



Auteur : LÉA MARINGER

OPTIMISATION DU PORTEFEUILLE DE MARKOWITZ

Rapport final dans le cadre du projet de deuxième année de cycle ingénieur en
Mathématiques Appliquées.

*A l'attention de :
Mme. KORTCHEMSKI Irina*

12 février 2022

Table des matières

Introduction	2
Notations	3
1 Optimisation théorique et résolutions analytiques	4
1.1 Résolutions analytiques	4
1.1.1 Minimisation du risque	4
1.1.2 Minimisation du risque avec une contrainte de rendement minimum .	5
1.1.3 Maximisation du rendement avec une contrainte de risque exact . . .	6
1.1.4 Minimisation du risque avec une contrainte de rendement exact . . .	8
1.1.5 Minimisation du risque avec une contrainte de rendement minimum et l'ajout d'un actif sans risque	9
1.1.6 Maximisation du Sharpe-Ratio	10
1.1.7 Equation de la frontière efficiente de Markowitz	11
1.2 Applications et simulations	12
1.2.1 Simulation d'actifs selon le modèle de Black et Scholes	12
1.2.2 Frontière efficiente et portefeuilles optimaux	12
1.2.3 Simulation d'allocations	14
1.2.4 Value at Risk (VaR)	17
2 Algorithmes d'optimisation et résolutions numériques	18
2.1 Algorithme de Newton	18
2.2 Algorithme de Lagrange-Newton	19
2.3 Algorithme d'Uzawa	21
2.4 Amélioration de la descente cyclique de coordonnées	22
Conclusion	25
Références	26

Introduction

Avant les années 1950, les titres constituant un portefeuille étaient choisis individuellement et la performance du portefeuille était basée sur le talent du gérant. Dans les années 1950, l'économiste américain Harry Markowitz fait pour la première fois une tentative de théorisation de la gestion financière en présentant sa théorie moderne du portefeuille qui repose sur la diversification des titres et la recherche du portefeuille le plus efficient possible, c'est à dire qui possède une rentabilité maximum pour un niveau de risque minimum. En effet, Markowitz pense que les différents actifs composant un portefeuille ne peuvent être sélectionnés individuellement et doivent au contraire être choisis selon la corrélation de leurs variations avec celles des autres actifs du portefeuille.

La théorie de Markowitz repose sur deux hypothèses. En effet, les marchés sont efficients : les cours reflètent parfaitement les informations disponibles pour chaque actif. De plus, les acteurs de ces marchés sont rationnels : ils souhaitent maximiser leurs gains (le rendement), tout en minimisant le risque pris.

Un actif j est représenté par une variable aléatoire S_j et son rendement estimé est son espérance. Un portefeuille est une variable aléatoire définie comme une combinaison linéaire d'actifs dont le coefficient devant S_j est la proportion X_j de l'actif j (en terme d'argent investit) dans le portefeuille. Le risque du portefeuille est défini par sa variance, sa volatilité étant son écart-type.

Dans ce rapport, nous chercherons à optimiser des portefeuilles d'actifs (trouver les "meilleures" allocations) en minimisant le risque ou en maximisant le rendement, cela sous certaines contraintes. Dans un premier temps, les résolutions analytiques à ces problèmes d'optimisation sont présentées. Les notions de Sharpe Ratio, de frontière efficiente de Value at Risk sont également introduites, et les résultats obtenus seront appliqués aux actifs du CAC40. Dans une seconde partie, différents algorithmes numériques d'optimisation sont utilisés.

Notations

- Portefeuille de N actifs : $P = \sum_{i=1}^N X_i S_i$
- Rendement estimé de l'actif j : $R_j = \mathbb{E}(S_j)$
- Vecteur des allocations : $X = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_N]^T$
- Rendement estimé du portefeuille : $R = \mathbb{E}(P) = \sum_{i=1}^N X_i R_i$
- Matrice de covariance de N actifs : $\Gamma = (Cov(S_i, S_j))_{1 \leq i, j \leq N}$
- Risque d'un portefeuille : $\sigma^2(P) = \mathbb{E}((P - \mathbb{E}(P))^2) = X^T \Gamma X$

1 Optimisation théorique et résolutions analytiques

Dans cette partie, la solution à différents problèmes d'optimisation avec contraintes est cherché analytiquement : minimisation du risque ou maximisation du rendement, avec ou sans contraintes (égalité ou inégalité) de rendement ou de risque. Aussi, la somme des allocations doit être égale à 1.

1.1 Résolutions analytiques

1.1.1 Minimisation du risque

Trouver les allocations minimisant le risque revient à résoudre le problème d'optimisation avec contrainte suivant :

$$\begin{cases} \min_{X_1, \dots, X_N} \sum_{i,j} \Gamma_{i,j} X_i X_j \\ \sum_{i=1}^N X_i = 1 \end{cases}$$

Soit L le lagrangien de ce problème et λ le coefficient multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte sur les allocations. Alors,

$$L(X, \lambda) = \sum_{i,j} \Gamma_{i,j} X_i X_j + \lambda (\sum_{i=1}^N X_i - 1)$$

En appliquant les conditions de Karush-Kuhn-Tucker, et en notant u le vecteur $(1, \dots, 1)^T$ de taille N , on a :

$$\begin{aligned} \nabla L(X, \lambda) = 0 &\Leftrightarrow 2\Gamma X + \lambda u = 0 \\ &\Leftrightarrow X = -\frac{1}{2}\lambda \Gamma^{-1}u \end{aligned} \tag{1}$$

En remplaçant X dans la contrainte avec l'expression (1), on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N X_i = 1 &\Leftrightarrow u^T X = 1 \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\lambda u^T \Gamma^{-1}u = 1 \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\lambda = \frac{1}{u^T \Gamma^{-1}u} \end{aligned} \tag{2}$$

Enfin, en injectant l'expression (2) dans celle de X (1), on obtient la solution :

$$X = \frac{\Gamma^{-1}u}{u^T \Gamma^{-1}u}$$

1.1.2 Minimisation du risque avec une contrainte de rendement minimum

Nous souhaitons maintenant ajouter une contrainte de rendement minimum R_0 à avoir. Cela correspond au problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \min_{X_1, \dots, X_N} \sum_{i,j}^N \Gamma_{i,j} X_i X_j \\ \sum_{i=1}^N X_i E_i \geq R_0 \\ \sum_{i=1}^N X_i = 1 \end{cases}$$

Le lagrangien du problème est :

$$L(X, \lambda, \mu) = \sum_{i,j}^N \Gamma_{i,j} X_i X_j + \lambda(R_0 - \sum_{i=1}^N X_i E_i) + \mu(\sum_{i=1}^N X_i - 1)$$

Les conditions de Karush-Kuhn-Tucker sont les suivantes :

$$\nabla L(X, \lambda, \mu) = 0_{\mathbb{R}^N} \Leftrightarrow 2\Gamma X - \lambda E + \mu u = 0_{\mathbb{R}^N} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \lambda(R_0 - \sum_{i=1}^N X_i E_i) &\Leftrightarrow \lambda(E^T X - R_0 u) = 0_{\mathbb{R}} \\ &\Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } E^T X - R_0 u = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^N X_i = 1 \Leftrightarrow u^T X = 1 \quad (5)$$

Si $\lambda = 0$, on retombe sur le problème résolu dans la partie 1.1.1 et la solution est :

$$X = \frac{\Gamma^{-1} u}{u^T \Gamma^{-1} u}$$

Sinon, extrayons une expression de X de l'équation (3) :

$$\begin{aligned} (3) &\Leftrightarrow 2\Gamma X = \lambda E - \mu u = 0_{\mathbb{R}^N} \\ &\Leftrightarrow X = \frac{\lambda}{2} \Gamma^{-1} E - \frac{\mu}{2} \Gamma^{-1} u \end{aligned} \quad (6)$$

