אלגוריתמים מבוזרים - הרצאה 10, חסמים תחתונים במודל ה־ $CONGEST$

שרון מלטר, אתגר 17

21 בספטמבר 2024

תוכן עניינים

1 בפרקים הקודמים

ראינו שניתן לחשב $APSP$ ב־ $O(n)$ סיבובים ב־ $CONGEST$.
היום נוכיח שצריכים לפחות $\Omega(\frac{n}{logn})$ סיבובים לחישוב $APSP$ במודל ה־ $CONGEST$, גם בגרפים בהם הקוטר D הינו קבוע.
אך לפני כן נתחיל מבעיה פשוטה יותר.

2 סיבוכיות תקשורת

יהיה שני אנשים, אליס ובוב, כך שלכל אחד יש קלט $x = (x_1, x_2, ..., x_k),\ \ y = (y_1, y_2, ..., y_k)$.
מטרתנו היא לחשב פונקציה כלשהי $f(x, y)$ ע"י העברת מספר מינימלי של ביטים ביניהם. למשל, הפונקציה $Equality$ שבודקת האם $x = y$.

הפונקציה שנדגים איתה היא $Set\ Disjointness$, שמטרתה לבדוק אם קיים אינדקס i כך ש־ $x_i = y_i = 1$ (כלומר האם זוג קלטים הם לא **זרים בביט**)

2.1 משפט

משפט: סיבוכיות התקשורת הדטרמיניסטית של $set\ distjoiness$ היא $k + 1$.

רעיון ההוכחה בהכרח נצטרך להשוות בין כל k הביטים של $x,\ y$, אחרת ייתכן שלא נגיע לאינדקס היחיד שמקיים את התנאי.
(נבצע הוכחה מלאה בהרצאה הבאה)

הערה: קיים חסם דומה לסיבוכיות תקשורת **רנדומית** של $set\ distjointness$.

חמוד וברור. אבל איך זה קשור למטרה שלנו הפעם? - ניתן להיעזר בסיבוכיות תקשורת על מנת להוכיח חסמים תחתונים. נחזור לכך כשנעבור לבעיה העיקרית.

3 חישוב מבוזר של קוטר במודל ה־ $CONGEST$

3.1 משפט

משפט: כל אלגוריתם לחישוב מדויק של קוטר במודל ה־ $CONGEST$ מצריך $\Omega(\frac{n}{logn})$ סיבובים.
(גם עבור קוטר קבוע, כלומר $D = O(1)$)

3.2 שימוש בסיבוכיות תקשורת להוכחת החסם התחתון

איך נחבר בין שתי הבעיות?
בהינתן גרף G שאנו רוצים למצוא את הקוטר שלו, נבנה גרף שני המקיים תכונה מסוימת (למשל בעל קוטר 2) אם"ם שני קלטים לבעיית $Set\ Distjointness$, באורך k ביטים, הינם זרים.
לכן, אם קיים אלגוריתם מבוזר לחישוב קוטר ניתן להשתמש בו כפתרון ל־ $disjoint\ set$, כך שאם ניתן לפתור את הבעיה עם העברה של פחות מ־ $k + 1$ ביטים, נקבל סתירה.

נניח שקיים אלגוריתם שלוקח T סיבובים, ונסמלץ אותו עם אליס ובוב באופן הבא:
אליס תסמלץ את קבוצת צמתי G_x ובוב את קבוצת צמתי G_y, כך ששתי קבוצות אלה ישלחו ביניהן את ההודעות (כל הודעה בין הקבוצות נשלחת על חתך)
נשים לב שסימלוץ של מסלול אחד מצריך שליחה של $O(|C| \cdot logn)$ ביטים בין אליס ובוב, כאשר C היא קבוצת הקשתות בחתך (מכיוון שמדובר במודל ה־ $CONGEST$ בו גודל כל הודעה מוגבל ל־ $O(logn)$ ביטים)
אזי, אם אכן קיים אלגוריתם למציאת קוטר ב־ T איטרציות, בסך הכל יועברו $O(T \cdot |C| \cdot logn)$ והם יספיקו כדי לפתור $Set\ Distjointness$.

