giới thiệu

- Tích phân bội 3 của hàm số $f(x,y,z)$ trong miền V dạng:

$$I_1 = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV$$



- Nếu $f(x,y,z)$ là khối lượng riêng của vật thể V

  $\Rightarrow I_1$ là khối lượng của vật thể đó
- Nếu $f(x,y,z) = 1$ thì

  $\iiint_V dV$: thể tích miền V
- Tích phân bội 3 có các tính chất tương tự tích phân kép.

1. Giới thiệu

❖ ***Trọng tâm vật thể***

- Vật thể V trong Oxyz có khối lượng riêng tại M là $\rho(x, y, z)$, tọa độ trọng tậm của V:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{m} \displaystyle\iiint_V x\rho(x,y,z)\,dxdydz \\ y_G = \dfrac{1}{m} \displaystyle\iiint_V y\rho(x,y,z)\,dxdydz \\ z_G = \dfrac{1}{m} \displaystyle\iiint_V z\rho(x,y,z)\,dxdydz \end{cases}$$

$$m = \iiint_V \rho(x,y,\mathrm{z})\,dxdydz$$

1. Giới thiệu

- Nếu vật thể đồng chất ($\rho = const$):

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{V}\displaystyle\iiint_V x\,dxdydz \\ y_G = \dfrac{1}{V}\displaystyle\iiint_V y\,dxdydz \\ z_G = \dfrac{1}{V}\displaystyle\iiint_V z\,dxdydz \end{cases}$$

2. Cách tính — *2.1. Trong hệ Đề-các*

Có thể đưa tích phân bội 3 về ba tích phân đơn liên tiếp

- *TH1*. Nếu hàm f liên tục trên 1 hình hộp đóng V= $[a,b]\times[c,d]\times[r,s]$:

$$\boxed{\iiint_V f(x,y,z)\,dV=\int_r^s\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)\,dxdydz}$$

- ***Ví dụ.*** Tính tích phân sau trên miền $V=\{(x,y,z)|\ 0\le x\le 1,-1\le y\le 2,0\le z\le 3\}$

$$\iiint_V xyz^2\,dV$$

2. Cách tính | *2.1. Trong hệ Đề-các*

$$\iiint_V xyz^2 dV = \int_0^3 \int_{-1}^2 \int_0^1 xyz^2 dxdydz = \int_0^3 \int_{-1}^2 \left[\left(\frac{1}{2} x^2 yz^2 \right) \Bigg|_0^1 \right] dydz$$

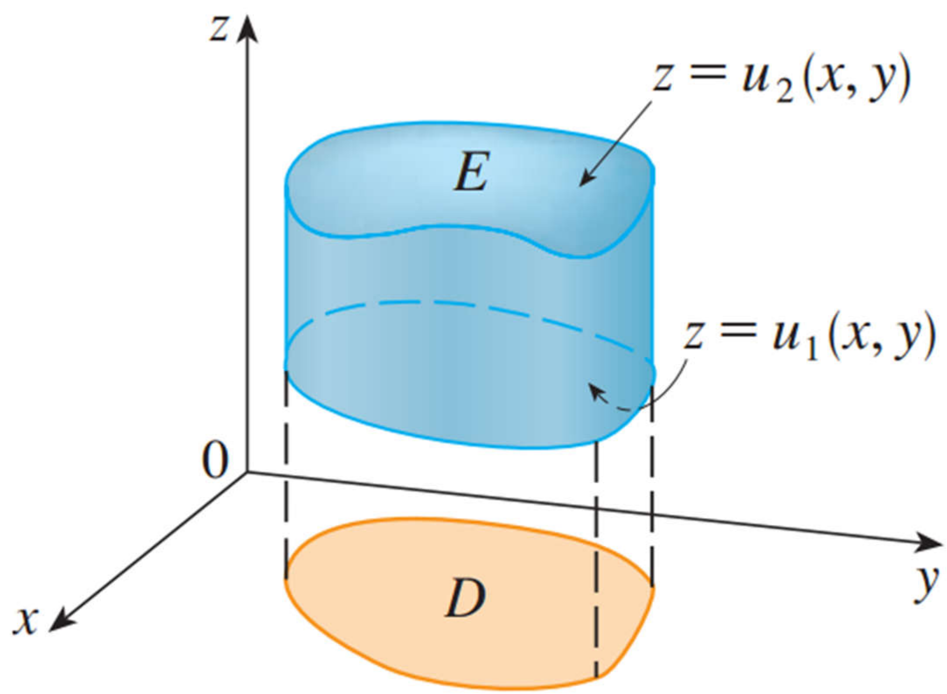
$$= \int_0^3 \int_{-1}^2 \frac{yz^2}{2} dydz = \int_0^3 \left[\frac{y^2 z^2}{4} \Bigg|_{-1}^2 \right] dz = \int_0^3 \frac{3z^2}{4} dz = \frac{27}{4}$$

2. Cách tính | 2.1. Trong hệ Đề-các

❑ *TH2.* Nếu

$$E = \{(x, y, z) |\ (x, y) \in D, u_1(x, y) \le z \le u_2(x, y)\}$$

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \iint_D \left[\int_{u_1}^{u_2} f(x,y,z)\,dz \right] dA$$

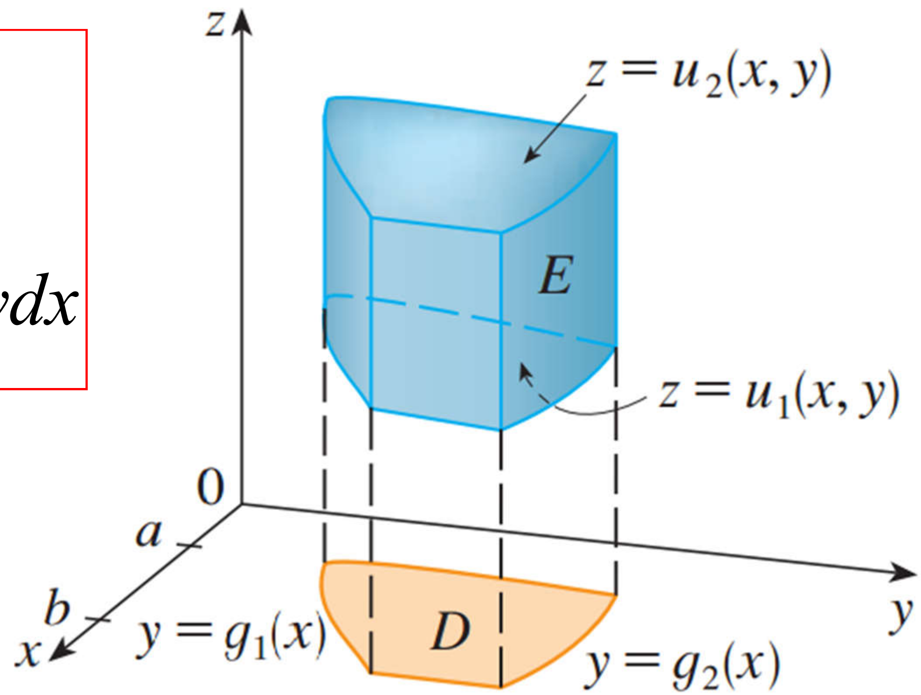


2. Cách tính | *2.1. Trong hệ Đề-các*

❑ *TH2.1*. Nếu

$$E = \left\{\begin{matrix}(x,y,z) \mid a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x), \\ u_1(x,y) \le z \le u_2(x,y)\end{matrix}\right\}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\iiint_E f(x,y,z)\,dV \\ &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\,dzdydx\end{aligned}}$$

