Tài liệu tham khảo

1) Toán cao cấp Tập 3 – Nguyễn Đình Trí (CB) – NXB Giáo Dục
2) Giải Tích, Tập I, II – Trần Đức Long, Nguyễn Đình Sang, Hoàng Quốc Toàn – NXB ĐHQGHN
3) Giải Tích Toán học – Nguyễn Thủy Thanh – NXB ĐHQGHN
4) Calculus – Jame Stewart – 7th .

Nội dung

- Chương I: Hàm nhiều biến (4b)
- Chương II: Tích phân bội (3b)
- *Kiểm tra giữa học kỳ (1b) – Tuần 8* (20%)
- Chương III: Tích phân đường, tích phân mặt (4b)
- Chương IV: Phương trình vi phân (2b)
- *Ôn tập cuối học kỳ (1b) – Tuần 15*

Chương I: Hàm nhiều biến

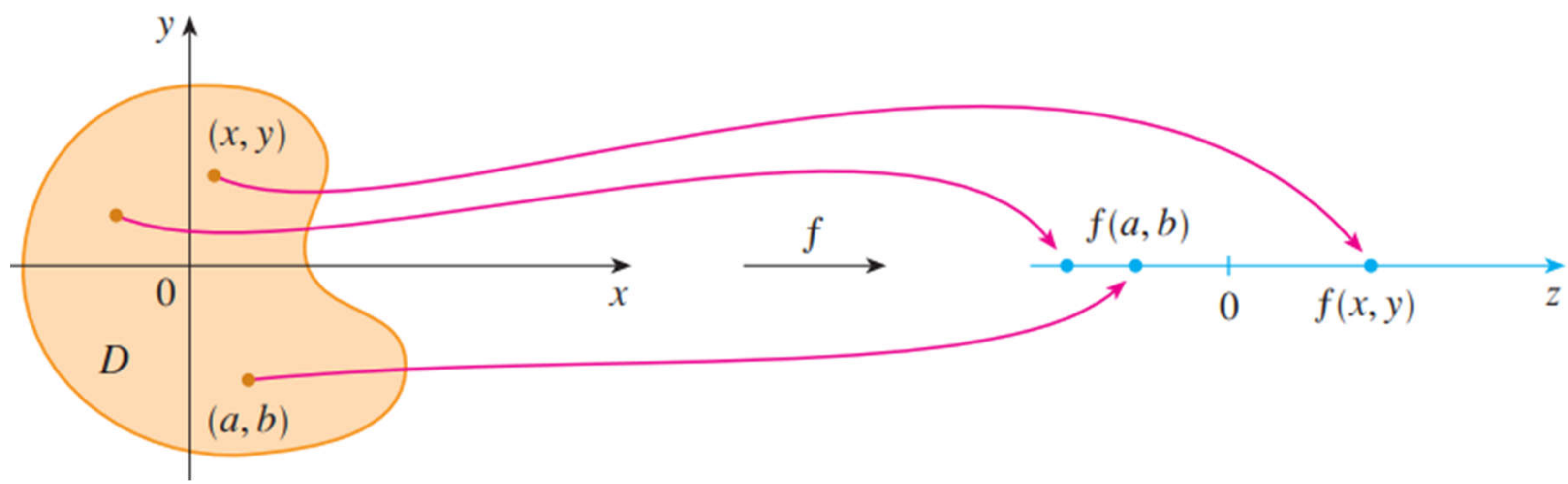
- **Giới hạn và liên tục**
  - ✓ *Tính giới hạn, chứng minh hàm số không tồn tại giới hạn*
  - ✓ *Khảo sát liên tục của hàm 2 biến*
- **Đạo hàm, vi phân**
  - ✓ *Đạo hàm riêng hàm hợp, hàm ẩn*
  - ✓ *Xét tính khả vi của hàm số*
  - ✓ *Tìm vi phân toàn phần của hàm số, tính giá trị gần đúng*
- **Cực trị**
  - ✓ *Cực trị không điều kiện, cực trị có điều kiện*
  - ✓ *Bài toán min, max*

1. Hàm hai biến

- Hàm hai biến *f* là một quy tắc cho tương ứng mỗi một cặp số thực $(x, y) \in D \subset \boldsymbol{R}^2$ có duy nhất một số thực ký hiệu $f(x, y)$.

$$\begin{aligned} f:\ D &\to \quad R \\ (x, y) &\to f(x, y) \end{aligned}$$

- *Ký hiệu*: $z = f(x, y) \mid (x, y) \in D$;



1. Hàm hai biến

- D - miền xác định: tập hợp tất cả những giá trị của *x* và *y* sao cho biểu thức *f(x,y)* có nghĩa.
- Miền giá trị: tập hợp các giá trị mà hàm nhận được
$$E \coloneqq \{z \in R | z = f(x, y), (x, y) \in D\}$$
- x, y: biến độc lập; z: biến phụ thuộc.
- Giá trị của hàm tại điểm $M(x_0, y_0)$: $f(x_0, y_0)$ hoặc $f(M)$.

