



Département d'ingénierie et d'informatique
Université du Québec en Outaouais

Projet de session

Conception d'un générateur thermoélectrique optimisé

Par

Olivier Bouliane

BOUO20039707

Antoine Fortin

FORA16039708

GEN1693

Optimisation des systèmes énergétiques

Présenté à

Eric Sempels

Pavillon Lucien-Brault

16 Décembre 2019

Table des matières

Table des matières	2
Résumé du problème	3
Recherche et récolte de données nécessaires au projet	5
Partie 1	9
Partie 2	11
Partie 3	15
Modélisation du problème	15
Optimisation et analyse du problème sans volume échangeur	22
Optimisation et analyse du problème avec volume échangeur	30
Conclusion	34
Autoévaluation	35
Bibliographie	37
Annexes 1 (Formules et équations)	38
Annexes 2 (Dimensions)	40
Annexes 3 (Codes)	41
Optimisation sans considération du volume de l'échangeur	41
Code des graphiques :	41
Code d'optimisation	42
Code des constantes (initialise les constantes)	42
Code de Lagrange augmenté (finalement non utilisé/incomplet)	43

Résumé du problème

Depuis plus de 20 ans, plusieurs scientifiques montrent et prouvent tant bien que mal que le changement climatique est réel. Cette idéologie qui n'est pas partagée par tous, permet aux environnementalistes, aux ingénieurs et aux scientifiques de développer de nouvelles énergies propres et des nouveaux types de biomasses exploitables. Sachant que les énergies fossiles comme le gaz naturel, le pétrole, le charbon et plusieurs autres sont très nocifs pour l'environnement en plus de coûter de plus en plus cher, il est important de développer de nouvelles techniques et de nouvelles énergies renouvelables. Nous avons vu un essor fulgurant de l'hydroélectricité au Québec depuis les années 1960 ainsi qu'une explosion de l'exploitation de l'énergie solaire et éolienne depuis les années 2000. Ceci est tout à fait normal puisque nous voulons mettre un frein au réchauffement climatique accéléré par la surconsommation prônée par la société modernes ainsi que l'essor démographique de la planète. Or pour répondre à toute cette demande, plusieurs millions d'usines à travers le monde produisent de tout en quantité industrielle. Il est important de noter que 70% de l'énergie consommée par ces usines est perdu en chaleur et ce, seulement lors de la production. Des ingénieurs et scientifiques se sont alors questionnés sur la possibilité de récupérer cette chaleur résiduelle afin d'en faire de l'énergie propre. L'utilisation d'un milieu chaud et froid pour générer de l'énergie est ce qu'on appelle la thermoélectricité.

Dans le cadre du cours d'optimisation des systèmes énergétiques offert en quatrième année du programme de génie électrique à l'UQO, les étudiants ont été mandatés de réaliser la conception d'un générateur thermoélectrique optimisé. Sachant bien que chaque équipe de 2 étudiants avait un critère différent d'optimisation, l'équipe formée d'Olivier Bouliane et d'Antoine Fortin a reçu comme critère d'optimisation, la maximisation de la puissance en fonction du prix pour le système thermoélectrique. Ce projet est considéré comme étant ouvert puisqu'il existe une multitude de solutions, tout dépendant de la complexité de l'analyse effectuée par le groupe d'étudiants. En effet, nous sommes libres de choisir nos pistes de solutions, tant qu'elles sont bien justifiées. Bien qu'il s'agisse d'un projet d'optimisation, il est nécessaire et primordial pour les étudiants de réaliser une modélisation mathématique du problème d'optimisation. Cette modélisation se fera en fonction des paramètres, des contraintes et des éléments considérés pour l'analyse du projet.

Ce projet est réalisé en trois étapes distinctes. La première partie permet d'établir la relation qui existe entre la résistance de charge et la résistance interne du module thermoélectrique pour maximiser la puissance générée par ce module. Par la suite, la deuxième partie permet d'établir les conditions de conductances thermique du module ainsi que de l'échangeur de chaleur afin de maximiser encore une fois la puissance générée par le générateur thermoélectrique. Avec ces valeurs en poche, il est possible de déterminer la différence de température locale ΔT qui sera nécessaire pour la partie 3 de ce projet de session. Finalement, la troisième et dernière partie de ce projet consiste à optimiser le scénario de la puissance en fonction du prix du système global. Pour y parvenir, il est nécessaire de prendre en compte les résultats des deux premières parties de ce projet et les dimensions ainsi que le nombre de modules thermoélectrique et les dimensions du système global du générateur. De plus, des conditions thermiques, de débit massique et type de fluide sont imposées par le professeur. Dans le cas de notre projet, il s'agit d'un débit d'eau de 100L / min, avec des températures de 90°C et 10°C. Les paramètres de décision pour cette partie sont libres de choix, mais doivent être expliqués, tout comme le choix de l'approche ainsi que de la méthode d'optimisation utilisée.

Recherche et récolte de données nécessaires au projet

Dans cette étape du projet, il a été intéressant de s'intéresser à toutes les variables et contraintes possibles du projet. Cette étape est cruciale et sans doute la plus importante du projet puisqu'elle dicte l'allure, la complexité et les solutions possibles. Les étudiants se sont donc intéressés aux valeurs les plus importantes et les plus pertinentes pour une optimisation faisable et réaliste d'un tel modèle de générateur thermoélectrique. Plus précisément, il a été important de bien sélectionner les variables permettant de faire une optimisation de la puissance en fonction du prix. De plus, comme il est mentionné dans l'énoncé, le prix est directement proportionnel au volume, ce qui fait qu'avec les dimensions, le prix du matériel utilisé peut être facilement calculable et ainsi, le rapport puissance / prix se fait manuellement. C'est la raison pourquoi les étudiants ont décidé d'opter pour une séparation de l'optimisation en deux étapes, soit la puissance générée sur le volume et par la suite, le prix selon le volume obtenu pour calculer le rapport puissance sur prix.

Premièrement, comme discuté plus tôt, le projet consiste à optimiser la puissance en fonction du prix et donc, la puissance est très importante à analyser. En effet, la puissance générée par chaque module dépend de plusieurs facteurs. Ces facteurs doivent donc être pris en ligne de compte pour cette optimisation. Pour cette optimisation, il est important d'avoir la valeur de la résistance de charge (R_L), la résistance interne (R_i), le flux thermique (Q), le débit massique (\dot{m}), la capacité massique thermique (c_p), la différence de température globale (θ), la différence de température locale (ΔT), la différence de température sur les modules thermoélectrique (dT), le coefficient de Seebeck (α), la résistivité électrique (ρ_{TE}), la largeur (L) de l'élément utilisé, la hauteur (H) de ce même élément, la distance entre les éléments (x) et finalement le nombre d'éléments (N).

En ce qui concerne notre optimisation, il est important de savoir que le volume de nos éléments et donc du module est extrêmement important. Sachant cette information, plusieurs variables étaient très importantes pour déterminer le volume du système global. Il s'agit en fait de la largeur (L) de l'élément utilisé, de la hauteur (H) de ce même élément, du nombre d'éléments (N) utilisé, de la largeur (x) entre chaque élément formant un module et finalement du nombre (NM) de modules formant le système.

Pour calculer le prix, il est intéressant de trouver différents matériaux pouvant former les éléments. Les étudiants ont décidé de prendre en considération 3 types de semi-conducteurs, soit le Tellure de bismuth, le tellure de plomb et le silicium de germanium. Par la suite, il a été intéressant d'implémenter dans les calculs la densité de chaque matériaux semi-conducteur utilisé (g/cm^3), le volume (cm^3) et finalement le prix par unité de masse ($$/g$). Donc, avec tout ceci, il est possible de déterminer le coût en fonction du volume et du semi-conducteur utilisé. Il est important de noter que ce même processus de calcul du prix pour les semis-conducteur peut également être fait sur l'échangeur de chaleur. En effet, deux matériaux différents, soit l'aluminium et le cuivre sont suggérer pour en faire l'échangeur de chaleur.

Afin de mieux visualiser les différentes variables nécessaires à l'optimisation du générateur thermoélectrique, les étudiants ont décidé qu'il serait pertinents de décortiquer ces valeurs en termes de constantes données et de valeurs dépendantes et indépendante. Voici donc un tableau permettant de mieux gérer les variables utiles au projet.

Constantes données	Variables dépendantes	Variables indépendantes
$T_{H,in} = 90^{\circ}C$	L	H
$T_{C,in} = 10^{\circ}C$	R_L	Q
$\Theta = 90^{\circ}C - 10^{\circ}C = 80^{\circ}C$	R_i	N (nombre d'éléments par module)
Masse volumique de l'eau $\rho = 1000 \frac{Kg}{m^3}$	ΔT	$N_{1,D}$ (nombre d'éléments par ligne)
Capacité thermique massique de l'eau: $c_p = 4180 \frac{J}{Kg \cdot K}$	K_p	
Débit massique: $\dot{m} = 1,66 \frac{Kg}{s}$	dT	
α	K	
ρ_{TE}	K_0	
L_{tot}	x	

k_p		
-------	--	--

Il est important de noter que dans la colonne des constantes données de ce tableau, on y retrouve la variables de largeur total du module (L_{tot}) ainsi que la hauteur d'une plaque (H_p). Ces variables se retrouvent comme des constantes fixes puisque pour des raisons de simplification de la modélisation et de l'optimisation, les étudiants ont décidé d'utiliser les valeurs standards d'un module, soit $L_{tot} = 40\text{ mm}$ et $H_p = 1.25\text{ mm}$. Ces valeurs ont été recherchés et démontrés dans de nombreux articles de thermoélectricité. Les étudiants se sont inspiré de 3 thèses de maîtrise d'étudiants de la Polytechnique de Montréal, soit celle de Paul Verdier¹, Aroua Belhadj² et Lurdez Prieto Vargas³ pour faire des hypothèses et des choix judicieux avant de commencer ce projet. Il est tout à fait normal de s'attendre à une dimension carré du module, puisqu'il a été prouvé qu'un module plus court et large et non long et étroit est plus performant.⁴

De plus, pour ce qui est du reste des constantes fixée, on y retrouve également les températures (chaud et froid) du générateur, soit celle chauffant et refroidissant les plaques des modules, soit $T_{H, in} = 90^\circ\text{C}$ et $T_{C, in} = 10^\circ\text{C}$. Il est également donné que le fluide circulant dans l'échangeur de chaleur est de l'eau et donc, il est possible de déterminer que la masse volumique de l'eau est $\rho = 1000 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$, que la capacité thermique massique de l'eau est $c_p = 4180 \frac{\text{J}}{\text{Kg} \cdot \text{K}}$ et que le débit massique est $\dot{m} = 1,66 \frac{\text{Kg}}{\text{s}}$. Finalement, les dernières valeurs fixée sont le coefficient de Seebeck α puisqu'il est propre à chaque matériau conducteur, la résistivité thermique ρ_{TE} puisqu'elle aussi, dépend directement du matériau conducteur et enfin, la conductivité thermique de la plaque k_p qui elle aussi est propre aux matériaux.

D'après ce même tableau, il est possible de noter qu'il y a également 5 variables indépendantes. Des variables indépendantes pour ce projet signifie qu'elles doivent être optimisées, mais qu'elles ne dépendent d'aucune autre variables. Ceci dit, la hauteur (H) des éléments doit être optimisée pour obtenir une puissance maximale, mais ne dépend d'aucune autres variables puisqu'il s'agit simplement d'une dimension préétablie. Par la

¹ https://publications.polymtl.ca/3151/1/2018_PaulVerdier.pdf

² https://publications.polymtl.ca/1708/1/2015_ArouaBelhadj.pdf

³ https://publications.polymtl.ca/1901/1/2015_LurdezPrietoVargas.pdf

⁴ Favarel.pdf

suite, il y a aussi le flux thermique (Q) qui elle aussi est constante selon le cahier de charge et est indépendante. Le flux thermique détermine la différence de température ΔT . Finalement, le nombre d'éléments par module est une variable qui doit être optimisée, mais qui est indépendante de toutes autres variables. Ces données sont utilisées entre autre pour déterminer la largeur (L) de l'élément.

Pour ce qui est de la dernière colonne à analyser, les variables dépendantes, il s'agit de la colonne ayant le plus de paramètres (variables). Les variables qui ci retrouvent sont tous dépendantes de d'autres paramètres, ce qui veut dire qu'elles sont influencées par les choix et l'optimisation des autres paramètres. Dans cette catégorie, on y retrouve premièrement la largeur de l'élément (L), puisqu'elle dépend directement du nombre (N) d'éléments par module ainsi que de la largeur (x) entre chacun de ces éléments. Deuxièmement, il y a les résistances, que ce soit la résistance de charge (R_L) ou interne (R_i). Ces deux résistances sont directement liées puisque selon le cahier de charge, les étudiants doivent optimiser la puissance maximale d'un générateur thermoélectrique et pour y arriver, la contrainte $R_L = R_i$ doit être respectée (cette condition est prouvée dans les résultats de la partie 1 de ce rapport). Or, il existe une formule permettant de déterminer la valeur de R_i et celle-ci stipule que R_i dépend du nombre (N) d'éléments par module, de la résistivité électrique ρ_{TE} , de la hauteur (H) de l'élément en question et de la largeur (L) de l'élément. Troisièmement, il y a la différence de température (ΔT) qui dépend du flux thermique (Q) comme mentionné plus tôt ainsi que de la conductance d'un module et de l'échangeur de chaleur (K) et (K_0). Ces mêmes conductances sont elles aussi dépendantes d'une multitude de facteurs (variables). Dernièrement, il y a la différence de température dT qui dépend directement de la différence de température (ΔT) ainsi que de la conductance d'un module et de l'échangeur de chaleur (K) et (K_0).

