אלגוריתמים מבוזרים ־ הרצאה 11, סיבוכיות תקשורת וחסמים תחתונים

שרון מלטר, אתגר 17

8 בספטמבר 2024

תוכן עניינים

1 סיבוכיות תקשורת

בהרצאה הקודמת אמרנו כי ניתן להראות חסמים תחתונים ל־ $CONGEST$ ע"י חסמים בבעיות סיבוכיות תקשורת.
היום נוכיח את החסם תחתון על סיבוכיות התקשורת של $Set\ Distjointness$. זוהי בעיה מרכזית בתחום המסייעת להוכיח חסמים רבים.

1.1 סיבוכיות תקשורת של 2 שחקנים

ישנם 2 שחקנים, אליס ובוב. לכל אחד יש קלט של k ביטים; $x^A,\ x^B \in \{0,1\}^k$ המסומנים $x^A = (x_1^A, ..., x_k^A),\ x^B = (x_1^B, ..., x_k^B)$.

1.1.1 תקשורת בין השחקנים

השחקנים מתקשרים לפי **פרוטוקול**. הוא בנוי כך;

- בכל שלב בפרוטוקול, אחד השחקנים שולח ביט לשחקן השני, שיכול להיות תלוי בקלט שלו ובפרטים שנשלחו עד עכשיו.
- בכל של השחקנים יודעים אם הפרוטוקול הסתיים (ומה הפלט) ואם לא־ תור מי לשלוח ביט.

1.1.2 הגדרות סיבוכיות תקשורת

הגדרה: סיבוכיות התקשורת של פרוטוקל היא מספר הביטים המקסימלי שיכול להישלח בפרוטוקול.

הגדרה: סיבוכיות התקשורת של בעיה היא סיבוכיות התקשורת של הפרוטוקול האופטימלי שיכול לפתור אותה.

2 משפט על סיבוכיות התקשורת של בעיית $Set\ Distjointness$

משפט: סיבוכיות התקשורת של בעיית $Set\ Distjointness$ היא $k+1$.

2.1 הוכחה

נתחיל מלמצוא פרוטוקול שסיבוכיות התקשורת שלו היא $k+1$.
לא מדובר בפיצוח מרשים במיוחד־ אליס תשלח לבוב את כל הקלט שלה (k ביטים) בוב מחשב את התשובה ושולח אותה לאליס (ביט אחד) כך שבסך הכל מועברים $k+1$ ביטים.

כעת נוכיח שסיבוכיות התקשורת של כל פרוטוקול היא $k+1$.

2.1.1 הגדרות

הגדרה: בהינתן $X, Y \subseteq 2^k$ הקבוצה $X \times Y$ נקראת **מלבן**.
(זוהי פשוט מטריצה שבה כל הכניסות הן 0 או 1, והן מסומנות לפי זוג סדור של כל זוג סדור אפשרי הנבנה מאיברי $\{0,1\}$, כמו במבוא לחומרה. הכניסות יכולות להיות התשובות של הפרוטוקול עבור קלטים x, y לאליס ולבוב)

הגדרה 2: בהינתן פונקציה $f : 2^k \times 2^k \to \{0,1\}$ מלבן $X \times Y$ הוא f־מונוכרומטי אם $f(x,y) = f(x',y')$ לכל $x' \in X,\ y' \in Y$.

הגדרה 3: יהא P פרוטוקול ו־ v צומת בעץ הפרוטוקול. R_v הוא אוסף הקלטים (x,y) שעבורם נגיע לצומת v.

2.1.2 טענה 1

טענה 1: פרוטוקול עם סיבוכיות תקשורת b מחלק את מרחב הקלט $2^k \times 2^k$ ללכל היותר 2^b מונוכרומטיים זרים.

2.1.3 הוכחת טענה 1

נסתכל על העלים בפרוטוקול.
בפרוטוקול עם סיבוכיות תקשורת b יש לכל היותר 2^b עלים (ניתן לחשוב על פרוטוקול כעל עץ בינארי בעומק b, כך שבכל רמה שחקן אחר שולח ביט והביט שנשלח נקבע לפי בן ימני או שמאלי)

2.1.4 טענה 2

לכל פרוטוקול P ועלה l, R_l הוא מלבן.

2.1.5 הוכחת טענה 2

נוכיח באינדוקציה על העומק של v, ש־ R_v הוא הוא מלבן.

