אלגוריתמים מבוזרים - הרצאה 3, חסמים תחתונים

שרון מלטר, אתגר 17

21 בספטמבר 2024

תוכן עניינים

1 תזכורת

בהרצאה הראשונה למדנו איך לצבוע טבעת ב־ 6 צבעים ובהרצאה הקודמת כיצד לצבוע בסיבוכיות זמן $O(log^*n)$ (עבור מספר ביצועי התקשורת בין צמתים)
כמו כן, למדנו על מודל ה־ $local$, שבו יש סיבובים סינכרוניים וגודל ההודעות לא מוגבל. לאחר סיבוב אחד, צומת יוכל לתקשר עם שכניו, ולאחר i סיבובים עם הצמתים שמרחקם ממנו הוא i.
בעזרת תכונות אלה נזהה חסמים תחתונים. בפרט, מטרתנו היא למצוא חסם תחתון לאלגוריתם לצביעה ב־3 צבעים, אבל נתחיל מדוגמה קלה יותר.

2 2־צביעה במסלול

יהי מסלול שנרצה לצבוע אותו בשני צבעים. כמובן שישנן רק 2 דרכים לצבוע כל מסלול. עם זאת, עוד מעט נראה כי מדובר בבעיה קשה (מבחינת אלגוריתמים מבוזרים)
הפתרון הנאיבי הוא לבחור קצה אחד ולבחור עבורו צבע שרירותית, לאחר מכן לעבור לצומת הבא ולקבל אליו מידע על הצבע של הקודם ולפי כך לבחור לו צבע אחר וכן הלאה. בסך הכל נצטרך $\Omega(n)$ פעמים לתקשר בין צמתים, או n סיבובים.

אם היה מדובר ב־3 צביעה, ניתן היה להיעזר באלגוריתם הטבעת שלנו (ניתן להוכיח שהוא עובד גם עבור מסלול) כך שהסיבוכיות הייתה $O(log*n)$. אבל, וזה יפתיע, לא קיים אלגוריתם יותר טוב מהנאיבי עבור 2־צביעה.

2.1 טענה

טענה: סיבוכיות הסיבובים של הפתרון הנאיבי היא האופטימלית עבור 2־צביעה. כלומר, תמיד נצטרך $\Omega(n)$ סיבובים.
הסיבה לכך נעוצה בעובדה שישנן רק 2 אפשרויות צביעה. ברגע שבו נבחר צבע עבור צומת אחד במסלול, כל שאר הצמתים צריכים לדעת עליו, אחרת הצביעה יכולה להיות שגויה. נעבור לרעיון ההוכחה הפורמלית.

יהי מסלול בן n צמתים ממוספרים בעל צביעה חוקית. נרצה להחליף את הצביעה באופן הבא;
הצבע של הצומת $\frac{n}{2}+1$ יוחלף לצבע של n, צבע הצומת שאחריו יוחלף לשל $\frac{n}{2}+1$ המקורי והצבע של הצומת שאחריו יהיה צבעו של $\frac{n}{2}+2$ וכן הלאה עד שצבע הצומת האחרון יהיה $n-1$. מאחר שצבע הקצה התהפך, יש לשנות גם את צבעי הצמתים שלפני החצי הראשון.
נכתוב את ההוכחה באופן יותר פורמלי.

ניקח את u להיות הצומת הראשון במסלול ואת v להיות הצומת האמצעי של החצי השני של המסלול. ה־ $\frac{n}{8}$ סביבה של u ו־ v (חצאי הרבעים שבהם הם נמצאים) זהות בשני הגרפים. כלומר, הן ייצבעו באותו צבע באלגוריתם שלוקח לכל היותר $\frac{n}{8}$ סיבובים.
אבל באחד מהמקרים המרחק ביניהם זוגי ובאחרים המרחק ביניהם אי־זוגי בגלל שיש צומת נוסף ביניהם, כך שבמקרה הראשון הם צריכים להיצבע באותו צבע ובמקרה שני בצבעים שונים. אזי, אלגוריתם עם $\frac{n}{8}$ לא מספיק, לכן מספר הסיבובים על מנת לוודא קבלה של צביעה חוקית, הוא $\Omega(n)$.
הוכחנו :)

2.2 מסקנה

מהוכחה זו למדנו עיקרון חשוב:
צומת או צמתים שה־ i־סביבה שלהם זהה בשני גרפים אבל צריכים לקבל החלטות **שונות**, יגרמו לכך שלא נוכל להסתפק באלגוריתם שלוקח לכל היותר i סיבובים (מכיוון שהוא לא יכול להבחין בין שני המקרים, כלמר איזו סביבה מקבלת איזו החלטה)

אבל זו עדיין עוד לא המטרה שלנו :(
איך נמצא חסם לאלגוריתם 3־צביעה?

