מבוא ללוגיקה, הרצאה 7 - קומפקטיות וגדירות

שרון מלטר, אתגר 17

13 בנובמבר 2024

תוכן עניינים

1 הקדמה

היום נלמד על שני מושגים חדשים ויפים, קומפקטיות וגדירות. הישארו איתנו.

2 הקשר בין ספיקות לעקביות

2.1 משפט

קבוצת הנוסחאות Γ הינה עקבית אם"ם קיים לה מודל (כלומר, אם"ם היא ספיקה)

2.2 הוכחה; כיוון ראשון

1. יהי סט נוסחאות Γ ספיק. נסמן ב־ v מודל שלו.
נניח בשלילה ש־ Γ איננו עקבי, כך שלפי הגדרה 1 של עקביות, קיימת נוסחא ψ כך ש־ $\Gamma \vdash_{HPC} \psi$ וגם $\Gamma \vdash_{HPC} \neg\psi$. אזי, לפי משפט הנאותות, מתקיים $\Gamma \vdash_{CPL} \psi$ וגם $\Gamma \vdash_{CPL} \neg\psi$, מה שגורר סתירה, לכן לא ייתכן ש־ Γ גם לא עקבית וגם ספיקה.

2. הכיוון השני של המשפט מסובך יותר. נחזור אליו בהמשך, לאחר שנלמד מספר טענות שימושיות אחרות.

3 הוכחת הכיוון השלם של משפט השלמות והנאותות

כלומר, נוכיח כי $\Gamma \vdash_{CPL} A \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash_{HPC} A$
נניח כי $\Gamma \vdash_{CPL} A$, כך שלסט הנוסחאות $\Gamma \cup \{\neg A\}$ לא קיים מודל. לפי הכיוון שהוכחנו מקודם (על הקשר בין עקביות לספיקות) הסט $\Gamma \cup \{\neg A\}$ איננו עקבי, כך ש־ $\Gamma \vdash_{HPC} A$ (כזכור מההרצאה הקודמת, $\Gamma \cup \{A\}$ עקבי אם"ם לא מתקיים $\Gamma \vdash_{HPC} \neg A$)

4 קומפקטיות

ישנם שני משפטי קומפקטיות, שהינם שקולים;

- לסט נוסחאות T קיים מודל אם"ם לכל קבוצה סופית $\Gamma \subseteq T$ קיים מודל.
- $T \vdash_{CPL} \psi$ אם"ם קיימת קבוצה סופית $\Gamma \subseteq T$ כך ש־ $\Gamma \vdash_{CPL} \psi$.

4.1 אפליקציה: צביעה

גרף $G = (V, E)$ הינו 4־צביע אם ניתן לצבוע את הצמתים בצבעים אדום, ירוק, כחול ולבן כך שאף זוג שכנים אינו באותו צבע.

טענה: גרף הינו 4־צביע אם"ם כל אחד מתתי־הגרפים הסופיים שלו הינו 4־צביע.

רעיון: נבנה תאוריה T_G האומרת כי הגרף G הינו 4־צביע. כלומר, ל־ T_G קיים מודל אם"ם G הוא 4־צביע.

4.2 הוכחת הטענה

יהי גרף $G = (V, E)$ ונסמן $V = \{1, ...\}$ (סט הצמתים)
נשתמש במשתנים האטומיים $red_i,\ green_i,\ blue_i,\ white_i,\ e_{ij}$ לכל $i \neq j$ (כלומר, כל אחד מהם הוא אמת או שקר. הצבע הינו אמת אם צומת i צבוע בצבע זה ו־ $e_{i,j}$ הינו אמת אם הצמתים i, j הינם שכנים)
כמו כן נגדיר $A_i = red_i \vee green_i \vee blue_i \vee white_i$ ואת הטענה $T_A = \{A_1, ...\}$ האומרת "כל צומת צבוע בצבע כלשהו".

כמו כן, לכל i, נגדיר; $B_i^{red} = red_i \to (\neg green_i \wedge \neg blue_i \wedge \neg white_i)$ ונגדיר באופן דומה את $B_i^{white},\ B_i^{green},\ B_i^{blue}$.
הטענה $T_B = \{B_i^c |\ c \in \{white,\ green,\ red,\ blue\}\}$ אומרת "כל צומת צבוע לכל היותר בצבע אחד".

לבסוף, לכל $i \neq j$ נגדיר; $C_{ij}^{red} = red_i \wedge e_{ij} \to \neg red_j$ ובאופן דומה נגדיר את $C_{ij}^{white},\ C_{ij}^{green},\ C_{ij}^{blue}$. הטענה $T_C = \{C_{ij}^c |\ c \in \{white,\ green,\ red,\ blue\}\}$ אומרת "אם קיימת קשת בין הצמתים $i,\ j$ אזי הם לא באותו הצבע".
נשים לב ששלושת הטענות $T_A,\ T_B,\ T_C$ הינן הכרחיות ומספקות לכך ש־ G 4־צביע. לכן, נבחר $T_G = T_A \cup T_B \cup T_C$.
זוהי כל הבנייה. הרבה מילים בשביל רעיון פשוט :)

כעת נוכל להוכיח שאם קיים ל־ T_G מודל, אזי G הינו 4־צביע.
נניח כי קיים מודל ל־ T_G, כך שנוכל לצבוע את צמתי G לפי הצבעים אשר עבורם $T_A,\ T_B,\ T_C$ נכונים, כלומר לפי המשתנים האטומיים $red_i,\ green_i,\ blue_i,\ white_i$. כך נקבל שמתקיימים 3 התנאים ההכרחיים והמספקים לצביעה חוקית.
בעזרת משפט הקומפקטיות, נקבל ששלושת הטענות הבאות שקולות;

- G הינו 4־צביע.
- ל־ T_G קיים מודל.
- לכל תת־קבוצה (סופית) של T_G קיים מודל.

5 קומפקטיות כהגבלה של CPL

סימון: תהי תאוריה T. נסמן ב־ $M(T)$ את סט האיוולואציות שהינן מודלים של T.

הסימון הזה מעלה שאלה; האם לכל קבוצת איווליואציות V קיימת תאוריה T כך ש־ $M(T) = V$?
התשובה היא לא :)
קבוצת איווליואציות שאכן קיימת עבורה תאוריה כזו, מכונה **גדירה** $(definable)$.

5.1 גדירות של הקבוצה הריקה

האם $\emptyset$ היא גדירה? ־
כן!
עבור $T = \{p,\ \neg p\}$.

האם קבוצת כל האיווליואציות גדירה? ־
כן!
עבור $T = \{p \vee \neg p\}$.

5.2 דוגמה־ הוכחה שקבוצה איננה גדירה

נגדיר V_{fin} כקבוצת האיווליואציות אשר נותנות ערך אמת למספר **סופי** למשתנים אטומיים.

נניח בשלילה שקיימת תאוריה T עבורה $M(T) = V_{fin}$ ונבנה את הקבוצה $T \cup \{p_1, p_2 ...,\}$.
יהי v מודל כלשהו של T, אזי v חייב להעניק ערך אמת למספר סופי של אטומים, ולכן לא יכול להיות שהוא מודל של $\{p_1, p_2, ...\}$. אזי, לפי משפט הקומפקטיות, לא קיים מודל ל־ $T \cup \{p_1, p_2, ...\}$.
תהי Γ תת־קבוצה סופית של $T \cup \{p_1, p_2, ...\}$ ותהי איווליואציה v אשר מעניקה ערך אמת לכל האטומים שב־ Γ וערך שקר לשאר האטומים. מאחר ש־ Γ סופית, מתקיים $v \in v_{fin}$.
אזי, לפי ההנחה שלנו, v הינו מודל של T ולכן גם של $T \cap \Gamma$, כך שמאחר ש־ $\Gamma \subseteq T \cup \{p_1, p_2, ...\}$ אזי v הינה גם מודל של $\Gamma \cap \{p_1, p_2, ...\}$.
אנחנו יודעים שלכל תת־קבוצה סופית של $T \cup \{p_1, p_2, ...\}$ קיים מודל ולכן לפי משפט הקומפקטיות גם ל־ $T \cup \{p_1, p_2, ...\}$ קיים.
קיבלנו סתירה, ולכן v_{fin} אכן לא גדירה.