3. NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

3.1. Nguyên hàm

3.1.1. Nguyên hàm

Định nghĩa: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K (K là khoảng, đoạn hay nửa khoảng). Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x)=f(x)$ với mọi $x \in K$. Kí hiệu: $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+C$.

Định lí:

1. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì với mỗi hằng số C, hàm số $G(x)=F(x)+C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K.

2. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x)+C$, với C là một hằng số.

Do đó $F(x)+C$, $C \in \mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên K.

3.1.2. Tính chất của nguyên hàm

- $\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x)$ và $\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)+C$; $d\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) = f(x)\,\mathrm{d}x$.
- Nếu $F(x)$ có đạo hàm thì: $\int \mathrm{d}(F(x)) = F(x)+C$.
- $\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$ với k là hằng số khác 0.
- $\int [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$.
- **Công thức đổi biến số**: Cho $y=f(u)$ và $u=g(x)$.

Nếu $\int f(x)\,dx = F(x)+C$ thì $\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du + C$.

3.1.3. Sự tồn tại của nguyên hàm

Định lí: Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K.

Bảng nguyên hàm các hàm số thường gặp

1. $\int 0\,dx = C$ 2. $\int dx = x + C$	
3. $\int x^{\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C(\alpha \neq -1)$	16. $\int (ax+b)^{\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{ax+b}{\alpha+1}\right)^{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$
4. $\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$	17. $\int \frac{3x^2 - \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x}\,\mathrm{d}x$
5. $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert + C$	18. $\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C$
6. $\int e^x\,dx = e^x + C$	19. $\int e^{ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$
7. $\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$	20. $\int a^{kx+b}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\frac{a^{kx+b}}{\ln a} + C$
8. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$	21. $\int \cos(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$
9. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	22. $\int \sin(ax+b)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$
10. $\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$	23. $\int \tan(ax+b)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\ln\lvert\cos(ax+b)\rvert + C$
11. $\int \cot x\,\mathrm{d}x = \ln\lvert\sin x\rvert + C$	24. $\int \mathrm{cotg}(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln\lvert\sin(ax+b)\rvert + C$
12. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + C$	25. $\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C$
13. $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\cot x + C$	26. $\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C$
14. $\int (1+\tan^2 x)\,\mathrm{d}x = \tan x + C$	27. $\int (1+\tan^2(ax+b))\,dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C$
15. $\int (1+\cot^2 x)\,\mathrm{d}x = -\cot x + C$	28. $\int (1+\cot^2(ax+b))\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C$

Bảng nguyên hàm mở rộng

$\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\text{arctg}\frac{x}{a}+c$	$\int \arcsin\frac{x}{a}dx = x\arcsin\frac{x}{a}+\sqrt{a^2-x^2}+c$
$\int \frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\|+c$	$\int \arccos\frac{x}{a}dx = x\arccos\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+c$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+c$	$\int \arctan\frac{x}{a}dx = x\arctan\frac{x}{a}-\frac{a}{2}\ln\left(a^2+x^2\right)+c$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{\|a\|}+c$	$\int \text{arccot}\frac{x}{a}dx = x\,\text{arccot}\frac{x}{a}+\frac{a}{2}\ln\left(a^2+x^2\right)+c$
$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{a}\arccos\left\|\frac{x}{a}\right\|+c$	$\int \frac{dx}{\sin(ax+b)}=\frac{1}{a}\ln\left\|\text{tg}\frac{ax+b}{2}\right\|+c$
$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}}=-\frac{1}{a}\ln\left\|\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right\|+c$	$\int \frac{dx}{\sin(ax+b)}=\frac{1}{a}\ln\left\|\tan\frac{ax+b}{2}\right\|+c$
$\int \ln(ax+b)\,dx=\left(x+\frac{b}{a}\right)\ln(ax+b)-x+c$	$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)}{a^2+b^2}+c$
$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+c$	$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}+c$

3.1.4. Các phương pháp tính nguyên hàm

1. Phương pháp biến đổi

a. Đổi biến dạng 1:

Nếu: $\int f(x)=F(x)+C$ và với $u=\varphi(t)$ là hàm số có đạo hàm thì: $\int f(u)\,du=F(u)+C$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

- Bước 1: Chọn $x=\varphi(t)$, trong đó $\varphi(t)$ là hàm số mà ta chọn thích hợp.
- Bước 2: Lấy vi phân hai vế: $dx=\varphi'(t)\,dt$.
- Bước 3: Biến đổi: $f(x)\,dx=f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,dt=g(t)\,dt$.
- Bước 4: Khi đó tính: $\int f(x)\,dx=\int g(t)\,dt=G(t)+C$.

