מודלים חישוביים ־ הרצאה 2

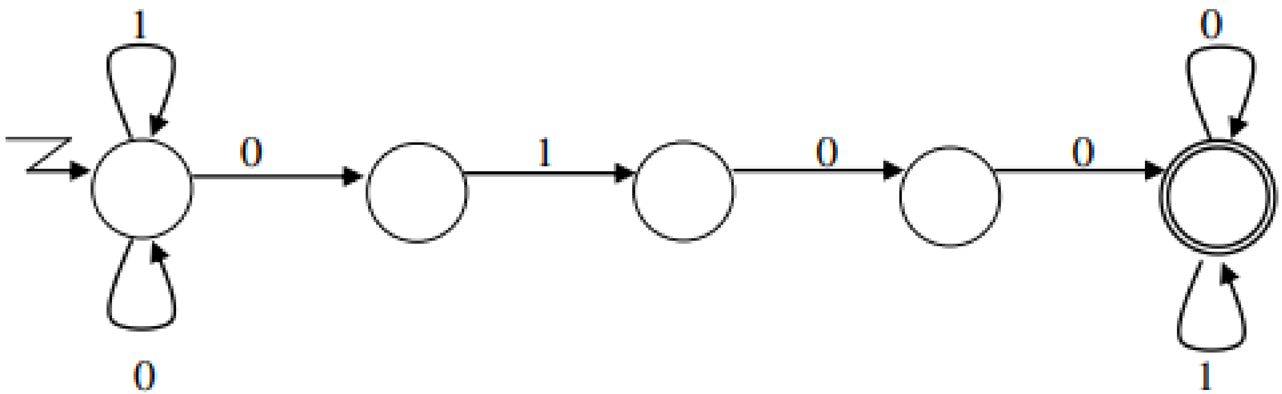
שרון מלטר, אתגר 17

20 במרץ 2024

1 אסל"ד

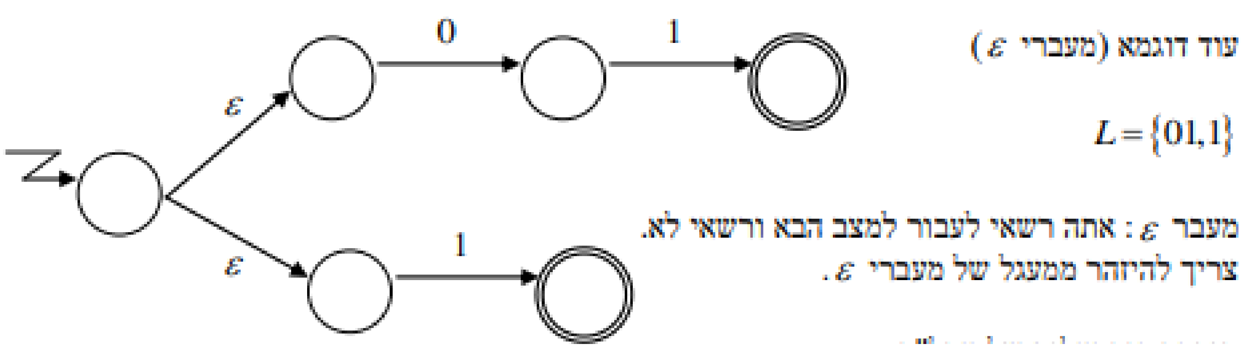
זהו אוטומט סופי לא דטרמיניסטי.
הוא זהה לאס"ד, מלבד כך שכל מעבר בו ממצב למצב הוא אפשרי, ולא חובה. כלומר, ייתכנו מעברים למצבים שונים עבור אותו הקלט. ומכאן השם־ המעבר ממצב למצב איננו דטרמיניסטי. היום נלמד למה אוטומט זה הינו שימושי.
מתי מילה מתקבלת על ידי אסל"ד?
כאשר קיים מסלול חישובי שבו היא מתקבלת. כלומר, לא כל המסלולים החישוביים שלה צריכים לקבל את המילה.

<u>דוגמה:</u>
נרצה אסל"ד שמקבל מילים שמכילות את הרצף 0100;



הוכחת נכונות: בעזרת הכלה דו־כיוונית.

