הרצאה 4 - שלמות פונקציונלית, קבוצת קשרים שלמה

שרון מלטר, אתגר 17

13 בספטמבר 2024

תוכן עניינים

1 בפרקים הקודמים

למדנו מהי לוגיקה, וכיצד להגדיר אותה עם סינטקס וסמנטיקה. כמו כן הגדרנו מהו יחס נביעה (יחס המקיים רפלקסיביות, מונוטוניות וטרנזיטיביות)
והיום, נראה כיצד הסיפור ממשיך, היכונו לדרמה.

2 משפט ההחלפה - $Replacement\ Theorem$

אם $X \equiv Y$ (כלומר שני הביטויים שקולים לוגית) אזי $\psi \equiv \psi'$ כאשר ψ' היא נוסחה המתקבלת ע"י החלפת כל המופעים של X ב־ ψ ב־ Y.

2.1 דוגמה

מתקיים $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$ **ולכן מתקיים** $C \rightarrow \neg(A \wedge B) \equiv C \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$
כן, משפט ההחלפה הוא עד כדי כך פשוט.

3 צורות נורמליות - $Normal\ Forms$

3.1 CNF

פורמולה A היא בצורת CNF $(Conjunctive\ Normal\ Form)$ אם היא מהצורה $C_1 \wedge ... \wedge C_m$ כאשר כל C_i הוא מהצורה $B_i^1 \vee ... \vee B_i^{n_i}$ כאשר כל B_i^j הוא אטום או ערך נגדי של אטום.

3.1.1 דוגמה

דוגמה לנוסחה מצורת CNF:

$$(p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee p_3)$$

מדהים.

3.2 DNF

פורמולה A היא בצורת DNF אם היא מהצורה $D_1 \vee ... \vee D_m$ כאשר כל D_i היא מהצורה $B_i^1 \wedge ... \wedge B_i^{n_i}$ וכל B_i^j היא אטום או ערך נגדי של אטום.

3.2.1 דוגמה

הדוגמה:

$$(p_1 \wedge \neg p_2) \vee (p_2 \wedge p_3) \vee \neg p_4$$

כעת נעבור למספר שקילויות חשובות להגדרות ולתרגילים הבאים.

4 שקילויות חשובות

להלן מספר קבוצות של שקילויות, שעוזרות לנו לבצע כל מיני דברים כיפיים. יותר חשוב להבין כיצד אנחנו מגיעים לאותן שקילויות מאשר לשנן אותן.

4.1 קבוצה 1 ־ שלילה

זוהי קבוצה המאפשרת למצוא **לכל נוסחה** נוחסה שקולה ב־ $NNF\ (Negation\ Normal\ Form)$, שזוהי צורה בה $\neg$ מופיע רק לפני פסוקים אטומיים.
השקילויות הן:

1. $\neg\neg A \equiv A$
2. $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
3. $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
4. $\neg(A \to B) \equiv A \wedge \neg B$

4.2 קבוצה 2

קבוצה זו מאפשרת לנו להשתמש בכל הפעולות בעזרת $\neg$ וקשר לוגי נוסף בלבד. תענוג.

1. $A \to B \equiv \neg A \vee B$
2. $A \vee B \equiv \neg A \to B$
3. $A \wedge B \equiv \neg(A \to \neg B)$

4.3 קבוצה 3

קבוצה זו מאפשר לנו לכתוב $A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_n$ או $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_m$ ללא סוגריים. מטורף. להלן שלושת סוגי השקילוית שמאפשרות זאת:

1. אידמפוטנטיות ־
   (א) $A \vee A \equiv A$
   (ב) $A \wedge A \equiv A$
2. קומוטטיביות ־
   (א) $A \vee B \equiv B \vee A$
   (ב) $A \wedge B \equiv B \wedge A$
3. אסוציאטיביות ־
   (א) $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$
   (ב) $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$

4.4 קבוצה 4

קבוצה זו מאפשרת להגיע מצורת NNF לצורת CNF ו־ DNF, כלומר קוניוקטיביות או דיסיוקטיביות, כלומר לצורות נורמליות. שתי סוגי השקילויות שמאפשרות זאת הן:

1. דיסטריבוטיביות:
   (א) $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
   (ב) $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
2. בליעה $(absorption)$ ־
   (א) $A \vee (A \wedge B) \equiv A$
   (ב) $A \wedge (A \vee B) \equiv A$

4.5 קבוצה 5

קבוצה זו מאפשרת לנו לזהות רדוקציות של גרירות.

1. $A \to (B \to C) \equiv (A \wedge B) \to C$
2. $A \to (B \wedge C) \equiv (A \to B) \wedge (A \to C)$
3. $(A \vee B) \to C \equiv (A \to C) \wedge (B \to C)$
4. $(\neg A \to \neg B) \equiv B \to A$

4.6 קבוצה 6

זו סתם שקילות לא מיוחדת:

1. $A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$

בואו ננסה באמת להשתמש בכל מה שלמדנו כאן.

4.7 תרגיל

מצאו נוסחה שקולה ל־ $p \leftrightarrow (q \wedge \neg p)$ ב־ CNF. פתרון בעמוד הבא.

פתרון:

$$p \leftrightarrow (q \wedge \neg p) \equiv (p \rightarrow (q \wedge \neg p)) \wedge ((q \wedge \neg p) \rightarrow p)$$

$$p \leftrightarrow (q \wedge \neg p) \equiv (p \rightarrow (q \wedge \neg p)) \wedge (\neg(q \wedge \neg p) \vee p)$$

$$p \leftrightarrow (q \wedge \neg p) \equiv (p \rightarrow (q \wedge \neg p)) \wedge (\neg q \vee p \vee p)$$

$$p \leftrightarrow (q \wedge \neg p) \equiv (p \rightarrow (q \wedge \neg p)) \wedge (\neg q \vee p)$$

$$p \leftrightarrow (q \wedge \neg p) \equiv (\neg p \vee (q \wedge \neg p)) \wedge (\neg q \vee p)$$

$$p \leftrightarrow (q \wedge \neg p) \equiv (\neg p \vee (\neg p \wedge q)) \wedge (\neg q \vee p)$$

$$p \leftrightarrow (q \wedge \neg p) \equiv (\neg p \vee (\neg p \wedge q)) \wedge (\neg q \vee p)$$

$$p \leftrightarrow (q \wedge \neg p) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q \vee p)$$

$$p \leftrightarrow (q \wedge \neg p) \equiv \neg p$$

זהו הפישוט המינימלי שנוכל לבצע.
בעמוד הבא נעבור לנושא חדש ולעוד כמה תרגילים.

5 שלמות פונקציונלית - $Functional\ Completeness$

5.1 $Truth-Functionality$

<u>הגדרה:</u> ערך האמת שמוענק ל- $\tilde{\diamond}(\psi_1,...,\ \psi_n)$ תלוי רק בערכי האמת שניתנים ל- $\psi_1,...,\ \psi_n$.

5.2 פונקציית אמת - $Truth\ function$

<u>הגדרה:</u> תהי נוסחה $\psi(p_1,...,\ p_n)$ המורכבת מהאטומים $p_1,...,\ p_n$ בלבד. פוקנציית האמת $F_\psi:\{t,\ f\}^n\to\{t,\ f\}$ מוגדרת כך;

$$F(x_1,...,\ x_n)=v(\psi(p_1,...,\ p_n)),\ where\ v(p_i)=x_i\ for\ 1\leqslant i\leqslant n$$

(כן, v היא איווליואציה)

5.3 תרגיל

מהי פונקציית האמת של הנוסחה $A=(p_1\wedge\neg p_2)\vee(\neg p_1\wedge p_2)$?

פתרון בעמוד הבא.

פתרון:

p_1	p_2	A
t	t	f
t	f	t
f	t	t
f	f	f

שימו $\heartsuit$; שתי פונקציות לוגיות הן שקולות אמ"ם פונקציות האמת שלהן זהות.
לכן ניתן להשתמש בטבלאות אמת כדי להוכיח או להפריך שקילות.

לסקרנים מביניכם עלתה השאלה הבאה־ האם לכל פונקציית אמת f קיימת נוסחה A כך ש־ $F_A = f$, כאשר F_A היא פונקציית האמת של A?
על שאלה זו ניתן לענות בעזרת $\sim$ שלמות פונקציונלית $\sim$

5.4 הגדרה

הגדרה:
סט של קשרים לוגיים S היא שלמה פונקציונלית $(functionality\ complete)$ אם לכל פונקציה $F : \{t,\ f\}^n \to \{t,\ f\}$ קיימת נוסחה $\psi(p_1, ...,\ p_n)$ שיש בה רק קשרים לוגיים רק מ־ S כך ש־ $F = F_\psi$.

כלומר, זוהי הגדרה המתאימה לשאלה ששאלנו מקודם. ובהמשך לאותה שאלה־ האם $\{\vee,\ \wedge,\ \neg\}$ היא שלמה פונקציונלית? ־ כן!
נוכיח זאת בהמשך.

5.5 משפט

משפט:
לכל פונקציית אמת f בעלת n פסוקים אטומים, קיימת נוסחה A מעל $\{p_1, ...,\ p_n\}$, אשר משתמשת רק בקשרים $\vee,\ \wedge,\ \neg$ כך ש־ $f = F_A$.

כלומר, לכל פונקציית אמת קיימת נוסחה עם הקשרים $\{\vee,\ \wedge, \neg\}$ בלבד שהיא פונקציית האמת שלה.

5.5.1 הוכחה

הוכחה:
נוכיח באינדוקציה על n, מספר הפסוקים האטומיים של פונקציית אמת f.

בסיס: עבור $n = 1$, יש בסך הכל 4 פונקציות אמת אפשרויות (יש שתי אפשרוית לערכים של פסוק האמת ושתי אפשרויות לערך הפונקציה)
להלן 4 פונקציות שפונקציות האמת שלהן הן כל אותן 4 פונקציות אמת;

1.
$$A_1 = p \vee \neg p$$

2.
$$A_2 = p \wedge \neg p$$

3.
$$A_3 = p$$

.4

$$A_4 = \neg p$$

אינדוקציה: נניח שהמשפט נכון לכל מספר טבעי $n \geqslant 1$ ונוכיח את נכונותו עבור $n+1$.
תהי f פונקציית אמת עם $n+1$ פסוקים אטומיים. נגדיר בעזרתה שתי פונקציות נוספות;

$$f_1(x_1, ..., \ x_n) = f(x_1, ..., \ x_n, \ t)$$

$$f_2(x_1, ..., \ x_n) = f(x_1, ..., \ x_n, \ f)$$

מאחר ש־ $f_1, \ f_2$ הן בעלות n פסוקים אטומיים, לפי הנחת האינדוקציה קיימות פורמולות $B, \ C$ עבור $\{p_1, ..., \ p_n\}$ כך ש־ $f_1 = F_B, \ f_2 = F_C$. נבחר $A = (p_{n+1} \wedge B) \vee (\neg p_{n+1} \wedge C)$
אזי מתקיים $F_A = f$, כך שזוהי דוגמה אלמונית לנכונות המשפט עבור $n+1$.

5.6 קבוצות קשרים שלמות נוספות

ניזכר בשקילויות שלמדנו מקודם, ונשים לב ש־

- $$A \to B \equiv \neg A \vee B$$
- $$A \vee B \equiv \neg A \to B$$
- $$A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$$
- $$A \wedge B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$$

כלומר, ניתן לקבל עם הקשרים $\{\to, \neg\}$, $\{\wedge, \neg\}$, $\{\vee, \neg\}$ את כל שאר הקשרים, כך ששלושת קבוצת אלה הן קבוצות קשרים שלמות משל עצמן.

דוגמה נוספת תהי נוסחת האמת $\oplus$ המוגדרת;

p_1	p_2	$p_1 \oplus p_2$
t	t	f
t	f	t
f	t	t
f	f	t

מתקיים $A \oplus A \equiv \neg A$ ו־ $A \vee B \equiv (A \oplus A) \oplus (B \oplus B)$ כך שמאחר שהקבוצה $\{\neg, \vee\}$ היא קבוצת קשרים שלמה, גם $\{\oplus\}$ היא קבוצת קשרים שלמה (:O)

6 בחזרה לצורת DNF

משפט:
לכל פורמולה יש צורת DNF שקולה.

מוזמנים לגגל את ההוכחה.

7 תרגיל אחרון

7.1

הגדירו קשר לוגי הפועל על שלושה פיסוקים, "אם p אז q ואחרת r" עבור פסוקים $p,\ q,\ r$ כך שאם $v(p)=t$ אז $v(p)=t$ ואם $v(p)=f$ אז $v(r)=t$.

7.2

מצאו צורות $CNF,\ DNF$ שקולות לוגית לקשר שהגדרתם מקודם.

פתרונות בעמוד הבא.

7.3 פתרונות

7.3.1

הגדרת הקשר:

p	q	r	if p then q else r
t	t	t	t
t	t	f	t
t	f	t	f
t	f	f	f
f	t	t	t
f	t	f	f
f	f	t	t
f	f	f	f

7.3.2

תהי A צורה ב־ CNF של "אם p אז q ואחרת r";

$$A \equiv (p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow r)$$

$$A \equiv (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg r)$$

ותהי B צורה ב־ DNF של "אם p אז q ואחרת r";

$$B \equiv (p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow r)$$

$$B \equiv (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg r)$$

$$B \equiv ((\neg p \vee q) \wedge p) \vee ((\neg p \vee q) \wedge \neg r)$$

$$B \equiv (p \wedge (\neg p \vee q)) \vee (\neg r \wedge (\neg p \vee q))$$

$$B \equiv (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) \vee (\neg r \wedge \neg p) \vee (\neg r \wedge q)$$

$$B \equiv (p \wedge q) \vee (\neg r \wedge \neg p) \vee (\neg r \wedge q)$$