בסיס: עבור השורש $R_{root} = 2^k \times 2^k$ (הרי עבור כל קלט נגיע לשורש). מאחר ש־ $2^k \subseteq 2^k$, מדובר במלבן :)

אינדוקציה: נניח שהטענה נכונה עבור עומק i ונוכיח את נכונותה עבור $(i+1)$.
יהא v צומת מעומק $i+1$ ויהא w ההורה שלו מעומק i. נניח בה"כ שאליס שולחת ביט בשלב הזה ושהיא שולחת 0.
מהנחת האינדוקציה, $R_w = X \times Y$ (סימון) הוא מלבן. נסמן ב־ $X' \subseteq X$ את אוסף הקלטים ב־ X עבורם אליס שולחת 0. אז נגיע לצומת v בדיוק על כל הקלטים מהצורה $X' \times Y$. וזהו מלבן, כנדרש :)

2.1.6 טענה 3

עבור $F = Dist$ בכל חלוקה של הקלט $2^k \times 2^k$ למלבנים f־מונוכרומטיים זרים יש **לפחות** $2^k + 1$ מלבנים.

2.1.7 הוכחת טענה 3

נסתכל על כל הקלטים מהצורה $(u, \overline{u})$. ישנם 2^k קלטים כאלה והפלט עבור כולם הוא 1 (מכיוון שהם זרים, כלומר כל זוג ביטים מקבילים ביניהם הם שונים) אבל לא ייתכן שאף שניים מהם יהיו באותו מלבן מונוכרומטי. (נוכיח זאת עם הנחה בשלילה)

אם נסתכל על $(u, \overline{u}),\ (w, \overline{w})$ כאשר $u \neq w$, לפחות אחד מזוגות האלה לא זרים. מדוע? ־ הנחנו כי $u \neq w$, כלומר קיים ביט בו $u,\ w$ שונים. אזי קיים ביט בו $u,\ \overline{w}$ זהים. כלומר, $(u, \overline{w}),\ (\overline{u}, w)$ לא זרים.
אזי $(u, \overline{u}),\ (w, \overline{w})$ לא יכולים להיות באותו מלבן מונוכרומטי.
מכאן נקבל שיש לפחות 2^k מלבנים עם פלט 1, ולפחות עוד אחד עם פלט 1. לכן ישנם לפחות $2^k + 1$ מלבנים בסך הכל.

2.1.8 סיכום

מטענות 1 ו־3 בכל חלוקה יש לפחות $2^k + 1$ מלבנים ומצד שני כל פרוטוקול משרה חלוקה ללכל היותר 2^b מלבנים, לכן $2^k + 1 \leqslant 2^b$ כך ש־ $k < log(2^k + 1) \leqslant b$.
אזי סיבוכיות התקשורת b היא $k + 1$ ביטים לפחות.

2.1.9 אינטואיציה להוכחה:

הראינו קבוצה גדולה של קלטים $\{(u,\overline{u})\}$ שלכולם יש פלט זהה, אבל אף שניים לא יכולים להיות ביחד באותו מלבן (מצריכים שליחה של ביטים שונים בפרוטוקול) לכן צריך לשלוח הרבה ביטים.
קבוצה כזו נקראת $Fooling\ Set$ ומאוד שימושית להוכחת חסמים תחתונים בסיבוכיות תקשורת.

סיימנו את הבעיה הראשית.
את שאר השיעור נקדיש לתרגילים :)

3 תרגילים

3.1 קירוב לחישוב קוטר במודל ה־ $CONGEST$

ראינו שלחשב את הקוטר **במדויק** זו בעיה קשה שמצריכה $\Omega(\frac{n}{logn})$ סיבובים.
הראו שניתן לחשב 2־קירוב לקוטר ב־ $O(D)$ סיבובים, בגרף לא ממושקל ולא מכוון, במודל ה־ $CONGEST$.
כלומר, יש לחשב ערך D' כך ש־ $\frac{D}{2} \leqslant D' \leqslant D$.
שימו ♡ ־ כל עוד D' הוא מרחק כלשהו בין זוג צמתים, מתקיים $D' \leqslant D$, כך שיישאר להראות רק כי $\frac{D}{2} \leqslant D'$.

3.1.1 פתרון

נחשב עץ BFS משורש שרירותי ב־ $O(D)$ סיבובים ונחזיר את המרחק המקסימלי מ־ r. ניתן לחשב אותו ולשלוח לכל הגרף ב־ $O(D)$ סיבובים.
נקרא לערך זה D'.

3.1.2 הוכחת נכונות פתרון

יש להוכיח כי $\frac{D}{2} \leqslant D'$.