דוגמה נוספת:
נדגים שימוש במעבר אפסילון. כלומר, מעבר באסל"ד שמאפשר למילה להתחיל במצבים שונים.



כמובן שמעברי אפסילון אפשריים רק באסל"דים.

2 הקשר בין אס"ד לאסל"ד

בהנתן שפות L_1, L_2 שמתקבלות ע"י אס"ד, האם $L_1 \bigcirc L_2$ מתקבלת על ידי אס"ד?
לא ידוע, אך התשובה היא כן אם שואלים אם שפת השרשור מתקבלת על ידי אסל"ד.
זוהי טענה שמוכללת בטענה הבאה, שנוכיח.

בהנתן שפה L שמתקבלת על ידי אס"ד, האם L^* תתקבל על ידי אס"ד?
לא ידוע, אבל כן ברור שהיא תתקבל על ידי אסל"ד:
נבנה את האסל"ד שמקבל שפה זו: כדי לוודא שנקבל את המילה הריקה ואת שאר השרשורים, נשכפל את המצב ההתחלתי של L וניצור מעבר אפסילון ממנו ל"מצב התחלתי" נוסף. נעתיק את האס"ד שמקבל את L כך שהמצב ההתחלתי הנוסף הוא המצב ההתחלתי בו, ומכל מצב מקבל ישנו מעבר אפסילון למצב ההתחלתי הנוסף.
כך כמובן שהמילה הריקה תתקבל וכך גם כל שרשור של מילים מ־ L. ניתן באופן דומה ליצור אסל"ד שמקבל כל שרשור של שתי שפות.

3 הגדרה פורמלית

כעת כשיש לנו אינטואציה למה הוא אסל"ד, נגדיר אוטמט זה פורמלית:
האסל"ד M הינו החמישיה־

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

כאשר;
Q זוהי קבוצה סופית של מצבים, Σ זהו א"ב סופי, $q_0 \in Q$ זהו מצב התחלתי, $F \subseteq Q$ זוהי קבוצת המצבים המקבלים ו־ $\delta : Q \times \Sigma_\epsilon$ כאשר $\Sigma_\epsilon = \Sigma \cup \{\epsilon\}$. וכמו כן;

$$\delta(q_0, 0) = \{q_0\}$$

$$\delta(q_0, 1) = \{q_0, q_1\}$$

$$\delta(q_0, \epsilon) = \varnothing$$

$$\forall \sigma \in \Sigma_\epsilon : \quad \delta(q_1, \sigma) = \varnothing$$

לכל $i > 0$ מתקיים;

$$r_{i+1} \in \delta(r_i, \sigma_{i+1})$$

. כמו כן לכל מילה w נגדיר $S_M(w)$ כקבוצה של כל המצבים שקיים מסלול חישוב כלשהו של w באסל"ד שמסתיים בהם.
נשים לב שמאחר שאסל"ד כן יכול להיות דטרמיניסטי, כל שפה שמתקבלת באס"ד מתקבלת באסל"ד.

4 משפטים

<u>משפט:</u> כל שפה שמתקבלת על ידי אסל"ד, מתקבלת על ידי אס"ד.
משמעות המשפט היא שישנו קומפיילר)אלגוריתם המרה(מאסל"ד לאס"ד. כמו כן הראנו מקודם ששרשור וכוכב של שפות שמתקבלות באס"ד מתקבלים באסל"ד, לכן הם מתקבלים גם באס"ד.

<u>הוכחה:</u>
נבצע הוכחת בנייה.
יהי אסל"ד $M = (Q, \sigma, \delta, q_0, F)$ ונרצה לבנות אס"ד $M' = (Q', \sigma, \delta', q_0', F')$ שמקבל את אותה השפה.
רעיון ההוכחה: נגדיר $Q' = P(Q) = \{S : S \subseteq Q\}$ ולכל קבוצת מצבים שהיא כל המצבים האפשריים שיכולים

להיות המצב ה־ i במסלול חישוב, נקרא 'סופר מצב'. כך ש־ $|Q'| = 2^{|Q|}$ ואיברי Q' הם סופר־מצבים.
כמובן שב־ M' כל מצב בהכרח מוביל לסופר מצב כלשהו, כך שאוטומט זה אכן דטרמיניסטי.
לאסל"ד יש שני יתרונות על אס"ד:
1. התפצלות
2. מעברי ϵ

