Déroulement de mes oraux

1 Oral d'Analyse

J'ai eu le choix entre les leçons 202 et 243 et j'ai choisi la leçon 202 : Exemples de parties denses et applications. J'ai fait un plan en 4 parties :

1. **Définitions et premiers exemples en dimension finie.**
   (a) Premières définitions
   (b) Densité dans les corps R et C
   (c) Equirépartition : une propriété plus forte que la densité
   (d) Densité dans les espaces de matrices et applications
2. **Densité dans les espaces de fonctions.**
   (a) Densité dans les fonctions continues et théorème de Weierstrass
   (b) Densité dans les espaces L^p
   (c) Densité dans les espaces L^p périodiques et théorème de Féjèr
3. **Critères généraux de densité et théorème de prolongement.**
   (a) Lemme de Baire
   (b) Théorème de Hahn-Banach et critère général de densité dans un evn
   (c) Théorème de prolongement des applications uniformément continues sur une partie dense.
4. **Densité dans les espaces de Hilbert**
   (a) Critère général de densité et applications
   (b) Bases Hilbertiennes.

Développements : Equirépartition presque sûre des orbites du doublement de l'angle sur le cercle (choisi) contre le théorème de Féjèr C^0 et L^p. Il y a eu quelques questions sur le développement comme j'ai dû aller assez vite pour avoir le temps de le faire en entier. Ce n'est pas un développement très classique, je pense que le jury ne le connaissait pas.

Questions : Ensuite il y a eu pas mal de questions sur le plan pour vérifier que je maîtrisais suffisamment ce que j'avais mis dans le plan. Il y a eu des questions notamment sur :

- la preuve du théorème de Hahn-Banach
- s'il est équivalent à l'axiome du choix
- j'avais parlé de la classe de Schwartz, on m'a demandé de la définir et de dire à quoi elle sert.
- On m'a demandé une partie dense de L^∞ car je n'en avais pas parlé.
- Idée de la preuve de la densité des fonctions continues nulle part dérivables sur $[0,1]$ et un exemple
- On m'a demandé si je connaissais une autre topologie intéressante sur les L^p.

Ensuite il y a eu quelques petits exercices :

- Que peut-on dire d'une suite de polynômes qui converge uniformément vers une fonction sur $\mathbb{R}$?
- Montrer que si u_n et v_n sont deux suites croissantes qui tendent vers l'infini et si $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0 alors la famille $(v_p - u_n, n, p \in \mathbb{N})$ est dense dans $\mathbb{R}$.
- En déduire la densité de $(e^{iln(n)})_n$ sur le cercle.

Remarque : Le jury était plutôt sympathique et bienveillant !

2 Oral d'Algèbre

J'ai eu le choix entre les leçons 159 et 110 (vive la dualité !!!) J'ai choisi la leçon 159 : Formes linéaires et dualité : exemples et applications. J'ai fait un plan en 4 parties :

1. **Formes linéaires et dualité : premières propriétés**
   (a) Formes linéaires et espace dual
   (b) Bases duales et antéduales
2. **Théorèmes de Hahn-Banach et applications**
   (a) Hyperplans
   (b) Les théorèmes de Hahn-Banach
   (c) Application : un problème de transport optimal discret (voir sur ma page)
3. **Orthogonalité et transposée**
   (a) Orthogonalité
   (b) Transposée
4. **Applications de la dualité**
   (a) En calcul différentiel et optimisation
   (b) En probabilité : loi d'un vecteur et convergence en loi
   (c) Forme quadratique : orthogonalité

Développements : Réduction de Frobenius (choisi) et théorème des extrema liés.

Quelques questions sur le développement : un passage où je suis allé un peu vite donc j'ai précisé un peu. Ensuite on m'a demandé s'il y avait un argument général de dualité pour montrer qu'un sev est stable par un endomorphisme u (fait que j'ai redémontré dans mon développement) et on m'a posé la question de l'unicité des polynômes que je ne démontrais pas dans mon développement.

Questions :

- Forme générale d'un endomorphisme de rang 1 (avec une forme linéaire contre un vecteur), condition pour que ce soit un projecteur, qui est l'espace vectoriel engendré par les endomorphismes de rang 1 (j'ai proposé deux preuves avant qu'il me donne un indice pour faire celle qu'il avait en tête mais c'était essentiellement toujours le même argument !)
- Montrer qu'un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$ est une intersection de demi-plan affines
- Dimension d'une intersection d'hyperplans en fonction de la dimension de l'espace engendré par les formes linéaires associées ...

- A quelle condition deux formes linéaires non nulles définissent le même hyperplan ?
- On m'a demandé si je connaissais des formes linéaires sur les corps finis et puis si on me donne un sev d'un ev de dimension finie sur un corps fini sous forme d'intersection d'hyperplans, comment trouver " rapidement ou efficacement ", je ne sais plus, si un vecteur est dans ce sev.

Remarques : Jury assez neutre : il y avait une personne qui ne semblait pas très joyeuse d'être là... Mais j'étais plutôt content de ce que j'avais fait pendant cet oral !

3 Oral de modélisation Probabilités et Statistiques

Modèle : J'ai choisi un texte qui portait sur la gestion de la taille des paquets d'information lors de communications informatiques. En gros l'idée est que deux machines communiquent en s'envoyant des paquets d'informations et il faut trouver un équilibre entre envoyer des gros paquets pour communiquer rapidement, mais ne pas envoyer de trop gros paquets car on suppose qu'on peut perdre des paquets lors du transfert. On notait donc X_t la taille des paquets au temps t qui évolue de manière affine par morceaux avec des pentes toujours égales à 1 (on augmente progressivement la taille des paquets) et à des instants T_i la taille des paquets est multipliée par un facteur $U_i \in [0, 1]$.

On étudiait deux cas :

1. le cas où les instants T_i sont déterministes : $T_i = i$ et les U_i sont iid avec une loi μ sur $[0, 1]$
2. le cas où les T_i sont aléatoires et à chaque T_i on divise la taille des paquets par 2.

Dans le second cas, le fait que les T_i sont aléatoires permet de prendre en compte le passé : à un instant t : plus la taille des paquets est grosse, plus l'instant de la prochaine réduction des paquets aura lieu rapidement. Cela était quantifié par une fonction λ telle que : si on note T_i les temps auxquels ont lieu les réductions des la taille des paquets et B_i la taille du paquet après la i ème réduction on a :

$$\mathbb{P}(T_{i+1} > t | (T_i > s),\, B_i) = \exp\left(\int_s^t \lambda(B_i + u) du\right).$$

C'était un modèle de type markovien. Il y avait un peu de chaînes de Markov, des lois conditionnelles, de l'estimation (LGN/ TCL ...)

Questions : Ensuite ils m'ont posé des petites questions sur des détails sur lesquels j'étais passé vite et quelques questions générales :

- Comment estimer empiriquement une loi (Glivenko-Cantelli ou Varadarajan et puis le test de Kolmogorov-Smirnov) ?
- Comment estimer le paramètre theta d'un échantillon de lois uniformes sur $[0, \theta]$? Écrire la vraisemblance, propriétés des estimateurs ...
- Montrer que la variance empirique converge ps vers la variance
- Dire précisément ce qu'est un noyau de transition et le donner dans le cadre d'un exemple assez proche du texte voire dans le texte je ne sais plus.
- Manipulations d'espérances conditionnelles pour montrer en gros que si conditionnellement à chaque $X = x$ une variable est finies ps, alors elle est finie ps, c'était quelque chose dans ce goût là.
- Une petite question sur l'idée de la dernière partie du texte (que je n'avais pas du tout regardé) donc ils m'ont un peu guidé.

Simulations : Au niveau des simulations, tout est simple : c'est le jury qui prépare l'ordinateur et gère le projecteur donc c'est vraiment bien organisé !

J'ai fait une simulation de la trajectoire de X_t dans un cas particulier des deux méthodes (loi uniforme dans le premier cas ce qui n'était pas un choix judicieux a posteriori et simulation dans le cas $\lambda(x) = x$ dans le second cas car on avait un moyen de simuler une trajectoire par conditionnement (on devait sûrement pouvoir expliciter la loi conditionnelle de T_{n+1} sachant T_n.

J'ai fait une estimation par Monté Carlo de la moyenne de la loi μ dans le premier cas par LGN/TCL et un histogramme empirique pour observer la distribution de la taille des paquets en temps grand (l'objectif étant globalement d'avoir des paquets pas trop gros mais pas trop petits non plus)

Ce que j'aurais pu mieux faire :

- Réfléchir plus au choix de la loi μ du facteur de réduction dans le premier cas
- J'aurais dû proposer un modèle mixte où tout est aléatoire et faire des simulations dessus, ça aurait sûrement été plus intéressant !

Remarques : Le jury était assez impassible : j'avais l'impression que je parlais une autre langue des fois... ça m'a un peu perturbé. Et puis en plein milieu de l'exposé quelqu'un me demande pourquoi la somme de deux v.a qui convergent ps, converge ps ... je me dis ohlala pourquoi le niveau redescend autant... donc ça ne m'a pas trop rassuré même si j'avais l'impression d'avoir fait quelque chose de plutôt bien. Bon finalement j'ai eu une bonne note donc c'était une fausse impression : comme quoi il ne faut jamais se fier à son ressenti lors d'un oral dans lequel on est forcément stressé .. !