3 משפט

משפט של לינאל מ־ 1992:
כל אלגוריתם ל־3־צביעה של טבעת מצריך $\Omega(log * n)$ סיבובים.

<u>המודל הרלוונטי:</u>

- אלג' דטרמיניסטים, סינכרוניים.
- גודל ההודעות וחישובים מקומיים לא חסומים (לכן מדובר בטענה חזקה יותר מטענה הכוללת הגבלה של גודל הודעות וכוח החישוב)
- ישנם מזהים ייחודיים אשר נמצאים בין 1 ל־ n.

זהו מודל מאוד חזק, עובד גם לאלגוריתמים אסינכרוניים, הודעות חסומות / חישוב חסום ומזהים כלליים. בנוסף, כל צומת יודע בהתחלה רק את המזהה שלו (ואולי קלט התחלתי)
יש הרחבה לאלגוריתמים רנדומיים.

כזכור מהרצאה 1, ב־ $LOCAL$ ב־ r סיבובים כל צומת יכול ללמוד מידע מלא על ה־ r סביבה שלו.

4 הצורה הקנונית של אלגוריתם ב־ $LOCAL$

ועכשיו מושג לא זכור כי הוא עוד לא ידוע־
הצורה הקנונית של אלגוריתם ב־ $LOCAL$

1. ב־ r סיבובים צומת לומד מידע מלא על ה־ r סביבה שלו.
2. הפלט מחושב בהתבסס על המידע הנ"ל (מ־r סביבות)

כמובן שב־ r סיבובים לא ניתן ללמוד מידע על צמתים מחוץ ל־ r־סביבה. מכאן נסיק כי אלגוריתם מבוזר דטרמיניסטי זו פונקציה שממפה קלט ל־ r־סביבה לפלט.

לדוגמה, שני צמתים עם קלטים זהים ל־ r־סביבה יוציאו את אותו הפלט. עבור טבעת, הקלט יהיה וקטור מאורך $2r+1$ של מזהים $l_r, ..., l_1, l_0, l_1, ..., l_r$.

4.1 גרף השכנויות $N_r(G)$

עבור משפחת גרפים G, גרף השכנויות ה־ r, שמסומן $N_r(G)$ מוגדר באופן הבא;

- צמתים ־ כל הקלטים האפשריים ל־ r־סביבות.
- קשתות ־ יש קשת בין v_r, v'_r אם הם יכולים להיות הקלטים ל־ r־סביבות של 2 צמתים סמוכים.

דוגמה: תהי משפחת גרפים עם $n=5$ צמתים. צמתי $N_r(G)$ כאשר $r=3$ הם

$$\{(4,1,2), \quad (1,2,3), \quad (2,3,4), \quad (*,1,2), \quad (2,3,5), \quad (2,3,*)\}$$

כאשר יש קשת בין הזוגות הבאים;

$$(4,1,2) \leftrightarrow (1,2,3), \quad (1,2,3) \leftrightarrow (2,3,4)$$

$$(1,2,3) \leftrightarrow (2,3,5), \quad (1,2,3) \leftrightarrow (2,3,*), \quad (1,2,3) \leftrightarrow (2,3,*)$$

עד כאן הכיף ההגדרתי.

4.2 למה 1

למה 1: עבור משפחת גרפים G, קיים אלגוריתם ב־ r סיבובים ל־ c־צביעה של גרפים אם"ם מס' הצביעה של גרף השכנויות הוא $X(N_r(G)) \leqslant c$. (הכוונה היא ש־ $X(N_r(G))$ הוא מספר הצבעים המינימלי הנדרש לצביעה חוקית של גרף השכנויות)
בסך הכל:
קיים אלגוריתם ב־ $LOCAL$ ל־ c־צביעה $\Leftrightarrow$ קיים אלגוריתם בגרף השכנויות עם ל־ c־צביעה.

נוכיח את המשפט בכל שנוכיח ש־ $N_r(G)$ מהווה חסם תחתון לכמות הצבעים שהגרף צריך בשביל צביעה חוקית.

4.3 הוכחה 1

נבצע הוכחה בבנייה. אלגוריתם צביעה הינו פשוט פונקציה הממפה קלט ל־ r־סביבה לצבע.
נניח שישנה צביעה של c צבעים לגרף ממשפחת הגרפים. אזי צביעה של צמתי $N_r(G)$ אם v_c, v'_r יכולים להיות קלטים ל־ r־סביבות של צמתים שכנים, כל אלגוריתם צביעה ייתן צבעים שונים, כך שנקבל צביעה חוקית ל־ $N_r(G)$ (בה מספר הצבעים הוא לכל היותר c) * ?

