

ÔN TẬP

Giới hạn

Tìm giới hạn nếu tồn tại hoặc chứng minh không tồn tại

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Tích phân bội

Bài 2. Tính các tích phân sau:

- a) $\iint_D 2|x| dx dy$, D là hình thang với các đỉnh $(-1, 4)$, $(5, 4)$, $(1, 1)$, $(4, 1)$.
- b) $\iint_D \sin(x + y) dx dy$, D là miền giới hạn bởi $y = 0$, $y = x$, $x + y = \frac{\pi}{2}$.
- c) $\iint_D (x + y) dx dy$, D là miền giới hạn bởi $y^2 = 2x$, $x + y = 4$, $x + y = 12$.
- d) $\iint_D (|x| + |y|) dx dy$, D là miền giới hạn bởi $|x| + |y| \leq 1$.
- e) $\iint_D y dx dy$, D là nửa trên hình tròn tâm $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$, bán kính bằng $\frac{a}{2}$.
- f) $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, D là hình tròn $x^2 + y^2 \leq 2ax$.
- g) $\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy$, D là nửa trên hình tròn $x^2 + y^2 \leq a^2$.
- h) $\iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, D là miền giới hạn bởi $x^2 + y^2 = \pi^2$, $x^2 + y^2 = 4\pi^2$.
- i) $\iint_D \sqrt{4 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy$, D là miền giới hạn bởi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{4b^2} = 1$ thuộc góc phần tư thứ nhất.
- j) $\iiint_B xy^2 z^3 dx dy dz$, B là miền được giới hạn bởi các mặt $z = xy$, $y = x$, $x = 1$, $z = 0$.
- k) $\iiint_B xyz dx dy dz$, B là miền được giới hạn bởi các mặt $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.
- l) $\iiint_B \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, B là miền được giới hạn bởi các mặt $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 1$.
- m) $\iiint_B \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, B là hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \leq z$.

- n) $\iiint_B (x^2 + y^2) dx dy dz$, B là miền được giới hạn bởi các mặt $x^2 + y^2 = 2z$, $z = 2$.
- o) $\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, B là miền được giới hạn bởi mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z$.

Một vài ứng dụng của tích phân 2 lớp.

- Diện tích của miền phẳng D trong mặt phẳng Oxy: $S = \iint_D dx dy$.
- Thể tích vật thể hình trụ mà phía trên giới hạn bởi mặt $z = f(x, y)$, phía dưới bởi miền D của mặt phẳng Oxy: $V = \iint_D f(x, y) dx dy$.
- Diện tích của mặt cong có phương trình $z = f(x, y)$ được chiếu lên miền D của mặt Oxy:

$$S = \iint_D \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy.$$

Bài 3. Tính diện tích của miền D giới hạn bởi

- a) $y = 0, x = 1, y = x^3$.
- b) $y = 0, y = x, x^2 + y^2 = 2x$.
- c) $x = 0, y = 0, x = 2, y = e^x$.
- d) $y = -1, y = -x, x^2 + y^2 = -2y$.
- e) $y^2 = x + 2, x = 2$.

Bài 4. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi:

- a) $z = 1 + x + y, z = 0, x + y = 1, x = 0, y = 0$.
- b) $y = x^2, y = 1, x + y + z = 4, z = 0$.
- c) $x = y^2 - x^2, z = 0, y = \pm 2$.
- d) $x + y + z = a, x^2 + y^2 = R^2, x \geq 0, y \geq 0, z = 0, (a \geq R\sqrt{2})$.
- e) $z = x^2 + y^2, y = x^2, y = 1, z = 0$.
- f) $z^2 = xy, x^2 + y^2 = a^2$.

Bài 5. Tính các tích phân đường sau

- a) $\oint_C y^3 dx - x^3 dy$, C là chiều dương đường tròn tâm O, bán kính bằng 2.
- b) $\oint_C y^3 dx - x^3 dy$, C là chiều dương các đường tròn đồng tâm O, bán kính bằng 1, 2.

c) $\oint_C (y^2 - 7y)dx + (2xy + 2x)dy, C$ đường bao quanh hình tròn $x^2 + y^2 \leq 1$.

d) $\oint_C (y^2 - \sin e^x + xy)dx - (x^2 + \operatorname{sech}^4 y - 2xy)dy, C$ là đường bao quanh của hình vuông có các đỉnh $(0,0), (0,1), (1,1), (1,0)$.