אלגוריתמים מבוזרים ־ הרצאה 6, נאותות ועקביות

שרון מלטר, אתגר 17

12 בנובמבר 2024

תוכן עניינים

1 בפרקים הקודמים, של מבוא ללוגיקה

- למדנו מהי לוגיקה (שפה פורמלית ונוסחאות מנוסחות היטב)
- למדנו את תחשיב הפסוקים (לוגיקה פסוקית) הסינטקטי והסמנטי.
כזכור, בסמנטיקה S מתקיים $\Gamma \vdash_S \psi$ אם כל מודל של Γ הוא מודל של ψ ב־ S.
תחבירית (סינטקטית), מתקיים $\Gamma \vdash_D \psi$ אם ל־ ψ קיימת הוכחה מ־ Γ ממערכת הדדוקציה D.
- שלמות פונקציונלית.
- מערכת הוכחה הילברטיאנית ל־ CPL (כזכור, ממשפט הנאותות יחס הנביעה $\vdash_{CPL}$ שקול להוכחה במערכת ההוכחה HPC)

והיום, נרחיב על **נאותות** ונלמד על **עקביות**. הישארו איתנו.

2 עקביות ב־ HPC

2.1 הגדרות לעקביות ב־ HPC

ישנן שתי הגדרות לעקביות ב־ HPC (טובים השניים מן האחד או משהו) להלן ההגדרות;

1. קבוצת פורמולות T היא **עקבית** ב־ HPC אם לא קיימת פורמולה $\psi \in F_{cl}$ כך ש־ $T \vdash_{HPC} \psi$ ו־ $T \vdash_{HPC} \neg\psi$.
2. סט פורמולות T הוא **עקבי** ב־ HPC אם קיימת נוסחה $\psi \in F_{cl}$ כך ש־ $T \nvdash_{HPC} \psi$.

באופן אינטואיטיבי, הגדרה 1 אומרת "סט פורמולות הוא עקבי אם לא ניתן להוכיח ממנו טענה ואת השלילה שלה."
הגדרה 2 אומרת "סט פורמולות הוא עקבי אם קיימת פורמולה מוגדרת היטב של CPL שלא נובעת מהסט."
נראה שבסך הכל שתי הטענות הן שקולות.

2.2 שקילות ההגדרות

נוכיח שההגדרות שקולות, משני כיוונים:

1. כיוון ראשון: יהי T סט פונקציות שהינו עקבי ב־ HPC לפי הגדרה 1. נוכיח שהוא עקבי ב־ HPC גם לפי הגדרה 2.
אם מתקיים $T \nvdash_{HPC} \psi$, אז סיימנו. נניח שזהו לא המקרה. כלומר, שמתקיים $T \vdash_{HPC} \neg\psi$. לפי הגדרה 1, לא יכול להתקיים $T \vdash_{HPC} \psi$ וגם $T \vdash_{HPC} \neg\psi$. כלומר מתקיים $T \nvdash_{HPC} \neg\psi$, כך שהגדרה 2 מתקיימת עם הנוסחה המוגדרת היטב $\neg\psi$.
2. כיוון שני: יהי T סט פונקציות שהינו עקבי ב־ HPC לפי הגדרה 2. נניח בשלילה שהוא עקבי ב־ HPC לפי הגדרה 1.
אזי קיימת פורמולה $\psi \in F_{cl}$ כך ש־ $T \vdash_{HPC} \psi$ וגם $T \vdash_{HPC} \neg\psi$. ישנו משפט ב־ HPC, $(\psi \to (\neg\psi \to \alpha))$ (נוכיח בהמשך) אזי, מאחר ש־ $\psi, \neg\psi$ נובעים מ־ T, לכל $\alpha \in F_{cl}$ מתקיים $T \vdash_{HPC} \alpha$. כלומר, לא קיימת נוסחה $\alpha \in F_{cl}$ כך ש־ $T \nvdash_{HPC} \alpha$, כלומר הסט לא מקיים את הגדרה 2. קיבלנו סתירה ולכן הגדרה 2 גוררת את הגדרה 1.

כלומר, ניתן לבחור להשתמש בכל הגדרה לפי הנוחות.

2.2.1 הוכחת משפט ב־ HPC

נוכיח ש־ $\psi \to (\neg\psi \to \alpha)$ ב־ HPC.

