אלגוריתמים מבוזרים - הרצאה 13, תרגיל; MST

שרון מלטר, אתגר 17

15 בספטמבר 2024

תוכן עניינים

1 הקדמה

ננצל את הזמן שנותר (הרצאה זו וההרצאה ברביעי שתהיה האחרונה) לתרגול ולחזרה.
כדי להתכונן למבחן, כדאי לחזור על החומר ולפתור את הטענות שניתנו כתרגיל, לפתור את תרגילי הבית ואת מבחני העבר (שהינם מועטים, מכיוון שזהו קורס חדש)

ברביעי השיעור יתקיים כמתכונת של שעת קבלה, לכן ניתן להעלות שאלות (כמו שאלות על תרגילי בית) או לבקש חזרה או הבהרה של חומר.

2 מבחן סופי

המבחן ייערך 3 שעות ויכלול שאלות הדומות לתרגילי הבית.

3 תזכורת

הסיבוכיות $\widetilde{O}(T)$ מייצגת הכפלה בלוגריתם (הכפלת לוגריתם ב־ T)
כעת נעבור לתרגילים נוספים.

4 תרגיל 1

נתון גרף תקשורת G בעל קוטר D ועץ פורש של G, T, בעל קוטר D_T כשייתכן כי $D << D_T$.
בהתחלה העץ נתון באופן מבוזר כך שכל צומת יודע מי מהקשתות הסמוכות אליו נמצאות בעץ, אבל אין כיוונים לקשתות.
בנוסף, נתון שורש r עץ **שידוע** לצמתים (כלומר הם יודעים מהו המזהה שלו)

נרצה לחשב אוריינטציה לקשתות בעץ כך שיצביעו לכיוון ההורה של צומת בעץ.

4.1 פתרון ראשון

רעיון: נבצע סריקת DFS ב־ T שתתחיל מ־ r, כך שקשתות שכניו יצביעו אליו וקשתות שכניהם יצביעו אליהם וכן הלאה.
בסיום האלגוריתם, כל צומת יידע מי הוא ההורה שלו בעץ ונוכל לכוון את הקשתות בהתאם, ב־ $O(D_T)$ (המרחק המקסימלי של r מצומת בעץ)

אבל קיים פתרון טוב יותר, ב־ $\widetilde{O}(D+\sqrt{n})$.
(גם כש־ $D << D_T$)

4.2 פתרון שני

כזכור, $\widetilde{O}(D+\sqrt{n})$ היא הסיבוכיות זמן שלמדנו עבור מציאת עץ פורש מינימלי ועבור מציאת קלאסטרים, וזהו רמז עבה לאיך נבנה את הפתרון.

רעיון: ניתן משקל 0 לקשתות העץ ומשקל 1 לשאר הקשתות ונריץ את האלג' שמחשב עץ פורש מינימלי על הגרף הזה, כך שנדרשים $\widetilde{O}(D+\sqrt{n})$ סיבובים.

העץ הפורש המינימלי שנבנה הוא T כי זה העץ הפורש המינימלי בגרף עם משקלי הקשתות שבחרנו.
להזכירכם, בהמלך האלגוריתם מחשבים חלוקה ש צמתי ל־ $O(\sqrt{n})$ רכיבי קשירות מקוטר $\widetilde{O}(\sqrt{n})$.

נרצה להיעזר בחלוקה הזו כדי. נפעל באופן הבא:

בכל רכיב בנפרד נחשב את המזהה המקסימלי ונגדיר אותו להיות מזהה הרכיב. נצטרך לשם כך $\widetilde{O}(\sqrt{n})$ זמן מכיוון שזהו קוטר הרכיב.
נשלח את המזהים האלו לכל הגרף, מה שנצטרך לעשות $O(D+\sqrt{n})$ פעמים כי יש $O(\sqrt{n})$ רכיבים.
בנוסף, נשלח את המזהה של הרכיב שמכיל את r ואת כל קשתות העץ שלא מוכלות ברכיב (כלומר, מחברות בין רכיבים שונים)

נשים לב שכיוון שגרף הרכיבים הוא עץ עם $O(\sqrt{n})$ צמתים, יש $O(\sqrt{n})$ קשתות כאלו. לכל קשת כזו, נשלח את המזהים של הרכיבים שהיא מחברת ואת המזהים המקוריים שלה.
על סמך המידע הזה, כל הצמתים יכולים לבנות את עץ הרכיבים (מגודל $O(\sqrt{n})$) ולכוון את הקשתות שלו (לוקלית, ללא תקשורת נוספת)
נשים לב שמכל רכיב C (פרט לרכיב של r) יש קשת יוצאת אחת, e_C, שמחברת את C לרכיב ההורה שלו בעץ הרכיבים.

יהא v_C הצומת שמחובר ל־ e_C מהרכיב C.
אזי v_C הוא הצומת הקרוב ביותר ל־ r ברכיב (ברכיב של r, נגדיר פשוט $v_C=r$) כדי לחשב אוריינטציה בתוך הרכיב C, נבצע סריקת BFS מ־ v_C בתוך הרכיב. נצטרך לשם כך $\widetilde{O}(\sqrt{n})$ זמן מכיוון שזהו קוטר הרכיב וניתן לפעול במקביל ברכיבים שונים מכיוון שהם זרים.
בסה"כ ב־ $\widetilde{O}(D+\sqrt{n})$ זמן חישבנו אוריינטציה כנדרש.

4.3 שימוש ברעיון לבעיות נוספות

פיצלנו לחלק **גלובלי** - שליחה של "מעט" מידע לכל הגרף, וחלק **לוקלי** בתוך כל רכיב.
רעיון זה יעיל מכיוון שהקוטר של כל רכיב קטן.

5 חישוב שידוך מקסימלי

שאלה מת.ב :)

שידוך מקסימלי הוא אוסף של קשתות זרות, כך שלכל קשת $\{u,v\}$ שלא באוסף, u או v מחוברים לקשת שכן נמצאת באוסף.

5.1

בנו אלגוריתם המוצא שידוך מקסימלי ב־ $O(logn)$ סיבובים.

רעיון: נחשב MIS בגרף הקשתות.
נבנה את גרף הקשתות כך:

- יש צומת לכל קשת מקורית.
- זוג צמתים $e_i,\ e_j$ הם שכנים רק אם הקשתות המתאימות בגרף המקורי.

(כמו הפתרון שרובנו כתבנו לשאלה)

5.2

בסעיף השני התבקשנו למצוא פתרון לשידוך מקסימלי ב־ $O(log^{*}n)$ כאשר הדרגה המקסימלית של צמתי G קבועה.
תקציר הפתרון (פשוט): מוצאים $(\Delta+1)$־צביעה בגרף הקשתות. עוברים על הצבעים, כך שבמעבר על צבע i, אם e_i צבוע בצבע זה, הקשת e_i תוסף לשידוך וכל שכני הצומת יימחקו.