בכיוון ההפוך, ניתן להשתמש בצביעה של $N_r(G)$ עם c צבעים כדי להגדיר אלגוריתם ב־ $LOCAL$ ב־ r־סיבובים. צומת v ייבחר את הצבע שמתאים ל־ r־סביבה שלו ב־ $N_r(G)$ מובטח שצמתים שכנים יבחרו צבעים שונים, כי r־סביבות של צמתים שכנים צבועות בצבעים שונים ב־ $N_r(G)$.

5 טבעת מכוונת

סוף סוף מגיעים לעיקר.
נגדיר גרפים $B_{k,n}$ שקשורים לגרף השכנויות. **יהיו** k, n **שלמים חיוביים כך ש־** $k \leqslant n$ **(**$[n] = \{1, 2, ..., n\}$**)** קבוצת הצמתים של $B_{k,n}$ היא $V[B_{k,n}] = \{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k) | \alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_k, \quad \alpha_i \in [n]\}$
וקיימת קשת (α, β) מכוונת בין הצמתים $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k),\ \beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k)$ **אם"ם לכל** $1 \leqslant 1 \leqslant k-1$ מתקיים $\beta_i = \alpha_{i+1}$.

5.1 טענה

כשמסתכלים על $B_{2n+1,n}$ כגרף לא־מכוון, הוא **תת־גרף** של גרף השכנויות $N_r(G)$ של טבעת מכוונת עם n צמתים ומזהים ב־ $[n]$. לכן מספיק לנו להראות חסם תחתון על מספר הצביעה של $B_{2r+1,n}$ במקום של $N_r(G)$.
הוכחה: תרגיל לסטודנט :) (פשוט ביותר)

נראה דוגמה חביבה; יהי $n = 6$ ו־ $r = 5$. ישנם רק שני צמתים, $v_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5),\ v_2 = (x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ כך שיש קשת מ־ v_1 ל־ v_2.

5.2 גרף הקשתות

גרף הקשתות של גרף מכוון מסומן $DL(G)$ ($DiLine\ Graph$)
קבוצת הצמתים של אותו גרף היא E, קבוצת הקשתות של G. קיימת קשת מכוונות בין הצמתים $(w, x),\ (y, z)$ אם"ם $x = y$

ועכשיו לחלק הבאמת מעניין, הלמות החדשות!

6 למות 2 ו־3

6.1 למה 2

אם $k < n$, אזי $B_{k+1,n} = DL(B_{k,n})$

6.2 למה 3

$log_2(X(G)) \leqslant X(DL(G))$

6.3 הוכחה 2

הקשתות של $B_{k,n}$ מחברות בין שני וקטורים מאורך k, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k)$ ו־ $\beta = (\beta_1, ..., \beta_k)$ כך ש־ $k-1$ המזהים האחרונים ב־ α זהים ל־ $k-1$ הראשונים ב־ β.
אזי הזוג (α, β) יכול להיות מיוצג ע"י וקטור מאורך $k+1$ עם מזהים עולים, כך ש־ α ו־ β מכילים קצה יחיד שונה. אזי ל־ $DL(B_{k,n})$ ול־ $B_{k+1,n}$ אותם צמתים. נעבור לקשתות הגרפים.

קיימת קשת בין (α_1, β_1) לבין (α_2, β_2) ב־ $DL(B_{k,n})$ אס"ם $\beta_1 = \alpha_2$. כלומר, אס"ם k המזהים האחרונים בווקטור הראשון זהים ל־ k המזהים הראשונים בווקטור השני. לכן קבוצות השכנים זהות ב־ $B_{k+1,n}$ וב־ $DL(B_{k,n})$. סיימנו :)

6.4 הוכחת למה 3

אנחנו רוצים להוכיח ש־ $log_2(X(G)) \leqslant X(DL(G))$, כלומר ש־ $X(G) \leqslant 2^{X(DL(G))}$.
בהינתן c־צביעה לגרף $DL(G)$ נצטרך להוכיח שקיימת 2^c־צביעה לגרף G. נשים לב שצביעה חוקית ב־ $LD(G)$ היא צביעה שבה לכל זוג קשתות סמוכות יש צבעים שונים.
לצומת v, נסמן ב־ S_v את קבוצת הצבעים של הקשתות שיוצאות מ־ v. נראה שהקבוצות S_v מגדירות צביעה ב־ G. יהיו u, v צמתים שכנים כך ש־ $e = u \to v$ היא קשת ב־ G ויהי x הצבע של e. אז $x \in S_u$ מהגדרת S_u