יהיו u,v כך ש־ $D = d(u,v)$ ונניח בשלילה כי $D'\frac{D}{2}$.
u ו־ v הם צמתים בעץ BFS ולכן קיים מסלול מאורך לכל היותר D' מ־ r ל־ u ומ־ r ל־ v.
מכאן נקבל שקיים מסלול באורך לכל היותר $2D'$ מ־ u ל־ v דרך r. לפי ההנחה בשלילה, נקבל $d(u,v) \leqslant 2D' \leqslant D$
כלומר קיבלנו סתירה.

3.2 $Max\ Cut$ סדרתי

בבעיית $max\ cut$ המטרה היא לצבוע את הצמתים בשני צבעים, כחול ואדום, כך שמספר הקשתות שחוצות את החתך (בין תת־גרף הצמתים האדומים לתת־גרף הצמתים הכחולים) הוא מקסימלי.

ניתן להראות שלמצוא את החתך המקסימלי במדוק זו בעיה קשה שמצריכה $\Omega(D)$ סיבובים ב־ $LOCAL$ (תרגיל) לכן נתרכז ב**קירובים**.

1. הראו אלג' דטרמיניסטי סדרתי ל־ $max\ cut$, כלומר מספר הקשתות שחוצות את החתך הוא לפחות חצי ממספר הקשתות שחוצות בחתך מקסימלי.

3.2.1 פתרון

נעבור על הצמתים סדרתית, עבור צומת v נבחר צבע כחול/אדום שימקסם את מספר הקשתות בחתך מתוך הקשתות הסמוכות ל־ v שצבוע בשלב זה. למשל, אם יש ל־ v יותר שכנים אדומים מכחולים, נבחר בכחול.

3.2.2 טענה

<u>טענה:</u> בסיום האלגוריתם לפחות חצי מהקשתות חוצות את החתך ($\frac{m}{2}$)
מאחר שיש לכל היותר m קשתות בכל חתך, אם נוכיח את נכונות הטענה נוכיח גם את קירוב האלגוריתם.

3.2.3 הוכחה

קשת $\{u,v\}$ נצבעה כאשר עברנו על הצומת השני בקשת (לפי סדר המעבר על הצמתים) וצבענו אותו. נניח לה"כ שהצומת השני הוא v. מהגדרת האלג' על כל קשת שנצבעה מונוכרומטית (כלומר, באותו צבע) קיימת לפחות קשת אחת **אחרת** שנצבעה באותו זמן וחוצה את החתך, ולכן סה"כ מס' הקשתות שחוצות את החתך הוא לפחות חצי מהקשתות, כלומר האלג' אכן מחזיר $\frac{1}{2}$ קירוב.

3.3 $Max\ Cut$ מבוזר

תארו אלג' דטרמיניסטי מבוזר שמחשב $\frac{1}{2}$-קירוב ל- $max\ cut$ ב- $O(\Delta + log^{*}n)$ סיבובים ב- $LOCAL$. בסוף האלגוריתם כל צומת צריך לדעת את הצבע שלו (כחול או אדום)

3.3.1 פתרון

נחשב $(\Delta+1)$-צביעה ב- $O(\Delta + log^{*}n)$. לאחר מכן נעבור על הצבעים $i = 1, ..., \Delta + 1$.
בסיבוב i, כל הצמתים בצבע i יבחרו צד בחתך (אדום/כחול) כמו באלג' הסדרתי, כלומר הם יתייחסו לשכניהם שכבר בחרו צד.
בנוסף, כל צומת שבחר את צבעו בסיבוב יודיע לשכניו מה הצבע שבחר, כך שבמידת הצורך הם יוכלו לבחור צד לפי מידע זה.
נצטרך בסך הכל $O(\Delta)$ איטרציות על מנת לעבור על כל הצבעים. כלומר, בסך הכל נדרשים $O(\Delta + log^{*}n)$ סיבובים לאלגוריתם, כך שדרישת הסיבוכיות מתקיימת. אך מה לגבי הקירוב?

3.3.2 הוכחת נכונות הפתרון

נשים לב שכל הצמתים שבוחרים צבע בסיבוב i הם **לא שכנים** (אחרת לא שניהם היו נצבעים בצבע i) אזי האלגוריתם יפעל כמו באלגוריתם הסדרתי, כאשר נגדיר את סדר הצמתים כך; הצמתים הראשונים הם צמתים בצבע 1 אח"כ הצמתים בצבע 2 עד צבע $\Delta + 1$.
פעולת האלג' זהה לפעולת האלג' הסדרתי בסדר זה ולכן נקבל $\frac{1}{2}$-קירוב.