כיוון שסיבוכיות התקשורת של $Dist.$ היא $\Omega(1)$ על קלטים מאורך l, נקבל ש־ $T|C|logn = \Omega(l)$, כלומר; $T = \Omega(\frac{l}{|C|logn})$.

נסיק כי כדי למצוא חסם תחתון מדויק ככל הניתן (גדול ככל הניתן) לחישוב קוטר, נרצה ש־ l יהיה כמה שיותר גדול ו־ $|C|$ כמה שיותר קטן. נראה בנייה שבה $l = \Omega(k^2)$ ו־ $|C| = O(k)$ כך שהחסם שלנו יהיו $\Omega(\frac{k}{logn})$.

<u>מבנה הגרף:</u>
נחלק את G_x ואת G_y לתתי הקבוצות $G_x = A \cup A',\ G_y = B \cup B'$. כך ששתי הקבוצות מקיימות $a_i \in A,\ b_i \in B$ ו־ $a'_i \in A',\ b'_i \in B'$.
קיימים שני צמתים נוספים $a,\ b$ כך שקיימת קשת בין a לכל $A \cup A'$ ובין b לכל $B \cup B'$.

כמו כן ישנה קשת בין כל a_i ל־ b_i וקשת בין כל a'_i ל־ b'_i.
ישנן גם קשתות בין A ל־ A' ובין B ל־ B', הנקבעות כך;
יהיו שני קלטים באורך k^2; $x = (x_{1,1}, x_{1,2}, ..., x_{i,j}, ..., x_{k,k}),\ y = (y_{1,1}, y_{1,2}, ..., y_{i,j}, ..., y_{k,k})$ (עבורם נפתור את $set\ distjointness$) וקיימת קשת (לא מכוונת) בין a_i ל־ a'_j אם"ם $x_{i,j} == 0$ וכנ"ל עבור $y,\ B,\ B'$
(שימו לב, אכן קיבלנו ש־ $l = k^2$ ושמספר הקשתות בין A ל־ B הוא $|C| = k$)

3.3 למה

<u>למה 1:</u> הגרף $G_{x,y}$ הינו בעל קוטר 2 אם x, y זרים ובעל קוטר 3 אחרת.

שימו לב שהלמה מתייחסת לגרפים בעלי קוטר קבוע, כך שהוכחת החסם התחתון תהיה רלוונטית גם לגרפים בעלי קוטר גדול יותר.

3.4 הוכחת הלמה

תחילה, קל לראות כי המרחק בין כל זוג צמתים הוא לכל היותר 3 בעזרת הצמתים $a,\ b$. אזי קוטר הגרף הינו לכל היותר 3.
נסתייע בטענת עזר כדי להוכיח את החלקים המסובכים יותר;

3.4.1 טענת עזר

<u>טענה:</u> לכל $1 \leqslant i, j \leqslant k$ מתקיים $d(a_i, b'_j) = 2$ אם $x_{i,j} = 0$ או $y_{i,j} = 0$.
אחרת, מתקיים $d(a_i, b'_j) = 3$.

3.4.2 הוכחת טענת העזר

אם $x_{i,j} = 0$ אז קיימת הקשת $\{a_i, a'_j\}$ ולכן קיים המסלול (a_i, a'_j, b'_j) (אזי $d(a_i, b'_j) = 2$)

אחרת, השכנים של a_i כוללים את צמתי A, b_i תת קבוצה של A' ואת הצומת a. מאחר ש־ b_i שכן של b, שהינו שכן של b'_j, קיים המסלול a_i, b_i, b, b'_j שהינו באורך 3, אזי $d(a_i, b'_j) = 3$ כנדרש.

3.4.3 המשך הוכחת הלמה

אם $x,\ y$ **זרים** אזי לפי בניית $G_{x,y}$, תתי־הגרפים $A \cup A',\ B \cup B'$ הם קליקות. לכן לא קיים בין זוג צמתים ביניהם מסלול מינימלי שאורכו גדול מ־3. כמו כן לכל צומת מ־ $A \cup A'$ קיים שכן מ־ $B \cup B'$ כך שהמסלול המינימלי בין כל זוג צמתים בין שתי קבוצות אלה הוא 2.
בסך הכל קיבלנו שכאשר $x,\ y$ זרים, קוטר $G_{x,y}$ הוא 2 ואחרת הוא 3.
כלומר, קיבלנו שקילות בין הזרות של $x,\ y$ לכך שהקוטר של $G_{x,y}$ הוא 2 ־ כך שניתן לפתור זרות בין שני קלטים בעזרת אלג' זה.

3.5 הוכחת המשפט

נניח בשלילה שקיים אלג' במודל ה־ $CONGEST$ שדורש פחות מ־ $\Omega(\frac{n}{logn})$ סיבובים.
אזי, כפי שהסברנו מקודם, מועברים $O(T \cdot |C| \cdot logn) = O(\frac{n}{logn} \cdot |C| \cdot logn) = O(n \cdot |C|) = O(n \cdot k)$ ביטים. זאת בסתירה לכך שהסיבוכיות לפתור $Set\ Distjointness$ כאשר $l = k^2$ היא $\Omega(k^2)$.
לכן המשפט נכון :)

4 הוכחת חסם תחתון לקירוב ל־ $APSP$ בגרף ממושקל

4.1 הבעיה

הראו שכל אלג' α־קירוב ל־ $APSP$ בגרף ממושקל מצריך $\Omega(\frac{n}{logn})$ סיבובים במודל ה־ $CONGEST$.

4.2 פתרון

כפי שהוכחנו את החסם התחתון למציאת קוטר במודל ה־ $CONGEST$, נוכיח את החסם התחתון ל־ $APSP$ באמצעות החסם התחתון של בעיית $Set\ Distjointness$.

בהינתן שני קלטים $x = (x_1, ..., x_k),\ \ y = (y_1, ..., y_k)$, נבנה גרף G לפי קלטים אלה באופן הבא:
לכל ביט x_i ו־ y_i ישנם צמתים a_i ו־ b_i וכמו כן צומת נוסף a שהינו שכן של כל a_i וצומת נוסף b שהינו שכן של b_i.
מתקיים $w(a_i, a) = 1$ אם $x_i = 0$ ו־ $w(a_i, a) = 0$ אחרת (כמו כן עבור $w(b_i, b)$) קיימת גם קשת $\{a, b\}$ שמשקלה 0.

אם $x,\ y$ זרים, אזי לכל i מתקיים $d(a_i, b_i) \geqslant 1$, מכיוון שמשקל הקשת $\{a_i, a\}$ או $\{b_i, b\}$ הוא 0.
אם הם לא זרים, אזי קיים $1 \leqslant i \leqslant k$ כך ש־ $x_i = y_i = 1$ ולכן $w(a_i, a) = w(b_i, b) = 1$ כך ש־ $d(a_i, b_i) = 2$.

מכאן נקבל שאם נחשב $APSP$ ב־ G, נוכל לבדוק האם קיים $1 \leqslant i \leqslant k$ כך ש־ $d(a_i, b_i) = 2$. אם כן, $x,\ y$ לא זרים, ואחרת הם כן.

נניח שהחסם התחתון לבעיית $APSP$ במודל ה־ $CONGEST$ הוא T סיבובים. כלומר, העברה של $O(T \cdot logn)$ ביטים.
יש להעביר לפחות $k+1$ ביטים כדי לפתור $Set\ Distjointness$, כאשר מספר הצמתים ב־ G הוא $n = 2k+2 = \Theta(k)$.
מכאן נקבל ש־

$$T \cdot logn = \Omega(k)$$

$$T \cdot logn = \Omega(n)$$

$$T = \Omega(\frac{n}{logn})$$

כלומר, פתרון ל־ $APSP$ במודל ה־ $CONGEST$ דורש לפחות $\Omega(\frac{n}{logn})$ סיבובים.