ĐỘT PHÁ 8+
TÍCH HỢP CHUYÊN SÂU - ĐẬU GÒY TRƯỜNG TOP

*** Các dấu hiệu đổi biến thường gặp:**

Dấu hiệu	Cách chọn
$\sqrt{a^2-x^2}$	Đặt $x=\|a\|\sin t$; với $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ hoặc $x=\|a\|\cos t$; với $t\in[0;\pi]$.
$\sqrt{x^2-a^2}$	Đặt $x=\frac{\|a\|}{\sin t}$, với $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}$ hoặc $x=\frac{\|a\|}{\cos t}$ với $t\in[0;\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.
$\sqrt{a^2+x^2}$	Đặt $x=\|a\|\tan t$; với $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ hoặc $x=\|a\|\cot t$ với $t\in(0;\pi)$.
$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$	Đặt $x=a\cos 2t$.
$\sqrt{(x-a)(b-x)}$	Đặt $x=a+(b-a)\sin^2 t$.
$\frac{1}{a^2+x^2}$	Đặt $x=a\tan t$; với $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

b. Đổi biến dạng 2:

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục thì đặt $x=\varphi(t)$. Trong đó $\varphi(t)$ cùng với đạo hàm của nó ($\varphi'(t)$ là những hàm số liên tục) thì ta được:

$$\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt=\int g(t)dt=G(t)+C.$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

- Bước 1: Chọn $t=\varphi(t)$, trong đó $\varphi(x)$ là hàm số mà ta chọn thích hợp.
- Bước 2: Lấy vi phân hai vế: $\mathrm{d}t=\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.
- Bước 3: Biểu thị: $f(x)\mathrm{d}x=f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t=g(t)\,\mathrm{d}t$.
- Bước 4: Khi đó: $I=\int f(x)\mathrm{d}x=\int g(t)dt=G(t)+C$.

*** Các dấu hiệu đổi biến thường gặp:**

Dấu hiệu	Cách chọn
Hàm số mẫu số có	t là mẫu số
Hàm số: $f\left(x;\sqrt{\varphi(x)}\right)$	$t=\sqrt{\varphi(x)}$
Hàm $f(x)=\frac{a\cdot\sin x+b\cdot\cos x}{c\cdot\sin x+\mathrm{d}\cdot\cos x+c}$	$t=\tan\frac{x}{2};\left(\cos\frac{x}{2}\neq 0\right)$

Hàm $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$	Với: $x+a>0$ và $x+b>0$. Đặt: $t=\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}$ Với: $x+a<0$ và $x+b<0$ Đặt: $t=\sqrt{x-a}+\sqrt{-x-b}$.

3.1.5. Nguyên phân từng phần

Nếu $u(x)$, $v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên K:

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Hay $\int u\,dv=uv-\int v\,\mathrm{d}u$ (với $\mathrm{d}u=u'(x)\,\mathrm{d}x, dv=v'(x)\,\mathrm{d}x$).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

- Bước 1: Ta biến đổi tích phân ban đầu về dạng:
$$I=\int f(x)dx=\int f_1(x)\cdot f_2(x)\mathrm{d}x.$$
- Bước 2: Đặt $\begin{cases} u=f_1(x)\\ dv=f_2(x)\end{cases} \to \begin{cases}\mathrm{d}u=f_1'(x)\mathrm{d}x\\ v=\int f_2(x)\mathrm{d}x\end{cases}$.
- Bước 3: Khi đó: $\int u\cdot \mathrm{d}v=u\cdot v-\int v\,\mathrm{d}u$.

Dạng I: $I=\int P(x)\begin{Bmatrix}\sin x\\ \cos x\\ e^x\end{Bmatrix}\cdot \mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u=P(x)\\ dv=\begin{Bmatrix}\sin x\\ \cos x\\ e^x\end{Bmatrix}dx\end{cases} \to \begin{cases} u=P'(x)dx\\ dv=\begin{Bmatrix}-\cos x\\ \sin x\\ e^x\end{Bmatrix}\end{cases}$

Vậy $I=P(x)\begin{Bmatrix}-\cos x\\ \sin x\\ e^x\end{Bmatrix}-\int\begin{Bmatrix}-\cos x\\ \sin x\\ e^x\end{Bmatrix}\cdot P'(x)\mathrm{d}x.$

Dạng II: $\boxed{I=\int P(x)\cdot\ln x\,\mathrm{d}x}$

Đặt $\begin{cases} u=\ln x\\ dv=P(x)\mathrm{d}x\end{cases} \to \begin{cases} du=\dfrac{1}{x}dx\\ v=\int P(x)\mathrm{d}x=Q(x)\end{cases}$ Vậy $I=\ln x\cdot Q(x)-\int Q(x)\cdot\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x.$

