

# מבוא ללוגיקה, הרצאה 8 - לוגיקה מסדר 1

שרון מלטר, אתגר 17

13 בנובמבר 2024

## תוכן עניינים

1	המגבלה של <i>CPL</i> .....	2
2	שפות מסדר ראשון .....	2
2.1	הגדרה .....	2
2.2	דוגמאות .....	2
2.3	מושגים - <i>Terms</i> .....	3
2.4	פורמולות .....	3
2.4.1	דוגמה .....	3
2.5	פורמליזציה .....	3
3	משתנים קשורים וחופשיים .....	3
3.1	משתנים קשורים - הגדרה .....	3
3.2	פרמטרים חופשיים - הגדרה אינדוקטיבית עבור מושג .....	3
3.3	משתנים חופשיים - הגדרה אינדוקטיבית עבור פורמולה .....	4

## 1 המגבלה של CPL

ניקח לדוגמה את שלושת המשפטים הבאים;

1. כל בני האדם הם בני תמותה.

2. סוקרטס הוא בן אדם.

3. אזי, סוקרטס הוא בן-תמותה.

בשביל טענות מסוג זה, אנחנו צריכים שפה פורמלית בשביל **אובייקטים ויחסים ביניהם**. לשם כך, יש לנו שפות מסדר ראשון.

## 2 שפות מסדר ראשון

### 2.1 הגדרה

שפה מסדר ראשון  $L$  מורכבת מ-

•  $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, (, )$

• רשימה ממוספרת של משתנים  $x_1, x_2, \dots$

•  $\forall, \exists$

• חתימה שכוללת;

– סט לא ריק של סמלי פרדיקטים (יחסים או תכונות)  $P^i$  כאשר  $i$  מציין את מספר הארגומנטים שמקבל  $P$

– סט של קבועים  $c_1, c_2, \dots$

– סט של סמלים  $f^i$  כאשר  $i$  מציין את מספר הארגומנטים שמקבל  $f$ .

### 2.2 דוגמאות

שפת האריתמטיקה:

• קבועים: 0

• סמלי פונקציות:  $s^1, +^2, \times^2$

• סמלי פרדיקטים:  $=^2, <^2$

שפת הגיאומטריה האוקלידית:

• קבועים: אין

• סמלי פונקציות: אין

• סמלי פרדיקטים:  $=^2, Line^1, Point^1, On^2, Between^3$

שפת תורת הקבוצות:

• קבועים:  $\emptyset, \mathbb{N}$

• סימני פונקציות:  $\cap^2, \cup^2$

• סימני פרדיקטים:  $=^2, \subseteq^2$

## 2.3 מושגים - Terms

תהי  $L$  שפה מסדר-ראשון. הסט  $Trm_L$  מוגדר באופן אינדוקטיבי כך:

- כל קבוע של  $L$  נמצא ב- $Trm_L$ .
- כל משתנה של  $L$  נמצא ב- $Trm_L$ .
- אם  $t_1, \dots, t_n \in Trm_L$  ו- $f$  היא סימן פונקציה המקבלת  $n$  ארגומנטים, אז  $f(t_1, \dots, t_n)$  נמצאת ב- $Trm_L$ .

## 2.4 פורמולות

תהי  $L$  שפה מסדר-ראשון. סט הפורמולות  $Frm_L$  מוגדר באופן אינדוקטיבי כך;

- $P^n(t_1, \dots, t_n)$  נמצא ב- $Frm_L$  כאשר  $P$  הינו סימון יחס עם  $n$  ארגומנטים ו- $t_1, \dots, t_n \in Trm_L$ .
- אם  $A, B \in Frm_L$  אזי  $(\neg A), (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B) \in Frm_L$ .
- אם  $x$  הינו משתנה של  $L$  ו- $A \in Frm_L$ , אזי  $\forall x(A), \exists x(A) \in Frm_L$ .

### 2.4.1 דוגמה

להלן פורמולה של שפת הגיאומטריה האוקלידית;

$$Point(p_1) \wedge Point(p_2) \wedge Line(I) \wedge On(p_1, I) \wedge On(p_2, I) \rightarrow (\forall I'(Line(I') \wedge On(p_1, I') \wedge On(p_2, I') \rightarrow (I, I')))$$

## 2.5 פורמליזציה

נפרמל בעזרת שפה מסדר ראשון את המשפט הבא;  
"כל בני האדם הם בני תמותה"

$$\forall x(Human(x) \rightarrow Mortal(x))$$

## 3 משתנים קשורים וחופשיים

### 3.1 משתנים קשורים - הגדרה

האופרטורים  $\forall, \exists$  הם **אופרטורים קשורים**. כמוהם גם  $\{x | x > 1\}$ , אינטגרל... כאשר משנים שמות (כלומר את הכמות) של פרמטרים קשורים (כלומר פרמטרים הניתנים לאופרטורים קשורים) המשמעות של הטענה לא משתנה. זהו לא המקרה עם פרמטרים חופשיים.

### 3.2 פרמטרים חופשיים - הגדרה אינדוקטיבית עבור מושג

עבור מושג  $t \in Trm_L$  מוגדר הסט  $FV(t)$  (Free Variables) באופן אינדוקטיבי כך;

- $FV(c) = \emptyset$
- $FV(x) = \{x\}$
- $FV(f(t_1, \dots, t_n)) = FV(t_1) \cup \dots \cup FV(t_n)$

### 3.3 משתנים חופשיים - הגדרה אינדוקטיבית עבור פורמולה

עבור  $A \in \text{Frm}_L$  הסט  $FV(A)$  מוגדר באופן אינדוקטיבי כך:

- $FV(P(t_1, \dots, t_n)) = FV(t_1) \cup \dots \cup FV(t_n)$  •
- $FV(A \circ B) = FV(A) \cup FV(B)$ ,  $FV(\neg A) = FV(A)$  •
- $FV(\forall x A) = FV(\exists x A) = FV(A) - \{x\}$  •

מושג ופורמולה נקראים **סגורים** אם לא קיימים לו משתנים חופשיים.

באופן כללי, משתנה הוא **חופשי** אם הוא לא נכלל במספר הארגומנטים של פונק' / מושג (למשל כאשר נכלל  $\forall/\exists$ ) ומשתנה הוא **קשור** אם הוא כן חלק מהארגומנטים הסופיים של פונק' / מושג.