נתחיל במקרה שבו אין ב־M מעברי ϵ.
נגדיר את שאר הפרמטרים של M':

$$q'_0 = \{q_0\}$$

(אנו מניחים שאין מעברי אפסילון ולכן ישנו מצב התחלתי יחיד רלוונטי)

$$F' = \left\{S \in Q' : S \cap F \neq \varnothing\right\}$$

$$\delta'(S, a \in \Sigma) = \cup_{q \in S} \delta(q \in S, a)$$

כעת כשיימנו עם הבנייה, נרצה להוכיח ש־ $L(M') = L(M)$.
<u>טענת עזר:</u>
לכל $w \in \Sigma^*$ מתקיים $S_{M'}(w) = S_M(w)$.
נוכיח את הטענה המרכזית בעזרת טענת העזר. נוכיח שניתן לעשות זאת:

$$L(M') = \left\{w \in \Sigma^* : S_{M'}(w) \in F'\right\}$$

$$= \left\{w \in S^* : S_M(w) \in F'\right\}$$

$$= \left\{w \in \Sigma^* : S_M(w) \cap F \neq \varnothing\right\}$$

$$= L(M)$$

כנדרש.

מאחר שכבר ראינו הוכחות דומות באינדוקציה, נוכיח את טענת האינדוקציה בעזרת $light - induction$ (אינדוקציה לייט). זהו מושג שתבע רונן והוא גירסא לא פורמלית של הוכחה באינדוקציה, שבה עדיין מתמודדים עם חלקי ההוכחה הקשים.

מבנה אינדוקציה לייט:
- לבדוק שהטענה מתקיימת בתחילת החישוב
- לבדוק שאם התשובה מתקיימת עד צעד מסוים, אז היא ממשיכה להתקיים בצעד הבא
נוכיח באינדקוציה על $|w|$ שכל מילה מקיימת את טענת העזר.
<u>צעד הבסיס:</u> $|w| = 0$
במקרה זה $S_{M'}(w) = q_0, \quad S_M(w) = q_0$ כך שהטענה נכונה.
<u>צעד האינדוקציה:</u>
מתקיים מהגדרת δ', זהה להוכחה מהרצאה קודמת בה מפרקים את המילה ע"פ התו האחרון.

נותר להוכיח את טענת העזר גם עבור המקרה בו ישנם מעברי אפסילון. כדי לעשות זאת נשנה מאט את האס"ד שאנו בונים.
עבור מצב q נסמן

$$E(q) = \left\{q'\right\}$$

כאשר קיים מעבר אפסילון מ־ q ל־ q'.
$E(S) = \cup_{q \in S} E(q)$ כך ש־

$$F = \left\{S \in Q' : S \cap F \neq \varnothing\right\}$$

$$\delta'(S, a \in \Sigma) = E(\cup_{q \in S} \delta(q, a))$$

כמו מקודם.

טענה:
לכל $t \geqslant 2$ קיים אסל"ד עם t מצבים כך שכל אס"ד לאותה שפה הוא עם 2^t מצבים. כלומר, סיבוכיות גודל קבוצת המצבים היא אקספוננציאלית.

למה נוספת מהתרגול

5 שפות רגולריות

תחשיב הביטויים הרגולריים
נתחיל מדוגמה־ תחשיב הביטויים החשבוניים:

$$\Sigma = \left\{0, 1, ..., 9, +, *, (,), ..\right\}$$

מה הוא ביטוי חשבוני? הוא מילה מעל הא"ב שרשמנו.
הסינטקס: האם המחרוזת מייצגת ביטוי חשבוני חוקי?
הסמנטיקה: בהינתן ביטוי חשבוני חוקי, מהי המשמעות שלו? (המספר שמקבלים ממנו) מוגדרת פונקציה L כך שלכל ביטוי חשבוני קיים ערך. למשל; $L(\alpha + \beta) = L(\alpha) + L(\beta)$.
ביטויים (רגולריים) אטומיים: $"0", "1", ...$

דוגמה 2:
ביטוי רגולרי מגדיר שפה. למשל, מעל הא"ב $\Sigma = \left\{0, 1\right\}$ הביטוי הרגולרי $(0 \cup 1)^* \bigcirc 1$ מתאר את שפת כל המילים מעל $\left\{0, 1\right\}$ שנגמרות ב־1.