En injectant cette expression dans les équations (4) ($\lambda \neq 0$) et (5), on obtient :

$$\begin{aligned} (4) &\Leftrightarrow E^T \left(\frac{\lambda}{2} \Gamma^{-1} E - \frac{\mu}{2} \Gamma^{-1} u \right) - R_0 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\lambda}{2} E^T \Gamma^{-1} E - \frac{\mu}{2} E^T \Gamma^{-1} u = R_0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\lambda}{2} C - \frac{\mu}{2} A = R_0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
(5) & \Leftrightarrow u^T \left(\frac{\lambda}{2} \Gamma^{-1} E - \frac{\mu}{2} \Gamma^{-1} u \right) = 1 \\
& \Leftrightarrow \left(\frac{\lambda}{2} u^T \Gamma^{-1} E - \frac{\mu}{2} u^T \Gamma^{-1} u \right) = 1 \\
& \Leftrightarrow \frac{\lambda}{2} A - \frac{\mu}{2} B = 1
\end{aligned} \tag{8}$$

où $A = u^T \Gamma^{-1} E$, $B = u^T \Gamma^{-1} u$ et $C = E^T \Gamma^{-1} E$. On a donc le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{\lambda}{2} C - \frac{\mu}{2} A = R_0 \\ \frac{\lambda}{2} A - \frac{\mu}{2} B = 1 \end{cases}$$

Sous forme matricielle, cela donne :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \begin{bmatrix} C & -A \\ A & -B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \frac{1}{A^2 - BC} \begin{bmatrix} -B & A \\ -A & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2R_0 \\ 2 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \lambda = 2 \frac{A - BR_0}{A^2 - BC} \text{ et } \mu = 2 \frac{C - AR_0}{A^2 - BC}
\end{aligned} \tag{9}$$

En remplaçant les expressions de λ et μ (9) dans (6), on trouve alors la solution suivante :

$$X = \frac{A - BR_0}{A^2 - BC} \Gamma^{-1} E - \frac{C - AR_0}{A^2 - BC} \Gamma^{-1} u \tag{10}$$

Soit :

$$\boxed{X = \frac{\alpha}{A} \Gamma^{-1} E + \frac{1 - \alpha}{B} \Gamma^{-1} u \quad \text{avec } \alpha = A \frac{A - BR_0}{A^2 - BC}}$$

1.1.3 Maximisation du rendement avec une contrainte de risque exact

Dans cette partie, nous cherchons les allocations qui maximisent le rendement pour un risque donné. Cela revient à résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \max_{X_1, \dots, X_N} \sum_{i=1}^N X_i E_i \\ \sum_{i,j}^N \Gamma_{i,j} X_i X_j = \sigma_0^2 \\ \sum_{i=1}^N X_i = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \min_{X_1, \dots, X_N} - \sum_{i=1}^N X_i E_i \\ \sum_{i,j}^N \Gamma_{i,j} X_i X_j = \sigma_0^2 \\ \sum_{i=1}^N X_i = 1 \end{cases}$$

Le lagrangien de ce problème est :

$$L(X, \lambda, \mu) = - \sum_{i=1}^N X_i E_i + \lambda (\sum_{i,j}^N \Gamma_{i,j} X_i X_j - \sigma_0^2) + \mu (\sum_{i=1}^N X_i - 1)$$

Les conditions de Karush-Kuhn-Tucker sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \nabla L(X, \lambda, \mu) = 0_{\mathbb{R}^N} &\Leftrightarrow -E + 2\lambda\Gamma X + \mu u = 0_{\mathbb{R}^N} \\ &\Leftrightarrow X = \frac{1}{2\lambda}\Gamma^{-1}(E - \mu u) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\sum_{i,j}^N \Gamma_{i,j} X_i X_j = \sigma_0^2 \Leftrightarrow X^T \Gamma X = \sigma_0^2 \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^N X_i = 1 \Leftrightarrow u^T X = 1 \quad (13)$$

En injectant l'expression de X trouvée (11) dans (12) et (13), nous obtenons les équations suivantes :

$$\begin{aligned} (12) &\Leftrightarrow \frac{1}{4\lambda^2} [\Gamma^{-1}(E - \mu u)]^T \Gamma [\Gamma^{-1}(E - \mu u)] = \sigma_0^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4\lambda^2} (E^T - \mu u^T) \Gamma^{-1} \Gamma \Gamma^{-1} (E - \mu u) = \sigma_0^2 \quad (\Gamma^{-1} \text{ est symétrique}) \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{1}{4\sigma_0^2} (E^T - \mu u^T) \Gamma^{-1} (E - \mu u) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} (13) &\Leftrightarrow \frac{1}{2\lambda} u^T \Gamma^{-1} (E - \mu u) = 1 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{1}{4} (u^T \Gamma^{-1} E - \mu u^T \Gamma^{-1} u)^2 \end{aligned} \quad (15)$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\sigma_0^2} (E^T - \mu u^T) \Gamma^{-1} (E - \mu u) &= \frac{1}{4} (u^T \Gamma^{-1} E - \mu u^T \Gamma^{-1} u)^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\sigma_0^2} (C - 2\mu A + \mu^2 B) = (A - \mu B)^2 \\ &\Leftrightarrow B(\sigma_0^2 B - 1)\mu^2 + 2A(1 - \sigma_0^2 B)\mu + (\sigma_0^2 A^2 - C) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Le discriminant de ce polynôme du second degré est :

$$\begin{aligned} \Delta &= 4A^2(1 - \sigma_0^2 B)^2 - 4B(\sigma_0^2 B - 1)(\sigma_0^2 A^2 - C) \\ &= 4(1 - \sigma_0^2 B)(A^2 - BC) \end{aligned} \quad (17)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mu_{\pm} &= \frac{-2A(1 - \sigma_0^2 B) \pm 2\sqrt{(1 - \sigma_0^2 B)(A^2 - BC)}}{2B(\sigma_0^2 B - 1)} \\ &= \frac{A}{B} \pm \frac{1}{B\Phi} \text{ avec } \Phi = \sqrt{\frac{\sigma_0^2 B - 1}{BC - A^2}}\end{aligned}\quad (18)$$

En injectant (18) dans l'expression de λ , nous obtenons :

$$\begin{aligned}\lambda_{\pm} &= \frac{1}{2}(A - \mu_{\pm}B) \\ &= \mp \frac{1}{2\Phi}\end{aligned}\quad (19)$$

Enfin, en remplaçant λ et μ par leurs expressions ((18) et (19)) dans l'expression de X (11), nous trouvons les deux vecteurs d'allocations suivants :

$$\boxed{X_{\pm} = \pm\Phi\Gamma^{-1}E \mp \frac{1}{B}(A\Phi \mp 1)\Gamma^{-1}u}$$

1.1.4 Minimisation du risque avec une contrainte de rendement exact

Le problème de minimization du risque avec une contrainte de rendement exact qui suit est équivalent au problème de maximisation du rendement avec une contrainte de risque exact étudiée dans la partie 1.1.3 si la valeur du premier problème est R_0 et la valeur du second problème est σ_0 .

$$\begin{cases} \min_{X_1, \dots, X_N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Gamma_{i,j} X_i X_j \\ \sum_{i=1}^N X_i E_i = R_0 \\ \sum_{i=1}^N X_i = 1 \end{cases}$$

En effet, si l'on note X^* et X^{**} les solutions respectives des problèmes de maximisation du rendement et de minimisation du risque, les deux systèmes d'équations suivants sont obtenus.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Gamma_{i,j} X_i^* X_j^* = \sigma_0^2 \\ \sum_{i=1}^N X_i^* E_i = R_0 \\ \sum_{i=1}^N X_i^* = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^N X_i^{**} E_i = R_0 \\ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Gamma_{i,j} X_i^{**} X_j^{**} = \sigma_0^2 \\ \sum_{i=1}^N X_i^{**} = 1 \end{cases}$$

Les deux systèmes d'équations sont identiques. On en déduit que les deux problèmes ont les mêmes solutions et sont donc équivalents.