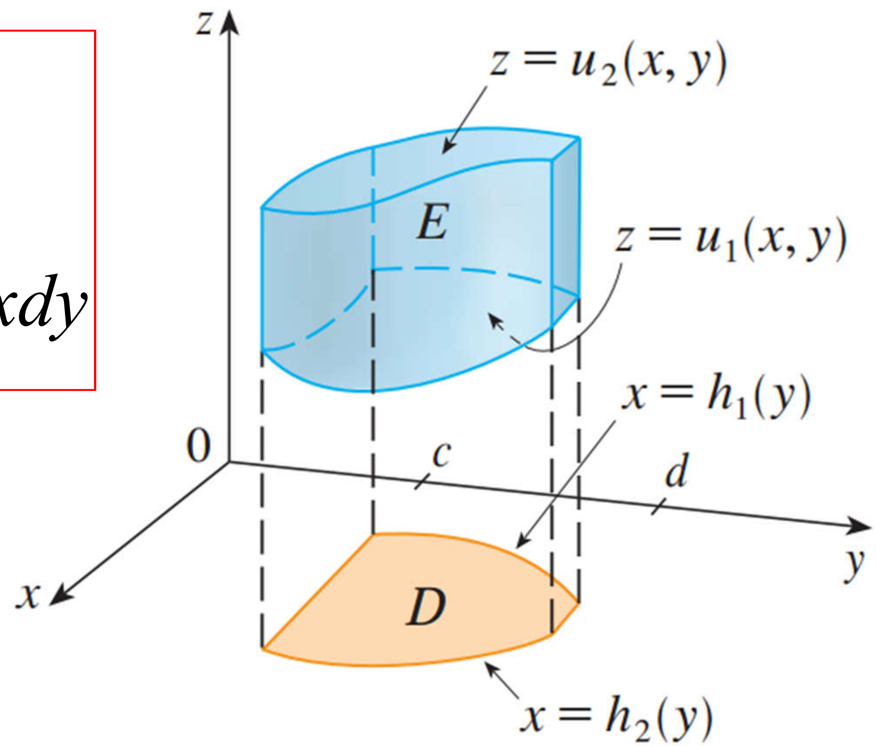


2. Cách tính | *2.1. Trong hệ Đề-các*

- *TH2.2.* Nếu

$$E = \left\{ \begin{matrix} (x,y,z) \mid c \le y \le d, h_1(y) \le x \le h_2(y), \\ u_1(x,y) \le z \le u_2(x,y) \end{matrix} \right\}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\iiint_E f(x,y,z)\,dV \\ &= \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy \end{aligned}}$$



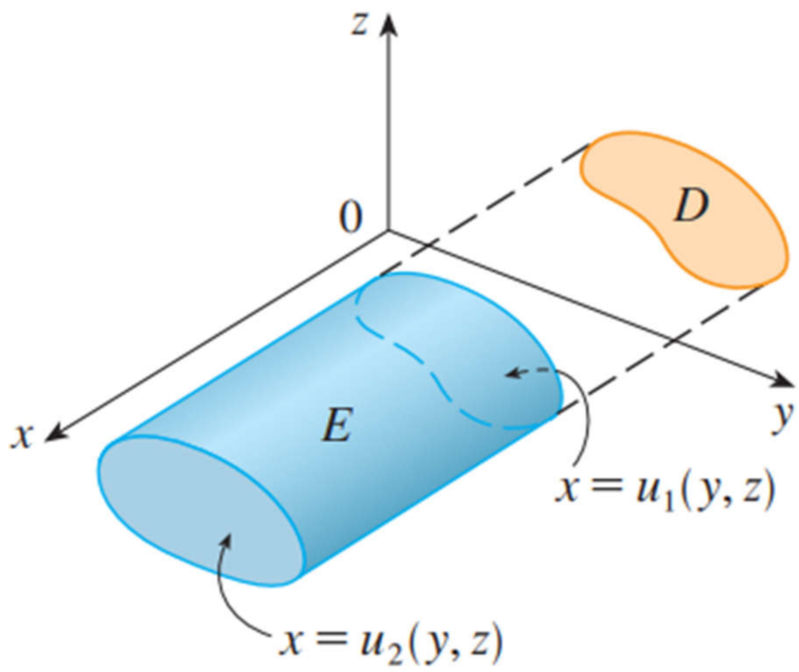
2. Cách tính | *2.1. Trong hệ Đề-các*

❑ *TH3*. Nếu

$$E=\{(x,y,z)\,|\,(y,z)\in D, u_1(y,z)\le x\le u_2(y,z)\}$$

- Khi đó:

$$\boxed{\begin{aligned}&\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dV\\ =\ &\iint\limits_D\left[\int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx\right]dydz\end{aligned}}$$



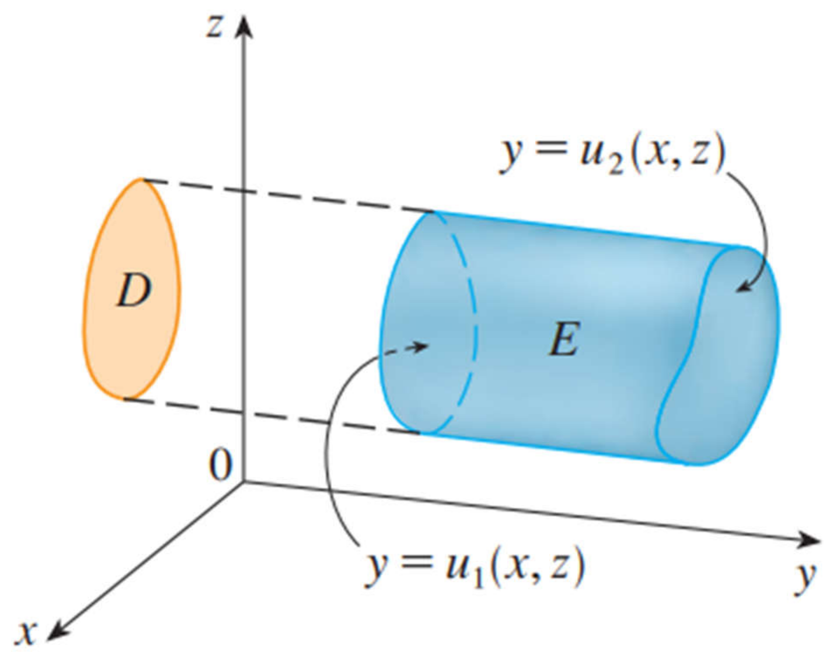
2. Cách tính | *2.1. Trong hệ Đề-các*

- *TH4*. Nếu

$$E=\left\{(x,y,z)\,|\,(\mathrm{x},z)\in D, u_1(\mathrm{x},z)\le y\le u_2(\mathrm{x},z)\right\}$$

