

## TD 2 : APPLICATIONS LINÉAIRES CONTINUES

### Exercice 1. Continuité pour différentes normes

On se place sur  $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$ . On considère la forme linéaire :

$$\varphi : f \in E \mapsto f(0).$$

Montrer que  $\varphi$  est continue vis-à-vis de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ , mais n'est pas continue pour la norme  $\|\cdot\|_{L^1}$ .

### Exercice 2. Un calcul de norme 1

Soit  $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$  muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$  et  $F = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbf{R})$  muni de la norme  $\|\cdot\|_F$  définie par :

$$\forall f \in F, \|f\|_F = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

On définit alors  $T : E \rightarrow F$  par :

$$\forall f \in E, \forall x \in [0, 1], Tf(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Montrer que  $T$  est bien définie, linéaire, continue et calculer sa norme subordonnée. La valeur de la norme de  $T$  est-elle atteinte ?

### Exercice 3. Un calcul de norme 2

Soient  $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$  muni de la norme  $\|\cdot\|_{L^2}$ ,  $a \in ]0, 1[$  et  $T : E \rightarrow \mathbf{R}$  définie par :

$$\forall f \in E, Tf = \int_0^a x^2 f(x) dx.$$

Montrer que  $T$  est bien définie, linéaire, continue et calculer sa norme subordonnée. La valeur de la norme de  $T$  est-elle atteinte ?

### Exercice 4. Un calcul de norme 3

Sur  $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$  muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ , on définit la forme linéaire  $\mu_f$  associée à un élément non nul  $f$  de  $E$  par :

$$\forall g \in E, \mu_f(g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt.$$

Montrer que  $\mu_f$  est bien définie, continue et calculer sa norme subordonnée.

**Exercice 5.** *Une application bilinéaire*

On note  $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$ . On considère l'application :

$$B : \begin{cases} (E, \|\cdot\|_\infty) \times (E, \|\cdot\|_{L^2}) & \rightarrow (E, \|\cdot\|_\infty) \\ (f, g) & \mapsto x \in [0, 1] \mapsto \int_0^x e^t f(t) g(t) dt. \end{cases}$$

Montrer que  $B$  est bien définie, bilinéaire, continue et calculer sa norme.

**Exercice 6.** *Formes linéaires positives*

Soient  $a < b$  deux réels,  $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$  muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$  et  $\varphi$  une forme linéaire positive sur  $E$ , i.e. pour tout  $f \in E$ , si  $f \geq 0$  alors  $\varphi(f) \geq 0$ . Montrer que  $\varphi$  est continue et calculer sa norme subordonnée.

*Indication : On pourra montrer et utiliser que pour toute  $f \in E$ ,  $|\varphi(f)| \leq \varphi(|f|)$ .*

**Exercice 7.** *Opérateurs à noyau*

Soit  $K \in \mathcal{C}^0([0, 1]^2, \mathbf{R})$ . On note  $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$  muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ . Pour  $f \in E$ , on note  $Tf$  la fonction définie par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad Tf(x) = \int_0^1 K(x, y) f(y) dy.$$

Montrer que  $T$  est bien défini, qu'il s'agit d'un endomorphisme linéaire continu de  $E$  et calculer sa norme.

**Exercice 8.** *Continuité et noyau d'une forme linéaire*

Soient  $E$  un espace vectoriel normé et  $\varphi$  une forme linéaire non nulle sur  $E$ . Montrer que  $\varphi$  est continue si et seulement si son noyau est fermé.

**Exercice 9.** *Norme et noyau d'une forme linéaire*

Soient  $E$  un espace vectoriel normé et  $H$  le noyau d'une forme linéaire continue non nulle  $\varphi$ . Montrer que pour tout  $x$  dans  $E$ ,

$$d(x, H) = \frac{|\varphi(x)|}{\|\varphi\|}.$$

**Exercice 10.** *Complétude de  $\mathcal{L}_c(E, F)$* 

Soient  $E, F$  deux espaces vectoriels normés. Montrer que si  $F$  est complet, alors l'espace  $\mathcal{L}_c(E, F)$  muni de la norme d'opérateur est complet.

**Exercice 11.** *Dual de  $l^p(\mathbf{N})$ ,  $1 \leq p < +\infty$* 

Soit  $1 \leq p < +\infty$  et  $q$  son exposant conjugué, i.e. tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Pour  $y \in l^q(\mathbf{N})$ , on pose pour tout  $x \in l^p(\mathbf{N})$  :

$$F_y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n.$$

1. Montrer que pour tout  $y \in l^q(\mathbf{N})$ , on a  $F_y \in (l^p(\mathbf{N}))'$ .

2. On pose :

$$F : y \in l^q(\mathbf{N}) \mapsto F_y \in (l^p(\mathbf{N}))'.$$

Montrer que  $F$  est une isométrie linéaire.

Le but est maintenant de montrer la surjectivité de  $F$ . Soit  $\varphi \in (l^p(\mathbf{N}))'$ . On pose  $y_n = \varphi(e_n)$ , où  $e_n$  désigne la suite dont tous les termes sont nuls, sauf le terme de rang  $n$  qui vaut 1.

3. Pour  $p = 1$ , montrer que  $(y_n)_n \in l^\infty(\mathbf{N})$ .

4. Pour  $1 < p < +\infty$ , on pose pour tous  $n, N \geq 0$ ,

$$x_n^N = \begin{cases} y_n^{-1} |y_n|^q & \text{si } y_n \neq 0 \text{ et } n \leq N, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer  $\varphi(x^N)$  et en déduire que  $y \in l^q(\mathbf{N})$ .

5. Montrer que  $F$  est surjective.