Bref, ceci conclut la présentation des constantes et variables nécessaires pour l'optimisation d'un générateur thermoélectrique. La suite de ce rapport, soit la partie 1 et la partie 2, illustre simplement les conditions de résistance et de conductance nécessaires afin d'obtenir la génération de puissance maximale pour le générateur thermoélectrique. Ces deux parties suivent immédiatement.

Partie 1

Dans cette première section du projet, il a été nécessaire d'établir la condition de résistance de charge pour le maximum de puissance avec un module thermoélectrique. De ce fait une équation de relation entre R_i et R_L doit être évoqué. Voici le calcul permettant de mettre en lumière la relation qui existe entre ces deux résistances lorsque la puissance maximale du module est générée.

$$P = (N\alpha IdT) - I^2 R_i \quad \text{où} \quad I = \frac{N\alpha dT}{R_i + R_L}$$

$$v = (N\alpha dT)$$

$$P = \frac{v^2}{R_i + R_L} - \frac{v^2 R_i}{(R_i + R_L)^2}$$

$$\frac{dP}{dR_L} = \frac{v^2}{(R_i + R_L)^2} - \frac{2v^2 R_i}{(R_i + R_L)^3}$$

$$v^2 + \frac{2v^2 R_i}{R_i + R_L} = 0$$

$$2v^2 R_i = -v^2 (R_i + R_L)$$

$$2R_i = -R_i - R_L$$

$$R_L = R_i$$

Il est donc possible de confirmer que la condition nécessaire est que la résistance de charge soit égale à la résistance interne du module. Toutefois, afin de valider qu'il s'agit en effet d'un maximum de la puissance pour la condition $R_i = R_L$, il est nécessaire de vérifier la condition d'un maximum. Cette condition consiste à valider que la valeur de la dérivée seconde est négative. Voici les calculs démontrant cette condition.

$$\frac{d^2P}{dR_L^2} = -\frac{2v^2}{(R_i + R_L)^3} - \frac{6v^2 R_i}{(R_i + R_L)^4} < 0 ?$$

$$\frac{d^2P}{dR_L^2} = -\frac{2v^2}{(2R_L)^3} - \frac{6v^2 R_L}{(2R_L)^4} < 0 ?$$

$$\frac{d^2P}{dR_L^2} = \frac{(-2v^2)(2R_L)^4}{(2R_L)^3} * \frac{-(6v^2 R_L)(2R_L)^3}{(2R_L)^4} < 0 ?$$

$$\frac{d^2P}{dR_L^2} = \frac{-32v^2 R_L^4 - 48v^2 R_L^4}{(2R_L)^7} < 0 ?$$

$$\frac{d^2P}{dR_L^2} = \frac{-80v^2 R_L^4}{(2R_L)^7} < 0 ?$$

$$\frac{d^2P}{dR_L^2} = \frac{-40v^2}{(2R_L)^4} < 0$$

Donc, puisque la dérivé seconde est inférieure à zéro, il est possible de confirmer qu'il s'agit bel et bien d'un maximum. Bref, lorsque $R_i = R_L$, la puissance générée par le module est maximale.

Partie 2

Dans cette deuxième section du projet, il a été demandé d'établir les conditions de conductances thermiques du module ainsi que de l'échangeur de chaleur afin de maximiser la puissance du générateur thermoélectrique. À l'aide de ces résultats, il est également possible de déterminer le ΔT résultant des conductances trouvées. Or, pour ce faire, il a été important de modéliser l'équation de la puissance en fonction de K_0 et K afin de pouvoir faire un graphique pour valider les hypothèses. Il est important de noter que la conductance thermique est exprimée en watt par Kelvin (W/K), ce qui revient à dire que la conductance thermique est égale au coefficient de transfert thermique (W/m^2K) multiplié par la surface de contact (m^2). De plus, K est la conductance thermique de l'échangeur de chaleur et il est prouvé que la puissance que peut générer un module thermoélectrique, dépend de la surface de contact qui existe entre les fluides chauffant et refroidisseur. En effet, plus la surface de contact de l'échangeur est grosse, plus la différence de température entre les deux plaques du module est importante et donc, plus la puissance générée est élevée. Il est donc possible de conclure que plus la surface est grosse, plus la puissance générée est importante est par le fait même, plus la conductance thermique est grosse. L'hypothèse est donc qu'on cherche une aire infini de l'échangeur (même chose qu'avoir une conductance thermique infini) pour avoir une température entre l'échangeur et le fluide égale, et donc, maximiser la différence de température entre les deux plaques du module. Voici la formule permettant de mieux comprendre

$$K [W/K] = U [W/m^2K] * A [m^2]$$

Hypothèse sur K : $K = \infty$

L'hypothèse initiale des étudiants en ce qui concerne la conductance thermique du module a été que K_0 tende vers zéro, puisque cela ferait en sorte que la différence entre les deux plaques est maximale. En effet, si dans le module il n'y a aucune différence de température causé par le matériaux le constituant, la différence de température des plaques serait seulement dictée par la différence de température entre les échangeurs de chaleur côté chaud et froid. De plus, puisque l'hypothèse concernant la conductance thermique de l'échangeur est que $K = \infty$, on sait que la différence entre les deux côtés de l'échangeur est égale à la différence de température entre le fluide chaude et le fluide froid (donc maximisation de la différence de chaleur au niveau de l'échangeur). Donc, si la différence de

température à l'intérieur même du module est seulement influencé par celle de l'échangeur (côté chaud touche à la plaque chaude du module et côté froid touche à la plaque froide du module), on maximise la différence de température entre les deux plaques. Ceci fait en sorte qu'il y a une maximisation de la puissance.

Hypothèse sur K_0 : $K_0 = 0$

Afin de bien valider les hypothèses posées, les étudiants se sont intéressés à tracer un graphique illustrant la relation qui existe entre la puissance et les variables de K et de K_0 . L'équation de la puissance en fonction de K et de K_0 a été nécessaire. Voici l'équation de la puissance en question.

$$P = \frac{R_L}{(R_L + R_i)^2} * (N * \alpha)^2 * dT^2$$

$$P = \frac{R_L}{(R_L + R_i)^2} * (N * \alpha)^2 * dT^2$$

$$P = \frac{R_L}{(R_L + R_i)^2} * (N * \alpha)^2 * \left(\frac{K}{K + 2K_0} \Delta T \right)^2$$

$$P = \frac{1}{4R_L} * (N * \alpha)^2 * \left(\frac{K}{K + 2K_0} \Delta T \right)^2$$

Voici, ici-bas, le graphique illustrant la relation de la puissance en fonction de K et K_0 .

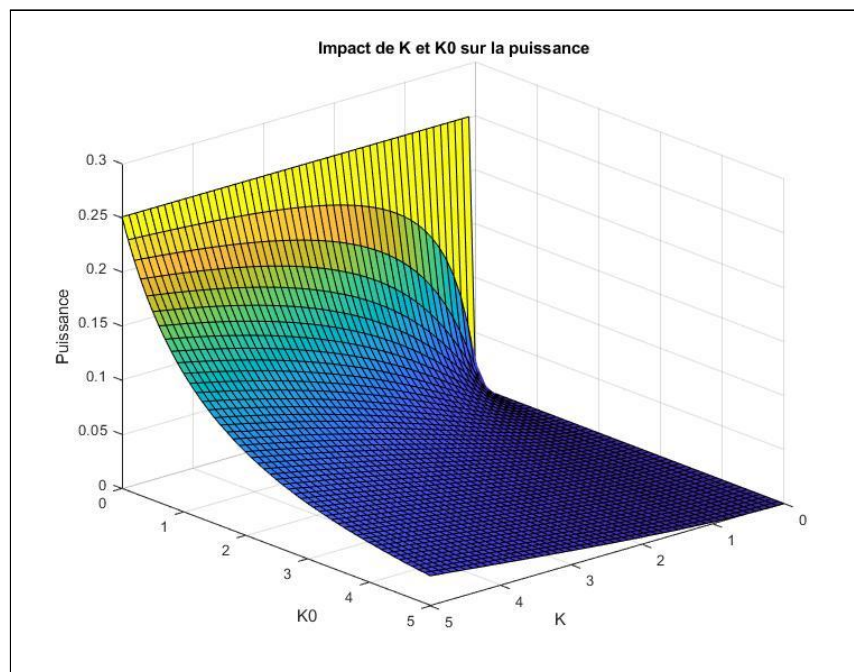


Figure XXX : Puissance générée selon K et K_0

D'ailleurs, le graphique ci-haut confirme les hypothèses formulées par les étudiants. En effet, plus K_0 est petit, plus la puissance sera élevée et plus K est grand, plus la puissance sera grande. Une asymptote se trouve en $K_0 = 0$. De plus, il est important de noter que K et K_0 doivent obligatoirement être supérieurs à 0 puisqu'il est physiquement impossible d'avoir une conductance thermique négative.

Bien que nous savons à quoi s'attendre, en raison des résultats obtenus à l'aide du graphique, il a été intéressant d'effectuer les calculs nécessaires pour la validation mathématique de ces réponses. Pour ce faire, les étudiants ont utilisé l'équation de base de la puissance en fonction de K et K_0 et ils ont dérivé cette équation en fonction de K et K_0 indépendamment. Deux dérivées ont donc été effectuées. Voici les démarches et les calculs effectués pour mesurer K_0 et K .

Mettre les formules de dérivée !!!!

Finalement, il était demandé de déterminer la différence de température ΔT entre les deux côtés de l'échangeur pour une maximisation de la puissance générée. Tout comme discuté plus tôt lors des hypothèses de conductance thermique, les étudiants ont stipulé l'hypothèse que la différence de température ΔT entre les deux côtés de l'échangeur est égale à la différence de température entre le fluide chaud et froid, soit θ , puisque cela augmente la différence de température entre les deux plaques du module thermoélectrique, qui est finalement, l'objectif ultime d'un tel module. En effet, un module thermoélectrique fonctionne sous le principe de la différence de température.

Hypothèse sur ΔT : $\Delta T = \theta$

Afin de valider l'hypothèse des étudiants, il a été nécessaire de manipuler deux formules de base fournies dans l'énoncé du projet, soit les deux formules du flux thermique Q . Voici les manipulations, ainsi que les calculs effectués pour démontrer la relation de ΔT avec θ lorsque la puissance est maximale.

$$Q = (\dot{m}c_p - \Delta T)$$

$$Q = \frac{K_0 K}{K + K_0} \Delta T$$

Donc,

$$(\dot{m}c_p - \Delta T) = \frac{K_0 K}{K + K_0} \Delta T$$

$$\Delta T = \frac{\dot{m}c_p \theta}{\frac{K_0 K}{K + K_0} + \dot{m}c_p}$$

Si $K_0 = 0$ et $K = \infty$

$$\Delta T = \frac{\dot{m}c_p \theta}{\frac{0}{\infty} + \dot{m}c_p}$$

$$\Delta T = \frac{\dot{m}c_p \theta}{\dot{m}c_p}$$

$$\Delta T = \theta$$

Il est donc possible de conclure, à l'aide des calculs mathématiques, que ΔT doit être égale à θ pour qu'effectivement, il y est génération d'un maximum de puissance.

Partie 3

Dans cette troisième partie du projet, il était demandé d'optimiser un générateur thermoélectrique selon différentes variables de dimensionnement. En effet, il fallait optimiser les dimensions d'un module simple ainsi que celles d'un générateur. En premier lieu, les étudiants ont simplement optimisé les dimensions nécessaires d'un module simple et ont ensuite optimisé un générateur. Il est important de noter que le générateur modélisé et optimisé par le groupe d'étudiants est simplement un module thermoélectrique placé entre deux échangeurs de chaleur (côté chaud et côté froid). La **figure xxx** plus bas illustre bien le générateur conçu par les étudiants.

En premier lieu, les étudiants ont optimisé la longueur entre les éléments dans un module, la distance entre chacun de ces éléments, la hauteur de ces éléments et le nombre d'éléments qui se retrouvent dans un module simple. Toutes ces valeurs sont optimisées en fonction de l'option de maximisation de l'équipe, qui se retrouve à être : Maximisation de la puissance en fonction du prix. Bref, puisque le prix des conducteurs et semi-conducteurs est directement proportionnel au volume de ceux-ci, c'est la raison pour laquelle il faut dimensionner le système. Il faut donc que le module ainsi que le générateur génère le plus de puissance en fonction du volume des composants.

Modélisation du problème

Afin de bien modéliser ce système de générateur thermoélectrique, il a été important pour le groupe d'étudiant de réaliser une modélisation de ce système. Il a donc été nécessaire de développer une approche centrale permettant de résoudre l'optimisation. Tout d'abord, il a été nécessaire pour les étudiants de tracer un modèle du générateur qui sera optimisé. Les variables de L_{tot} , x , L , dT , ΔT et θ se retrouvent toutes sur la figure du générateur, afin d'avoir une meilleure perception de quoi est quoi et qu'est ce qui correspond à quoi. La **figure xxx** qui suit illustre ce modèle.