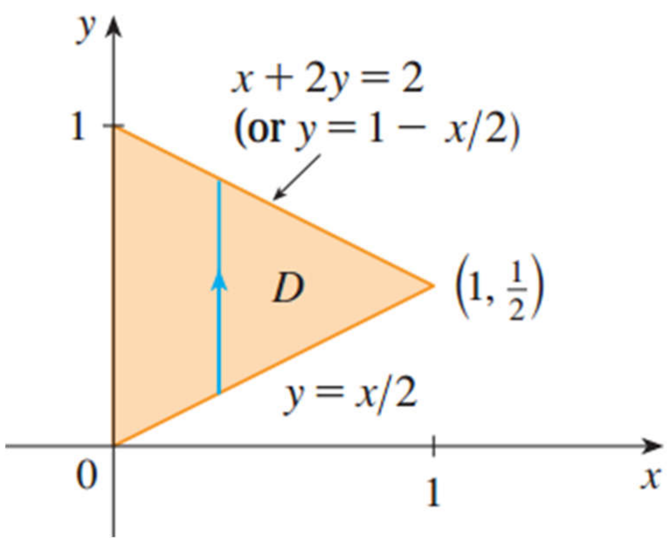
- Khi đó:

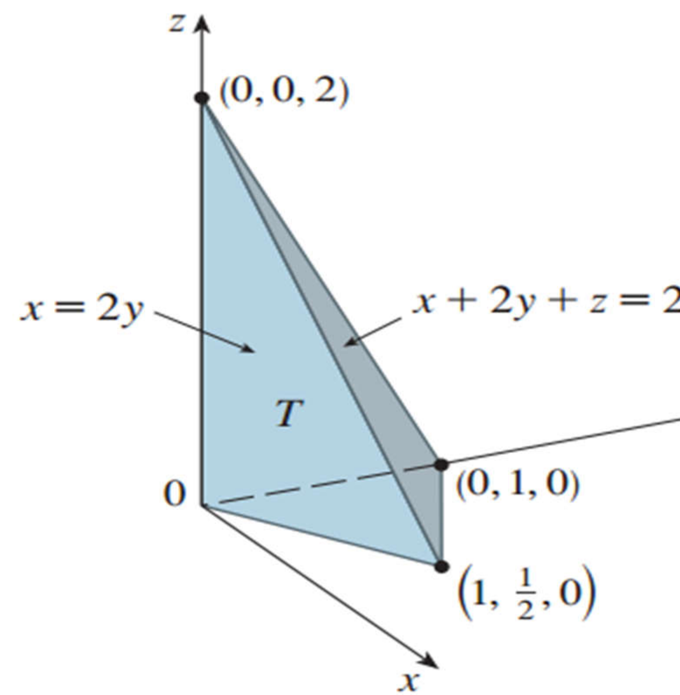
$$\boxed{\begin{aligned}&\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dV\\ =&\iint\limits_D\left[\int_{u_1(\mathrm{x},z)}^{u_2(\mathrm{x},z)} f(x,y,z)\,dy\right]dxdz\end{aligned}}$$



❑ ***Ví dụ 1.*** Sử dụng tích phân bội tính thể tích vật thể T được giới hạn bởi các mặt $x + 2y + z = 2, x = 2y, x = 0, z = 0$

Hình chiếu của T lên Oxy là miền giới hạn bởi các đường: $x + 2y = 2, x = 2y, x = 0.$





2. Cách tính | *2.1. Trong hệ Đề-các*

- Thể tích vật thể T:

$$V(T) = \iiint\limits_T dV = \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} \int_0^{2-x-2y} dzdydx$$

$$= \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} \left[z\Big|_0^{2-x-2y} \right] dydx$$

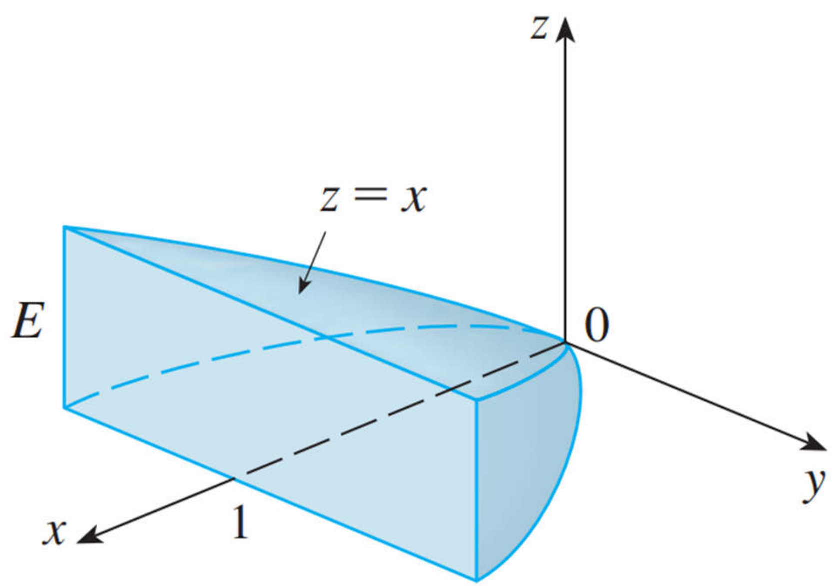
$$= \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2-x-2y)\, dydx = \frac{1}{3}$$