1.1.5 Minimisation du risque avec une contrainte de rendement minimum et l'ajout d'un actif sans risque

Nous considérons maintenant un actif sans risque S_0 dont le taux d'intérêt est r_f , le taux d'intérêt étant le pourcentage de la somme investie que nous percevrons au bout de la période. Notons X_0 la proportion de notre investissement investie dans l'actif sans risque. Nous souhaitons alors minimiser le risque sous une contrainte de rendement minimum en prenant en compte l'actif sans risque, ce qui revient à résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \min_{X_1, \dots, X_N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Gamma_{i,j} X_i X_j \\ \sum_{i=1}^N X_i E_i + r_f X_0 \geq R_0 \\ \sum_{i=1}^N X_i + X_0 = 1 \end{cases}$$

Le lagrangien du problème est donné par :

$$L(X, \lambda, \mu) = \sum_{i=1}^N \Gamma_{ij} \cdot X_i \cdot X_j + \lambda \left(R_0 - \sum_{i=1}^N X_i E_i - r_f \cdot X_0 \right) + \mu (\sum_{i=1}^N X_i - 1)$$

où λ est le coefficient multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte de rendement minimum et μ celui associé à la contrainte de somme 1 pour les allocations.

L'équation de Lagrange et les conditions de Karush-Kuhn-Tucker donnent les équations suivantes :

$$\frac{\partial L}{\partial X_0} = 0_{\mathbb{R}}(X, \lambda, \mu) \Leftrightarrow \mu = \lambda r_f \quad (20)$$

$$\nabla L(X, \lambda, \mu) = 0_{\mathbb{R}^N} \Leftrightarrow 2\Gamma X - \lambda E + \mu u = 0_{\mathbb{R}^N} \quad (21)$$

$$\lambda(R_0 - r_f X_0 - E^T X) = 0_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } R_0 - r_f X_0 - E^T X = 0 \quad (22)$$

$$X^T u + X_0 = 1 \quad (23)$$

Si λ vaut 0, alors $\mu = 0$ (20). Dans ce cas, $2\Gamma X = 0$ (21) ce qui implique $X = 0_{\mathbb{R}^N}$ et donc $X_0 = 1$ (23). Celui signifie que la totalité du capital investi est investie dans l'actif sans risque.

Sinon,

$$\begin{aligned}
(21) \Leftrightarrow X &= \frac{1}{2}(\lambda\Gamma^{-1}E - \mu\Gamma^{-1}u) \\
&\Leftrightarrow X = \frac{1}{2}(\lambda\Gamma^{-1}E - \lambda r_f\Gamma^{-1}u) \\
&\Leftrightarrow X = \frac{\lambda}{2}\Gamma^{-1}(E - r_fu)
\end{aligned} \tag{24}$$

De plus, (23) implique que $X_0 = 1 - X^T u$. En injectant cette expression de X_0 puis l'expression de X trouvée dans (24) dans (22), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
R_0 - r_f(1 - u^T X) - E^T X &= 0 \\
\Leftrightarrow R_0 - r_f + \frac{\lambda}{2}(r_f u^T - E^T)\Gamma^{-1}(E - r_fu) &= 0 \\
\Leftrightarrow \lambda &= \frac{2(R_0 - r_f)}{(r_f u^T - E^T)\Gamma^{-1}(r_fu - E)}
\end{aligned} \tag{25}$$

En injectant l'expression de λ qui précède dans celle de X (24), nous avons :

$$X = (R_0 - r_f) \frac{\Gamma^{-1}(E - r_fu)}{(E - r_fu)^T \Gamma^{-1}(E - r_fu)} \Leftrightarrow \boxed{X = \alpha \cdot \Gamma^{-1}(E - r_fu)} \tag{26}$$

où :

$$\alpha = \frac{R_0 - r_f}{(E - r_fu)^T \Gamma^{-1}(E - r_fu)} \tag{27}$$

Ainsi,

$$\boxed{X_0 = 1 - \alpha \cdot u^T \Gamma^{-1}(E - r_fu)} \tag{28}$$

On peut introduire \hat{X} tel que :

$$\hat{X} = \frac{X}{u^T X} \Leftrightarrow \hat{X} = \frac{\Gamma^{-1}(E - r_fu)}{u^T \Gamma^{-1}(E - r_fu)} \tag{29}$$

1.1.6 Maximisation du Sharpe-Ratio

Avant tout, le Sharpe-ratio est une mesure de l'écart de rentabilité entre un investissement sans risque et un investissement dans un portefeuille d'actifs risqués. Il est donné par (30).

$$SR = \frac{R - r_f}{\sigma(P)} \quad (30)$$

où R et $\sigma(P)$ sont le rendement estimé et la volatilité du portefeuille et r_f le taux d'intérêt de l'actif sans risque. Si $SR < 0$, le portefeuille risqué est moins rentable que qu'un investissement sans risque. Si $SR \in [0, 1]$, le risque pris avec le portefeuille risqué est trop grand par rapport au rendement qu'il permet. Enfin, si $SR \geq 1$, il est intéressant d'investir dans le portefeuille risqué.

Le problème de maximisation du Sharpe-ratio, définit ci-dessous, est équivalent à celui de minimisation du risque avec une contrainte de rendement minimum et l'ajout d'un actif sans risque.

$$\begin{cases} \max_{X_1, \dots, X_N} \frac{\sum_{i=1}^N X_i E_i - r_f}{\sqrt{\sum_{i,j} \Gamma_{ij} X_i X_j}} \\ \sum_{i=1}^N X_i + X_0 = 1 \end{cases}$$

En effet, en posant $t = \frac{1}{\sum_{i=1}^N X_i E_i - r_f}$ et $Y = t^* X$, la fonction objective du problème de maximisation du Sharpe-ratio devient $\frac{1}{t} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t^2} Y^\top \Gamma Y}} = \frac{1}{\sqrt{Y^\top \Gamma Y}}$. Or, maximiser cette fraction revient à minimiser son dénominateur $\sqrt{Y^\top \Gamma Y}$, ou simplement $Y^\top \Gamma Y$.

Il reste alors à retrouver la contrainte de rendement minimum $\sum_{i=1}^N X_i E_i + r_f X_0 \geq R_0$
.....

1.1.7 Equation de la frontière efficiente de Markowitz

La frontière efficiente de Markowitz représente l'ensemble des portefeuilles optimaux par le couple rendement/volatilité qui leur est associé. Le couple rendement/volatilité de tout portefeuille se trouve à l'intérieur de cette frontière, comme nous le verrons dans la partie 1.2.2, tandis que les portefeuilles optimaux se trouvent sur la frontière.

Autrement dit, la frontière efficiente peut donner le rendement associé au portefeuille optimal pour une volatilité donnée, ou la volatilité d'un portefeuille optimal ayant un rendement estimé donné. Le rendement estimé d'un portefeuille P étant $R = E^T X$, où X est le vecteur des proportions investies dans chacun des actifs d'un portefeuille, il suffit d'insérer X_- et X_+ , les solutions des problèmes de minimisation du risque avec contrainte de rendement et de maximisation avec contrainte égalité de risque, dans la formule du rendement. Une équation permettant d'exprimer le rendement R en fonction de la volatilité σ est donc obtenue : l'équation de la frontière efficiente.

$$\begin{aligned} R_+ &= \frac{A}{B} + \frac{1}{B} \sqrt{\sigma_0^2 B - 1} \sqrt{CB - A^2} \\ R_- &= \frac{A}{B} - \frac{1}{B} \sqrt{\sigma_0^2 B - 1} \sqrt{CB - A^2} \end{aligned} \quad (31)$$

Ce qui nous donne finalement :

$$R = \frac{A}{B} \pm \frac{1}{B} \sqrt{\sigma_0^2 B - 1} \sqrt{CB - A^2} \quad (32)$$

Notons que les portefeuilles sur R_+ et R_- sont respectivement appelés dominants et dominés.

1.2 Applications et simulations

1.2.1 Simulation d'actifs selon le modèle de Black et Scholes

Le modèle de Black et Scholes permet de simuler le cours d'un actif comme un processus stochastique selon la formule suivante :

$$S(t) = S(0)e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)}$$

où $S(0)$ est la valeur initiale de l'actif (à $t = 0$), μ est le rendement de l'actif, σ sa volatilité et W un mouvement brownien géométrique. Par exemple, nous simulons ci-dessous $N = 10$ actifs sur $M = 252$ jours avec chacun un rendement de 10% ($r = 0.1$), une volatilité de $\sigma = 0.5$ et une valeur initiale $S(0) = 0.01$.

1.2.2 Frontière efficiente et portefeuilles optimaux

La frontière efficiente est l'ensemble des couples rendement-risque des portefeuilles optimaux répondant aux problématiques suivantes : trouver les allocations minimisant le risque pour un rendement donné, trouver les allocations maximisant le rendement pour un risque donné.

Nous avons tout d'abord traité le cas d'un toy-model à 3 dimensions. Il s'agit donc d'un portefeuille constitué de 3 actifs dont la matrice de covariance et les espérances sont données ci-dessous.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.05 \\ 0.3 & 0.3 & 0.1 \\ 0.05 & 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \text{ et } E = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

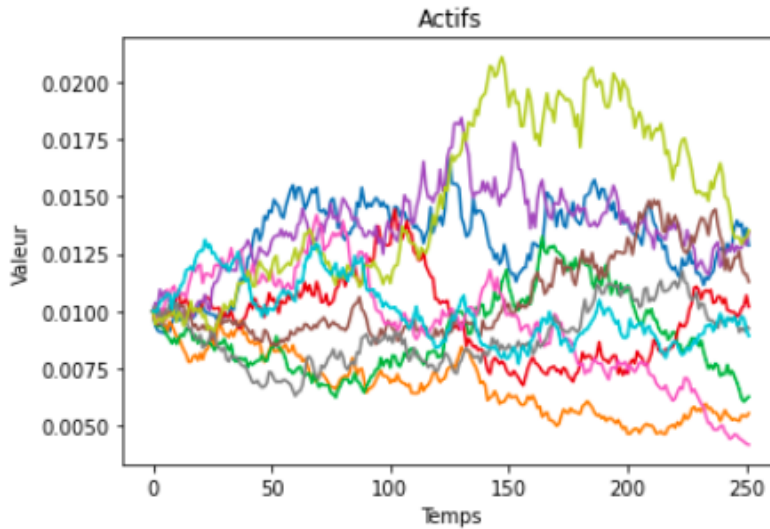


FIGURE 1 – Actifs simulés de Black et Scholes

Grâce aux formules de R_+ et R_- trouvées dans la partie 1.1.7, nous avons pu tracer la frontière efficiente pour ce groupe de 3 actifs. Notons que pour la solution du problème 2 dans le cas d'un rendement minimum imposé supérieur à A/B (A et B étant des constantes définies dans la partie 1.1.2) et la solution du problème de maximisation du rendement avec une contrainte de risque exact. Ici $R_0 = 2.9$.

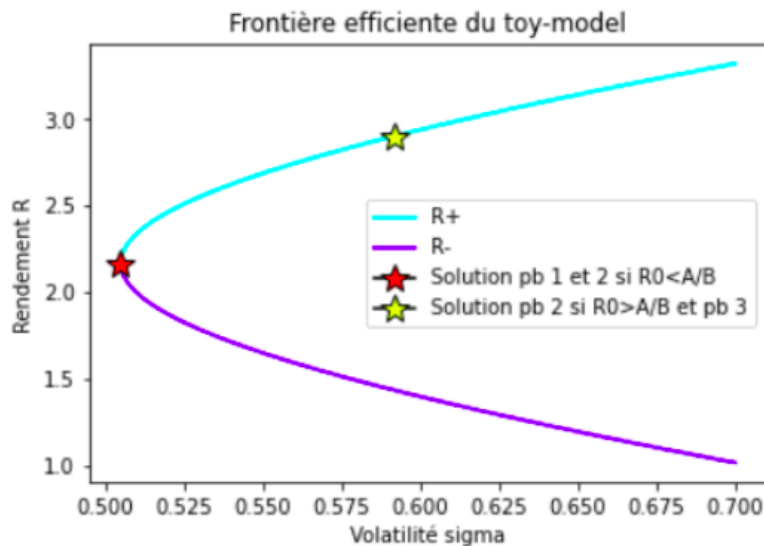


FIGURE 2 – Frontière efficiente du toy-model.

Simulons maintenant $N = 10$ actifs selon le modèle de Black et Scholes. Pour cela, nous devons choisir un risque et un rendement qu'auront les actifs simulés et nous prendrons ici $\sigma = 0.5$ et $r = 0.05$. Nous avons également choisi de les simuler sur $M = 252$ jours avec une valeur initiale de 0.1. Après calcul de la matrice des rendements, du vecteur des espérances (rendements des N actifs) permettant de calculer la matrice de covariance, nous obtenons la frontière efficiente qui suit.

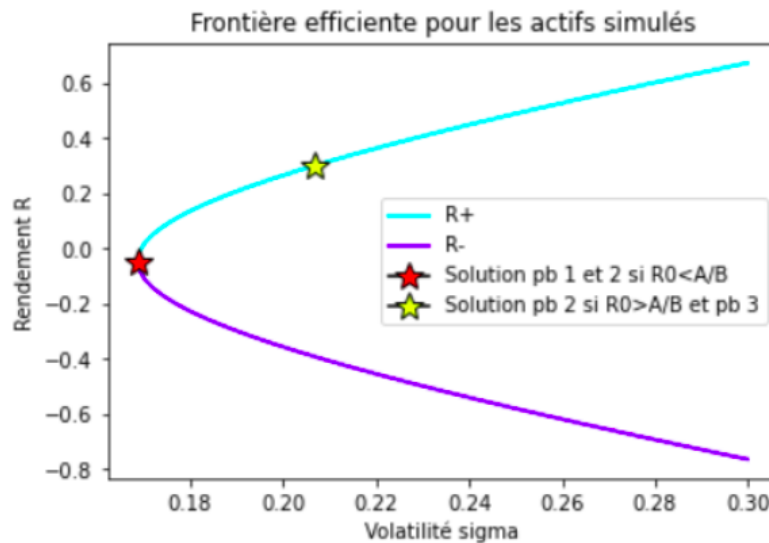


FIGURE 3 – Frontière efficiente des actifs simulés selon Black et Scholes.