Dạng III: $I=\int e^x\begin{Bmatrix}\sin x\\ \cos x\end{Bmatrix}\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \begin{Bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{Bmatrix} \end{cases} \to \begin{cases} u = e^x dx \\ v = \begin{Bmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{Bmatrix} \end{cases}$ Vậy $I = e^x \begin{Bmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{Bmatrix} - \int \begin{Bmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{Bmatrix} e^x \mathrm{d}x.$

Bằng phương pháp tương tự ta tính được $\int \begin{Bmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{Bmatrix} e^x \mathrm{d}x$ sau đó thay vào I.

3.2. Tích phân

3.2.1. Công thức tính tích phân

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

* *Nhận xét:* Tích phân của hàm số f từ a đến b có thể kí hiệu bởi $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ hay $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$. Tích phân đó chỉ phụ thuộc vào f và các cận a, b mà không phụ thuộc vào cách ghi biến số.

3.2.2. Tính chất của tích phân

Giả sử cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên K, a, b, c là ba số bất kỳ thuộc K. Khi đó ta có:

1. $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0.$

2. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x.$

3. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^b f(x)\mathrm{d}x.$

4. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$

5. $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

6. Nếu $f(x) \geq 0 \forall x \in [a;b]$ thì : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0 \forall x \in [a;b].$

7. Nếu $\forall x \in [a;b] : f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$. (Bất đẳng thức trong tích phân).

8. Nếu $\forall x \in [a;b]$ Nếu $M \le f(x) \le N$ thì $M(b-a) \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le N(b-a)$.

3.2.3. Phương pháp tính tích phân

1. Đổi biến

a. Phương pháp đổi biến số dạng 1.

Định lí:Nếu

1. *Hàm $x = u(t)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[\alpha, \beta]$,*
2. *Hàm hợp $f(u(t))$ được xác định trên $[\alpha, \beta]$,*
3. $u(\alpha) = a$, $u(\beta) = b$

Khi đó: $I = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)\mathrm{d}t.$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

- Bước 1: Đặt $x = u(t)$
- Bước 2: Tính vi phân hai vế: $x = u(t) \Rightarrow \mathrm{d}x = u'(t)\mathrm{d}t$. Đổi cận: $\left| \, x = bx = a \right. \Rightarrow$ $\left| \begin{array}{l} t = \beta \\ t = \alpha \end{array} \right.$
- Bước 3: Chuyển tích phân đã cho sang tích phân theo biến t.

Vậy $I = \int\limits_0^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta f[u(t)]u'(t)\mathrm{d}t = \int\limits_\alpha^\beta g(t)dt = G(t)\Big|_\alpha^\beta = G(\beta) - G(\alpha)$

b. Phương pháp đổi biến số dạng

Định lí: *Nếu hàm số $u = u(x)$ đơn điệu và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$ sao cho $f(x)\mathrm{d}x = g(u(x))u'(x)\mathrm{d}x = g(u)\mathrm{d}u$ thì* $I = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{u(a)}^{u(b)} g(u)\mathrm{d}u$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

- **Bước 1**: Đặt $u = u(x) \Rightarrow \mathrm{d}u = u(x)\mathrm{d}x$
- **Bước 2**: Đổi cận: $\left| \begin{array}{l} x = b \\ x = a \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} u = u(b) \\ u = u(a) \end{array} \right.$
- **Bước 3**: Chuyển tích phân đã cho sang tích phân theo biến u.

Vậy: $I=\int\limits_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^b g[u(x)]u'(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{u(a)}^{a(b)} g(u)\,\mathrm{d}u$

2. Tích phân từng phần

Định lí: *Nếu* $u(x)$ *và* $v(x)$ *là các hàm số có đạo hàm riêng liên tục trên* $[a;b]$ *thì:*

$$\int\limits_0^b u(x)v(x)\,\mathrm{d}x=(u(x)v(x))\Big|_a^b-\int\limits_a^b v(x)u(x)\,\mathrm{d}x \text{ hay } \int\limits_a^b u\,\mathrm{d}v=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\,\mathrm{d}u.$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

- **Bước 1**: Viết $f(x)\mathrm{d}x$ dưới dạng $u\,\mathrm{d}v=uv\,\mathrm{d}x$ bằng cách chọn một phần thích hợp của $f(x)$ bằng $u(x)$ và phần còn lại $v=\int \mathrm{d}v=\int v'(x)\mathrm{d}x$.
- **Bước 2**: Tính $\mathrm{d}u=u'\,\mathrm{d}x$ và $v=\int \mathrm{d}v=\int v'(x)\mathrm{d}x$.
- **Bước 3**: Tính $\int\limits_a^b vu'(x)\mathrm{d}x$ và $uv\Big|_a^b$