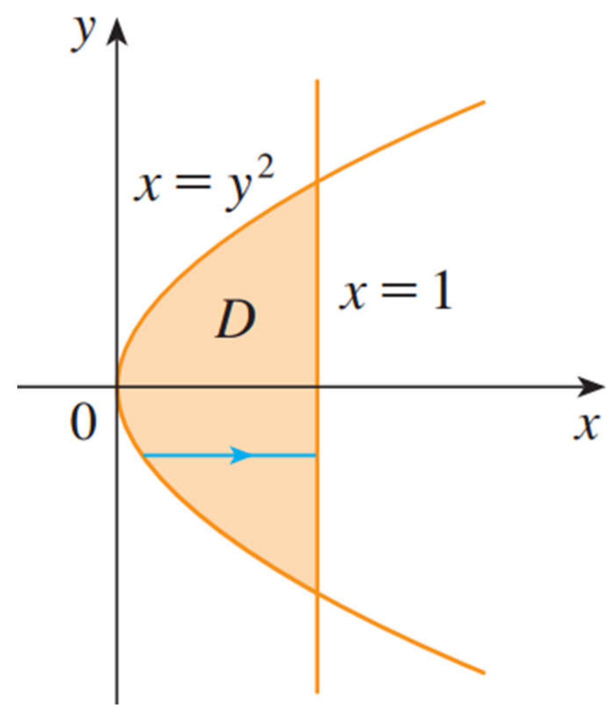
2. Cách tính | *2.1. Trong hệ Đề-các*

❑ ***Ví dụ 2***. Tìm trọng tâm của vật thể giới hạn bởi các mặt: $x = y^2, z = x, x = 1$ và $z = 0$, với mật độ khối ρ.

Miền D của vật thể E trên Oxy được giới hạn bởi các đường:

$$x = y^2, x = 1$$





2. Cách tính | *2.1. Trong hệ Đề-các*

- Ta có:

$$m = \iiint_E \rho dV = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\int_0^x \rho dzdxdy = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} \rho xdxdy = \frac{4\rho}{5}$$

$$x_G = \frac{1}{m}\iiint_V x\rho dxdydz = \frac{5}{4}\int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\int_0^x xdzdxdy$$

$$= \frac{5}{4}\int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} xz\Big|_0^x dxdy = \frac{5}{7}$$

2. Cách tính | 2.1. Trong hệ Đề-các

$$y_G = \frac{1}{m}\iiint_V y\rho dxdydz = \frac{5}{4}\int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\int_0^x ydzdxdy$$

$$= \frac{5}{4}\int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} yz\Big|_0^x dxdy = 0$$

$$z_G = \frac{1}{m}\iiint_V z\rho dxdydz = \frac{5}{4}\int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\int_0^x zdzdxdy$$

$$= \frac{5}{8}\int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} z^2\Big|_0^x dxdy = \frac{5}{14}$$

Vậy tọa độ trong tâm của vật thể E: $(x, y, z) = \left(\frac{5}{7}, 0, \frac{5}{14}\right)$

2.2. Đổi biến số

Xét tính phân $\iiint\limits_{V} f(x,y,z)\,dV$

Thực hiện phép đổi biến số:

$$\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w); \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$$

$$f(x,y,z) \to g(u,v,w)$$

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} \neq 0$$

Khi đó: $\iiint\limits_{V} f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_{V'} g(u,v,w)\,|J|\,dudvdw$

❖ ***Hệ tọa độ trụ***

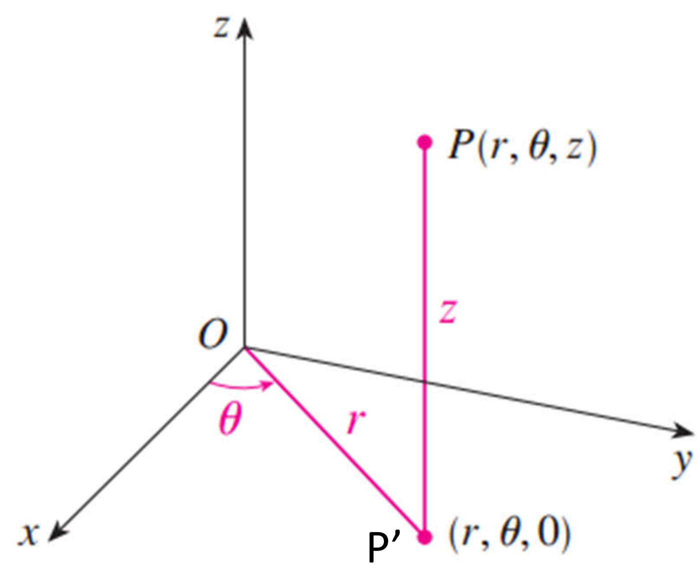
- Điểm P trong không gian ba chiều được biểu diễn bởi bộ 3 số (r, θ, z), trong đó:

(r, φ) là tọa độ cực của điểm P' (hình chiếu của P lên Oxy)

z: khoảng cách từ P đến (Oxy)

- Mối liên hệ giữa tọa độ trụ và

tọa độ Đề-các: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$



2. Cách tính	***2.2 Đổi biến số***

- ***Ví dụ 3***. 1) Hãy biểu diễn điểm $M(2, \frac{2\pi}{3}, 1)$ trong hệ tọa độ trụ và xác định tọa độ của nó trong hệ đề các Oxyz.

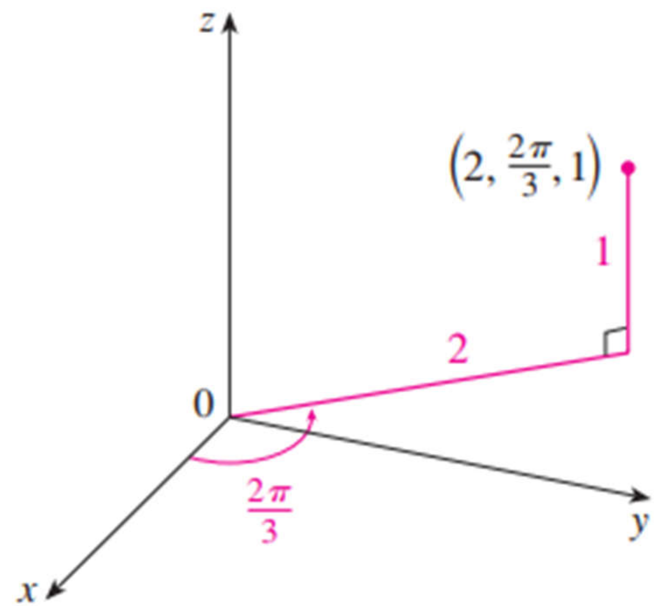
Đáp án:

1) $N(-1, \sqrt{3}, 1) - Oxyz$

$$x = 2\cos\frac{2\pi}{3} = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$y = 2\sin\frac{2\pi}{3} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$z = 1$$



2. Cách tính | *2.2 Đổi biến số*

2) Xác định tọa độ trụ của điểm N biết tọa độ của nó trong hệ Đề các Oxyz là $N(3,-3,-7)$.