Notons que pour la solution de minimisation du risque avec un rendement minimum imposé supérieur à A/B et la solution du problème de maximisation du rendement avec un risque exact, nous avons pris ici $R_0 = 0.3$.

Pour le CAC40, après calcul de la matrice des rendements, du vecteur des espérances (rendements des N actifs) permettant de calculer la matrice de covariance, nous obtenons la frontière efficiente que vous verrez ci-dessous. Ici, nous avons pris $R_0 = 0.5$ pour la solution du problème de minimisation du risque dans le cas d'un rendement minimum imposé supérieur à A/B .

1.2.3 Simulation d'allocations

Les couples rendement-risque de tous les portefeuilles doivent se trouver à l'intérieur de la frontière efficiente. C'est ce que nous verrons ici en créant, dans nos 2 cas, $n = 10000$ portefeuilles dont les allocations sont générées aléatoirement, selon une loi uniforme, puis normalisées afin de respecter la contrainte selon laquelle la somme des proportions investies

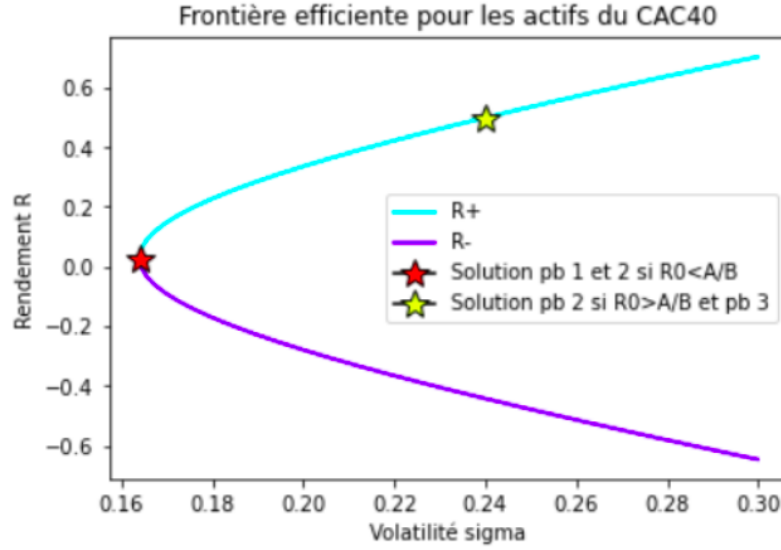


FIGURE 4 – Frontière efficiente des actifs du CAC40

dans chacun des actifs est égale à 1.

D'abord, 10 actifs de Black et Scholes sont simulés, ensemble d'actifs pour lesquels la matrice de rendements et le vecteur des rendements moyens par actifs sont calculés, afin de calculer ensuite la matrice de covariance. Puis, cela permet de calculer le risque σ^2 et le rendement R pour chacun des portefeuilles selon les formules suivantes :

$$R = \sum_{i=1}^N X_i E_i \text{ et } \sigma^2 = \sum_{i,j} \Gamma_{i,j} X_i X_j$$

L'affichage des couples rendements-risque sur le graphique de la frontière efficiente donne la figure suivante. On constate que tous les portefeuilles se trouvent bien à l'intérieur de la frontière.

Pour les actifs du CAC, nous calculons de la même manière les rendements moyens par actifs ainsi que la matrice de covariance. Nous simulons ensuite $n = 10000$ allocations comme décrit précédemment et calculons le rendement et le risque des portefeuilles qu'ils engendrent. De même, en affichant les couples rendement-risque sur le graphique de la frontière efficiente, nous observons que tous les portefeuilles se trouvent à l'intérieur de cette dernière.

Pour les actifs du CAC, nous calculons de la même manière les rendements moyens par actifs ainsi que la matrice de covariance. Nous simulons ensuite $n = 10000$ allocations comme décrit précédemment et calculons le rendement et le risque des portefeuilles qu'ils engendrent. De même, en affichant les couples rendement-risque sur le graphique de la frontière efficiente, nous observons que tous les portefeuilles se trouvent à l'intérieur de cette dernière. Cependant,

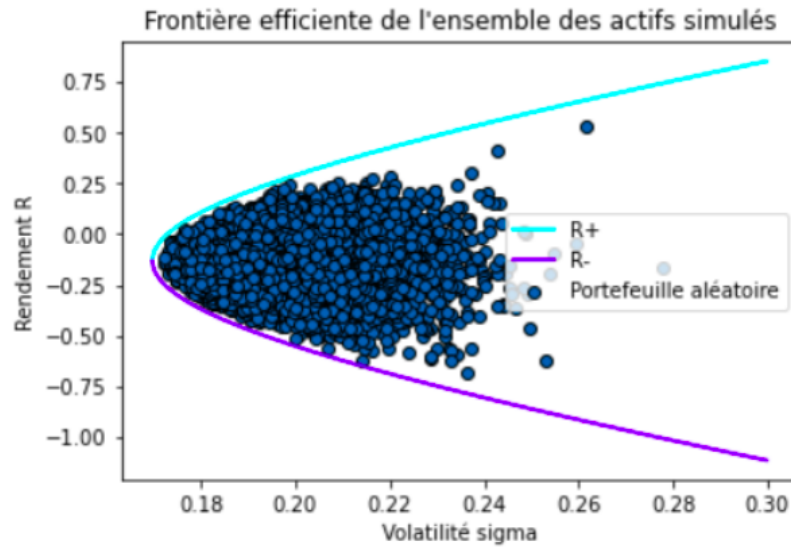


FIGURE 5 – Portefeuilles simulés pour les actifs de Black et Scholes.

les portefeuilles ne se rapprochent pas de la frontière et donc des portefeuilles optimaux. Cela est dû au fait que nous avons ici seulement des allocations positives. Nous pourrions alors penser à d'autres méthodes pour la simulation des portefeuilles aléatoires.

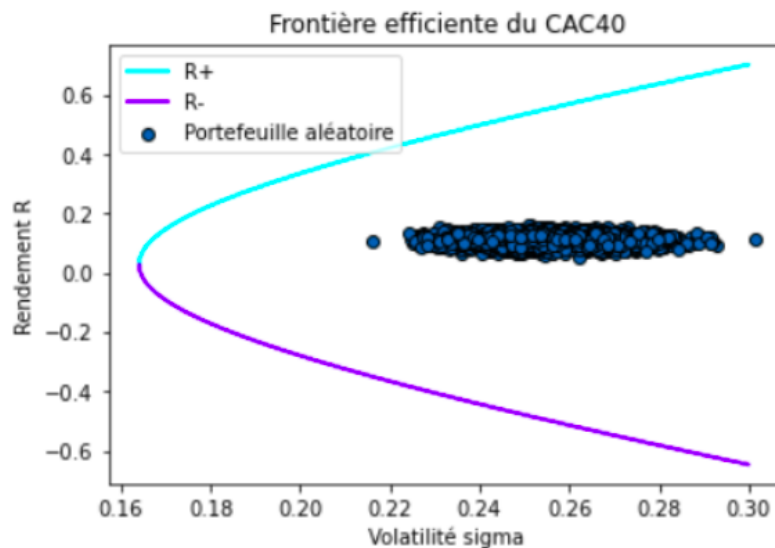


FIGURE 6 – Portefeuilles simulés pour les actifs du CAC40.

