

# 阵列信号处理 (一)

主讲人 宋辉

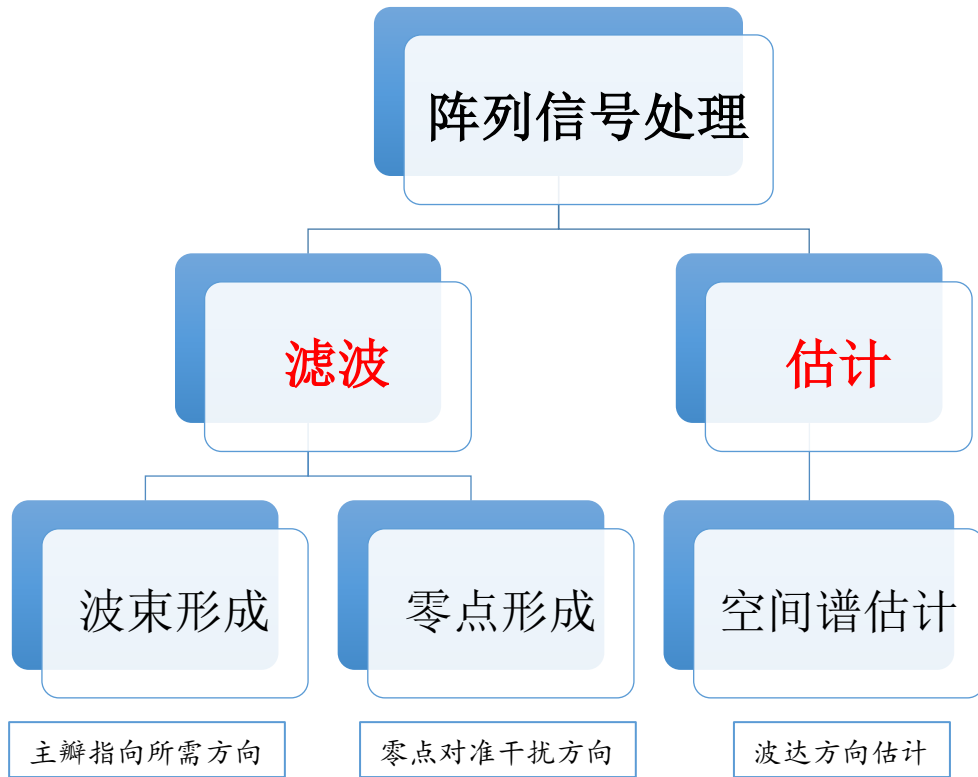
清华大学电子工程系 博士  
滴滴AI Labs 语音技术部



 6.1 阵列信号处理的基本概念

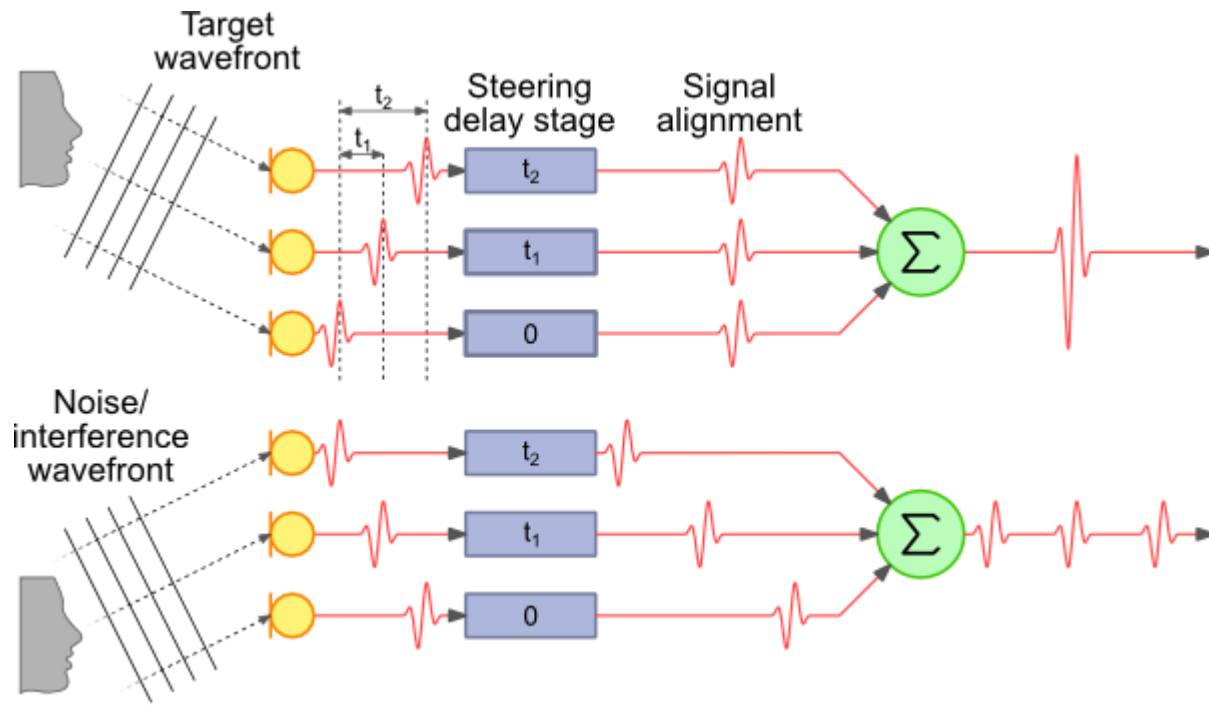
 6.2 几种常见的波束形成方法

 6.3 作业





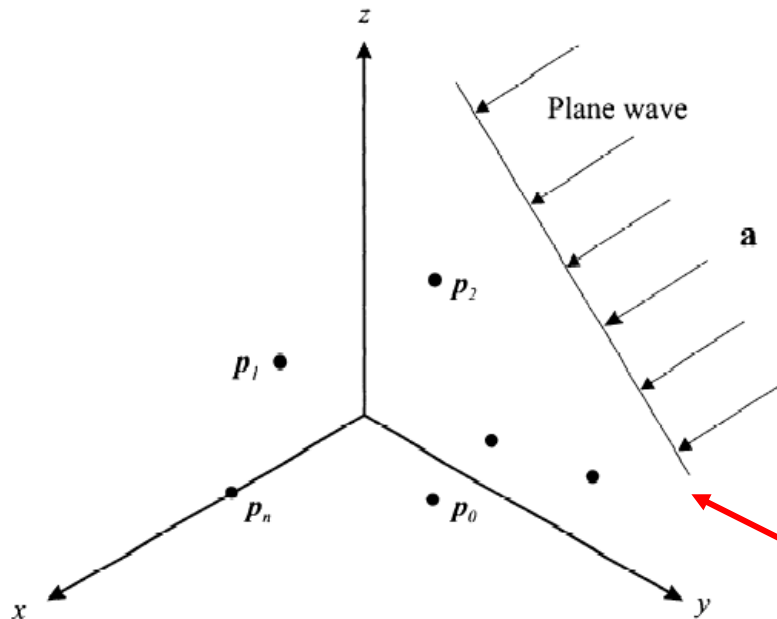
## 什么是波束形成





## 6.1 阵列信号处理的基本概念

$$\begin{bmatrix} x(n, \mathbf{p}_0) \\ x(n, \mathbf{p}_1) \\ \vdots \\ x(n, \mathbf{p}_{N-1}) \end{bmatrix}$$



平面波前

任意配置的 $N$ 阵元阵列，所有阵元为全向阵元



## 6.1 阵列信号处理的基本概念

考虑空间中有  $N$  个阵元的情况，每个阵元的坐标为  $\mathbf{p}_i$ ，则接收信号模型为：

$$\mathbf{x}(n, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} x(n, \mathbf{p}_0) \\ x(n, \mathbf{p}_1) \\ \vdots \\ x(n, \mathbf{p}_{N-1}) \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

阵列输出信号（时域）：

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{h}^T(n-m) \mathbf{x}(m, \mathbf{p}) \quad (6.2)$$

阵列输出信号（频域）：

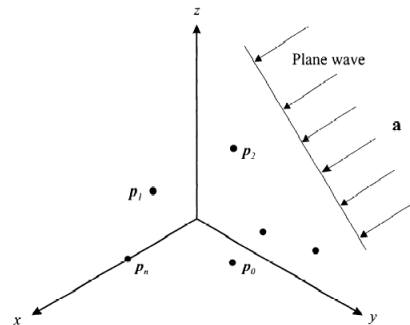
$$Y(\omega) = \mathbf{H}^T(\omega) \mathbf{X}(\omega) \quad (6.3)$$



## 6.1 阵列信号处理的基本概念

考虑声源的平面波入射情况，每个阵元信号的差异体现在时延上：

$$\mathbf{x}(n, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} x(n - \tau_0) \\ x(n - \tau_1) \\ \vdots \\ x(n - \tau_{N-1}) \end{bmatrix}$$



(6.4)

延迟  $\tau$  可以通过直角坐标系的关系求出：

$$\tau_i = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{p}_i}{c}, \quad i = 0, \dots, N-1 \quad (6.5)$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \cos\phi \\ -\sin\theta \sin\phi \\ -\cos\theta \end{bmatrix} \quad (6.6)$$



## 6.1 阵列信号处理的基本概念

于是，等式(6.4)的频域表示为：

$$\mathbf{X}(\omega) = \begin{bmatrix} e^{-j\omega\tau_0} \cdot X(\omega) \\ e^{-j\omega\tau_1} \cdot X(\omega) \\ \vdots \\ e^{-j\omega\tau_{N-1}} \cdot X(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-j\omega\tau_0} \\ e^{-j\omega\tau_1} \\ \vdots \\ e^{-j\omega\tau_{N-1}} \end{bmatrix} X(\omega) \quad (6.7)$$

等式(6.7)还有另外一种写法，由于：

$$\omega\tau_i = \omega \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{p}_i}{c} = \left( \frac{\omega}{c} \mathbf{a} \right)^T \mathbf{p}_i = \mathbf{k}^T \mathbf{p}_i \quad (6.8)$$

则：

$$\mathbf{X}(\omega) = \begin{bmatrix} e^{-j\mathbf{k}^T \mathbf{p}_0} \\ e^{-j\mathbf{k}^T \mathbf{p}_1} \\ \vdots \\ e^{-j\mathbf{k}^T \mathbf{p}_{N-1}} \end{bmatrix} X(\omega) = \mathbf{v}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}) X(\omega) \quad (6.9)$$





## 6.1 阵列信号处理的基本概念

我们已经得到了阵列的输入信号模型，(6.9)式。

将每一路输入信号加入一个时延，使得每一路信号在时间上“对齐”：

$$h_i(n) = \frac{1}{N} \delta(n + \tau_i) \quad (6.10)$$

则：

$$y(n) = x(n)$$

这种处理方式称为**延迟求和波束形成** (*delay-and-sum beamformer / conventional beamformer*)：



## 频率-波数响应

一个重要的问题是，我们需要一个描述阵列对于任意输入信号的响应函数：

$$Y(\omega) = \mathbf{H}^T(\omega)\mathbf{X}(\omega) = \mathbf{H}^T(\omega)\mathbf{v}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k})X(\omega) \quad (6.11)$$

频率-波数响应 (frequency-wavenumber response) :

$$\Upsilon(\omega, \mathbf{k}) = \mathbf{H}^T(\omega)\mathbf{v}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}) \quad (6.12)$$

波束方向图 (beam pattern) : 频率-波数响应在球面  $k = 2\pi/\lambda$  上的取值：

$$B(\omega; \theta, \phi) = \Upsilon(\omega, \mathbf{k})|_{\mathbf{k}=\frac{2\pi}{\lambda}\mathbf{a}} \quad (6.13)$$

对于给定频率  $\omega_c$ ，频率-波数响应可以简化为：

$$\Upsilon(\omega, \mathbf{k}) = \mathbf{H}^T(\omega_c)\mathbf{v}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}) = \mathbf{w}^H \mathbf{v}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}) = [w_0^* \quad w_1^* \quad \dots \quad w_{N-1}^*] \mathbf{v}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}) \quad (6.14)$$



## 举例：均匀线性阵列 (Uniform Linear Array)

举个例子，以ULA为例：

每个阵元的坐标：

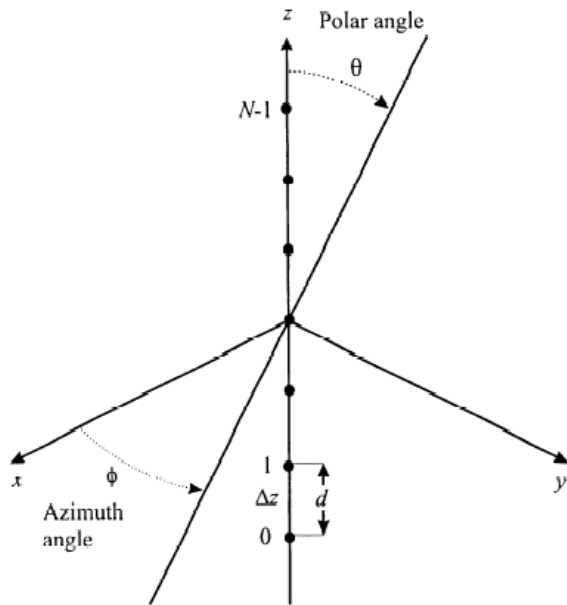
$$p_{z_i} = \left(i - \frac{N-1}{2}\right)d, \quad i = 0, 1, \dots, N-1$$

$$p_{x_i} = p_{y_i} = 0$$

把阵元坐标代入阵列流形矢量的定义，可以得到：

$$\mathbf{v}_{\mathbf{k}}(k_z) = \left[ e^{-j\left(0 - \frac{N-1}{2}\right)k_z d} \quad e^{-j\left(1 - \frac{N-1}{2}\right)k_z d} \quad \dots \quad e^{-j\left(N-1 - \frac{N-1}{2}\right)k_z d} \right]^T \quad (6.15)$$

$$k_z = -\frac{2\pi}{\lambda} \cos\theta \quad (6.16)$$





## 举例：均匀线性阵列 (Uniform Linear Array)

显然，ULA的频率-波数响应可以表示为：

$$Y(\omega, k_z) = \mathbf{w}^H \mathbf{v}_{\mathbf{k}}(k_z) = \sum_{i=0}^{N-1} w_i^* e^{-j\left(i - \frac{N-1}{2}\right)k_z d} \quad (6.17)$$

相应的beam pattern可以表示为：


$$B_{\theta}(\theta) = \mathbf{w}^H \mathbf{v}_{\theta}(\theta) = e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\frac{2\pi d}{\lambda}\cos\theta} \sum_{i=0}^{N-1} w_i^* e^{ji\frac{2\pi d}{\lambda}\cos\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (6.18)$$




## 举例：均匀线性阵列 (Uniform Linear Array)

beam pattern的三种等价表达：

$$B_{\theta}(\theta) = \mathbf{w}^H \mathbf{v}_{\theta}(\theta) = e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\frac{2\pi d}{\lambda}\cos\theta} \sum_{i=0}^{N-1} w_i^* e^{ji\frac{2\pi d}{\lambda}\cos\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (6.18)$$

$$u = \cos\theta$$


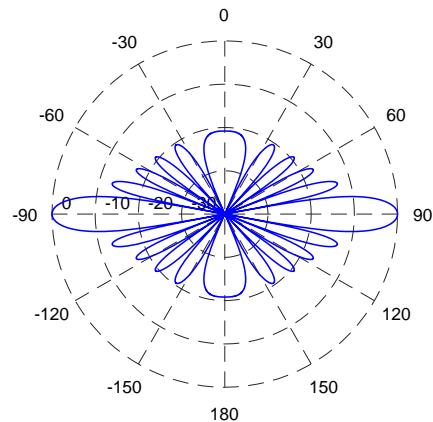
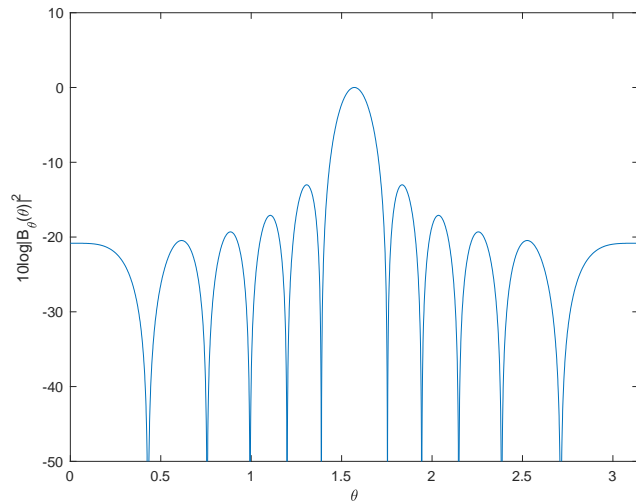
$$B_u(u) = \mathbf{w}^H \mathbf{v}_u(u) = e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\frac{2\pi d}{\lambda}u} \sum_{i=0}^{N-1} w_i^* e^{ji\frac{2\pi d}{\lambda}u}, \quad -1 \leq u \leq 1 \quad (6.19)$$

$$\psi = \frac{2\pi d}{\lambda}u$$


$$B_{\psi}(\psi) = \mathbf{w}^H \mathbf{v}_{\psi}(\psi) = e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\psi} \sum_{i=0}^{N-1} w_i^* e^{ji\psi}, \quad -\frac{2\pi d}{\lambda} \leq \psi \leq \frac{2\pi d}{\lambda} \quad (6.20)$$



## 举例：均匀线性阵列 (Uniform Linear Array)



$$N = 11, \quad w = \frac{1}{N}, \quad d = \frac{\lambda}{2}$$



## 主波束调向 (beam steering)

如果希望调整主波束的指向为  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_T$  :

实际上是调整频率-波数响应函数:

$$Y(\omega, \mathbf{k} - \mathbf{k}_T) \leftarrow Y(\omega, \mathbf{k})$$

阵列流形矢量:

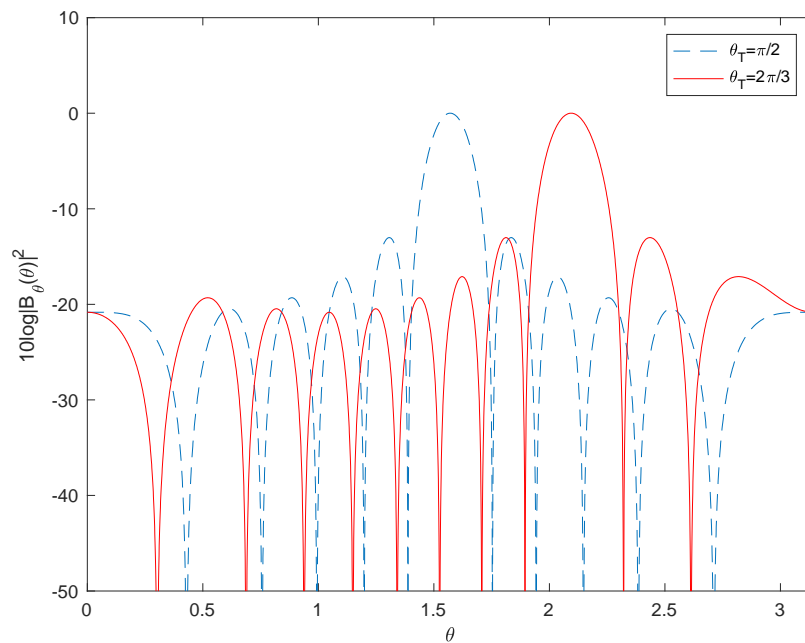
$$\begin{bmatrix} e^{-j(\mathbf{k}-\mathbf{k}_T)^T \mathbf{p}_0} \\ e^{-j(\mathbf{k}-\mathbf{k}_T)^T \mathbf{p}_1} \\ \vdots \\ e^{-j(\mathbf{k}-\mathbf{k}_T)^T \mathbf{p}_{N-1}} \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} e^{-j\mathbf{k}^T \mathbf{p}_0} \\ e^{-j\mathbf{k}^T \mathbf{p}_1} \\ \vdots \\ e^{-j\mathbf{k}^T \mathbf{p}_{N-1}} \end{bmatrix}$$

则需要修正权重向量  $\mathbf{w}$  :

$$\mathbf{w}_T \leftarrow \begin{bmatrix} e^{j\mathbf{k}_T^T \mathbf{p}_0} \\ e^{j\mathbf{k}_T^T \mathbf{p}_1} \\ \vdots \\ e^{j\mathbf{k}_T^T \mathbf{p}_{N-1}} \end{bmatrix} \odot \mathbf{w}$$



## 主波束调向 (beam steering)







## 方向图合成

频率-波数响应与权重向量之间的傅里叶变换关系：

$$B_{\psi}(\psi) = \mathbf{w}^H \mathbf{v}_{\psi}(\psi) = e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\psi} \sum_{i=0}^{N-1} w_i^* e^{ji\psi} = e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\psi} \left( \sum_{i=0}^{N-1} w_i e^{-ji\psi} \right)^* \quad (6.20)$$

所以，我们可以利用时频分析的方法，修正线性阵列波束方向图，尽量减小旁瓣，保持最小的主瓣展宽程度——**谱加权方法**。

加权函数多为实对称函数，为了表述方便，定义：

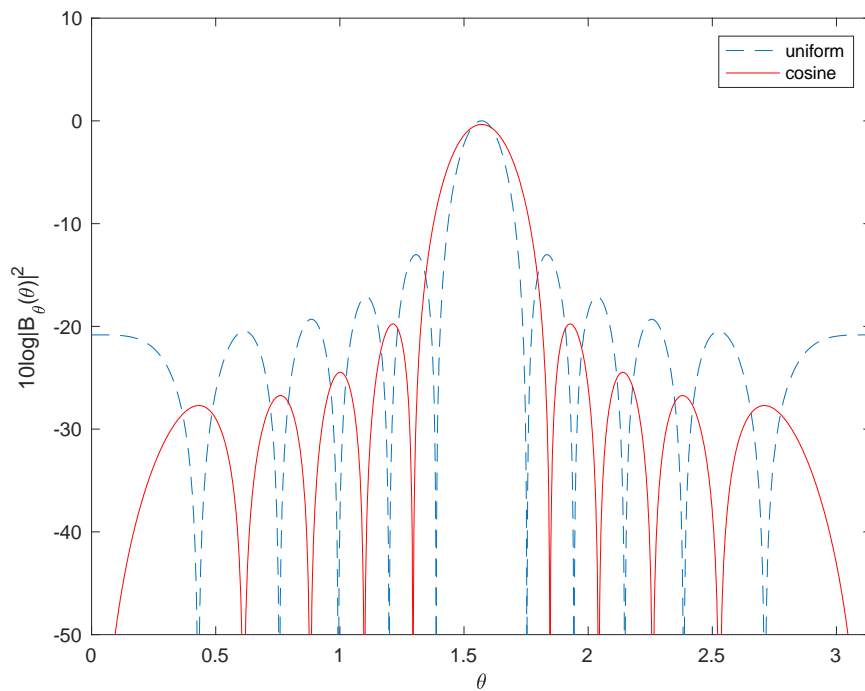
$$\tilde{i} = \left( i - \frac{N-1}{2} \right), \quad i = 0, 1, \dots, N-1$$
$$\tilde{i} = -\frac{N-1}{2}, \dots, \frac{N-1}{2}$$



# 方向图合成

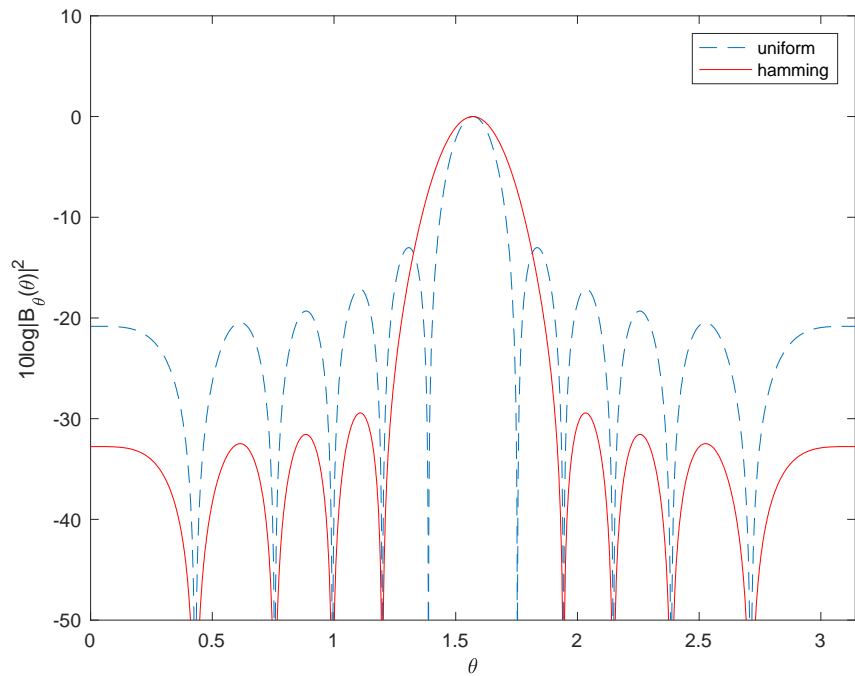
Cosine加权:

$$w_{\tilde{l}} = \sin\left(\frac{\pi}{2N}\right) \cos\left(\pi \frac{\tilde{l}}{N}\right)$$





hamming窗加权:





## 零点调向 (null steering / sidelobe canceller)

有时，我们希望阵列在某个或某些方向上的响应为零（或者响应尽可能小），这些方向称作零点 (null) 方向。

目标：设计权值向量，满足特定的约束条件：

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{w}^H \mathbf{v}_k(\mathbf{k}_T) = 1 \\ \mathbf{w}^H \mathbf{v}_k(\mathbf{k}_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, M_0 \end{array} \right.$$

无畸变响应约束

零点约束

其中：

$$\mathbf{v}_k(\mathbf{k}_i) = \begin{bmatrix} e^{-j\mathbf{k}_i^T \mathbf{p}_0} \\ e^{-j\mathbf{k}_i^T \mathbf{p}_1} \\ \vdots \\ e^{-j\mathbf{k}_i^T \mathbf{p}_{N-1}} \end{bmatrix}$$



## 零点调向

目标：选择权值 $\mathbf{w}$ ，满足零点约束条件，利用最小二乘原则，拟合一个理想方向图 $\mathbf{w}_d$ 。

把全部 $M_0$ 个零点约束条件，写成矩阵的形式——“零阶约束”：

$$\mathbf{C} = [\mathbf{v}_k(\mathbf{k}_1) \quad \mathbf{v}_k(\mathbf{k}_2) \quad \cdots \quad \mathbf{v}_k(\mathbf{k}_{M_0})] \quad (6.21)$$

则可以利用拉格朗日法，解决优化问题：

$$\begin{cases} \min \varepsilon = \|\mathbf{w}_d - \mathbf{w}\|^2 \\ s. t. \mathbf{w}^H \mathbf{C} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (6.22)$$



目标函数：

$$\mathcal{L} = (\mathbf{w}_d - \mathbf{w})^H (\mathbf{w}_d - \mathbf{w}) + \mathbf{w}^H \mathbf{C} \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda}^H \mathbf{C}^H \mathbf{w}, \quad (6.23)$$

对 $\mathbf{w}$ 求导得到：

$$-\mathbf{w}_d^H + \mathbf{w}^H + \boldsymbol{\lambda}^H \mathbf{C}^H = \mathbf{0} \quad (6.24)$$

将约束条件 $\mathbf{w}^H \mathbf{C} = \mathbf{0}$ 代入(6.24)式，求出拉格朗日因子：

$$\boldsymbol{\lambda}^H = \mathbf{w}_d^H \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \quad (6.25)$$

求得最优权值：

$$\mathbf{w}^H = \mathbf{w}_d^H - \boldsymbol{\lambda}^H \mathbf{C}^H = \mathbf{w}_d^H (\mathbf{I}_N - \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H) \quad (6.26)$$

最优权值是从理想权值中减去一个由约束矢量的线性组合形成的一个分量



## 补充：投影矩阵

投影矩阵和正交投影矩阵：

$$\mathbf{P}_C = \mathbf{C}(\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H \quad (6.27)$$

$$\mathbf{P}_C^\perp = \mathbf{I}_N - \mathbf{C}(\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H \quad (6.28)$$

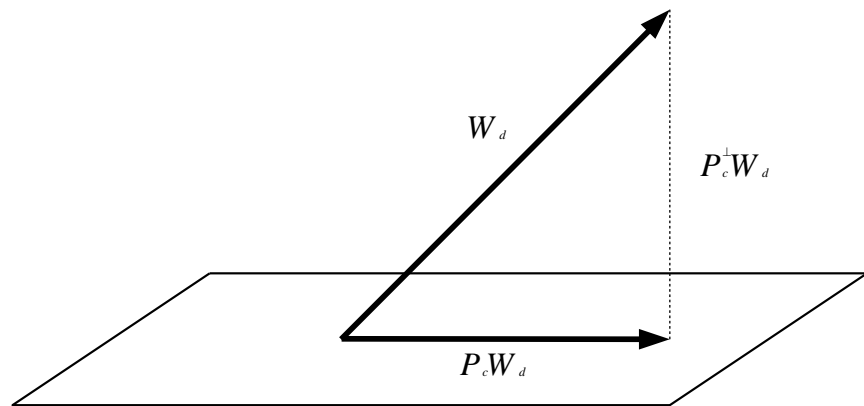
容易验证， $\mathbf{P}_C$  和  $\mathbf{P}_C^\perp$  既是“幂等矩阵”，又是“共轭对称矩阵”，所以它们都属于投影矩阵。

因此：

$$\mathbf{w}^H = \mathbf{w}_d^H \mathbf{P}_C^\perp \quad (6.29)$$



## 补充：投影矩阵

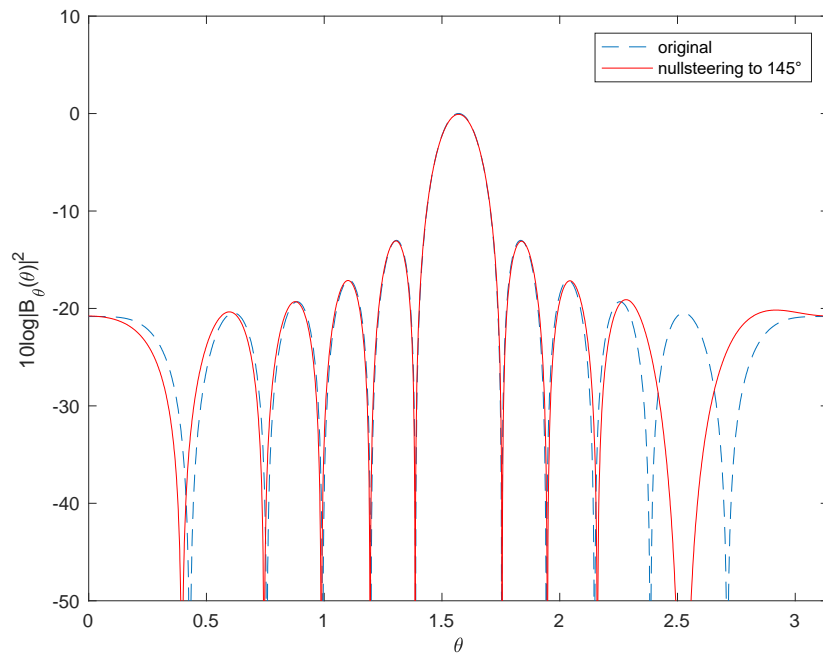


矢量的投影关系图





## 零点调向 (null steering)





## 6.2 几种常见的波束形成方法

Delay-and-sum

Minimum Variance Distortionless Response

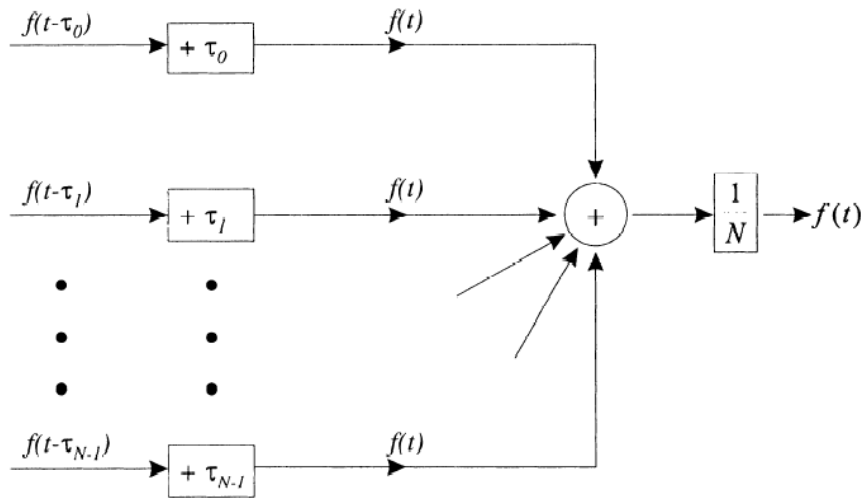
Linearly Constrained Minimum Variance

Generalized Sidelobe Canceller



## Delay-and-sum (DS) Beamformer

$$h_i(n) = \frac{1}{N} \delta(n + \tau_i)$$



延时-求和(常规)波束形成器



## Minimum Variance Distortionless Response (MVDR)

语音信号从已知方向 $\mathbf{k}_s$ 入射，我们推导出最优波束形成器，提供对目标语音的最小方差无偏估计，得到无畸变波束形成器MVDR，或者Capon波束形成器。

考虑“信号+噪声”模型：

快拍

$$\mathbf{X}(\omega) = \mathbf{v}_k(\mathbf{k}_s)X(\omega) + \mathbf{N}(\omega) = \mathbf{X}_s(\omega) + \mathbf{N}(\omega) \quad (6.30)$$

目标：得到 $X(\omega)$ 的无偏、最小方差估计。

方法：寻找最优权值 $\mathbf{w}^H$ ，在满足无畸变约束的前提下，最小化输出功率（方差）：

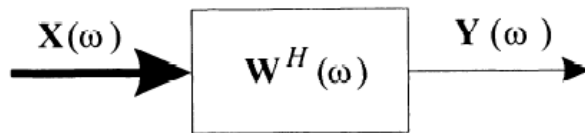
$$\begin{aligned} E|Y(\omega)|^2 &= E|\mathbf{w}^H \mathbf{X}(\omega)|^2 = \mathbf{w}^H E[\mathbf{X}(\omega) \mathbf{X}^H(\omega)] \mathbf{w} \\ &= \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{xx}(\omega) \mathbf{w} \end{aligned} \quad (6.31)$$



## Minimum Variance Distortionless Response (MVDR)

求解如下优化问题：

$$\begin{cases} \min \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{xx}(\omega) \mathbf{w} \\ s. t. \mathbf{w}^H \mathbf{v}_k(\mathbf{k}_s) = 1 \end{cases}$$



matrix processor

capon最优解：

$$\mathbf{w}_c = \frac{\mathbf{R}_{xx}^{-1}(\omega) \mathbf{v}_k(\mathbf{k}_s)}{\mathbf{v}_k^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_{xx}^{-1}(\omega) \mathbf{v}_k(\mathbf{k}_s)} \quad (6.32)$$

可以使用 $\mathbf{R}_{nn}(\omega)$  代替 $\mathbf{R}_{xx}(\omega)$ ：

$$\mathbf{w}_c = \frac{\mathbf{R}_{nn}^{-1}(\omega) \mathbf{v}_k(\mathbf{k}_s)}{\mathbf{v}_k^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_{nn}^{-1}(\omega) \mathbf{v}_k(\mathbf{k}_s)} \quad (6.33)$$



## Minimum Variance Distortionless Response (MVDR)

MVDR是一种自适应波束形成器，而DS是固定波束形成器。

当各个通道的噪声互不相关，并且具有相同功率的时候，MVDR退化成DS。

如果噪声是一个点声源，MVDR会自适应地在噪声方向形成一个零点。

MVDR的性能依赖于对阵列流形矢量 $\mathbf{v}_k(\mathbf{k}_s)$ 和相关矩阵 $\mathbf{R}_{nn}(\omega)$ 的估计。

对MVDR的约束条件进行扩展，可以得到LCMV。

## Linearly Constrained Minimum Variance (LCMV)

考虑将MVDR中的约束条件扩展，来保证波束形成器更加稳健 (Frost Beamformer)：

约束矩阵为 $\mathbf{C}$ ，维数 $N \times M_0$ ，第一列为无畸变约束，即 $\mathbf{g}$ 的第一个元素为1，则约束条件变为：

$$\mathbf{C}^H \mathbf{w} = \mathbf{g} \quad (6.34)$$

目标函数依然是：

$$\min \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{xx}(\omega) \mathbf{w}$$

最优权重：

$$\mathbf{w}_F = \mathbf{R}_{xx}^{-1}(\omega) \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{R}_{xx}^{-1}(\omega) \mathbf{C})^{-1} \mathbf{g} \quad (6.35)$$



## Generalized Sidelobe Canceller (GSC)

LCMV的等效实现方式。从结构上将LCMV的约束优化问题转化为无约束优化问题。

方法：将LCMV的最优权重向量，分解为**非自适应**（固定）权重和**自适应**权重两部分。非自适应权重位于约束子空间中，自适应权重位于约束子空间的正交补空间中。

约束子空间由约束矩阵 $\mathbf{C}$ 的列向量张成， $N \times M_0$ ；

约束子空间的正交补空间 $\mathbf{B}$ ， $N \times (N - M_0)$ ，且满足：

$$\mathbf{C}^H \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (6.36)$$

$$\mathbf{B}^H \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (6.37)$$





## Generalized Sidelobe Canceller (GSC)

相应的，将权重向量 $\mathbf{w}$ 表示为固定分量 $\mathbf{w}_q$ 与自适应分量 $\mathbf{w}_p$ 两部分：

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_q - \mathbf{w}_p \quad (6.38)$$

其中， $\mathbf{w}_q$  表示权重向量 $\mathbf{w}$ 向约束子空间（也就是 $\mathbf{C}$ 张成的空间）的投影：

$$\mathbf{w}_q = \mathbf{P}_C \mathbf{w} = \mathbf{C}(\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H \mathbf{w} = \mathbf{C}(\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{g} \quad (6.39)$$

$\mathbf{w}_p$  表示权重向量 $\mathbf{w}$ 向正交子空间（也就是 $\mathbf{B}$ 张成的空间）的投影：

$$\mathbf{w}_p = \mathbf{P}_B \mathbf{w} = \mathbf{B}(\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H \mathbf{w} = \mathbf{B} \mathbf{w}_a \quad (6.40)$$

于是，我们得到GSC结构：

$$\mathbf{w}_{gsc} = \mathbf{C}(\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{g} - \mathbf{B} \mathbf{w}_a = \mathbf{w}_q - \mathbf{B} \mathbf{w}_a \quad (6.41)$$



## Generalized Sidelobe Canceller (GSC)

GSC的物理意义:

(1)  $\mathbf{w}_q$ 是一个“固定旁瓣对消器”，满足约束条件:

$$\mathbf{C}^H \mathbf{w}_q = \mathbf{C}^H \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{g} = \mathbf{g} \quad (6.42)$$

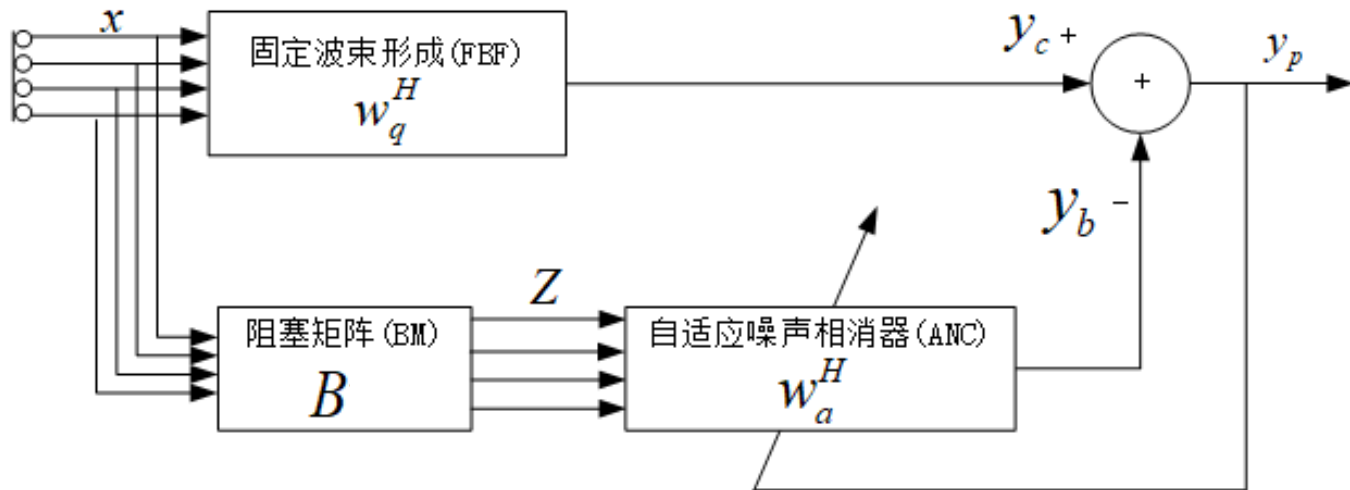
(2) “正交分解”，即 $\mathbf{w}_q \perp \mathbf{B} \mathbf{w}_a$ ：

$$\mathbf{w}_q^H \mathbf{B} \mathbf{w}_a = \mathbf{g}^H (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H \mathbf{B} \mathbf{w}_a = 0 \quad (6.43)$$

广义旁瓣对消器 = “固定旁瓣对消器” + 与之正交的自适应旁瓣对消器



## Generalized Sidelobe Canceller (GSC)





## Generalized Sidelobe Canceller (GSC)

我们当然可以显示的求解 $\mathbf{w}_a$ 的表达形式，它等价于一个无约束最优化问题：

$$\min(\mathbf{w}_q - \mathbf{B}\mathbf{w}_a)^H \mathbf{R}_{xx} (\mathbf{w}_q - \mathbf{B}\mathbf{w}_a) \quad (6.44)$$

留给大家当做练习。



## Generalized Sidelobe Canceller (GSC)

GSC通过“正交分解”的方式，将LCMV约束优化问题，转化为无约束优化问题。

“主路”和“辅路”。目标语音从“主路”通过，尽可能不要泄漏到“辅路”。

GSC的自适应实现方式。



## 本章回顾



### 6.1 阵列信号处理的基本概念



### 6.2 几种常见的波束形成方法



## 6.3 作业

1. 考虑均匀线性阵列，阵元个数  $N = 11$ ，采用均匀加权方式， $w_i = 1/N, i = 0, \dots, N - 1$ ，阵元间距  $d = 0.05m$ ，声速  $c = 340m/s$ ，频率  $f_c = 1700Hz$ ，主波束方向为  $\theta = 90^\circ$ 。

(1) 使用matlab绘制频率-波束响应  $B_\theta(\theta)$  的图像（直角坐标系和极坐标系）。

(2) 将主波束调向至  $\theta = 120^\circ$ ，绘制频率-波束响应  $B_\theta(\theta)$  的图像（直角坐标系和极坐标系）。

(3) 将主波束调向至  $\theta = 180^\circ$ ，绘制频率-波束响应  $B_\theta(\theta)$  的图像（直角坐标系和极坐标系），总结出你所观察到的现象。

(4) 主波束仍为  $\theta = 90^\circ$ ，且在  $\theta = 155^\circ$  处形成一个零点，绘制频率-波束响应  $B_\theta(\theta)$  的图像（直角坐标系和极坐标系）。

(5) 附加题【选做】：分别调节  $N$ 、 $d$ 、 $f_c$ 、以及权重向量  $\mathbf{w}$  使用不同的加权方式，观察波束方向图的特点。

2. 求解GSC最优化问题中  $\mathbf{w}_a$  的闭式解表达式：

$$\min(\mathbf{w}_q - \mathbf{B}\mathbf{w}_a)^H \mathbf{R}_{xx} (\mathbf{w}_q - \mathbf{B}\mathbf{w}_a)$$



## 6.3 作业

3. 假设我们利用  $N$  个阵元得到了  $N$  路观测信号  $y_i(t), i = 0, 1, \dots, N - 1$ , 每一路信号中具有一个相同的信号分量  $s(t)$  和一个随机噪声分量  $n_i(t)$ 。噪声分量具有零均值, 且相互统计独立。信噪比定义为信号分量的能量与噪声分量的方差之比。

请比较, 对  $N$  路观测信号做算术平均以后得到的信噪比, 和单个阵元的信噪比之间的关系。



# 感谢聆听！

Thanks for Listening