Đáp án:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = -\frac{3}{3} = -1 \rightarrow \theta = \frac{7\pi}{4} + k2\pi, k \in Z$$

$$z = -7$$

Vậy tọa độ điểm N trong hệ tọa độ trụ:

$$N\left(3\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}, -7\right) \text{ hoặc } N\left(3\sqrt{2}, \frac{-\pi}{4}, -7\right)$$

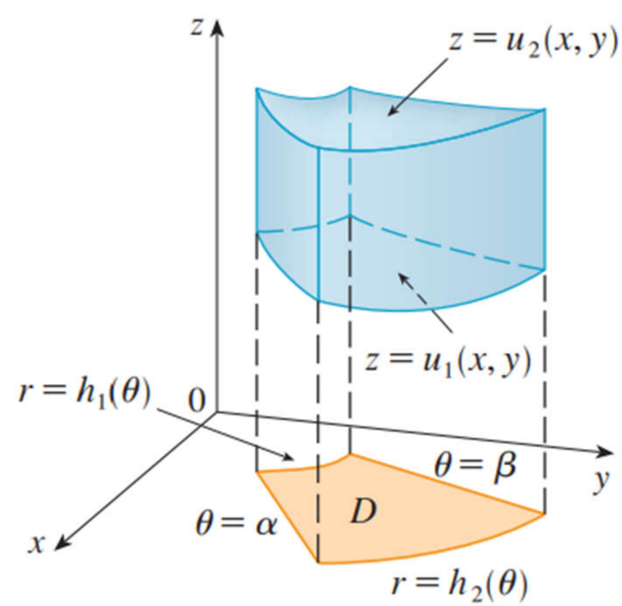
❖ *Tính tích phân trong hệ tọa độ trụ*

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)dE$$

$$E = \{(x,y,z)|(x,y) \in D, u_1(x,y) \le z \le u_2(x,y)\}$$

- D: hình chiếu của E lên (Oxy) - biểu diễn trong hệ tọa độ cực;

$$D = \left\{(r,\theta)\middle| \begin{matrix} \alpha \le \theta \le \beta, \\ h_1(\theta) \le r \le h_2(\theta) \end{matrix}\right\}$$



2. Cách tính — *2.2 Đổi biến số*

- Đổi biến

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

- Vậy, công thức tích phân bội ba trong hệ tọa độ trụ

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dV = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r,\theta)}^{u_2(r,\theta)} f(r,\theta,z)\,r\,dz\,dr\,d\theta$$

2. Cách tính	*2.2 Đổi biến số*

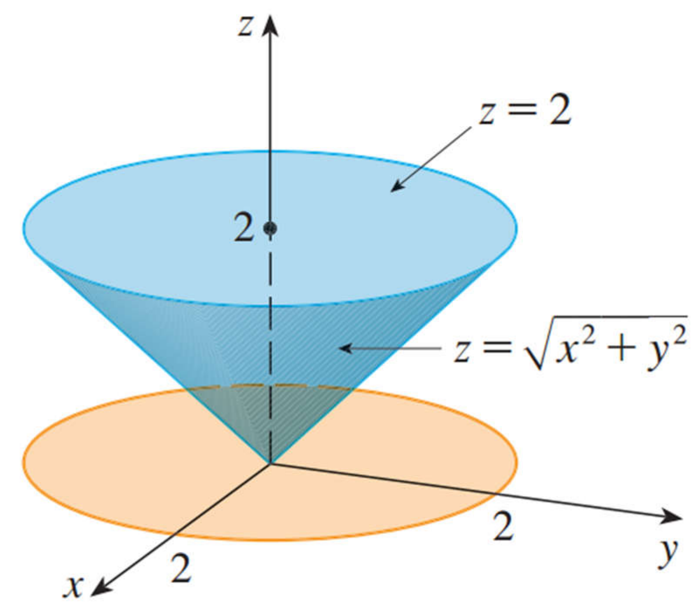
❑ ***Ví dụ 4.*** Tính tích phân sau với E là miền giới hạn bởi các mặt $z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 2$:

$$\iiint\limits_{E} \left(x^2 + y^2\right) dxdydz$$

- Hình chiếu của E lên Oxy là miền hình tròn D có phương trình:

$$x^2 + y^2 \leq 4$$

Do đó, ta có:



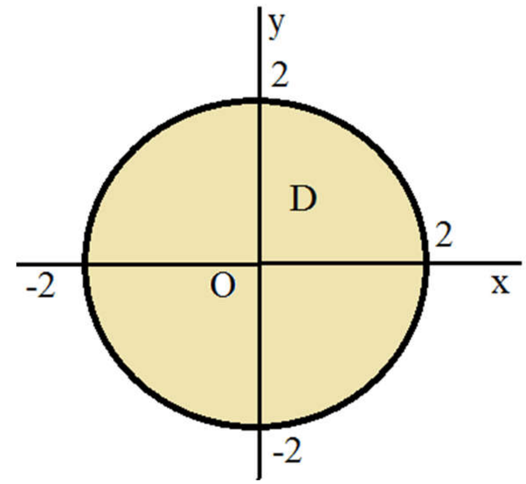
2. Cách tính

2.2 Đổi biến số

$$\iiint_E \left(x^2+y^2\right)dxdydz = \iint_D \left[\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}\left(x^2+y^2\right)dz\right]dxdy$$

- Tọa độ trụ:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \Rightarrow |J| = r \\ z = z \end{cases}$$



$$\iiint_V \left(x^2+y^2\right)dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr \int_r^2 r^2 r dz$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3(2-r)drd\varphi = \frac{16}{5}\pi$$

2. Cách tính	*2.2 Đổi biến số*

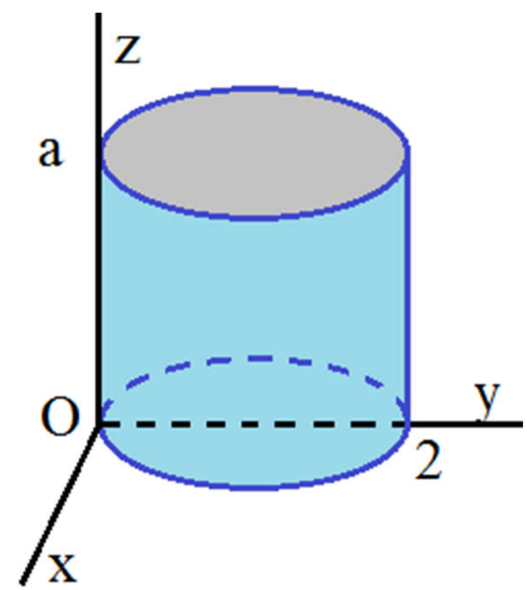
❑ ***Ví dụ 5***. Tích tích phân sau với V là miền hình trụ giới hạn bởi các mặt $x^2 + y^2 = 2y, z = 0, z = a$:

$$I_6 = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2}\,.z dx dy dz$$

Hình chiếu của vật V lên Oxy là hình tròn D được bao bởi đường tròn $x^2 + y^2 = 2y$.

Tọa độ trụ: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \Rightarrow |J| = r \\ z = z \end{cases}$

Pt đường tròn C: $r = 2\sin\varphi$



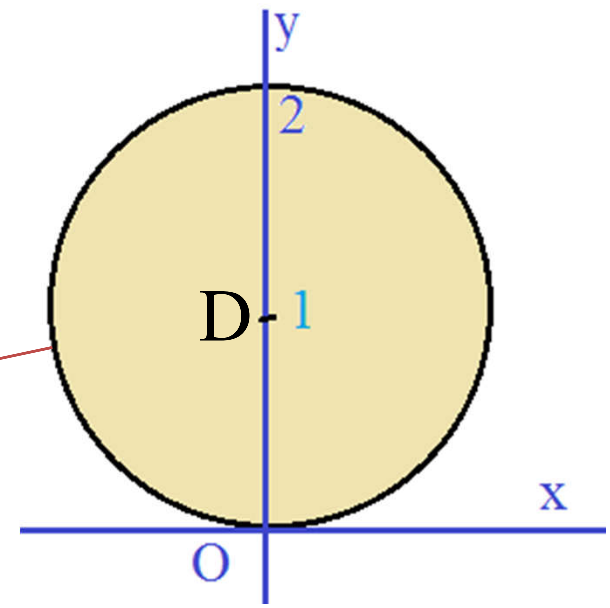
2. Cách tính — *2.2 Đổi biến số*

- Suy ra:
- $V' = \{(r,\varphi,z) | 0 \le \varphi \le \pi, 0 \le r \le 2\sin\varphi, 0 \le z \le a\}$

$$I_6 = \int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\varphi}\int_0^{a} r^2 z\,dz\,dr\,d\varphi = \int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\varphi}\left[\left.\frac{r^2z^2}{2}\right|_0^a\right]dr\,d\varphi$$

$$I_6 = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\varphi} r^2\,dr\,d\varphi = \frac{16a^2}{9}$$

C: $r = 2\sin\varphi$



2. Cách tính | *2.2 Đổi biến số*

❖ *Trong hệ tọa độ cầu*

- Tọa độ cầu của điểm P trong không gian được xác định bởi 3 thành phần (ρ, θ, ϕ), trong đó:

ρ là khoảng cách từ O đến P,

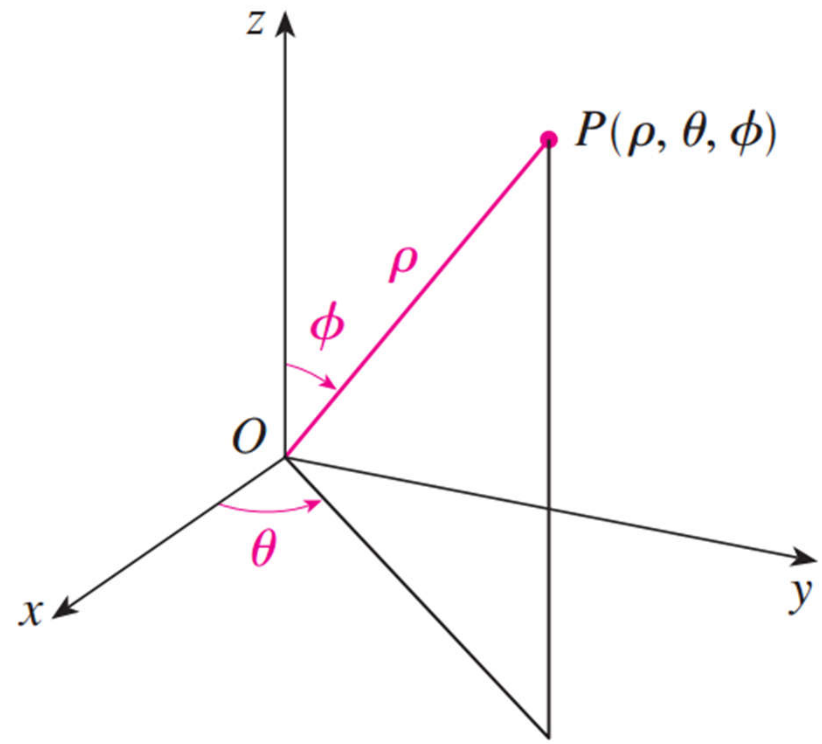
$$\rho \geq 0$$

ϕ là góc giữa trục Oz và $\overrightarrow{OP}$,

$$0 \leq \phi \leq \pi$$

θ là góc giữa trục Ox và $\overrightarrow{OP'}$,

P' là hình chiếu của P lên Oxy



2. Cách tính — *2.2 Đổi biến số*

- Mối liên hệ giữa hệ Đề-các và hệ tọa độ cầu

$$\begin{cases} x = \rho\sin\phi\cos\theta \\ y = \rho\sin\phi\sin\theta; \quad \mathrm{f}(x,y,z) \to g(\rho,\phi,\theta) \\ z = \rho\cos\phi \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\cos\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi\sin\theta & \rho\sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi & -\rho\sin\phi & 0 \end{vmatrix} = -\rho^2\sin\phi$$

$$\boxed{\iiint_V f(x,\mathrm{y},\mathrm{z})\,dxdydz = \iiint_{V'} g(\rho,\theta,\phi)\,\rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi}$$

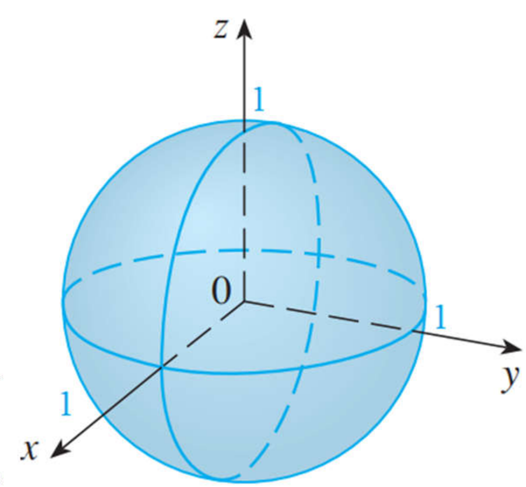
- ***Ví dụ 6.*** Tính tích phân sau với B là quả cầu đơn vị

$$B = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \right\}$$

$$I_8 = \iiint_B e^{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} dV$$

Sử dụng tọa độ cầu:
$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Khi đó:



$$B = \{ (r, \theta, \varphi) \mid 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi \le 2\pi$$

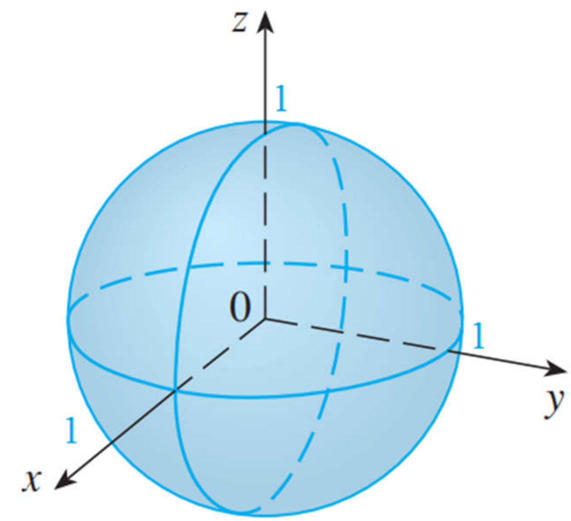
$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Nên

$$I_8 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} e^{r^3}.r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

$$I_8 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{1} \frac{1}{3} e^{r^3} d\left(r^3\right)$$

$$I_8 = \frac{4}{3}\pi\left(e-1\right)$$



2. Cách tính	*2.2 Đổi biến số*

❑ ***Ví dụ 7.*** Dùng tọa độ cầu tính thể tích vật thể E nằm bên trên mặt $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và bên dưới mặt $x^2 + y^2 + z^2 = z$

Xét trong tọa độ cầu:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$

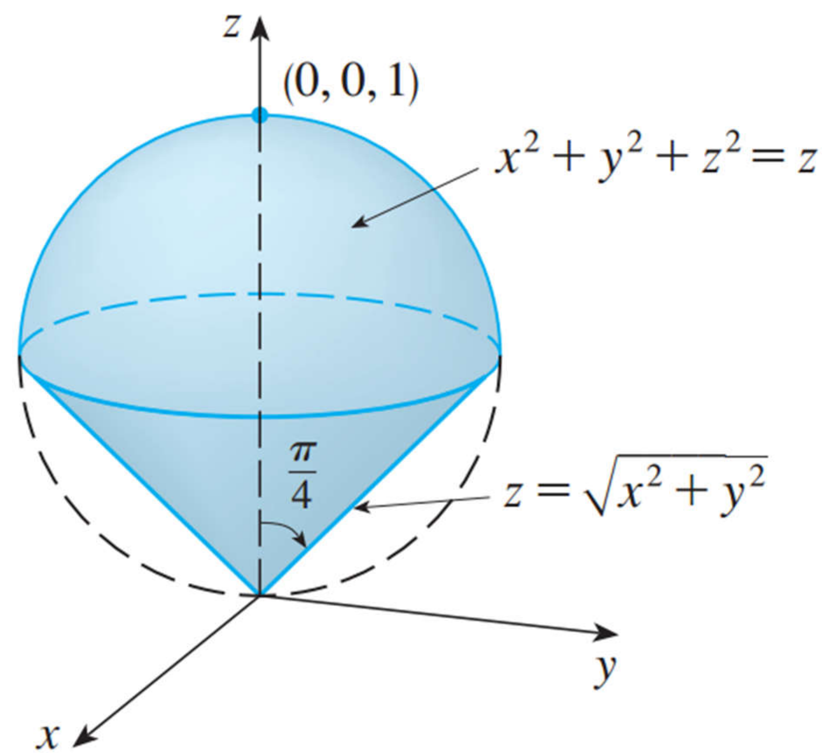
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$

$$z = r\cos\theta$$

$$J = -r^2\sin\theta$$

Phương trình mặt cầu:

$$r^2 = r\cos\theta \Leftrightarrow \mathrm{r} = \cos\theta$$



2. Cách tính | *2.2 Đổi biến số*

- Phương trình mặt nón:

$$r\cos\theta = \sqrt{r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi} = r\sin\theta$$

$$\Rightarrow \theta = \pi/4$$

- Vật thể E trong tọa độ cầu được giới hạn bởi:

$$E = \{(r,\theta,\varphi) \mid 0 \le r \le \cos\theta,\ 0 \le \theta \le \pi/4,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$$

Thể tích vật thể:

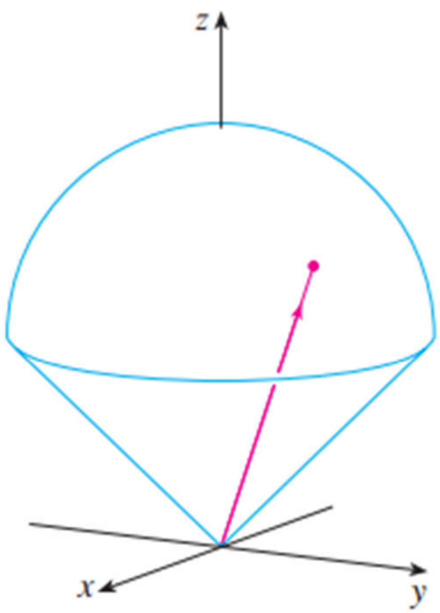
$$V(E) = \iiint_E dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{\cos\theta} r^2\sin\theta dr$$

$$V(E) = 2\pi\int_0^{\pi/4} \frac{1}{3}\cos^3\theta\sin\theta d\theta = -\frac{\pi}{6}\left[\cos^4\theta\Big|_0^{\pi/4}\right]$$

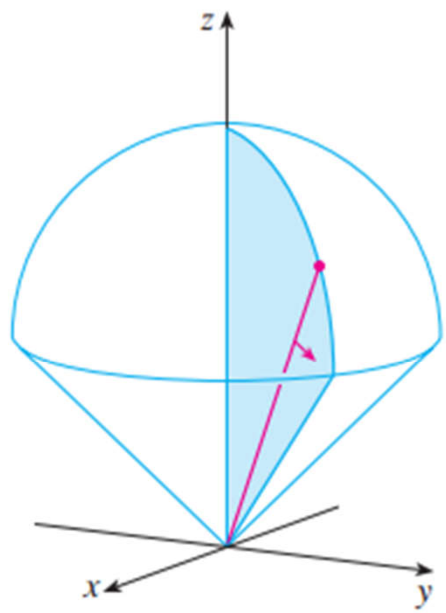
2. Cách tính — 2.2 Đổi biến số

- Vậy:

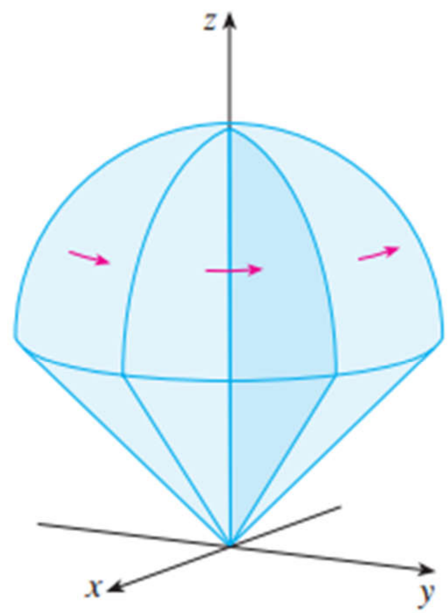
$$V(E) = -\frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{4}-1\right) = \frac{\pi}{8}$$



ρ varies from 0 to cos ϕ while ϕ and θ are constant.