1.2.4 Value at Risk (VaR)

Dans cette partie, la Value at Risk (VaR) est calculée pour 5 portefeuilles différents. Avant tout, la Value at Risk d'une variable aléatoire Z de niveau α est la valeur γ tel que :

$$\mathbb{P}(Z \geq \gamma) = 1 - \alpha$$

Autrement dit, il s'agit de la valeur $x \in \mathbb{R}$ en laquelle la fonction de répartition de la variable aléatoire Z est égale à α . Dans notre cas, la Value at Risk du rendement de différents portefeuilles est calculée, et représente alors la perte qui a une probabilité α d'être pire que le rendement du portefeuille.

Nous considérons ici 10 actifs simulés aléatoirement grâce à la formule de Black et Scholes. 5 allocations différentes sont choisies pour ces actifs dont la première est uniforme et les 4 autres sont simulées par une loi uniforme entre 0 et 1 et normalisées afin de respecter la contrainte de somme 1. Nous calculons ensuite pour chacune des allocations les rendements journaliers aléatoires donnés par la formule suivante :

$$\hat{R}^{(i)} = \sum_{j=1}^N X_j R(i, j)$$

En choisissant $\alpha = 0.05$, nous obtenons par exemples les Value at Risk de différents niveau α pour l'un des portefeuilles (Figure 7).

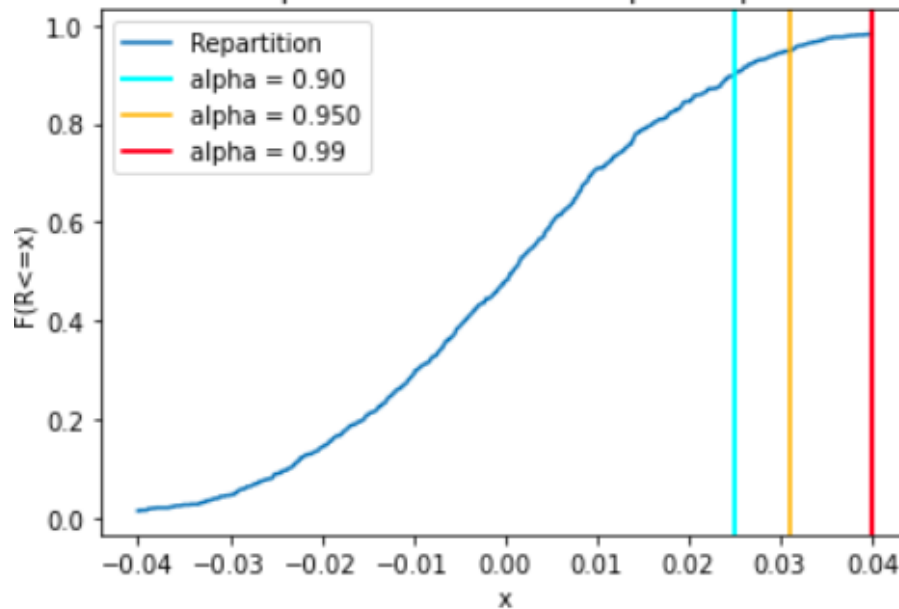


FIGURE 7 – Fonction de répartition obtenue pour un portefeuille de 10 actifs simulés selon Black and Scholes et les Value at Risk de niveaux $\alpha_1 = 0.90$, $\alpha_2 = 0.95$ et $\alpha_3 = 0.99$.

2 Algorithmes d'optimisation et résolutions numériques

2.1 Algorithme de Newton

L'algorithme de Newton est une méthode de descente de deuxième ordre à pas fixe égal à 1. On supposera ici que la fonction à minimiser $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est deux fois différentiable afin de garantir l'existence de son gradient ∇f et de sa matrice hessienne H_f . L'idée de l'algorithme est de construire une suite de points $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dont la limite est le minimum de la fonction objectif :

$$\begin{cases} r_0 \in \mathbb{R}^N \\ \forall k \in \mathbb{N} \quad r_{k+1} = r_k + d_k \end{cases}$$

où d_k la direction de descente à l'itération k . La méthode consiste à trouver un extremum de la fonction f , ce qui revient à la recherche d'une racine de ∇f . On souhaite alors à chaque itération trouver r_{k+1} tel que $\nabla f(r_{k+1})$ soit nul. Or d'après la formule de Taylor-Young, on a :

$$\nabla f(r_{k+1}) = \nabla f(r_k + d_k) = \nabla f(r_k) + H_f(r_k)d_k + o(d_k)$$

Nous pouvons alors approximer $\nabla f(r_{k+1})$ par $\nabla f(r_k) + H_f(r_k)d_k$ et nous cherchons alors d_k tel que $\nabla f(r_k) + H_f(r_k)d_k = 0$. Si H_f est définie positive (donc inversible) en le point r_k , et nous le supposons ici, alors :

$$d_k = -H_f(r_k)^{-1} \nabla f(r_k)$$

Notons que d_k est une direction de descente de ∇f en r_k si et seulement si $\langle \nabla f(r_k), d_k \rangle < 0$, et c'est le cas puisque H_f est définie positive. On peut alors arrêter d'itérer lorsque ce produit scalaire s'approche de 0 en considérant un ϵ très petit :

$$\langle \nabla f(r_k), d_k \rangle < \epsilon$$

L'inconvénient de l'algorithme de Newton que ce dernier permet de trouver un minimum local et non le minimum global de la fonction. C'est pourquoi r_0 doit être choisie suffisamment proche du minimum global, ce qui n'est pas toujours évident. Aussi l'algorithme ne permet pas une minimisation sous contraintes, alors que nous avons des contraintes pour optimiser un portefeuille d'actifs.

En appliquant l'algorithme de Newton au toy-model défini plus haut pour minimiser le risque et en prenant l'allocation uniforme pour r_0 , nous trouvons les allocations suivantes après 1 itération pour les 3 actifs considérés :

$$r = \begin{bmatrix} 2.776 \cdot 10^{-16} \\ -3.886 \cdot 10^{-16} \\ 5.551 \cdot 10^{-17} \end{bmatrix}$$

Nous remarquons en effet, que les allocations trouvées ne sont pas de somme 1. Les valeurs sont quasiment nulles, ce qui est cohérent puisque, sans imposer aucune contrainte, le risque minimum est le risque nul obtenu en n'investissant pas (allocations nulles).

Nous ne pouvons cependant pas maximiser le rendement puisque la matrice hessienne de la fonction de rendement est nulle. De même, maximiser le rendement sous aucune contrainte de risque ou sur les allocations revient à investir à l'infini dans tous les actifs à rendement positif.

2.2 Algorithme de Lagrange-Newton

L'algorithme de Lagrange-Newton étend la méthode de Newton aux problèmes d'optimisation avec contraintes égalité. En effet, nous construirons maintenant une seconde suite $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ pour les multiplicateurs de Lagrange :

$$\begin{cases} r_0 \in \mathbb{R}^N, \lambda_0 \in \mathbb{R}^p \\ \forall k \in \mathbb{N} \quad r_{k+1} = r_k + d_k \\ \forall k \in \mathbb{N} \quad \lambda_{k+1} = \lambda_k + \zeta_k \end{cases}$$

où p est le nombre de contraintes égalité et ζ_k est la direction de descente dans l'espace des multiplicateurs de Lagrange à l'itération k . En notant L le lagangien du problème :

$$L(r, \lambda) = f(r) + \sum_{i=1}^p \lambda^{(i)} h_i(r)$$

nous aurons à chaque itération :

$$\begin{bmatrix} d_k \\ \zeta_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_L(r_k, \lambda_k) & \nabla C(r_k) \\ \nabla C(r_k) & 0_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \nabla L(r_k, \lambda_k) \\ C(r_k) \end{bmatrix}$$

avec C le vecteur des contraintes.