1. Hàm hai biến

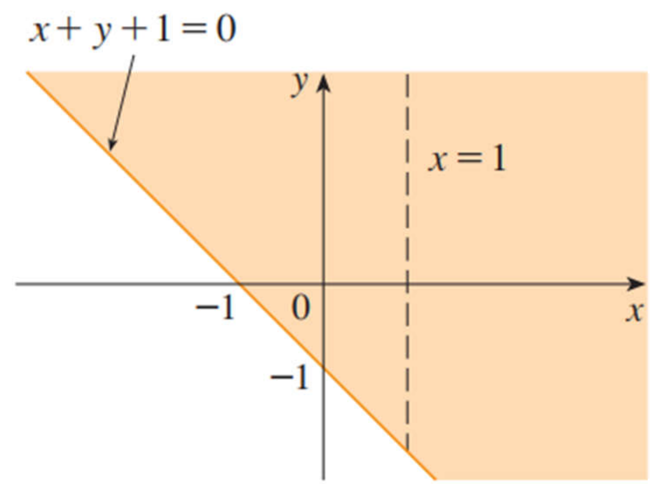
- **Ví dụ 1.** Tìm miền D và $f(3,2)$ của các hàm số sau:

$a)\ f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1};$ $\qquad b)\ f(x,y)=xln(y^2-x)$

Giải:

a) Miền xác định:$D=\{(x,y)|x+y+1\geq 0, x\neq 1\}$

$$f(3,2)=\frac{\sqrt{3+2+1}}{3-1}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

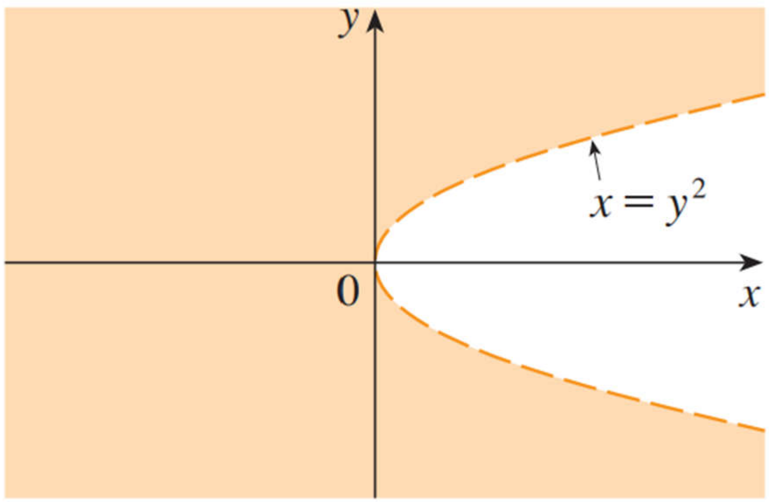


1. Hàm hai biến

b) $f(x, y) = xln(y^2 - x)$

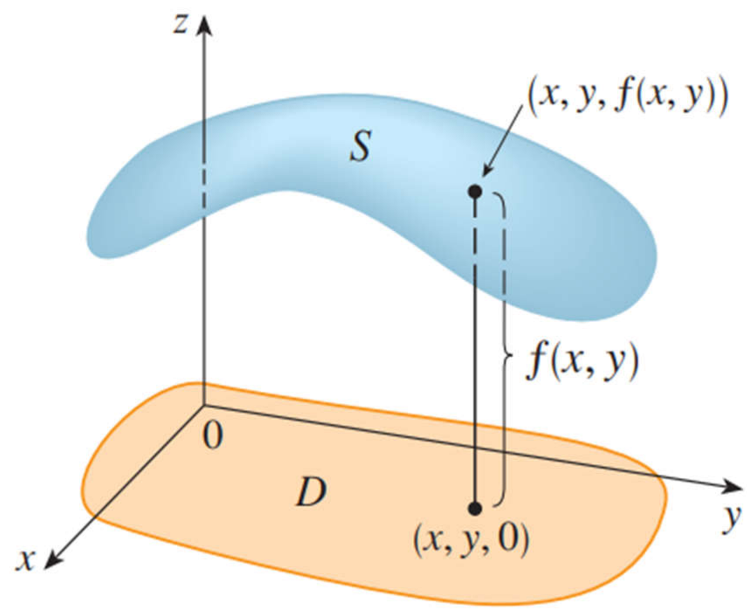
Miền xác định: $D = \{(x, y) | \, x \leq y^2\}$

$f(3,2) = 3ln1 = 0.$



1. Hàm nhiều biến

- ***Về mặt hình học***:
  - Mỗi cặp số thực (x, y): xác định một điểm P trên (Oxy).
  - $f(P)$: cao độ của điểm P trong không gian $\boldsymbol{R}^3$.
  - Tập hợp các điểm trong $\boldsymbol{R}^3$ mà tọa độ thỏa mãn phương trình $u = f(x, y)$: đồ thị của hàm hai biến – 1 mặt trong $\boldsymbol{R}^3$ mà hình chiếu vuông góc của nó lên (Oxy) là D.

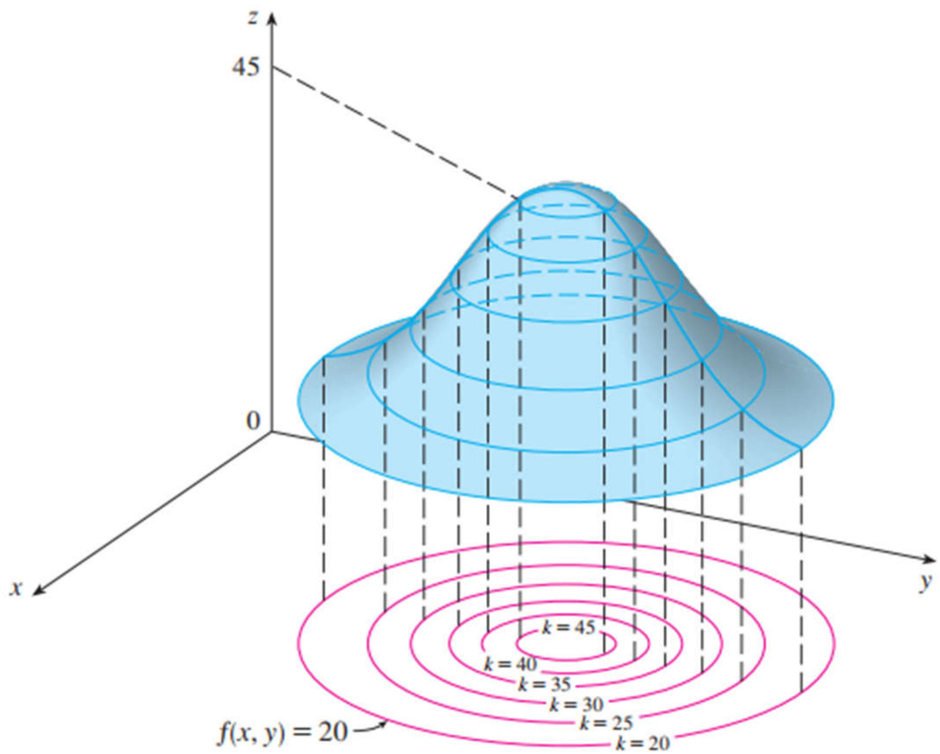


1. Hàm nhiều biến

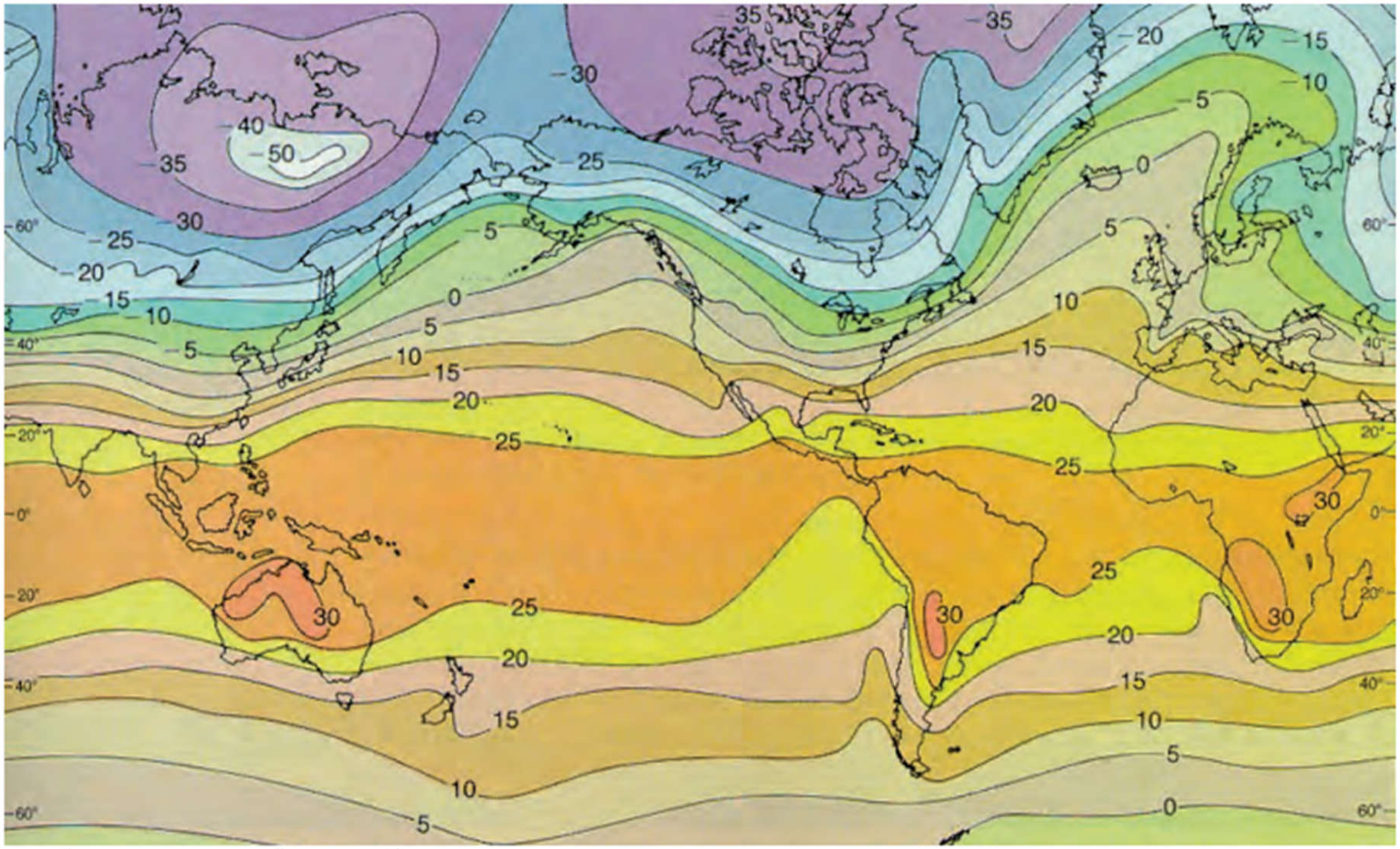
❖ ***Đường đồng mức, mặt đồng mức***

- Đường đồng mức của hàm $u = f(x, y)$: Đường trên (Oxy) mà tại các điểm của nó: $f(x, y) = C$ (C: hằng số).

- Mặt đồng mức của hàm $u = f(x, y, z)$: mặt trong $\boldsymbol{R}^3$ mà tại các điểm của nó $f(x, y, z) = C$ (C: hằng số).



1. Hàm nhiều biến



Bản đồ thời tiết thế giới: nhiệt độ trung bình trong 1 tháng.

1. Hàm nhiều biến

❑ ***Ví dụ***. Tìm đường mức của hàm:

$$u(x, y) = 4x^2 + y^2;$$

Đường mức là đường $f(x, y) = C$, C = const

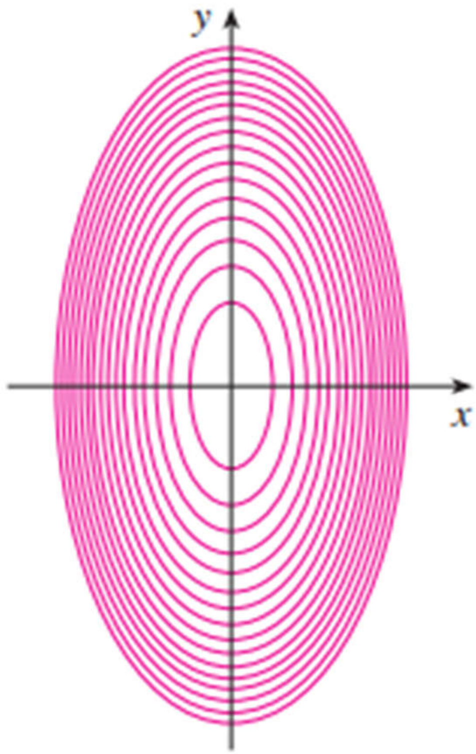
$$4x^2 + y^2 = C \Leftrightarrow \frac{x^2}{C/4} + \frac{y^2}{C} = 1$$

Vậy đường đồng mức là họ các đường elip có tâm tại $O(0,0)$, các bán trục là:

$$\frac{\sqrt{C}}{2}, \sqrt{C}, (C > 0)$$

1. Hàm nhiều biến

- Bản đồ đường mức và các đường tiến ngang tăng theo các đường mức



2. Giới hạn và liên tục

- Cho hai hàm $f(x,y), g(x,y)$, khảo sát các giá trị của các hàm trên khi $(x,y) \to (0,0)$:

$$f(x,y) = \frac{sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}; \quad g(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

Bảng giá trị của $f(x,y)$

$x \backslash y$	−1.0	−0.5	−0.2	0	0.2	0.5	1.0
−1.0	0.455	0.759	0.829	0.841	0.829	0.759	0.455
−0.5	0.759	0.959	0.986	0.990	0.986	0.959	0.759
−0.2	0.829	0.986	0.999	1.000	0.999	0.986	0.829
0	0.841	0.990	1.000		1.000	0.990	0.841
0.2	0.829	0.986	0.999	1.000	0.999	0.986	0.829
0.5	0.759	0.959	0.986	0.990	0.986	0.959	0.759
1.0	0.455	0.759	0.829	0.841	0.829	0.759	0.455

