מודלים חישוביים ־ הרצאה 5

שרון מלטר, אתגר 17

3 ביוני 2024

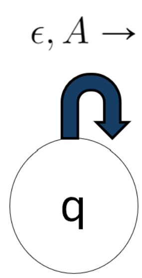
1 L מתקבלת ע"י מחסנית $\iff$ L חסרת הקשר

כעת נוכיח את המשפט שהזכרנו בהרצאה הקודמת (ושמוזכר גם בכותרת)

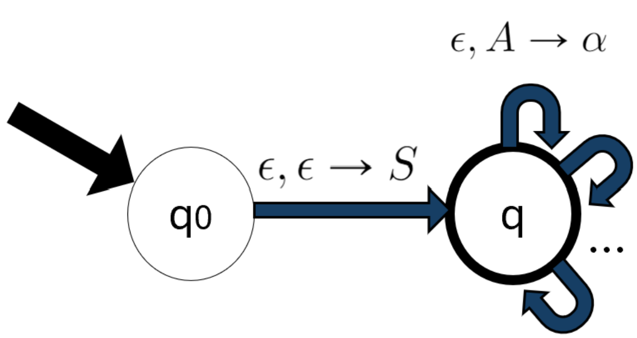
1.1 כיוון ראשון

יהי דקדוק חסר הקשר G. נוכיח שקיים א"מ M כך ש־ $L(M) = L(G)$

עד כה לא הרשנו לאף מעבר של א"מ לדחוף יותר משני תווים למחסנית. מעכשיו נרשה (אפשר לעשות זאת בעזרת מספר מצבי ביניים, כך שכל אחד מהם מלבד אחד מוסיף תו מסוים ללא קריאה מהמילה, עם ϵ, ϵ)
רעיון: M יחקה גזירה בדקדוק G וינחש באופן לא דטרמיניסטי איך כדאי לגזור כדי להצליח לגזור את המילה הנכונה כקלט.
נבנה זאת באופן לא מאוד פורמלי :) ־
א"ב המחסנית הינו $\Gamma = V$, לכל חוק $A \to \alpha$ ודקדוק נוסיף מעבר (מעבר גזירה) מהמצב q לעצמו כך;



האוטומט M המלא ייראה יכלול שני מצבים בלבד וייראה כך: אנו טוענים ש־ $L(M) = L(G)$.

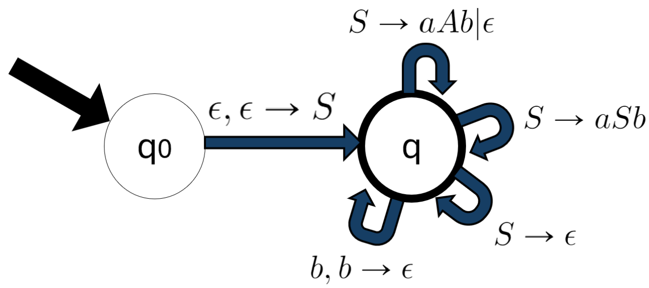


נוכיח זאת עבור דוגמה, ובעזרתה "נשתכנע" שניתן לכתוב הוכחה. ליתר דיוק, נשתכנע בכך שכל גזריה בדקדוק ניתן לחקות ע"י מסלול חישוב באוטומט ושכל מסלול חישוב באוטומט ניתן לחכות ע"י גזירה.
הדוגמה: יהי הדח"ה G;

$$S \to aSb$$

$$S \to aAb|\epsilon$$

כך שהא"מ M ייראה כך;



קל לראות שאכן כל מילה שמתקבלת ב־ M היא שפת הדקדוק G וכל מילה משפת הדקדוק של G מתקבלת ב־ M.

1.2 כיוון שני

ישנם שני קשיים מרכזיים בהמרה מא"מ לדח"ה־ דח"ה לא "חושב" משמאל לימין ולדח"ה אין זיכרון (אין לו מחסנית)
כדי להקל על עצמנו, נשנה מעט את מבנה הא"מ:
אם ישנם מספר מצבים מקבלים, נהפוך את כולם ללא־מקבלים, אך נוסיף מעבר אפסילון מהם למצב מקבל נוסף יחיד. כמו כן, בכל מעבר יבוצע $push$ או pop (או כלום) אך לא שניהם. ניתן ליישם זאת בעזרת פיצול של מעברים עם $push$ ו־ pop לשני מעברים שונים.

לאחר שינויים אלה נקבל ששפת המחסנית היא שפת המילים שמגיעות לאותו מצב מקבל, שנסמנו q_0.
הרעיון: נבנה דקדוק G כך שלכל $p, q \in Q$, לאו דווקא שונים, יהיה נונטרמינל $A_{p,q}$, כך שישנם $|Q|^2$ נונטרמינלים.

נעשה זאת בעזרת רשימה של חוקים שיכפו את השוויון הבא:

$$\left\{w \in \Sigma^* : A_{p,q} \overset{*}{\Rightarrow} w\right\} = L_{p,q}$$

כלומר, ששפת המילים שמתקבלות במחסנית היא שפת המילים שניתן ליצור מהדקדוק.
איך ניצור את החוקים?
קודם כל, לא נקלקל. בכל חוק נשאל את עצמנו האם הוספנו לשפת הדקדוק מילה שלא צריכה להיות בה. לאחר מכן נשאל האם נשארו מילים שכן צריכות להיות בשפה.

יהיו לנו חוקים מהצורה הבאה:

- $p \in Q$ נוסיף $A_{p,p} \to \epsilon$ כלומר, פעולה בדקדוק שלא עושה כלום. (כמובן שהיא פשוט מאפשרת למילים ולתתי־מילים משפת הדקדוק להסתיים, כך שיהיה ניתן לקבל את המילה או להמשיך לשאר התווים שלה)
- לכל שלושה מצבים $p, q, r \in Q$ נוסיף $A_{p,q} \to A_{p,r}A_{r,q}$

למה זה טוב?
הוסבר מדוע אנו צריכים את החוק הראשון, ולשני יש גם סיבה פשוטה־ כאשר מילה עוברת באוטומט המחסנית מהמצב p ל־ q (לאו דווקא ישירות) ייתכן שהיא תעשה זאת בעזרת מעבר במצב r. לכן חוק זה הוא בעצם שרשור החוקים $A_{p,r}$ ו־ $A_{r,q}$

נוכיח באינדוקציה שכל חוק שנוסיף לא מאפשר למילים שלא מתקבלות במחסנית להיווצר בדקדוק.

<u>בסיס:</u> כאשר אין חוקים, שפת הדקדוק לא יכולה להכיל מילים שלא מתקבלות ע"י המחסנית.

<u>צעד האינדוקציה:</u>
נניח שהחוקים שיש לנו עד עכשיו מקיימים את הטענה ונוכיח אותה גם לאחר הוספת חוקים עבור המצבים p, q וכל מצב אחר.
מקרה א': קיים רגע במסלול חישוב שמתחיל ב־ p ונגמר ב־ q שבו המחסנית ריקה. נניח שהמצב בו נמצאים ברגע זה הוא r. לפי הנחת האינדוקציה החוקים $A_{p,r}$ $A_{r,q}$ אינם יוצרים נזק, והם מרכיבים את מסלול החישוב הנוכחי. (חשוב שההמחסנית ריקה ב־ r מכיוון שאז המסלול ל־ q זהה למסלול כאשר מתחילים ב־ r) כמו כן לפי הנחת האינדוקציה, אם מסלול החישוב של המילה לא נגמר ב־ q_0 היא לא שייכת לשפת הדקדוק. אזי בסך הכל במקרה זה הטענה נכונה.

מקרה ב': בכל מסלול מ־ p ל־ q אין מצב שבו המחסנית ריקה (מלבד בהתחלה ובסוף, לפי קונבנציית אוטומט מחסנית) במצבים כאלה האיבר הראשון שנוסף למחסנית הוצא במעבר האחרון. נסתכל על מסלול חישוב מסוים שמתחיל ב־ p ונגמר ב־ q. אם המילה שעוברת במסלול החישוב מתקבלת, (נסמנה w) היא אזי התו הראשון שלה, σ_1 צריך להכניס איבר δ והתו האחרון, σ_2 צריך להוציא איבר זה. כלומר $w = \sigma_1 w' \sigma_2$ כאשר $w' \in L_{r,s}$, כאשר r, s הם שני מצבים ממסלול החישוב שבהם גובה המחסנית זהה, כך ש־ r נמצא בקטע העלייה הראשונה בגובה המחסנית ו־ s בקטע הירידה האחרונה. כמו כן הם שני המצבים הרחוקים ביותר זה מזה שמקיימים זאת. (במילים אחרות, הם המצב הראשון שבו גובה המחסנית גדל אחרי קריאת התו הראשון והמצב הלפני אחרון שבו גובה המחסנית קטן)
נוסיף חוק: $A_{p,q} \to \sigma_1 A_{r,s} \sigma_2$
בעזרת חוק זה ניתן יהיה ליצור את המילה $\sigma_1 w' \sigma_2$, כלומר את w, בדקדוק. כמו כן לפי הנחת האינדוקציה אנו יודעים שהחוק $A_{r,s}$ תקין.
בסך הכל קיבלנו שגם במקרה זה הטענה נכונה.

