数学模型：**问题的数学描述+变量的关系式+约束条件+求解算法**

平面几何问题的抽象与建模

几何关系=数量关系+位置关系（平行、相交、异面、垂直......）

HR：

低的境界：传统几何的演绎证明体系（辅助线-定理-公理体系）

中的境界：基于向量计算的计算化几何（把数量关系和位置关系都抽象为向量的运算进行）

高的境界：基于解析几何和复数的代数化几何（利用曲线方程、坐标系、复数等把几何问题抽象为代数问题，用函数和方程的视角解决几何中的数量关系和位置关系）

- 三角形中的角度关系
- 正弦定理、余弦定理、勾股定理......
- 圆的切割线、弦长、垂径定理、共圆......
- 椭圆、双曲线和抛物线的圆锥曲线特征......
- 离心率、光学特性......

向量可以有*多维*，引入向量的目的：为了通过代数的方法解决几何问题

$$x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$$

N 维的欧几里得空间

向量的基本运算：

$$\begin{gathered}
x = [x_1, x_2, \ldots, x_n] \\
x + y = [x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n] \\
ax = [ax_1, ax_2, \ldots, ax_n] \\
x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \\
|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \\
\cos\theta = \frac{x \cdot y}{|x| \cdot |y|} \\
|x \times y| = |x||y| \sin\theta
\end{gathered}$$

N 维空间内，两个向量的夹角可以衡量两个向量的相似度。

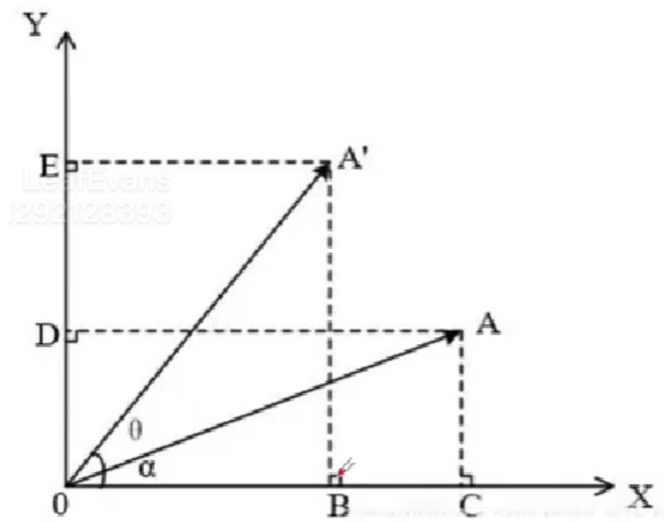
使用解析几何的思想描述模型

解析几何的本质：在坐标系下用方程描述曲线

直角坐标方程、极坐标方程、参数方程......

本质式利用坐标的方法描述关系

坐标系的变换（旋转坐标）：

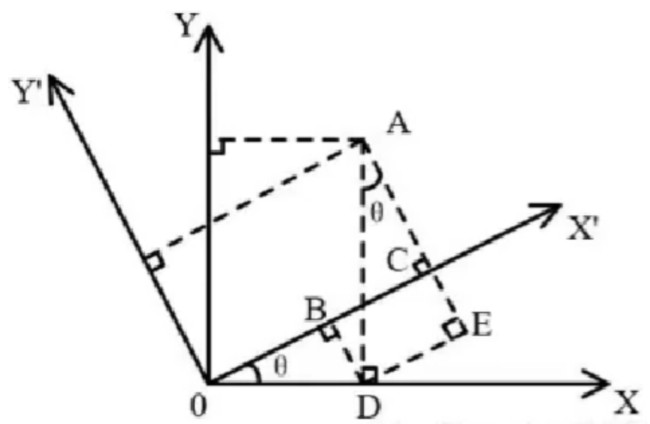


$$
\begin{aligned}
x' &= r\cos(\alpha+\theta) \\
&= r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta \\
&= OC\cos\theta - OD\sin\theta \\
&= x\cos\theta - y\sin\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
y' &= r\sin(\alpha+\theta) \\
&= r\sin\alpha\cos\theta + r\cos\alpha\sin\theta \\
&= OD\cos\theta + OC\sin\theta \\
&= y\cos\theta + x\sin\theta
\end{aligned}
$$

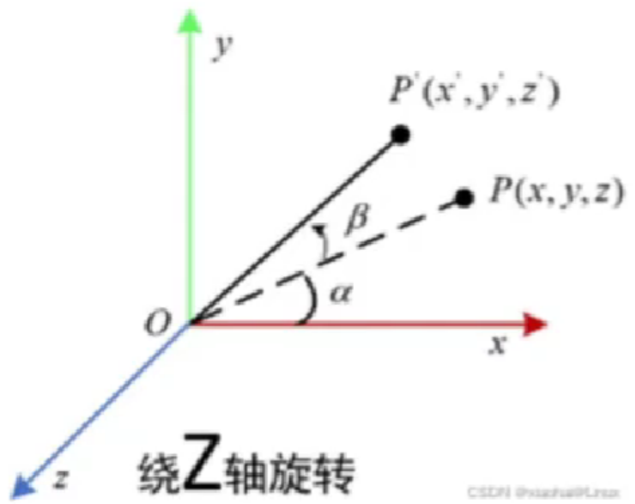
坐标系的变换（旋转坐标轴）：



$$
\begin{aligned}
x' &= OB + BC \\
&= OD\cos\theta + AD\sin\theta \\
&= x\cos\theta + y\sin\theta
\end{aligned}
\qquad
\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}
$$

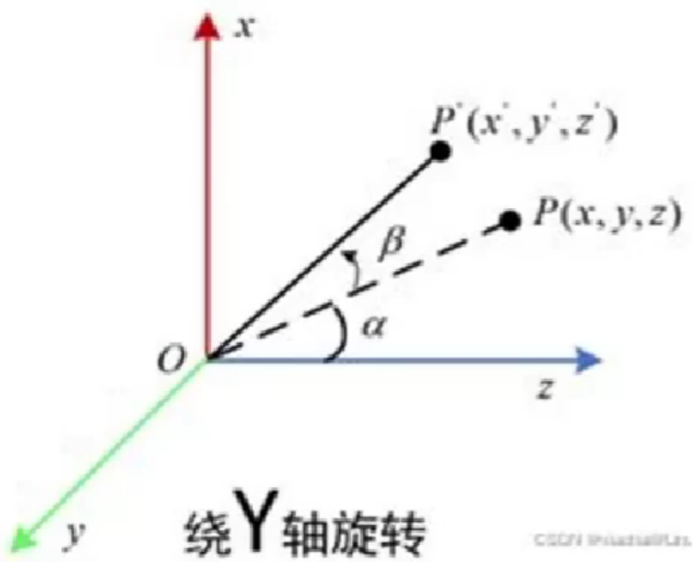
$$
\begin{aligned}
y' &= AE - CE \\
&= AD\cos\theta - OD\sin\theta \\
&= y\cos\theta - x\sin\theta
\end{aligned}
$$

三维坐标系（绕 Z 轴）：



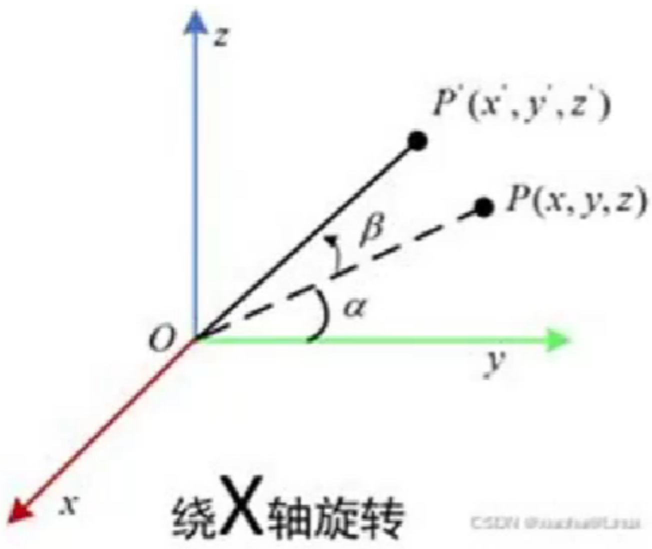
$$
R_Z = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}
$$

三维坐标系（绕 Y 轴）：



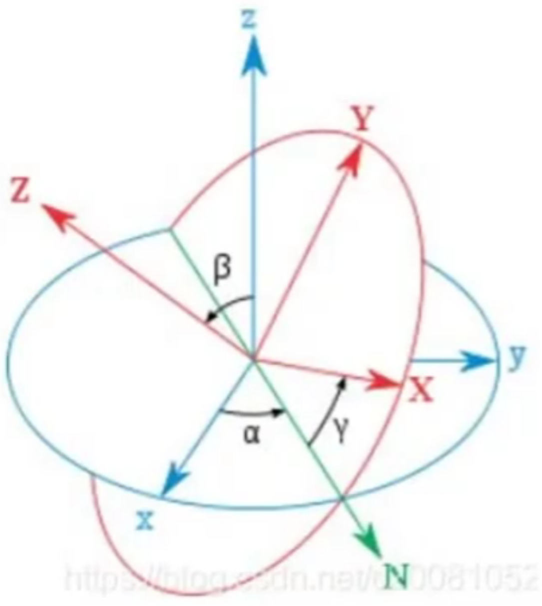
$$
R_Y = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}
$$

三维坐标系（绕 X 轴）：



$$R_X = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

三维坐标系（绕 O 点）：



欧拉角是用三个旋转角度 α, β, γ 来表示旋转的。如上，蓝色坐标为起始坐标系，红色为最终旋转完成的坐标系。整个旋转分为三个步骤：

- 将坐标系绕 z 轴旋转 α 角
- 将旋转后坐标绕**自己本身的** x 轴（也就是图中的 N 轴）旋转 β 角
- 将旋转后的坐标系绕**自己本身的** z 轴旋转 γ 角

由于绕不同的旋转轴所得到的欧拉角是不同的，所以欧拉角在使用的时候必须要先指明旋转的顺序，这里使用的是 "zxz" 的顺序。

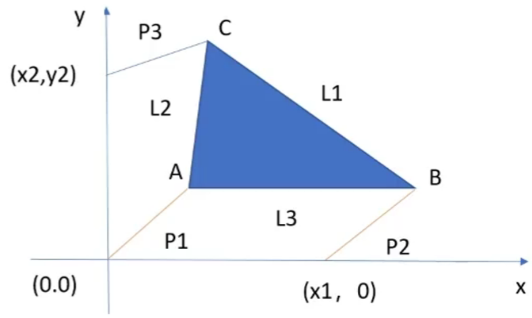
欧拉角表示的旋转转换成旋转矩阵就是：

$$R_z(\alpha)R_x(\beta)R_z(\gamma)$$

这个旋转矩阵就是上面单独旋转轴的那些。

案例

- 图A1给出的是平面型Stewart平台示意图，它模拟一个操作装置，其中包括一个三角形（△ABC）平台，平台位于一个由3个支柱（p1 ,p2和p3）控制的固定平面中。图中的三角形（△ABC）表示平面型Stewart平台，它的尺寸由3个长度L1，L2确定L3。平台的位置由3个支柱的可变长度的3个参数p1, p2, p3所控制。



需要解决的问题是，在给定一组参数p1, p2, p3的值后，计算出A点的坐标 (x, y) 和角度θ的值（θ 是L3与x轴的夹角）。请你完成：

- 1.数学建模。参数L1, L2, L3, x1, x2, y2是固定常数，在给定一组参数p1, p2, p3的值后，判断能否得到Stewart平台的一个位置，即能否得到A点坐标（x , y）和角度 θ 的值。如果能，则称它为Stewart平台的一个位姿。但位姿并不一定是唯一的，如何让你的模型能够计算出一组固定参数下的全部位姿。
- 2.模型检验。假设有如下参数: x1=5, (x2, y2)=(0,6)， L1=L3=3, L2=3, p1=p2=5, p3=3, 请根据你的模型，计算出Stewart平台的全部位姿，即计算出每个Stewart平台中的A点坐标（x , y）和角度 θ 的值。

可以列出一下方程组：

$$\cos\beta = \frac{L_2^2 + L_1^2 - L_3^2}{2L_2L_3}$$

$$\begin{cases} x_B = x + L_3\cos\theta \\ y_B = y + L_3\sin\theta \end{cases}$$

$$p_2^2 = (x + L_3\cos\theta - x_1)^2 + (y + L_3\sin\theta)^2$$

$$\begin{cases} x_c = x + L_2\cos(\beta+\theta) \\ y_c = y + L_2\sin(\beta+\theta) \end{cases}$$

$$p_3^2 = (x + L_2\cos(\beta+\theta) - x_2)^2 + (y + L_2\sin(\beta+\theta) - y_2)^2$$

$$p_1^2 = x^2 + y^2$$

简化:

$$\begin{cases} \cos\beta = \dfrac{L_2^2 + L_1^2 - L_3^2}{2L_2L_3} \\ p_2^2 = (x + L_3\cos\theta - x_1)^2 + (y + L_3\sin\theta)^2 \\ \\ p_3^2 = (x + L_2\cos(\beta+\theta) - x_2)^2 + (y + L_2\sin(\beta+\theta) - y_2)^2 \\ \\ p_1^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

带入条件后:

$$\beta = \frac{\pi}{3}$$

$$(x + 3\cos\theta - 5)^2 + (y + 3\sin\theta)^2 = 25$$

$$(x + 3\cos(\theta+\beta))^2 + (y + 3\sin(\theta+\beta) - 6)^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

这是一个超越方程组，无法求出精确解。

`numpy` 简单使用:

```python
# a \cdot b
import numpy as np

a = np.array([[1, 2, 3, 4, 5], [6, 7, 8, 9, 10]])
print(len(a))
print(a.shape)
a = np.array([1, 2, 3])
print(a)
print(len(a))
print(-1 * a)
b = a
```

```python
print(a * b)
print(a.dot(b))
print(a @ b)
```

```
2
(2, 5)
[1 2 3]
3
[-1 -2 -3]
[1 4 9]
14
14
```

```python
# a \times b
import numpy as np

a = np.array([-1, -1, 1])
b = np.array([2, 5, 0])
c = np.cross(a, b)
print(c)
```

```
[-5  2 -3]
```