הרצאה 3 - מבוא ללוגיקה, סמנטיקות של CPL

שרון מלטר, אתגר 17

13 בספטמבר 2024

תוכן עניינים

1 תזכורת

1.1 מהי לוגיקה?

1. שפה פורמלית $\mathcal{L}$, בעזרתה בונים נוסחאות.
2. יחס נביעה בין $\mathcal{L}-formulas$.

בעזרת השפה אנחנו בונים נוסחאות wff ($well\ formed\ formulas$)

2 יחס הנביעה $\vdash_{CPL}$

איווליואציה v היא מודל של $\psi \in F_d$ אם"ם $v(\psi)=t$.
באופן דומה איווליואציה v היא מודל של $\Gamma \subseteq F_d$ אם"ם הוא מודל של כל $\psi \in \Gamma$.

טאוטולוגיה!
$\vdash_{CPL} \psi$, או ψ היא טאוטולוגיה, אם"ם כל איוולציואציה v היא מודל של ψ.
באופן דומה, $\Gamma \vdash_{CPL} \psi$ אם"ם כל איווליואציה v שהיא מודל של Γ היא גם מודל של ψ.

תרגיל!
הוכיחו ש־ $((p \wedge q) \to r),\ (p \wedge \neg r) \vdash_{CPL} \neg q$
נוכיח שבכל מקרה בו $\neg q$ מקבל t, $(p \wedge \neg r)$ מקבל t. נעשה זאת באמצעות טבלה.

p	q	r	$(p \wedge q)$	$\neg r$	$(p \wedge \neg r)$	$(p \wedge q) \to r$	$\neg q$
f	f	f	f	t	f	t	t
f	f	t	f	f	f	t	t
f	t	f	f	t	f	t	f
f	t	t	f	f	f	t	f
t	f	f	f	t	t	t	t
t	f	t	f	f	f	t	t
t	t	f	t	t	t	f	f
t	t	t	t	f	f	t	f

עשינו זאת :)

ולתרגיל הקשה הבא־ הוכיחו כי $T \vdash_{CPL} A \to B$ אם"ם $T \cup \{A\} \vdash_{CPL} B$.

כיוון ראשון: נניח ש־ $T \vdash_{CPL} A \to B$ ונראה כי $T \cup \{A\} \vdash_{CPL} B$.
תהי v איווליואציה ונניח שהיא מודל של $T \cup \{A\}$. נוכיח שהיא מודל של B.
לפי טבלת האמת של $\to$, v היא מודל של A ושל T. מכאן נקבל ש־ v מודל של $A \to B$ (לפי ההנחה הראשונה)
ושוב לפי הטבלה של $\to$ נקבל ש־ v מודל של B, כנדרש.

כיוון שני: נניח ש־ $T \cup \{A\} \vdash_{CPL} B$ ונראה כי $T \vdash_{CPL} A \to B$.
נוכיח באמצעות הקונטרפוזיטיב, כלומר נראה שאם $T \nvdash_{CPL} A \to B$ אז $T \cup \{A\} \nvdash_{CPL} B$. קיימת איווליואציה כלשהי v כך שהיא מודל של T אבל לא מודל של $A \to B$. במקרה זה, לפי טבלת האמת של פעולת חץ, חייב להתקיים $v(A)=t,\ v(B)=f$ כלומר, v הוא מודל של A. ומאחר ש־ v הינו מודל של A ושל T, הוא גם מודל של $T \cup \{A\}$, כנדרש.

3 שקילות לוגית

שתי פורמולות A, B שקולות לוגית ומסומנות $A \equiv B$ אם"ם כל מודל של A הוא גם מודל של B ולהיפך.

דוגמאות:

- $(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$
- $(A \wedge A) \equiv A$
- $((A \wedge (B \wedge C)) \equiv ((A \wedge B) \wedge C)$
- $((A \vee (B \vee C)) \equiv ((A \vee B) \vee C)$

4 הגדרות נוספות

- ψ היא טאוטולוגיה אם לכל איווליואציה v מתקיים $v(\psi) = t$
- ψ היא ספיקה אם קיימת איווליואציה כלשהי v כך ש- $v(\psi) = t$
- ψ היא סתירה אם לכל איווליואציה v מתקיים $v(\psi) = f$

5 המשכיות של ספסיפיקציות

להלן דוגמה בטקסט, שנמיר אותה לטענות מתמטיות;

1. המסר המאבחן שמור בבאפר או משודר שוב.
2. המסר המאבחן לא נמצא בבאפר.
3. אם המסר המאבחן שמור בבאפר, אז הוא משודר מחדש.

נכתוב את הטענות שקיבלנו כך;
$s \vee r,\ \neg s,\ s \to r$
מכל הטענות, נקבל ש- $\neg r$ (המסר לא משודר מחדש)

6 תרגילים

6.1

יהיו פורמלות מעל $\{\wedge,\vee,\neg\}$. נסמן כפולה של פורמולה A ב־ A^* ומוגדרת אינדוקטיבית כך;

$$p^* = \neg p$$

$$(A \vee B)^* = A^* \wedge B^*$$

$$(A \wedge B)^* = A^* \vee B^*$$

$$(\neg A)^* = \neg A^*$$

נרצה להוכיח שלכל פורמולת A מתקיים $A^* \equiv \neg A$.

נוכיח זאת באינדוקציה.

1. בסיס האינדוקציה: $A = p$ כך ש־ $A^* = \neg p$ כך שבמקרה זה הטענה נכונה.
2. צעד האינדוקציה:
   (א) $A = X \vee Y$ ולכן $A^* = X^* \wedge Y^*$. לפי הנחת האינדוקציה מתקיים $X^* \equiv \neg X,\ Y^* \equiv \neg Y$
   (ב) ניתן להסיק בעזרת טבלת אמת ש־ $A^* \equiv \neg A$
   (ג) מכאן נקבל שעבור $A = \neg X$ נקבל

$$A^* = \neg(\neg X) = \neg X^* \equiv \neg A$$

כנדרש.

ניתן כמובן גם להוכיח עבור המקרה $A = X \vee Y$, אך עוד לא הוכחנו את משפט דה־מורגן (בקורס הזה)

6.2

הוכיחו ש־ $\vdash_{CPL}$ היא $consequence\ relation$ (יחס נביעה).

6.2.1 תזכורת ־ יחס נביעה

יחס נביעה לשפה $\mathcal{L}$ הוא יחס בינארי $\vdash \subseteq 2^{F_{\mathcal{L}}} \times F_{\mathcal{L}}$ שמקיים את התכונות הבאות;

- רפלקסיביות:
  $if\ \ \psi \in \Gamma\ then\ \Gamma \vdash \psi$
  כלומר, סדרה של אקסיומות Γ שכוללת את ψ, צריכה כמובן גם לגרור את ψ (כאשר היא נכונה) לפי יחס הנביעה אם היא מתקיימת.
- מונוטוניות:
  $if\ \ \Gamma \vdash \psi\ and\ \Gamma \subseteq \Gamma',\ then\ \Gamma' \vdash \psi$
  כלומר, אם סדרת אקסיומות Γ גוררת ψ והיא תת־סדרה של Γ' אזי בהכרח Γ' גוררת את ψ.
- טרנזיטיביות:
  $if\ \ \Gamma \vdash \psi\ and\ \Gamma, \psi \vdash \phi\ then\ \Gamma \vdash \phi$
  כלומר, אם סדרת אקסיומות Γ גוררת את ψ ובחיתוך עם ψ שתיהן ביחד גוררות את ϕ אזי רק Γ כשלעצמה גוררת את ϕ.