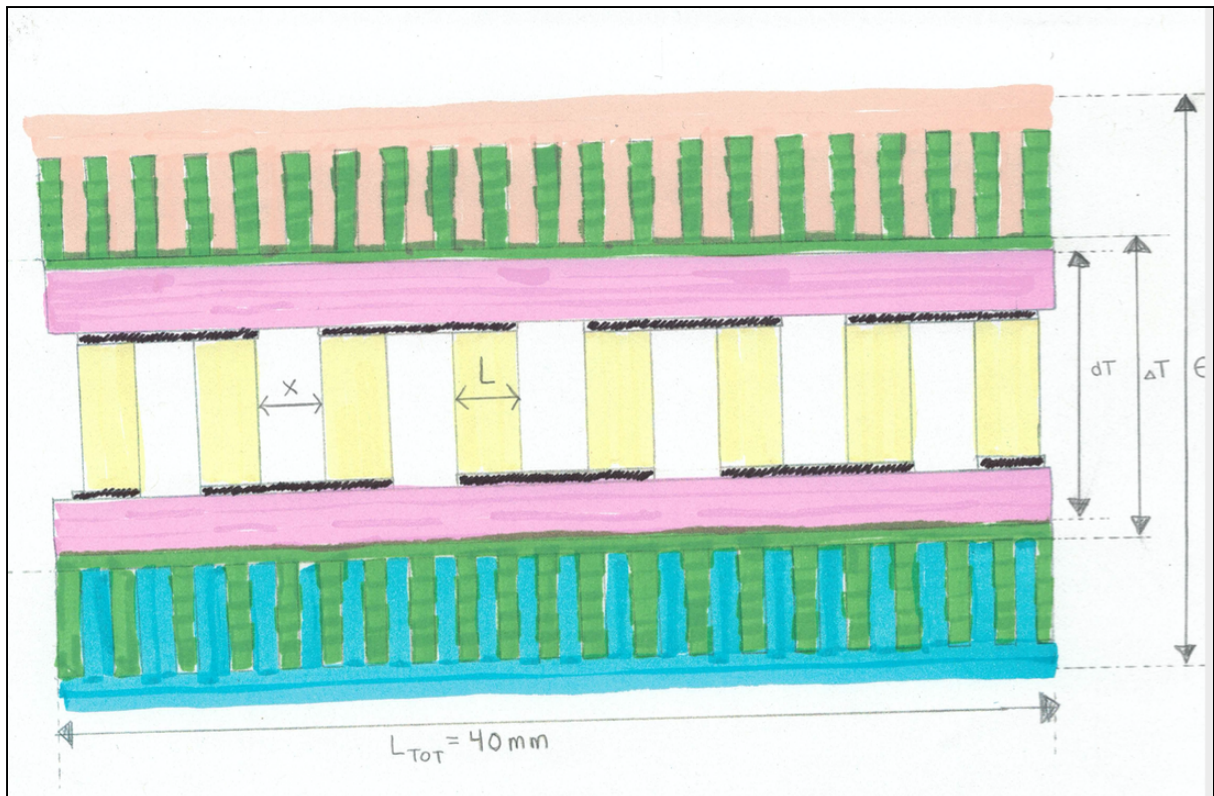


Figure xxx: Modélisation du générateur thermoélectrique à un module

En se référant à la figure ci-haut, il est possible de conclure que pour les deux scénarios (module simple et générateur), les variables x , L , H_{et} seront optimisés. Il est important de N (nombre d'éléments par module) ne sera pas optimisé directement, puisqu'il est défini selon x et L .

Lors de la l'optimisation du module simple, il est important de noter que les étudiants ont considéré que la surface de contact de l'échangeur de chaleur était égale à la surface d'une plaques d'alumine du module, soit $40mm * 40mm = 1,6 * 10^{-3} m^2$. Le volume de l'échangeur de chaleur n'a pas été considéré dans la fonctionnelle à optimiser.

Lors de la l'optimisation du générateur à un module, les étudiants ont considéré que la surface de contact de l'échangeur de chaleur était déterminé pour la surface de contact de chaque encoche de l'échangeur. Chaque encoche à $2 mm$ d'épaisseur et la distance entre chaque encoche est de $2 mm$. Il y a donc 10 encoches par côté d'échangeur. De plus, l'épaisseur de la plaque principale de l'échangeur sur le module à une dimension de $40 mm$ par $40 mm$ par $2 mm$. Les encoches ont donc $2 mm$ par $40 mm$ par une certaine hauteur H_{ec} . Il s'agit de cette hauteur que les étudiants veulent optimiser dans la seconde partie. En effet,

le fait d'optimiser cette variable permet de démontrer le lien qui existe entre une puissance maximale du générateur en fonction de la surface de contact de l'échangeur avec le fluide (chaud et froid). Il sera donc possible de prouver que plus la hauteur est grande, plus la surface est importante et donc, plus la puissance est importante. Or, il faut évaluer ce système en fonction de la puissance sur volume et non juste la puissance. Bref, dans la deuxième section le volume de l'échangeur de chaleur est considéré dans la fonctionnelle à optimiser.

Ceci-dit, il a été mentionné dans le cahier de charge que le prix du générateur dépendait directement du matériau semi-conducteur constituant l'élément des modules. Il a donc été intéressant de faire quelques recherches sur 3 types de matériaux thermoélectriques et d'analyser leur caractéristiques. Ainsi, une optimisation de la puissance en fonction des variables de dimensions des éléments et des modules est effectuée et ce, pour tous les types de matériaux semi-conducteurs utilisés afin d'avoir une optimisation de la puissance en fonction du prix. En effet, le fait d'évaluer selon différents semi-conducteurs permet simplement d'avoir différentes dimensions et donc différents volumes servant à mesurer le prix. Les étudiants ont analysé le Tellure de Bismuth (qui était déjà définie dans le cahier de charge) ainsi que le Tellure de plomb et le Silicium de Germanium. C'est trois composants typiques dans le monde de la thermoélectricité et sont utilisés à différentes conditions de température.⁵ Toutefois, pour des raisons de conditions de températures spécifiques établies par le professeur, il ne sera pas nécessaire d'évaluer ces trois matériaux. En effet, la condition thermique de l'échangeur de chaleur se situe entre 283K et 363K, ce qui est idéal pour l'utilisation du Tellure de Bismuth, qui est optimal à température pièce, entre 300K et 400K. Le tellure de plomb est quant à lui optimal entre 500K et 750K, ce qui permet d'affirmer que les conditions dans lesquelles notre générateur devra fonctionner n'avantage pas ce type de matériaux. Finalement, le Silicium de Germanium est pour sa part, optimal dans des conditions où la température dépasse les 1000K, ce qui n'est vraiment pas le cas de notre analyse.

Les étudiants ont donc décidé de seulement analyser le Tellure de Bismuth pour le matériel semi-conducteur composant le module, mais de considérer également deux types de matériel conducteur pouvant former l'échangeur de chaleur, soit l'aluminium et le cuivre.

Voici, ici bas, un tableau illustrant les différentes caractéristiques des matériaux utilisés,

⁵ https://publications.polymtl.ca/3151/1/2018_PaulVerdier.pdf

Matériaux	Aluminium	Cuivre	Tellurure de Bismuth (Bi_2Te_3)
<i>Coefficient de transfert thermique (W/m^2)</i>	1000	1500	N/A
<i>Masse volumique (g/cm^3)</i>	2,7	8,96	7,73
<i>Coût massique ($\\$/g$)</i>	2,3	7,68	18
<i>Conductivité thermique (W/mK)</i>	N/A	N/A	1,5
<i>Résistivité électrique (Ωm)</i>	N/A	N/A	$1,8 * 10^{-5}$
<i>Coefficient de Seebeck ($\mu V/K$)</i>	N/A	N/A	100

Tableau xxx: Caractéristiques matériaux des éléments et de l'échangeur de chaleur

Par la suite, il a été intéressant de poser toutes les variables connues dans un même tableau afin de bien visualiser ce qui peut être utilisé dans de futures formules. Il a également été pertinent de toutes rassembler les équations nécessaires au projet sur une même feuille afin d'avoir une certaine facilité de se retrouver lors de l'analyse. Notre feuille d'équation se retrouve en annexe de ce rapport. Voici ici-bas, le tableau des variables connues.

<i>Coefficient de Seebeck ($\mu V/K$)</i>	$\alpha = 100$
<i>Résistivité électrique (Ωm)</i>	$\rho_{TE} = 1,8 * 10^{-5}$
<i>Conductivité thermique Tellurure (W/mK)</i>	$k = 1,5$
<i>Conductivité thermique Alumine (W/mK)</i>	$k_p = 35,3$
<i>Longueur total (mm)</i>	$L_{tot} = 40$
<i>Différence de température globale (Kelvin)</i>	$\Theta = 80$
<i>Surface de contact de l'échangeur (m^2)</i>	$A = 1,6 * 10^{-3} * 2 = 3,2 * 10^{-3}$
<i>Capacité thermique massique de l'eau ($\frac{J}{Kg \cdot K}$)</i>	$c_p = 4180$
<i>Débit massique (Kg/s)</i>	$\dot{m} = 1,66$
<i>Hauteur des plaques (mm)</i>	$H_p = 1,25$

Tableau xxx : Variable connu utile pour le projet

Une fois toutes les équations écrites, il a été nécessaire de formuler la fonctionnelle à optimiser. Pour ce faire, il été important de connaître l'équation du volume pour les deux scénario (1. uniquement le volume de éléments, 2. le volume des éléments avec le volume de l'échangeur) ainsi que l'équation de la résistance interne. En effet, pour les deux scénarios à l'étude, il existe deux fonctionnelles différentes à optimiser. Finalement, il est important de noter que des contraintes de limitation ont été imposées par les étudiants afin d'avoir une optimisation des dimensions dans les normes d'un vrais module thermoélectrique. Voici les contraintes en question.

$0.5mm < x < 1.0mm$ $1.2mm < L < 1.4mm$ $1.0mm < H < 2.0mm$

Avec l'équation initiale de la puissance, de la résistance interne et du volume pour les deux scénario, il a été possible de formuler l'équation de la fonctionnelle. Or, tout comme vue dans le cadre du cours d'optimisation, puisque la fonctionnelle est non linéaire dans les deux cas, une optimisation non-linéaire doit être fait et la technique du Lagrangien doit être employé. Or, puisque les étudiants ont décidé d'optimiser ces deux problèmes sur le logiciel mathématique Matlab (puisque c'est ce logiciel de prédilection qui a été utilisé tout au long de la sessions pour les 4 travaux pratiques), le Lagrangien standard ne peut être utilisé. Effectivement, dans les conditions d'utilisation en numérique, il est nécessaire d'employer le Lagrangien augmenté, lui qui contient un terme de pénalisation "r" qui force la fonctionnelle à converger à l'intérieur des limites de la contrainte et donc, d'obtenir une seule solution. Voici donc, ici-bas, la formulation des deux problème sous forme standard.

$$P = \frac{R_L}{(R_L + R_i)^2} * (N * \alpha)^2 * dT^2$$

$$P = \frac{N^2 * \alpha^2 * dT^2}{4R_i}$$

$$R_L = R_i = N * \rho_{TE} * \frac{H}{L^2}$$

$$P = \frac{N * \alpha^2 * dT^2}{4 * \rho_{TE} * \frac{H}{L^2}}$$

$$V = L^2 HN$$

$$f(X) = \frac{P}{V}$$

Maximiser

$$f(X) = \frac{\alpha^2 dT^2}{4\rho_{TE} H^2}$$

Sujet à :

$$0.5mm < x < 1.0mm$$

$$1.2mm < L < 1.4mm$$

$$1.0mm < H < 2.0mm$$

$$\mathcal{L}_a = \frac{-\alpha^2 dT^2}{4\rho_{TE} H^2} + \lambda_1(0.5 - x + s_1^2) + \lambda_2(x - 1 + s_2^2) + \lambda_3(1.2 - L + s_3^2) + \lambda_4(L - 1.4 + s_4^2) + \lambda_5(1 - H + s_5^2) + \lambda_6(H - 2 + s_6^2) + r((0.5 - x + s_1^2)^2 + (x - 1 + s_2^2)^2 + (1.2 - L + s_3^2)^2 + (L - 1.4 + s_4^2)^2 + (1 - H + s_5^2)^2 + (H - 2 + s_6^2)^2)$$

Figure xxx: Formulation du problème standard pour le scénario 1 (élément seulement)

$$P = \frac{N * \alpha^2 * dT^2}{4 * \rho_{TE} * \frac{H}{L^2}}$$

$$V = L^2 HN + \left(\left(2 * 10 * \left(\frac{2}{1000} \right) * \left(\frac{40}{1000} \right) * H_{ec} \right) + 2 * \left(\frac{40}{1000} \right) * \left(\frac{40}{1000} \right) * \left(\frac{2}{1000} \right) \right)$$

$$f(X) = \frac{P}{V}$$

Maximiser

$$f(X) = \frac{\left(\frac{N * \alpha^2 * dT^2}{4 * \rho_{TE} * \frac{H}{L^2}} \right)}{L^2 HN + \left(\left(2 * 10 * \left(\frac{2}{1000} \right) * \left(\frac{40}{1000} \right) * H_{ec} \right) + \left(2 * \left(\frac{40}{1000} \right) * \left(\frac{40}{1000} \right) * \left(\frac{2}{1000} \right) \right) \right)}$$

Sujet à :

$$0.5mm < x < 1.0mm$$

$$1.2mm < L < 1.4mm$$

$$1.0mm < H < 2.0mm$$

$$0.1mm < H_{ec}$$

$$\mathcal{L}_a = \frac{\left(\frac{N \cdot \alpha^2 \cdot d T^2}{4 \cdot \rho_{TE} \cdot L^2} \right)}{L^2 H N + \left(\left(2 \cdot 10 \cdot \left(\frac{2}{1000} \right) \cdot \left(\frac{40}{1000} \right) \cdot H_{ec} \right) + \left(2 \cdot \left(\frac{40}{1000} \right) \cdot \left(\frac{40}{1000} \right) \cdot \left(\frac{2}{1000} \right) \right) \right)} + \lambda_1 (0.5 - x + s_1^2) + \lambda_2 (x - 1 + s_2^2) + \lambda_3 (1.2 - L + s_3^2) + \lambda_4 (L - 1.4 + s_4^2) + \lambda_5 (1 - H + s_5^2) + \lambda_6 (H - 2 + s_6^2) + \lambda_7 (0.1 - H_{ec} + s_7^2) + r ((0.5 - x + s_1^2)^2 + (x - 1 + s_2^2)^2 + (1.2 - L + s_3^2)^2 + (L - 1.4 + s_4^2)^2 + (1 - H + s_5^2)^2 + (H - 2 + s_6^2)^2 + (0.1 - H_{ec} + s_7^2)^2)$$

Figure xxx: Formulation du problème standard pour le scénario 2 (élément et échangeur)

Ceci dit, la prochaine étapes du projet après cette modélisation mathématique et physique a été de faire l'optimisation des deux systèmes sur le logiciel Matlab. Pour ce faire, plusieurs codes ont été essayés en suivant la technique du Lagrangien augmenté, toutefois, plusieurs problèmes sont survenue et plus de 40 heures de débogage n'ont malheureusement pas porté fruit. Les étudiants ont donc décidé d'optimiser les systèmes à l'aide de l'algorithme fmincon de Matlab. Le groupe d'étudiants a également fait plusieurs codes permettant de tracer les différents scénarios et ainsi de voir comment réagit la fonctionnelle en fonctions des variables d'optimisation L, x, H et Hec.