$*$ **Cách đặt u và v trong phương pháp tích phân từng phần:**

Đặt u theo thứ tự ưu tiên: **Lốc-đa-mũ-lượng**	$\int\limits_a^b P(x)c^x\,\mathrm{d}x$	$\int\limits_a^b P(x)\ln x\,\mathrm{d}x$	$\int\limits_a^b P(x)\cos x\,\mathrm{d}x$	$\int\limits_a^b c^z\cos x\,\mathrm{d}x$
u	$P(x)$	lnx	$P(x)$	c^x
dv	$c^x\,\mathrm{d}x$	$P(x)\mathrm{d}x$	$cosx\,\mathrm{d}x$	$cosxdx$

! Nên chọn u là phần của $f(x)$ mà khi lấy đạo hàm thì đơn giản, chọn $\mathrm{d}v=v'\,\mathrm{d}x$ là phần của $f(x)\mathrm{d}x$ là vi phân một hàm số đã biết hoặc có nguyên hàm dễ tìm.

3.3. Tích phân các hàm số sơ cấp cơ bản

3.3.1. Tích phân hàm hữu tỉ

Dạng 1: $I=\int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}x}{ax+b}=\frac{1}{a}\int_\alpha^\beta \frac{a\,\mathrm{d}x}{ax+b}=\frac{1}{a}\ln|ax+b|\Big|_\alpha^\beta$ với $(a\neq 0)$

! Nếu $I=\int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}x}{(ax+b)^k}=\frac{1}{a}\int_\alpha^\beta (ax+b)^{-k}a\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a(1-k)}\cdot(ax+b)^{-k+1}\Big|_\alpha^\beta$

Dạng 2: $I = \int_{ax^2+bx+c}^{dx} (a \neq 0)\left(ax^2+bx+c \neq 0 \text{với mọi} x \in [\alpha;\beta]\right)$

Xét $\Delta = b^2 - 4ac$ +) Nếu $\Delta > 0$: $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\dfrac{1}{ax^2+bx+c} = \dfrac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \dfrac{1}{a(x_1-x_2)}\left(\dfrac{1}{x-x_1} - \dfrac{1}{x-x_2}\right)$ thì

$I = \dfrac{1}{a(x_1-x_2)}\int_\alpha^\beta \left(\dfrac{1}{x-x_1} - \dfrac{1}{x-x_2}\right)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a(x_1-x_2)}\left[\ln|x-x_1| - \ln|x-x_2|\right]\Big|_\alpha^\beta =$

$\dfrac{1}{a(x_1-x_2)}\ln\left|\dfrac{x-x_1}{x-x_2}\right|\Big|_\alpha^\beta$

+) Nếu $\Delta = 0$: $\dfrac{1}{ax^2+bx+c} = \dfrac{1}{a(x-x_0)^2}$ $\left(x_0 = \dfrac{-b}{2a}\right)$

thì $I = \int_\alpha^\beta \dfrac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c} = \dfrac{1}{a}\int_\alpha^\beta \dfrac{\mathrm{d}x}{(x-x_0)^2} = -\dfrac{1}{a(x-x_0)}\Big|_\alpha^\beta$

+) Nếu $\Delta < 0$ thì $I = \int_\alpha^\beta \dfrac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c} = \int_\alpha^\beta \dfrac{\mathrm{d}x}{a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 + \left(\sqrt{\dfrac{-\Delta}{4a^2}}\right)^2\right]}$

Đặt $x + \dfrac{b}{2a} = \sqrt{\dfrac{-\Delta}{4a^2}}\tan t \Rightarrow dx = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{-\Delta}{a^2}}\left(1+\tan^2 t\right)dt$

Dạng 3: $I = \int_\alpha^\beta \dfrac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx, \quad (a \neq 0)$

(trong đó $f(x) = \dfrac{mx+n}{ax^2+bx+c}$ liên tục trên đoạn $[\alpha;\beta]$)

+) Bằng phương pháp đồng nhất hệ số, ta tìm A và B sao cho:

$\dfrac{mx+n}{ax^2+bx+c} = \dfrac{A\left(ax^2+bx+c\right)'}{ax^2+bx+c} + \dfrac{B}{ax^2+bx+c} = \dfrac{A(2ax+b)}{ax^2+bx+c} + \dfrac{B}{ax^2+bx+c}$

+) Ta có $\mathrm{I} = \int_\alpha^\beta \dfrac{mx+n}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta \dfrac{A(2ax+b)}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x + \int_\alpha^\beta \dfrac{B}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x$

Tích phân $\int_\alpha^\beta \dfrac{A(2ax+b)}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x = A\ln\left|ax^2+bx+c\right|\Big|_\alpha^\beta$

Tích phân $\int_\alpha^\beta \dfrac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}$ thuộc dạng 2.