להלן סדרת ההוכחה:

1. ψ
מהנחה.
2. $(\neg\psi \to \alpha) \to (\psi \to (\neg\psi \to \alpha))$
מאקסיומה 1
3. $\psi \to (\neg\alpha \to \psi)$
מאקסיומה 1
4. $\neg\alpha \to \psi$
$MP(1,3)$
5. $(\neg\alpha \to \psi) \to (\neg\psi \to \alpha)$
מאקסיומה 3
6. $\neg\psi \to \alpha$
$MP(4,5)$
7. $\psi \to (\neg\psi \to \alpha)$
$MP(6,2)$

2.3 דוגמה ־ אי־עקביות ב־ HPC, תרגיל

נוכיח שהנוסחה $\rho, \neg\rho \vdash_{HPC} \psi$ (כלומר, שאם ρ וגם $\neg\rho$ אזי ψ) **לא עקבית** ב־ HPC.

להלן סדרת הוכחה מ־ $\rho, \neg\rho$ לדוגמה אלמונית של נוסחה, ψ:

1. ρ
מהנחה.
2. $\neg\rho$
מהנחה.
3. $(\neg\psi \to \neg\rho) \to (\rho \to \psi)$
מאקסיומה 3.
4. $\neg\rho \to (\neg\psi \to \neg\rho)$
מאקסיומה 1
5. $\neg\psi \to \neg\rho$
$MP(2,4)$
6. $\rho \to \psi$
$MP(3,5)$
7. ψ
$MP(1,6)$

באותו אופן ניתן להוכיח $\rho, \neg\rho \vdash_{HPC} \neg\psi$ כך שסט זה הינו **לא־עקבי**, כנדרש.

2.3.1 הסקה ממשפט הדדוקציה

מההוכחה הקודמת, וממשפט הדדוקציה, נקבל שמתקיים $\vdash_{HPC} \neg\rho \to (\rho \to \psi)$.

2.4 משפט

שאלה שאולי עלתה לכם לראש, היא איך שומרים על עקביות?
כלומר, אם נתון סט עקבי Γ ונתונה נוסחה ψ, איך נדע האם הסט $\Gamma \cup \{\psi\}$ הוא עקבי?
לשם כך יש לנו את המשפט הבא :)

<u>משפט:</u> בהינתן שני סטים עקביים ב־ HPC של נוסחאות $\Gamma, \ \{\psi\}$ הסט $\Gamma \cup \{\psi\}$ הוא עקבי ב־ HPC אם"ם $\Gamma \nvdash_{HPC} \neg\psi$.

נוכיח את שני כיווני הטענה.

2.4.1 הוכחה

<u>כיוון ראשון:</u> נניח ש־ $\Gamma \cup \{\psi\}$ הוא סט עקבי ב־ HPC ונניח בשלילה ש־ $\Gamma \nvdash_{HPC} \neg\psi$.
אזי, מאחר ש־ $\Gamma \vdash_{HPC} \neg\psi$, לפי העקביות של $\vdash_{HPC}$ מתקיים $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash_{HPC} \neg\psi$. אך לפי הרפלקסיוביות של $\vdash_{HPC}$ מתקיים גם $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash_{HPC} \psi$ אזי קיבלנו סתירה לכך ש־ $\Gamma \cup \{\psi\}$ הינו סט עקבי (ע"פ הגדרה 1)

<u>כיוון שני:</u> נניח כי $\Gamma \nvdash_{HPC} \neg\psi$ ונוכיח כי $\Gamma \cup \{\psi\}$.
תחילה, נוכיח משפט ב־ HPC, $\vdash_{HPC} (\neg\psi \to \psi) \to \psi$, עם שימוש במשפט הדדוקציה;

1. $\neg\psi \to (\psi \to \neg(\neg \to \psi))$
   ־ מאקסיומה 1.
2. $(\neg\psi \to (\psi \to \neg(\neg))) \to ()$ *

באותו אופן, ניתן להוכיח פורמולה שנייה $\neg\psi \vdash_{HPC} \neg\psi \to \psi$ מעולה, אבל איך שתי הפורמולות האלה עוזרות לנו? ־
נניח בשלילה ש־ $\Gamma \cup \{\psi\}$ לא עקבי, כך שלפי הגדרה 1 מתקיים $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash_{HPC} \neg\psi$. אזי, לפי משפט הדידקציה, $\Gamma \vdash_{HPC} \psi \to \neg\psi$. לפי המשפט השני שהוכחנו, מתקיים $\neg\psi \vdash_{HPC} \psi \to \neg\psi$ אזי $\Gamma \vdash_{HPC} \neg\psi$. קיבלנו סתירה, כך שהכיוון השני של המשפט נכון.

3 השוואה בין סינטקס לסמנטיקה

Syntactic	Semantic
ψ is a theorem	ψ is a tautology
$T \vdash_{HPC} \psi$	$T \vdash_{CPL} \psi$
$T \cup \{A\} \vdash_{HPC} B$ iff $T \vdash_{HPC} A \to B$	$T \cup \{A\} \vdash_{CPL} B$ iff $T \vdash_{CPL} A \to B$
T is consistent (in HPC)	T has a model (in CPL)