L'algorithme s'arrête lorsque les vecteurs d_k et ζ_k deviennent très petit ce qui peut se traduire par la condition d'arrêt suivante où ϵ est très petit :

$$\left\| \begin{bmatrix} d_k \\ \zeta_k \end{bmatrix} \right\|_2 < \epsilon$$

Appliquons l'algorithme de Lagrange-Newton au problème de minimisation du risque avec une contrainte de rendement exact R_0 pour notre toy-model de dimension 3 et comparons le risque minimum trouvé avec le risque minimal exact trouvé analytiquement grâce à l'équation de la frontière efficiente.

R_0	1	1.9	2.169	3.5
r_1	1.1833	0.41833	0.1897	-0.9417
r_2	-0.3667	0.26333	0.4516	1.3833
r_3	0.1833	0.31833	0.3587	0.5583
Volatilité trouvée	0.7178	0.5344	0.5222	0.7662
Volatilité théorique	0.7053	0.5175	0.5049	0.7546

Résultats obtenus avec l'algorithme de Lagrange-Newton pour le toy-model.

La somme des allocations trouvées vaut bien 1 (les allocations ont été arrondi à 10^{-4}). Certaines allocations sont négatives (ventes à découvert). En effet, nous n'avons ici pas de contraintes sur la positivité de ces dernières. Aussi, nous remarquons une différence de l'ordre de 10^{-2} entre les volatilités trouvées numériquement avec l'algorithme de Lagrange-Newton et les volatilités minimales réelles trouvées analytiquement. Cette différence reste légère et se justifie par le fait que la solution trouvée par la méthode est supposée approchée et non exacte. Nous avons également recalculé le rendement et nous constatons que la contrainte est bien respectée.

Notons que nous avons aussi cherché à minimiser le risque pour $R_0 = 2.169$, rendement pour lequel le risque est minimal selon la résolution numérique réalisée dans la partie 1. Nous avons alors appliqué l'algorithme au problème de minimisation du risque sans contrainte de rendement et avec uniquement la contrainte de somme 1 pour les allocations. Nous obtenons une volatilité de 0.5270 en allouant un tiers de son investissement à chacun des 3 actifs.

Appliquons également l'algorithme aux actifs du CAC40. Nous minimisons avec une contrainte de rendement R_0 pour différentes valeurs de rendement et la contrainte de somme des allocations et nous obtenons :

R_0	-0.35	0.02855	1.2	5
Volatilité trouvée	0.2161	0.1644	0.4652	1.8546
Volatilité théorique	0.2161	0.1644	0.4652	1.8546

Résultats obtenus avec l'algorithme de Lagrange-Newton pour les actifs du CAC40.

Dans le cas du CAC40, les volatilités trouvées avec Lagrange-Newton sont les valeurs trouvées analytiquement. Pour le problème de minimisation du risque sans contrainte, nous trouvons une volatilité $\sigma = 0.16403$ et les allocations correspondantes permettent un rendement de $R = 0.0265$ soit de 2.65% de l'investissement, rendement supérieur de 0.19% au rendement théorique.

2.3 Algorithme d'Uzawa

L'algorithme d'Uzawa permet de remplacer le problème de minimisation avec contraintes par plusieurs problèmes de minimisation sans contraintes. Nous traiterons ici le cas de la minimisation d'une fonction quadratique (puisque c'est le cas de la fonction de risque) sous des contraintes égalité. Nous avons la fonction objective :

$$f(X) = \frac{1}{2}\langle AX, X \rangle + \langle b, X \rangle + c$$

où, dans le cas du risque, $A = 2\Gamma$ et $b = 0$. L'ensemble des contraintes est présenté sous forme matriciel (avec une ligne par contrainte) :

$$QX - c = 0$$

Dans le cas de cas de la minimisation du risque avec une contrainte de rendement,

$$Q = \begin{bmatrix} E^T \\ u^T \end{bmatrix} \text{ et } c = \begin{bmatrix} R_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La méthode consiste comme précédemment à construire itérativement deux suites : $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ pour les allocations et $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ pour les multiplicateurs de Lagrange, dont les limites sont respectivement les allocations optimales et les multiplicateurs de Lagrange correspondants.

$$\begin{cases} X_0 \in \mathbb{R}^N, \lambda_0 \in \mathbb{R}^p \\ \forall k \in \mathbb{N} \quad X_{k+1} = \min_X \frac{1}{2}\langle AX, X \rangle + \langle b, X \rangle + \langle \lambda_k, QX - c \rangle \\ \forall k \in \mathbb{N} \quad \lambda_{k+1} = \lambda_k + p\zeta_k \end{cases}$$

Pour trouver X_{k+1} , nous utiliserons la méthode de Newton avec un pas constant $p = 0.01$ et nous utiliserons X_k comme point de départ. De plus, $\zeta_k = QX_{k+1} - c$ pour tout k .

L'algorithme s'arrête lorsque les contraintes sont atteintes (ou presque). Soit ϵ très petit, la condition d'arrêt est :

$$\|QX_k - c\|_2 > \epsilon$$

Appliquons maintenant l'algorithme à notre toy-model pour minimiser le risque sous une contrainte de rendement égal à R_0 et la contrainte de somme des allocations égale à 1. Dans la suite, nous prendrons $p = 1$ pour la mise à jour des multiplicateurs de Lagrange.

R_0	1	1.9	2.169	3.5
X_1	0.9999	0.3233	0.1351	-0.9314
X_2	0.0019	0.4534	0.5607	1.3627
X_3	-0.0014	0.2234	0.3040	0.5685
Volatilité trouvée	0.7077	0.5190	0.5110	0.7680
Volatilité théorique	0.7053	0.5175	0.5049	0.7546

Résultats obtenus avec l'algorithme de Uzawa pour le toy-model.

Nous remarquons que les allocations trouvées sont assez proches de celles trouvées avec l'algorithme de Lagrange Newton. De plus, les volatilités obtenues ici sont plus proches des volatilités optimales théoriques. Aussi, en appliquant l'algorithme sans la contrainte de rendement, nous trouvons à nouveau une volatilité minimale de $\sigma = 0.5166$, pour un rendement de $R = 1.9898$.

R_0	-0.35	0.02855	1.2	5
Volatilité trouvée	0.2219	0.1682	0.4956	1.8964
Volatilité théorique	0.2161	0.1644	0.4652	1.8546

Résultats obtenus avec l'algorithme d'Uzawa pour les actifs du CAC40.

Pour le CAC40, l'écart entre les volatilités optimales trouvées et les volatilités théoriques est plus élevé qu'avec l'algorithme de Lagrange-Newton mais la différence reste faible (de l'ordre de 10^{-2}). Lorsque l'on retire la contrainte de rendement, nous trouvons un risque minimal de 0.1790 (contre 0.1640 théoriquement) avec un rendement de +9.64%.

2.4 Amélioration de la descente cyclique de coordonnées

L'algorithme présenté par Choi J. et Chen R. permet de minimiser le risque de tel sorte que le risque soit partagé d'une façon choisie entre les différents actifs. Il permet aussi d'obtenir des allocations positives, c'est à dire respecter la contrainte $X_i > 0$ pour tout i entre 1 et N . Il s'agit d'une amélioration de l'algorithme de descente (CCD : cyclical coordinate descent en anglais) et de celui de Newton basé sur les travaux de Spinu F. pour résoudre l'équation $\Gamma X = b/X$ où b est le vecteur des proportions de risque. Ici, nous traiterons le cas de *Risk Parity*, c'est à dire où l'on souhaite que le risque soit réparti uniformément entre les actifs.

