Gonzalez Arredondo Rafael
Jiménez Gutiérrez Axel Uriel

PDS Grupo 4

DSP Exercise Set: Signals & Time-Domain Analysis

Theory Questions

1. Define the difference between energy signals and power signals. Give one real-world example of each.

- **Señales de Energía:** Son señales que tienen energía total finita y positiva, pero cuya potencia promedio es cero. Esto ocurre porque la señal es transitoria, es decir, existe durante un intervalo de tiempo limitado o decae rápidamente a cero

- **Señales de Potencia:** Son señales que persisten de manera continua o periódica a lo largo del tiempo. Tienen una potencia promedio finita y positiva, pero debido a que no se detienen, su energía total es infinita.

Ejemplo Señal de Energía	Ejemplo Señal de Potencia
El sonido de un aplauso. Es un pulso breve que concentra toda su energía en un instante y luego desaparece $0 < E < \infty, \quad P = 0$	Una señal de radio FM. Son ondas persistentes y continuas que permiten la transmisión de información constante. Tiene una potencia definida, pero su energía acumulada sigue creciendo conforme la señal se mantenga activa. $0 < P < \infty, \quad E \to \infty$

2. State the Nyquist sampling criterion and explain what happens if it is not satisfied.

El criterio establece que para una señal de banda limitada, es decir, que no tiene componentes de frecuencia por encima de un valor máximo f_{max}, pueda ser recuperada íntegramente, la frecuencia a la que se toman las muestras f_s debe ser estrictamente mayor al doble de la frecuencia máxima contenida en dicha señal.

Matemáticamente se puede expresar de la siguiente forma:

$$f_s > 2 \cdot f_{max}$$

Si no se cumple dicho criterio, ocurre el fenómeno de aliasing, lo cual puede provocar lo siguiente:

- Las componentes de alta frecuencia se "traslapan" y aparecen erróneamente como frecuencias más bajas dentro del espectro de la señal muestreada.

- Se pierde la correspondencia entre la señal original y las muestras. Por ende, es matemáticamente imposible distinguir los componentes originales de los "alias" creados por el mal muestreo.

3. Explain in your own words how time reversal and time shifting affect a signal's graph. Why are thes operations important in signal analysis?

Para el caso de la inversión temporal, al producir una reflexión de la señal respecto al eje vertical, lo que estaba en el lado positivo del tiempo en la gráfica pasa al lado negativo y viceversa, dependiendo del caso. Si la señal se sigue reproduciendo, la inversión temporal sería escucharla o verla de atrás hacia adelante.

En cuanto al desplazamiento temporal, la señal se mueve hacia la izquierda o a la derecha a lo largo del eje del tiempo, sin alterar su forma. Por ende en la gráfica puede aparecer que la señal ocurriera más tarde (atraso) o más temprano (adelanto).

Estas operaciones son importantes por lo siguiente:

- Determinar la salida de un sistema lineal e invariante en el tiempo al aplicar ambas operaciones (convolución)
- Ayuda a determinar si un sistema depende de valores futuros (adelanto) o pasados (atraso) de la señal de entrada.
- Identifican si una señal es par, simplificando el cálculo de las Series de Fourier
- Medir el tiempo de vuelo de una onda e identificar patrones dentro de señales con ruido.

Exercises

1. For each of the following signals, determine wether it is continuous / discrete, periodic/aperiodic, and causal / non-causal:

a) $x(t) = \sin(2\pi 10t)$

→ Como la señal depende del tiempo, que esta definida para todo un instante de tiempo real, y que no tiene condiciones extras, es una señal de tiempo continuo $(t \in \mathbb{R})$

→ Para la periodicidad, buscamos un valor T tal que:

$$\sin(2\pi 10(t+T)) = \sin(2\pi 10t)$$

$$\sin(2\pi 10t + 2\pi 10T) = \sin(2\pi 10t)$$

$$2\pi 10T = 20\pi T = 2\pi k \rightarrow T = k/10$$

Para el periodo fundamental $(k=1)$, $T = 1/10 = 0.1$ s. Como existe un número infinito y constante, la señal es periódica

→ Para la causalidad, evaluamos la señal en un tiempo negativo: $t = -0.025$ s

$$\sin(2\pi 10(-0.025)) = \sin(-0.5\pi) = -1$$

Como el resultado no es igual a 0, la señal es no causal.

b) $x[n] = u[n-3]$

→ Como la señal se define entre corchetes, y la define con valores enteros ($n \in \mathbb{Z}$), la señal es discreta

→ $u[(n+N)-3] = u[n-3]$

Con $n = 2$: $u[n-3] = u[2-3] = u[-1] = 0$ → Escalon Unitario

Si la señal fuera periódica, existiría un N tal que $x[2+N]$ también fuera 0. Pero para cualquier $N \geq 2$, $x[2+N] = u[N-1] = 1$.

Como $0 \neq 1$, la señal es aperiódica

→ Sabiendo que:

$$x[n] \begin{cases} 1, & n-3 \geq 0 \rightarrow n \geq 3 \\ 0, & n-3 < 0 \rightarrow n < 3 \end{cases}$$

Para que sea causal, debe ser 0 para todo $n<0$. Viendo que es 0 para todo n menor a 3, la señal es causal.

c) $x(t) = e^{-t} u(t)$

→ La variable t indica que es una señal continua

→ $e^{-(t+T)} u(t+T) = e^{-t} e^{-T} u(t+T) = e^{-t} u(t)$

$e^{-t-T} = e^{-t}$ si $e^{-T} = 1$; donde $T = 0$

Como $T > 0$, no se puede. Además, la función tiende a 0

cuando $t \to \infty$, por lo que nunca repite sus valores.
Por ende, es aperiódica

→ Dado que la señal completa está formada por la multiplicación de una señal por la función escalón unitario, su valor será 0 para todo tiempo menor a 0.
Por ende, es causal

2. Is the signal $x[n] = \cos((5\pi/6)n)$ periodic? If yes, find its fundamental period.

→ Su frecuencia angular ω_0 debe ser un múltiplo racional de 2π:

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{k}{N} \rightarrow$$

N: Periodo fundamental
k: ciclos de la señal original

$$\cos(\omega_0 n + \theta) \rightarrow \quad \omega_0 = \frac{5\pi}{6}; \quad \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{\frac{5\pi}{6}}{2\pi} = \frac{5\cancel{\pi}}{6 \cdot 2\cancel{\pi}} = \frac{5}{12} \rightarrow \text{Racional}$$

Por ende, la señal es periódica

$$\frac{k}{N} = \frac{5}{12} \rightarrow \quad N = 12;$$ El periodo fundamental es 12

Made with Goodnotes

3. A continuous-time signal $x(t) = \cos(200\pi t)$ is sampled at $f_s = 150$ Hz.

- What is the Nyquist rate?

  - Identificar f_{max}; con $\cos(2\pi f t) \rightarrow \cos(200\pi t)$

$$2\pi f = 200\pi \rightarrow f = \frac{200\cancel{\pi}}{2\cancel{\pi}} = 100 \text{ Hz}$$

La tasa de Nyquist debe ser el doble de la frecuencia máxima:

$$\text{Tasa de Nyquist} = 2 \cdot f_{max} = 2 \cdot 100 \text{ Hz} = 200 \text{ Hz}$$

- Will aliasing occur? If so, what is the apparent frequency after sampling?

Dado que la señal se muestreó inicialme a 150 Hz, sí se presentará el efecto aliasing.

La frecuencia alias (f_{alias}) se encuentra usando la relación de la señal muestreada:

$$x[n] = \cos\left(200\pi \frac{n}{150}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3} n\right)$$

Buscando una frecuencia en el rango fundamental ($-\pi$ a π). Como $4\pi/3$ está fuera de ese rango, restamos 2π:

$$\frac{4\pi}{3} - 2\pi = \frac{4\pi - 6\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$$

Debido a que el coseno es una función par:

$$\cos\left(-\frac{2\pi}{3}n\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)$$

Igualando a la forma estándar $2\pi f_{app}$

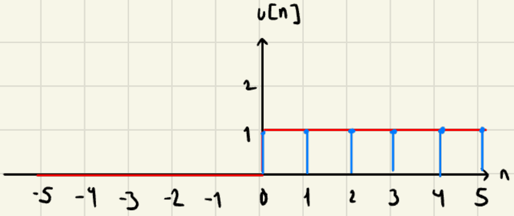
$$2\pi f_{app} = \frac{2\pi}{3} \rightarrow f_{app} = \frac{1}{3}$$