ϕ varies from 0 to $\pi/4$ while θ is constant.



θ varies from 0 to 2π.

Bài tập 1.

- Tính các tích phân sau:

1) $\int_0^1 \int_0^z \int_0^{x+z} 6xzdydxdz$ $\quad 1$

2) $\int_0^1 \int_x^{2x} \int_0^y 2xyzdzdydx$ $\quad 5/8$

3) $\int_0^3 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} ze^y dzdydx$ $\quad 3-3e$

4) $\int_0^{\pi/2} \int_0^y \int_0^x \cos(x+y+z)dzdxdy$ $\quad -1/3$

5) $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} xydzdydx$ $\quad 1/120$

6) $\int_0^2 dx \int_0^{2\sqrt{x}} dy \int_0^{\sqrt{(4x-y^2)/2}} xdz$ $\quad \dfrac{4\sqrt{2}\pi}{3}$

Bài tập 2.

1) Cho V là miền xác định bởi $0 \le x \le \frac{1}{4}, x \le y \le 2x, 0 \le z \le \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

$$\iiint_V z\,dxdydz \qquad 43/3072$$

1) V là miền xác định bởi $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, x + y + z \le 1$. Tính:

$$a)\ \iiint_V (1 - x - y - z)\,dxdydz \qquad \frac{1}{24}$$

$$b)\ \iiint_V xyz(1 - x - y - z)\,dxdydz$$

Bài tập 3.

- Tính tích phân sau nếu V là miền giới hạn bởi các mặt $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z = 0,\ (z \geq 0)$

$$\iiint_V xzdxdydz \qquad 0$$

- Tính tích phân sau nếu V là miền giới hạn bởi các mặt $x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$:

$$\iiint_V (x + y + z)dxdydz \qquad \frac{1}{8}$$

- Tính tích phân sau nếu V là miền hình nón tròn xoay giới hạn bởi các mặt $x^2 + y^2 = z^2, z = a$:

$$\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz \qquad \frac{3\pi a^5}{10}$$

Bài tập 4.

- Tính thể tích các vật thể giới hạn bởi các mặt đã cho:

1) $y = x^2$, $z = 0$, $z = 4$, $y = 9$ $\quad 144$

2) $x^2 + y^2 = 9$, $y + z = 5$, $z = 1$ $\quad 36\pi$

3) $x = y^2 + z^2, x = 16$ $\quad 128\pi$

4) $x + y + z = 4, x = 3, y = 2, x = 0, y = 0, z = 0$ $\quad 55/6$

5) $x^2 + y^2 + z^2 = 2z, x^2 + y^2 = z^2$ $\quad \pi$

6) $2z = x^2 + y^2, \quad y + z = 4$ $\quad \dfrac{81\pi}{4}$

7) $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2, \ x^2 + y^2 = 2az$ $\quad \dfrac{\pi a^3}{3}\left(6\sqrt{3} - 5\right)$

Bài 5

9–18 Evaluate the triple integral.

9. $\iiint_E 2x\,dV$, where
$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant y \leqslant 2,\ 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{4 - y^2},\ 0 \leqslant z \leqslant y\}$

10. $\iiint_E yz\cos(x^5)\,dV$, where
$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant x,\ x \leqslant z \leqslant 2x\}$

11. $\iiint_E 6xy\,dV$, where E lies under the plane $z = 1 + x + y$ and above the region in the xy-plane bounded by the curves $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, and $x = 1$

12. $\iiint_E y\,dV$, where E is bounded by the planes $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, and $2x + 2y + z = 4$

13. $\iiint_E x^2 e^y\,dV$, where E is bounded by the parabolic cylinder $z = 1 - y^2$ and the planes $z = 0$, $x = 1$, and $x = -1$

Bài 5

14. $\iiint_E xy\,dV$, where E is bounded by the parabolic cylinders $y = x^2$ and $x = y^2$ and the planes $z = 0$ and $z = x + y$

15. $\iiint_T x^2\,dV$, where T is the solid tetrahedron with vertices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, and $(0, 0, 1)$

16. $\iiint_T xyz\,dV$, where T is the solid tetrahedron with vertices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, and $(1, 0, 1)$

17. $\iiint_E x\,dV$, where E is bounded by the paraboloid $x = 4y^2 + 4z^2$ and the plane $x = 4$

18. $\iiint_E z\,dV$, where E is bounded by the cylinder $y^2 + z^2 = 9$ and the planes $x = 0$, $y = 3x$, and $z = 0$ in the first octant

Solid tetrahedron: vật thể hình tứ diện

Bài 6

- Sử dụng tọa độ trụ tính:

17. Evaluate $\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2}\, dV$, where E is the region that lies inside the cylinder $x^2 + y^2 = 16$ and between the planes $z = -5$ and $z = 4$.

18. Evaluate $\iiint_E (x^3 + xy^2)\, dV$, where E is the solid in the first octant that lies beneath the paraboloid $z = 1 - x^2 - y^2$.

19. Evaluate $\iiint_E e^z\, dV$, where E is enclosed by the paraboloid $z = 1 + x^2 + y^2$, the cylinder $x^2 + y^2 = 5$, and the xy-plane.

Bài 6

20. Evaluate $\iiint_E x\,dV$, where E is enclosed by the planes $z = 0$ and $z = x + y + 5$ and by the cylinders $x^2 + y^2 = 4$ and $x^2 + y^2 = 9$.

21. Evaluate $\iiint_E x^2\,dV$, where E is the solid that lies within the cylinder $x^2 + y^2 = 1$, above the plane $z = 0$, and below the cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

22. Find the volume of the solid that lies within both the cylinder $x^2 + y^2 = 1$ and the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

23. (a) Find the volume of the region E bounded by the paraboloids $z = x^2 + y^2$ and $z = 36 - 3x^2 - 3y^2$.

(b) Find the centroid of E (the center of mass in the case where the density is constant).