עכשיו כשיש לנו אינטואיציה, נגדיר מהו ביטוי רגולרי פורמלית:
בהינתן א"ב Σ סופי, שלא מכיל את התווים המיוחדים $\bigcirc, *, \cup, \varnothing, \epsilon, (,)$ (כדי שנוכל להשתמש בהם כפעולות) נגדיר ביטויים רגולריים באופן אינדוקטיבי. ביטויים רגולריים אטומיים הם המחרוזות הבאות:
לכל תו $a \in \Sigma$ התו a הוא ביטוי רגולרי אטומי. השפה שמייצג ביטוי כזה היא השפה שיש בה מילה אחת $\{a\}$,
$\varnothing$ זהו ביטוי רגורלי אטומי. השפה שמייצג ביטוי זה היא השפה הריקה $\{\}$,
ϵ הוא ביטוי רגולרי אטומי והשפה שהוא מייצג היא שפה שיש בה מילה אחת $\{\epsilon\}$.
נעבור לביטויים רגולריים.

נניח שיש לנו ביטויים רגולריים α_1, α_2 שכבר הוגדרו (מקרה הבסיס הוא ביטוי רגולרי אטומי)
(α_1, α_2) הוא ביטוי רגולרי,
$(\alpha_1 \bigcirc \alpha_2)$ הוא ביטוי רגולרי,
α_1^*.
אלו כל הביטויים הרגולריים, והסוגריים הם חלק חשוב בכולם.
בהינתן ביטוי רגולרי לא אטומי α, ייתכנו שלושה מקרים:

$$\alpha = (\alpha_1 \cup \alpha_2)$$

$$\alpha = (\alpha_1 \bigcirc \alpha_2)$$

$$\alpha = (\alpha_1^*)$$

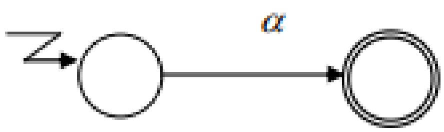
<u>משפט:</u>
שלושת התנאים הבאים שקולים:
1. L מתקבלת על ידי אס"ד
2. L מתקבלת על ידי אסל"ד
3. L רגולרית

<u>הוכחה:</u>
את השקילות בין 1 ל־2 כבר הוכחנו, מכיוון שמקודם הראינו הכלה דו־כיוונית של השפות שמתקבלות ע"י אס"ד כלשהו והשפות שמתקבלות ע"י אסל"ד כלשהו.
נסיים את ההוכחה בכך שנוכיח שכל שפה רגולרית מתקבלת ע"י אסל"ד וכל שפה שמתקבלת ע"י אס"ד היא רגולרית.

<u>הוכחת טענה 1:</u>
דרך: בהינתן ביטוי רגולרי α נבנה אסל"ד M כך ש־ $L(M) = L(\alpha)$. הבנייה תהיה רקורסיבית;

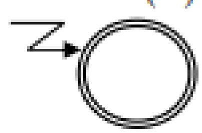
בסיס:
α ביטוי רגולרי אטומי. ישנם שלושה מקרים אפשריים, ולכולם ניתן לבנות אסל"ד־

1. $\alpha \in \Sigma$ כלומר השפה שמגדיר הביטוי הרגולרי היא $L(\alpha)=\{\alpha\}$



2. $\alpha=\varnothing$ כלומר $L(\alpha)=\varnothing$

3. $\alpha=\text{"}\varepsilon\text{"}$ כלומר $L(\alpha)=\{\varepsilon\}$



צעד:
α ביטוי רגולרי לא אטומי.
שלושת המקרים של α הם;

$$\alpha = (\alpha_1 \cup \alpha_2)$$

$$\alpha = (\alpha_1 \bigcirc \alpha_2)$$

$$\alpha = (\alpha_1^*)$$

הוכחנו בהרצאה הקודמת שאס"ד סגור תחת פעולת איחוד, שרשור וכוכב, לכן קיימים אס"דים שמקבלים שפות אלה.

הוכחת טענה 2:
בהרצאה הבאה (: