מודלים חישוביים - הרצאה 8

שרון מלטר, אתגר 17

30 באפריל 2024

בשיעור הקודם דיברנו על כך שכל שפה שעוסקת במ"ט שמקיימת תכונה כלשהי איננה כריעה. כמו כן דיברנו גם על הדרכים להוכיח ששפה כריעה או לא כריעה.

1 דוגמאות להוכחת התקבלות של שפה

1.1

תהי השפה

$$L = \{< M, w_1, w_2 >\}$$

כך ש- M_1 מקבלת לפחות אחת מהמילים w_1, w_2. לפי משפט רייס קל לראות שמדובר בשפה שאיננה כריעה. נבדוק האם היא מתקבלת;

טענה: L ניתנת לקבלה.
נוכיח בעזרת מ"ט N שמקבלת את L.

בניית N: - גירסא 1 בהינתן קלט $< M, w_1, w_2 >$ נריץ את M על w_1 ואז נריץ את M על w_2.
זוהי גישה שגויה, מכיוון שאז אם w_1 מכניסה את M ללולאה אינסופית, לעולם לא נדע אם w_2 מתקבלת.

בניית N: - גירסא 2 בהינתן קלט $< M, w_1, w_2 >$ נריץ את M על w_1 ועל w_2 ביחד, באמצעות שני סרטים.
ההוכחה $L = L(N)$ טכנית וטריוויאלית :)

1.2

L שפת המילים $< M >$ שמקבלות מילה כלשהי מאורך קטן-שווה ל- $1,000$.
(כבר הוכח ששפה זו מתקבלת בסיכום קודם)

2 סגירות שפות כריעות ומתקבלות

שפות כריעות סגורות תחת משלים, חיתוך, איחוד, חיתוך, שרשור וחיסור.

מה עם שפות ניתנות לקבלה?
עוד לא הצלחנו להכריע אם שפות ניתנות לקבלה סגורות תחת המשלים.
בחיתוך ניתן פשוט להריץ מילה על שתי מכונות ולראות אם היא מתקבלת בשתיהן.
באיחוד ניתן שוב להריץ בשתיהן ולראות אם המילה מתקבלת בלפחות אחת מהמכונות.

3 מ"ט לא דטרמיניסטית

תזכורת: אין דבר כזה מ"ט לא דטרמיניסטית **מכריעה** יש רק מושג של "מקבלת".
האם כל שפה שניתנת לקבלה ע"י מ"ט לא דטרמיניסטית היא ניתנת לקבלה?
כן :)

רעיון:
בה"כ ניתן להניח שלמכונת טיורינג לא דטרמיניסטית כאשר יש התפצלות היא מדרגה קטנה־שווה ל־ 2.
(קל להמיר כל מ"ט לא דטרמיניסטית לכזו המקיימת את התכונה. ניתן פשוט להוסיף תתי־התפצלויות, כפי שעשינו באס"ד לא־דטרמיניסטי)
נבנה מ"ט דטרמיניסטית שבהינתן מ"ט לא דטרמיניסטית M ומחרוזת $y \in \{0,1\}^*$ וקלט w מסמלצת את ריצת M על w במסלול y כאשר $'1'$ מסמל מעבר ימינה במסלול (שניתן לציירו כעץ) ו־ $'0'$ מסמל מעבר שמאלה.
נסמן את שפת המ"ט הלא דטרמיניסטית ב־ L.

<u>טענה:</u> L ניתנת לקבלה.

<u>הוכחה:</u>
נבנה מ"ט N שמקבלת את L.

<u>בניית N:</u> בהינתן קלט $< M, w >$;

- $i \leftarrow 0$
- עבור על כל המילים y מאורך i בא"ב $\{0,1\}$ סמלץ את M על w במסלול y ועצור בסוף המילה. אם המכונה עצרה, נקבל.

4 אילו שפות לא ניתן לקבל?

<u>טענה:</u> אם L, $\overline{L}$ ניתנות לקבלה אז L כריעה.

בעזרת הקונטרפוזיטיב, נסיק שניתן לנסח את המשפט גם כך:
לכל שפה L אם L לא כריעה ו־ $\overline{L}$ ניתנת לקבל אז L לא ניתנת לקבלה.
מסקנה המתקבלת מניסוח זה היא שקבלה אינה סגורה תחת משלים.

<u>הוכחה:</u>
תהי M מ"ט שמקבלת את L ותהי M' שמקבלת את $\overline{L}$. נבנה מ"ט N שמכריעה את L.
כלומר, צ.ל

1. $w \in L \Leftarrow$ N מקבלת את w
2. $w \notin L \Leftarrow$ N דוחה את w

<u>בנייה:</u> לכל קלט w, נריץ אותו על M ועל M' ביחד (באמצעות שני סרטים). אם $w \in L$ אזי הוא ייעצר ויתקבל ב־ M ואז נקבל ואחרת הוא ייעצר ויתקבל ב־ M' ואז נדחה אותו.
בשני המקרים לא נגיע ללולאה אינסופית.
הוכחת הנכונות הינה טכנית ופשוטה :)

4.1 דוגמאות לשימוש במשפט

4.1.1

$$NOT-ACCEPT = \overline{A}CCEPT$$

או שפת המילים $< M, w >$ כך ש־ M מקבלת את w.
ראינו ש־ $ACCEPT$ לא כריעה ולכן $NOT-ACCEPT$ לא כריעה. ראינו ש־ $ACCEPT = \overline{N}OT-ACCEPT$ ניתנת לקבלה ולכן $NOT-ACCEPT$ לא ניתנת לקבלה.

4.1.2

<u>טענה:</u> השפה $EMPTY$ לא ניתנת לקבלה.

<u>הוכחה:</u>
אנו יודעים ש־ $EMPTY$ לא כריעה וראינו ש־ $NOT-EMPTY = \overline{E}MPTY$ ניתנת לקבלה ולכן $EMPTY$ לא

ניתנת לקבלה.

הערה: אם L שפה שבה גם L וגם $\overline{L}$ לא מתקבלות, לא נוכל להשתמש במשפט.

5 ALL

תהי ALL שפת כל הקידודים $<M>$ של מ"ט M עבורה $L(M)=\Sigma^*$. מאחר ש־ ALL לא כריעה (משפט רייס) לא קשה לראות ש־ $\overline{ALL}$ ניתנת לקבלה. למשל ע"י $NOT-ACCEPT \leqslant_m \overline{ALL}$

<u>טענה:</u> ALL לא ניתנת לקבלה.

<u>טענה נוספת:</u> $NOT-ACCEPT \leqslant_m \overline{ALL}$

כמובן שנרצה למצוא פונקציה $R: NOT-ACCEPT \leftarrow ALL$
$.R(<M,w>)=<M'>$
כך ש־
$L(M')=\Sigma^* \Leftrightarrow$ M לא תקבל את w.

טעות נפוצה של סטודנטים:
$R(<M,w>)=M'(y)$
$const\ a = <M>$
$const\ b = w$
הרץ את a על b.
מהי הבעיה? ־ ניתן להיכנס ללולאה אינסופית במהלך ההרצה.

הדרך הנכונה:
$R(<M,w>)=M'(y)$
$const\ a = <M>$
$const\ b = w$
הרץ a על b ואם למשך $|y|$ צעדים אם לא קיבלה אז קבל ואחרת דחה.

<u>הוכחה:</u>
כאשר M *לא מקבלת* את w**:** M לא מקבלת את w כאשר M' מקבלת קלט y כיוון ש־ M לא מקבלת את w. אז ההרצה המבוקרת למשך $|y|$ צעדים לא תסתיים בקבלה ולכן $L(M')=\Sigma^*$ כנדרש.

כאשר M *מקבלת* את w**:** נסמן ב־ i^* את מספר הצעדים של M על w. על y מאורך גדול־שווה i^* כאשר M רצה על w למשך $|y|$, אז הריצה המבוקרת מסתיימת בקבלה. בתנאים כאלה אז M' דוחה ולכן קיים y ש־ M' דוחה, מה שאומר ש־ $L(M')\neq\Sigma^*$.

6 שימוש במסלולי חישוב

מסלול חישוב הוא סדרה של קונפיגיורציות. קונפיגיורציה היא שלישייה המורכבת מ־

- א"ב של המכונה
- מיקום הראש
- תוכן הפלט עד למקום שבו יש שורת רווחים

עבור מ"ט M וקלט w <u>נגדיר:</u>
$A_{M,w}$ היא קבוצת המחרוזות y שהן קידוד של מסלול חישוב של M על w שעוצר ומקבל.
$B_{M,w}=\overline{A}_{M,w}$ היא קבוצת המחרוזות y שהן קידוד של מסלול חישוב של M על w שעוצר ודוחה.
כמובן שאם M מקבלת את w אז $B_{M,w}\neq\Sigma^*$ ואחרת $B_{M,w}=\Sigma^*$.

טענה: לכל w, M השפה $A_{M,w}$ היא כריעה וגם $B_{M,w}$ כריעה.
$R(<M, w>) = \text{M}$ מכריעה את $B_{M,w}$.

7 כריעות עבור אס"ד, אסל"ד ודח"ה

כריעה

✓ $ACCEPT_{DFA} = \{<M, w>: w$ מקבלת את M ,אס"ד $M\}$ פשוט מריצים את האס"ד

✓ $EMPTY_{DFA} = \{<M>: L(M) = \varnothing$ אס"ד ו- $M\}$ בתרגיל, מחפשים מצב מקבל בDFS

✓ $ALL_{DFA} = \{<M>: L(M) = \Sigma^*$,אס"ד $M\}$ הופכים מצבים ובודקים $EMPTY_{DFA}$

✓ $ACCEPT_{NDFA} = \{<M, w>: w$ מקבלת את M ,אסל"ד $M\}$ הופכים לאס"ד

✓ $EMPTY_{NDFA} = \{<M>: L(M) = \varnothing$,אסל"ד $M\}$ הופכים לאס"ד

✓ $ALL_{NDFA} = \{<M>: L(M) = \Sigma^*$,אסל"ד $M\}$ הופכים לאס"ד

✓ $ACCEPT_{CFG} = \{<G, w>: w \in L(G)$,דח"ה $G\}$ בתרגיל, אלגוריתם שבודק שמילה ניתנת לגזירה. זמן הריצה שלו אקספוננציאלי. ישנם היום אלגוריתמים יעילים מאד שעושים זאת. תראו בקומפיילרים ובעיבוד שפות טבעיות.

✓ $EMPTY_{CFG} = \{<G>: L(G) = \varnothing$,דח"ה $G\}$ מסמנים טרמינלים ואז משתנים שגוזרים רק דברים מסומנים...

✗ $ALL_{CFG} = \{<G>: L(G) = \Sigma^*$,דח"ה $G\}$ זה מאד מאד מפתיע!

8 עוד על מסלולי חישוב

נחדד את ההגדרה ממקודם;
מסלול חישוב הוא סדרה של קונפיגיורציות $C_1, C_2, ..., C_t$ ונקודד אותו כך:

$$C_1 \# C_2^R \# C_3 \# C_4^R ... \# C_t$$

$B_{M,w}$ היא איחוד של שפות (ונראה שכל אחת מהן חסרת הקשר)
אנו טוענים שכל y ב־ $B_{M,w}$ הוא אחד מהמקרים הבאים:

1. y מקודד לא תקין
2. קונפיגיורציה C_1 לא מהצורה ϵ, q_0, w
3. קונפיגיורציה C_t אינה מקבלת (המצב הוא לא $qaccept$)
4. קיים i כך ש־ C_{i+1}

כעת סיימנו את הפרק של קבלה וכריעות, הפרק הבא יהיה יעילות. נמדוד יעילות בזמן ונראה שבנושא הזה עוד אין תשובות לכל השאלות.