Optimisation et analyse du problème sans volume échangeur

Sachant que l'optimisation vise à maximiser la puissance selon le volume, il est possible de prédire certain comportement. Par exemple, comme montre la figure ci-dessous, plus le volume est petit, plus la puissance divisée par le volume sera élevée. Ce comportement est tout à fait normal, puisque le volume se trouve au dénominateur de la fonctionnelle. Ainsi, il est possible de prédire que le point optimal sera celui qui minimise le volume. Une division par un volume de zéro est recherché mathématiquement.

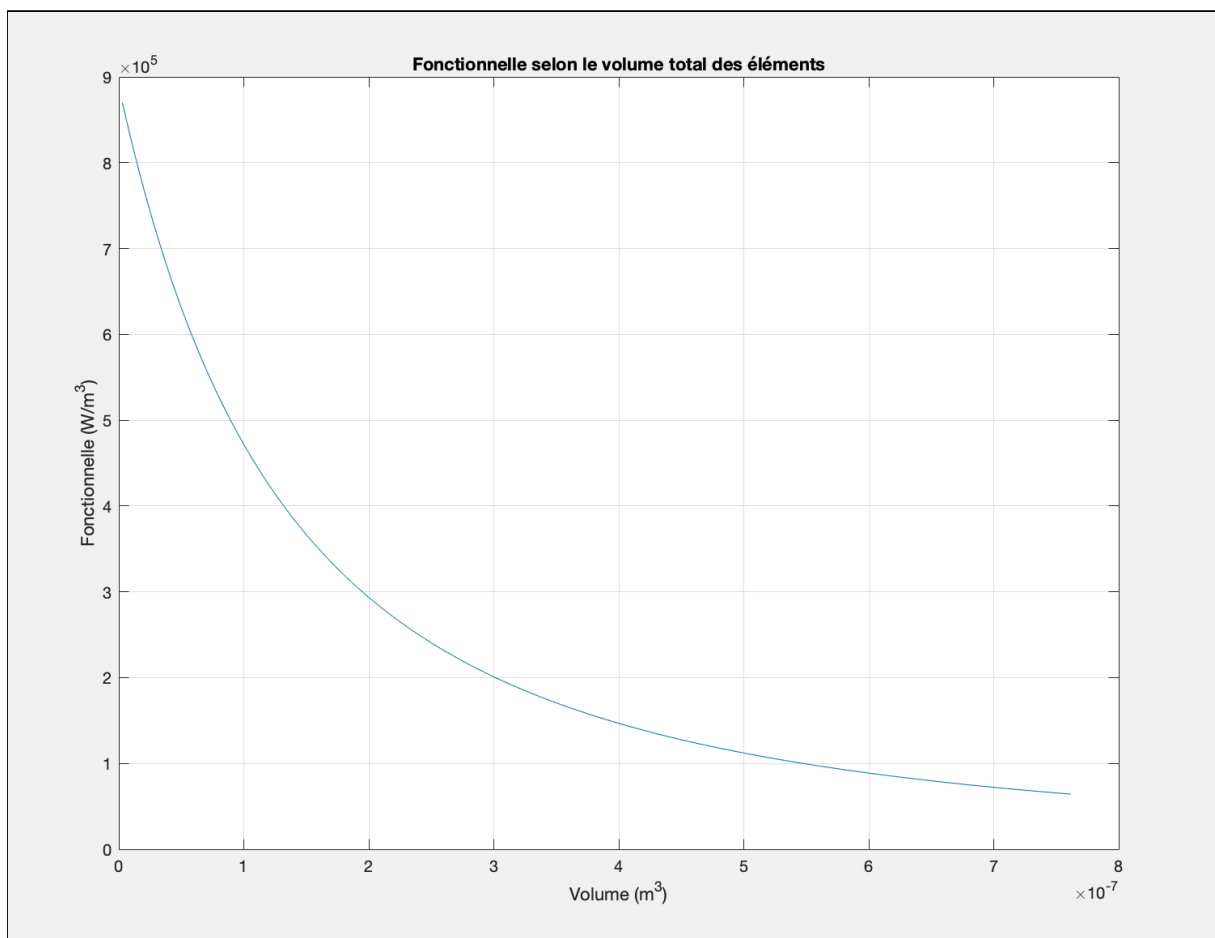


Figure XXX : Fonctionnelle à optimiser de la puissance divisée par le volume

Les variables à optimiser décidées sont la hauteur des éléments (H), la largeur/longueur (L) des éléments et l'espace entre les éléments (x). Ainsi, le volume d'un module sera directement affecté, puisque qu'il dépend directement de l'espace entre les éléments et le volume des éléments déterminés par H et L . Pour mieux comprendre l'impact

des différentes variables à optimiser, plusieurs graphiques ont été réalisés pour visualiser l'effet de chaque variables sur la fonctionnelle. Chaque graphique comprend des variables qui varient de quelques millimètres et une variable qui est fixée à une longueur raisonnable.

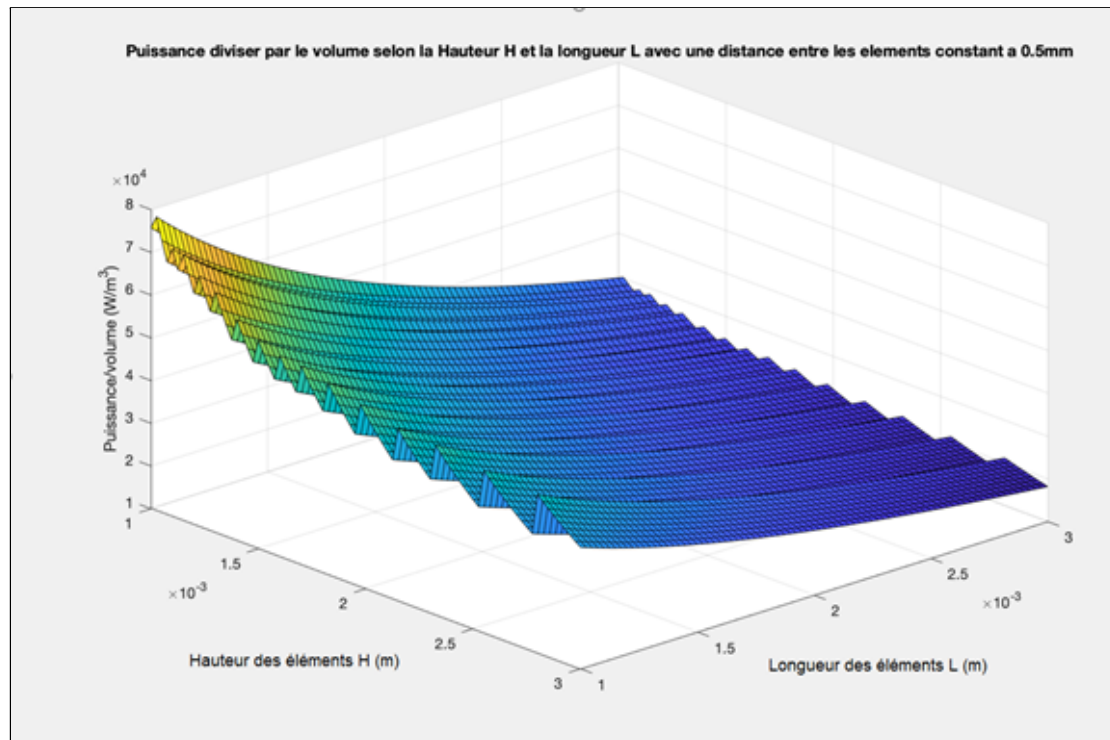


Figure XXX : Fonctionnelle avec H et L comme variables et x comme constante.

La figure ci-haut montre l'impact de la largeur et de la hauteur sur la fonctionnelle. Le graphique contient des vagues causées par la longueur total d'un module qui est fixe. Cette longueur fixe limite le nombre d'éléments par module dont la puissance dépend. Ainsi, lorsque les dimensions le permettent, plusieurs éléments peuvent soudainement être ajouté ce qui augmente la puissance, donc la fonctionnelle également. Cet effet ou d'autres semblables se retrouvent sur quelques uns des graphiques. Comme il est prévu, plus la longueur et la hauteur sont petites, plus la fonctionnelle sera élevée, puisque ces variables limitent le volume lorsqu'elle sont petites.

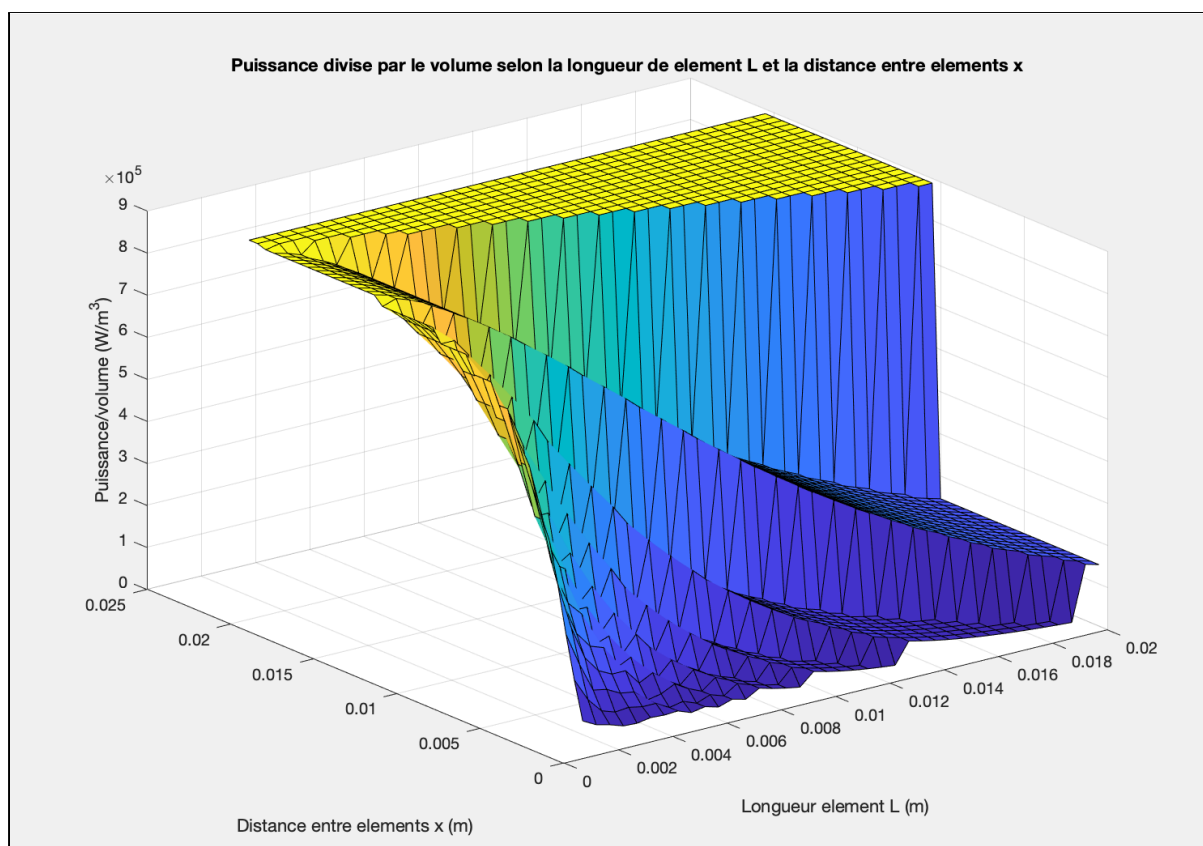


Figure XXX : Fonctionnelle avec x et L comme variables et H comme constante.

Le figure ci-haut montre l'effet de la longueur et de l'espace entre les éléments sur la fonctionnelle. Il est intéressant de constater l'apparition d'un plateau lorsque la longueur et l'espace entre les éléments deviennent trop grandes. Ce plateau est causé par la longueur total qui est fixé à 40 mm. Une fois que L et x sont assez grands, il n'y a plus d'espace pour d'autres éléments et il n'y a qu'un éléments volumineux. Ainsi, la puissance (et la fonctionnelle) reste la même rendu à un certain point peu importe la valeur de x ou L.

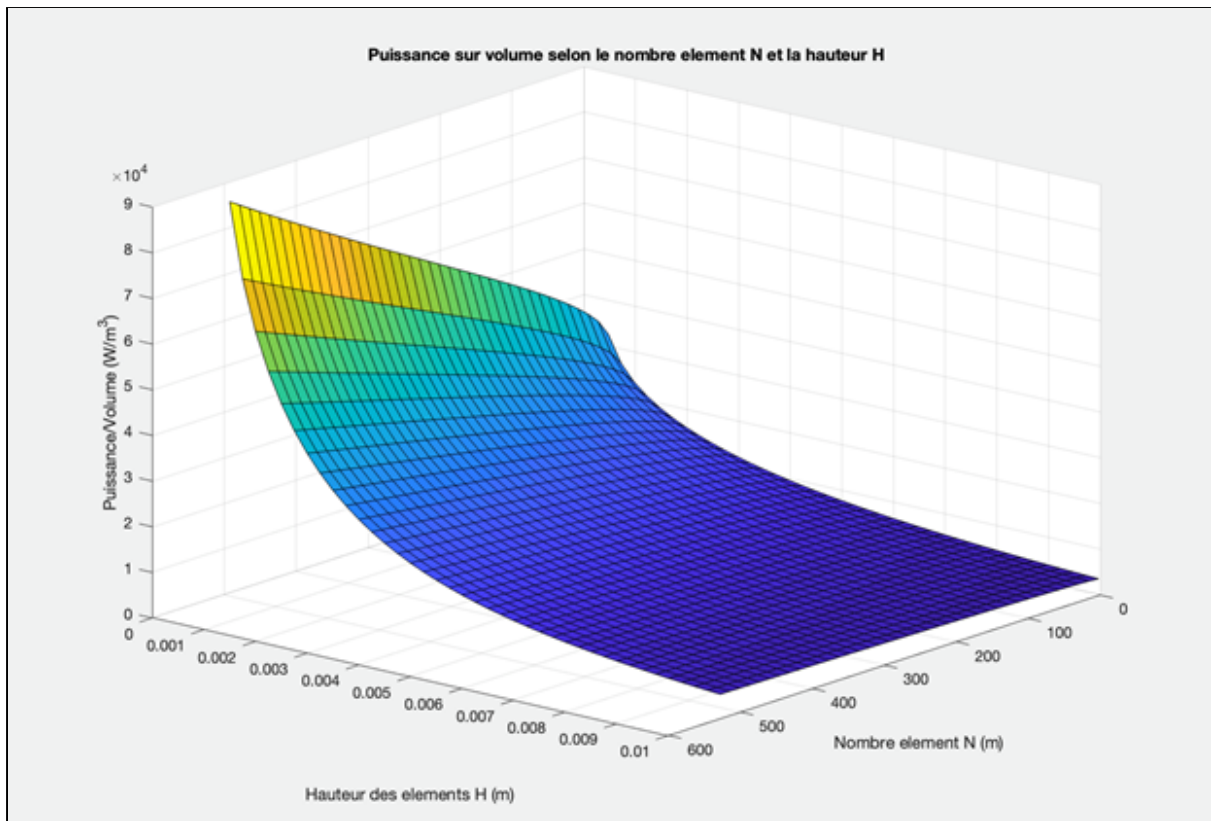


Figure XXX : Fonctionnelle avec H et N comme variables et x comme constante

La figure ci-haut montre la fonctionnelle qui varie selon la hauteur et le nombre d'éléments, qui lui dépend de L et x. Encore une fois, Plus H est petit, plus la fonctionnelle sera élevée comme il a été mentionné plus tôt. Le comportement inverse se produit lorsqu'on observe le nombre d'éléments : plus il y en a, plus la fonctionnelle est élevée, surtout lorsque H est également élevée. C'est un effet attendu, puisque le nombre d'élément augmente la puissance plus qu'il augmente le volume. Ainsi, la fonctionnelle augmente avec le nombre d'éléments au lieu de diminuer.

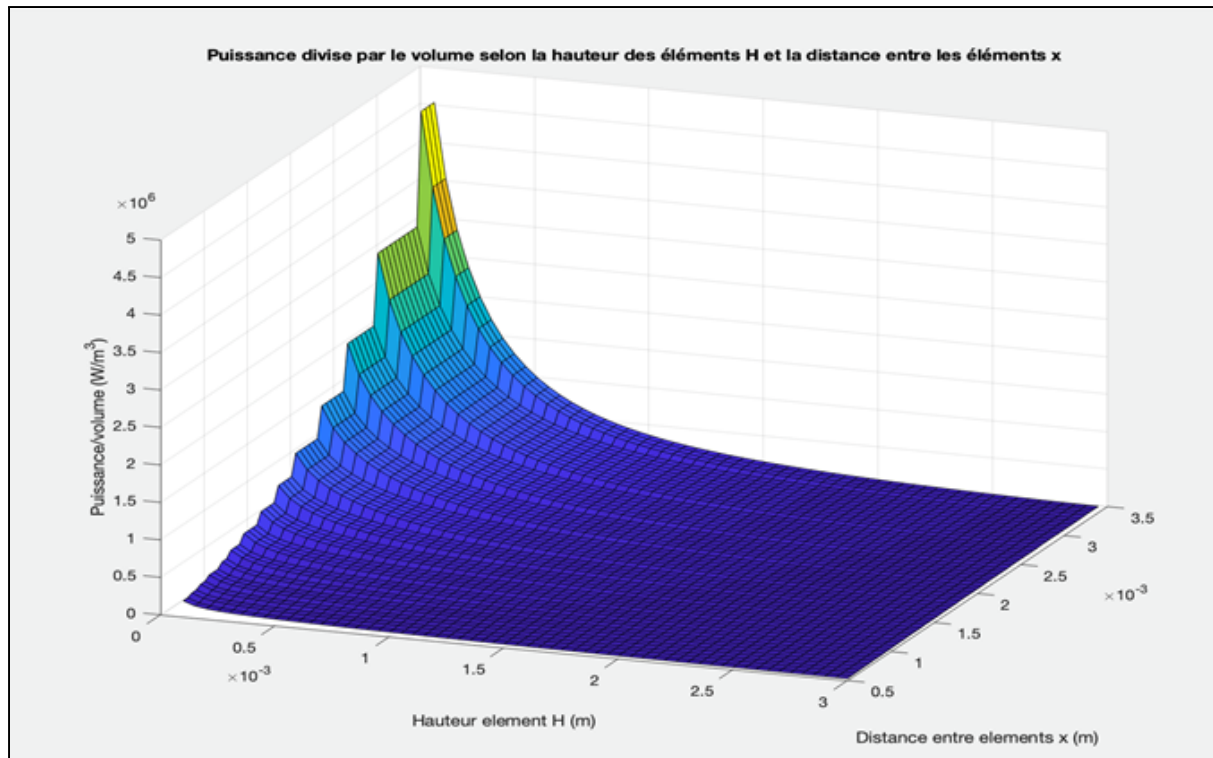


Figure XXX : Fonctionnelle avec H et x comme variables et L comme constante

La figure ci-dessus montre, enfin, l'impact de H et x sur la fonctionnelle et L constant. Sans surprise, plus les variables limitent le volume, plus la fonctionnelle est élevée. La puissance divisée par le volume est maximale lorsque H est petit et lorsque x est grand. Un grand x réduit le nombre d'éléments ce qui se traduit en volume réduit.

Suite à l'analyse des divers graphiques qui illustre le comportement des différentes variables à optimiser, il est clair que le point optimal sera celui qui offre un volume le plus petit possible. Ainsi, la hauteur sera la plus petite possible, la longueur aussi et l'espace entre les éléments sera la plus grande possible. Ci-bas se trouve le problème à optimiser. Les limites encadrant les variables sont basés sur des longueurs plausibles d'éléments d'un module thermoélectrique.

Maximiser :

$$F(X) = P/V$$

$$X = \{H, L, x\}$$

Sujet à :

$$1 \text{ mm} \leq H \leq 2 \text{ mm}$$

$$1.2 \text{ mm} \leq L \leq 1.4 \text{ mm}$$

$$0.5 \text{ mm} \leq x \leq 1 \text{ mm}$$

Figure XXX : Problème sous forme standard

Longueur des éléments: 1.20 mm
Hauteur des éléments : 1.00 mm
Espace entre éléments : 0.977 mm
Puissance volumique : 287110.05 W/m ³
Nombre de module : 289

Figure XXX : Solution optimale pour la fonctionnelle P/V avec l'aluminium

Comme il a été déduit de manière logique, le point optimal se trouve exactement aux limites qui offrent un volume minimale. Une longueur de 1.2 mm, un hauteur de 1 mm et un espace entre les modules de 0.977 mm maximisent la fonctionnelle à 287 110,05 W/m² avec 289 éléments. La figure ci-dessous concorde exactement avec la résultat obtenu avec comme variable L et x et une hauteur fixée à 1 mm. L'espace entre les éléments n'est pas au maximum de sa valeur possible, mais la valeur obtenu suite à l'optimisation résulte quand même à un maximum de la fonctionnelle. En effet, entre $x = 0,98 \text{ mm}$ et $x = 1 \text{ mm}$. il ne peut pas y avoir plus d'éléments dans le module, ce qui permet de confirmer que la plus petite distance entre le éléments est utilisée, soit $0,98 \text{ mm}$. Il est important de noter que l'optimisation de ce module thermoélectrique a été fait en considérant une surface de contact de l'échangeur égale à la surface des plaques du module et en considérant le matériaux de celui-ci comme étant de l'aluminium. Voici, ici-bas, le graphique permettant de bien visualiser le résultat obtenu.

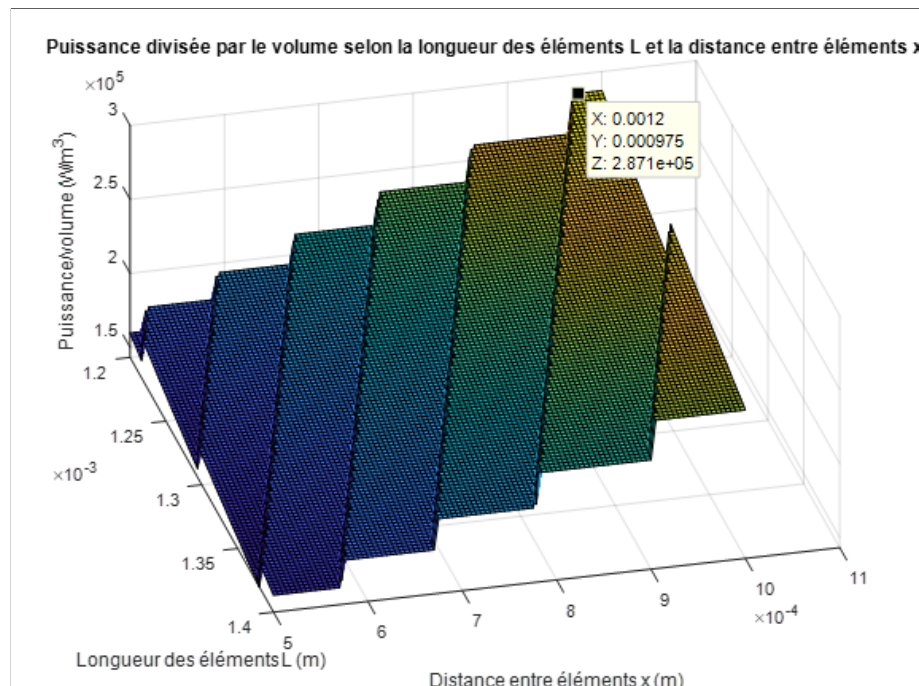


Figure XXX : Point optimal de la fonctionnelle avec l'aluminium

L'optimisation est réalisée avec Matlab. Le programme codé utilise la fonction *fmincon* qui utilise un algorithme dans la famille des méthodes de points intérieurs. Cette fonction permet d'optimiser une fonctionnelle linéaire ou non soumise à des contraintes linéaires et/ou non linéaires. De plus, il est possible de configurer la tolérance pour s'assurer que le résultat final soit précis en effectuant plus d'itération.

Par la suite, il a été intéressant d'optimiser le même module thermoélectrique, mais cette fois-ci, en considérant l'échangeur de chaleur en cuivre. Il faut noter qu'on ne considère pas le volume de cet échangeur. La surface de contact de celui-ci est encore celle des plaques du module. L'unique caractéristique qui change pour cette deuxième optimisation est le coefficient de transfert thermique du cuivre comparé à l'aluminium. Donc, encore une fois, les étudiants s'attendent à obtenir le plus petit volume possible mais une puissance beaucoup plus grosse en raison de l'augmentation du coefficient de transfert thermique. Voici le résultat obtenu suite à l'optimisation Matlab.

```
Longueur des éléments: 1.20 mm|
Hauteur des éléments : 1.00 mm
Espace entre éléments : 0.979 mm

Puissance volumique : 391700.32 W/m^3
Nombre de module : 289
```

Figure XXX : Solution optimale pour la fonctionnelle P/V avec le cuivre

En analysant les résultats obtenus, il est possible de conclure qu'effectivement, le changement de l'aluminium au cuivre affecte à la hausse la maximisation de la fonctionnelle, ce qui est tout à fait logique puisque comme on le remarque aisément, les dimensions du modules, soit x , L et H sont identiques à ceux trouvés dans l'optimisation avec l'aluminium, or la puissance générée en raison du coefficient de transfert thermique augmente significativement, ce qui résulte en une hausse de la fonctionnelle. Le graphique ci-dessous permet de bien visualiser l'impact du cuivre sur la fonctionnelle.

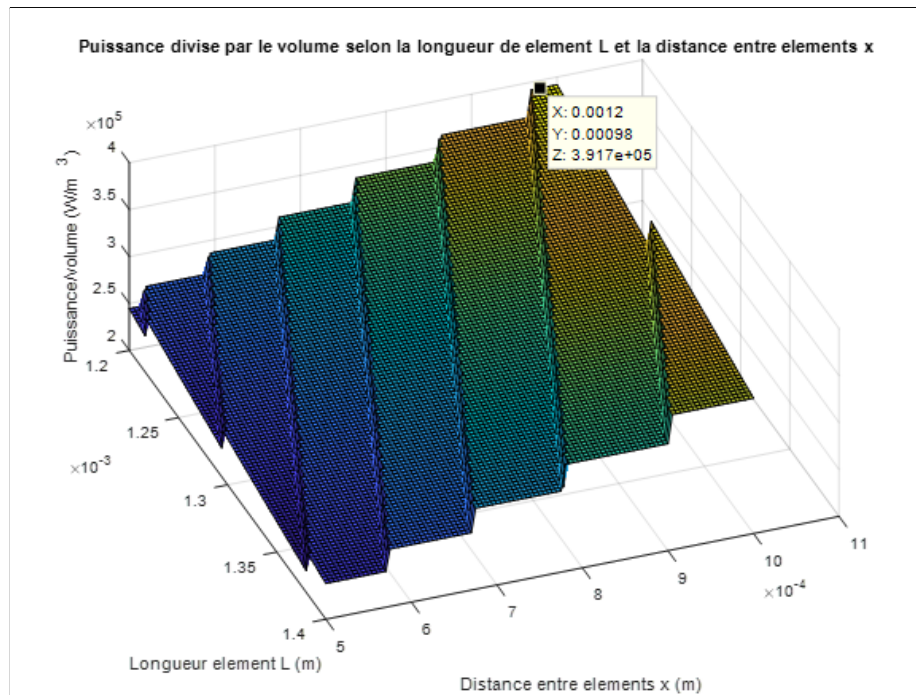


Figure XXX : Point optimal de la fonctionnelle avec le cuivre

Le tableau ci-dessous, permet de bien récapituler les résultats obtenus pour les deux optimisations fait d'un simple module thermoélectrique, sans considération du volume de l'échangeur. Seule l'aire de surface de cette échangeur à été considéré.