Tính tích phân $I = \int_a^b \dfrac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x$ với P(x) và Q(x) là đa thức của x

- Nếu bậc của P(x) lớn hơn hoặc bằng bậc của Q(x) thì dùng phép chia đa thức.
- Nếu bậc của P(x) nhỏ hơn bậc của Q(x) thì có thể xét các trường hợp:

+ Khi Q(x) có nghiệm đơn $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ thì đặt

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-\alpha_n}$$

+ Khi Q(x) có nghiệm đơn và vô nghiệm

$Q(x) = (x-\alpha)\left(x^2+px+q\right), \Delta = p^2 - 4q < 0$ thì đặt

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{(x-\beta)^2}$$

+ Khi Q(x) có nghiệm bội

$Q(x)=(x-\alpha)(x-\beta)^2$ với $\alpha \neq \beta$ thì đặt

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\beta}+\frac{C}{(x-\beta)^2}$$

$Q(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^3$ với $\alpha \neq \beta$ thì đặt

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha)^2(x-\beta)^3}=\frac{A}{(x-\alpha)^2}+\frac{B}{(x-\alpha)}+\frac{C}{(x-\beta)^3}+\frac{D}{(x-\beta)^2}+\frac{E}{x-\beta}$$

3.3.2. Tích phân hàm vô tỉ

$\int_a^b R(x,f(x))dx$ trong đó $R(x,f(x))$ có dạng:

+) $R\left(x,\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right)$ Đặt $x=a\cos 2t, \quad t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

+) $R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)$. Đặt $x=|a|\sin t$ hoặc $x=|a|\cos t$

+) $R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ Đặt $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

+) $R(x,f(x))=\frac{1}{(ax+b)\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}$ Với $\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)'=k(ax+b)$

Đặt $t=\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ hoặc đặt $t=\frac{1}{ax+b}$

+) $R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)$. Đặt $\mathrm{x}=|a|\tan t, t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

+) $R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)$. Đặt $x=\frac{|a|}{\cos x}, t\in[0;\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

+) $R(\sqrt[n]{x};\sqrt[n]{x};\ldots,\sqrt[n]{x})$ Gọi $k=BSCNN(n_1;n_2;...;n_i)$. Đặt $x=t^k$

a. Tích phân dạng:

$I=\int_\alpha^\rho \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx}+c}\mathrm{d}x \quad (a\neq 0)$

Từ $f(x)=ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]\Rightarrow\begin{cases}x+\frac{b}{2a}=u\\ \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=K\end{cases} \leftrightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}x$

Khi đó ta có:

- Nếu $\Delta<0, a>0\Rightarrow f(x)=a\left(u^2+k^2\right)\Leftrightarrow\sqrt{f(x)}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{u^2+k^2}$ (1)
- Nếu $\Delta=0\Rightarrow f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \sqrt{f(x)}=\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|=\sqrt{a}|u|^{(2)}\end{cases}$ (2)
- Nếu $\Delta>0$
  + Với $a>0$ $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)\Leftrightarrow\sqrt{f(x)}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)}$ (3)
  + Với $a<0$ $f(x)=-a(x_1-x)(x_2-x)\Leftrightarrow\sqrt{f(x)}=\sqrt{-a}\cdot\sqrt{(x_1-x)(x_2-x)}$ (4)

Căn cứ vào phân tích trên, ta có một số cách giải sau:

✠ **Phương pháp:**

∗ Trường hợp: $\Delta<0, a>0\Rightarrow f(x)=a\left(u^2+k^2\right)\Leftrightarrow\sqrt{f(x)}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{u^2+k^2}$

Khi đó đặt: $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x$

$\Rightarrow bx+c=t^2-2\sqrt{ax}\ x=\alpha\rightarrow t=t_0, x=\beta\rightarrow t=t_1\Leftrightarrow x=\frac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}};\mathrm{d}x=\frac{2}{(b+2\sqrt{a})}t\,\mathrm{d}t$

ĐỘT PHÁ 8+ TÍCH HỢP CHUYÊN SÂU - ĐẬU GÒY TRƯỜNG TOP

$t-\sqrt{a}x=t-\sqrt{a}\dfrac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}}$

