שרון מלטר, אתגר 17

13 בספטמבר 2024

תוכן עניינים

1 בפרקים הקודמים, של מבוא ללוגיקה

למדנו מהי לוגיקה־ שפה פורמלית ופונקציות מוגדרות היטב הבונות אותה.
תחשיב הפסוקים ($propositional\ logic$) ־ סינטקס וסמנטיקה.
בהרצאה האחרונה למדנו גם על שלמות פונקציונלית.

כעת נחזור למושג ישן־חדש, ונראה את שתי הדרכים להגדיר יחס נביעה.

2 דרכים להגדיר יחס נביעה ($consequence\ relation,\ (crs)$)

הדרכים:

1. סמנטית ־
$$\Gamma \vdash_S \psi \ if\ every\ "model"\ of\ \Gamma\ is\ a\ "model"\ of\ \psi\ in\ the\ semantics\ S$$
כלומר, הפסוק ψ נובע מקבוצת הפסוקים Γ אם כל מודל של Γ הוא גם מודל של ψ בסמנטיקה S.

2. סינטקטית ־
$$\Gamma \vdash_D \psi \ if\ \psi\ has\ a\ proof\ from\ \Gamma\ in\ the\ deduction\ system\ D$$
כלומר, הפסוק ψ נובע מקבוצת הפסוקים Γ אם קיימת לו הוכחה מאותה קבוצת פסוקים במערכת ההסקה D.

כמו כן, נלמד גם את ההגדרה הפורמלית לעוד כלי שכבר השתמשנו בו רבות, מערכת הוכחות.

3 מערכות הסקה

3.1 הגדרה

מערכת הסקה D עבור שפה פורמלית $\mathcal{L}$ מורכבת מ־

1. סט של **אקסיומות** (נוסאות של $\mathcal{L}$)
2. סט של **חוקי הסקה / גזירה** ($inference\ rules$), אשר מראים כיצד ניתן להסיק נוסחאות חדשות ל־ $\mathcal{L}$.

אך, מה לגבי ההוכחות עצמן?

<u>הגדרה:</u>
הוכחה של פסוק ψ במערכת הוכחה D היא סדרה סופית של פורמולות כאשר הפורמולה האחרונה היא ψ וכל פורמולה היא אקסיומה של D, או שניתן להגיע דרך פורמולות קודמות בסדרה ע"י הפעלת חוק הסקה של D.
נבין זאת יותר בעזרת דוגמה.

3.2 דוגמה

תהי $\mathcal{L}$ שפת המחרוזות מעל $\{a, b, c\}$ ותהי קבוצת אקסיומות $\{aa, bb, cc\}$. קבוצת חוקי ההסקה לכל מחרוזת s היא
$$\frac{as}{bas},\ \frac{bs}{abs}$$

3.3 מערכת ההוכחה HPC

3.3.1 הגדרה

מערכת ההוכחה הראשונה שנלמד, והאחת שעל שמה קרויה ההרצאה.
סכמת האקסיומות של המערכת HPC היא:

1.
$$A \to (B \to A)$$

2.
$$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$$

3.
$$(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$$

וחוק ההסקה שלה הוא:

$$\frac{A,\ \ A \to B}{B} MP\ (Modus\ \ Ponens)$$

זהו חוק מאוד פשוט, הוא רק אומר שאם A מתקיים ו־ A גורר את B, אז B מתקיים.

3.3.2 משפטים ב־ HPC

נלמד קצת על משפטים שבמערכת HPC.
פורמולה A שמקיימת $A \in F_{cl}$ היא **משפט** ב־ HPC, ומסומנת ב־ $\vdash_{HPC} A$ אם ל־ A יש הוכחה מ־ HPC
(הגדרנו הוכחה מקודם) קבוצת כל המשפטים של HPC נקראת Thm_{HPC}.

כמו כן, כפי שניתן להבין אינטואיטיבית, ישנה גם הגדרה אינדוקטיבית למשפט של HPC;

הגדרה:
בסיס: כל אקסיומה A נמצאת ב־ Thm_{HPC}.

אינדוקציה: אם $A, A \to B \in Thm_{HPC}$ אזי $B \in Thm_{HPC}$.
כלומר, אם $A \in Thm_{HPC}$ ומתקיים A, ואם A גורר את B, אזי $B \in Thm_{HPC}$.

כעת נסדר את המידע החדש בראש בעזרת תרגיל.

3.3.3 תרגיל 1

הוכיחו ש־ $\vdash_{HPC} p \to p$

פתרון בעמוד הבא.

3.3.4 פתרון

בסך הכל מדובר במספר גרירות;

.1

$$(p \to ((p \to p) \to p))$$

- מהאקסיומה הראשונה.

.2

$$(p \to ((p \to p) \to p)) \to ((p \to (p \to p)) \to (p \to p))$$

- מהאקסיומה השנייה.

.3

$$((p \to (p \to p)) \to (p \to p))$$

- $MP(1,2)$

.4

$$(p \to (p \to p))$$

- מאקסיומה 1.

.5

$$(p \to p)$$

- $MP(3,4)$

3.3.5 יחס הנביעה HPC

<u>הגדרה:</u>
מתקיים A $T \vdash_{HPC}$ אם קיימת קבוצה סופית $\Gamma \subseteq T$ כך שקיימת הוכחה ב־ HPC ל־ A מ־ Γ.

<u>כלל היסק:</u> אם A ו־ $A \to (B \in Thm_{HPC}(T))$ אזי $B \in Thm_{HPC}(T)$.

אם כבר משעמם לכם, בואו נעבור לתרגיל :)

3.3.6 תרגיל 2

הוכיחו ש־ $\alpha \to \beta,\ \beta \to \gamma \vdash_{HPC} \alpha \to \gamma$.
פתרון בעמ' הבא.