L'algorithme utilise la matrice de corrélation C et le vecteur des volatilités pour chaque actif, calculés à partir de la matrice de covariance Γ . Nous initialisons le vecteur des allocations :

$$X = \frac{1_N}{\sqrt{\sum_{k,l}^N C_{k,l}}}$$

Tant que la norme infinie (maximum des valeurs absolues des éléments) du vecteur $w \cdot (Rw) - b$ est supérieur à ϵ très petit, nous itérons :

Pour tout allocation, X_i avec i entre 1 et N ,

$$X_i \leftarrow \sqrt{a_i^2 + b_i - a_i} \text{ avec } a_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N R_{i,j} X_j.$$

$$\text{Puis on renormalise } X : X \leftarrow \frac{X}{\sqrt{X^T R X}}$$

Enfin, les allocations positives et de somme 1 retournée par l'algorithme sont :

$$\frac{v}{\sum_{i=1}^N v_i} \text{ avec } v = \frac{X}{\sigma}$$

En appliquant l'algorithme au toy-model, nous obtenons les allocations suivantes : $[0.3150, 0.4393, 0.2457]$ (arrondi à 10^{-4} près), qui donnent une volatilité $\sigma = 0.5178$ et un rendement de $r = +193\%$. Nous remarquons que le portefeuille se situe presque sur la frontière efficiente du toy-model présenté dans la partie 1 : le portefeuille trouvée est presque optimal, et ne permet pas de vente à découvert. Aussi, la volatilité du portefeuille minisant le risque (sous aucune contrainte) est à peine plus élevée (0.5049), tout comme le rendement (217%)

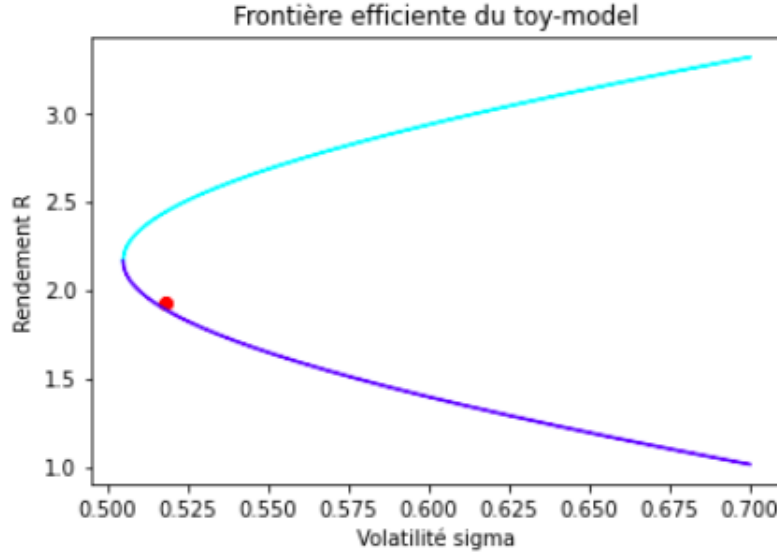


FIGURE 8 – Portefeuille optimal trouvé pour la minimisation du risque avec la contrainte $X \geq 0$ du toy model sur sa frontière efficiente.

Pour les actifs du CAC40, la somme des allocations vaut 1 également. Nous trouvons une volatilité de $\sigma = 0.2248$ et un rendement de $r = +152\%$. Le portefeuille se trouve bien à l'intérieur de la frontière efficiente.

L'inconvénient de cet algorithme est que nous ne pouvons imposer de contrainte sur le rendement, mais cela rendrait le problème très complexe.

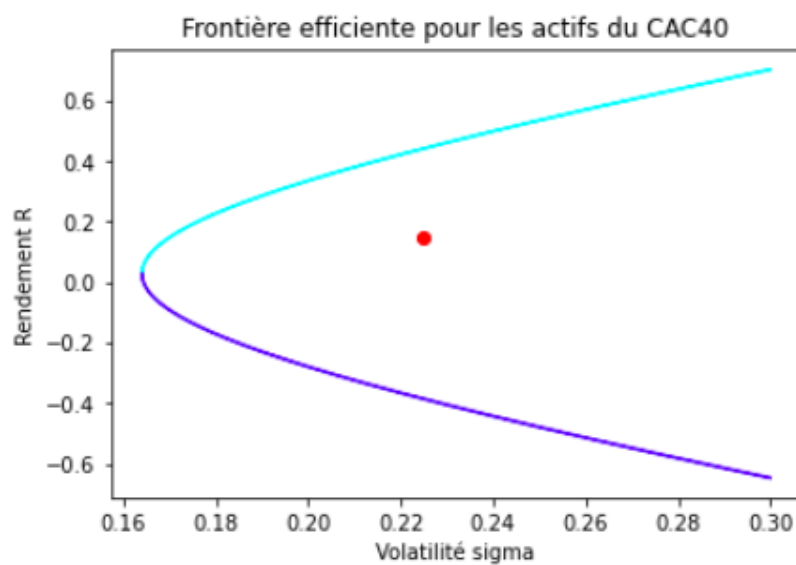


FIGURE 9 – Portefeuille optimal trouvé pour la minimisation du risque avec la contrainte $X \geq 0$ du CAC sur sa frontière efficiente.

Conclusion

Dans ce projet, différents problèmes d'optimisation ont été résolus. Ils traduisent des volontés d'investissement qui dépendent de chacun : minimiser le risque, maximiser le rendement, obtenir un rendement minimum, encourir un risque maximum, introduire un actif sans risque etc. D'une part, une résolution analytique donne des formules théoriques d'allocations optimales, qui dépendent des différents paramètres du problème. D'autre part, des algorithmes itératifs permettent d'approcher les valeurs des allocations optimales. Les valeurs des allocations et problèmes d'optimisation ont été calculées par les deux méthodes et comparées. Notons qu'elles sont très proches, ce qui prouve l'efficacité des algorithmes utilisés.

Bien que Markowitz ait introduit la notion de risque dans la prise de décision en investissement, sa théorie n'est pas sans limite. En effet, le problème n'est pas stable : une légère variation dans les paramètres d'entrée (contraintes, valeur du risque ou du rendement imposé) engendre de grandes variations au niveau des allocations de la valeur du problème (rendement, risque ou encore Sharpe-Ration). De plus, le calcul de la matrice de covariance et de son inverse peut rapidement amener des problèmes de complexité temporelle lorsque l'on souhaite investir dans un certain nombre d'actifs différents. Il est également important de mentionner que la plupart des méthodes utilisées dans ce rapport, à l'exception de celui d'Uzawa, autorisent les investissements à déouvert. En effet, la contrainte $X \geq 0$ n'est pas imposée. L'ajout de cette contrainte rend la résolution du problème bien plus complexe.

Références

- [1] Jaehyuk Choi and Rong Chen. Improved iterative methods for solving risk parity portfolio. *Journal of Derivatives and Quantitative Studies* : , 30(2) :114–124, 2022.
- [2] Irina Kortchemski. Nonlinear numerical optimization.
- [3] Andrew Lesniewski. Optimization techniques in finance. 2019.
- [4] Hannes Marling and Sara Emanuelsson. The markowitz portfolio theory. *November*, 25 :2012, 2012.
- [5] Mark Rubinstein. Markowitz’s” portfolio selection” : A fifty-year retrospective. *The Journal of finance*, 57(3) :1041–1045, 2002.
- [6] William F Sharpe. Capital asset prices : A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The journal of finance*, 19(3) :425–442, 1964.
- [7] Florin Spinu. An algorithm for computing risk parity weights. *Available at SSRN 2297383*, 2013.