$*$ Trường hợp: $\Delta=0\Rightarrow f(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \sqrt{f(x)}=\sqrt{a}\left|x+\dfrac{b}{2a}\right|=\sqrt{a}|u|\end{cases}$

Khi đó: $I=\displaystyle\int_\alpha^\beta\frac{1}{\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_\alpha^\beta\frac{1}{\left|x+\frac{b}{2a}\right|}\mathrm{d}x=\left[\begin{array}{l}\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(x+\frac{b}{2a}\right)\Big|_\alpha^\beta : x+\frac{b}{2a}>0\\ -\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(x+\frac{b}{2a}\right)\Big|_\alpha^\beta : x+\frac{b}{2a}<0\end{array}\right.$

$*$ Trường hợp: $\Delta>0, a>0$

Đặt: $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=\left[\begin{array}{l}(x-x_1)t\\(x-x_2)t\end{array}\right.$

$*$ Trường hợp: $\Delta>0, a<0$

-Đặt $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x_1-x)(x_2-x)}=\left[\begin{array}{l}(x_1-x)t\\(x_2-x)t\end{array}\right.$

b. Tích phân dạng: $I=\displaystyle\int_\alpha^\beta\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx}+c}\mathrm{d}x\quad(a\neq0)$

✠ **Phương pháp**

\+ *Bước 1:* Phân tích $f(x)=\dfrac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\dfrac{Ad\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+\dfrac{B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ (1)

\+ *Bước 2:* Quy đồng mẫu số, sau đó đồng nhất hệ số hai tử số để suy ra hệ hai ẩn số A, B.

\+ *Bước 3:* Giải hệ tìm A, B thay vào (1)

\+ *Bước 4:* Tính $\mathrm{I}=2A\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)\Big|_\alpha^\beta+B\displaystyle\int_\alpha^\beta\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x(2).(2)$

Trong đó: $\displaystyle\int_\alpha^\beta\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx}+c}\mathrm{d}x\quad(a\neq0)$ đã biết cách tính ở trên.

c. Tích phân dạng: $I=\displaystyle\int_\alpha^\beta\frac{1}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx}+c}\mathrm{d}x\quad(a\neq0)$

✠ **Phương pháp**

\+ *Bước 1:* Phân tích $\dfrac{1}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}=\dfrac{1}{m\left(x+\dfrac{n}{m}\right)\sqrt{ax^2+bx+c}}\cdot(1)$

\+ *Bước 2:* Đặt: $\dfrac{1}{y}=x+\dfrac{n}{m}\Rightarrow y=\dfrac{1}{x+t}\left(t=\dfrac{n}{m}\right)\rightarrow\mathrm{d}y=-\dfrac{1}{x+t}\mathrm{d}x$

$x=\dfrac{1}{y}-t\Rightarrow ax^2+bx+c=a\left(\dfrac{1}{y}-t\right)^2+b\left(\dfrac{1}{y}-t\right)+c$

\+ *Bước 3:* Thay tất cả vào (1) thì I có dạng: $I=\pm\displaystyle\int_{\alpha'}^{\beta'}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{Ly^2+My+N}}$

d. Tích phân dạng: $I=\displaystyle\int_\alpha^\beta R(x;y)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta R\left(x;\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)\mathrm{d}x$

Trong đó $R(x;y)$ là hàm số hữu tỉ đối với hai biến số x, y và $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ là các hằng số đã biết

✠ **Phương pháp**

+ *Bước 1:* Đặt $t=\sqrt[m]{\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$

+ *Bước 2:* Tính x theo t: Bằng cách nâng lũy thừa bậc m hai vế ta có dạng $x=\varphi(t)$

+ *Bước 3:* Tính vi phân hai vế: $dx=\varphi'(t)\mathrm{d}t$

+ *Bước 4*: Tính: $\int_{\alpha}^{\beta} R\left(x;\sqrt[m]{\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)\mathrm{d}x=\int_{\alpha'}^{\beta'} R(\varphi(t);t)\varphi'(t)\mathrm{d}t$

3.3.3. Tích phân hàm lượng giác

Một số công thức lượng giác

a. Công thức cộng:

$$\cos(a\pm b)=\cos a\cdot\cos b\sin a\cdot\sin b$$
$$\sin(a\pm b)=\sin a\cdot\cos b\pm\sin b\cdot\cos a$$
$$\tan(a\pm b)=\frac{\tan a\pm\tan b}{1\mp\tan a\cdot\tan b}$$

b. Công thức nhân:

$$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a=\frac{1-\tan^2 a}{1+\tan^2 a}$$