2. Giới hạn và liên tục

Bảng giá trị của g(x, y)

$x \backslash y$	−1.0	−0.5	−0.2	0	0.2	0.5	1.0
−1.0	0.000	0.600	0.923	1.000	0.923	0.600	0.000
−0.5	−0.600	0.000	0.724	1.000	0.724	0.000	−0.600
−0.2	−0.923	−0.724	0.000	1.000	0.000	−0.724	−0.923
0	−1.000	−1.000	−1.000		−1.000	−1.000	−1.000
0.2	−0.923	−0.724	0.000	1.000	0.000	−0.724	−0.923
0.5	−0.600	0.000	0.724	1.000	0.724	0.000	−0.600
1.0	0.000	0.600	0.923	1.000	0.923	0.600	0.000

- *Nhận xét:*

✓ Tại (0,0): $f(x, y), g(x, y)$: không xác định;

✓ Khi $(x, y) \to (0,0)$: $f(x, y) \to 1$; $g(x, y)$: không tiến tới 1 giá trị cụ thể nào.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1; \ \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

2. Giới hạn và liên tục

- Giả sử hàm $u = f(M) = f(x,y)$ xác định trên tập hợp D.

  $M_0(a,b)$ là điểm cố định nào đó của mặt phẳng và

  $x \to a,\ y \to b \Rightarrow M(x,y) \to M_0(a,b)$

$$\Rightarrow \rho(M, M_0) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \to 0$$

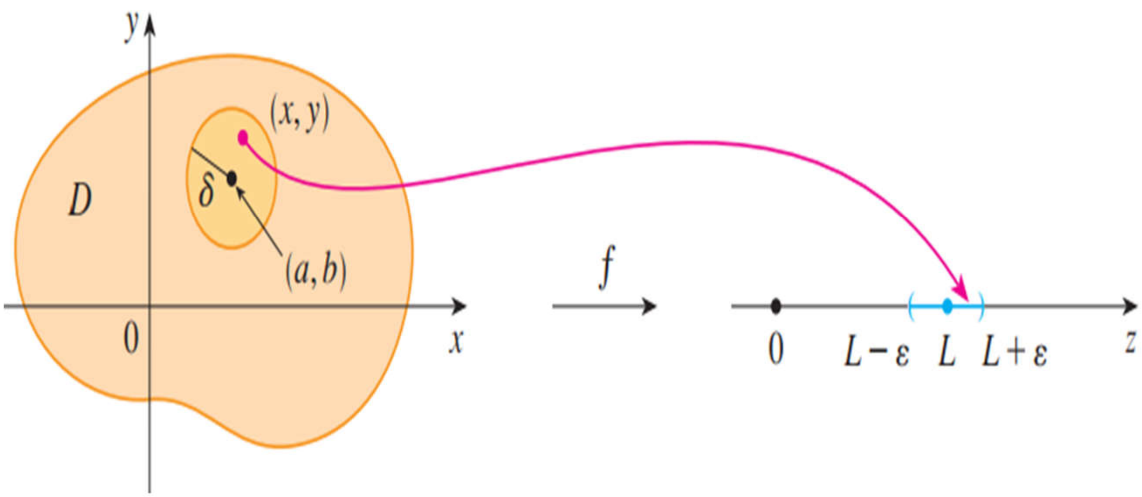
2. Giới hạn và liên tục

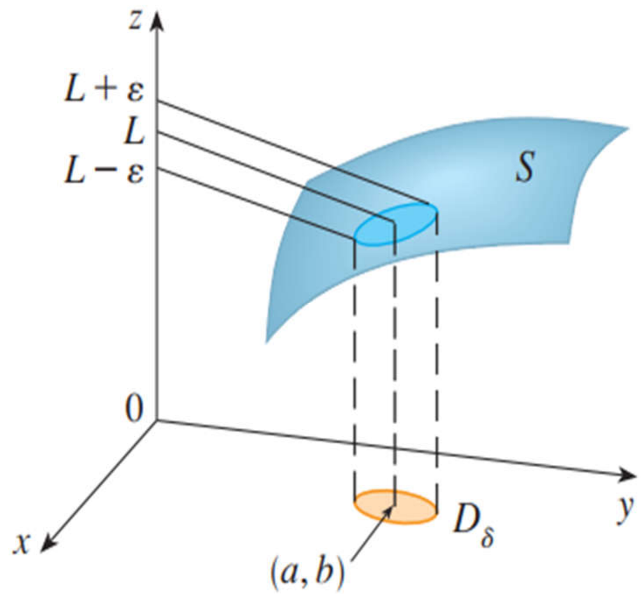
- ***Định nghĩa 1*** (*Cauchy*)

$$\lim_{M \to M_0} f(x,y) = L$$

Nếu: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall M \in \{D : 0 < \rho(M, M_0) < \delta(\varepsilon)\}$

$\Rightarrow |f(M) - L| < \varepsilon.$





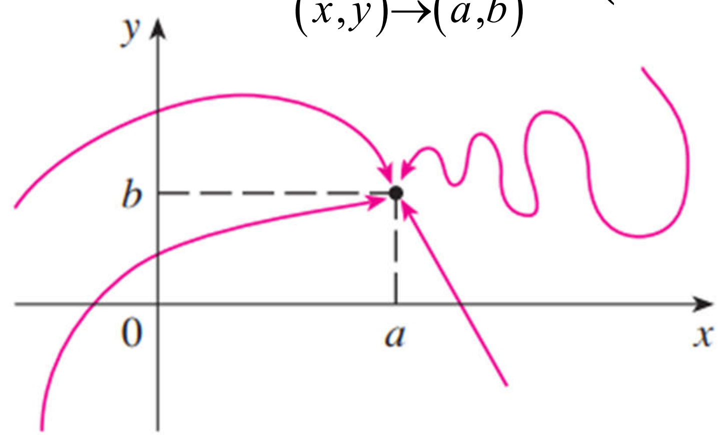
2. Giới hạn và liên tục

- *Chú ý rằng*:

  $0 < \rho(M, M_0) < \delta(\varepsilon)$: tập hợp các điểm M nằm trong đường tròn tâm (a,b) bán kính $\delta(\varepsilon)$.

➢ M có thể tiến tới M_0 theo nhiều đường khác nhau.

- Nếu: $\begin{cases} f(x,y) \to L_1 : (x,y) \to (a,b) - C_1 \\ f(x,y) \to L_2 : (x,y) \to (a,b) - C_2 \\ L_1 \neq L_2 \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$



2. Giới hạn và liên tục

- ***Định nghĩa 2*** (*Heine*)

  Số L: giới hạn của hàm *f(M)* tại điểm M_0 nếu:

$$\{M_n\} \to M_0 \,\Big|\, \forall n, M_n \in D, \, M_n \neq M_0 \Rightarrow \{f(M_n)\} \to L$$

Kí hiệu: $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = L; \; \lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = L$

2. Giới hạn và liên tục

- Giới hạn của hàm không phụ thuộc vào phương M tiến đến M_0.
- Nếu $M \to M_0$ theo các phương khác nhau mà *f(M)* dẫn đến các giá trị khác nhau thì hàm *f(M)* không có giới hạn.
- Số L: giới hạn của hàm *f(M)* khi $M \to \infty$ nếu:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists R > 0 : \forall M \in \{D : \rho(M, 0) > R\} \Rightarrow |f(M) - L| < \varepsilon.$$

2. Giới hạn và liên tục

- **<u>Ví dụ 2</u>**. Chứng minh rằng:

$$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

<u>Giải</u>.

Xét $(x, y) \to (0,0)$ theo trục *Ox* (*y*=0):

$$f(x, 0) = \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Xét $(x, y) \to (0,0)$ theo trục *Oy* (*x*=0):

$$f(0, y) = \frac{-y^2}{y^2} = -1 \neq 1$$

Vậy không tồn giới hạn của hàm *f(x,y)* đã cho.

1. Giới hạn và liên tục

- ***Dạng 1***. Tính giới hạn kép

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{M\to M_0} f(M) = L$$

- ***Ví dụ 1.*** Tính giới hạn

$$a)\quad \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{2x^2-3x-1}{xy^2+3};\qquad b)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$c)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}};\qquad d)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{xy}$$

1. Giới hạn và liên tục

$$a)\quad \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{2x^2-3x-1}{xy^2+3} = \frac{-1}{2}$$

$$b)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Cho $(x, y) \to (0,0)$ theo phương của đường thẳng $y = kx$

$$f(x,kx) = \frac{k}{1+k^2}\ (x \neq 0) \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x,kx) = \frac{k}{1+k^2}.$$

Khi k khác nhau, $(x, y) \to (0,0)$ theo các phương khác nhau, *f(x,y)* dần tới những giới hạn khác nhau.

- Giới hạn không tồn tại.

1. Giới hạn và liên tục

$c)\quad \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}};$

$$0 \le \left|f(x,y)\right| = \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \left|\frac{xy}{y}\right| = |x|, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0$$

$\boxed{0}$

hoặc: $|xy| \le \dfrac{x^2+y^2}{2}$

(nguyên lý kẹp)

$$\Rightarrow 0 \le \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$$

- Vậy: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

1. Giới hạn và liên tục

$$d)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{xy}$$

$$0 \le \left|\left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{xy}\right| \le x^2+y^2$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right) = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{xy}\right| = 0$$

➢ Vậy $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{xy} = 0$

1. Giới hạn và liên tục

❖ ***Nhận xét***

- Thông thường, đối với hàm phân thức, bậc của tử $\leq$ bậc của mẫu: xét dãy điểm tiến tới điểm cần tính giới hạn theo các đường khác nhau.
- Nếu bậc của tử > bậc của mẫu: sử dụng nguyên lý kẹp

Chú ý:

$$|a| - |b| \leq |a+b| \leq |a| + |b|$$

$$|xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$$

1. Giới hạn

- ***Dạng 2. Giới hạn lặp***

Giả sử tồn tại $\lim\limits_{x \to a} f(x, y) = \varphi(y)$ với mỗi y cố định

Nếu tồn tại $\lim\limits_{y \to b} \varphi(y) \ = L$, L được gọi là giới hạn lặp

Ký hiệu:

$$\lim_{y \to b} \lim_{x \to a} f(x, y)$$

Tương tự có:

$$\lim_{x \to a} \lim_{y \to b} f(x, y)$$

1. Giới hạn

Chú ý:

Nếu

1) Tồn tại giới hạn kép $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y) = L$

2) Với mỗi y cố định, tồn tại $\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$

Thì

$$\begin{cases} \exists \lim\limits_{y\to b} \lim\limits_{x\to a} f(x,y) \\ \lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y) = \lim\limits_{y\to b} \lim\limits_{x\to a} f(x,y) \end{cases}$$

1. Giới hạn

❖ ***Ví dụ***: Cho hàm số $f: (0, +\infty) \times (0, +\infty) \to \boldsymbol{R}$ xác định bởi công thức $f(x, y) = \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y}$.

Tính các giới hạn lặp tại điểm (0,0).

- Ta có: $\lim\limits_{x \to 0} f(x, y) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y} = y - 1$

$$\Rightarrow \lim_{y \to 0} (y - 1) = -1$$

$$\lim_{y \to 0} f(x, y) = \lim_{y \to 0} \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y} = x + 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} (x + 1) = 1$$

Hai giới hạn lặp tồn tại nhưng khác nhau $\Rightarrow \nexists \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$.

1. Giới hạn và liên tục

- ***Ví dụ 2***: Tính giới hạn

$$a)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{2x^2+3y^6}; \qquad b)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$$

$$c)\ \lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sqrt{x^2+(y-2)^2+1}-1}{x^2+(y-2)^2}; \qquad d)\ \lim_{(x,y)\to(0,2)} (1+xy)^{\frac{2}{x^2+xy}}$$

1. Giới hạn và liên tục

$a)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{2x^2+3y^6};$

Xét dãy điểm: $\{(x_n, y_n)\} = \left\{\left(\dfrac{k}{n^3}, \dfrac{l}{n}\right)\right\} \to (0,0),\ n \to +\infty$
với *k, l* là các hằng số.

Khi đó: $f(x_n, y_n) = \dfrac{kl^3}{2k^2+3l^6},\ n \to +\infty$

Với mỗi cặp giá trị (*k, l*) khác nhau, *f(x,y)* dẫn tới những giá trị khác nhau.

➢ Vậy: $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{2x^2+3y^6}$

1. Giới hạn và liên tục

$b)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$

- Đặt: $x^2 + y^2 = t:\ (x,y) \to (0,0) \Rightarrow t \to 0$
- Khi đó

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$$

1. Giới hạn và liên tục

$c)\quad \lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{\sqrt{x^2+(y-2)^2+1}-1}{x^2+(y-2)^2}$

- Đặt: $\rho = \sqrt{x^2+(y-2)^2}$, $\rho \geq 0, (x,y) \to (0,2)$: $\rho \to 0$
- Khi đó:

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sqrt{x^2+(y-2)^2+1}-1}{x^2+(y-2)^2} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\sqrt{\rho^2+1}-1}{\rho^2}$$

$$= \lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\sqrt{\rho^2+1}+1} = \frac{1}{2}$$

1. Giới hạn và liên tục

$$d)\ \lim_{(x,y)\to(0,2)} (1+xy)^{\frac{2}{x^2+xy}}$$

- Ta có:

$$(1+xy)^{\frac{2}{x^2+xy}} = \left[(1+xy)^{\frac{1}{xy}}\right]^{\frac{2xy}{x^2+xy}} = \left[(1+xy)^{\frac{1}{xy}}\right]^{\frac{2y}{x+y}}$$

- Đặt $t = xy, (x,y) \to (0,2): t \to 0$
- Khi đó:

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} (1+xy)^{\frac{1}{xy}} = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

- Mà: $$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{2y}{x+y} = 2 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,2)} (1+xy)^{\frac{2}{x^2+xy}} = e^2$$

1. Giới hạn và liên tục

- ***Dạng 2***. Khảo sát tính liên tục

  Hàm số *f(x,y)* liên tục tại $M(x_0, y_0) \in D \subset R^2$ nếu

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$$

- ***Ví dụ 3***. Xét tính liên tục của hàm số:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Giới hạn và liên tục

- Hàm *f(x,y)* liên tục với $\forall (x, y) \neq (0, 0)$.
- Xét tính liên tục của *f(x,y)* tại (0, 0): $f(0,0) = 0$,

$$0 \le \left|\frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}\right| = \left|\frac{(x-y)\left(x^2 + xy + y^2\right)}{x^2 + y^2}\right| = \left|\frac{x-y}{x^2+y^2}\right|\left|x^2 + xy + y^2\right|$$

Mà: $\left|x^2 + xy + y^2\right| = \left|\left(x^2 + y^2\right) + xy\right|$

$$\le \left|x^2 + y^2\right| + |xy| \le x^2 + y^2 + \frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{3}{2}\left(x^2 + y^2\right)$$

$$\Rightarrow 0 \le \left|\frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}\right| \le \left|\frac{x-y}{x^2+y^2}\right| . \frac{3}{2}\left(x^2 + y^2\right) = \frac{3}{2}|x - y|$$

1. Giới hạn và liên tục

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3}{2}|x-y| = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} = 0$$

Suy ra *f(x, y)* liên tục tại điểm (0,0).

➢ Vậy hàm số *f(x,y)* đã cho liên tục trên R^2.

Cách biến đổi khác:

$$0 \le \left|\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| + \left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right| \le |x| + |y|$$

1. Giới hạn và liên tục

- ***Ví dụ 4***. Xét tính liên tục của hàm số:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|xy|^{\alpha}}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0\qquad\qquad, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Giải:

- Hàm $f(x,y)$ liên tục với $\forall(x,\ y)\neq(0,\ 0)$.
- Xét tính liên tục của $f(x,y)$ tại (0, 0):

  $f(0,0)=0,$

1. Giới hạn và liên tục

- Mặt khác:

$$|xy| \le \frac{x^2+y^2}{2} \Rightarrow \frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2} \le \frac{1}{2^\alpha}\left(x^2+y^2\right)^{\alpha-1}$$

Nhận thấy: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2^\alpha}\left(x^2+y^2\right)^{\alpha-1}$ phụ thuộc vào α

$\xrightarrow{\alpha>1}$ 0

$\xrightarrow{\alpha=1}$ không tồn tại

$\xrightarrow{\alpha<1}$ $\neq 0$

➢ *f(x,y)* liên tục trên R^2 nếu α >1, gián đoạn tại (0,0) nếu α ≤ 1

3. Bài tập

- ***Bài tập***. Tính các giới hạn sau:

1) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ khi $(x,y)\to(0,0)$

2) $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ khi $(x,y)\to(0,0)$

3) $f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2}$ khi $(x,y)\to(0,0)$

4) $f(x,y)=(1+xy)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$ khi $(x,y)\to(0,0)$

3. Bài tập

5) $f(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2} - 2}$ khi $(x,y) \to (0,0)$

6) $f(x,y) = \dfrac{\sin xy}{x}$ khi $(x,y) \to (0,3)$

7) $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^3 - y^3)}{x^2 + y^2}$ khi $(x,y) \to (0,0)$

8) $f(x,y) = x \arctan \dfrac{y}{x}$ khi $(x,y) \to (0,0)$

3. Bài tập

9) $f(x,y) = \dfrac{1+x^2+y^2}{y^2}(1-\cos y)$ khi $(x,y) \to (0,0)$

10) $f(x,y) = \dfrac{(x+y)\cos(x+y)}{\sin(x-y)}$ khi $(x,y) \to (0,0)$

11) $f(x,y) = \dfrac{(1+x^2+y^2)(1-\cos y)}{y^2}$ khi $(x,y) \to (0,0)$

12) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ khi $(x,y) \to (+\infty,+\infty)$

3. Bài tập

13) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2 - xy + y^2}$ khi $(x,y) \to (\infty,\infty)$

14) $f(x,y) = \left(\dfrac{xy}{x^2 + y^2}\right)^{x^2}$ khi $(x,y) \to (\infty,\infty)$

15) $f(x,y) = x\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)^2$ khi $(x,y) \to (0,0)$

16) $f(x,y) = \dfrac{x\,\text{siny} - \text{ysinx}}{x^2 + y^2}$ khi $(x,y) \to (0,0)$

3. Bài tập

- ***Bài tập.*** Khảo sát sự liên tục của các hàm số sau tại (0,0):

1) $$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases};$$

2) $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\sin y-y\sin x}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases};$$

3. Bài tập

$$3)\quad f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases};$$

$$4)\quad f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2xy}, & xy\neq 0,\\ 1, & xy=0\end{cases}$$

3. Bài tập

Cho hàm số $f(x,y) = \dfrac{x.\sin\frac{1}{x}+y}{x+y}$. CMR tồn tại giới hạn lặp

Hướng dẫn

$$13)\ \lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$$

$$x^2-2xy+y^2=(x-y)^2\geq 0 \Rightarrow x^2-xy+y^2\geq xy$$

$$\Rightarrow 0\leq \left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right| \leq \left|\frac{x+y}{xy}\right| = \frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|} \to 0,\ x\to\infty, y\to\infty$$

.