Multiplicamos por f_s:

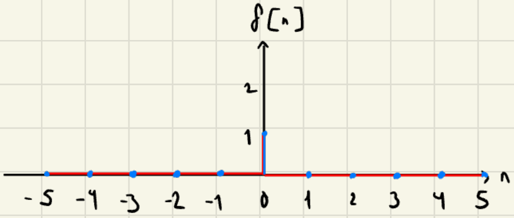
$$f_{alias} = f_{app} \cdot f_s = \frac{1}{3} \cdot 150 \text{ Hz} = 50 \text{ Hz}$$

4. Sketch the following signals for $-5 \leq n \leq 5$:

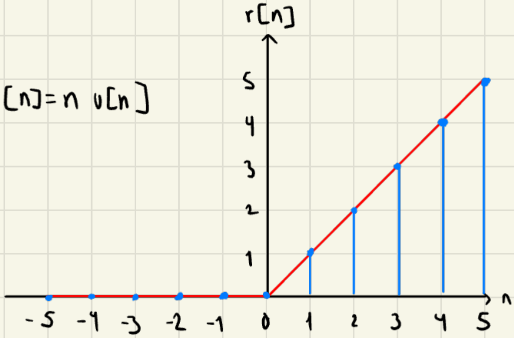
a) $u[n]$



b) $\delta[n]$

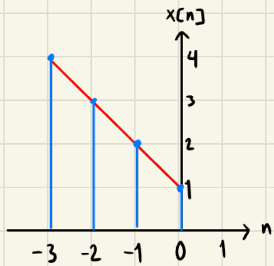


c) $r[n] = n\,u[n]$



5. Given $x[n] = \{1, 2, 3, 4\}$ for $n = 0, 1, 2, 3$, compute and sketch $x[-n]$.

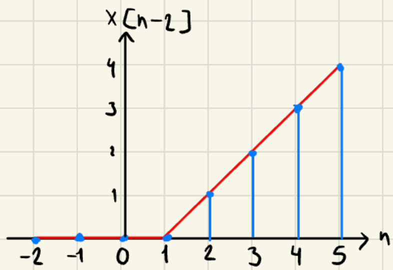
Para $n = 0$; $x[-n] = x[-0] = x[0] = 1$
Para $n = -1$; $x[-n] = x[-(-1)] = x[1] = 2$
Para $n = -2$; $x[-n] = x[-(-2)] = x[2] = 3$
Para $n = -3$; $x[-n] = x[-(-3)] = x[3] = 4$



6. For the same signal $x[n] = \{1, 2, 3, 4\}$, compute and sketch:

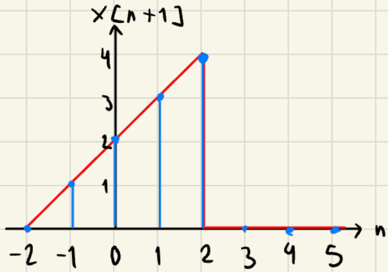
a) $x[n-2]$ Atraso

$n - 2 = 0 \rightarrow n = 2$
$n - 2 = 1 \rightarrow n = 3$
$n - 2 = 2 \rightarrow n = 4$
$n - 2 = 3 \rightarrow n = 5$



b) $x[n+1]$ Adelanto

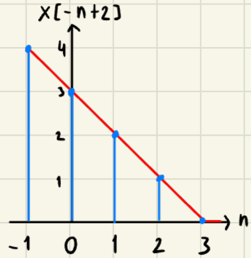
$n+1=0 \rightarrow n=-1$
$n+1=1 \rightarrow n=0$
$n+1=2 \rightarrow n=1$
$n+1=3 \rightarrow n=2$



7. Take $x[n]=\{1,2,3,4\}$. Compute and sketch:

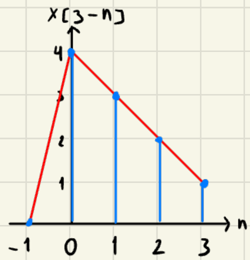
a) $x[-n+2]$

$-n+2=0 \rightarrow n=2 \rightarrow$ Amplitud $=1$
$-n+2=1 \rightarrow n=1 \rightarrow$ Amplitud $=2$
$-n+2=2 \rightarrow n=0 \rightarrow$ Amplitud $=3$
$-n+2=3 \rightarrow n=-1 \rightarrow$ Amplitud $=4$



b) $x[3-n]$

$-n+3=0 \rightarrow n=3 \rightarrow$ Amplitud $=1$
$-n+3=1 \rightarrow n=2 \rightarrow$ Amplitud $=2$
$-n+3=2 \rightarrow n=1 \rightarrow$ Amplitud $=3$
$-n+3=3 \rightarrow n=0 \rightarrow$ Amplitud $=4$



8. Determine wheter the following signals are energy signals or power signals:

a) $x[n]=\cos((\pi/4)n)$

Con: $E=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2$, $P=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x[n]|^2$

Es una señal que se extiende desde $-\infty$ hasta ∞ manteniendo una amplitud constante. Por ende, es una señal de potencia.

- Se calcula el periodo fundamental N:

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{\pi/4}{2\pi} = \frac{\cancel{\pi}}{2\cancel{\pi}\cdot 4} = \frac{1}{8} \; ; \quad N = 8$$

- Aplicando la fórmula de potencia:

$$P = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7}\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)\right|^2 = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right)$$

$$\cos^2(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\theta)$$

Al sumar un coseno sobre un número de periodos completos, la suma de sus valores positivos y negativos se cancela dando 0. Por lo tanto:

$$P = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7}\frac{1}{2} = \frac{1}{8}\left(8\cdot\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \; : \quad P = \frac{1}{2}, \; E = \infty$$

b) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

Debido al escalón $u[n]$, la señal inicia en $n=0$. Conforme n crece, el término $(1/2)^n$ se hace más pequeño, acercándose a 0. Por ende, su potencia promedio es nula. Es una señal de energía

Usando la fórmula de energía

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2 = E = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n ;$$

Tiene la forma de la serie geométrica : $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$ (con $|a|<1$):

$$E = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \; ; \qquad E = \frac{4}{3} \; ; \quad P = 0$$

9. Given $x[n] = (0.9)^n u[n]$:

- Is this an energy or power signal?
- Compute its total energy

→ Dado que la señal tiene una exponencial decreciente en tiempo discreto, y que la base es menor a 1; conforme el tiempo en n avanza, el valor de la exponencial tiende a 0. Por ende, su potencia promedio a lo largo del tiempo es 0. Es una señal de Energía

→ Con la fórmula: $E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$;

Sabiendo que la señal se multiplica por el escalón unitario, vale 0 para todo n negativo. Cambiamos el límite inferior:

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} |(0.9)^n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (0.81)^n \; ;$$ Tiene la forma: $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$; con $|a|<1$:

Suma $= \frac{1}{1-a}$; Sustituyendo : $E = \frac{1}{1-0.81} = \frac{1}{0.19} = 5.263$

$E = 5.263$

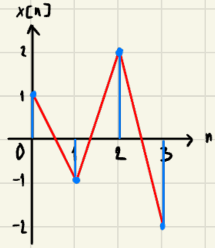
Made with Goodnotes

10. A signal $x[n] = \{1, -1, 2, -2\}$ for $n = 0, 1, 2, 3$.

- Plot the original signal
- Apply time reversal → shift right by 2 samples → scale by factor 3.
- Write the resulting signal explicitly and sketch it.

→

n	0	1	2	3
$x[n]$	1	-1	2	-2



→ Inversión temporal:
$n = 3 \rightarrow n = -3 \rightarrow$ Amplitud $= -2$
$n = 2 \rightarrow n = -2 \rightarrow$ Amplitud $= 2$
$n = 1 \rightarrow n = -1 \rightarrow$ Amplitud $= -1$
$n = 0 \rightarrow n = 0 \rightarrow$ Amplitud $= 1$

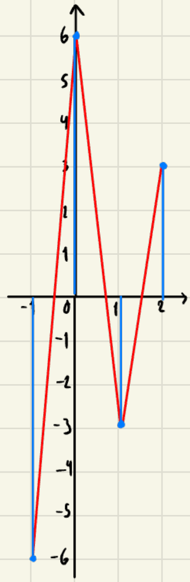
→ Desplazamiento a la derecha por 2 muestras:

$n = -3 \rightarrow n = -1 \rightarrow$ Amplitud $= -2$
$n = -2 \rightarrow n = 0 \rightarrow$ Amplitud $= 2$
$n = -1 \rightarrow n = 1 \rightarrow$ Amplitud $= -1$
$n = 0 \rightarrow n = 2 \rightarrow$ Amplitud $= 1$

→ Escalamiento en amplitud por 3:
$n = -1 \rightarrow 3 \cdot (-2) = -6$
$n = 0 \rightarrow 3 \cdot (2) = 6$
$n = 1 \rightarrow 3 \cdot (-1) = -3$
$n = 2 \rightarrow 3 \cdot (1) = 3$

→ Señal resultante: $y[n] = \{-6, \underset{\uparrow}{\underline{6}}, -3, 3\}$

n	-1	0	1	2
$y[n]$	-6	6	-3	3



11. Compute the mean and RMS of $x[n] = \{2, -2, 2, -2\}$ for $n = 0 \ldots 3$.

→ Cálculo de la media: con el número de muestras $N = 4$:

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] = \frac{1}{4}\left(\cancel{(2+(-2))} + \cancel{2+(-2)}\right) = \frac{1}{4}(0) = 0$$

Media = 0

→ Cálculo de RMS:

$$X_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(2^2 + (-2)^2 + 2^2 + (-2)^2\right)} = \sqrt{\frac{1}{4}(4+4+4+4)} = \sqrt{\frac{16}{4}} = \sqrt{4} = 2$$

RMS = 2

12. Compute the autocorrelation of $x[n] = \{1, 2, 1\}$ and cross-correlation with $y[n] = \{1, 0, -1\}$

→ Autocorrelación: $r_{xx}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\,x[n-l]$

- $l = -2$ → Solo se solapan $x[0]$ y la copia desplazada $x[2]$
  Buscando $x[n]\,x[n-(-2)] = x[n]\,x[n+2]$. Con $n=0$

  $$r_{xx}[-2] = x[0]\,x[2] = (1)(1) = 1$$

- $l = -1$ → $x[n]\,x[n+1]$ Coinciden en dos puntos ($n=0$ y $n=1$)

  $$r_{xx}[-1] = x[0]x[1] + x[1]x[2] = (1)(2) + (2)(1) = 2+2 = 4$$

- $l = 0$ → $x[n]x[n]$. Coinciden los tres puntos:

  $$r_{xx}[0] = x[0]x[0] + x[1]x[1] + x[2]x[2] = (1)(1) + (2)(2) + (1)(1) = 6$$

- $l = 1$ → $x[n]\,x[n-1]$. Coinciden en $n=1$ y $n=2$

  $$r_{xx}[1] = x[1]x[0] + x[2]x[1] = (2)(1) + (1)(2) = 4$$

- $l = 2$ → Coinciden en $n=2$: $r_{xx}[2] = x[2]\,x[0] = (1)(1) = 1$

$$r_{xx}[l] = \{1, 4, \underset{\uparrow}{\underline{6}}, 4, 1\}$$

→ Correlación Cruzada: $r_{xy}[l] = \sum x[n]\,y[n-l]$

- $l = -2 \rightarrow x[n]\,y[n+2]$. Solo se solapan en $n = 0$

$$r_{xy}[-2] = x[0]\,y[2] = (1)(-1) = -1$$

- $l = -1 \rightarrow x[n]\,y[n+1]$. Se solapan en $n=0$ y $n=1$

$$r_{xy}[-1] = x[0]\,y[1] + x[1]\,y[2] = (1)(0) + (2)(-1) = -2$$

- $l = 0 \rightarrow x[n]\,y[n]$. Se solapan en $n = 0, 1, 2$:

$$r_{xy}[0] = x[0]\,y[0] + x[1]\,y[1] + x[2]\,y[2] = (1)(1) + (2)(0) + (1)(-1) = 0$$

- $l = 1 \rightarrow x[n]\,y[n-1]$. Se solapan en $n=1$ y $n=2$:

$$r_{xy}[1] = x[1]\,y[0] + x[2]\,y[1] = (2)(1) + (1)(0) = 2$$

- $l = 2 \rightarrow x[n]\,y[n-2]$. Se solapa en $n=2$:

$$r_{xy}[2] = x[2]\,y[0] = (1)(1) = 1$$

$$r_{xy}[l] = \{-1, -2, \underset{\uparrow}{\underline{0}}, 2, 1\}$$