$\sin 2a=2\sin a\cdot\cos a=\dfrac{2\tan a}{1+\tan^2 a}$; $\tan 2a=\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$; $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$

c. Công thức hạ bậc:

$$\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2};\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2};\tan^2 a=\frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}$$
$$\sin^6\alpha=\frac{3\sin\alpha-\sin 3\alpha}{4}\quad;\quad\cos^3\alpha=\frac{\cos 3\alpha+3\cos\alpha}{4}$$

d. Công thức tính theo t: $t=\tan\dfrac{a}{2}$

$$\sin a=\frac{2t}{1+t^2}\quad\cos a=\frac{1-t^2}{1+t^2}\quad\tan a=\frac{2t}{1-t^2}$$

e. Công thức biến đổi tích thành tổng:

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$
$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$
$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

f. Công thức biến đổi tổng thành tích:

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\tan\alpha+\tan\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$ $\tan\alpha-\tan\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$	**Hệ quả** $\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$ $\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$ **Công thức thường dùng** $\cos^4\alpha+\sin^4\alpha=\frac{3+\cos4\alpha}{4}$ $\cos^6\alpha+\sin^6\alpha=\frac{5+3\cos4\alpha}{8}$

Một số dạng tích phân lượng giác

- Nếu gặp $I=\int_a^b f(\sin x)\cdot\cos x\,dx$ ta đặt $t=sinx$.
- Nếu gặp dạng $I=\int_a^b f(\cos x)\cdot\sin x\,dx$ ta đặt $t=cosx$.
- Nếu gặp $I=\int_a^b f(\tan x)\frac{dx}{\cos^2 x}$ ta đặt $t=\tan x$.
- Nếu gặp $I=\int_a^b f(\cot x)\frac{dx}{\sin^2 x}$ ta đặt $t=\cot x$.

a. Dạng 1: $I_1=\int(\sin x)^n dx$; $I_2\int(\cos x)^n dx$

✠ **Phương pháp**

- Nếu n chẵn thì dùng công thức hạ bậc
- Nếu $n=3$ thì sử dụng công thức hạ bậc hoặc biến đổi theo 2.3
- Nếu $3\le n$ lẻ $(n=2p+1)$ thì thực hiện biến đổi:

$$I_1=\int(\sin x)^n dx=\int(\sin x)^{2p+1}dx=\int(\sin x)^{2p}\sin x\,d=-\int\left(1-\cos^2 x\right)^p d(\cos x)$$
$$=-\int\left[C_p^0-C_p^1\cos^2 x+\ldots+(-1)^k C_p^k\left(\cos^2 x\right)^k+\ldots+(-1)^p C_p^p\left(\cos^2 x\right)^p\right]d(\cos x)$$
$$=-\left[C_p^0\cos x-\frac{1}{3}C_p^1\cos^3 x+\ldots+\frac{(-1)^k}{2k+1}C_p^k(\cos x)^{2k+1}+\ldots+\frac{(-1)^p}{2p+1}C_p^p(\cos x)^{2p+1}\right]+C$$
$$I_2=\int(\cos x)^n dx=\int(\cos x)^{2p+1}dx=\int(\cos x)^{2p}\cos x\,dx=\int\left(1-\sin^2 x\right)^p d(\sin x)$$
$$=\int\left[C_p^0-C_p^1\sin^2 x+\ldots+(-1)^k C_p^k\left(\sin^2 x\right)^k+\ldots+(-1)^p C_p^p\left(\sin^2 x\right)^p\right]d(\sin x)$$
$$=\left[C_p^0\sin x-\frac{1}{3}C_p^1\sin^3 x+\ldots+\frac{(-1)^k}{2k+1}C_p^k(\sin x)^{2k+1}+\ldots+\frac{(-1)^p}{2p+1}C_p^p(\sin x)^{2p+1}\right]+C$$

b. Dạng 2: $I=\int\sin^m x\cos^n x\,dx\quad(m,n\in N)$

✠ **Phương pháp:**

a Trường hợp 1: m,n **là các số nguyên**

- Nếu m chẵn, n chẵn thì sử dụng công thức hạ bậc, biến đổi tích thành tổng.
- Nếu m chẵn, n lẻ $(n=2p+1)$ thì biến đổi:

ĐỘT PHÁ 8+
TÍCH HỢP CHUYÊN SÂU - ĐẬU GÒY TRƯỜNG TOP

$$I=\int(\sin x)^m(\cos x)^{2p+1}\,dx=\int(\sin x)^m(\cos x)^{2p}\cos x\,dx=\int(\sin x)^m\left(1-\sin^2x\right)^p d(\sin x)$$

$$=\int(\sin x)^m\left[C_p^0-C_p^1\sin^2x+\ldots+(-1)^kC_p^k\left(\sin^2x\right)^k+\ldots+(-1)^pC_p^p\left(\sin^2x\right)^p\right]d(\sin x)=$$

$$\left[C_p^0\frac{(\sin x)^{m+1}}{m+1}-C_p^1\frac{(\sin x)^{m+3}}{m+3}+\ldots+(-1)^kC_p^k\frac{(\sin x)^{2k+1+m}}{2k+1+m}+\ldots+(-1)^pC_p^p\frac{(\sin x)^{2p+1+m}}{2p+1+m}\right]+C$$

- Nếu m lẻ $(n=2p+1)$, n chẵn thì biến đổi:

$$\mathrm{I}=\int(\sin x)^{2p+1}(\cos x)^n\,dx=\int(\cos x)^n(\sin x)^{2p}\sin x\,dx=-\int(\cos x)^n\left(1-\cos^2x\right)^p d(\cos x)$$

$$=-\int(\cos x)^n\left[C_p^0-C_p^1\cos^2x+\ldots+(-1)^kC_p^k\left(\cos^2x\right)^k+\ldots+(-1)^pC_p^p\left(\cos^2x\right)^p\right]d(\cos x)=$$

$$-\left[C_p^0\frac{(\cos x)^{n+1}}{n+1}-C_p^1\frac{(\cos x)^{n+3}}{n+3}+\ldots+(-1)^kC_p^k\frac{(\cos x)^{2k+1+n}}{2k+1+n}+\ldots+(-1)^pC_p^p\frac{(\cos x)^{2p+1+n}}{2p+1+n}\right]+C$$

Nếu m lẻ, n lẻ thì sử dụng biến đổi 1.2 hoặc 1.3 cho số mũ lẻ bé hơn

b. Trường hợp 2: m,n là các số hữu tỉ thì biến đổi và đặt $u=\sin x$ ta có:

$$B=\int\sin^m x\cos^n x\,dx=\int(\sin x)^m\left(\cos^2x\right)^{\frac{n-1}{2}}\cos x\,dx=\int u^m\left(1-u^2\right)^{\frac{m-1}{2}}du(*)$$

Tích phân (*) tính được ⇔ 1 trong 3 số $\frac{m+1}{2};\frac{n-1}{2};\frac{m+k}{2}$ là số nguyên

c. Dạng 3: $I_1=\int(\tan x)^n\,dx;\ I_2=\int(\cot x)^n\,dx\quad(n\in\mathbb{N})$

Công thức sử dụng:

- $\int\left(1+\tan^2x\right)dx=\int\frac{dx}{\cos^2x}=\int d(\tan x)=\tan x+c$
- $\int\left(1+\cot^2x\right)dx=-\int\frac{dx}{\sin^2x}=-\int d(\cot x)=-\cot x+C$
- $\int\tan x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C$
- $\int\cot x\,dx=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\int\frac{d(\sin x)}{\sin x}=\ln|\sin x|+C$

3.4. Ứng dụng tích phân

3.4.1. Diện tích hình phẳng

a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a,x=b$ được xác định:

$$S=\int_a^b|f(x)|\,dx$$

b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x),y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ và hai đường thẳng $x=a,x=b$ được xác định:

$$S=\int_a^b|f(x)-g(x)|\,dx$$

- Nếu trên đoạn $[a;b]$, hàm số $f(x)$ không đổi dấu thì:

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

- Nắm vững cách tính tích phân của hàm số có chứa giá trị tuyệt đối.
- Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y), x = h(y)$ và hai đường thẳng $y = c, y = d$ được xác định:

$$S = \int_0^d |g(y) - h(y)|\,\mathrm{d}y$$

3.4.2. Thể tích vật thể và thể tích khối tròn xoay

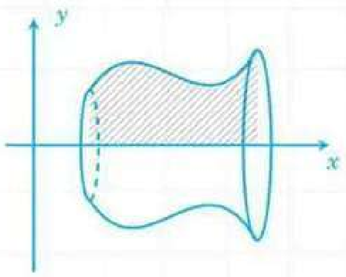
a) Thể tích vật thể:

Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b; $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục tại điểm x, $(a \ge x \ge b)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a,b]$.

$$V = \int_0^b S(x)\,\mathrm{d}x$$

b) Thể tích khối tròn xoay:

Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ quanh trục Ox:



$$V_x = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$$

- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, trục hoành và hai đường thẳng $y = c, y = d$ quanh trục Oy:

$$V_y = \pi\int_c^d [g(y)]^2\,\mathrm{d}y$$

- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường