הרצאה 2 - מבוא ללוגיקה, תחשיב הפסוקים הסמנטי

שרון מלטר, אתגר 17

13 בספטמבר 2024

תוכן עניינים

1 פעולות על קבוצות

ועכשיו לרשימת פעולות מפתיעות וחדנדשות שניתן לבצע על קבוצה;

1. חיתוך:
$$x \in A \cap B \ iff \ x \in A \ and \ x \in B$$

2. איחוד:
$$x \in A \cup B \ iff \ x \in A \ or \ x \in B$$

3. הפרש:
$$x \in A - B \ (can \ be \ written \ as \ A \backslash B) \ iff \ x \in A \ and \ x \notin B$$

4. השלמה:
$$x \in \overline{A} \ iff \ x \in U - A, \ where \ U \ is \ the \ local \ universe \ (and \ A \subseteq U)$$

המוח התפוצץ, נכון?
ננוח מהגדרות עם תרגיל.

1.1 תרגיל

הוכיחו ש־ $x \in A \cap (B \cup C) \ = \ (A \cap B) \cup (A \cap C)$
פתרון בעמוד הבא.

1.1.1 פתרון

נוכיח ש־ $A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$ וש־ $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq(A\cap(B\cup C)$.

חלק ראשון: יהי איבר $x\in A\cap(B\cup C)$. לפי הגדרת החיתוך, מתקיים $x\in A$ וגם $x\in(B\cup C)$. נניח לה"כ ש־ $x\in B$, כך שמתקיים $x\in A\cap B$. אזי, לפי הגדרת האיחוד, מתקיים $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$ כך ש־ $x\in A\cap(B\cup C)\Rightarrow x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$ ולכן $A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

חלק שני יהי איבר $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$. אזי, לפי הגדרת האיחוד, מתקיים $x\in A\cap B$ או $x\in A\cap C$. נניח לה"כ ש־ $x\in A\cap B$. אזי לפי הגדרת החיתוך מתקיים $x\in A,\ x\in B$ לכן $x\in(B\cup C)$ אזי $x\in A\cap(B\cup C)$. מכאן נקבל $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)\Rightarrow A\cap(B\cup C)$ כך ש־ $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$.

וכעת נעבור להגדרות חדשות באמת.

2 חוקי הגיון

1. $A\vdash B:\quad if\ A\ then\ B$
2. $\vdash A(x):\quad A(x)\ for\ all\ x$
   כלומר, A היא קבוצה של איברים שמקיימים טענה.
3. $\vdash A\ \vdash B:\ \vdash A\ and\ B$
   כלומר, גם A וגם B נכונים.
4. $\vdash\ or\ B\ \vdash\ if\ A\ then\ C\ \vdash\ if\ B\ then\ C:\ \vdash C$
   כלומר, ידוע לנו שמתקיים A או B וידוע ש־ A גורר C ו־ B גורר A, אזי מתקיים C.
   שימו לב שהסימון $\vdash C$ מציין כי C מתקיים.

אנחנו דיברנו הרבה על חוקי קבוצות וחוקי היגיון, אבל מהי בעצם לוגיקה?

3 מהי לוגיקה?

זוהי שאלה פילוסופית מסובכת, אבל למזלנו יש לה תשובה ברורה ומוגדרת היטב בקורס שלנו.

לוגיקה היא:

1. שפה פורמלית $\mathcal{L}$, המבוססת על אילו $\mathcal{L}$־פורמולות נבנו.
2. יחס נביעה $\vdash$ (נקרא $consequence\ relation$ בלועזית) של שפה $\mathcal{L}$ בין סטים של $\mathcal{L}$־פורמולות ל־ $\mathcal{L}$־פורמולות.
   כלומר, בעזרת ה־ $\mathcal{L}$־פורמולות ניתן ליצור מילים ונוסחאות חדשות לשפה, כך שהן נובעות אחת מן השנייה.

   לדוגמה, ניתן ליצור נוסחה חדשה ל־ $\mathcal{L}$ שמורכבת משתי נוסחאות שקיימות אליה אחת אחרי השנייה. כל פסוק שמתקבל דרך הנוסחה החדשה יכול להתקבל גם דרך שתי המקוריות, לכן גם הוא מהווה $\mathcal{L}$־נוסחה.

נפרט יותר על רכיבי ההגדרה.