Modèle	Module simple avec échangeur en aluminium	Module simple avec échangeur en cuivre
<i>Surface de contact de l'échangeur</i> $A (m^2)$	$2 * 1,6 * 10^{-3}$	$2 * 1,6 * 10^{-3}$
<i>Coefficient de transfert thermique</i> $U(W/m^2K)$	1000	1500
<i>Conductance thermique (W/K)</i>	3,2	4,8
<i>Longueur des éléments (mm)</i>	1,2	1,2
<i>Hauteur des éléments (mm)</i>	1	1
<i>Distance entre éléments (mm)</i>	0,977	0,979
<i>Nombre de module</i>	289	289
<i>Fonctionnelle maximisée (W/m^2)</i>	287 110,05	391 700,32

Optimisation et analyse du problème avec volume échangeur

Dans cette deuxième partie de l'optimisation d'un générateur thermoélectrique, il a été intéressant de prendre en considération le volume de l'échangeur de chaleur ainsi que la puissance de plus que cette partie d'un générateur est en mesure de générer. Ainsi, la puissance totale de ce générateur dépend maintenant de la surface de contact totale offerte par l'échangeur de chaleur, et non seulement la surface du module. Cette surface de contact de plus permet de maximiser la différence de température entre les deux plaques du module comme il a été démontré dans la partie 2 de ce rapport.

Afin de bien comprendre l'effet de l'augmentation de la surface de contact entre le fluide chauffant ou refroidissant et l'échangeur de chaleur, les étudiants ont décidé qu'il serait pertinent de tracer un graphique illustrant cette relation. À titre informatif, comme mentionné dans la section modélisation de ce rapport, les dimensions de l'échangeur de chaleur sont tous prédéfinis à l'exception de la hauteur des encoches. Le volume de l'échangeur dépend donc uniquement de la hauteur (la hauteur est la seule variable à optimiser de plus pour ce générateur)

La figure xxx permet de visualiser l'effet de l'augmentation de la surface de l'échangeur sur la puissance générée par le module selon les valeurs de dimensionnement trouvé dans la première partie de l'optimisation de ce projet. On remarque aisément que la puissance augmente drastiquement lorsque la hauteur des encoches augmente quelque peu, or passé un certain niveau de hauteur (surface de contact), l'effet de celle-ci sur la puissance est négligeable puisqu'il y a saturation. Ce phénomène est tout à fait logique et est en lien avec le concept de l'écart de température de l'échangeur chaud/froid qui est égale à l'écart de température entre le fluide chaud et froid. En effet, lorsque la surface devient trop grande, la température de l'échangeur n'augmente pas passé la température du fluide. C'est ce qu'on appelle le plateau de saturation de puissance dû à la température.

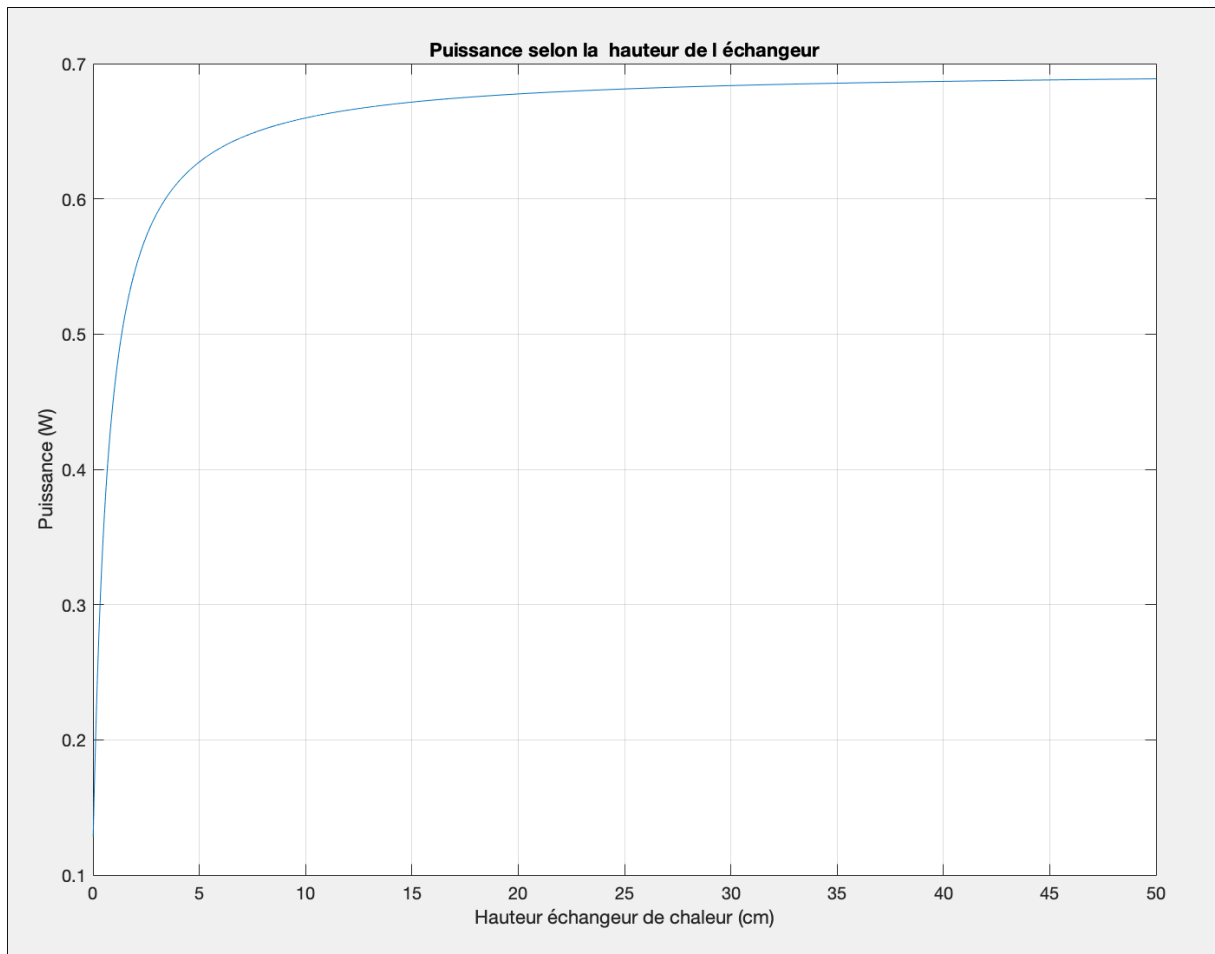


Figure xxx: Puissance du générateur en fonction de la hauteur des encoches de l'échangeur

Sachant qu'il y a une augmentation importante de la puissance en fonction de la hauteur des encoches, les étudiants se sont intéressés à savoir si le volume augmentait nécessairement autant que la puissance afin de savoir s'il existe un point optimal à optimiser. Il a donc été intéressant de voir l'effet de la hauteur des encoches sur la fonctionnelle (puissance sur volume total). Il est important de noter que le volume total considéré dans la fonctionnelle est en fait le volume total des éléments du module additionné avec le volume de l'échangeur de chaleur de côté chaud et froid. L'hypothèse de base des étudiants a été que le volume de l'échangeur de chaleur était beaucoup plus important que le volume des éléments ce qui fait en sorte que les éléments sont pratiquement négligeables. De ce fait, les dimensions des éléments qui forment le module seront maximisées afin d'augmenter la puissance sans affecter le volume final. La longueur des éléments sera donc maximisée à 1,4 mm, tandis que la hauteur sera encore de 1 mm, car elle n'affecte pas beaucoup la puissance. La distance entre les éléments sera au minimum, soit de 0,5 mm afin de maximiser le nombre

d'éléments dans le module pour générer le plus de puissance possible. Les étudiants croient donc qu'il y aura une hauteur optimale à rechercher qui fera qu'il y a une puissance volumique maximale selon cette hauteur précise. La figure xxx qui suit, prend en considération une valeur de x , L , H et N précis qui a été trouvé lors de l'optimisation de la première partie et la hauteur se fait varier entre 0 cm et 5 cm. On remarque aisément que la fonctionnelle connaît un point maximale lorsque qu'il y a une certaine hauteur attribuée aux encoches de l'échangeur, ce qui vient confirmer l'hypothèse des étudiants. Il a donc été possible de confirmer qu'il existe une hauteur à optimiser pour ce type de problème lorsque le volume de l'échangeur est considéré.

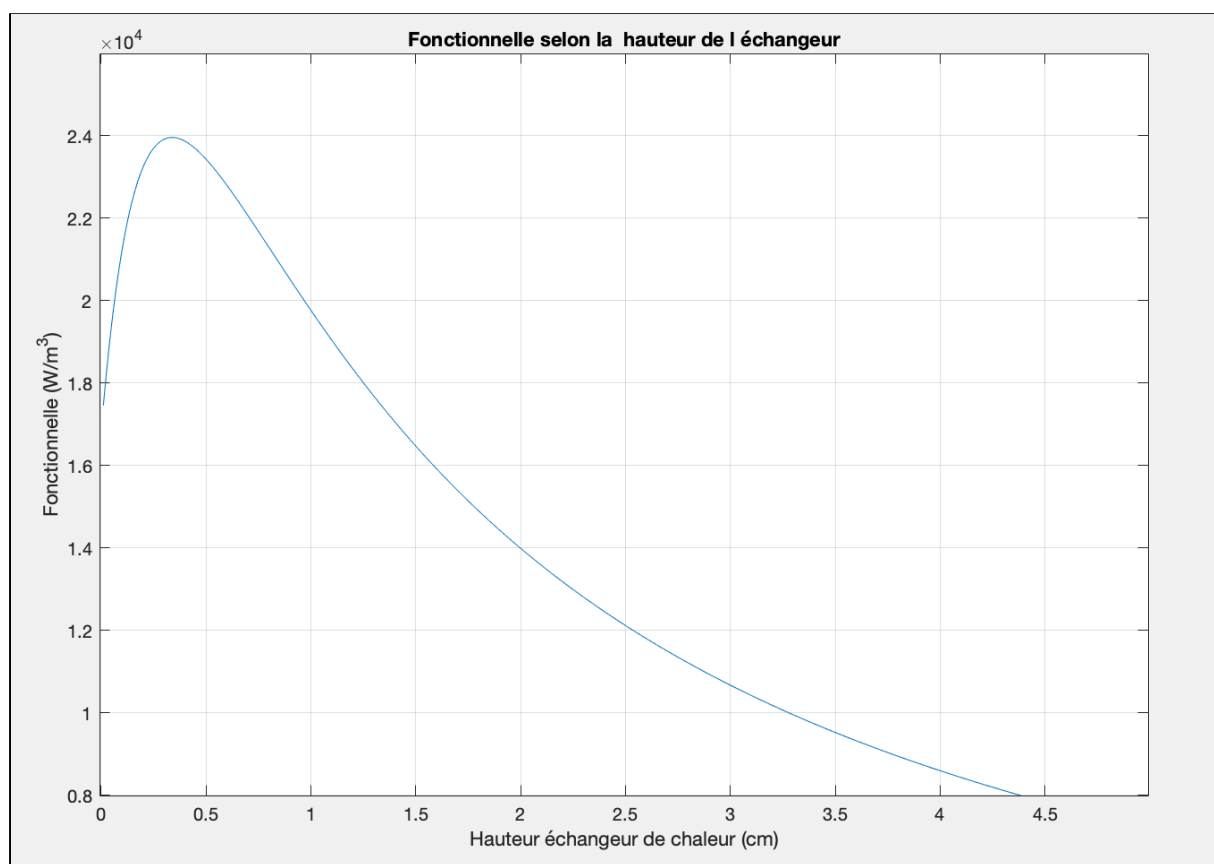


Figure xxx: Point d'optimalité pour la fonctionnelle en fonction de la hauteur des encoches de l'échangeur

De plus, sachant que l'optimisation se fait selon deux matériaux conducteurs différents pour l'échangeur de chaleur, soit l'aluminium et le cuivre, les étudiants ont posés une deuxième hypothèse. Puisque le coefficient de transfert thermique augmente pour le cuivre, les étudiants croient qu'il est possible à s'attendre que la hauteur des encoches pour un échangeur en cuivre soit plus petite que pour celle d'un échangeur en aluminium. Le

raisonnement est simplement que puisque le coefficient de transfert thermique est plus gros, moins de surface de contact entre l'échangeur et le fluide est nécessaire pour atteindre une égalité des température entre ces deux.

Afin d'optimiser numériquement ces deux problèmes, le logiciel Matlab est encore une fois utilisé, ainsi que l'algorithme de "fmincon". Les mêmes contraintes pour les dimensions du module ont été utilisées, mais une contrainte de plus sur la hauteur des encoches a été ajoutée. En effet, les étudiants ont inscrit que les encoches doivent être au minimum de 0,1 mm afin de les considérer comme influençable. Voici, ici-bas, le résultat de l'optimisation Matlab de ce problème en considérant l'aluminium comme composant de l'échangeur.

Longueur : 1.40 mm
Hauteur 1.00 mm
Espace entre élément : 0.50 mm
Hauteur encoche échangeur de chaleur : 0.34 cm
Puissance volumique : 23959.96 W/m ³
Nombre d éléments : 400

Figure XXX : Solution optimale pour la fonctionnelle P/V en considérant le volume de l'aluminium

La figure qui suit est un graphique de la fonctionnelle en fonction des valeurs des variables optimales L, x, H et N trouvées avec Matlab. Il est possible de confirmer qu'avec une hauteur de 0,34 cm, la fonctionnelle est belle et bien au maximum et donc, qu'il s'agit bel et bien de la hauteur optimale qui est recherchée.

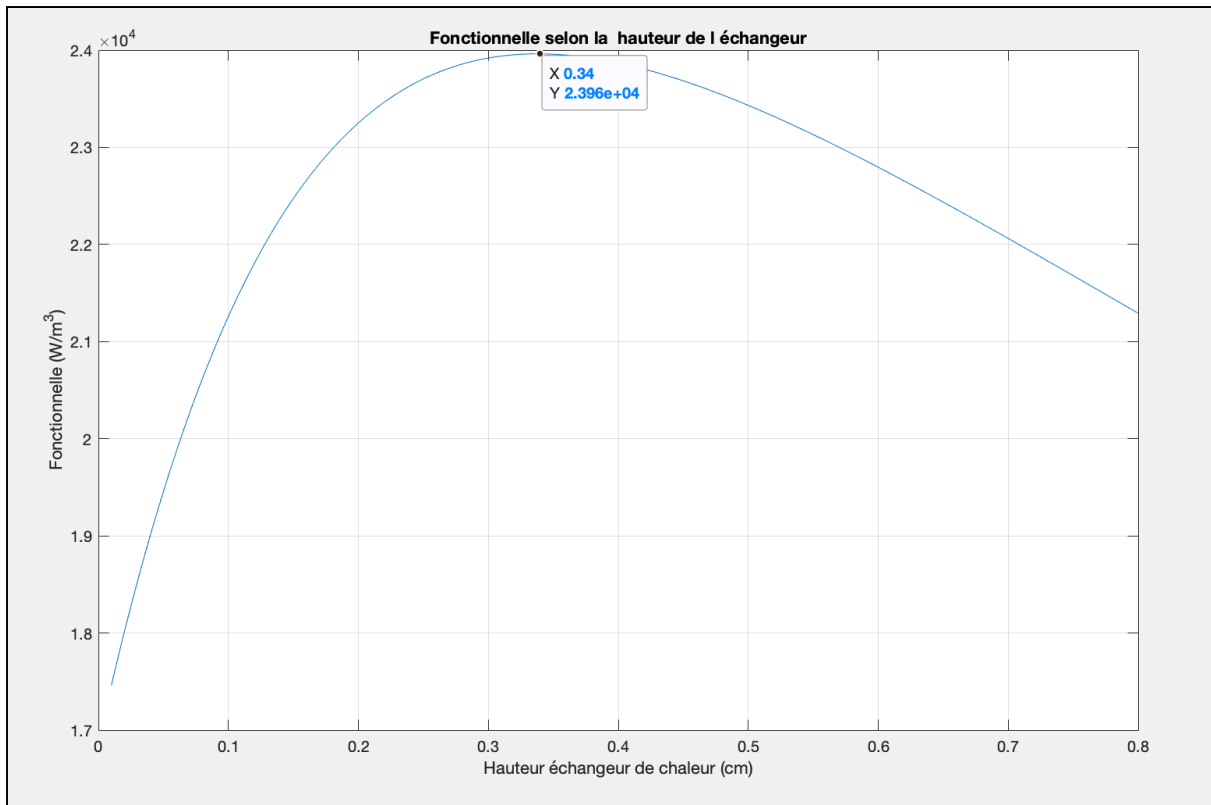


Figure xxx: Maximisation de la fonctionnelle en fonction de la hauteur des encoches de l'échangeur en aluminium

Il est important de noter que dans le code, les étudiants ont mesuré le volume total des éléments, de l'échangeur de chaleur et du générateur (éléments + échangeur) à l'aide des dimensions optimales calculées. Avec ce volume ainsi qu'avec le prix massique et le volume massique de chaque composants, il a été possible de déterminer le prix total du générateur. Voici un tableau illustrant toutes ces caractéristique pour le générateur thermoélectrique formé d'un échangeur de chaleur en aluminium.

<i>Puissance total (W)</i>	0.3017
<i>Volume total (m³)</i>	$1.2592 * 10^{-5}$
<i>Volume de l'échangeur (m³)</i>	$1.1808 * 10^{-5}$
<i>Volume des éléments (m³)</i>	$7.8400 * 10^{-7}$
<i>Coût total du générateur (\$)</i>	109.8983

<i>Longueur des éléments (mm)</i>	1.40
<i>Hauteur des éléments (mm)</i>	1.00
<i>Espace entre élément (mm)</i>	0.5
<i>Hauteur encoche échangeur de chaleur (cm)</i>	0.34
<i>Puissance volumique (W/m³)</i>	23959.96
<i>Nombre d'éléments</i>	400

Tableau xxx: Caractéristique du générateur formé de l'échangeur de chaleur en aluminium

Dans ce tableau, il est possible de remarquer que le volume total du générateur est dictée en très grande partie par le volume de l'échangeur de chaleur. L'hypothèse de base fait par les étudiants stipulant que le volume des éléments est négligeable comparément à l'échangeur est donc tout à fait vrai. Le petit volume de plus qu'apporte la hauteur des encoche sur le volume total de l'échangeur n'est pas assez important face à la puissance de plus que cela amène. C'est pourquoi il y a une augmentation de la fonctionnelle jusqu'à un certain niveau de hauteur des encoches.

Pour la deuxième optimisation,

Conclusion

En conclusion, nous avons trouvé une solution à la problématique et plus encore. En effet, non seulement les dimensions optimales de notre modélisation initial ont été trouvées, nous sommes allés encore plus loin en optimisant le volume de l'échangeur de chaleur. Les dimensions optimales d'un élément d'un module sont une longueur de 1.2 mm, une hauteur de 1 mm et un espace entre les éléments de 0.979 mm ce qui produit 372 kW par m³ pour l'aluminium et 287 kW par m³ pour le cuivre. Les dimensions optimales de l'échangeur sont une longueur de 1.4 mm, une hauteur de 1 mm, une hauteur d'encoche et un espace entre les éléments de 0.5 mm ce qui produit 24 kW par m³.

De plus, ce projet offre la chance d'appliquer plusieurs concepts d'optimisation dans le cadre d'un contexte réaliste. Ainsi, nous sommes mieux préparés pour affronter des situations réelles qui peuvent survenir dans une carrière d'ingénieur.

Autoévaluation

Nous croyons mériter la note de 100%, car nous avons produit un rapport excellent, puisque nous avons mis énormément d'effort dans la réalisation du projet et parce que notre projet est complet et réussi. En effet, le rapport présente nos démarches et nos raisonnements de manière rigoureuse, notre optimisation offre des résultats logiques et nous avons utilisé nos ressources de manière ingénieuse pour offrir un projet incroyable.

Tout d'abord, tout au long du rapport, nous présentons nos démarches mathématiques, comme celle des parties 1 et 2, très clairement. De plus, nous avons modélisé le problème pour illustrer précisément notre projet. Notre clarté nous permet de bien comprendre le problème ce qui nous permet ensuite de prendre de bonnes décisions et de les justifier adéquatement.

D'ailleurs, Nous avons mis une quantité de temps énorme dans ce projet. En effet, pour être certain de la qualité de réalisation du projet, nous avons consacré notre temps précieux de fin de session à ce projet. Que ce soit en investissant des dizaines d'heures dans le code du TP4 de Lagrange augmenté pour le faire fonctionner, ou en allant voir le professeur pour être certain que notre modélisation et compréhension soient à leur optimales. Malgré tout l'effort mis dans le code du TP4, les dimensions résultantes n'étaient satisfaisantes. Donc, nous avons utilisé une autre méthode avec laquelle il a fallu se familiariser ce qui a demandé, encore une fois, du temps. Heureusement, tout ce temps investi nous a permis de trouver des résultats très logiques et de bien les analyser et expliquer.

D'autre part, nous avons utilisé Matlab et notre savoir acquis pendant le cours à leur plein potentiel. Effectivement, pour bien illustrer le problème et nos raisonnements, plusieurs graphiques furent réalisés. Pour réaliser ces graphiques, nous avons utilisé Matlab à son plein potentiel pour que les graphiques soient les meilleurs possibles. Nous avons également utilisé Matlab à son plein potentiel et notre savoir en optimisation pour réaliser le code d'optimisation. Puisque le code de Lagrange augmenté était trop problématique, nous avons utilisé les fonctions déjà existantes de Matlab pour optimiser notre fonctionnel. Grâce à nos connaissances acquises pendant le cours et les laboratoires, nous avons pu bien configurer la fonction *fmincon* utiliser pour nos résultats soient justes et précis.

Enfin, notre projet est un succès. Nous présentons des résultats, des analyses et des démarches justes qui appliquent les concepts vu en classe et plus encore. Nous croyons

démontré au travers du projet un niveau de compréhension et de rigueur suprême. C'est pourquoi nous avons déterminé que la note de 100% est adéquate,

Bibliographie

http://uel.unisciel.fr/chimie/chimther/chimther_ch03/co/apprendre_ch3_04.html

https://publications.polymtl.ca/1708/1/2015_ArouaBelhadj.pdf

https://publications.polymtl.ca/3151/1/2018_PaulVerdier.pdf

https://publications.polymtl.ca/1901/1/2015_LurdezPrietoVargas.pdf

https://fr.qwertyu.wiki/wiki/Thermoelectric_materials#Materials_of_interest

Annexes 1 (Formules et équations)

K	Conductance thermique	W/K
L	Largeur des éléments thermoélectrique	m
N	Nombre d'éléments thermoélectrique	—
P	Puissance électrique	W
Q	Puissance (flux) thermique	W
R	Résistance électrique	Ω
T	Température	K
V	Voltage	V
x	Distance entre les éléments thermoélectriques	m

Indices	Définition
C	Froid ('cold')
H	Chaud ('hot')
i	Interne
L	Externe ('load')
oc	Circuit ouvert
p	Plaque d'assemblage
TE	Thermoélectrique
tot	Total

Température :

$$T_{H,in} = 90^{\circ}C$$

$$T_{C,in} = 10^{\circ}C$$

$$\Theta = 90^{\circ}C - 10^{\circ}C = 80^{\circ}C$$

Fluide:

Eau

Masse volumique de l'eau:

$$\rho = 1000 \frac{Kg}{m^3}$$

Capacité thermique massique de l'eau:

$$c_p = 4180 \frac{J}{Kg \cdot K}$$

Débit massique:

$$100 \text{ L/min}$$

$$1 \text{ L} = 0,001 \text{ m}^3$$

$$m_{point} = 100 \frac{\text{L}}{\text{min}} * \frac{0,001 \text{ m}^3}{1 \text{ L}} * 1000 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} * \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 1,66 \frac{\text{Kg}}{\text{s}}$$

Résistance interne et de charge pour un puissance maximale:

$$R_i = R_L$$

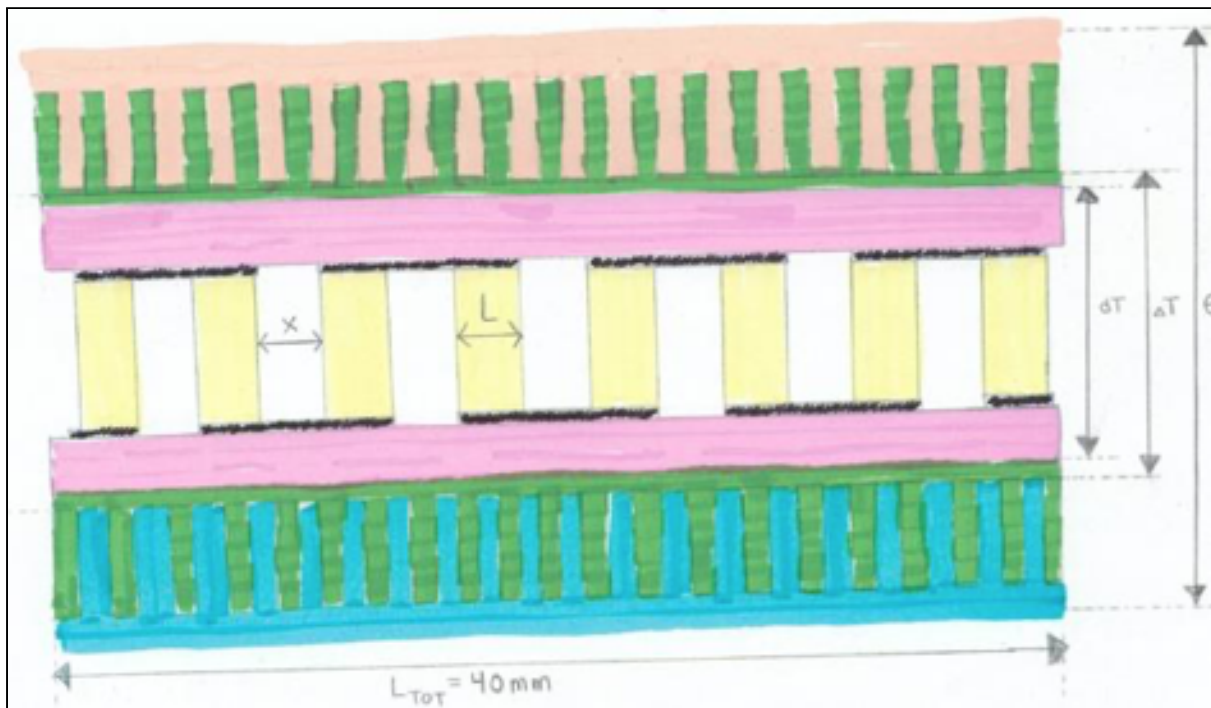
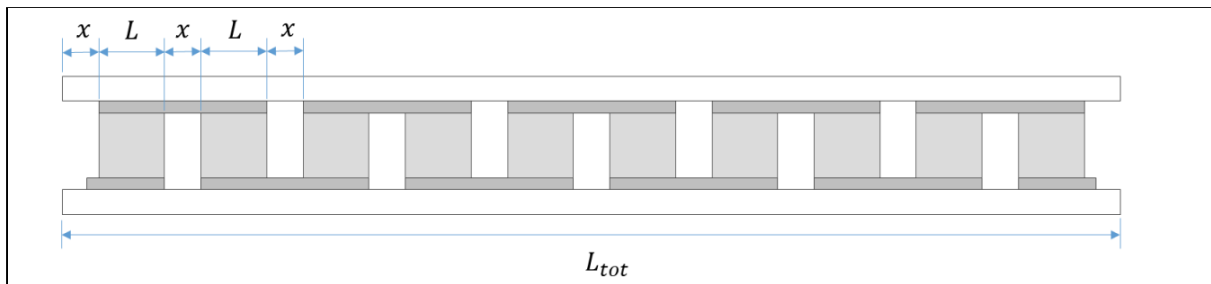
Conductance thermique du module pour une puissance maximale:

$$K_0 = 0$$

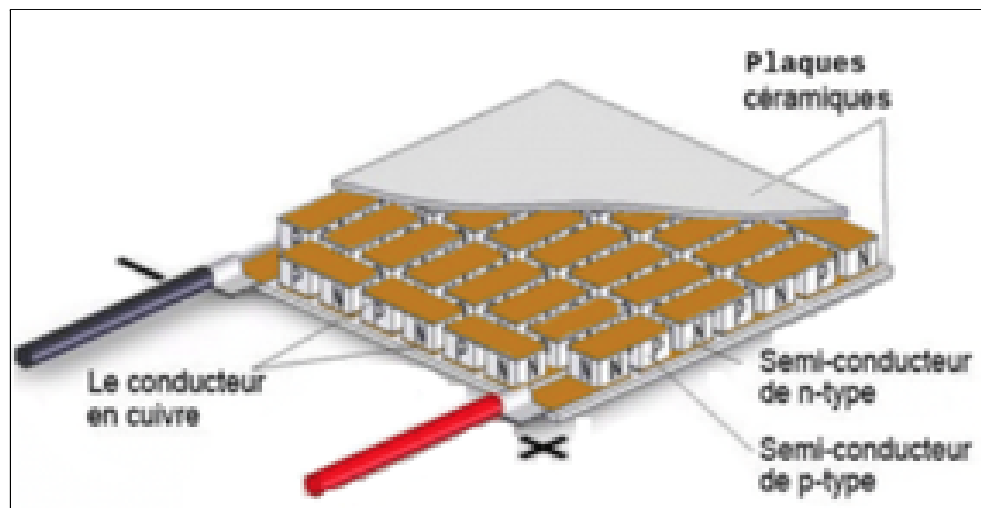
Conductance thermique de l'échangeur de chaleur pour une puissance maximale:

$$K = \text{infini}$$

Annexes 2 (Dimensions)



- = Eau chaude (90°C)
- = Eau froide (10°C)
- = Plaque d'alumine
- = Élément (Tellurure de Bismuth)
- = Cuivre connecteur d'élément (négligeable)
- = Échangeur de chaleur



Annexes 3 (Codes)

Optimisation sans considération du volume de l'échangeur

Code des graphiques :

```
GEN1693_Projet_var %charge les constantes du problème

%% Graphique de notre fonctionnelle
% Pour illustrer les différentes variables graphiquement, H, L et x sont interchangés
% entre variables et constantes

H=1/1000;
L=(1.2:0.002:1.4)/1000;
x=(0.5:0.005:1)/1000;
x=x';

N = (floor((Ltot - x)./(L + x)).^2);
Kp = kp*(Ltot^2)/Hp; % W/K
K0 = 2.*N*kTE.*L.^2.*Kp./(2.*N*kTE.*L.^2 + Kp.*H);
deltaT = (mcp*Theta)./(((K0.*K)./(K+2.*K0))+mcp));
dT = (K./(K+2.*K0)).* deltaT;

F = (alp^2 .* (dT.^2)) ./ (4*pTE*(H.^2));

P = N*alp^2.*dT.^2./(4*pTE*(H./L.^2));
V = L.^2.*H.*N;
F=P./V;

surf(L,x,F,'edgecolor','black');
xlabel('Longueur element L (m)')
ylabel('Distance entre elements x (m)')
zlabel('Puissance/volume (W/m^3)')
title('Puissance divise par le volume selon la longueur de element L et la distance
entre elements x')
xlim([1.2/1000 1.4/1000])

%% Graphique de la puissance en fonction de K et K0
K = (0:0.1:5);
K0 = (0:0.1:5);
K0 = K0';

deltaT = mcp.*Theta./(((K0.*K)/(K+K0))+mcp);
dT = (K./(K+2.*K0)).* deltaT;
P = N*alp^2*dT.^2/(4.*pTE*(H./L.^2));

surf(K,K0,P)
xlabel('K')
ylabel('K0')
zlabel('Puissance')
title('Impact de K et K0 sur la puissance')
```

Il est important de noter que ce code pour les graphiques est utilisé pour tracer toutes les graphiques. En effet, il suffit seulement de changer les valeurs des variables x, L, H et N et de tracer différents graphiques en fonction de différentes variables nécessaires.

Code d'optimisation

```
clear;clc
% Constantes
GEN1693_Projet_var
% x = 0.5/1000;

% Fonctionnelles [L,H,x]
fun = @(X) -(((floor((Ltot - X(3))./(X(1) +
X(3))))).^2)*alp^2.*(K./(K+2*(2*(floor((Ltot - X(3))./(X(1) +
X(3))))).^2)*kTE.*X(1).^2*Kp./(2*(floor((Ltot - X(3))./(X(1) +
X(3))))).^2)*kTE.*X(1).^2 + Kp*X(2)))).* (mcp*Theta./(((2*(floor((Ltot - X(3))./(X(1) +
X(3))))).^2)*kTE.*X(1).^2*Kp./(2*(floor((Ltot - X(3))./(X(1) +
X(3))))).^2)*kTE.*X(1).^2 + Kp*X(2)))/K+(2*(floor((Ltot - X(3))./(X(1) +
X(3))))).^2)*kTE.*X(1).^2*Kp./(2*(floor((Ltot - X(3))./(X(1) +
X(3))))).^2)*kTE.*X(1).^2 + Kp*X(2))))+mcp)).^2./(4*pTE*(X(2)./(X(1).^2))./(X(1).^2*X(2)*(floor((Ltot -
X(3))./(X(1) + X(3))))).^2);

% Point de départ
x0 = [1.5/1000 1.5/1000 1/1000];

% Options d'optimisation
options =
optimoptions('fmincon','Algorithm','interior-point','Display','iter','OptimalityTolerance',1e-15);

% Résolution du problème
[X,fonctionnelle,exitflag,output] = fmincon(fun,x0,[],[],[],[],[1.2/1000,
1/1000,0.95/1000],[1.4/1000, 2/1000, 1.01/1000],[],options);

% Valeur de L,H et x
X

% Valeur fonctionnelle
-fonctionnelle

% Nombre de modules
L = X(1);
H = X(2);
x = X(3);
N = (floor((Ltot - x)./(L + x))).^2;

formatSpec = 'Longueur des éléments: %4.2f mm\nHauteur des éléments : %4.2f mm\nEspace
entre éléments : %4.3f mm\n\nPuissance volumique : %4.2f W/m^3\n';
fprintf(formatSpec, L*1000,H*1000,x*1000,-fonctionnelle);

formatSpec = 'Nombre de module : %4.0f\n';
fprintf(formatSpec, N);
```

Code des constantes (initialise les constantes)

```
alp      = 100/1e6;      %V/K
pTE      = 1.8e-5;      % Ohn.m
kTE      = 1.5;         % W/m*K
kp       = 35.3;        % W/m*K
Ltot     = 40/1000;     % m
Theta    = 80;          % K
U        = 1000;        % W/m^2*K    1000 si aluminium ou 1500 si cuivre
A        = 2*1.6e-3;    % m^2
K        = U*A;         % W/K
Hp       = 1.25/1000;   % m
```

```

m      = 1.66667;      % kg/s
cp     = 4180;         % J/kg*K
mcp    = m*cp;         % J/s*K

Kp     = kp*Ltot^2/H

```

Code de Lagrange augmenté (finalement non utilisé/incomplet)

```

clear all;
clc;

GEN1693_Projet_var

% Variables : H (hateur element ), L(Largeur element), x(espace entre element)
% Vecteur X
% [H,L,x]

X = [5/1000 3/1000 0.7/1000 0 0 0]; %point de départ
nb_var = length(X);
dh = 0.01; %pas pour les dérivés

r = 1;
lambda = [0 0 0];

g = contraintes( X );

while any(abs(g) > 0.001)

    %MÉTHODE DU GRADIENT
    S = directionS(X, lambda, r);
    ii=1;
    while any(abs(S)>0.01)
        %MÉTHODE DE NEWTON
        h = 0.0001;
        dAdh = (LA(X(ii,:)+(h+dh)*S, lambda,r)-LA(X(ii,:)+(h-dh)*S, lambda,r))/(2*dh);
        while abs(dAdh) > 0.01
            d2Adh2 = (LA(X(ii,:)+(h+dh)*S, lambda,r)-2*LA(X(ii,:)+(h)*S, lambda,r)+
            LA(X(ii,:)+(h-dh)*S, lambda,r))/(dh^2);
            h = h-dAdh/d2Adh2;
            dAdh = (LA(X(ii,:)+(h+dh)*S, lambda,r)-LA(X(ii,:)+(h-dh)*S,
            lambda,r))/(2*dh);
        end
        X(ii+1,:) = X(ii,:)+h*S;
        ii = ii+1;
        S = directionS(X(ii,:), lambda, r);
    end

    lambda = lambda + 2*r.*(contraintes(X(end,:)));
    r = 2*r;
    g = contraintes(X(end,:));

end
X(end,:)*1000
Fonctionnelle(X)*1000000
function [ S ] = directionS(X, lambda, r)
GEN1693_Projet_var
%Calcul de la direction pour la méthode du gradient
dh = 0.01;
nb_var = length(X);
vdh = zeros(1,nb_var);

for ii=1:nb_var
    vdh(ii)=dh;

```

```

S(ii)= (LA(X+vdh,lambda,r) - LA(X-vdh,lambda,r))/2*dh; % CALCUL DE LA DIRECTION
vdh = zeros(1,nb_var);
end
%
S(1)= (LA([X(end,1)+dh X(end,2) X(end,3) X(end,4)],lambda,r) - LA([X(end,1)-dh
X(end,2) X(end,3) X(end,4)],lambda,r))/2*dh; % CALCUL DE LA DIRECTION
%
S(2)= (LA([X(end,1) X(end,2)+dh X(end,3) X(end,4)],lambda,r) - LA([X(end,1)
X(end,2)-dh X(end,3) X(end,4)],lambda,r))/2*dh; % CALCUL DE LA DIRECTION
%
S(3)= (LA([X(end,1) X(end,2) X(end,3)+dh X(end,4)],lambda,r) - LA([X(end,1)
X(end,2) X(end,3)-dh X(end,4)],lambda,r))/2*dh; % CALCUL DE LA DIRECTION
%
S(4)= (LA([X(end,1) X(end,2) X(end,3) X(end,4)+dh],lambda,r) - LA([X(end,1)
X(end,2) X(end,3) X(end,4)-dh],lambda,r))/2*dh; % CALCUL DE LA DIRECTION

%
S(1)= (LA([X(1)+dh X(2) X(3) X(4)],lambda,r) - LA([X(1)-dh X(2) X(3)
X(4)],lambda,r))/2*dh; % CALCUL DE LA DIRECTION
%
S(2)= (LA([X(1) X(2)+dh X(3) X(4)],lambda,r) - LA([X(1) X(2)-dh X(3)
X(4)],lambda,r))/2*dh; % CALCUL DE LA DIRECTION
%
S(3)= (LA([X(1) X(2) X(3)+dh X(4)],lambda,r) - LA([X(1) X(2) X(3)-dh
X(4)],lambda,r))/2*dh; % CALCUL DE LA DIRECTION
%
S(4)= (LA([X(1) X(2) X(3) X(4)+dh],lambda,r) - LA([X(1) X(2) X(3)
X(4)-dh],lambda,r))/2*dh; % CALCUL DE LA DIRECTION
end

function [ LAx ] = LA( X, lambda, r)
GEN1693_Projet_var
LAx = Fonctionnelle(X);
g = contraintes(X);

%Assemblage du Lagrange augmenté;
for ii = 1:length(g)
    LAx = LAx + lambda(ii)*g(ii)+r*g(ii)^2;
end
end

function [ F ] = Fonctionnelle( X )
%Fonctionnelle
GEN1693_Projet_var

H = X(end,1);
L = X(end,2);
x = X(end,3);

N = (floor((Ltot - x)/(L + x))^2);
K0 = 2*N*kTE*L^2*kp/(2*N*kTE*L^2 + kp*H);

F = alp^2 * (((K)/(K+2*K0) * ((mcp*Theta)/(((K0*K)/(K+2*K0))+ mcp)))^2) / (4*pTE*(H^2))

end

function [ g ] = contraintes( X )
%contraintes du problème d'optimisation
GEN1693_Projet_var
g(1) = -X(end,3) + 0.5/1000 + X(end,6)^2;
g(2) = -X(end,2) + 1.2/1000 + X(end,5)^2;
g(3) = X(end,1) - 5/1000 + X(end,4)^2;
g=[g(1) g(2) g(3)];
end

```