3.3.7 פתרון

להלן סדרת הוכחה לטענה;

1.

$$\alpha \to \beta$$

- מהנחה.

2.

$$\beta \to \gamma$$

- מהנחה.

3.

$$(\beta \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))$$

- מאקסיומה 1

4.

$$\alpha \to (\beta \to \gamma)$$

- $MP(2,3)$

5.

$$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$$

- מאקסיומה 2

6.

$$(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$$

- $MP(4,5)$

7.

$$\alpha \to \gamma$$

- $MP(1,6)$

מ.ש.ל

כעת נכיר עוד שני חברים שיעזרו לנו מאוד בהוכחות, משפט הדדוקציה ומשפט הנאותות והשלמות.

3.3.8 משפט הדדוקציה

<u>משפט:</u>

$$T \vdash_{HPC} A \to B \ iff \ T \cup \{A\} \vdash_{HPC} B$$

כלומר, נובע $A \to B$ מ־ T ביחס הנביעה HPC אם"ם נובע B מ־ $T \cup \{A\}$ ביחס הנביעה HPC.

3.3.9 משפט הנאותות והשלמות

<u>משפט:</u>

$$T_{CPL} A \ iff \ T \vdash_{HPC} A$$

כלומר, A נובע מ־ T באופן סמנטי אם"ם A נובע מ־ T במודל הסינטקטי.

3.3.10 הוכחת משפט הדדוקציה

נוכיח את שני כיווני המשפט.

כיוון ראשון:
נניח ש־ $T \vdash_{HPC} A \to B$ ונוכיח כי $T \cup \{A\} \vdash_{HPC} B$.
נוכיח עם סדרת ההוכחה הבאה;

1. $T \cup \{A\}$
   - מההנחה.
2. $A \to B$
   - קיימת הוכחה ב־ HPC לכך.
3. B
   - $MP(1,2)$

כיוון שני:
נניח כי $T \cup \{A\} \vdash_{HPC} B$, כך ש־ $B \in Thm_{HPC}(T \cup \{A\})$, ונוכיח ש־ $T \vdash_{HPC} A \to B$.
נוכיח באינדוקציית בנייה, על n, אורך סדרת הוכחה כלשהי לכך ש־ $T \cup \{A\} \vdash_{HPC} B$;

1. צעד הבסיס: $n = 1$
   כלומר, ההנחה שמתקיים $T \cup \{A\}$ היא הוכחה מספקת.
   אם B הוא אקסיומה או $B \in T$, אזי ההוכחה ל־ $A \to B$ ב־ HPC כאשר מתקיים T היא:

   (א) B
   - ההוכחה קיימת.

   (ב) $B \to (A \to B)$
   - מאקסיומה 1.

   (ג) $A \to B$
   - $MP(1,2)$

   אחרת, מתקיים $A = B$, מכיוון שאחרת ההנחה כי מתקיים $T \cup \{A\}$ איננה מספקת להוכיח ש־ $T \cup \{A\} \vdash_{HPC} B$.
   אזי הטענה נכונה בשני מקרי הבסיס.

2. צעד אינדוקציה: נניח את נכונות הטענה עבור מספר טבעי $n \geqslant 1$ ונוכיח אותה עבור $n + 1$.
   נניח כי C הינה הפורמולה הגוררת את B בצעד האחרון של הוכחת $B \in Thm_{HPC}(T \cup \{A\})$ ב־ n צעדים.
   כלומר, מתקיים $C,\ C \to B \in Thm(T \cup \{A\})$.
   לפי הנחת האינדוקציה, מתקיים $T \vdash_{HPC} A \to C$ (אחרת לא הוכחנו את B במקרה של n) וכמו כן $T \vdash_{HPC} A \to (C \to B)$, אחרת מ־ C לא היינו מקבלים את B.

   נשתמש במה שלמדנו עד כה ונציג הוכחה לכך ש־ $T \vdash_{HPC} A \to B$;

   (א) $A \to C$
   - ביססנו כי קיימת הוכחה.

   (ב) $A \to (C \to B)$
   - ביססנו כי קיימת הוכחה.

   (ג) $A \to (C \to B) \to ((A \to C) \to (A \to B))$
   - מאקסיומה 2.

(ד) $((A \to C) \to (A \to B))$
- $MP(2,3)$

(ה) $A \to B$
- $MP(1,4)$

מ.ש.ל

3.3.11 הוכחת משפט הנאותות

נוכיח כיוון אחד של המשפט (הכיוון הנאות), כלומר נוכיח כי $T \vdash_{HPC} A \Rightarrow T \vdash_{CPL} A$.
נעשה זאת בכך שנוכיח באינדוקציה ש־ $A \in Thm(T)$ גורר $T \vdash_{CPL} A$.

1. בסיס: A הינה אקסיומה או $A \in T$.
כל האקסיומות הן טאוטולוגיות, לכן במקרה זה מתקיים $\vdash_{CPL} A$ כך ש־ $T \vdash_{CPL} A$.
אם $A \in T$ מאחר ש־ $\psi \vdash_{CPL} \psi$ מתקיים $T \vdash_{CPL} A$ כנדרש.

2. אינדוקציה: נניח את נכונות הטענה כך ש־ $T \vdash_{HPC} C,\ C \to A$ (כלומר מוכיחים את C ב־ HPC ומוכיחים $C \to A$) כלומר ניתן להוכיח $T \vdash_{CPL} C$ וגם $T \vdash_{CPL} C \to A$.
תהי v איווליואציה שהינה מודל של T. אזי זוהי גם איווליואציה של C ושל $C \to A$. לפי טבלת האמת שלמדנו של $\to$, v הינה איווליואציה גם של A.