3.1 שפה פורמלית

שפה פורמלית היא:

1. אלפבית.

2. חוקים ליצירת $wffs\ (well - formed\ formulas)$.
שימו לב ש־ $wffs$ יכולים להיות גם אותיות מהאלפבית, מכיוון שגם הן יוצרות נוסחאות חדשות לשפה בשילוב עם נוסחאות אחרות.

עדיין ההגדרה קצת מעומעמת, לא?
נעבור למקרה הפרטי של השפה הפורמלית שבעזרתה מגדירים לוגיקת $CPL\ (classical\ propositional\ logic)$

3.2 השפה הפורמלית של CPL

זוהי השפה $\mathcal{L}_{cl}$ היא מורכבת מ־

1. משתנים אטומיים $p_1,\ p_2, \ldots$
2. קשרים לוגיים $\vee,\ \wedge,\ \rightarrow,\ \vdash,\ (,)$
(הנוסחאות של השפה)

מכאן נקבל שה־ $wffs$ של השפה, שהם הקבוצה המסומנת F_{cl}, הם;

1. כל המשתנים האטומיים.
2. אם $\varphi,\ \psi$ הם נוסחאות של השפה $(wffs)$, **אזי גם** $(\varphi \rightarrow \psi),\ (\varphi \vee \psi),\ (\varphi \wedge \psi),\ (\vdash \varphi)$ **הן** $wffs$.

כעת נרד לפרטים של הרכיב השני של לוגיקה, יחס נביעה.

4 עוד על יחס נביעה

4.1 תכונות של יחס נביעה (cr)

יחס נביע cr לשפה פורמלית $\mathcal{L}$ היא יחס בינארי $\vdash \subseteq 2^{F_{\mathcal{L}}} \times F_{\mathcal{L}}$ בעל התכונות הבאות;

- רפלקסיביות: $\varphi \in \Gamma\ \ \Rightarrow\ \ \Gamma \vdash \varphi$
- מונוטוניות: $\Gamma \vdash \varphi\ and\ \Gamma \subseteq \Gamma'\ \ \Rightarrow\ \ \Gamma' \vdash \varphi$
- טרנזיטיביות: $\Gamma \vdash \varphi\ and\ \Gamma,\ \varphi \vdash \psi\ then\ \Gamma \vdash \psi$

4.2 דרכים להגדיר יחסי נביעה

הדרכים־

1. סמנטית $semantically$:
מתקיים $\Gamma \vdash_S \psi$ אם כל מודל של Γ הוא מודל של ψ לפי הסמנטיקה S.

2. סינטקתית $syntactically$:
$\Gamma \vdash_D \psi$ אם לנכונות של ψ יש הוכחה מתוך Γ עם מערכת ההסקה $(deduction\ system)$ D.

דוגמה: הסמנטיקה של CPL

4.2.1 סמנטיקה של CPL

בסמנטיקה של CPL, ישנם שני ערכי אמת, t ו־ f. טבלאות האמת של הנוסחאות הבסיסיות של $wffs$ מוגדרות כך;

$\tilde{\neg}$	
t	**f**
f	**t**

$\tilde{\to}$	**t**	**f**
t	**t**	**f**
f	**t**	**t**

$\tilde{\wedge}$	**t**	**f**
t	**t**	**f**
f	**f**	**f**

$\tilde{\vee}$	**t**	**f**
t	**t**	**t**
f	**t**	**f**

איך קוראים לקלט שנכנס לנוסחה?

איוולואציה! $(valuation)$

זוהי פונקציה $v : F_{cl} \to \{t,\ f\}$ **שלכל קשר לוגי** $\diamond \in \{\vdash,\ \to,\ \vee,\ \wedge\}$ **מתקיים** $v(\diamond(\psi_1, \ldots \psi_n)) = \tilde{\diamond}(v(\psi_1), \ldots,\ v(\psi_n))$

כלומר, זוהי פונקציה שנותנת ערך מתוך $\{t,\ f\}$ לכל משתנה אטומי של נוסחה.

איוולציואציה v נקראת **מודל** של נוסחה $\psi \in F_{cl}$ אם"ם $v(\psi) = t$. כמו כן איווליואציה v נקראת מודל של $\Gamma \subseteq F_{cl}$ אם"ם הוא מודל של כל איוולציואציה $\psi \in \Gamma$.