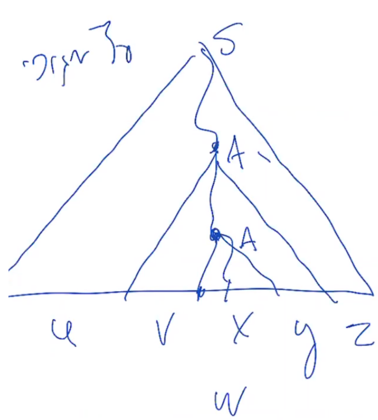
כל שלבי האינדוקציה בוצעו, כך שכעת אנו יודעים שהחוקים תמיד לא יוצרים נזק ומאפשרים רק למילים שמתקבלות במחסנית להיות בשפת הדקדוק.
הוכחנו ש־ $L(G) \subsetneq L(M)$

הרעיון להוכחה ש־ $L(M) \subsetneq L(G)$:
מוכיחים באינדוקציה על אורך מסלול החישוב של מילה מ־ $L(M)$ שהיא שייכת לשפת הדקדוק של G.

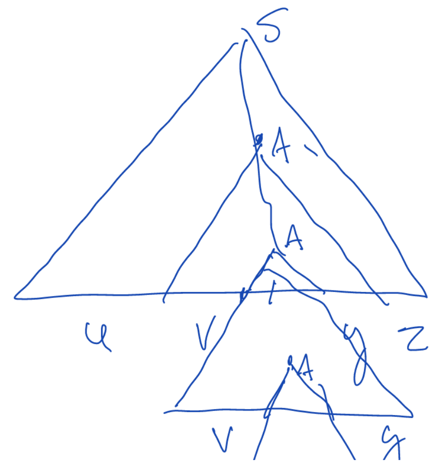
2 למת הניפוח עבור א"מ

בהרצאות הקודמות דיברנו על כך שלאס"ד אין זיכרון, ולכן למת הניפוח ומשפט היימל נרוד נכונים עבורו. לעומת זאת, בא"מ יש זיכרון ולכן הם לא תקפים עבור אוטומט זה.
עם זאת, הם כן תקפים לדקדוק חסר הקשר (לפחות למת הניפוח) ואפילו בטכניקות לא שונות מדי. זו אחת הסיבות שרצינו שקילות בין א"מ לדח"ה.

נוכיח את למת הניפוח עבור דח"ה, בעזרת עצי גזירה;



בעץ זה מתוארת מילה משפת הדקדוק, $w = uvxyz$.
עם זאת, גם המילה $w' = uvvxyyz$ מתקבלת; וגם uv^2xy^2z ו־ $uvvxyyz$.



2.1 הגדרה פורמלית

לכל שפה חסרת הקשר L קיים מספר n_0 כך שלכל מילה $w \in L$ כך ש־ $|w| \geqslant n_0$ קיימים $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$ כך ש־ $w = u \bigcirc v \bigcirc x \bigcirc y \bigcirc z$ ומתקיים:

- $v \bigcirc y \neq \epsilon$
- $\forall k \geqslant 0 : \quad u \bigcirc v^k \bigcirc x \bigcirc y^k \bigcirc z \in L$
- $|v \bigcirc x \bigcirc y| \leqslant n_0$

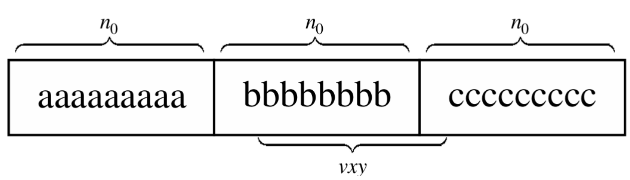
2.2 שימוש בלמה

ניתן להשתמש בלמה כדי להוכיח ששפה היא איננה ח"ה:

2.2.1

תהיי השפה $L = \{a^n b^n c^n\}$. נוכיח שהיא איננה ח"ה בעזרת למת הניפוח.

<u>הוכחה:</u>
נניח בשלילה ש־ L חסר הקשר ולכן מהלמה קיים מספר n_0 כמו בלמה. נסתכל במילה $w = a^{n_0} b^{n_0} c^{n_0}$, נשים לב ש־ $w \in L$ וגם $|w| = 3n_0 \geqslant n_0$ מהלמה קיימים u, v, x, y, z כך ש־ $w = uvxyz$ ומתקיימים תנאי הלמה. מתנאי (3) לא יכול להיות ש־ vxy לא יכול להכיל את כל שלושת סוגי התווים. בה"כ: כמו כן מ־ (1) אנו יודעים כי $vy \neq \epsilon$



ומ־ (2) עבור $k = 2$ מתקיים $uv^2xy^2z \in L$. קיבלנו סתירה, מכיוון שבמילה זו נוספו תווים אך לא לכל שלושת סוגי התווים. אזי למת הניפוח לא מתקיימת וזוהי שפה שאיננה ח"ה.

2.2.2

נוכיח שהשפה־

$$L = \{w : \quad w = u \bigcirc u, u \in \Sigma^*\}$$

מעל הא"ב $\Sigma = \{0,1\}$. איננה ח"ה.

<u>הוכחה:</u>
נניח בשלילה שהשפה ח"ה, כך שקיים מספר n_0 שמקיים את תנאי למת הניפוח.
נסתכל על המילה $0^{n_0}1^{n_0}0^{n_0}1^{n_0}$ נשים לב ש־ $w \in L$ וגם $|w| = 4n_0 \geqslant n_0$.
מהלמה קיימים u, v, x, y, z. מ־ (1) נקבל ש־ $vy \neq \epsilon$ ומ־ (2) כאשר $k = 0$ מתקיים $uxz \in L$ ונשים לב ש־ $uxz = 0^{n_1}1^{n_2}0^{n_3}1^{n_4}$. כעת ישנם שני מקרים:

1. vxy נמצא כולו ב "צד אחד של המילה".
נניח בה"כ ש־ vxy נמצא בצד שמאל של המילה, כך ש־ $uxz = 0^{n_1}1^{n_2}0^{n_0}1^{n_0}$. נשים לב לכך ש־ $n_0 \leqslant n_1+n_2 < 2n_0$ לפי (3) ו־ (1). אמצע המילה חייב לזוז ימינה לעומת $uvxyz$. כאשר מחלקים את uxz לשני חלקים השמאלי מסתיים ב־ 0 והימני מסתיים ב־ 1. ולכן $uxz \notin L$ כך שמקרה זה לא ייתכן.

2. vxy חוצה את האמצע.
מתנאי (3) לא ייתכן ש־ vxy כולל את האפסים שבתחילת המילה או האחדות שבסופה. לכן $uxz = 0^{n_0}1^{n_2}0^{n_3}1^{n_0}$ כך ש־ $n_2 + n_3 < 2n_0$.
מכאן נקבל שמתקיים $n_2 < n_0$ או $n_3 < n_0$ (לא ייתכן ששניהם לא מתקיים)
נניח בה"כ שהמקרה הראשון נכון. במקרה זה מספר האחדים בצד שמאל של המילה קטן ממספר האחדים מצד ימין של המילה ולכן $uxz \notin L$ ולכן מקרה (2) לא ייתכן.

בסך הכל הוכחנו שהשפה איננה ח"ה, בעזרת

3 סגירות של שפות חסרות הקשר

שאלנו את עצמנו בעבר האם שפות חסרות הקשר סגורות תחת חיתוך ומשלים. היום נוכיח שהן אינן סגורות תחת חיתוך;

נסתכל על השפות

$$L_1 = \{a^n b^n c^m : \quad n, m \geqslant 0\}$$

$$L_2 = \{a^m b^n c^m : \quad n, m \geqslant 0\}$$

קל לראות כי שתי שפות אלה הינן ח"ה, אך הוכחנו מקודם ששפת החיתוך שלהן איננה ח"ה.

מסקנה: שפות ח"ה אינן סגורות תחת משלים.
מדוע? ־ מכיוון שהן סגורות תחת חיתוך, הן היו צריכות להיות סגורות גם תחת חיתוך אם הן סגורות תחת משלים. זאת בעקבות כללי דה־מורגן; $L_1 \cap L_2 = L_1^c \cup L_2^c$